ビームモニタ

ー ビーム・インスツルメンテーション ー

1. はじめに

1984 年以来今回で 28 回目となる OHO 高エネルギー加速器セミナーのシリーズにおいては、ビームモニタについてのテキストがいくつか存在するが、中でも OHO'09 の外山毅氏によるテキストは秀逸であり、陽子シンクロトロン等に用いられるビームモニタ、ビームフィードバック、ビーム不安定性に関する基本的かつ詳細な考察が網羅されており、基礎的な知識を学ぶには十分なものである。一般的な知識を学ぼうとする諸氏にはぜひ一読をお勧めする。一般的なビーム・インスツルメンテーションに関する知識を学ぶには上記テキストで十分と思われるので、本稿では同じような解説を繰り返すことはせず、主に今後の陽子シンクロトロンや次世代の放射光リングあるいは SuperKEKB のような衝突型電子陽電子蓄積リングにおいて重要となる可能性を秘めたビーム･インスツルメンテーションについて解説することにする。

ビームモニタリングで最も難しいのはシンクロトロンや蓄積リング等、リング型加速器中をほぼ光速で周回している荷電粒子ビームの断面形状（ビーム・プロファイル）を、ビームに影響を与えることなく如何にして精度良く観測するかという問題である。ビームプロファイル・モニタは加速器の性能向上にとって重要なビーム不安定性などに関する詳細な情報を得る上で極めて重要なものである。これまでいくつかの方法が実用化され多くのリングで稼動しているが、近年大きな可能性を秘めたブレークスルーがあったので、本稿では二種のビームプロファイル・モニタについて解説する。更にマルチバンチで運転される大強度のシンクロトロンや蓄積リングで、加速器の性能を制限する深刻な横方向ビーム不安定性を抑制するためのバンチ毎ビームフィードバック・システムを統一的に記述する、z 変換を用いた定式化について解説する。

2. ガスシート・ビームプロファイルモニタ

加速器中を周回しているビームの断面形状を観測するには、ビームを横切るようにタングステン等のワイヤを挿入して、ビームが衝突することでワイヤに流れる 2 次電子放出電流を検出するあるいは発生する 2 次粒子をシンチレーション・カウンタ等で検出し、ビーム断面を横切ってワイヤをスイープすることでビームの断面形状を観測するワイヤ・モニタがよく知られており広く用いられている。しかしながら直接加速器中のビームに物質を挿入する方法では、衝突によるビームのエネルギー損失及び角度分散のために円形加速器では極く短時間でビームが失われてしまうため加速中のビームの動的振る舞いを観測する場合には不都合であり、このようなビームモニタを破壊型ビームモニタ（destructive beam monitor）と呼ぶ。

破壊型ビームモニタに対して非破壊型ビームモニタ（nondestructive beam monitor）としては、加速器中の残留ガスをビームによりイオン化して発生するイオンの密度分布を観測することでビーム･プロファイルを観測する残留ガス・ビームプロファイル・モニタや、加速器中にガスジェットを噴射してビームと衝突させ、発生するイオンを増量して信号強度を増強するガスジェット・ビームプロファイル・モニタがある。

以上のような、ガスのイオン化を利用したビームプロファイル・モニタの種々の欠点を克服し、ビームバンチ毎にビーム･プロファイルを観測することを可能にしたものとして、画期的なガスシート・ビームプロファイル・モニタが KEK の橋本義徳氏によって開発された[1,2]。酸素ガスを薄いシート状に成型して加速器中のビーム軌道を横切るように飛ばすことでビームと衝突させる。衝突によりイオン化されたイオンを静電場にて MCP（マルチチャンネルプレート）に導いて増幅し、その後方に設置される蛍光板上にイオンの密度分布像を作るものである。原型は放射線医学研

究所の重イオンシンクロトロンにて微弱な重イオンビームのプロファイルを観測する目的で開発されたもので、高感度化のために蛍光板上の発光像をイメージ・インテンシファイアで更に増幅した後 CCD カメラで記録することで、二次元のビームプロファイル像を得るものである。

加速器中の高度な真空（~10^{-9} Pa）に影響を与えることなく、パルス的に薄いガスシートを発生してビーム軌道を横切って飛ばすという、高度な技術を実現した開発者の執念と力量には脱帽するばかりである。ガスシート発生部の概略を図 2-1 に示す。以降本節で使用している図は橋本義徳氏提供によるものである。

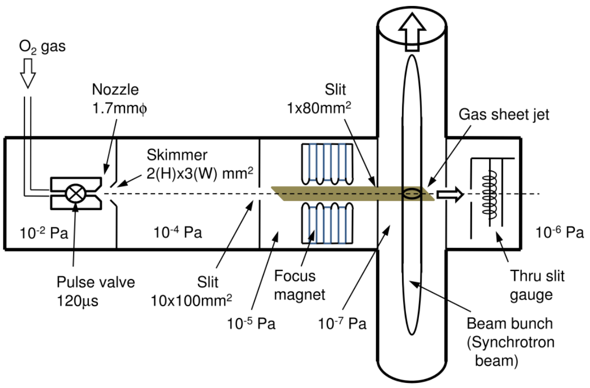


図 2-1　ガスシート発生部概略

図 2-1 の装置で生成されたシート状の酸素分子線は、ビームバンチの通過にあわせて図 2-2 に示すようにシート面が加速器ビームの軌道に対して 45°の角度となるように、ビーム軌道を横切って入射される（ガスシートの運動方向は紙面に垂直方向）。

ビームがガスシートを通過することでガスをイオン化し、発生したイオンはイオン捕獲電極で精巧に作られた平行電場によって捕獲、加速されて MCP に入射される。電荷は MCP で増幅され、MCP の後に配置された蛍光スクリーンにビーム断面の電荷密度分布に比例する発光イメージを生ずる。この発光像をイメージ・インテンシファイアで増幅し CCD カメラにて撮像記録する。蛍光スクリーンには光量が 1/10 に減衰する減衰時間 80ns 以下の高速応答のものを用い、CCD カメラのデータ収集時間を 100ns/frame 以下とすることで加速器中のビームバンチ毎のプロファイルを観測することができる。

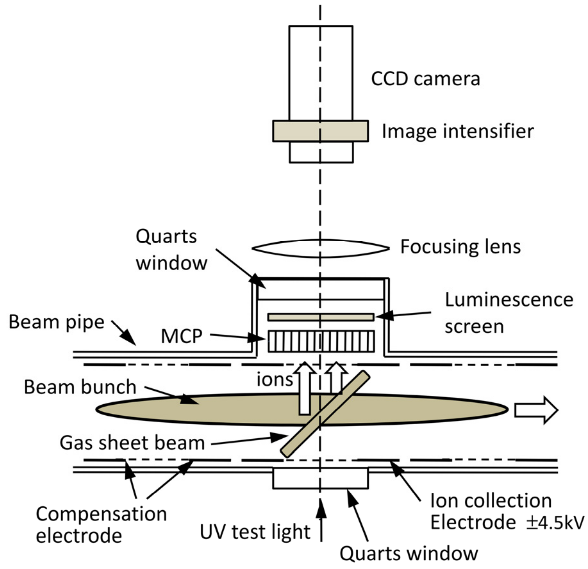


図 2-2　ビームプロファイル検出部

最も重要な技術はいかにしてシート状の分子線を生成するかという極めて困難な問題である。開発者はまず使用するガスとして、不均一磁場で分子線を収束することができるように、大きな磁気モーメントを持つ酸素分子ガスを用いた。

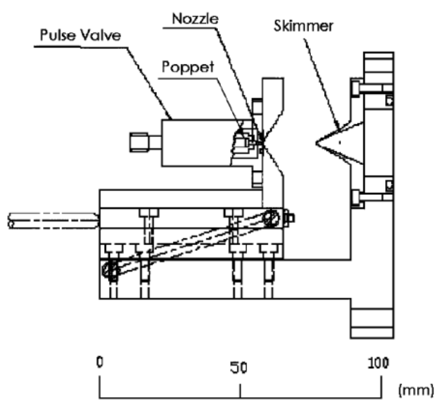


図 2-3　ノズル及びスキマー概略

図 2-3 に示すように、高速パルスバルブにより 120μs の間ノズルからガスを噴射することで、パ

ルス状のガスジェットを発生する。ガスジェットは精緻に設計されたノズルとスキマーを通ることで断熱膨張により分子温度を数 K にまで下げられ、速度広がりが約 80 m/s 程度にまで減少した分子速度の揃った分子線となる。分子線の軸方向速度は 735 m/sec、速度広がりは±10%である。

分子線を数 10 cm 飛ばした後開口 10 mm×100 mm のスリットにて扁平に切り出し、周期磁場の中を通す。酸素分子は磁気モーメント μ を持つために、不均一磁場 H によりガスシートの面と垂直方向に $\mu\partial H/\partial x$ なる力を周期的に受けることで、シートの厚さ方向に収束力を受け、発散することなく暑さ 1.3mm の薄いシート状となって加速器のビーム軌道を横切りビームと衝突する。ターゲットとしてのガス密度は最大で圧力換算 1×10^{-4} Pa（3×10^{19} molecules/sr·s）ということである。図 2-4 にガスシート横方向の密度分布を示す。全幅 85mm、平坦部の幅 60mm が得られており、パルス毎の変動は約±3%である。

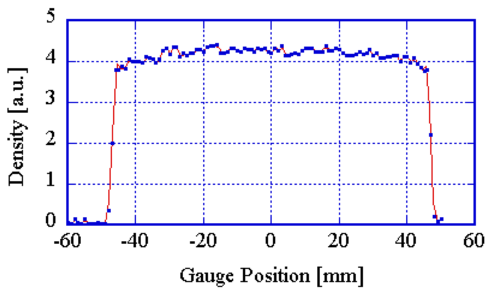


図 2-4　酸素ガスシートの幅方向密度プロファイル

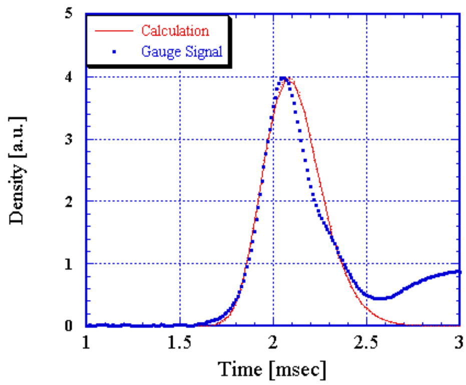


図 2-5　パルス・酸素ガスシートの時間構造

図 2-5 に進行方向の分布を示す。ターゲットとして使用される領域は、ピーク近傍 100 µsec の範囲（長さにして 73.5mm）であり、この範囲での密度変化は 10%以下である。なお 10%のガス密度の不均一度はターゲットとしてビームサイズの測定に使用された場合、$\sigma = 20$ mm のガウスビームに対して 2.5%程度の測定誤差に対応する。

厚手のボール紙を 80mm 幅に切ったような形状のガスシートが、その形状を崩すことなく約 1m も飛翔してビームと衝突するなど、想像しただけでも実に痛快である。

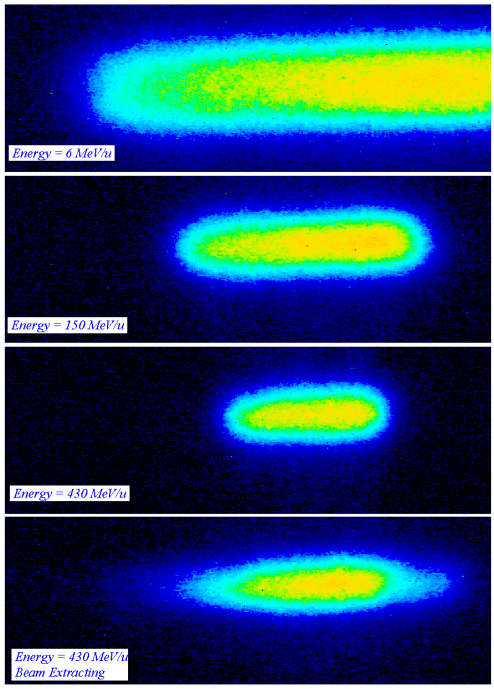


図 2-6　ガスシート・モニターで観測された $^{12}C^{6+}$ ビームの 2 次元断面プロファイル像

以上述べたガスシート・プロファイルモニタによるビーム測定の例として、図 2-6 に放射線医学研究機構の重イオンシンクロトロン HIMAC で観測された、加速器中の炭素イオン（$^{12}C^{6+}$）ビームの１つのバンチの２次元断面像を示す。6MeV/u で入射されてからトップエネルギー430MeV/u に加速される間の adiabatic dumping による水平方向ビームサイズの減少、更に遅いビーム取り出し過程（rf キック）におけるサイズの増加が見える。

電子リングにおける放射光モニタの画像と見紛うような、実に鮮明な２次元ビーム断面像である。

加速器で加速されているビームの任意のバンチの２次元プロファイルを、非破壊で明瞭に観測することが可能な本プロファイルモニタは、詳細なビーム情報を提供してくれるものであり、加速器の詳細な研究にとって極めて有意義であり今後が期待される。特に究極の大強度ビーム実現に向けて鋭意調整中の J-Parc 陽子シンクロトロンにおいては、困難なアパーチャー問題やビーム不安定性の克服に極めて有用であると考えられ、今後設置、活用されんことを願っている。

3. X 線コーデッドアパーチャー・ビームサイズモニタ

KEKB ファクトリー加速器のような衝突型蓄積リングにおいては、加速器中の電子、陽電子ビームのビームバンチを安定にかつできる限り小さな断面サイズに制御することがハイ・ルミノシティーを実現する上で最重要な課題である。そのためにはミクロンオーダーのビームサイズを精度良く測定することが求められる。電子や陽電子の蓄積リングではビームがベンディング電磁石の磁場中を運動するときに放射する、シンクロトロン放射（放射光）を観測することでビームサイズを測定することができる。しかしながら放射光のイメージをカメラで撮像する方法では、放射光の回折現象のために制度の良い測定は不可能である。現在精度の高い方法として広く用いられる測定法は、天体の角直径の測定などにもちいられている干渉計にヒントを得て、KEK 放射光施設の三橋利行氏によって開発された放射光干渉計による方法である。放射光干渉計は放射光の可視光成分をダブルスリット干渉計（マイケルソン干渉計）を用いて観測される、干渉縞の濃度パターン（フリンジパターン）からビームサイズを測定するものであり、回折効果の影響を受けないため概ね 10 ミクロン程度以上のビームサイズ測定においては精度の高い測定が可能である。

しかしながら現在 KEK で建設が進められている SuperKEKB のような 10 ミクロンオーダーのビームサイズ測定は極めて困難である。このような小さなビームサイズ測定においては回折効果が最も大きな誤差原因であることから、回折効果が無視できるような短い波長の X 線成分を、ピンホールカメラや単色化した後フレネゾーン・プレート等で観測することが一般的である。しかしながら、ピンホールカメラでは像が暗いため、多くのビームバンチの平均的なバンチサイズを知ることは出来るが、単一のビームバンチの放射光イメージからビームバンチのサイズを精度よく測定することは不可能であり。またフレネゾーン・プレートは放射光の平均強度が大きい場合には熱的損傷が問題となるため測定の自由度が制限されてしまう。

そこで KEK の J. Flanagan 氏により、微小な x 線源の観測に用いられる x 線コーデッド・アパーチャーマスク・カメラからヒントを得たビームサイズモニタが開発され、コーネル大学の電子リングにてその有効性が実証された[3,4]。現在、更なる精度向上の研究が進められている。コーデッド・アパーチャー・マスクは天体観測やレーザー核融合などの分野で使われてきた x 線撮像法で[5,6]、例えばレーザー核融合におけるペレットの爆縮過程の観測に以前から用いられてきた方法であり、1-10 μm オーダーの微小な x 線源のイメージングに活用されている（補遺 A 参照)。

コーデッドアパーチャー･マスクとは原理的には多数のピンホールをあけたマスクと同じものである。ピンホールの個数を N とすると得られるイメージも N 個得られる。したがって全てのイメージを重ね合わせることで明るいイメージを得ることができ、精度の高い測定が可能となる。また、マスク上のピンホールを適当な法則性に基づいて配列した URA マスク（Uniformly Redundant Arrays mask）を用いることで、光源（ビーム断面）の形状を再現することができる。

そこで、まず図 3-1 に示すように一つの 1 次元ピンホール即ちシングル・スリットによって出来る光源のイメージを考えてみる。スリットの回折効果は無視できるものとし、光源からスリットをあけたマスクまでの距離をL_1、マスクからスクリーンまでの距離をL_2とする。

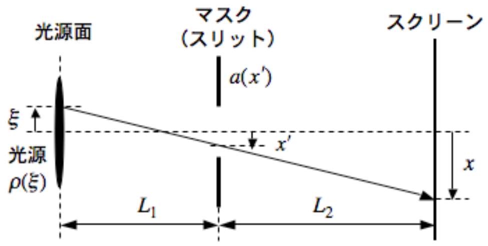


図 3-1　1 次元ピンホールカメラ
（スリットカメラ）の原理図

マスク上の座標をx'とし、光源面の点ξから出た光線がx'を通ってスクリーンに達する点の座標をxとすると

$$x' = \frac{L_2/L_1}{M}\xi + \frac{x}{M} \tag{3.1}$$

が成立する。ここで $M = 1 + L_2/L_1$ である。従って光源の強度密度分布を$\rho(\xi)$とすると、スクリーン上のイメージの明るさの分布は

$$p(x) = \int \rho(\xi)a(x')d\xi \tag{3.2}$$

となる。ここで$a(x')$は、(3.1)式で決まるx'がスリットの開口部にあるときは１、スリット開口部から外れているときは０（またはマスクによる吸収に対応する１以下）の値をとるものとする。ここでは 0 として考える。$\rho(x)$をガウス分布関数

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-x^2/2\sigma^2} \tag{3.3}$$

とするとスクリーン上のイメージの明るさ分布は図 3-2 のようになる。ここで$\sigma = 2\ \mu\text{m}$、スリット幅は$d = 10\ \mu\text{m}$、$M = 10$とした。即ちスリット幅がビーム広がりより大きい（$d/2 > \sigma$）場合は、光源像が広がってしまい精度よく再現することはできない。精度を上げるにはスリット幅を光源幅より小さくする必要があるが、イメージが暗くなってしまうので精度を上げることが困難になってしまう。このようにシングル･スリット（即ち一つのピンホール）だけでは小さな光源を精度よく観測することは困難である。

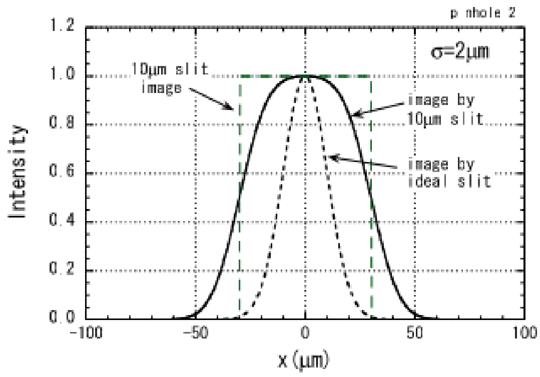


図 3-2　スリットカメラのイメージ
（ガウス分布光源）

そこで補遺 A にあるような、多数のピンホールから成る URA コーデッド･アパーチャー･マスクを用いた x 線 URA アパーチャー･カメラの原理を 1 次元像に適用した、x 線ビームサイズ・モニタが開発された[3]。通常の x 線 URA アパーチャー･カメラにおける光源像の再生アルゴリズムでは、x 線の波長は短いので回折効果は無視できるものとしているが、放射光による10μm オーダー以下の光源（ビーム断面）の測定には注意が必要である。

放射光の波長λと光子エネルギーεの関係は

$$\lambda(\text{nm}) = 1.24/\varepsilon(\text{keV})$$

で与えられる。$\lambda = 0.062\ \text{nm}\ (\varepsilon = 20\ \text{keV})$、光源からマスクまでの距離を$L_1 = 5\ \text{m}$、スリット幅を$d = 10\ \mu\text{m}$とすると、スリットのエッジにおける回折効果による広がりは

$$\Delta\theta \approx \pi/kd = 3.1\ \mu\text{rad}$$

となるので、光源位置に換算した広がりは

$$\Delta\xi \approx L_1\Delta\theta = 16\ \mu\text{m}$$

となるため、光源サイズが$10\ \mu\text{m}$オーダー以下の場合は回折効果を考慮した解析が必要であり、通常の URA アパーチャー･カメラのように光源象を精度よく再生することは困難である。

そこで J. Flanagan 氏は Fresnel-Kirhhoff の回折積分を実行することでスリットの回折効果を

考慮に入れた放射光観測に対する解析方法を開発した。よく知られているように電子等が放射するシンクロトン放射は、σ 偏光および π 偏光の二つの偏光成分から成り、ベクトルポテンシャルのフーリエ成分は

$$\left.\begin{matrix} A_\sigma \\ A_\pi \end{matrix}\right\} = -i\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\gamma\frac{\omega}{\omega_c}\{1+(\gamma\psi)^2\}\left\{\begin{matrix} K_{2/3}(\eta) \\ \dfrac{i\gamma\psi}{\sqrt{1+(\gamma\psi)^2}}K_{1/3}(\eta) \end{matrix}\right. \quad (3.4)$$

で与えられる。ここで $\eta = (\omega/2\omega_c)\{1+(\gamma\psi)^2\}^{3/2}$、$\psi$ は観測方向と軌道面の成す角度、ω は x 線の周波数である。マスク材質の透過率を考慮に入れて、マスク面上で回折積分を実行することで、スクリーン上で観測される $A_{\sigma,\pi}(y)$ を得る。

$$A_{\sigma,\pi}(\omega,y) = \frac{i}{2\lambda}\int_{\text{mask}} A_{\sigma,\pi}(\omega,y_m)t(y_m) \times \frac{e^{i2\pi(r_1+r_2)/\lambda}}{r_1 r_2}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)dy_m \quad (3.5)$$

ここで $A_{\sigma,\pi}(\omega,y_m)$ はマスク面上の $A_{\sigma,\pi}$ であり、発光点（着目している電子）の y 座標を y_s として、(3.5)式において ψ を

$$\psi(y_m) = (y_m - y_s)/L_1 \quad (3.6)$$

と置き換えたものである。y、y_m はそれぞれスクリーン、マスク上の y 座標（垂直方向）、(r_1,θ_1) は光源からマスク上の点 y_m までの距離および角度、(r_2,θ_2) はマスクからスクリーン上の点 y までの距離および角度、$t(y_m)$ はマスク材質の複素透過率である。スクリーンに達する単位面積当たりの放射光エネルギー

$$\frac{dW}{dxdy} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\int_0^\infty \{|A_\sigma(\omega,y)|^2 + |A_\pi(\omega,y)|^2\}d\omega \quad (3.7)$$

より、スクリーン上の像の明るさ分布を得る。コーデッドアパーチャー・マスクには最もよく用いられるスリット開口率 50%の 1 次元 URA マスクを用いることにした。以降本節で使用している図は J. Flanagan 氏提供によるものである。

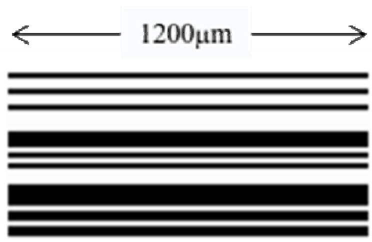


図 3-3　実証実験で用いた
URA マスクパターン

図 3-3 に URA マスクのスリット配列を示す。この URA マスクを用いて測定されたコーネル大学電子蓄積リングの放射光イメージを図 3-4 に示す[3]。カラー原図のため判然としないが、赤線は測定値、青線はビームの垂直方向（y 方向）サイズ（光源サイズ）を $\sigma_y = 10\ \mu$m として(3.4)-(3.7)式から予測される計算値であり、データがよく再現されている。

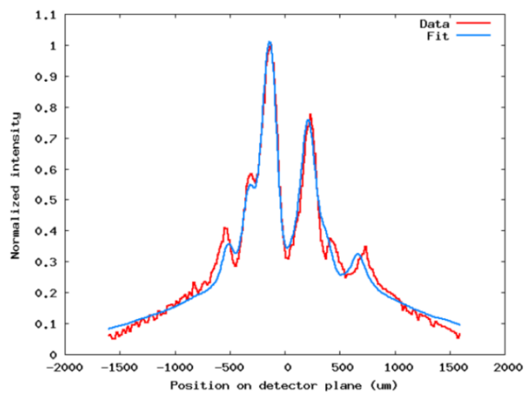


図 3-4　マスク上のイメージの明るさ分布
（at CesrTA）

図 3-5 は KEKB の発展型後継蓄積リングとして KEK で建設が進んでいる SuperKEKB におけるコーデッドマスクイメージング・ビームサイズモニタ（σ_y モニタ）で用いられる予定の URA マスクパターン、図 3-6 は予想される x 線イメージである。ビームサイズによりスリット像がスムージングされて変化していることが分かる。マルチセグメント x 線検出器から成るスクリーン上に得られるこのような像を、(3.4)-(3.7)式を用いてフィッティングすることでビームサイズを観測する。

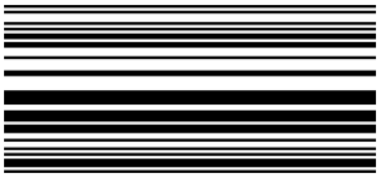


図 3-5　SuperKEKB で用いられる URA マスクパターン

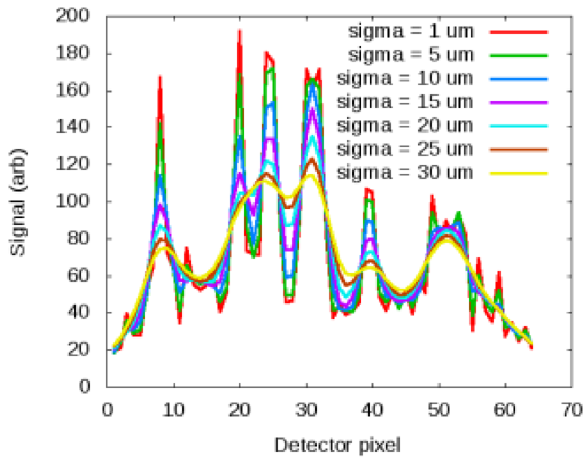


図 3-6　SuperKEKB における URA マスクによる x 線イメージの予想

なお、測定分解能は x 線検出器の 1 セグメント当たりの光子数に依存する。図 3-7 に 2 種類の検出器を用いたときの統計的分解能の予想を示す。原図がカラーのため判然としないが、広がりの大きい方がコーネル大学の蓄積リングで使用した x 線検出器、広がりの小さい方が改良予定の高感度検出器を用いたときに期待される測定誤差である。

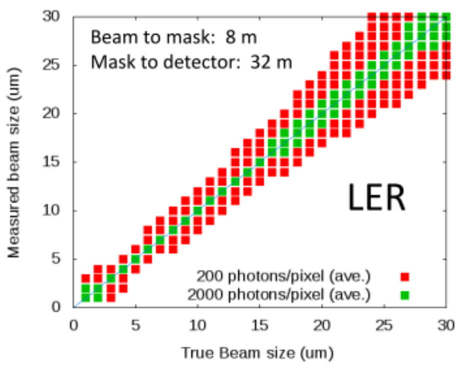


図 3-7　期待されるビームサイズの測定誤差（SuperKEKB / LER）

これより 10 μm 程度のビームサイズの観測に対して ±1 – 2 μm 程度の誤差が予想され、現在更なる精度向上に努めているところである。

以上述べた開発中の URA コーデッドアパーチャー・マスク法は、マスクによる回折効果が無視できないので光源像の再現は困難であるため、ガウス分布ビームを仮定してスクリーン上のイメージをフィッティングすることでビームサイズを求めることにしている（この場合、強いて URA マスクである必要があるのか疑問ではあるが、イメージの明るさ即ち x 線検出器の統計誤差の改善には透過効率の高い URA マスクが有効であろう）。本来の 2 次元または 3 次元光源像の再現を目指した URA マスク・コーデッドアパーチャー・カメラとは少しコンセプトが異なると思われるが、三橋利行氏による放射光干渉計と並んで、加速器中のビーム観測にとって大きなブレークスルーであると考えられる。

特に SuperKEKB においては、リング中の 2500 個以上のバンチから成る電子・陽電子ビームの、個々のバンチのサイズを精度良く測定することができるものと期待され、詳細なビーム不安定の調査、研究に極めて有用なインスツルメンテーションとなることが期待される。

4.　ビーム・フィードバック

4-1 伝達関数

KEKB や SuperKEKB のような大電流蓄積リングでは強いビーム不安定性のために、無対策では 20~30 mA 程度のビームを蓄積するのが精一杯であり、アンペアオーダーのビームを蓄積するためにはビーム不安定性を抑制するためのビームフィードバックが必要不可欠である。上記リングのような極めて多数のビームバンチが蓄積される場合には、ビームによってバンチの周期とリング中のビームの回転周期に同期した電磁場が誘起され（航跡場、wake field）、それによってビーム自身が電磁力を受けてベータートロン振動が励起され、ビームサイズが増大してルミノシティーが低下したり、振動振幅がビームパイプのアパ

ーチャーを超えてビームが失われてしまう、横方向マルチバンチ不安定性が深刻な問題となる。

このような横方向ビーム不安定性を抑制するために図 4-1 に示すように、ビームバンチの横方向ベータートロン振動をビーム位置検出器（BPM）にて検出して増幅した後、キッカーに加えてバンチを蹴りもどして振動を抑えるフィードバック装置（横方向バンチ毎ビームフィードバック）が用いられる。

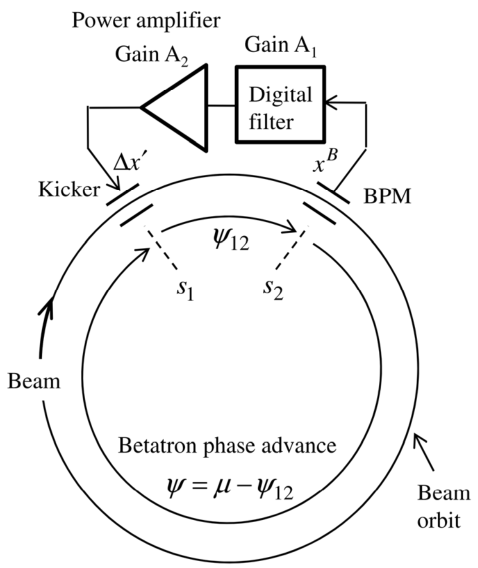


図 4-1　ビームフィードバック概念図

このようなビームの運動を含んだフィードバック系は、z 変換を適用することにより統一的に解析することができる[7]。ビームの横方向運動（ベータートロン振動）はリング一周のビーム転送行列

$$M = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

によって記述される。リングの軌道上キッカーの位置 s_1 おける、n ターン目のバンチ中心の平衡軌道（閉軌道という）からの変位及び平衡軌道に対する運動方向の傾きを (x_n, x'_n) とすると、n+1 ターン目の (x_{n+1}, x'_{n+1}) は

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x'_{n+1} \end{pmatrix} = e^{-T_0/\tau} M \begin{pmatrix} x_n \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

で与えられる。ここで $\mu = 2\pi\nu$ はリング一周当たりのベータートロン振動の位相進み、ν はリング一周当たりの振動数（ベータートロン・チューン）である。T_0 はビームがリングを一周する時間、τ は放射ダンピングやチューンの広がりによるバンチ中心の振動のダンピング時間である。$\tau < 0$ の場合は$-\tau$ がビーム不安定性によるコヒーレントなベータートロン振動の成長時間を表わしている。従ってキッカーによるビームの蹴り角を $\Delta x'(s_1)$ とすると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ x'_n \end{pmatrix} &= e^{-T_0/\tau} M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x'_n \end{pmatrix} \\ &= e^{-nT_0/\tau} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{n} e^{-(n-k)T_0/\tau} M^{n-k} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x'_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

より、初期値を$(x_0, y_0) = (0, 0)$ として無視することで、$\Delta x'(s_1)$ に対するビーム軌道の応答

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{n} g_1(n-k)\Delta x'_k \\ x'_n &= \sum_{k=0}^{n} g_2(n-k)\Delta x'_k \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

を得る。ここで

$$\left.\begin{aligned} g_1(n-k) &= e^{-(n-k)T_0/\tau} \beta_1 \sin(n-k)\mu \\ g_2(n-k) &= e^{-(n-k)T_0/\tau} \{\cos(n-k)\mu - \alpha_1 \sin(n-k)\mu\} \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

である。

BPM の位置$(s = s_2)$ における n ターン目のビーム変位 x を x_n^B とする。BPM の出力電圧を $v_n^B = K_B x_n^B$ として、v_n^B を A_1 倍に増幅してから M タップの FIR デジタルフィルターを通し、更にゲイン A_2 倍の広帯域パワーアンプで増幅した出力をキッカーに加えるものとすると、キッカー電圧は

$$v_n^K = -A_1 A_2 \sum_{m=1}^{M} h_m v_{n-m}^B + A_2 e_n \quad (4.6)$$

で与えられる。ここで h_m は FIR フィルターの m 番目のタップの重み、e_n はパワーアンプへの外部入力あるいは入力雑音電圧である。

ここで n_{11}、n_{12} をキッカーから BPM までのビーム転送行列

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$$

の成分として、x_n^B は

$$x_n^B = n_{11} x_n + n_{12} x_n' \qquad (4.7)$$

で与えられる。キッカーから BPM までのベータートロン位相進みをψ_{12}とすると

$$\left.\begin{aligned} n_{11} &= \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos\psi_{12} + \alpha_1 \sin\psi_{12}) \\ n_{12} &= \sqrt{\beta_1 \beta_2}\sin\psi_{12} \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

である。これよりキッカーのキック角を

$$\Delta x_n' = K_K v_n^K \qquad (4.9)$$

として

$$\Delta x_n' = K_K A_2 \\ \times\{-K_B A_1 \sum_{m=1}^{M} h_m \left(n_{11} x_{n-m} + n_{12} x_{n-m}'\right) + e_n\} \qquad (4.10)$$

となる。

次に$x_n, x_n', e_n, g_1(n), g_2(n)$の z 変換を

$$\left.\begin{aligned} &X(z) = \mathcal{Z}\left[x_n\right], \quad X'(z) = \mathcal{Z}\left[x_n'\right], \quad V(z) = \mathcal{Z}\left[e_n\right] \\ &G_1(z) = \mathcal{Z}\left[g_1(n)\right], \quad G_2(z) = \mathcal{Z}\left[g_2(n)\right] \end{aligned}\right\}$$

として、(4.4)式、(4.10)式に対して z 変換を行うことで閉ループ応答

$$X(z) = G(z)V(z) \qquad (4.11)$$

を得る。$G(z)$ は閉ループ伝達関数であり

$$G(z) = \frac{\dfrac{K}{A_1 K_B}\sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2}} G_1(z)}{1 + K\sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2}}\left(n_{11} G_1(z) + \dfrac{n_{12}}{\beta_1} G_2(z)\right) F(z)} \qquad (4.12)$$

で与えられる（補遺 B 参照）。ここで

$$\left.\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{z e^{-T_0/\tau}\sin\mu}{z^2 - 2z e^{-T_0/\tau}\cos\mu + e^{-2T_0/\tau}} \\ G_2(z) &= \frac{z^2 - e^{-T_0/\tau}(\cos\mu + \alpha_1 \sin\mu) z}{z^2 - 2z e^{-T_0/\tau}\cos\mu + e^{-2T_0/\tau}} \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

また

$$F(z) = \sum_{m=1}^{M} h_m z^{-m} \qquad (4.14)$$

は BPM 信号を処理する M タップ FIR デジタルフィルターの伝達関数である。 β_1、β_2 はそれぞれキッカーおよび BPM 位置でのベータートロン振動の抱絡線関数$\beta(s)$の値、また

$$K = A_1 A_2 K_B K_K \sqrt{\beta_1 \beta_2} \qquad (4.15)$$

は規格化ループゲインである。

電子回路の応答でお馴染みのラプラス変換で導かれる伝達関数の場合と同様、伝達関数$G(z)$の分母=0 即ち特性方程式

$$z^2 - 2z e^{-T_0/\tau}\cos\mu + e^{-2T_0/\tau} \\ + K\{z^2 \sin\left(\mu - \psi\right) + z e^{-T_0/\tau}\sin\psi\} F(z) = 0 \qquad (4.16)$$

の根 $z_p\ (p = 1, 2, \cdots)$ により逆変換

$$x_n = \mathcal{Z}^{-1}\left[X(z)\right] \equiv \frac{1}{2\pi j}\oint_C G(z) V(z) z^{n-1} dz \qquad (4.17)$$

を求めることが出来る。また

$$G_0(z) = K\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\left(n_{11} G_1(z) + \frac{n_{12}}{\beta_1} G_2(z)\right) F(z) \qquad (4.18)$$

は一巡ループ伝達関数（オープンループ伝達関数）と考えられ $G(z)$ 及び $G_0(z)$ の周波数特性は $G(e^{j\omega T_0})$、$G_0(e^{j\omega T_0})$ で表わされる。

簡単な例として FIR フィルターがシングル・タップ（$h_1 = 1, h_m = 0\,(m \geq 2)$）

$$F(z) = z^{-1} \qquad (4.19)$$

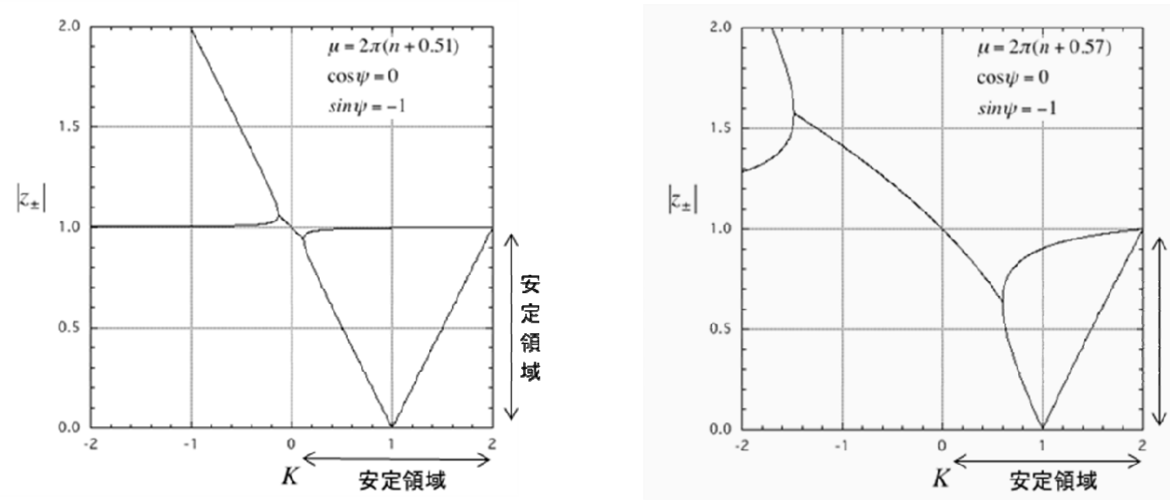
の場合を考察してみる。このときの特性方程式は

$$z^2 + \{K\sin\left(\mu - \psi\right) - 2e^{-T_0/\tau}\cos\mu\} z \\ + e^{-T_0/\tau}(K\sin\psi + e^{-T_0/\tau}) = 0 \qquad (4.20)$$

なる 2 次方程式になる。ここで$\psi = \mu - \psi_{12}$である。 $e_n = V_0 \delta_{n0}$ としてインパルス応答を求めると、(4.22)式の根を $z_\pm$ として(4.19)式より

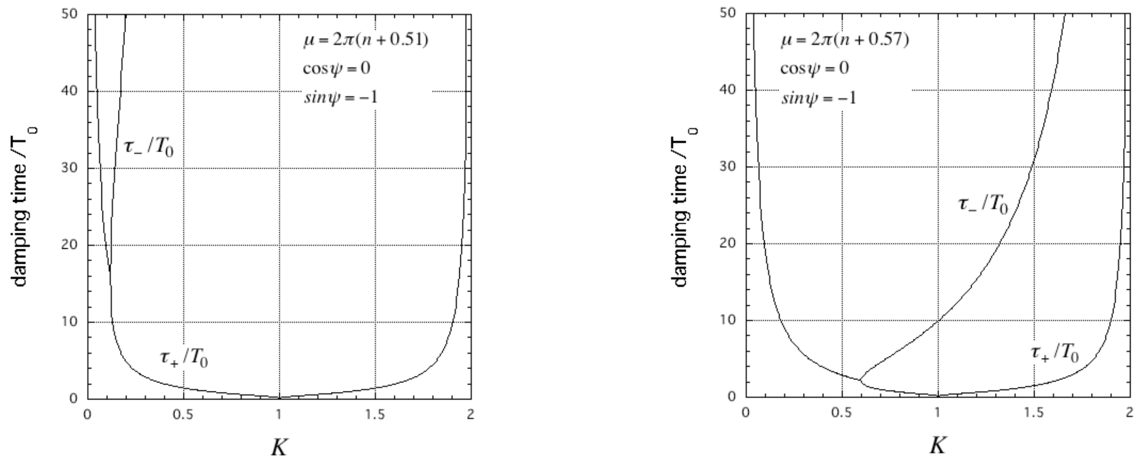
$$x_n = V_0 \frac{K e^{-T_0/\tau}\sin\mu}{A_1 K_B}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\frac{z_+^n - z_-^n}{z_+ - z_-} \qquad (4.21)$$

を得る。即ちターン数nとともに、バンチ中心の変位が$\left|z_\pm\right|^n$ で変化する二つの振動モードから成ることが分かる。運動が安定であるためには $\left|z_\pm\right| < 1$ でなければならない。



(a) $\nu = 0.51$　　(b) $\nu = 0.57$

図 4-2　特性方程式の根（LER/KEKB）（シングル・タップ FIR フィルター）



(a) $\nu = 0.51$　　(b) $\nu = 0.57$

図 4-3　ダンピング時間（LER/KEKB）（シングル・タップ FIR フィルター）

また振動のダンピング時間は

$$\tau_\pm = -T_0 / \ln|z_\pm| \tag{4.22}$$

で与えられる（$\left|z_\pm^n\right| = z_0 e^{-nT_0/\tau_\pm}$）。ここで

$$\sin\psi = -1 \tag{4.23}$$

となるように BPM とキッカーを配置しているものとすると、$T_0 << \tau$ では、安定条件を満たす規格化フィードバックゲインの範囲は

$$0 < K < 2 \tag{4.24}$$

となる。

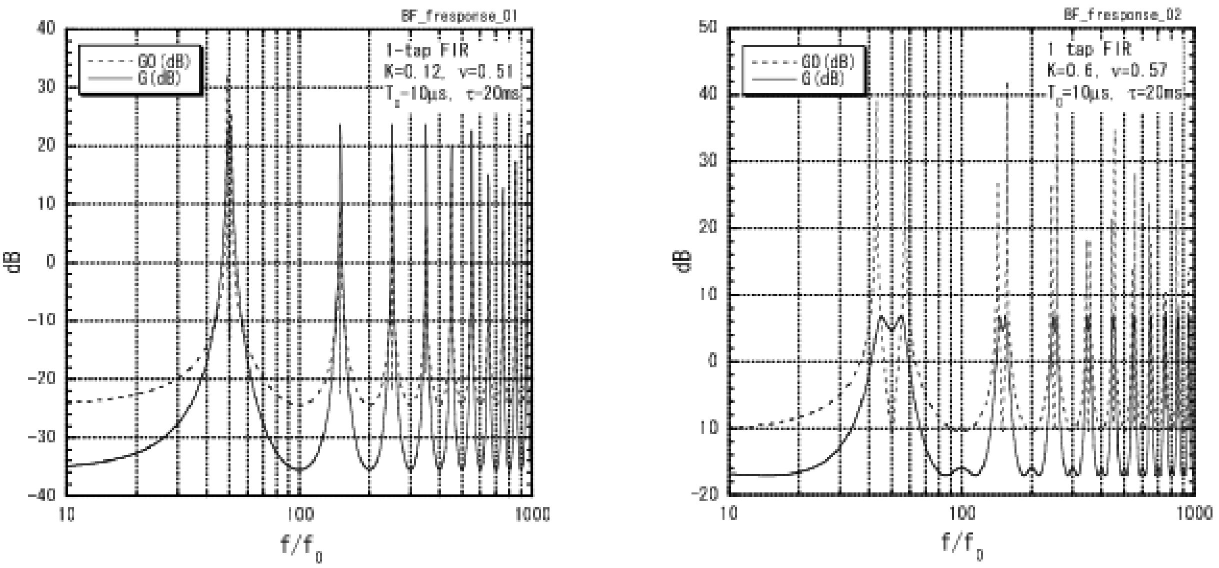
例として KEKB を考えると、$T_0 = 10\,\mu\mathrm{sec}$、$\tau \approx 20\,\mathrm{msec}$ より

$$T_0 / \tau \approx 5 \times 10^{-4} << 1$$

であり、安定領域は(4.25)式で与えられる。図 4-2、図 4-3 に示す$|z_\pm|$、$\tau_\pm$の K 依存性から分かるように、特性方程式が重根$(z_+ = z_-)$を持つときダンピング時間が最小になることが分かる。

最小ダンピング時間を与えるゲインをK_0とすると、フィードバックゲインKがK_0より大きくても小さくても$\tau_\pm$は大きくなる。更に$\tau_\pm$のゲイン依存性はチューンによって大きく影響され、特にチューンが整数または半整数に近い場合には急激に変化するので注意が必要である。

オープンループ及びクローズドループ伝達関数の周波数特性$\left|G_0(e^{j\omega T_0})\right|$、$\left|G(e^{j\omega T_0})\right|$を図 4-4 に示す。サンプリング定理により周波数特性は$f_0 = 1/T_0$毎に周期的となっている。特性はチューン（の端数）に依存し、チューンが半整数に近いとチューンに敏感になる。(b)図ではz_+、z_-の二つのモードに対応するピークが$\nu = 0.42, 0.57$にあることが分かる。クローズドループでは$\nu = 0.42$のレスポンスは約 30 dB、$\nu = 0.57$のレスポンスは約 40 dB 抑制されていることが見てとれる。



(a) $\nu = 0.51$　　(b) $\nu = 0.57$

図 4-4　オープンループ及びクローズドループ伝達関数の周波数特性

4-2 KEKB のビームフィードバック

以上のようにフィルターがシングルタップの場合は特性方程式が 2 次式となるので、解析的に解くことが出来るが、２タップ以上のマルチタップフィルターの場合は特性方程式が 3 次以上となるので解析的な解法は困難であり、数値計算に頼ることになる。

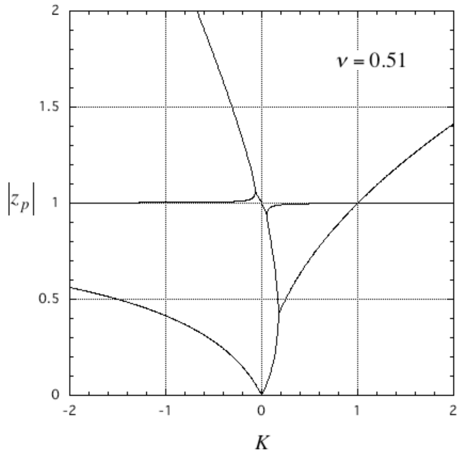
実際の加速器では閉軌道歪（COD）があるため、シングルタップ FIR フィルターでは BPM 信号に大きなオフセット成分を生じ電子回路のダイナミックレンジを大きく損ねてしまうので実用にはならない。このようなオフセット成分を除去するために、IIR フィルターまたはマルチタップ FIR によるハイパスフィルター（HPF）またはバンドパスフィルター（BPF）が用いられる。

例として KEKB で採用されていた２タップ・FIR フィルター$h_1 = 1, h_2 = -1, h_m = 0\ (m \geq 3)$の場合を考えると

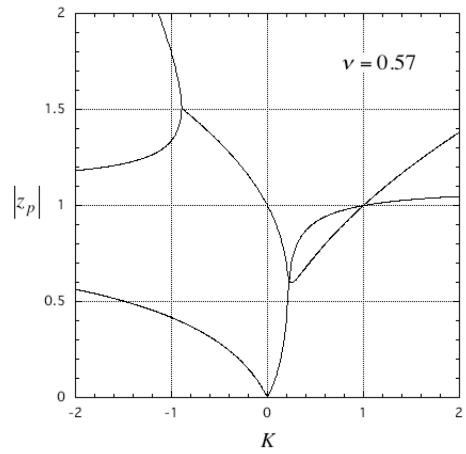
$$F(z) = z^{-1} - z^{-2} \tag{4.25}$$

より特性方程式は３次となる。この場合の特性方程式の根$\left|z_p\right|\ (p = 1, 2, 3)$およびダンピング時間$\left|\tau_p\right|$の計算例を図 4-5、4-6 に示す。図から分かるようにフィードバック・ゲインの安定領域は$0 < K < 1$となり、シングル・タップの場合の 1/2

に減少している。通常のフィードバックと同様、時間遅れ要素が増加するとループの安定領域が狭まるので、タップ数が多いときには注意が必要である。ノイズ成分を抑制してフィードバック信号のS/N比を向上するにはタップ数を多くすることが望まれるが、ループの安定性を広く確保する観点からはタップ数は少ない方が望ましい。タップ数が多い場合にはダンピング時間及びフィードバック信号のS/Nについて、フィルター関数（タップの重み）の最適設計が必要である。

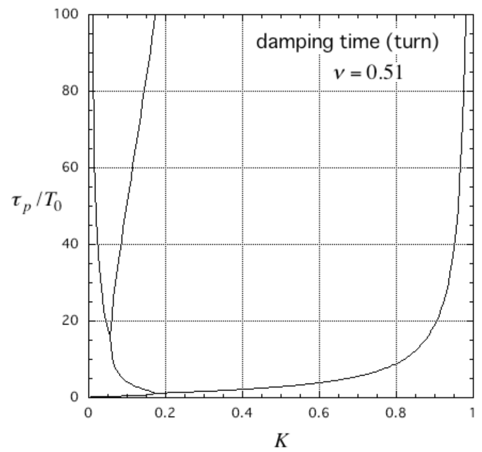


(a) $\nu = 0.51$

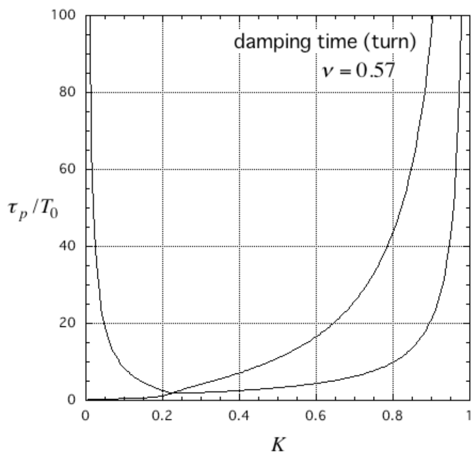


(b) $\nu = 0.57$

図 4-5　特性方程式の根（２タップ FIR フィルター）



(a) $\nu = 0.51$

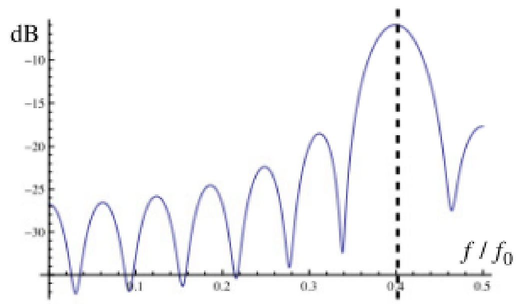


(a) $\nu = 0.57$

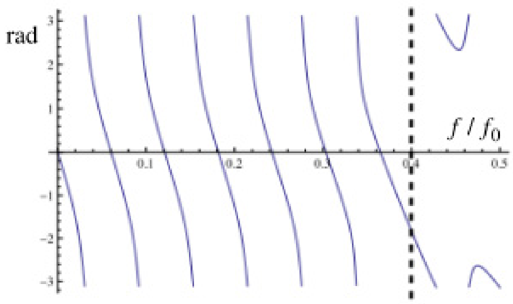
図 4-6　ダンピング時間（２タップ FIR フィルター）

4-3 J-Parc 50GeV リングのビームフィードバック

大強度陽子シンクロトロン J-Parc 50GeV リングでは今後ビーム強度が上がるに伴い、強いビーム不安定性が予想されるためバンチ毎ビームフィードバック・システムが設置されている。フィードバック信号の S/N を改善するために、BPM 信号からベータートロン振動を選択し、キッカーでビームをキックするための最適なベータートロン位相差を作るために、16 タップの FIR バンドパスフィルター（BPF）が用いられている。以下で栗本佳典氏による伝達関数の安定性解析の概略を紹介する[8]。



(a) 振幅特性

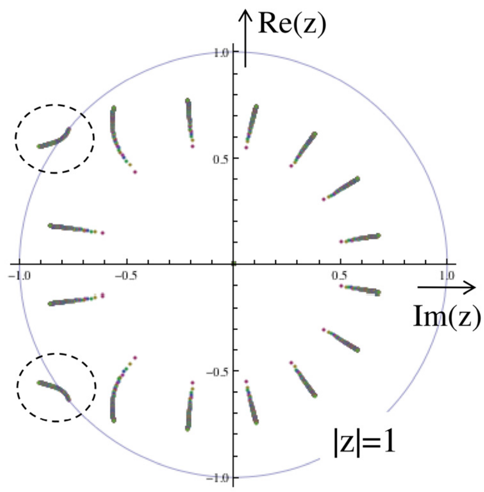


(b)位相特性

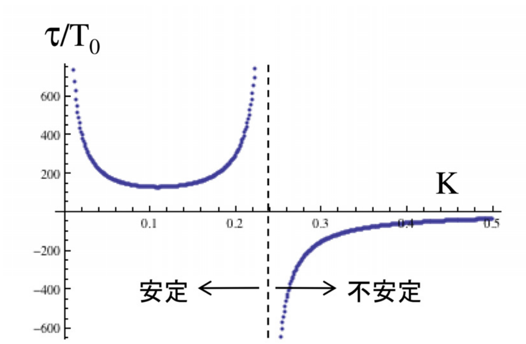
図 4-7　16 タップ FIR フィルターによる BPF の周波数特性（栗本佳典氏提供）

BPM とキッカーはほとんど同じ場所（ベータートロン位相で～14° の差）に設置されていて、$\beta_1 = \beta_2 = 15\ \mathrm{m}$、チューン（の端数）は $\nu = 0.4$、必要なベータートロン位相差は $-104°$ である。そこで $\nu = 0.4$ に共振し $-104°$ の位相差を持つ BPF を 16 タップ・FIR フィルターで実現したときのフィルターの周波数特性及び位相特性を図 4-7 に示す。

16 タップ FIR フィルターを用いたときのフィードバックループの特性方程式は 17 次となり、17 個の根が求まる。$\nu = 0.4$ として規格化ループゲイン K を 0 から 1 まで変えたときの根の軌跡を図 4-8 (a) に示す (図では 16 個の根しか見えないが理由は不明である)。



(a) 特性方程式（16 次）の根軌跡
（円は $|z| = 1$ を示す）（$K = 0$ to 1）



(b) ダンピング時間

図 4-8　J-Parc 50GeV リングにおけるビームフィードバックの例（栗本佳典氏提供）

図で分かるように破線で囲った複素共役の関係にある 2 つの根が安定性を支配しており、ダンピング時間を決定している。図 4-8 (b) に示すように安定なゲインの領域は $0 < K < 0.24$ であり、最小ダンピング時間は $K = 0.11$ のときビームの周回数にしてほぼ 130 ターン程度であることが分かる。即ち成長時間が 130 ターン以上のビーム不安定性を抑制することができる。タップ数が大きく時間遅れの大きい要素を含むので、図 4-6 の 2 タップフィルターに比べて更に安定領域が狭く、最小ダンピング時間が長くなっている。

4-4 KEKB のビームフィードバック（マルチタップ FIR フィルター）

KEKB のビームフィードバックのフィルターはコミッショニング開始から長い間 2 タップ FIR フィルターを用いていたが、シャットダウンの 2 ～ 3 年ほど前から、SLAC と共同で新たに開発したユニバーサルなマルチタップ・デジタルフィルターに変更された。

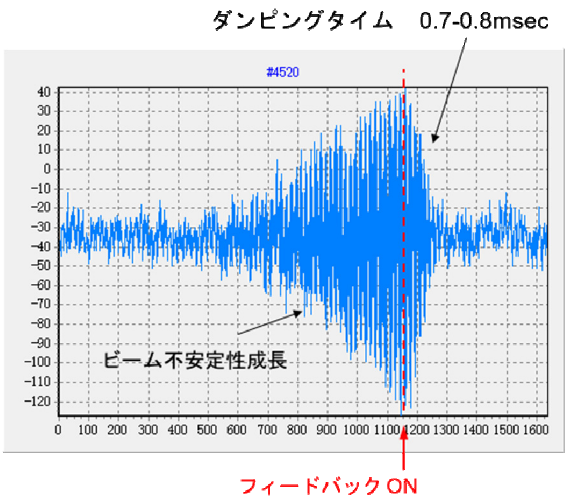


図 4-8　16 タップ FIR フィルターを用いたビームフィードバックによる、KEKB リングのビームの振動（飛山真理氏提供）

図 4-8 に 16 タップ FIR フィルターを用いたときの KEKB リングにおけるマルチバンチ・ビーム不安定性の成長とダンピングの様子を示す。数 msec かけて成長してきた不安定がビームフィードバック・ループを on にすることで 0.7~0.8msec（ターン数にして 70~80 ターン）でダンプされる様子が見える。SuperKEKB などで、成長時間が 10 ターン程度の強いビーム不安定性がある場合にはタップ数を減らす必要が生ずるかもしれない。残念ながらフィルター関数の詳細を把握していないため、これ以上の解説はできない。

4-5 軌道ノイズ

コライダー・リングにおいてはビームフィードバック信号のノイズによってビームが振動し、ルミノシティーが減少してしまうという問題がある。シミュレーションによれば振動振幅がビームサイズの 1% 程度以上あると顕著なルミノシティー低下が起きると予想されていて、フィードバックシステムに対して厳しい S/N が要求される。そのため、雑音を抑えるためにフィードバックゲインを十分に上げられず、必要なダンピング時間を実現できなくなる可能性を生ずる問題がある。

e_n をパワーアンプへの入力ノイズとすると、e_n はフィルター回路の出力ノイズ e_{n1} およびパワーアンプ自身の入力換算ノイズ e_{n2} の和である。

$$V_{n1}(z) = \mathcal{Z}[e_{n1}(n)]、V_{n2}(z) = \mathcal{Z}[e_{n2}(n)] \tag{4.26}$$

として(4.11)式における $V(z) = \mathcal{Z}[e_n]$ は

$$V(z) = A_2 V_{n1}(z) + V_{n2}(z) \tag{4.27}$$

となる。ノイズ e_{n1} と e_{n2} は異なるタップの間では自己相関がないのもとすると、$e_{n-k}e_{n-k'}$ の期待値は

$$\langle e_{n-k}e_{n-k'} \rangle = (A_2^2 V_1^2 + V_2^2)\delta_{kk'} \tag{4.28}$$

となる。ここで $V_1^2 = \langle e_{n1}^2 \rangle$、$V_2^2 = \langle e_{n2}^2 \rangle$ である。

これよりフィードバック系のノイズにより励起されるビームの軌道ノイズは次式で与えられる。

$$\langle x_n^2 \rangle = \sum_{k=0}^{n} \sum_{k'=0}^{n} g(k)g(k')\langle e_{n-k}e_{n-k'} \rangle$$

$$= (A_2 V_1^2 + V_2^2) \sum_{k=0}^{n} \{ \sum_{p} [z^{k-1}(z - z_p)G(z)]_{z=z_p} \}^2 \tag{4.29}$$

(4.29)式より、十分時間を経た後（$n \to \infty$）の軌

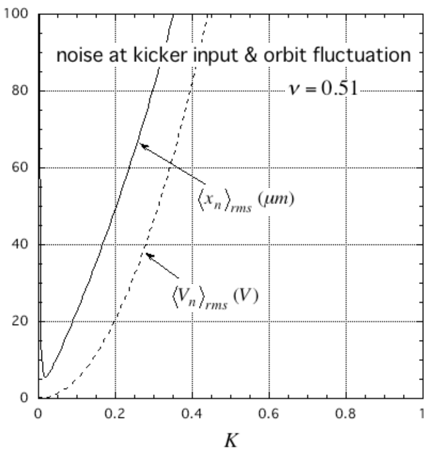
道ノイズの期待値は

$$\left\langle x_n^2 \right\rangle = \{(A_2V_1)^2 + V_2^2\}\left(\frac{\beta_1}{E/e}\right)^2 \frac{2R_s}{Z_0} \times e^{-2T_0/\tau} \sin^2\mu \sum_{p=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\frac{K_pK_q}{1-z_pz_q} \tag{4.30}$$

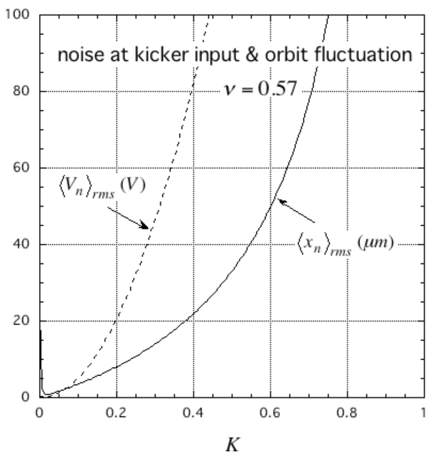
となる。ここで

$$K_p = \frac{z_p}{(z_p - z_q)(z_p - z_{q'})} \quad (q \neq p, q' \neq p, q \neq q') \tag{4.31}$$

であり、$z_p\ (p = 1, 2, 3)$ は特性方程式の根である。



(a) $\nu = 0.51$



(b) $\nu = 0.57$

図 4-9　軌道ノイズ（LER/KEKB）

KEKB の２タップ FIR フィルターを用いたビームフィードバック・システムにおいて、実測したノイズから(4.30)式により計算された軌道ノイズを図 4-9 に示す。破線はキッカー入力（パワーアンプ出力）におけるノイズ電圧の rms 期待値、実線は軌道揺らぎ（ノイズ）の rms 期待値である。チューンが半整数に近くなるとノイズに敏感になり、軌道揺らぎが大きくなる（(a)図）。ビーム軌道面と垂直方向（y 方向）のビームサイズは、キッカーの位置で $\sigma_y = 100 \sim 150\,\mu\mathrm{m}$ であるので、ノイズによる軌道揺らぎは1~2μm 程度以下に抑えることが望まれるが、図 4-9 からはそこまでノイズを抑えるのは難しそうに思われ、ノイズの詳細な測定と解析が必要と考えられる。そのため KEKB におけるフィードバックゲイン K は 0.1 以下の非常に小さな値（0.02~0.05 程度か？）でオペレーションされていた。図のようにゲインとともにノイズが大きくなるのは、BPM からパワーアンプ入力までの間に存在するノイズが支配的であり、パワーアンプ自身のノイズは問題ないことを示している。SuperKEKB では KEKB より更に一桁程度ノイズを抑制する必要があると考えられ、BPM 信号および信号処理部の高 S/N 化が望まれる。

５．あとがき

加速器の勉強をする上で、OHO 加速器スクールのテキストには大変お世話になってきた。もはや年寄りの出る幕ではないが、今回が最後のつもりで感謝の気持ちを込めて講師を引き受けることにした。筆者が 34 年前に KEK 12GeV PS のビームモニタの仕事に従事して以来、高エネルギー加速器の進展とともにビームモニタのコンセプトと技術は大きく進展してきた。特に KEKB のようなコライダー・リングでは、各種のビームハンドリング機器を種々のビームモニタ情報でリアルタイム・フィードバック制御する技術がハイ・ルミノシティーを追求する上で必須技術となった。それにはモニタ装置の高精度化はもとより、最適伝達関数の設計／構築が高精度ビーム制

御の必須条件である。伝達関数を考える上で参考となる一例として、４節でビームフィードバック系の z 変換による定式化と解析を詳細に紹介した。J-Parc、SuperKEKB、ERL/KEK と最先端の加速器がその性能を最高度に発揮するには、ビーム・インスツルメンテーションが提供するビーム情報が不可欠であり、フィードバックのためのデジタル制御技術が重要となる。諸兄の今後の活躍と更なる発展を心から期待したい。また、本スクール前校長の木村嘉孝先生、鎌田進氏並びに現校長の古屋貴章氏に感謝したい。

参 考 文 献

[1] Y. Hashimoto et al., Nucl. Instr. And Meth. A527(2004)289.

[2] 橋本義徳 他, 日本加速器学会誌, 1(2004)216.

[3] J. W. Flanagan et al., Proc. IPAC10, Kyoto, p.966 (2010).

[4] J. W. Flanagan et al., 第７回日本加速器学会年会プロシーディングス, Himeji, p.618 (2010)

[5] E. E. Fenimore and T. M. Canon, Appl. Opt. 17 (1982) 337

[6] “URA コーデッド・アパーチャ・カメラ”, 山田淳 他, テレビジョン学会技術報告 7(5) ED708, 1983-06, p.65-70.

[7]V. M. Zhabitsky, Proc. of PAC1993, p.2543.

[8] 栗本佳典 私信 2010-7-12.

補遺 A：コーデッドアパーチャ・イメージング

アパーチャマスク面上の座標を(x', y')とし、(x', y')が開口部に対応するときは１、それ以外は０となるアパーチャ関数を$a(x', y')$、スクリーン面上で観測される像の強度を$p(x, y)$、光源の強度分布を$\rho(\xi, \eta)$とすると、$p(x, y)$は

$$p(x,y) = \iint \rho(\xi,\eta) a(\frac{L_2/L_1}{M}\xi + \frac{x}{M}, \frac{L_2/L_1}{M}\eta + \frac{y}{M}) d\xi d\eta \tag{A1}$$

で与えられる。ここで$M = (L_1 + L_2)/L_1$である。マスク面及び光源面をセグメントに分けて、それぞれのセグメントの番号を(i, j)、(n, m)とすると、(A1)式は

$$P(n,m) = \sum_i \sum_j S(i,j) A(n,m;i,j) \tag{A2}$$

と近似できる。ここで

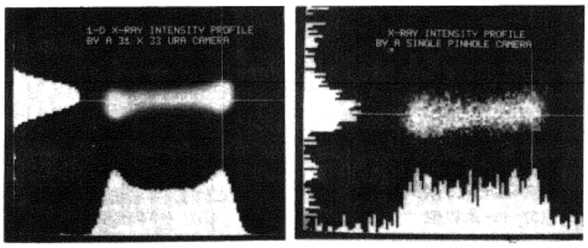
$$\sum_{n,m} A(n,m;i,j) G(n,m;k,\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell} \tag{A3}$$

となる行列$G(n,m;k,\ell)$が存在すれば、光源の強度分布はスクリーン上の像$P(n,m)$から

$$S(k,\ell) = \sum_{n,m} P(n,m) G(n,m;k,\ell) \tag{A4}$$

で求めることが出来る。このように光源分布を再現することのできる（即ちGが存在する）行列Aで表わされるマルチピンホール・マスクを URA マスクという。

参考までに大阪大学、レーザー核融合研究所で開発された x 線 URA コーデッドアパーチャー・カメラによる、0.5mm の x 線源の画像と URA マスクを図 A-1、A-2 に示す[6]。ピンホールカメラに比べて圧倒的な光源像再現性を示している。



(a) (b)

図 A-1 (a) x 線 URA パーチャー・カメラのデコーデッド・イメージ、(b) x 線ピンホール・カメラのイメージ （文献[6]より転載）

図 A-2 x 線 URA アパーチャー・マスク（文献[6]より転載）

補遺 B：z 変換によるビーム・フィードバック系の定式化

z 変換とはラプラス変換を離散的信号に拡張したものであり、サンプリングされたデジタル信号の処理系の応答を記述するのに適した変換である。周期 T でサンプルされた n 番目のデータを $f(nT)$ として $f(nT)$ の z 変換 $F(z)$ を

$$F(z) \equiv \mathcal{Z}\left[f(nT)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k} \quad \text{(B1)}$$

で定義する。時間遅れ kT に対しては

$$\mathcal{Z}\left[f((n-k)T\right] = F(z) z^{-k} \quad \text{(B2)}$$

となり、z^{-1} が時間遅れ T を表す。また $f_1(nT)$ と $f_2(nT)$ との畳み込みの z 変換は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_1(kT) f_2((n-k)T) z^{-n} = F_1(z) F_2(z) \quad \text{(B3)}$$

となり、各々の z 変換の積となる。更に逆変換は

$$f(nT) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right] \equiv \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z) z^{n-1} dz \quad \text{(B4)}$$

で与えられ、積分路 C は $F(z)$ の全てのポールを囲む閉曲線である。また $F(z)$ の周波数特性は $F(e^{j\omega T})$ で与えられる。サンプリング定理により周波数特性は $\omega_0 = 2\pi/T$ を周期とする周期構造を有する。

$x_n, x'_n, e_n, g_1(n), g_2(n)$ の z 変換を

$$\left.\begin{array}{l} X(z) = \mathcal{Z}\left[x_n\right], \quad X'(z) = \mathcal{Z}\left[x'_n\right], \quad V(z) = \mathcal{Z}\left[e_n\right] \\ G_1(z) = \mathcal{Z}\left[g_1(n)\right], \quad G_2(z) = \mathcal{Z}\left[g_2(n)\right] \end{array}\right\} \quad \text{(B5)}$$

とすると

$$G_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e^{-nT_0/\tau} \beta_1 \sin(n\mu) = \frac{z e^{-T_0/\tau} \sin\mu}{z^2 - 2z e^{-T_0/\tau}\cos\mu + e^{-2T_0/\tau}} \quad \text{(B6)}$$

$$G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} e^{-nT_0/\tau} \{\cos(n\mu) - \alpha_1 \sin(n\mu)\} = \frac{z^2 - e^{-T_0/\tau}(\cos\mu + \alpha_1 \sin\mu) z}{z^2 - 2z e^{-T_0/\tau}\cos\mu + e^{-2T_0/\tau}} \quad \text{(B7)}$$

より、本文(4.4)式及び(4.9)式の z 変換は

$$\left.\begin{array}{l} X(z) = G_1(z)\Delta X'(z), \quad X'(z) = G_2(z)\Delta X'(z) \\ \Delta X'(z) = -\dfrac{K}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}\left\{n_{11}X(z) + n_{12}X'(z)\right\}F(z) \\ \qquad + \dfrac{K}{A_1 K_{BPM}\sqrt{\beta_1\beta_2}} V(z) \\ F(z) = \displaystyle\sum_{m=1}^{M} h_m z^{-m} \end{array}\right\} \quad \text{(B8)}$$

となることから以下の閉ループ応答を得る。

$$X(z) = G(z) V(z) \quad \text{(B9)}$$

ここで

$$G(z) = \frac{\dfrac{K}{A_1 K_B}\sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2}} G_1(z)}{1 + K\sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2}}\left(n_{11}G_1(z) + \dfrac{n_{12}}{\beta_1} G_2(z)\right)F(z)} \quad \text{(B10)}$$

は閉ループ伝達関数、$F(z)$ は M タップ FIR フィルターの伝達関数、

$$K = A_1 A_2 K_B K_K \sqrt{\beta_1\beta_2} \quad \text{(B11)}$$

である。更に(B10)式を有理化して

$$G(z) = \frac{K}{A_1 K_B}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \frac{z^M e^{-T_0/\tau}\sin\mu}{D(z)} \quad \text{(B12)}$$

を得る。ここで

$$D(z) = z^{M+1} - 2z^M e^{-T_0/\tau}\cos\mu + z^{M-1} e^{-2T_0/\tau} + K\{z\sin\left(\mu - \psi\right) + e^{-T_0/\tau}\sin\psi\} z^M F(z) \quad \text{(B13)}$$

である。ラプラス変換の場合と同様、伝達関数 $G(z)$ の分母=0 即ち

$$D(z) = 0 \quad \text{(B14)}$$

を特性方程式という。特性方程式は $M+1$ 次となり、その根 z_p $(p = 1, 2, \cdots, M+1)$ は $G(z)$ のポール

であり、z_p により逆変換(B4)を求めることが出来る。例として $e_n = V_0\delta_{n0}$ としてインパルス応答を求めてみると

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^{-n} = V_0 \tag{B15}$$

より x_n は

$$x_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_C G(z)V(z)z^{n-1}dz$$
$$= V_0 \frac{K}{A_1 K_B}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} e^{-T_0/\tau} \sin\mu \sum_{p=1}^{M+1} R_p z_p^{M-1} z_p^n \tag{B16}$$

となる。ここで R_p は $1/D(z)$ の留数

$$R_p = \left[\frac{z - z_p}{D(z)}\right]_{z=z_p} \tag{B17}$$

である。したがって十分時間が経った後 $(n \to \infty)$ x_n が有限であるためには

$$\left|z_p\right| < 1 \quad (p = 1, 2, \cdots, M+1) \tag{B18}$$

でなければならない（安定条件）。

(B10)において

$$G_0(z) = K\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\left(n_{11}G_1(z) + \frac{n_{12}}{\beta_1}G_2(z)\right)F(z)$$
$$= K\frac{z^2\sin(\mu-\psi) + ze^{-T_0/\tau}\sin\psi}{z^2 - 2ze^{-T_0/\tau}\cos\mu + e^{-2T_0/\tau}}F(z) \tag{B19}$$

とおくと

$$G(z) = \frac{K}{A_1 K_B}\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\frac{G_1(z)}{1 + G_0(z)} \tag{B20}$$

と書け、$G_0(z)$ はオープンループ伝達関数と解釈できる。

ここで筆者がまだ解けない問題が残っている。フィルター $F(z)$ に与えるべき最適位相はどのように考えたら良いのであろうか。(B19)式を見ると $F(z)$ はオープンループ伝達関数の共通因子であるが、$e^{j\psi}$ はオープンループ伝達関数の共通位相因子にはなっていない。(B19)式からは、安定条件即ち $\left|z_p\right| < 1\,(p = 1, 2, \cdots, M)$ を満たしており、かつ $\omega = 2\pi\nu/T_0$ の近傍で $\left|G_0(e^{j\omega T_0})\right| >> 1$ であれば、$F(z)$ の位相はクローズドループの応答にはほとんど関係しないように見える。位相は安定ゲインの符号に関係する程度であって、あまり位相にとらわれる必要はないのではないか。直感的には 4-3 節で述べたように、$F(z)$ の位相は BPM の位置での x とキッカー位置での x' のベータートロン位相差とするのが良いと思われるが、このような位相が最適と断じて良いのであろうか？最適位相は(B19)式から自然に導かれるはずであるが、まだ証明できていない。この問題は筆者の宿題として残っている。