

高周波加速の基礎 II

1. はじめに

OHO セミナーの校長（古屋貴章氏）から本稿の依頼を受けたとき、“基礎的な項目を再確認したい”と話しておられた。最近の OHO セミナーで参加者の方から質問を受ける内容は、専門的な内容もあるが、基礎的な内容も多いそうである。専門的な授業を行うと、あまり基礎的な項目に時間が取れないということである。今回私が担当する高周波加速の基礎というものを考えたとき、果たして基礎となるものをどこに置き解説したらいいであろう。電子リングでの高周波加速の基礎と云えばもちろん位相安定性である。これが保証されるからこそ高周波でビームが加速できる。では安定性の概念、つまり“安定”であるということはどういうことであろう。

例えば机の上に卵を置いたとしよう。そっと置けば卵は動かないでじっとしている。ニュートンのように割るのは反則。この静止状態が加速器でいう“安定”と意味が同じだろうか。なにかの拍子に机に足が当たったら、卵は動き始めて机の下に落ちる。つまり外乱があると急に不安定になる。我々の経験でも卵はそのまま机の上に置いたりしない。例えばお椀の中に入れて机の上に置く。こうすることで机が多少動いても卵は落ちない。このお椀と卵をよく見よう。外乱があると卵はお椀の中で振動していることがわかる。外乱で卵は動きだすが、元に戻そうとする力が働き、やがて元に戻る。元に戻ると今度は最初の動きと反対方向へ進もうとするが、やはり元に戻そうとする力が働く。卵はお椀から出ることなく振動している。電子リング加速器は粒子を卵、机をリングと考えると、“安定”であるとは静止していることよりも振動していることのほうに意味がありそうだ。そして加速する粒子を中心軌道に閉じ込めておくには、粒子が発散しないように復元力を持たせて制御し、中心軌道の周りに振動させるのが良いということになる。だから本稿も“振動”から解説することにした。

ここでは電子蓄積リングを取り扱うが、加速器の中で粒子がどのように加速されるのか、という問題を理解する上で重要なことは、複雑な系を単純化すること、つまり簡単なモデルを考えることである。簡単なモデルがイメージできるということ

は、煩雑な数式を暗記する手間が省け、また“ものごと”の本質を直感的に理解する助けとなる。各項目には、できるだけイメージ出来る図を載せた。これは別に押し付けているわけではない。直観的な理解の助けになればと思っている。あなた自身のイメージを作ることが最も重要であるからだ。直観的理解とは言うものの、その境地に到達するのは時間がかかり、また直感的に理解できる文章を書くことはなかなか難しいので、必要な数式はそこそこ使わせて頂く。そのほうが聞てる人も理解しやすいと思うし、なにより筆者にとって楽である。

本稿では皆さんが良く知っている、単振動、位相安定性、共振回路などの復習を含めている。これらは本稿で解説する項目を理解する上で重要であると考えているからである。十分理解されている方には釈迦に説法のようなが少し我慢をお願いする。そののち加速空洞本体の解説、外部高周波源との接続、ビームと空洞の相互作用について“基礎的”な項目について解説していく。最後に KEKB 加速器のような大電流蓄積リング用の加速空洞設計の注意点をまとめておく。それでは、我々が良く理解している単振動について少し復習しよう。

2. 基礎的な項目の復習

2.1. 単振動

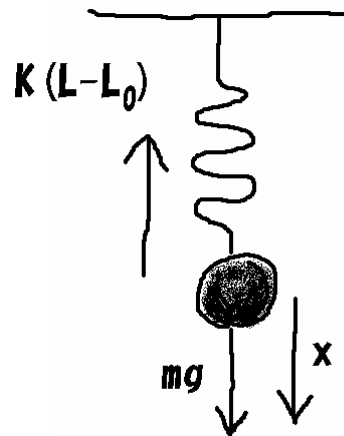


図1 重りの単振動

ここでは単振動をばねのついた重りの運動で考えてみる。図1のように重りは自然長 L_0 のばねでつらわれている。重りに働く重力 mg はばねの伸び L によって相殺され、ある平衡点で静止する。こ

の重りを少し動かすと、振動を始める。重りの運動は平衡点からの伸び（位置変位量） x だけで考えてよい。重りの運動方程式はニュートンの第二法則から、力 F は加速度 $a (= d^2x/dt^2 = \ddot{x})$ に比例し、

$$F = ma$$

となる。 m は慣性質量である。またフックの法則から復元力 F は位置変位量 x に比例する、

$$F = -kx$$

k はばね定数。両者をまとめると、結局、
 $m\ddot{x} = -kx$

という 2 次の微分方程式を解けば重りの運動がわかる。重りは平衡点の周りを角周波数 ω で振動し、角周波数と k 、 m の関係は、

$$\omega^2 = k/m$$

である。このままでは後に記述する加速粒子の運動に対応させにくい。また相対論を考慮した場合不完全なので、もう少し式を変えてみる。力積は運動量の変化に等しいということを力学で習った。つまり、

$$F = \frac{dp}{dt} = \dot{p}$$

この方程式は相対論でも成り立つ。また運動量は速度と慣性質量の積なので、

$$\dot{p} = -kx$$

$$\dot{x} = p/m$$

つまり重りの運動を知るには運動量と位置変位量の変数からなる連立微分方程式を解けばよいということになる。運動量、変位量共に時間的に振動し、その角周波数はもちろん $\omega^2 = k/m$ である。運動量の振幅 p_0 と位置の振幅 x_0 には、

$$p_0 = m\omega x_0$$

の関係がある。また重りが原点にあるときは運動量が最大になり、運動量が 0 となるときは重りの位置が最大となる。運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U を考えると、

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$U = -\int F dx = \frac{1}{2} kx^2$$

となり、両者の和、つまり全エネルギー $E = T + U$ は保存しているので、ポテンシャルエネルギーが最大のときは運動エネルギーが最小、ポテンシャルエネルギーが最小のときは運動エネルギーが最大となる。重りは図 2 のポテンシャルの中に閉じ込められて振動している。

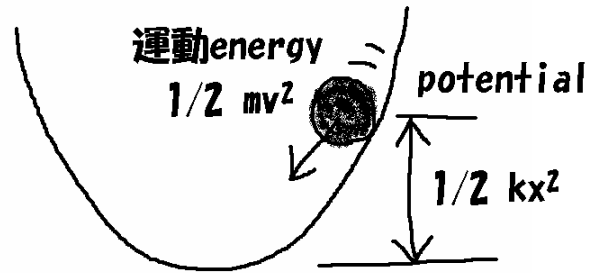


図2 重りの運動

位置変位量 x と運動量 p をプロットすると図 3 のようになり、軸長はそれぞれ、

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

$$p_0 = \sqrt{2Em}$$

の楕円となる。楕円の面積 $2\pi E/\omega$ も保存される。

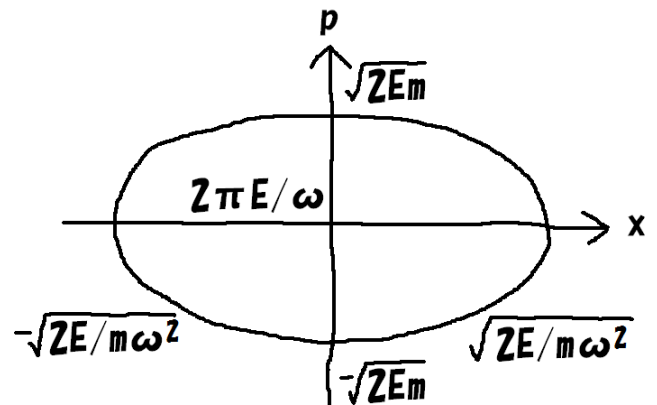


図3 運動量と位置変位量

ちなみに全エネルギー E を x と p の関数 $H(p,x)$ だと考えると、

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \dot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = kx = -\dot{p}$$

となる。

次に重りに摩擦がある場合を考える。図 4 のように摩擦力は重りの速度 v に比例し、運動方向と反対向きに働くとする。運動方程式は、

$$\dot{p} = -kx - \alpha v$$

となり、 x について求めると、

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

である。この解は、

$$x \propto e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \cos \omega't$$

の形をしていて、摩擦がある場合、重りの振動は時定数 $1/\tau = \alpha/2m$ で減衰する。また角周波数も

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

から少し変化する、

$$\omega'^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2m\omega_0^2}\right)^2}$$

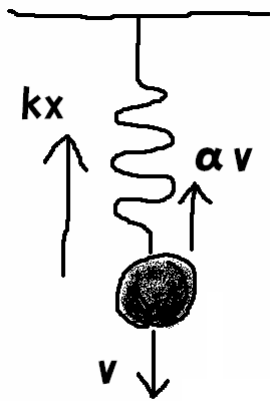


図4 摩擦のある運動

摩擦係数 α が小さければ周波数 ω の変化も小さい。本稿で取り扱う問題では通常この変化は小さいとし $\omega' \sim \omega$ とする。この式をよく見てみると、摩擦係数、つまり外力が dx/dt に比例する場合、振動を減衰させる。後述するが、位相安定性で解説する放射減衰がこの項に当たる。 α の符号によっては振動を発生させることも出来る。加速空洞内で起こる wake 場は加速粒子を発生させる項を持っているので加速空洞の設計にはこの項が重要になる。一方、外力が x に比例するならば、フックの比例定数 k を変えることになるので、角周波数が変化する。最後に x に依存しない項（重力 mg のような項）は単に平衡位置を変えるだけであり、振動に関与しない。このことはビームローディングの章で取り扱う。

ここで少し横道にそれてみる。今まではばね定数が実数であると暗黙のうちに考えてきた。この定数が複素数だったら重りの振動はどのように変化するだろうか。ばね定数 k を、

$$k \rightarrow k + i\beta$$

とし定数の虚数部を β で表す。 $i = \sqrt{-1}$ である。 k が複素数であっても運動方程式が成り立つとすると、

$$m\ddot{x} = -kx - i\beta\dot{x}$$

である。位置変位量 x を $x \propto e^{i\omega t}$ とおいて、周波数に注目すると、

$$\omega^2 = \omega_0^2 + i\beta/m$$

となる。 ω は ω_0 とわずかしかわらなるとすれば $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ として $\Delta\omega$ の1次の項について近似する。このとき、

$$\Delta\omega = i \frac{\beta}{2m\omega_0}$$

である。周波数に虚数部が出てきた。 x は、

$$x \propto e^{-\frac{\beta}{2m\omega_0}t} e^{i\omega_0 t}$$

となる。これは減衰定数 τ が $1/\tau = \beta/2m\omega_0$ であることを表している。このようにばね定数の虚数部は摩擦係数と同じと理解することが出来る。復元力 $-kx$ と摩擦係数 $-\alpha dx/dt$ をまとめて複素ばね定数 k^c を用いて、摩擦つき復元力を $F = -k^c x$ と表すことも可能である。

2.2. 連成振動

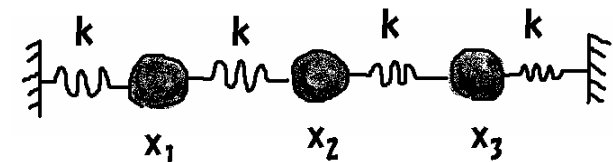


図5 3個の重りの連成振動

今度は連成振動について少し考えてみよう。図5のように3個の重りがばねでつながれて振動する場合を考える。ばね定数は全部等しく k とし、質量も全て m とする。重りの位置をそれぞれ x_1 、 x_2 、 x_3 として運動方程式を求める。

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_3) + k(x_3 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) + kx_3$$

\mathbf{x} を x_1 、 x_2 、 x_3 の成分を持つ行列とし、 $x \propto e^{i\omega t}$ を仮定し \mathbf{x} の2回微分の項を $-\omega^2$ で書き換える。また $\omega_0^2 = k/m$ 、 $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$ とすれば、運動方程式は、

$$\lambda x = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とかける。運動方程式は λ の固有方程式となり、 λ は固有値、 \mathbf{x} は固有関数となる。 \mathbf{x} の各要素が全て0でない有意な解を取るためには行列式が0でなければならないので固有値 λ が定まる。

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

λ が定まれば、それぞれの λ について \mathbf{x} を求める。結果を示すと、

$$\lambda = 2 - \sqrt{2}, \quad 2, \quad 2 + \sqrt{2}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ここで \mathbf{x} については規格化 ($\mathbf{x}^2=1$) せず、要素の最大値を1としている。固有値 λ の小さい順に振動モード1、2、3とする。図6はそれぞれの振動モードでの、それぞれの重りの縦振動の振幅を矢印で示したものである。

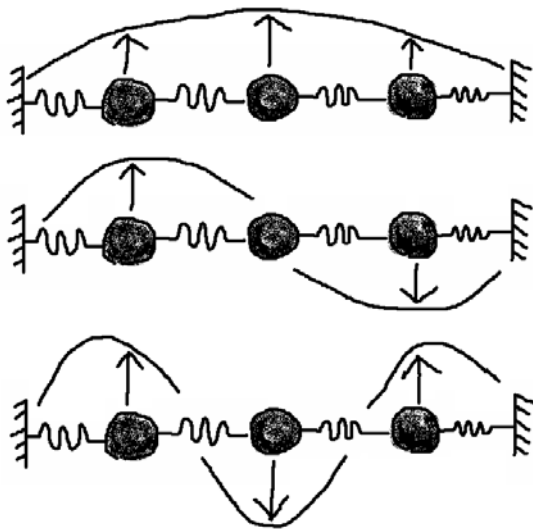


図6 振動モード

お気づきと思うが、それぞれの重りの振幅は、 μ を振動モードの番号、 m を m 番目の重りとする
と、 $x_m = \sin(\frac{\mu\pi}{4}m)$ の形になるとうまくいく。重りの数 M が多くなれば振幅は、

$$\sin(\frac{\mu\pi}{M}m)$$

の形で表せるだろう。それぞれの重りの振動を1つの振幅 \hat{x} を用いて一般化して、

$$x = \hat{x} \sin(\frac{\mu\pi}{M}m) \cos \omega_\mu t$$

$$\omega_\mu^2 = \lambda_\mu \omega_0^2$$

と表すことが出来る。この表記は結合バッチ不安定性の章で扱う。

2.3. 位相安定性の復習

重りの単振動を復習したので高周波加速の位相安定性についても復習しよう。振動は粒子の進行方向(縦方向)である。単振動で取り扱った変数 p (運動量)と x (位置)をそのまま使うことも出来るが、多くの教科書が粒子エネルギー E と時間の遅れ τ を変数に取っているの、ここでもそれに従うことにする。中心エネルギーからのずれを $\delta = (E - E_0)/E_0$ で表す。高エネルギー電子蓄積リングの場合は電子は殆ど光の速度に加速されているので、電子あるいは陽電子は超相対性粒子として取り扱って構わない。エネルギー E と運動量 p の関係は光速 c を用いて $E = cp$ となる。また時間遅れと位置の関係は $x = c\tau$ であるので単振動の場合と本質は全く変わらない。電子リングは円形であり粒子を加速する加速空洞はリング中のごく短い場所に設置されている。簡単のため1台の加速空洞でリング全体の加速を担当する場合を考える。単振動の章で行ったようにエネルギー E 、時間遅れ τ の時間微分を求めることから始めよう。

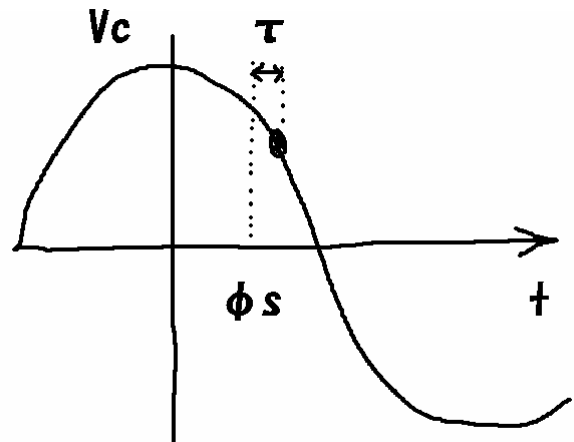


図7 同期位相と時間遅れ

2.3.1. エネルギー収支

加速空洞は高周波電力によって角周波数 ω_{rf} の加速電圧 V_c を発生さる。この中に図 7 のように同期位相 ϕ_s を伴って粒子が飛び込むと加速エネルギーを得る。時間的に τ ほど遅れた粒子が得るエネルギーは、

$$T = eV_c \cos(\omega_{rf}\tau + \phi_s)$$

となる。一方で粒子はリング中を運動している間にエネルギーを失う。その 1 つがシンクロトロン放射光の放射によるもので、もう一つが wake 場によるものである。Wake 場は後述するのでここでは放射光損失についてのみ考察する。リング 1 周した粒子が失う放射エネルギーを U とすると、粒子のエネルギーは 1 周当たり $T-U$ だけ増加する。

$$\Delta\delta = \frac{1}{E_0}(eV_c \cos(\omega_{rf}\tau + \phi_s) - U)$$

粒子がリングを 1 周するのに要する時間（周期）を T_0 とする。粒子の縦振動の周期がリングの周回周期 T_0 よりも大きく、ゆっくりと振動している場合は $\Delta\delta/T_0$ を $d\delta/dt$ のように時間の 1 回微分で近似できるので、

$$\dot{\delta} = \frac{1}{E_0 T_0}(eV_c \cos(\omega_{rf}\tau + \phi_s) - U)$$

一方放射光損失の項は粒子のエネルギーに依存しているが、同期エネルギーから大きくずれていないとすれば、

$$U(\delta) = U(0) + \frac{dU}{d\delta}\delta = U_0 + U'\delta$$

である。ここで U_0 はエネルギー E_0 の同期粒子が高周波加速によって得るエネルギー $eV_c \cos(\phi_s)$ と同じであり、同期粒子のエネルギー収支はゼロとなる。

2.3.2. 周回時間の遅れ

今度は周回時間の遅れについて考えよう。エネルギー E 、速度 v の粒子がリングを一周する時間 T は、リングの周長を C として $T=C/v$ であるので 1 周するのに余計にかかる時間 ΔT は、

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta C}{C} - \frac{\Delta v}{v}$$

である。 $\Delta C/C$ は、

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta p}{p}$$

で表される。この α を momentum compaction factor という。

また、

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p}$$

であるから上式は、

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{\Delta p}{p} = \eta \frac{\Delta p}{p}$$

となり、slippage factor η で表す。超相対論粒子は $\gamma \gg 1$ なので $1/\gamma^2$ の項は無視できて $\eta \sim \alpha$ である。1 周するのに余計にかかる時間は $\Delta\tau$ なので、上記の ΔT を $\Delta\tau$ に書き換え、振動がゆっくりであるとして $\Delta\tau/T_0$ を $d\tau/dt$ と近似すると、

$$\frac{\Delta\tau}{T_0} \approx \frac{d\tau}{dt} = \dot{\tau} = \eta \frac{\Delta p}{p}$$

を得る。加速粒子は超相対論的粒子なので $\delta \sim \Delta p/p$ とし、

$$\dot{\tau} = \eta\delta$$

を得る。

単振動の章で復習したように、粒子の運動は連立微分方程式、

$$\dot{\delta} = \frac{1}{E_0 T_0}(eV_c \cos(\omega_{rf}\tau + \phi_s) - U_0 - U'\delta)$$

$$\dot{\tau} = \eta\delta$$

とかける。この 2 個の連立微分方程式は、

$$\ddot{\tau} = \frac{\eta}{E_0 T_0}(eV_c \cos(\omega_{rf}\tau + \phi_s) - U_0) - \frac{1}{E_0 T_0} U' \dot{\tau}$$

のように 2 次の微分方程式にまとめられ、 $\omega_{rf}\tau$ の項が小さければ、この式は更に

$$\ddot{\tau} = -\frac{\eta}{E_0 T_0} eV_c \sin\phi_s \omega_{rf}\tau - \frac{1}{E_0 T_0} U' \dot{\tau}$$

となる。単振動の章を参考にすると、

$$\text{質量 } m : m = (p_0/c)/\eta$$

$$\text{ばね定数 } k : k/m = \frac{\eta}{E_0 T_0} eV_c \sin\phi_s \omega_{rf}$$

$$\text{摩擦定数 } \alpha : \alpha/m = \frac{1}{E_0 T_0} U'$$

の重りの減衰振動と同じである。

$$\text{角周波数は } \omega_s = \sqrt{\frac{\eta}{E_0 T_0} eV_c \sin\phi_s \omega_{rf}}$$

となり ω_s をシンクロトロン周波数と呼ぶ。

減衰定数は $1/\tau_d = \frac{1}{2E_0T_0} U'$ であるが、もう少し

具体的に表すと、 $1/\tau_d = \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{dE} \Big|_{E=E_0}$ となる。

2.4. 共振回路の復習

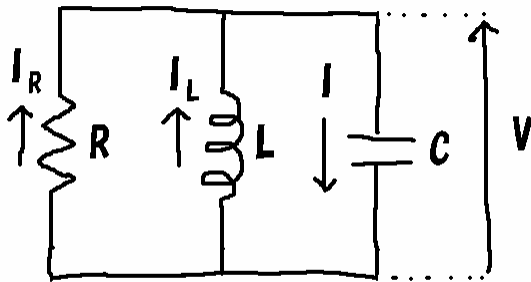


図8 LCR回路

最後に図8のような LCR 共振回路の復習をする。電子回路の得意な人は回路定数を考えてもよいが、ここでは無理やり単振動の方程式と関連づける。先ず用語の定義と基本の数式から始めよう。キャパシタに蓄積される電荷 Q とキャパシタ電圧 V の関係は $Q=CV$ であり、 C を **capacitance** と呼ぶ。キャパシタを流れる交流電流は $I=dQ/dt$ となる。またコイルに誘起される電圧 V は電流の時間変化 dI/dt に比例し $V=LdI/dt$ となり、 L を **inductance** と呼ぶ。抵抗両端の電圧はオームの法則から流れる電流に比例し、 $V=RI$ となり、 R を **resistance** と呼ぶ。今図8のようにキャパシタに流れる電流を I とすると、この電流はコイルと抵抗に分配されて流れる。それぞれを図中のように I_L, I_R と定める。 $I=I_L+I_R$ なので、式をまとめると、

$$\dot{V} = \dot{Q}/C = I/C$$

$$\dot{I} = -V/L - \dot{V}/R$$

となる。 I_L と I_R を I と逆向きの方向に定義したので、電圧の符号が反転していることに注意してほしい。これは単振動の式と全く同じで、 $m=C$ 、 $k=1/L$ 、 $\alpha=1/R$ だと思えば、共振周波数や減衰定数が求まる。まとめると、

$$\omega_c = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\tau = 2RC$$

抵抗 R が十分大きく、周波数のずれが小さいことを仮定しているので注意してほしい。この回路の impedance または admittance は、

$$1/Z = Y = \frac{1}{R} (1 + i\omega_c CR (\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega}))$$

と表せる。

3. 空洞共振器

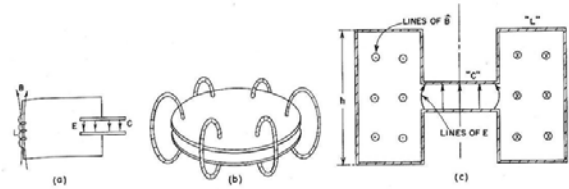


図9 Feynmanの変形図

空洞共振器は LCR 回路と同じと考えられる。何故そうなるのかは Feynman の Lectures on Physics によく示されている (図9)。キャパシタとコイルの回路が変化して最終的に空洞共振器になる様子がよくわかる。空洞のパラメーターを議論するうえで必要な回路の特性を考察しよう。空洞の共振には色々なモードが存在するが、特殊な場合を除き空洞の共振周波数は最も低次のモードが使われる。この章でも加速に使われる1つのモードだけで議論する。加速空洞の基本は図10のようなピルボックス空洞で、TM₀₁₀ モードを用いて中心に加速電場 E_{acc} を発生させる。

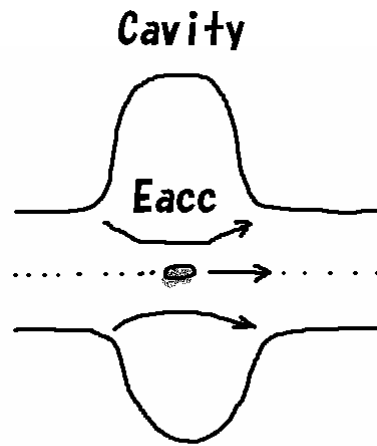


図10 加速空洞

共振回路は LCR で構成されているので抵抗値、インダクタンス、キャパシタンスの値が決まれば回路の特性が決まる。一方空洞にはそのような回路部品で構成されているわけではないので、測定できる、或いは計算できる独立な3個の独立なパラメーターから空洞の特性を決める。その1つは

共振周波数である。この値は精度よく測定できる。LCR回路での表記は $\omega_c^2=1/LC$ である。次に重要なパラメーターがQ値である。Q値の定義は空洞内の電磁エネルギーUに対する空洞壁の損失パワーPの1周期分のエネルギーの比で与えられる。

$$Q = \frac{\omega U}{P}$$

単位時間当たりのエネルギー損失がPなので、

$$P = -\frac{dU}{dt}$$

となり、エネルギーの減衰は、

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{\omega}{Q}t\right)$$

で表され、減衰定数 τ は、

$$\tau = Q/\omega$$

となる。これをLCR回路のパラメーターで現すと、

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

$$P = \frac{1}{2} \frac{V^2}{R}$$

なので、

$$Q = \frac{\omega CV^2}{V^2/R} = \omega CR$$

となりエネルギーの減衰定数は $\tau=CR$ である。超電導空洞のように非常にQ値の高い空洞では空洞エネルギーの減衰からQ値を測定する。

もう一つの重要なパラメーターはシャントインピーダンス R_c である。空洞の R_c は、

$$R_c = \frac{V_c^2}{P}$$

と定義されていてLCR回路のRとは2倍違う。これは空洞を通過するビーム電流が周期 T_0 のパルスとなっているため、その高周波成分の振幅が $2I_0$ となることに由来する。ビーム電流の高周波成分については後ほど詳しく解説する。混乱を避けるためRの表示はLCR回路の抵抗Rを示し、 R_c の表示は空洞のシャントインピーダンスを示すこととして区別する。

V_c は空洞が作る加速電圧であり、粒子が受ける高周波電場を粒子の進行方向に積分した値となる。

$$V_c = \int dz E_z(z) e^{ikz}$$

ここでkは波数($k=\omega_{rf}/c$)であり、粒子は光速で空洞を通過している。いま加速電場 E_0 が加速ギ

ャップdの間で一定でその他の区間で0となる空洞を考えよう。ビームが受ける加速電圧 V_c は、

$$\begin{aligned} V_c &= \int_{-d/2}^{d/2} dz E_0 \cos(kz) \\ &= E_0 d \frac{\sin(kd/2)}{kd/2} \\ &= V_0 T \end{aligned}$$

となり、電圧 $V_0=E_0d$ よりファクターTだけ小さくなる。このTをtransit time factorと呼ぶ。加速ギャップは加速周波数で決まる波長の半分が最も効率がよい。KEKBの509MHz加速空洞は大体250cmのギャップを持っている。

最後にR/Qについて解説する。先に取り上げたシャントインピーダンス R_c は空洞電圧 V_c と空洞壁損失 P_c の比なので空洞単体での測定が出来ない。電圧 V_c を測定するにはビームを空洞に通してみないと求められない。また P_c は空洞の表面抵抗に依存するので、同じ形状の空洞でも表面抵抗の違いによっては値が異なる。一方R/Qは蓄積エネルギーと加速電圧の比なので、

$$R/Q = \frac{V^2}{\omega U}$$

電磁場解析コードを用いて簡単に求めることが出来き、空洞の表面抵抗によらない。空洞の形状を決めると一義的に定まる。常伝導空洞の設計ではR/Qを高くして加速電圧の効率を上げることが一般的である。

4. 空洞と外部高周波源との接続

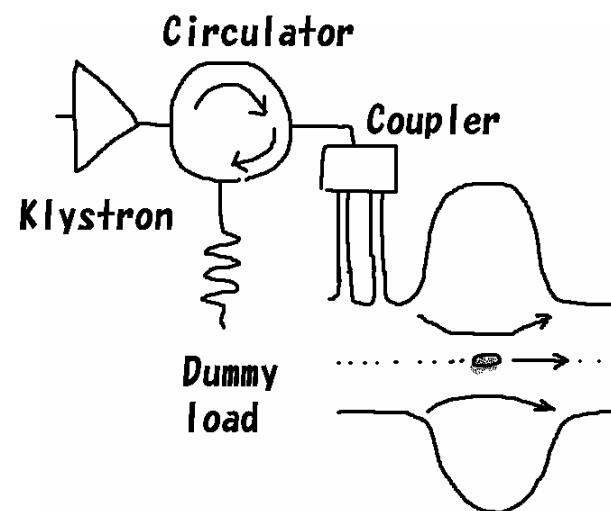


図11 外部高周波源

空洞は図 11 のように外部高周波源に入力カップラーを通して接続される。高周波電力源はクライストロンであり導波管を通して空洞の入力カップラーに接続される。空洞から反射された高周波電力は circulator でダミーロードに導かれ全て熱に変換して吸収する。このシステムを回路図で表せば図 12 のように巻線比 1:n のトランスで接続された回路となる。

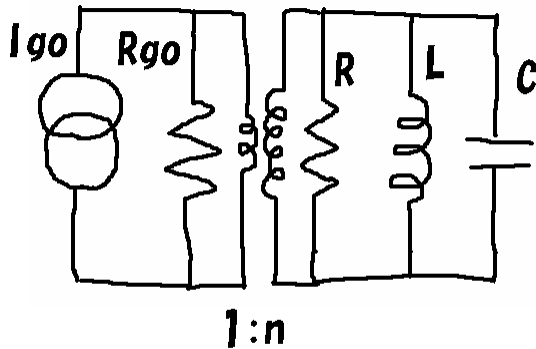


図 12 外部回路接続の等価回路

このトランスが入力カップラーに相当する。I_{g0} は周波数 ω_{rf} の電流源、R_{g0} は導波管の特性インピーダンスである。この回路はトランスを省いて図 13 のように表せる。

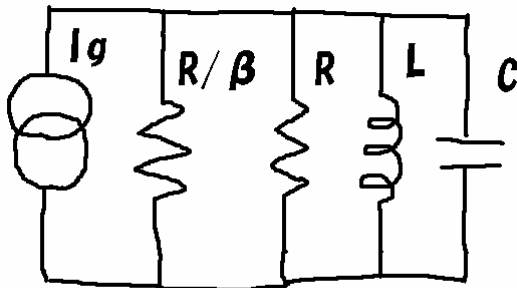


図 13 トランスのない等価回路

元の電流や特性インピーダンスは I_g=I_{g0}/n, R_g=R_{g0}×n² と変換される。変換された特性インピーダンスとシャント抵抗 R との比 β を入力結合定数と呼び R_g=R/β と表記する。外部電流が無く、空洞が自由振動をしているときは、空洞の蓄積エネルギーは空洞内の電力損失のほかに外部に抜け出てダミーロードに吸収される電力損失があり、両者の比が β となる。そのため減衰定数は変化し、このときの Q 値を loaded Q (Q_L) と呼ぶ。無負荷での Q 値は unloaded Q (Q₀) と呼び両者は、

$$Q_L = \frac{Q_0}{1+\beta}$$

の関係がある。

さて図 13 の回路の impedance Z あるいは admittance Y は、

$$1/Z = Y = \frac{1+\beta}{R} \left(1 + iQ_L \left(\frac{\omega_{rf}}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega_{rf}}\right)\right)$$

とかけるので、空洞に発生する電圧 V_g は

$$V_g = \frac{R}{1+\beta} \frac{I_g}{1 + iQ_L \left(\frac{\omega_{rf}}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega_{rf}}\right)}$$

となる。空洞を励振する周波数は必ずしも空洞の共鳴周波数 ω_c と同じ必要はない。むしろ後述する理由でわざと違っている。ここで tuning angle ψ を導入すると数式が簡素化される。Tuning angle は離調度をあらわすパラメーターで、

$$\tan \psi = -Q \left(\frac{\omega_{rf}}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega_{rf}}\right)$$

と定義され、これを用いて、

$$V_g = \frac{R}{1+\beta} \cos \psi e^{i\psi} I_g$$

となる。

さて、実際に問題となるのは空洞電圧 V_g を発生させるにはいくらの入力 RF パワー、P_g が必要かということである。入力パワー P_g と空洞電圧 V_g の関係を求めるには伝送線の特性を考慮しなければならない。

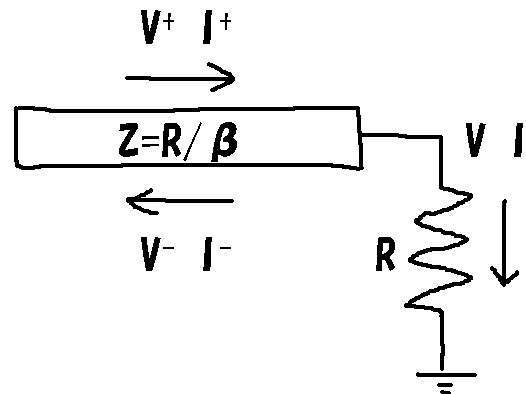


図 14 伝送線の反射と透過

図 14 のように空洞方向に進む進行波は空洞と伝送線のインピーダンスの違いで反射を受ける。進行波の電圧、電流の振幅を V⁺、I⁺ とし反射波のそれを V⁻、I⁻ とすると、

$$V = V^+ + V^-$$

$$I = I^+ - I^-$$

となる。ここで V 、 I は空洞の電圧、電流の振幅である。簡単のため ω_{rf} は ω_c に同調しているとすれば LC 回路は考える必要が無く、空洞のインピーダンスを R と取ることが出来る。進行波、反射波のインピーダンスは R/β なので、

$$I = \frac{2}{1+\beta} I^+$$

となり

$$P_c = \frac{1}{2} R I^2 = \frac{1}{2} R \left(\frac{2}{1+\beta} I^+ \right)^2$$

となる。一方

$$P_g = \frac{1}{2} \frac{R}{\beta} I^{+2}$$

なので

$$P_c = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} P_g$$

となる。このときの空洞電圧 V_{gr} は、入力パワー、空洞のシャント抵抗 $R_c (=2R)$ を用いて、

$$V_{gr} = \sqrt{R_c P_c} = \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} \sqrt{R_c P_g}$$

となる。detune 時の空洞電圧のは、tuning angle を用いて、

$$\tilde{V}_g = \tilde{V}_{gr} \cos \psi e^{i\psi}$$

と表せる。ここで phasor 表記を導入した。phasor は振動を $V = \tilde{V} e^{i\omega_{rf}t}$ と表記したとき \tilde{V} は $e^{i\omega_{rf}t}$ の項の振幅と位相を表すもので phasor と呼ばれている。変数が全て $e^{i\omega_{rf}t}$ なる項で振動するとき phasor だけで議論出来るので便利である。 V_g の phasor 表記は I_g の位相を 0 に取ると V_{gr} は I_g と同位相なので図 15 のようになる。

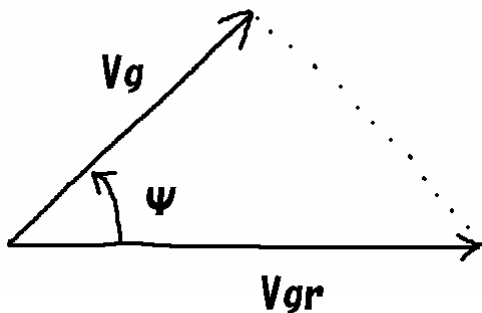


図 15 外部励起電圧のphasor表示

5. 空洞とビームの相互作用 I (ビームローディング)

5.1. ビーム誘起電圧

空洞の中をビームが通過すると様々な周波数の電磁場を誘起する。これは wake 場と呼ばれている。この章で取り上げるビームローディングは周波数 ω_{rf} のものだけを問題とする。前章で取り扱ったと同じ手法でこの問題を考える。図 16 は空洞中をビーム電流 I_b が通り抜ける場合の等価回路図である。

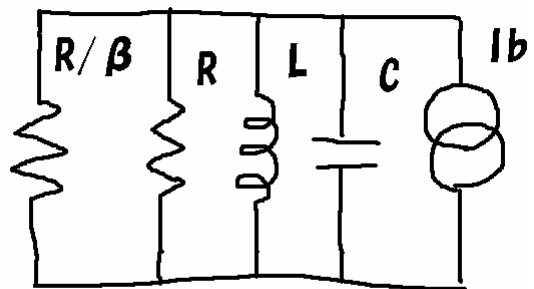


図 16 ビーム誘起電圧の等価回路

簡単のため外部電力の供給はないとする。ビーム電流は周回周期 T_0 を持つパルスなので、デルタ関数を用いると、

$$I(t) = q \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

と表すことが出来る。ここで q はビームバンチの全電荷である。この電流は周期 T_0 の周期関数なので \cos 関数展開できる。

$$I(t) = I_0 + 2I_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t)$$

ω_0 は周回周波数 ($2\pi/T_0$)、 $I_0 = q/T_0$ は直流電流表記であり、各周波数成分の振幅は $2I_0$ となっている。この中でビームローディングに寄与するのは n がハーモニック数 h と一致するとき、すなわち $h\omega_0 = \omega_{rf}$ であるので、電流を、

$$I_b = 2I_0 e^{i\omega_{rf}t}$$

と表す。前章と同じ取り扱いをすれば、

$$V_b = \frac{R}{1+\beta} \cos \psi e^{i\psi} I_b$$

となり、ビームによって誘起される電圧が求まる。ビーム電流 I_b の位相を 0 として phasor 表記にすると、

$$\tilde{V}_b = \tilde{V}_{br} \cos \psi e^{i\psi}$$

$$V_{br} = -\frac{R_c I_0}{1 + \beta}$$

となる。phasor 表記の場合 V_{br} の方向は必ず I_b と逆向きである。

上記のモデルは簡単かつ明瞭であるが、パルス状のビーム電流を交流として取り扱うので少し理解し難いかも知れない。ビーム電流による誘起電圧をもう少し直感的に求めてみたい。

いま、全電荷 q の電流が瞬時に図 16 の回路に流れたとするとキャパシタに電荷 q が蓄積され電圧 $V_{b0}=q/C$ が発生する。蓄積されるエネルギーは $1/2CV_{b0}^2$ である。一方ビームが感じる電圧を V_s とすると、ビームはこの電圧で減速されるので qV_s のエネルギーを失う。両者は等しいので $V_s=1/2V_{b0}$ となりビームは自分が作る電圧の半分で減速される。このことは fundamental theorem of beam loading と呼ばれている。

さて、この電圧 V_{b0} は周波数 ω_c で振動しながら減衰定数 T_f で減衰していく。電圧の減衰なので $T_f = 2Q/\omega_c$ となる。周期 T_b 後にはまたビームバンチが来て、瞬時に電流が流れるので、新たに電圧 V_{b0} が誘起される。これらの電圧を加えていけばビーム電流による誘起電圧が求まる。これを phasor 表示で表すと、

$$\tilde{V}_b = \tilde{V}_{b0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nT_d/T_f} e^{i(\omega_c - \omega_{rf})nT_d} + \alpha \right)$$

ここで、はじめの exponential 項は振動の減衰を表し、2 番目の項は振動の周波数が ω_c であり ω_{rf} と少し違うためどんどん位相がずれていくことを表している。また α は、ビーム通過直後は 1 で通過直前だと 0 となるバンチ通過タイミングでの補正項を示している。一方ビームが通過中に感じる自分自身の誘起電圧は $1/2V_{b0}$ である。減衰定数 T_f とバンチ周期 T_d の比を $\tau = T_d/T_f$ とし、 $\omega_c - \omega_{rf}$ も tuning angle で表すと、

$$\omega_c - \omega_{rf} = \frac{\omega_c}{2Q} \tan \psi = \frac{\tan \psi}{T_f}$$

となるので、 Σ の項は

$$\Sigma \rightarrow \frac{1}{1 - e^{-\tau} e^{i\tau \tan \psi}} - 1$$

となる。バンチ周期 T_b が減衰定数 T_f より十分小さいならば、この項はさらに、

$$\frac{1}{1 - e^{-\tau} e^{i\tau \tan \psi}} \approx \frac{1}{\tau(1 - i \tan \psi)} = \frac{1}{\tau} \cos \psi e^{i\psi}$$

と近似できる。この項が大きいので補正項 α は無視できて、

$$\tilde{V}_b = \frac{\tilde{V}_{b0}}{\tau} \cos \psi e^{i\psi}$$

となる。 V_{br} を

$$|V_{br}| = \frac{V_{b0}}{\tau} = \frac{q}{T_d} \frac{2Q_L}{C\omega_c} = I_b \frac{2R}{1 + \beta}$$

とすると V_{br} と I_b とは逆向き、つまり位相差 180° をもっているのを、

$$\tilde{V}_b = \tilde{V}_{br} \cos \psi e^{i\psi}$$

$$V_{br} = -\frac{R_c I_b}{1 + \beta}$$

となる。phasor 図を図 17 に示す。

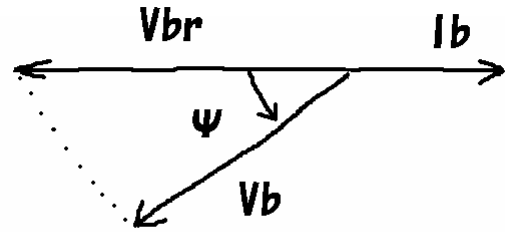


図 17 ビーム誘起電圧のphasor表示

5.2. 空洞の電圧

前の 2 つの章で解説したように空洞の電圧は駆動電圧 V_g とビーム電流による誘起電圧 V_b の和によって決まる。等価回路で示すと図 18 になる。

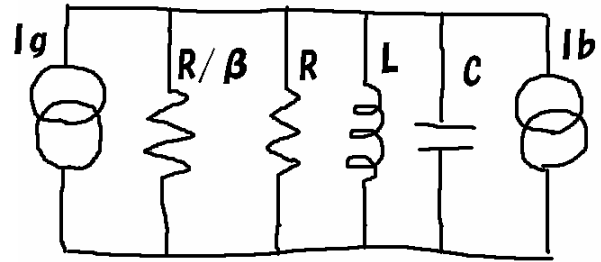


図 18 空洞の等価回路

このことを phasor で解説する。図 19 を見ていただきたい。ビーム電流の phasor 位相を 0 に取ると tune 時のビーム誘起電圧 V_{br} は位相 180° の位置にある。detune したときの誘起電圧 V_b はそれより tuning angle 分ずれたところにあり、振幅も $\cos \psi$ ほど小さい。電子蓄積リングでは tuning

angle を負に取るので、図中のような誘起電圧となる。一方駆動電圧はビーム電流と適切な位相差を持ち駆動される。ここで tune 時の駆動電圧 V_{gr} と空洞の電圧 V_c との位相差を loading angle、 Φ_L で定義する。detune 時の駆動電圧 V_g は位相差 ψ の位置にあり、振幅 $\cos\psi$ だけ小さい。両者の和で空洞の電圧 V_c が決まる。また空洞の電圧 V_c はビーム電流と同期位相 Φ_s を持っている。運転に際し実際に制御するものは同期位相、loading angle、 V_c なので必要な関係式を求めてみよう。まず電圧の和の式は、

$$V_c \cos \phi_s = V_b \cos(\pi + \psi) + V_g \cos(\phi_s - \phi_L + \psi)$$

$$V_c \sin \phi_s = V_b \sin(\pi + \psi) + V_g \sin(\phi_s - \phi_L + \psi)$$

ここで全体の位相を $-(\phi_s + \psi)$ だけ回転させると、

$$V_c \cos \psi = -V_b \cos \phi_s + V_g \cos \phi_L$$

$$V_c \sin \psi = -V_b \sin \phi_s + V_g \sin \phi_L$$

これより、

$$V_c = -V_{br} \cos \phi_s + V_{gr} \cos \phi_L$$

$$\tan \psi = \frac{-V_b \sin \phi_s + V_g \sin \phi_L}{V_c \cos \psi}$$

$$= -\frac{V_{br}}{V_c} \sin \phi_s + \frac{V_{gr}}{V_c} \sin \phi_L$$

を得る。

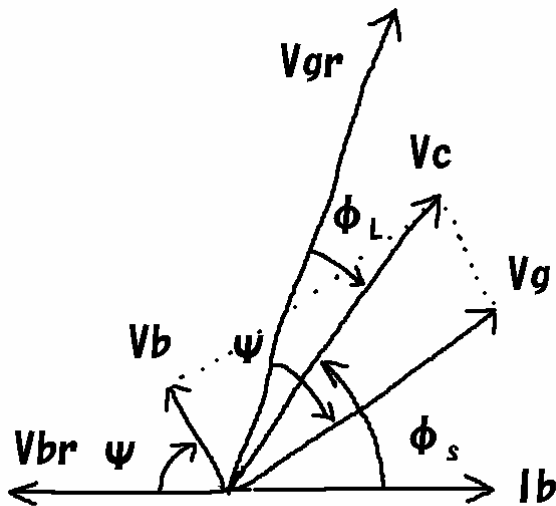


図19 空洞電圧のphaser表示

V_c を駆動するために必要な入力パワーは

$$P_g = \frac{1}{\cos^2 \phi_L} \frac{(1 + \beta)^2 (V_c + V_{br} \cos \phi_s)^2}{4\beta R_c}$$

で与えられる。あるビーム電流を加速する場合、結合定数 β を適切に取れば入力パワーを最小に出来る。これは $dP_g/d\beta=0$ によって与えられる。loading angle を 0 とした場合は $\beta=1+P_b/P_c$ のとき最も入力パワーが小さい。加速電圧、加速電流が決まると結合定数は最小入力パワーとなるよう設計されるのが一般的である。結合定数をこのように取った場合、tuning angle は $\tan\psi = -(V_{br}/V_c)\sin\Phi_s$ となり、detune 量 Δf は

$$\Delta f = \frac{\omega_c - \omega_{rf}}{2\pi} = -\frac{I_b \sin \phi_s}{2V_c} (R/Q) f_{rf} = -\frac{P_b \tan \phi_s}{4\pi U}$$

となる。ビームパワーが大きい加速器は通常空洞を detune し、入力パワーを最小にして運転している。ビーム電流が大きくなると detune 量も増えていき、ついには周回周波数 $f_0 = \omega_0/2\pi$ を越えてしまう。周回周波数を越えると次に解説するビーム不安定性を起こすようになるので detune 量はあまり大きく出来ない。特に大電流運転を行う KEKB 加速器では問題となる。detune 量を押さえるためには R/Q または V_c/U の比を小さくする必要がある。この比が小さいとビーム電流が誘起する電圧が小さくなるからである。KEKB 加速器では常伝導空洞 ARES と超伝導空洞 SCC の 2 種類のタイプの加速空洞が存在する。超伝導空洞はもともと高電圧で蓄積エネルギーも大きい。KEKB 運転に際しても detune 量は 17 k H 程度である。一方 ARES 空洞も加速空洞とエネルギー貯蔵空洞を組み合わせると大蓄積エネルギーを可能にしている。

6. 空洞とビームの相互作用 II (結合バンチ不安定性)

ビームと空洞の相互作用でもう一つ重要なことはビーム不安定性の問題である。ビームが空洞のような構造を持つものの中を通過すると wake 場を作る。この wake 場はビームに影響し、余分な運動を与えるので出来る限り余計な構造物は導入しないほうがよい。実際にはリング中の最も大きな構造物は空洞本体である。更に空洞には加速モードだけでなく様々な高周波モードがあり、ビームにより簡単に励起され、ビーム不安定性の原因となる。また wake 場は最終的に構造体のどこかに吸収され発熱する。この発熱を取り除かない限り大電流運転は出来ない。この章では空洞に係るビーム不安定性について解説する。ビームが wake 場を作り粒子の運動に影響を与えると

き、粒子はビームが作り出す電圧によって加速される。この電圧が求まれば運動方程式を解ことが可能となる。

6.1. 単バンチ

ビームが作る電圧はビーム電流と空洞のインピーダンスの積によって与えられる。空洞は LCR 回路と同じであるから周波数成分で解析するほうが取り扱いは簡単になる。空洞のようにインピーダンスが解っている場合、電流、電圧を周波数成分に Fourier 変換して計算する。先ずビームバンチが $q=Ne$ の電荷を持つ1つの粒子として取り扱える場合を考える。バンチ電流は図 20 のように周回周期 T_0 と時間遅れ τ を用いて、

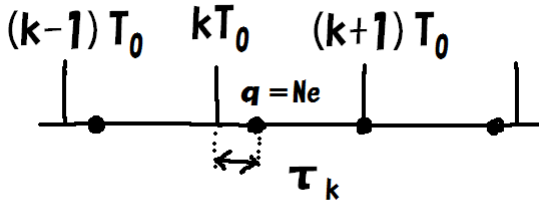


図20 ビーム電流のタイミング

$$I(t) = Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 - \tau_k)$$

と表せる。その Fourier 変換は、

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int dt e^{-i\omega t} I(t)$$

なので、

$$I(\omega) = \frac{Ne}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikT_0\omega} e^{-i\tau_k\omega}$$

となる。ここで時間遅れ τ は振幅を $\hat{\tau}$ 、周波数を Ω として、

$$\tau = \hat{\tau} e^{i\Omega t}$$

のように振動しているとする。この時間遅れが小さいとすると、近似的に、

$$I(\omega) = \frac{Ne}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikT_0\omega} (1 - i\hat{\tau}\omega e^{i\Omega kT_0})$$

と表せる。また poisson の和公式

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikT_0\omega} &= 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(T_0\omega - 2\pi p) \\ &= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0) \end{aligned}$$

を用いれば結局 Fourier 変換は

$$I(\omega) = I_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - p\omega_0) - i\omega\hat{\tau}\delta(\omega - \Omega - p\omega_0)]$$

$$I_0 = \frac{Ne}{T_0}$$

となる。 I_0 は直流ビーム電流である。 τ が Ω で振動しているので sideband : $p\omega_0 + \Omega$ の成分が出てくる。この成分は τ の振幅と周波数に比例する。電圧は電流と空洞のインピーダンスの積 $V = -IZ$ である。この電圧を Fourier 逆変換し電圧の時間依存性を求める。

$$V(t) = \int d\omega e^{i\omega t} V(\omega)$$

ここで電圧を τ に依存しない項 V_1 と依存する項 V_2 に分離する、

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

$$V_1(t) = -I_0 \int d\omega e^{i\omega t} Z(\omega) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0)$$

$$V_2(t) = iI_0 \int d\omega e^{i\omega t} Z(\omega) \omega \hat{\tau} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0 - \Omega)$$

となる。 V_2 についてさらに計算すると、

$$V_2(t) = i \int d\omega e^{i\omega t} I_0 \omega \hat{\tau} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0 - \Omega) Z(\omega)$$

$$= iI_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \Omega) e^{ip\omega_0 t} e^{i\Omega t} \hat{\tau} Z(p\omega_0 + \Omega)$$

$$= iI_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\omega_0 t} (p\omega_0 + \Omega) \tau Z(p\omega_0 + \Omega)$$

粒子が受ける電圧は時間が $t=nT_0$ の時なので V_1 と V_2 は結局

$$V_1 = -I_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z(p\omega_0)$$

$$V_2 = iI_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \Omega) \tau Z(p\omega_0 + \Omega)$$

と書ける。このうち V_1 は粒子エネルギーにも時間遅れにも依存しない項で、単に振動の平衡点が変わるだけである。また $p\omega_0 = \omega_{rf}$ の時は beam loading の章で取り上げた誘起電圧そのものである。第2項は時間遅れ τ に依存し、振動を変化させる。ここで位相安定性の復習を思い出そう。 V_w をいま求めた wake 電圧とし、運動方程式を書くと、

$$\dot{\delta} = \frac{1}{E_0 T_0} (eV_c \cos(\omega_{rf} \tau + \phi_s) + eV_w)$$

$$\dot{\tau} = \eta \delta$$

放射損失の項は本質的ではないので今は考えない。また wake 電圧 V_1 も考えないことにする。 τ の微小振動に着目して 2 次の微分方程式にまとめると

$$\ddot{\tau} = -\omega_s^2 \tau + \frac{\eta}{E_0 T_0} eV_2$$

今 τ の振動数 Ω が ω_s とあまり変わらない、つまり $\Omega = \omega_s + \Delta \Omega$ と考えると、 $\Delta \Omega$ は、

$$\begin{aligned} \Delta \Omega &= -\frac{\eta e}{2\omega_s E_0 T_0} V_2 \\ &= -i \frac{\eta e I_0}{2\omega_s E_0 T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) Z(p\omega_0 + \omega_s) \end{aligned}$$

と表せる。 τ の振動は $\exp(i\Omega t)$ なので Z の実数部が減衰項または発散項を与える。この項を growth time τ_g で表す。

$$1/\tau_g = \frac{\eta I_0}{4\pi \nu_s E_0 / e} \sum_{p=1}^{\infty} [\omega_p^+ Z_r(\omega_p^+) - \omega_p^- Z_r(\omega_p^-)]$$

$$\omega_p^+ = (p-1)\omega_0 + \omega_s$$

$$\omega_p^- = p\omega_0 - \omega_s$$

この式を見て分かるように synchrotron side band の高い方が発散に寄与し、低いほうが減衰に寄与する。図 21 のようにインピーダンスが急激に変わると growth rate が大きくなる場合があり、不安定性を引き起こす。空洞の共鳴モードのインピーダンスがこれに相当する。

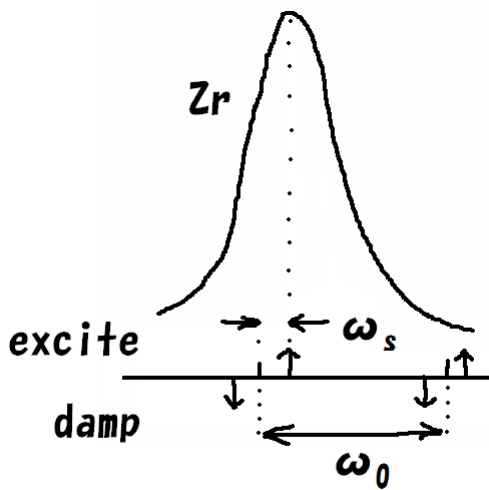


図21 インピーダンスとサイドバンド

6.2. 多バンチ

大電流電子蓄積リングでは電流を多く積み込むため多バンチで運転される。次に多バンチの効果を解説する。この場合先行するバンチが作る wake 場が後方のバンチに影響を与え、バンチ全体が振動することになる。

今リングを周回するバンチ数が M 個あったとする。 M 個のバンチは互いに影響しあい、バンチ全体の運動は丁度ばねで連結された M 個の質点の運動と考えることが出来る。全体の振動は M 個の振動モードに区別され、 μ 番目のモードの振動子間の位相差は $2\pi \mu / M$ である。これは両端を固定した連成振動と違って、 M 個目のバンチと 1 番目のバンチも結合しているから連続性から位相は 2π の整数倍となるためである。ちょうどボーアの量子条件に相当する。

前章で解説した単バンチの計算をそのまま多バンチに応用できるが、多バンチの場合はバンチ間の連成振動を考慮する必要がある。ビーム電流はバンチの電荷を Ne として、

$$I(t) = Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M \delta(t - kT_0 - mT_0/M - \tau_{\mu,m,k})$$

と表される。ここで $\tau_{\mu,m,k}$ は μ 番目のモードで、振動数を Ω_{μ} とする、 k 番目の周回の m 番目のバンチの時間遅れを表す。 τ は、

$$\tau = \hat{\tau}_{\mu} e^{i2\pi\mu m/M} e^{i\Omega_{\mu} t}$$

のように Ω_{μ} で振動している。単バンチの場合で計算した方法と同じ様に計算していく。この電流の Fourier 変換は単バンチと同様に τ が小さいとして、

$$I(\omega) = \frac{Ne}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^M e^{-i\omega(Mk+m)T_0/M} (1 - i\omega\tau_{\mu,m,k})$$

と近似できる。一方 τ の項は、

$$\tau_{\mu,m,k} = \hat{\tau}_{\mu} e^{i2\pi\mu m/M} e^{i\Omega_{\mu}(Mk+m)T_0/M}$$

振幅の位相は、

$$e^{i2\pi\mu m/M} = e^{i2\pi\mu(\frac{Mk+m}{M}-k)} = e^{i\mu\omega_0(Mk+m)T_0/M}$$

となり、 τ の振動は、

$$\tau_{\mu,m,k} = \hat{\tau}_{\mu} e^{i(\Omega_{\mu} + \mu\omega_0)(Mk+m)T_0/M}$$

で表せる。単バンチの場合と比較すると、図 22 のように、周期 T_0 はバンチが M 個になったので T_0/M になったように見える。また τ の振動数 Ω は、 T_0/M の間に次のバンチの位相差、 $2\pi \mu / M$ ほど位相が変わるので $\Omega + \mu \omega_0$ ほど高くなったよ

うに見えることになる。二重の Σ は $Mk+m$ を新たに k' とすることで1重にできる。

$$I(\omega) = \frac{Ne}{2\pi} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} e^{-ik' \frac{T_0}{M}} (1 - i\omega \hat{\tau}_\mu e^{i(\Omega_\mu + \mu\omega_0)k' \frac{T_0}{M}})$$

Poisson の和公式を用いて、

$$I(\omega) = Ne \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\frac{T_0}{M}\omega - 2\pi p\right) - i\omega \hat{\tau}_\mu \delta\left(\frac{T_0}{M}(\omega - (\Omega_\mu + \mu\omega_0)) - 2\pi p\right) \right]$$

と書ける。さらに、

$$I(\omega) = \frac{MNe}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\omega - Mp\omega_0) - i\omega \hat{\tau}_\mu \delta(\omega - \Omega_\mu - \mu\omega_0 - Mp\omega_0) \right]$$

と書ける。さて wake 電圧 V は単バンチの時と同様にして、 V_1 と V_2 に分けると、

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t)$$

$$V_1(t) = -I_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{iMp\omega_0 t} Z(Mp\omega_0)$$

$$V_2(t) = iI_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{i((Mp+\mu)\omega_0)t} \omega_{p\mu}^+ \tau Z(\omega_{p\mu}^+)$$

$$\omega_{p\mu}^+ = (Mp + \mu)\omega_0 + \Omega_\mu$$

である。バンチの感じる電圧は、

$$V_1 = -I_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z(Mp\omega_0)$$

$$V_2 = iI_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega_{p\mu}^+ \tau Z(\omega_{p\mu}^+)$$

となる。この電圧を運動方程式に入れて growth rate を求める。このときも Ω_μ はあまり ω_s と変わらないとする。

$$1/\tau_s = \frac{\eta I_0}{4\pi v_s E_0 / e} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\omega_p^+ Zr(\omega_p^+) - \omega_p^- Zr(\omega_p^-) \right]$$

$$\omega_p^+ = (M(p-1) + \mu)\omega_0 + \omega_s$$

$$\omega_p^- = (Mp - \mu)\omega_0 - \omega_s$$

となる。growth rate には M 個 ($\mu=1\sim M$) の独立なモードが存在する。

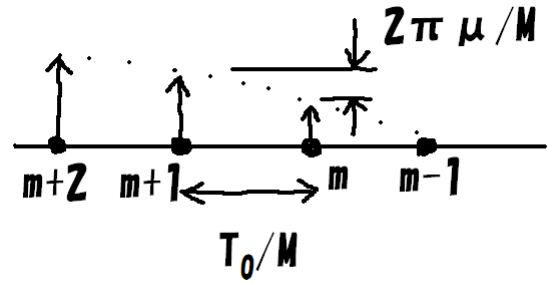


図22 バンチタイミングと振動の位相差

7. 大電流運転用の加速空洞設計の注意点

以上解説したように大電流電子リングにおける加速空洞の設計にはいくつかの注意点がある。列挙すると、

- 1) ビームローディング (detune)
- 2) 結合バンチ不安定性 (加速モード、HOM)
- 3) HOM パワー

である。

detune 量については先に述べたが、detune 量が大きくなって周回周波数を越えると $(h-1)\omega_0$ 次の sideband の excite 項が加速モードに当たり強いビーム不安定性を引き起こす。detune 量は周回周波数を越えられない。

空洞は加速モードだけでなく、さまざまな高周波モードを持っている。高周波モードの impedance が高いと結合バンチ不安定性の excite 項が大きくなり、やはりビーム不安定性を引き起こす。今までは縦振動のみについて解説してきたが空洞の高周波モードには横振動を励起するモードも存在する。同様に横振動結合バンチ不安定性も存在する。例えば TM110 モードはビームをキックするモードで R/Q も高い。結局大電流運転で使用される加速空洞は、加速モード以外のモードについて impedance あるいは Q 値を十分下げて、結合バンチ不安定性を起こさないように設計することが重要である。空洞の高周波モードの Q 値を下げるため、遮断周波数の低い大きなビームパイプをつけることや、WGを取り付けて空洞から高周波寄生モードを取ることが行われる。これらのモードは最終的にRF吸収体によって吸収され、モードの Q 値を下げている。KEKB加速器に使われる空洞の高周波寄生モードの Q はおよそ100程度である。

最後にもう一つ重要なことはHOMパワーの吸収である。ビームが空洞を通過すると wake 場を発生するが、高い周波数成分のRFパワー (HO

Mパワー)が多くを占めており、バンチが短くなるほど大きい。ビーム電流値 I に対する HOM パワーの値は loss factor、 k で与えられ、全 HOM パワー P はバンチ電荷を q として

$$P = kqI$$

となる。HOM パワーは放置すると機器の温度を上昇させ、やがて熱的破壊に到るので、RF 吸収体によって吸収させる。KEKB 加速器のような短バンチ運転の場合、バンチ長 6mm で超伝導加速空洞の loss factor は約 1V/pC となる。ビーム電流 1 A、1000 バンチ運転を仮定すると HOM パワーは 10kW となる。この HOM パワーはビームパイプに取り付けられた水冷の HOM ダンパーによって吸収される。電流増強を行う場合 HOM パワーの吸収が電流制限を与える場合もある。

8. 終りに

本稿は高周波加速の基礎、特に電子蓄積リングについてまとめた。要点を絞って論じたつもりである。ここで取り上げている項目が全てではないので、セミナー参加者の方には参考文献を紹介しておく。

文献[1]は皆さんよくご存じの Feynman 物理である。本稿では LC 共振回路から空洞共振器への変形図をそのまま使わせて頂いた。電磁気学の一般的な教科書なので、ご存じない方は 1 度読まれてみてはどうだろう。文献[2]は Berkeley physics course 教科書シリーズの振動について取り扱ったものである。振動だけを論じて 1 冊の厚い本になっているところに驚くと同時に学問の深さを感じる。内容は決して難解ではないが多くの示唆に富む教科書である。このコースには力学の教科書もある。

高周波加速の“基礎的”な項目は、今まで多くの諸先輩方が OHO セミナーで講義されている。特に参考にさせて頂いた講義を紹介していこう。文献[3]は高田先生の緻密な講義である。本稿では等価回路で全てを論じているが、高田先生の本稿には、なぜ等価回路として考えてよいのか、ということが電磁気学や数学を駆使して丁寧に論じてある。もっと深く知りたい方は読まれるとよい。文献[4]は影山先生の講義である。振動を扱って示唆に富む内容である。本稿では紹介できなかったが大電流加速を可能にした KEKB-ARES 空洞の基礎が載っている。文献[5]は陳先生の wake 場に関する講義である。本稿の結合バンチ不安定性の章をまとめるのに参考にした。wake

場の導出の仕方や、様々な不安定性について論じてある。

OHO セミナー以外でも諸先輩方の講義のまとめを見ることができる。文献[6]は中国で開催されたアジア加速器スクールでの赤井先生の講義で、電子蓄積リングの高周波システムの全てのことが論じられている。本稿ではほとんどの項目について参考にさせて頂いた。文献[7]も同スクールでの古屋先生の講義である。大電流加速用の加速空洞、特に KEKB の超伝導加速器について詳しく論じられている。

そのほかにもいろいろな教科書があるが文献[8]はこれまた有名な Slater の高周波電磁気学の教科書である。諸先輩方も皆さん参考にしておられる。最後に、文献[9]は総研大の本部がある葉山で開催された、米国-CERN-日本合同加速器スクールの講義録である。高周波に限らずいろいろな講義が集められている。

参考文献

- [1] The Feynman Lectures on Physics, Vol. II, Addison Wesley Pub. Co. (1965), P. 21-1.
- [2] Frank S. Crawford, Jr., “Waves”, Berkeley Physics Course, Vol. 3, McGraw-Hill Book Co., 1968.
- [3] 高田耕治、“高周波加速”、OHO1997.
- [4] 影山達也、“高次モード減衰型空洞”、OHO1994.
- [5] 陳榮浩、“ウェイク、インピーダンスとビーム不安定性”、OHO1996.
- [6] K. Akai, “RF System for Electron Storage Rings”, Physics and Engineering of High-Performance Electron Storage Rings and Application of Superconducting Technology, World Scientific Co., 2002.
- [7] T. Furuya, “Superconducting Cavity”, Physics and Engineering of High-Performance Electron Storage Rings and Application of Superconducting Technology, World Scientific Co., 2002.
- [8] J. C. Slater, “Microwave Electronics”, Van Nostrand, 1950.
- [9] “Frontiers of Accelerator Technology”, Proc. Of the Joint US-CERN-Japan International School, Ed. S. I. Kurokawa, M. Month and S. Turner, World Scientific Pub. Co., 1999.