ビーム不安定性ー
電子雲、イオン、CSR

1 はじめに

初期の加速器では導体の真空パイプの中を荷電粒子ビームが磁石、高周波加速装置などの作用を受けながら高速で運動しているというモデルで設計され運転されてきた。荷電粒子を加速するために空洞内に高周波電磁波を閉じ込めビームにエネルギーを渡すことが加速装置の役目である。空洞の固有モードはビーム（バンチ）が来るたびに加速電場がビームに働くように設計する。しかしながら空洞にはさまざまな固有モードが存在し、それらはビームによって誘起され周波数によっては蓄積し、バンチ間の運動に結合を引き起こしたり、バンチを変形させたりする。このような現象の理解を目的として不安定性の研究が発展してきた。初期の加速器はバンチ数も少ないため、バンチ結合型不安定性に対しては長い時間誘起された電磁場が残存するいわゆる Q 値の大きな空洞の固有モードが、単バンチ不安定性にはチェンバー、空洞の段差からの電磁場によるビームへのインパクト (R/Q) がそれぞれの原因として知られていた。ビームはシンクロトロン放射光や残存ガスのイオン化、ビーム粒子のロスにより、電子やイオンなどの異種粒子を作るが、バンチ間隔が広いため次のバンチがくるまでに作られた異種粒子は消えてしまい、バンチ間結合も起こさないし、1 バンチで作られる数は少ないので単バンチ不安定性も起こさなかった。

その後の加速器の高強度化に伴い、ビーム電流は mA から A へと増加、電子陽電子リングではバンチ数を増やし、陽子リングでは長いバンチに多くの陽子をつめ高強度化が行われている。このような加速器ではビームが作る異種粒子、とりわけビームと電荷が反対の粒子はビームに引き寄せられ蓄積し、ビームを取り巻く雲を形成する。その雲とビームがコヒーレント運動をすることで不安定性が起こる。異種粒子は非相対論的で、ビームとの相互作用の間ビーム進行方向には動かないと考える。ビームへの影響はビームのある進行方向位置部分 (z_1) と異種粒子が相互作用し、異種粒子が受けた摂動をビームの別の進行方向部分 (z_2) に伝える。

加速器におけるプラズマ型不安定性は陽子リングにおいて、BINP-PSR、CERN-ISR などで観測されていた不安定性の解釈として考えられた [2]。陽子ビームは電子ビームに比べバンチ長が長く、場合によってはリング 1 周にわたってビーム粒子が詰まった状態で運転されている（コースティングビームという)。e-p 不安定性といわれている問題となった現象はイオン化によってできた電子が陽子ビームに捕獲され、ビームが横方向に振動し不安定になるというものである。コースティングビーム全体としてコヒーレントにベータトロン振動しているビームにおける 2 流体不安定性である。

プラズマ物理の 2 流体不安定性は相対速度の異なる 2 種類のビームが互いの固有振動で不安定を起こすものである。ちなみに相対速度が同じビームは振動モードは存在するが、不安定を起こさない。このことは静止した異荷電の 2 粒子を想像すれば容易に理解できる。加速器の場合はビームが高 (光) 速で運動し、異粒子は静止系である。ビームが周期条件を満たすベータトロン振動をしているため、静止系でのビーム振動 ($m\omega_0 + \omega_\beta$) とビームポテンシャルの中での異粒子の振動数 (ω_c) との共鳴と考えられる。異粒子によりベータトロン振動は多少変更を受けるがそのチューンシフトは 0.1 以下で、それ自体は大きくはない。

80 年代以降、それまで少数バンチで運転されていた高エネルギー用電子 (衝突) 加速器から、放射光用電子加速器用が派生し、放射光高輝度化をめざし多バンチ運転に移行していった過程で、残留ガスから生成されたイオンが捕獲され、e-p 同様にして不安定が起こることが観測された。この現象はイオントラッピングといわれ長年研究されてきた [4]。

90 年台に入り計算機の発達に伴い、ラティス設計、ダイナミックアパーチャなどの問題に始まり、真空パイプのインピーダンス問題、ビームビーム効果などに数値的解析が使われるようになった。そしてこれらの不安定性がシミュレーションで取り扱われるようになった。イオン不安定性をシミュレーションではじめて扱ったのは、いわゆるファーストイオン不安定性と呼ばれる、シングルパスでのイオン不安定性の問題である [6]。物理的には従来のイオン不安定性と同じくビームとイオン振動の共鳴であるが、それまでの制限された条件から、実際の条件にあわせた解析が行われるようになった。

そのころ日米で B ファクトリィ計画が提案され、蓄積電流が A という当時は信じられない電子、陽電子リング加速器が設計され、建設されようとしていた。また当時 PF はイオン不安定性を避けるため陽電子運転が開始された。陽電子運転の最初は未知のバンチ結合型不安定性に悩まされが、8 極磁石の効果で不安定性を抑えつつ運転され、500 mA 以上の電流の蓄積に成功していた。そして B ファクトリィに向けて、PF で観測されていた不安定性の理解という動機もあって、陽電子リングの電子雲効果が発見された [5, 8]。

電子はイオンに比べきわめて軽いため、バンチ化されたビームではビーム振動と共鳴する振動数を持つことはできない。不安定を起こす電子はビームと一度強く相互作用するだけである。そのため解析的な手法はなじまず、計算機による解析が最初から行われた。ある意味で 2 流体不安定性の進展、展開は、その解析手法の進展とともに進んでいる。KEKB の運転の進展とともにバンチ結合型不安定性だけでなく、単バンチ不安定性も発見され、その抑制により KEKB のルミノシティは飛躍的に伸びた。

いまや電子雲効果の研究は J-PARC、SNS、LHC のような高強度陽子加速器、superKEKB、SuperB、ILC ダンピングリングなどの設計にも深くかかわってきている。

以下で円形加速器における航跡場の概念、ビーム振動の基礎から始め、2 流体不安定性の概要を述べ、e-p、イオン、電子雲不安定性について順次展開していく。

最後に縦方向不安定性として最近問題になっている CSR 不安定性についておまけ程度に触れる。

2 航跡場

一般的にビームの不安定性の原因はビーム前方の変位（x、y 方向、密度）が後方に摂動として伝わることが原因である。よく知られているようにビーム内の超相対論的粒子は互いに相互作用することがない。そのためビーム内の相互作用はビーム前方の粒子 ⇒ 真空パイプの中の「何か」⇒ 後方の粒子といった形で伝搬する。ここで「何か」というのが前述の空洞内に誘起される電磁場であり、この講義の対象とする電子雲、イオンである。もう一つの対象となる CSR は電磁場あるがこれは伝搬する電磁波である。いずれにせよビームの前後の運動相関に対して航跡場という考えを使う。$x = (x, y, z)$ に関する運動方程式は以下のように書ける。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_x(s)x = -\frac{Nr_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_x(z-z')\rho_{1,x}(z')dz'$$
$$\frac{d^2y}{ds^2} + K_y(s)y = -\frac{Nr_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_y(z-z')\rho_{1,y}(z')dz' \tag{1}$$
$$\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{\mu_s^2}{L^2}z = -\frac{Nr_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_0'(z-z')\rho_0(z')dz$$

変数の定義だが、p_x, p_y は通常の横方向力学的運動量を設計運動量 (p_0) で規格化した無次元量であり、線形の範囲で $p_{x(y)} = x'$ (y') である。z 方向は設計運動量からのずれを規格化 $p_z = \delta p/p_0$, $z = s - ct$ は基準粒子に対する到着時刻の進みに c をかけたもので、手っ取り早くいえばバンチの前 ($z > 0$) 後 ($z < 0$) の位置と思って差し支えない。我々がビームの前後を論じるときの観測量は、モニターのある場所での到着時刻だからこの z の定義 (時刻) は実は的を得ている。K は電磁石などによる横方向の収束力。$\mu_s = 2\pi\nu_s$ はシンクロトロンチューンである。L で割っているのは s が L 進んでチューンだけ位相が進むからである。横方向も収束力のディテイルを問わなければ $K \to (\mu_x/L)^2$ としても本質は失わない。W は後方だけに相関を与えるとしたら、

$$W(z) = 0 \qquad z > 0 \tag{2}$$

が満たされるが、ビームが光速で直進する場合以外はこの条件は満たされない。また先行粒子の直後は進行方向に減速、また横方向に発散力を与える。

左辺はビームの前後の相関を与える項で W を航跡場という。航跡場はリング 1 周を積分したもので定義するのが一般的である。局所的な効果は重要でない場合が多いからである。運動方程式 (1 では単位距離 (s) あたりの航跡場として分母に L が入っている。$x - y$ に関しては前の粒子 (z') に対する後ろの粒子 (z) の運動への効果は前の粒子のずれに比例し $z - z'$ のみによるということを意味している。z に関しては (z') での密度が z の運動に影響している。

ビームの進行方向に対する、密度、$x - y$ モーメントを記述するための ($\rho_{1,x}, \rho_{1,y}, \rho_0$) は以下で表される。

$$\rho_{1,x}(z) = \int x\Psi(x, p_x, y, p_y, z, p_z)dxdp_xdydp_ydp_z$$

$$\rho_{1,y}(z) = \int y\Psi(x,p_x,y,p_y,z,p_z)dxdp_xdydp_ydp_z \tag{3}$$
$$\rho_0(z) = \int \Psi(x,p_x,y,p_y,z,p_z)dxdp_xdydp_ydp_z$$

Ψ は位相空間でのビーム粒子の分布関数である。分布関数としての運動方程式は Vlasov 方程式と呼ばれていて以下の式で表される。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s} = -[\Psi,H] = \sum_{i=xyz} -\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} + \frac{\partial\Psi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{ds} \tag{4}$$

[] は古典力学におけるポアソン括弧である。H は運動を記述するハミルトニアンで以下のように書ける。

$$\begin{aligned} H = &\frac{p_x^2+p_y^2-\alpha_m p_z^2}{2} \\ &+\frac{K_x x^2+K_y y^2-\frac{\mu_s^2}{\alpha_m L^2}z^2}{2} \\ &+\frac{Nr_0}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}[W_0(z-z')\rho_0(z') \\ &+xW_x(z-z')\rho_x(z')+yW_y(z-z')\rho_y(z')]\,dz' \end{aligned} \tag{5}$$

分布関数の時間変化といっても基本的には個々の粒子の運動によって決まる。運動方程式 (1) または H から Vlasov 方程式の係数部分は以下のように与えられる

$$\frac{dx}{ds} = p_x \quad \frac{dy}{ds} = p_y \quad \frac{dz}{ds} = \alpha_m p_z$$
$$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds} = \frac{Nr_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_i(z-z')\rho_i(z')dz' \tag{6}$$

Vlasov 方程式と個々の粒子の運動方程式とはポアッソン括弧のまえの符号が違う。

$$\boldsymbol{x}' = [\boldsymbol{x},H] \tag{7}$$

これは運動による変数の変化に注目するか、位相空間座標内の分布に注目するかの違いである。位相空間内で衝突のない平均化した場の中で運動する場合、位相空間内での非圧縮性流体と考えられ、運動に沿って密度の保存が成り立つ。今の分布は昔の分布から決まっている、ということを表したのが、力学方程式と負号が反対の式 (4,7) である。式 (4) をもとに不安定性理論が作られていて、過去の多くの OHO テキストで論じられている。

3　ビームの振動モード

3.1　単バンチの振動モード

ビーム内の粒子は横方向 ($x-y$ 面内) にベータトロン振動、進行方向にシンクロトロン振動をしている。集団としてのビームも基本的にはそれらの振動の組み合わせである。単バンチの振動モードから考えよう。図 1 のように $y(x)$ がシンクロトロン振動の位相空間に対して相関がある分布がモードに対応している。式で表すと以下である。

$$\exp\left[-\frac{J_y(a\cos m\phi_s)}{2\varepsilon_y} - \frac{J_z}{\varepsilon_z}\right] \tag{8}$$

$$J_y(\Delta y) = \gamma_y(y-\Delta y)^2 + 2\alpha_y(y-\Delta y)p_y + \beta_y p_y^2 \tag{9}$$

それぞれの図はある (たとえば初期) 時刻で以下の $m=1,2,3$ に対応する分布をしている。この図では y としているが密度と考えれば ρ_0 も同じことである。ここで ϕ_s はシンクロトロン位相で $\phi_s = \tan\alpha_m p_z/\mu_s z$ で表される。周回に対して分布は以下の置き換えで変換される。

$$\begin{pmatrix} y \\ p_y \end{pmatrix} \to M_y^{-1}\begin{pmatrix} y \\ p_y \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\phi_s \to \phi_s + \mu_s \tag{11}$$

Vlasov 方程式は一周後の分布は一周前の位置での分布がそのまま移ってくる事を意味している。

4　多バンチの振動モード

各バンチを重心で表し、そのスナップショットのバンチ列の並び方でモードを定義する。スナップショットなので周期条件を課することができる (フーリエ成分で表す)。バンチを $m=0,M-1$ で表し、m が大きいバンチが前方であるとする。バンチ m の振動を以下のように表す。n がモードを表し、スナップショットでの 1 周あたりのうねりの数である。ベータトロン振動をしている。

$$y_m(t) = a^{[n]}\exp\left(2\pi i\frac{nm}{M} - i\omega_\beta t\right) \tag{12}$$

図 2 に $n=0,1,2$ の例を示す。一般の振動はモードの重ねあわせである。モードの数もバンチ数と同じ M である。このモード (n) で振動するバンチ列を加

速器のある場所においたモニターで観測しよう。バンチ $m=0$ の到着時刻を $t=0$ とすると、バンチ m は $t=-mT_0/M$ に到着する。モニターの受ける信号は以下となる。

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} y_m\left(-\frac{mT_0}{M}\right)\delta\left(t-\frac{mT_0}{M}\right) \\
&= a^{[n]}\sum_m \exp\left[\frac{2\pi i m}{M}(n+\nu_\beta)\right]\delta\left(t-\frac{mT_0}{M}\right)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

信号をフーリエ解析する。

$$
\int y(t)e^{-i\omega t}dt = \sum_{m=0}^{\infty}\exp\left\{im\left[(n+\nu_\beta)\omega_0+\omega\right]\frac{T_0}{M}\right\}
\tag{14}
$$

ここで以下の公式を使った。

$$
\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(im\omega T_0)=\omega_0\sum_{p=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-p\omega_0)
\tag{15}
$$

ビームモニター信号をスペクトルアナライザーと言う信号の周波数特性を測る装置を使って観測すると、モード n の振動に対して以下の周波数の信号が観測される。

$$
\omega=(n+\nu_\beta+pM)\omega_0
\tag{16}
$$

$pM\omega_0$ は同じ強さの信号がバンチ間隔に対応する周波数で繰り返されることを意味する。その信号を強さを調べることでどのモードがどれだけ誘起されているかがわかる。式 (16) の周波数は実験室系でのあるモードのビームの振動周波数である。これを逆手にとれば実験室系である周波数の振動源あるいは航跡場があればそれに対応したモードの振動が誘起されることになる。

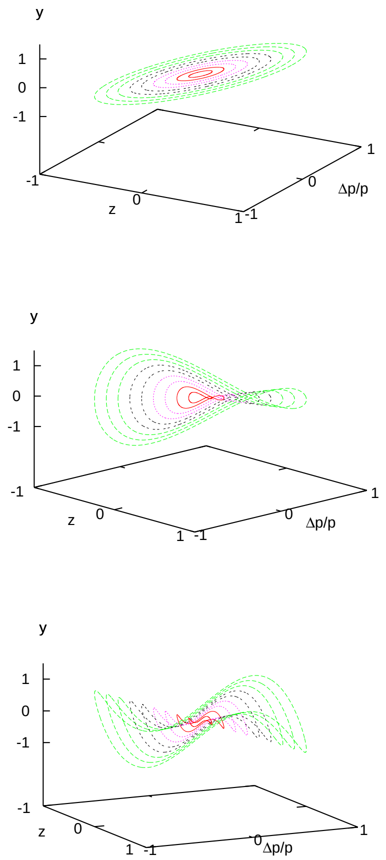

図 1: バンチ内振動のモード

4.1 コースティングビームの振動モード

陽子ビームにおいて RF 電圧を OFF すると、バンチ内粒子はエネルギーの違いからスリップして、リング全体に一様に存在するようになる。これをコースティングビームという。コースティングビームの分布関数は以下で表される。

$$
\begin{aligned}
\Psi(y,p_y,s) &= \delta\left[y-a\cos\left(\frac{2\pi n}{L}-\omega t\right)\right] \\
&\quad \delta\left[p_y-b\sin\left(\frac{2\pi n}{L}-\omega t\right)\right]
\end{aligned}
\tag{17}
$$

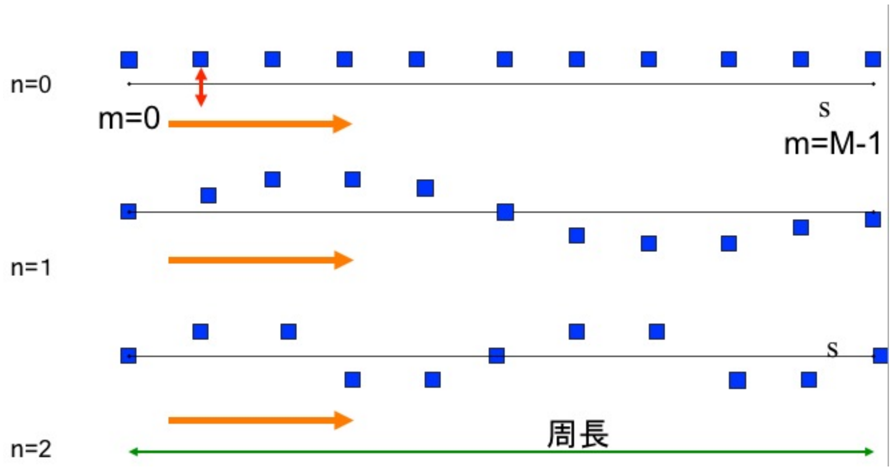

図 2: 多バンチの振動のモード

ここで $z = s - ct$ である。Vlasov 方程式 ($z - s$ を変数)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Psi}{\partial p_y}\frac{dp_y}{ds} = 0 \tag{18}$$

から $b = ak$, $\omega - n\omega_0 = \omega_\beta$ が求められる。ω がモニターで観測される周波数であり、ω_β がベータトロン周波数で $p'_y = -\omega_\beta^2 y$ に従う。

実際にリング一様に分布しなくても周期条件を仮定できるような状況であるならば、コースティングビームと考えることができる場合がある。それはバンチ内の不安定性の成長がシンクロトロン振動より速く、バンチ内振動数が大きい場合である。ビームの振動は図 3 のようになる。

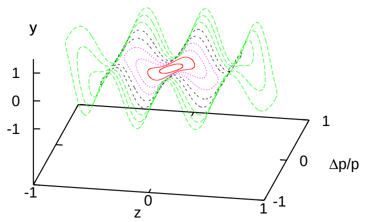

図 3: コースティングビーム的な振動のモード

多バンチ振動において $M \to \infty$ の極限をとったものをコースティングビームと考えることもできる。モニターで観測される信号は上述の式と同じく、リング一周でうねる数 n に対応して

$$\omega = (n + \nu_\beta)\omega_0 \tag{19}$$

である周波数が観測される。

5　加速器における 2 流体不安定性

2 流体不安定性は、相対速度の異なる 2 種類のプラズマは安定に存在できない、プラズマは集団的な相対速度が等しい状態が安定である、という物理的事実から起こるべくして起こる現象である。加速器の場合は磁場による強い束縛、ベータトロン振動、があるため、ちょっとした違いはあるが、物理的本質において違いがあるわけではない。

まず一様にチェンバーの中心を流れるビームを考える。その周辺に反対の電荷を持った粒子の雲があるとする。ビームの運動はその横方向 (進行方向に垂直な面) の重心位置 $y(s, t)$ で記述される。ここで s は進行方向座標、t は時間である。y は垂直方向を意味するが、x でもよい。電子などの場合横長のビームの場合垂直方向が問題になることが多いので y で代表して話を進める。加速器では運動する粒子に乗った変数を使うことも多い。基準粒子に対する時間遅れに光速を掛けた量、$z = s - ct$ と s を使い、$y(z, s)$ で記述する。s, t, z の内の 2 つが独立変数であるが、一方を座標変数、他方を時間的変数 (運動のパラメータ) にとる。どちらを使っても同じことであるが、どちらを使うのが簡単かは問題による。今の問題は進行方向に一様なビームの進行方向位置 s での y 方向の位置を時間の関数として調べる。流体力学には流体の運動を絶対位置、時間で記述する考え方と、流

体に沿って運動を記述する考え方があるが、[1]ここでは前述の方法をとる。異種粒子が静止系にあり、ビームもリングにわたって一様にあるので、そのほうが相互作用を素直に表すことができる。ベータトロン振動はビーム粒子に乗った (ラグランジュ) 的な表現になっている。ビーム粒子に乗った的微分と静止系で見た微分は以下の関係にある。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial s} \tag{20}$$

異種粒子がビーム近傍にあり、それがガウス分布をしコヒーレントにビームと相互作用するとすると、その相互作用は 2 次元のクーロン力と考えれば (異種粒子は非相対論的)、運動方程式は以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,t) + \omega_\beta^2 y_b(s,t) = -\frac{2n_c r_b c^2}{\gamma} F(y_b(s,t) - y_c(s,t)) \tag{21}$$

$$\frac{d^2 y_c(s,t)}{dt^2} = -2n_b r_c c^2 F(y_c(s,t) - y_b(s,t)) \tag{22}$$

ここで n_b, n_c はそれぞれビーム、粒子雲の線密度であり、r_b, r_c はそれぞれの粒子の古典半径である ($r_{b(c)} = 1/4\pi\epsilon_0 e^2/m_{b(c)}c^2$)。プラズマ物理との違いは加速器中のビームはベータトロン振動をしていることであることにより ω_β を含む項があり、それは相互作用項に比べはるかに強い。

式 (21,22) の F は非線形力になるが、ビーム近傍では以下のような線形力が支配的である。

$$F_y = \frac{y}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \tag{23}$$

ここで $\sigma_{x(y)} = \sqrt{\sigma_{x(y),b}^2 + \sigma_{x(y),c}^2}$ である。一方遠方では $F_y = y/r^2$ で減少する。σ_b はビームサイズ、σ_c は粒子雲のサイズであるが、粒子雲の場合ビームサイズより大きな場合もあるので、ここではビームとのコヒーレント振動に対して、集団的に運動する実効的サイズといったほうがいいだろう。具体的にどのくらいのサイズかというと、雲のサイズが大きい場合、数値的に調べないとわからない。粒子雲がビームサイズ程度なら多分問題なく、そのサイズを入れて間違いない。

異粒子は、磁場がかかっている場合も考慮しなければならないが、ここではビームからの作用のみを考える。このように方程式ができてしまえば、簡単な 2 つの線形微分方程式なので解は直ちに求められる。

ここで $y(s,t) = \exp(iks - i\omega t)\tilde{y}$ とする。k は一様ビームの s に対する振動パターンを表す。もちろんどんな振動パターンも異なる (ω, k) の足し合わせで表されるので、ある (ω, k) だけ考えれば十分である。リングの場合は周期的境界条件のため、$k = 2\pi m/L$ でなければならない。ここで L はリングの周長、m は整数で、時間をとめてみたときの 1 周の振動パターンの節の数である。当然ながら線形加速器の場合は k に制限はない。

この式をフーリエ変換して周波数に対する分散式を表すと、

$$\begin{aligned} [(\omega - kc)^2 &- \omega_\beta^2]\tilde{y}_b = \omega_b^2(\tilde{y}_b - \tilde{y}_c) & (24) \\ \omega^2 \tilde{y}_c &= \omega_c^2(\tilde{y}_c - \tilde{y}_b) & (25) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \omega_b^2 &= \frac{2n_c r_b c^2}{\gamma\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} & (26) \\ \omega_c^2 &= \frac{2n_b r_c c^2}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} & (27) \end{aligned}$$

y_c,y_b を消去することにより、以下の分散式が得られる。

$$(\omega^2 - \omega_c^2)\left[(\omega - kc)^2 - \omega_\beta^2 - \omega_b^2\right] = \omega_b^2\omega_c^2. \tag{28}$$

この ω に対する 4 次方程式を解けば、ある k を持ったビーム、粒子雲の振動パターンがどのように成長していくかがわかる。

以下でリングの場合と、線形加速器の場合を論じるが、リングの場合とはビームが一様に回っている状態で周期的境界条件がなりたつ場合、線形加速器の場合とは周期的境界条件がない場合で、リング内の一部にビームが回っている場合を含む。

リングの場合 $kc = m\omega_0$ で置き換える、ここで m は整数で、ω_0 は周回周波数である。不安定は粒子雲の振動に近いビームの振動モードが誘起されることから起こる、ある意味粒子雲の振動とビームの振動モードの共鳴である。そのため $\omega \approx \omega_c \approx m\omega_0 \pm \omega_\beta$ で不安定になることが推測される。$\omega = \omega_c + \Delta$、$\omega_c - m\omega_0 = \pm\omega_\beta + \Delta_\pm$ と置き、式 (28) に代入すると、高次を無視すると以下の Δ に関する 2 次方程式が得られる。

$$\Delta^2 \pm \Delta_\pm \Delta \mp \frac{\omega_b^2 \omega_c}{4\omega_\beta} = 0 \tag{29}$$

[1] 前述をオイラー的、後述をラグランジュ的という

判別式 D は

$$D = \Delta_{\pm}^2 \pm \frac{\omega_b^2 \omega_c}{\omega_\beta} \tag{30}$$

$\omega_c - m\omega_0 \approx \omega_\beta$ では判別式は常に正で安定である。一方 $\omega_c \approx m\omega_0 - \omega_\beta$ では共鳴条件からのずれが小さくなったとき、$\Delta_-^2 < \omega_b^2\omega_c/\omega_\beta$ で虚根になり不安定になる。このことはストップバンドが存在するということである。

線形加速器の場合は k に条件がつかない。$\omega_\beta - kc = -\omega_c$ をもった波数 k の振動は虚数部が現れる。

$$\Delta_{\pm}^2 = \pm \frac{\omega_b^2 \omega_c}{4\omega_\beta} \tag{31}$$

つまり必ず不安定性である。ここでは述べないが減衰させる別の効果もある。

加速器の不安定性は一般に航跡力 (wake force) を使って論じられる。ここでは式 (21),(22) からスタートして、その不安定性理論に沿うような変形を行ってみる。まず式 (22) は定数変化法などを用いて以下のように解くことができる。ここで $t = t_0$ で $y_c = 0$ とした。

$$y_c = \omega_c \int_{t_0}^{t} y_b(s, t') \sin \omega_c (t - t') dt' \tag{32}$$

この式を (21) に代入すれば運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,t) + \tilde{\omega}_\beta^2 y_b(s,t) \\ &\qquad = \omega_b^2 \omega_c \int_{t_0}^{t} y_b(s, z') \sin \omega_c (t - t') dt'. \end{aligned} \tag{33}$$

ここで $\tilde{\omega}_\beta^2 = \omega_\beta^2 + \omega_b^2$ は粒子雲との相互作用を考慮したビームのベータトロン角周波数である。チューンシフトとしてあらわすと ($\tilde{\omega}_\beta = \omega_\beta + \Delta\omega_\beta$)、以下のように書ける。

$$\Delta\omega_\beta = \frac{\omega_b^2}{2\omega_\beta}, \tag{34}$$

ここで ω_0 は周回角周波数である。式 (33) の右辺は加速器の不安定性理論でお馴染みの航跡力 (wake force) としてみなすことができる。wake force は 2 点の進行方向の位置の差の関数である。ある単位時間 $T_0 = L_0/c$ あたりの wake function は以下のようになる。

$$W_1(z) = cR_S/Q \sin \omega_c t \tag{35}$$

ここで wake function の振幅である R_S/Q は以下のようになる。

$$cR_S/Q = \frac{\gamma \omega_b^2 \omega_c}{n_b r_c c^2} T_0. \tag{36}$$

結局運動方程式は wake function$W$ を使って以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial s}\right)^2 y_b(s,t) + \tilde{\omega}_\beta^2 y_b(s,t) \\ &\qquad = \frac{n_b r_b c^2}{\gamma T_0} \int_{t_0}^{t} W(t - t') y_b(s, t') dt'. \end{aligned} \tag{37}$$

この wake function は従来の言い方で $Q = \infty$ の共鳴型インピーダンスによるものである。

この wake function に対応するインピーダンスは以下のように定義される。

$$Z_\perp(\omega) = i \int_{-\infty}^{\infty} W(t) \exp(-i\omega t) dt \tag{38}$$

この場合よく知られているように以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Re Z\perp &= \frac{\pi c R_S}{2Q} \left[\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)\right] \\ \Im Z_\perp &= \frac{cR_S\omega_c}{2Q} \left(\frac{1}{\omega - \omega_c} + \frac{1}{\omega - \omega_c}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

ここで少しくどいようだが、教科書にあるような電磁場による wake function の導入に沿って同じことを繰り返してみよう。基底状態は電磁場の場合、空洞であったが、ここではビーム、粒子雲が s 軸上 ($x = y = 0$) に一様に存在する場合を基底状態とする。粒子雲は式 (22) に従い運動する、すなわち ω_c で振動する。この周波数は空洞の固有周波数と同じ意味を持つ。今ビームのある位置 $z = 0$ に y 方向へ小さな変異があるとしよう、$y = y_0$。粒子雲はこの摂動によって、運動を開始する。ダイポールを持ったビームの通過によって、空洞に固有振動が誘起される状態である。粒子雲の受ける運動量変化は

$$\Delta v_y = \omega_c^2 \delta s \Delta y \tag{40}$$

その後の粒子雲の運動は

$$y_c = \frac{v_y}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \tag{41}$$

によって表される。この振動によって、ビームは以下のような力を受ける。

$$\Delta p_y \equiv F_y = \omega_b^2 y_c = \omega_b^2 \omega_c \delta s \Delta y \sin \omega_c (t - t') \tag{42}$$

これから wake function が再び得られる。

$$W = \frac{F}{n_b r_b \Delta y} = \frac{\gamma \omega_b^2 \omega_c}{\lambda_b r_c c^3} L \sin\left(\frac{\omega_c}{c} z\right) \tag{43}$$

つぎにリングの場合でのこの wake force による不安定性を調べよう。運動方程式 (37) をフーリエ変換する。右辺の wake force はフーリエ変換のためインピーダンスで表される。

$$-(\omega - m\omega_0)^2 + \omega_\beta^2 = \frac{n_b r_b c^2}{\gamma T_0} Z_\perp(\omega) \tag{44}$$

右辺は小さい量なので、$\omega \approx n\omega_0 \pm \omega_\beta$ のときを考えれば十分である。

$$\omega - m\omega_0 \pm \omega_\beta = \pm \frac{n_b r_c c^2}{2\omega_\beta \gamma T_0} i Z_\perp(\omega) \tag{45}$$

本来は上の式を解くのだが、右辺 Z において $\omega = m\omega_0 \pm \omega_\beta$ を代入する。ω の虚数部が不安定性の成長度 $1/\tau$ になる。

$$\frac{1}{\tau} = \mp \frac{n_b r_c c^2}{2\omega_\beta \gamma T_0} i \Re Z_\perp(m\omega_0 \pm \omega_\beta) \tag{46}$$

式 (39) から、不安定になるのは下側の符号をとった場合、つまり $\omega = m\omega_0 - \omega_\beta$ の場合で、成長度は無限大である。式 (30) と定性的に一致しているが、ストップバンドの有無、成長度の大きさの違いは上述の近似からくる。あえて式 (44) を解かないのは、Q が有限の場合ストップバンドが広がって実質上なくなるため、この方法でもとめた成長度で実際正しいからである。このことは後でまた触れる。

次に線形加速器、あるいはリング内で一部にビーム粒子が入っている場合について述べる。周期的条件がないので、ビームの振動に対して条件はない。ビームは動いてしまうのでラグランジュ的に考える。電子雲は実験室系で運動するので、wake force はそれぞれの s に存在するので、加速器で一般に使われている時間変数を s にとる。z は先ほども述べたように基準粒子からの時間遅れに光速をかけたもので、実質先頭を $z = 0$ としたときの進行方向の位置である ($z < 0$)。

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 y_b(s,z)}{ds^2} + \left(\frac{\tilde{\omega}_\beta}{c}\right)^2 y_b(s,z) \\ &\quad = \frac{\omega_b^2 \omega_c}{c^3} \int_z^\infty y_b(s,z') \sin\frac{\omega_c}{c}(z-z') dz'. \end{aligned} \tag{47}$$

$y = \tilde{y} \exp(-i\omega_\beta s/c) \exp(\omega_c z/c)$ という解を考える。$\tilde{y}(s,z)$ は z, s に対してゆっくり変わる成分で、2 回微分を無視すると、

$$\frac{d\tilde{y}}{ds} = \frac{\Lambda}{4} \int_z^\infty \tilde{y}(s,z') dz' \tag{48}$$

ここで

$$\Lambda = \frac{n_c r_b}{\gamma} \frac{1}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)} \frac{\omega_c}{\omega_\beta} = \frac{\omega_b^2 \omega_c}{2} \omega_\beta \tag{49}$$

さらに z で微分すると以下のような偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial s} = \frac{\Lambda}{4} \tilde{y}(s,z) \tag{50}$$

この解は方程式の対象性から $F(\Lambda z s/4)$ とすると

$$\xi F'' + F' + F = 0 \qquad \xi = \Lambda/4 \tag{51}$$

となり、変形ベッセル関数 $F(\xi) = I_0(2\sqrt{\xi})$ で表せる。結局解は

$$\tilde{y} = I_0(\sqrt{-\Lambda z s}) \approx \exp(\sqrt{-\Lambda z s}) \tag{52}$$

となり、成長は指数関数的でなく平方根が入る。この解はリングでの $Q = \infty$ の場合の解に対応するものである。バンチ長、トレイン長が Q に対し短い場合、$\omega_c \sigma_z / cQ < 1$ の場合には上の式は正しいが、長い場合、$\omega_c \sigma_z / cQ > 1$、には正しくない。

ちなみにバンチ長が短い場合 ($\omega_c \sigma_z / c < 1$) では、$Q$ に関係なく、

$$\exp\left[\left(\frac{\Lambda}{2} \sigma_z s\right)^{1/3}\right] \tag{53}$$

のように成長する。

空洞の場合、空洞表面のロスによって固有振動は減衰するため有限の Q になる。粒子雲の場合でも、ビームに誘起された粒子雲の振動が永遠に続くことは考えられない。我々は異種粒子の振動がビームの強い非線形力のなかで起こっていることを知っている。Q がある程度小さく、つまり粒子雲の振動の周期数幅がストップバンドより広ければ、ストップバンドは意味を成さなくなり、不安定性の強さは共鳴からの周波数差、言い換えれば式 (45) において ω_c でピークを持つインピーダンスの $Z(m\omega_0 - \omega_\beta)$ の大きさで決まる。大型のリングや低エミッタンス、高強度リングでは周回周波数に比べ大きく、$\omega_c \gg \omega_0$、そ

の幅も大きいのでストップバンドは存在しない。むしろいくつかの不安定モードが現れる。

どのくらいの Q なのかは線形理論では知ることはできないが、あとで数値的な手法からわかるようにQ≈ 5 程度である。ここでは現象論的にチューン広がり、減衰振動を導入して、これまでの議論を繰り返す。

式 (22) に以下のように減衰項を加える。

$$\frac{d^2y_c}{dt^2}+\alpha\frac{dy_c}{dt}=2n_br_cF(y_c-y_b) \tag{54}$$

この減衰は Q が有限になることに対応する。Q と α の関係は $\alpha=\omega_c/2Q$ によって表される。wake function は

$$W(z)=cR/Q\exp(\alpha z/c)\sin(\omega z/c) \quad z<0 \tag{55}$$

インピーダンスは

$$Z_\perp(\omega)=\frac{c}{\omega}\frac{R_S}{1+iQ\left(\frac{\omega_c}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \tag{56}$$

リングの場合の不安定成長度はこのインピーダンスの式 (56) を (46) に代入すればよい。その Q に応じていくつかのモードが不安定になる。

線形加速器、リングの一部にビーム粒子がある場合には式 (50) は

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial s}\tilde{y}=\alpha\frac{\partial}{\partial s}\alpha+\frac{\Lambda}{4}\tilde{y}(s,z) \tag{57}$$

となる。s が小さいうちは左辺は無視でき右辺だけで決まる、指数関数的成長が見られる。

$$\tilde{y}\propto\exp(\Lambda s/4\alpha) \tag{58}$$

この成長度は一様ビームの場合と同じである。

ここまでが線形理論で得られる加速器内での 2 流体不安定性の概要である。wake force による不安定性は知られているし、知っている方にはここまでわかればずいぶん見通しがついたことと思う。以降はこの考えを基礎に個々の場合、すなわち e-p、イオン (トラッピング、ファースト)、電子雲 (バンチ結合型、単バンチ型) についてそれぞれの特徴を述べつつ、説明していく。

6 e-p 不安定性

陽子ビームと電子雲の 2 流体不安定性は、いくつかの陽子蓄積リングで観測され、e-p 不安定性といわれてきた。陽子ビームは一様ないし非常に長い $\omega_c\sigma_z/c\gg 1$ 場合を想定している。物理的モデルは後で述べる陽電子リングにおける単バンチ電子雲不安定性と同じである。

リングの場合 Q によって静止系でのビーム振動周波数 $m\omega_0-\omega_\beta$ が電子の振動数幅に入ると基本的にビームは不安定になる。しかしながらビームを安定化させるメカニズムがある。それはランダウ減衰である。ビーム粒子が s 方向にエネルギーの違いにより速度が異なる。超相対論的ビームの場合でも速度は c で一定だが、運動量コンパクションがあるため、進行方向速度に違いが出てくる。

ある周波数でビームが振動していたとしても、進行方向速度差により位相が混じって振動が減衰してしまう。図 4 にその様子を図示した。ある瞬間正弦波的なビーム振動があってもエネルギー毎に正弦波がずれてしまい。平均すると重心は 0 になってしまう。このように位相が混じることでコヒーレント振幅が減衰していくいわゆる現象をデコヒーレンスという。ランダウ減衰は、ほぼ同じことなのだが"不安定性で起こる振動の成長を抑える"効果として区別するべきだといわれている。ある振幅のコヒーレント振動がビームに振動させようと、ビームにエネルギーを与えようとしても、振動は育たず、エネルギーをビームに受け付けてもらえないいう、なんとも奥ゆかしい物理がランダウ減衰の本質である。つまりエネルギーを与えたとき、ビームに振動エネルギーを与えようとしたとき、エネルギー毎の振動が大きくなって、コヒーレント振動が無い状態になるのではなく、コヒーレント振動はもちろんのこと、エネルギー毎の振動も大きくならない、つまりビームはエネルギーを得ないということである。[2]図でわかるようにモードが高いほどコンパクションに対して位相が混じりやすく、減衰率も大きい。

周回周波数はエネルギーによる。

$$\Delta T/T_0=\eta p_z \quad \eta=\alpha-\frac{1}{\gamma^2} \tag{59}$$

2 流体不安定性はビームの横波の成長なので、エネルギーによって進行方向進度がばらばらになると、横波のコヒーレンスが失われてしまう。

エネルギー $p_z=\Delta E/E_0$ を持ったビーム粒子に対する wake force は、そのビーム粒子より過去に通

[2]エネルギーがあっても使ってしまうので、いただかなくても結構です、という感じ。

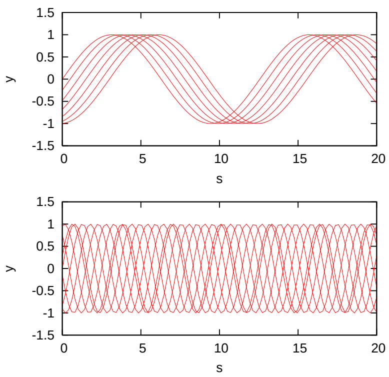

図 4: ランダウ減衰 (正確にはデコヒーレンスによる減衰) の概念図

過したすべてのビーム粒子の分布に応じて発生する。つまりビーム粒子のエネルギーに対する分布を $f(p_z)$ で表すとすると、wake force は p_z を持ったビーム粒子 (の重心) と、エネルギーに対する分布関数 ($f(p_z)$) の積の積分にたいして wake function$W$ の積をとり、時間に対して積分する。ビーム粒子の (重心の) 運動は以下で表される。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{2\pi m v_s(p_z)}{L(p_z)}\right)^2 y_b(s,t,p_z)\\&\quad+\omega_\beta^2(1-\eta p_z)^2 y_b(s,t,p_z)\\&\quad=\frac{n_c r_b c^2}{\gamma T_0}\int_{-\infty}^{t}dt'W(t-t')\int_{-\infty}^{\infty}y_b(p_z')f(p_z')dp_z'\end{aligned}\tag{60}$$

ここで、$L(p_z)$ はエネルギーのずれ (p_z) を持ったビーム粒子のリング 1 周の軌道長、$L(p_z)=L_0(1+\alpha p_z)$、$v_s(p_z)$ はエネルギーのずれ (p_z) を持ったビーム粒子の速度、$v_s(p_z)=v_s(1+p_z/\gamma^2)$ で表される。2 項目は係数は以下のようになる。

$$\frac{v_s(p_z)}{L(p_z)}=\omega_0(1-\eta p_z)\tag{61}$$

ベータトロン周波数は s に対して進む位相から定義されているので、t に対しては速度や軌道長が長くなる効果が入ってくるため ω_β に $(1-\eta p_z)$ が掛けられている。

フーリエ変換することにより

$$\begin{aligned}&\left[-\{\omega-m\omega_0(1-\eta p_z)\}^2+\omega_\beta^2(1-\eta p_z)^2\right]y_b(\omega)\\&\quad=\frac{n_c r_b c^2}{\gamma T_0}Z(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}y_b(\omega)f(p_z')dp_z'\end{aligned}\tag{62}$$

左辺の係数を右辺の分母に移行し、両辺を $f(p_z)$ を掛け p_z で積分し、両辺を $\int y_b f dp_z$ で割れば、よく知られた分散式が得られる。

$$1=\pm i\frac{n_c r_b c^2}{2\omega_\beta\gamma T_0}Z(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(p_z)}{\omega-(m\omega_0\mp\omega_\beta)(1-\eta p_z)}dp_z\tag{63}$$

この分散式の ω の虚数部の有無によって、安定性を知ることができる。ビーム粒子のエネルギー分布に応じて安定性の条件が決まる。大雑把に安定性を知るには、積分が簡単に実行できる分布を選んでしまうことである。エネルギーに対してどの程度分布が広がっているかが減衰の本質だから、分布形状による多少の違いは無視してしまう。ローレンツ分布と仮定すれば、複素積分によって容易に積分を実行できる。その半値幅 σ_p を使って、分布を以下のように与える。

$$f(p_z)=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma_p}{p_z^2+\sigma_p^2}\tag{64}$$

積分を実行し

$$\omega=m\omega_0\mp\omega_\beta(1-\eta\sigma_p)\pm i\frac{n_b r_b c^2}{2\omega_\beta\gamma T_0}Z(\omega)\tag{65}$$

$\Im\omega<0$ であるために

$$\frac{n_b r_b c^2}{4\pi\gamma n\eta\sigma_p\omega_\beta}Z(\omega_c)<1\tag{66}$$

Z の寄与が大きい $\omega=\omega_c$ に対して、m が選ばれる。また $m\omega_0\mp\omega_\beta\approx\omega_c=n\omega_0$ とした。n は電子の周波数に対する周回周波数の比である。ローレンツ分布以外の分布では係数がかかるが、一般的に $\sqrt{3}$ を掛けた式が用いられている。

$$\frac{\sqrt{3}n_b r_b c^2}{4\pi\gamma n\eta\sigma_p\omega_\beta}Z(\omega_c)<1\tag{67}$$

電子雲の線密度で表すと、以下のようになる。

$$n_{e,th}=\frac{2\pi\sigma_x\sigma_y\gamma n\omega_\beta\eta\sigma_p}{\sqrt{3}Qr_b cL}\tag{68}$$

一様ビームでなく、バンチの場合でも $\omega_c\sigma_z/cQ>1$ ならば、不安定成長度は一様ビームと同じで、ランダウ減衰も同じため、安定化条件も同じく式 (67),(68) で表される。

表 1 にいくつかの陽子加速器に対して、電子雲の密度、ビーム線密度との比 (中性度) を示す。[3]

不安定の観測がされている LANL-PSR では 2.1% に対し、観測されていない Rutherford-ISIS では 42%

[3]JPARC-RCS、180 MeV 入射の場合は 400 MeV に比べやさしいので 400eV で評価

表 1: いくつかの陽子円形加速器における電子雲不安定性に対する電子密度閾値

variable	symbol	JPARC-RCS	JPARC-MR	KEK-PS	PSR	ISIS
circumference	L (m)	348.3	1567.5	339	90	163
relativistic factor	γ	1.43/4.2	4.2/54.	12.8	1.85	1.07
beam line density	$n_p(\times 10^{10})$ m^{-1}	37.7/50.6	50.6/259	0.74	46.2	20.8
rms beam sizes	σ_r (cm)	1.9/1.2	1.1/0.35	0.5	1.0	3.8
rms momentum spread	σ_E/E (%)		0.25	0.3	0.4	0.5
transition energy	γ_t	9.14	31.6 i	6.76	3.08	5.07
electron frequency	$\omega_e L/c$	422/775	27080	225	229	73.6
threshold	$n_{e,th}/n_p$(%)	28.2/3.0	3.1/0.042	4.0	2.1	42.

と不安定性を起こしにくいことがわかる。JPARC は PSR より電子密度の閾値が低い場合もある。実際に電子密度がどのくらいかを評価する必要がある。このためには 8.1 節にあるシミュレーションを行う。

連続ビームではイオン化などビーム近傍で作られた電子が、ビームポテンシャルにより安定に運動し、徐々に密度は増えていくため最終的には不安定を起こす密度に達する。しかしながらビームが振動を始める、微小振動であっても電子はビーム振動と共鳴しているため、大振幅になり、拡散してしまう。そのため不安定性の強さは生成率が低ければ問題にならない。このことは線形理論では表現できず、数値シミュレーションで示される [3]。この点から表 1 の中性度がどの程度意味があるか、難しい問題である。それが低いことがとくにイオン化で電子がゆっくり蓄積されるような場合、直ちに深刻であることを意味しない。

7　イオン不安定性

電子ビームにより陽イオンが作られ、ビームとの 2 流体不安定性がイオン不安定性である。電子ビームの残留ガス CO のイオン化断面積は、数 GeV のビームに対して $\sigma_{ion} = 2\times 10^{-22}$ m^2 であり、真空度 10^{-7} Pa では、電子 1 個が 1 m 進むとイオンの生成率は 4.5×10^{-9} m^{-1} である。

電子ビームは一般的にはバンチ長 $\sim 1cm$ で、RF 波長ないしその数倍の間隔 (L_{sp}) でリング全体あるいはイオンをクリアする目的でギャップを設けている。RF 周波数は日本では 500MHz 周辺が多用されている。波長は 60 cm である。イオンはビームのポテンシャルで運動するが、イオンの振動周波数がバンチ列の周波数 c/L_{sp} に比べ十分長ければ、バンチ列であるビームを連続的に近似できる。バンチ列を一様としたときのイオンの周波数は以下のようにかける。

$$\omega_i^2 = \frac{2N_e r_p}{ML_{sp}} \frac{1}{\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \tag{69}$$

ここで N_e はバンチあたりの電子数である。代表的な値 $N_e = 1\times 10^{10}$, $L_{sp} = 1$ m, $\sigma_x = 1$ mm, $\sigma_y = 0.1$ mm を代入すると、$\omega_i/2\pi = 5\times 10^6$ s^{-1}, $\omega_i L_{sp}/c = 0.1$ となる。この値はイオンは 10 バンチの通過に対して 1 rad の振動をすることを意味し、バンチ列は一様なビームと考えてよい。

イオンの受けるキックとバンチ間のドリフト時間からイオンの捕獲条件が計算できる。

$$K_i = \frac{2N_e r_p}{M} \frac{1}{\sigma_y(\sigma_x+\sigma_y)} \tag{70}$$

バンチ間隔の間のイオンのドリフト (L_{sp}/c) による転送行列から以下の捕獲条件が得られる。

$$K_i L_{sp}/c = (\omega_i L_{sp}/c)^2 < 4 \tag{71}$$

この条件は上述の条件と事実上同じものである。

バンチ列を連続ビームと考えることにより、5 節で述べたことがそのまま適用できる。すなわち wake force は式 (35),(39),(55),(56) により、不安定性の成長率はその wake force を使い式 (46) により与えられる。いくつかの加速器における不安定成長度とイオン密度の関係を表 2 に示す。ここで成長度は中性度 (n_i/n_e)、Q で規格化されている。

$$\frac{T_0}{\tau}/fQ = \frac{n_e r_e \beta L}{\gamma\sigma_x\sigma_y} \tag{72}$$

表 2: いくつかの電子蓄積リングにおける、中性状態での不安定性成長。成長度は中性度を掛けることで得られる。$\sigma_y = 0.1\sigma_x$ を仮定している。

variable	symbol	KEK-PF	KEKB	SPring-8	PLS
circumference	L (m)	186.	3016.	1436	280
energy	E (GeV)	2.5	8.0	8.0	2.5
beam line density	$n_e(\times 10^{10})$ m^{-1}	1.2	3.0	0.25	0.46
beam sizes	σ_x (mm)	0.5	0.5	0.2	0.4
growth rate	T_0/τ	516	6760	2150	395

またここでも ep 不安定性と同じく、イオンが徐々に蓄積して、不安定がいくらでも強くなるという可能性を考えられるが、小さいビーム振動でイオンが拡散してしまうため、制限なくイオンがたまるわけではない。しかし一般的にリングでギャップを入れないで一様ビームで運転すると、不安定になりがちであることは事実である。

ここで注意したいのは不安定性の成長が最近の高強度低エミッタンス加速器ではかなり強いということである。電子生成率 4.5×10^{-9} から KEKB などでは 1 ターン (3016 m) で作られるイオンで中性度は 1.4×10^{-5} で、5 周たまれば、成長率は

$$\frac{T_0}{\tau} = 6760 \times 1.4 \times 10^{-5} \times 5 = 0.47 \tag{73}$$

とすでに不安定成長時間 2 ターンとなってしまっている。このことは不安定性が起こるために多くのターン数のイオンの蓄積は必要なく、シングルパスで十分不安定になることを意味する。これがいわゆるファーストイオン不安定性と呼ばれるものである。線形加速器の場合の 2 流体不安定性の式 (48),(48), (50) とほぼ同じであるが、違いはイオン数が $|z|$ が増えるにしたがって (後方) 増えていくことである、$n_i = n_i'|z|$。関連した係数

$$\Lambda = \Lambda'|z| = (\omega_b^2)'\frac{\omega_i}{\omega_\beta}|z| \tag{74}$$

それに伴って、式 (50),(57) は以下のようになる。

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial s}\tilde{y} = \alpha\frac{\partial}{\partial s}\alpha + \frac{\Lambda'}{4}z\tilde{y}(s,z) \tag{75}$$

解は $\alpha = 0 (Q = \infty)$ の場合

$$\tilde{y} = I_0(-z\sqrt{\Lambda' s}) \approx \exp(-z\sqrt{\Lambda' s}) \tag{76}$$

となる。$\alpha > 0$, finite Q の場合、s が小さいうちは

$$\tilde{y} \propto \exp(\Lambda' zs/4\alpha) \tag{77}$$

この成長度は $\Lambda' z = \Lambda$ としたときの一様ビーム (イオン捕獲) の場合と同じである。

表 3 にいくつかのリングにおける不安定成長度を示す。

バンチ化されたビームは z 方向に運動することはないため、e-p 不安定性の時のようなシンクロトロン振動によるランダウ減衰は期待できない。放射減衰より早い不安定性は横方向のチューン広がりを利用したランダウ減衰、あるいはクロマティシティと通常のインピーダンスによるヘッドテイル減衰に頼らざるを得なかった。最近はフィードバック技術が進歩して KEKB なら 50 ターンくらいの減衰率が達成されている [14]。それでも KEKB の 7 ターンや SuperKEKB の 0.5 ターンは恐ろしい値である。実際にはイオン－ビームの力は振幅が大きくなると弱くなる。振動数が遅くなる効果は Q に含まれるが、振動振幅が大きくなったときの成長度が遅くなる効果などは線形理論では考慮しきれてはいない。ビームの微少振動によりイオンは大きく振動し、イオンサイズも大きくなることも不安定性を弱くする。つまりフィードバック、そのノイズ、許容振幅も考慮しなければならない。これらを考慮すべくシミュレーションが行われている。

次に電子ビームのなかでのイオンの振動について調べる。

$$\omega_i'^2 = \frac{N_e r_p}{M\sigma_z}\frac{1}{\sigma_y(\sigma_x + \sigma_y)}c^2 \tag{78}$$

先ほどの定型的なパラメータに加え $\sigma_z = 1$ cm とすると、$\omega_i'/2\pi = 3.5 \times 10^7$ s^{-1}, $\omega_i'\sigma_z/c = 0.007$ であり、イオンはバンチ内の振動に対して、位相はほとん

表 3: いくつかの電子蓄積リングにおけるファストイオン不安定性の成長度 (msec 単位とターン単位で並記) 、$Q = 5$ を仮定

variable	symbol	KEK-PF	KEKB	superKEKB	SPring-8	PLS	ILC-DR
circumference	L (m)	186	3016	3016	1436	280	6477
energy	E (GeV)	2.5	8.0	7	8.0	2.5	5.0
beam line density	$n_e(\times 10^{10})$ m^{-1}	1.2	3.0	6.5	0.25	0.46	1.1
bunch train length	L_{tr} (m)	150	2800	2945	800	240	41.4
beam sizes	σ_x (mm)	0.5	0.5	0.2	0.2	0.4	0.13
vacuum pressure	P (nTorr)	1	1	0.5	1	1	0.2
growth time	$\tau(ms/turn)$	0.70/1125	0.07/7	0.005/0.5	0.18/38	0.96/1030	0.08/3.8

ど変化しない。ビームの不安定性はイオンの振動によって起こるので、バンチ内での振動がないということは、イオンはバンチ内の振動に影響しない、つまりこのパラメータ領域では単バンチ不安定性は起こりにくいということができる。

8 電子雲不安定性

電子はイオンに比べはるかに軽いため、ビームによる振動も速くなる。振動数は $m_c^{-1/2}$ に比例するので、240 倍である。イオンのときと同様代表的な値 $N_p = 1\times 10^{10}$, $L_{sp} = 1$ m, $\sigma_x = 1$ mm, $\sigma_y = 0.1$ mm を入れると $\omega_e/2\pi = 1.1\times 10^9$, $\omega_i L_{sp}/c = 24$ となり、電子にとってバンチ列を一様なビームと見ることはできない。電子がイオンのようにビームポテンシャルの中で振動したり、トラップされることはない。そのためバンチ間の結合型不安定性に対して、直ちに 5 節の手法は適応できないし、それ自身が起こりうるかという問題にもなる。しかしこれは単一電子の周波数なので、集団的な周波数は異なる可能性もある。結果的にはバンチ結合型不安定性として起こりえることを以下で述べる。

一方、バンチは短くはあるが、5 節のリングの一部にビームが蓄積された場合に当てはめると、$\sigma_z = 1$ cm として、$\omega_e/2\pi = 8\times 10^9$ s^{-1}、$\omega_e\sigma_z/c = 1.7$ となる。バンチ内での振動は不安定を起こす可能性があり、5 節の方法で扱うことができる。以下で単バンチ不安定性として論じる。

8.1 電子雲の蓄積

電子はイオンと違ってチェンバーの壁から光電効果によって作られる。その量は圧倒的に多い。そのためビームから遠い電子も多い一方、その数の圧倒的に多いことでビームに影響する。まず放射光の放出は以下の式で表される。

$$N_\gamma = \frac{5\pi}{\sqrt{3}}\alpha\gamma \tag{79}$$

挿入光源を無視すると、PF では陽電子 1 個あたり 1 周 320 個、KEKB では 450 個生成される。メートルあたりで 1.7/m、0.15/m となる。光子が真空チェンバーにあたると、0.1 個 (つまり 10 個に 1 個) 電子が放出される。そのエネルギーは非常に低く数 eV である。つまり電子の生成率は KEK-PF で $Y_1 = 0.17e^-/m\cdot e+$、KEKB で $Y_1 = 0.015e^-/m\cdot e+$ となる。この値はイオン化生成率 $Y_i = 5\times 10^{-9}e^-(CO)/m\cdot e^-$ に比べ、圧倒的 (7 桁) である。[4]

次に電子がどのくらいチェンバーに蓄積されるか考える。簡単には電子がチェンバーにどのくらい留まっているかわかれば、蓄積量はわかる。電子の平均エネルギーは平均陽電子電流によるポテンシャル

$$V = \frac{n_p e}{2\pi\epsilon_0}\int_{\sigma_x}^{R}\frac{1}{r} \tag{80}$$

から、KEKB の場合 500 V である。電子の初期エネルギーは小さいので、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの等分配を仮定すると、電子の平均エ

[4] ただし $\pi r^2/\sigma_x\sigma_y = 3\times 10^5$ なので密度という観点に立てば電子、イオンの滞在時間の問題もあるので面白い関係になる。

ネルギーは 250 eV、平均速度は 10^7 m/s で $2R$ を走るのに 10 ns となる。

蓄積される電子は 2A の陽電子ビームでは、$n_e = Y_1 n_p c \times 10$ ns= 2×10^9 m^{-1} となる。中性度は $\lambda_e/\lambda_p = 5$ %である。一様分布とすると $\rho_e = n_e/\pi R^2 = 2.5 \times 10^{11}$ m^{-3} である。大局的に見ればおおむね電子密度としては正しい値になっているが、実際は熱平衡ではないため正確ではない。そのため数値シミュレーションによって電子の量、分布を求めるのが一般的である。電子蓄積を調べるシミュレーションは、電子が作られる描像をそのままプログラム化すればよい。つまりチェンバーを考えビームが通るたびに $Y_1 \times N_p$ の電子を発生させ、ビームで内側に引っ張り、次のバンチが来たらまた電子を発生させ、これを繰り返すことでチェンバー内に電子をためていくのである。計算機上では $Y_1 \times N_p$ ではなく、少ない数のマクロ粒子を使うのは言うまでもない。磁場を入れたり、電子がチェンバーに戻ったときに 2 次電子を作ったりいろいろバリエーションはありうるが、とくに原理的に難しい点はない。図 5 に KEKB での電子雲の蓄積状態を示す。

加速器中で発生する電子量を実験的に測定することは精力的に行われていて、ほぼシミュレーションと合っている [10]。SuperKEKB ではビーム電流がさらに上がるので、放射光をチェンバーに当てないよう、アンテチャンバーを採用したり、2 次電子放出 (後述) を減らすためにコーティングをするなどのにより、真空系は設計されている。それらの有効性は KEKB でのテストチェンバーを使った測定 [11]、シミュレーションにより確かめられている。

陽子リングの場合、放射光は放射されないが、陽子のチェンバーでのロスや、イオン化が電子源として考えられている。いずれにしても、初期量は陽電子リングの場合に比べ数桁小さい。こういった場合 2 次電子が電子雲の主原因になる [12]。1 つの電子が真空チャンバー壁に吸収されると、その電子のエネルギーと、表面材質、表面状態により 2 次電子が放出される。その放出係数は図 6 で表されるとされる。ピーク値 ($\delta_{2,max}$) とその入射エネルギー (E_{max})、0 エネルギーでの電子の反射 (δ_0) と減少係数 (E_s) をパラメータとして、以下の式で表す。

$$\delta_2(E) = \delta_{2,max} \frac{E}{E_{max} \frac{1.44}{0.44+(E/E_{max})^{1.44}}} + \delta_0 e^{-E/E_s} \tag{81}$$

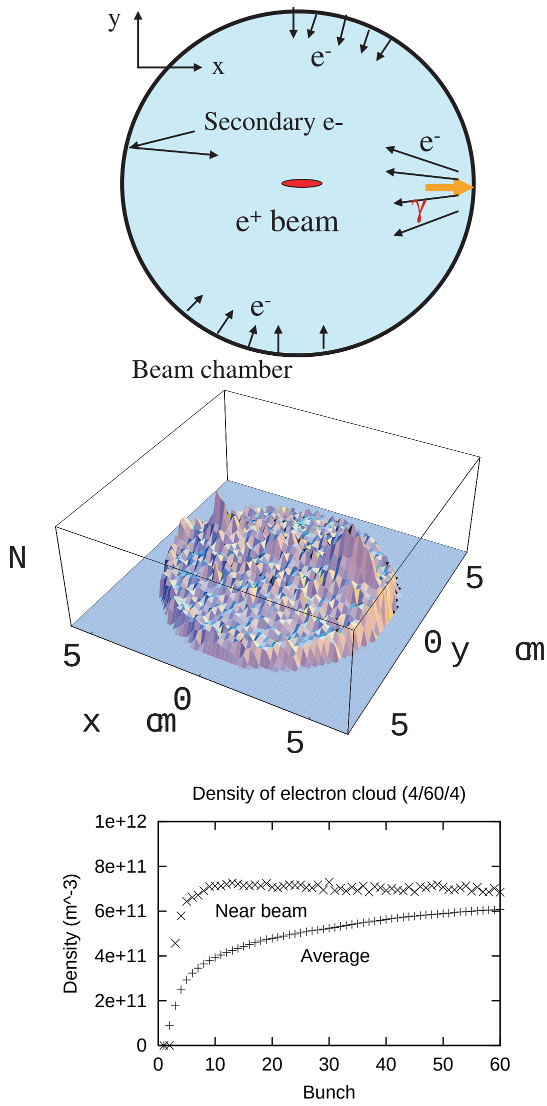

図 5: 電子雲形成モデルと、電子雲密度

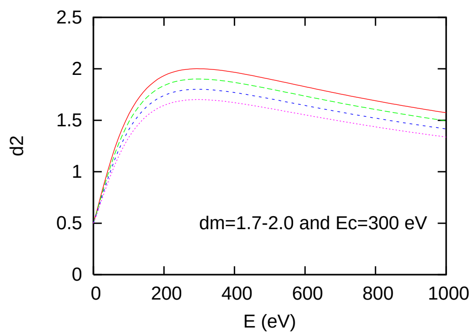

図 6: 2 次電子放出係数の例

シミュレーションでこの式を用いて、乱数を発生させて電子雲の蓄積などを計算できる。電子量の初期値が少ないので、ビームや係数に対するある条件 (シミュレーションで評価) が満たせば、電子数がバンチの通過とともに指数関数的に増加する。指数関数的になるかどうかはビームや 2 次放出係数に非常に強く依存する。長く電子を出し続けると、2 次放出係数は減る傾向にあることも確かめられている。試料を使ってのビーム環境ので測定が欠かせない。

8.2 バンチ結合不安定性

この節の最初に述べたように、電子の振動は $\omega_i L_{sp}/c \gg 1$ であるため、バンチ間の時間でビームから離れてしまい、線形領域でビームに捕獲されない。しかしながらこの議論はあくまでもビーム近傍のことである。電子はチェンバー全体に広がっていて、全体量は膨大である。電子が線形領域から非線形領域に出て行ったとしても直ちにチェンバーに吸収されるわけではない。バンチ間隔が狭ければ、前のバンチの運動の痕跡が何らかの形で後方に伝わったとしても何の不思議もない。このバンチ間の相関がバンチ結合型不安定性の原因となる。

この不安定性が KEK-PF で観測され、それが電子雲効果研究の始まりとなった。このバンチ間の相関、結合を解析的に扱うのは難しい。そのために数値的に航跡場を求め、その航跡場による不安定性を論じる手法がとられる [8]。数値的方法は式 (42) を求めた手法を計算機上で行う。8.1 節で行ったように、バンチ列を並べ、チェンバーを通過するたびに電子を発生させ、電子雲を形成させる。電子雲が平衡に達したらバンチ列のうちの一つをずらして、その後のバンチの受ける力を計算するのである。これが wake force である。もちろんずらしたバンチもその後のバンチも電子を作り続けるつつ、wake force を計算する。

wake force が求まればあとは公式 (46) に入れれば不安定性の成長度を計算できる。図 7 に数値的に求めた KEKB での wake force(上図) と、不安定成長度 (下図) を示す。上図の縦軸は電子雲のうける速度変化で適当な係数を掛ければ wake function が得られる。ビームのずれ 1 mm、2 mm に対して速度変化が計算されている。ずれが 2 倍になると速度変化も 2 倍になっているので、wake force の線形性は成り立っている。下図はその wake function から求めたモード番号 (m) ごとの不安定成長度 (単位 s^{-1}) である。位置電極モニターなどで測定すると $m\omega_0 + \omega_\beta$ の周波数が観測される。この計算は KEKB デザイン時のものでバンチはすべてのバケット 2ns ごとに (H=)5120 入れられている。PF、KEKB で観測されているように非常に早い不安定成長を示す。

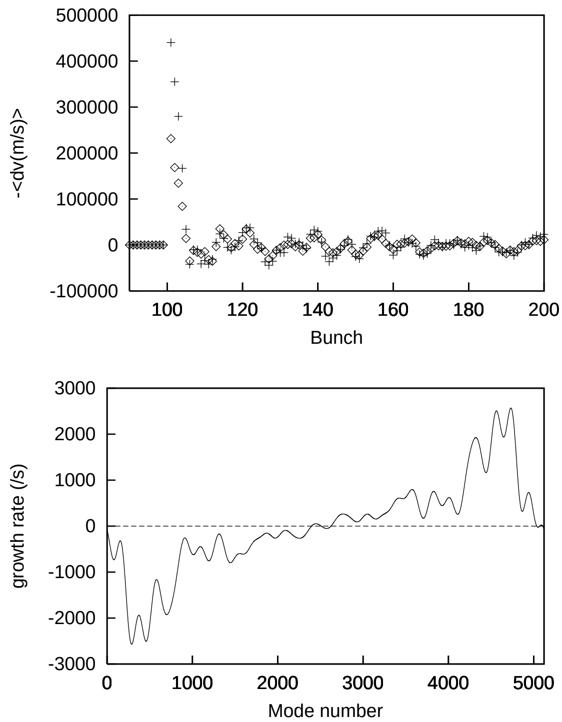

図 7: 電子雲による wake force(上図) と不安定モードとその成長度 (下図)

電子雲のバンチ結合不安定性にはこれまでとちょっと違った要素が入ってくる。それは磁場である。実験的に蓄積される電子の量は影響を受けても不安定性の強さには磁場があっても大きな変化はなかった。電子はビームと相互作用してから、環境の磁場状態に応じて運動する。次のバンチが受ける効果はその間の運動状態を反映する。それによって結合モードの現れ方が磁場の有無によってまったく違っていた。実際 KEKB ではリングに巻いたソレノイド磁石を ON/OFF してバンチ結合モードを測定したがきれいにその特徴を表すモードが得られた。図 8 にソレノイド磁石あり (下図)、なし (上図) それぞれの測定された不安定モードを示す。この図はバンチ振動フィードバックを切った際、ビームダンプする直前のビーム位置モニターの信号を FFT をかけたものである。横

軸はモード番号 (m) で $m\omega_0 + \omega_\beta$ の角周波数のビーム振動に対応する。バンチは 8 ns ごとに入れられていて、横軸のフルスケールは H/4=1280 である。数値シミュレーションでもこれとまったく同じ不安定モードが計算できる。[13] これは電子雲効果であることのもっとも明確な証拠のひとつである。

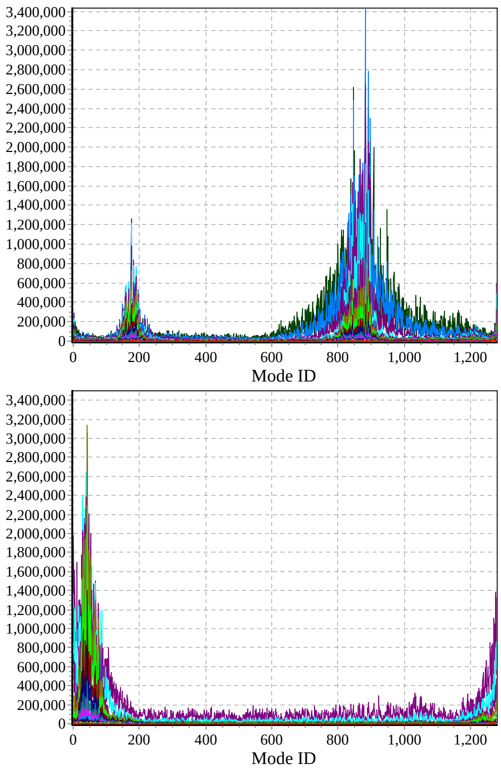

図 8: 測定されたソレノイド磁石のオン (上図)、オフ (下図) による不安定モードの変化 [14]

8.3 単バンチ不安定性

単バンチ不安定性は物理的にはすでに述べた e-p、イオンの 2 流体不安定性と同様に議論できる。6、7 節では電子やイオンの分布がビームと同じ大きさであると想定していた。今の場合、電子はチェンバー内に広く分布している。そのためどのくらいの電子が不安定性に効いてくるかが問題になる。チェンバーの大きさの電子雲がバンチ内のポテンシャルでコヒーレントに運動するのか、あるいはビーム近傍の電子だけが運動するのか、それによって R_S/Q や ω_c はずいぶん変わってくる。ビーム近傍の電子だけがコヒーレントに運動するとすると、$n_e = 2\pi\sigma_x\sigma_y\rho_e$ として、5、6 で述べたように評価すればよい。しかし電子雲全体がガウス分布を保ったまま運動するとすると、

$$\sigma_i = \sqrt{R^2 + \sigma_{i.b}} \approx R \qquad (82)$$

となりまったく違った wake function になってしまう。(周波数が低くなる。)

想像するにビームの力は遠方で小さくなるので、雲全体がコヒーレントに動くことは考えにくい。定量的に wake function を決めるには数値的方法しかない。数値的に wake function を調べるには 8.2 節と同様に、式 (42) を求めた方法に沿って、計算機上で行う。

- 一様なビームを考える、計算機上でマクロ粒子を縦方向に等間隔に並べる、マクロ粒子は横方向にビームサイズに対応したガウス分布を持たせる。
- 電子をマクロ粒子として横方向に分布させる。
- ビームマクロ粒子の最初の部分をわずかに横方向にずらし相互作用させる。
- 2 番目のビームマクロ粒子を電子の位置まで動かす。それにかかる時間だけ電子を運動させる。
- 2 番目のビームマクロ粒子と電子を相互作用させる。
- 以降繰り返しビームマクロ粒子が受ける力を計算する。

電子雲をビームと同じサイズのガウス分布として初期条件を与えると、式 (36) と等しい R/Q が得られる。また電子雲はビームの非線形力を受け最初のビームから受けたコヒーレントな変動が徐々にばらばらになり消えてしまう。($Q \approx 60$) そこで電子雲のサイズを大きくしてみる。

数値計算の結果、wake function はビームサイズ程度の電子雲が運動していると考えて良いことがわかる。もう少し細かく言うと実効的に wake function に効く電子は、電子雲を十分大きくとっても ($10\sigma_x \times 10\sigma_y$)、$cR_S/Q$ の値で、$n_e = K \times 2\pi\sigma_x\sigma_y\rho$ に換算して、$K = 2.5$ 程度の増大にしかならないことがわかる。wake function の減衰から、線形理論では出せなかった $Q \approx 5-10$ 値も求められる。図 9 に KEKB の場合の wake function を示す。ちなみにこの航跡

場をフィットした Q は $10\sigma_x \times 10\sigma_y$ の電子雲の場合で $Q = 6.3$ である。

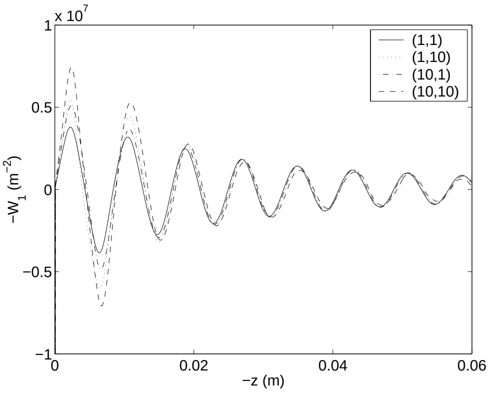

図 9: 数値的に求めた電子雲による短距離 wake force[19]、電子雲のサイズは $\sigma_x \times \sigma_y$、$10\sigma_x \times \sigma_y$、$\sigma_x \times 10\sigma_y$、$10\sigma_x \times 10\sigma_y$

またバンチはシンクロトロン振動をしているので、e-p 不安定性と同様にランダウ減衰が効き、安定化する。結果として不安定性が起こる閾値は式 (68) で計算される。$n_{e,th} = \pi K \sigma_x \sigma_y$ とすることで密度に対する閾値の式が得られる。

$$\rho_{e,th} = \frac{2\gamma n \omega_\beta \eta \sigma_p}{\sqrt{3} K Q r_c c L} \tag{83}$$

この式を得るために使ったのはコースティングビームでビーム粒子がリング全体にわたって分布しているとしている。実際にはバンチ長があるので Q が大きくて、電子の振動がバンチからはみ出すような Q は無意味である。そこでこの式で使う Q は非線形から決まる Q_{nl} と $\omega\sigma_z/c$ の小さい方を採用する。

$$Q = \min(Q_{nl}, \omega\sigma_z/c) \tag{84}$$

K は $\omega\sigma_z/c$ の値が大きいと、周辺から多くの電子をかき集めてくる。様々な $\omega\sigma_z/c$ のケースをシミュレーションした結果から経験的に

$$K = \omega\sigma_z/c \tag{85}$$

でほとんどの結果を再現する。

表 4 にさまざまな陽電子リングの電子密度の閾値を示す。この値と 8.1 で求めた、電子密度との比較で不安定性が起こるかが推測できる。

電子はバンチとの相互作用が進むにしたがってビーム周辺に集められる。そのため wake force はバンチの先頭と後方ではかなり違ったものになると推測できる。これは wake function が変異点と作用点の差だけの関数ではないことを意味する。$\omega_c\sigma_z/c > 2\pi$ になると解析的方法との違い、wake function を使った近似からのずれが顕著になる。そういった状況では相互作用を、より現実的な数値モデルでシミュレーションする。

この不安定性はバンチ内のヘッドテイル不安定性として見ることができる。周波数で言うとベータトロンに対するシンクロトロンサイドバンド $\omega_\beta \pm \omega_s$ として観測されるはずである。実際 KEKB において、ビームサイズの肥大と、それに伴いサイドバンドが観測されている。その閾値もほぼ予測と一致する。図 10 にベータトロンとそのサイドバンドのスペクトルを示す。縦軸はバンチ番号で下が先頭バンチである。左側の白い線がベータトロン、右側がサイドバンドで $\omega_\beta + a\omega_s$、$2 > a > 1$ である。ソレノイドオン、オフで消えたり現れたりする。サイズ肥大はルミノシティを悪化させたため、リング全周にソレノイドコイルを巻き、そのサイズ肥大を抑えることで、ルミノシティが飛躍的に向上したことは良く知られている。

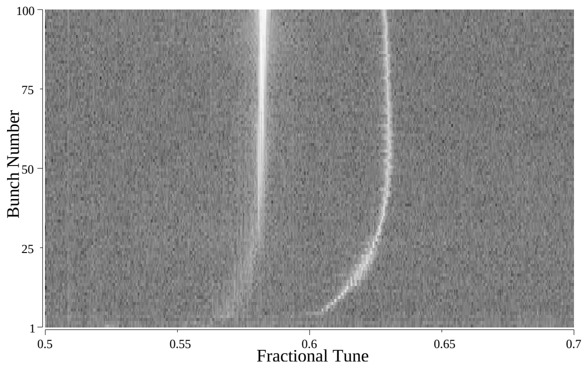

図 10: 電子雲による単バンチ不安定性を示すバンチに沿ったシンクロベータサイドバンドスペクトルの測定 [16]

9 不安定性のシミュレーション

9.1 多バンチ不安定性

ここまで線形理論を扱ってきたが、相互作用はビーム粒子と電子雲やイオン雲との距離に対して著しく

表 4: いくつかの陽電子蓄積リングにおける単バンチ不安定性の電子密度に対する閾値

variable	symbol	KEKB	SuperKEKB	Cesr-TA	BEPC-II	SuperB
circumference	L (m)	3016	3016	768	240	1260
energy	E (GeV)	3.5	4	2	1.5	6.7
bunch population	$N_p(\times 10^{10})$ m^{-1}	8.4	9	2	4.9	5
bunch length	σ_z (mm)	7	6	6.8	15	5
beam size	σ_x (mm)	0.5	0.2	0.15	1.2	0.13
energy spread	σ_E/E (%)	0.07	0.08	0.08	0.052	0.064
slippage factor	$\eta(\times 10^{-4})$	2.7	3.5	68	261	4.9
electron oscillation	$\omega_e\sigma_z/c$	2.5	18.8	11	2.3	14.1
threshold	$\rho_{e,th}$ (10^{12} m^{-3})	0.54	0.27	1.7	6.1	0.7

非線形である。ビームと雲が大きな振幅で振動するようになると、不安定性の成長が緩やかになる。また不安定に寄与する電子、イオンの量は遠方 (大振幅) から近づいてきたり、ビーム振動の影響で遠方に拡散していったりするので、シミュレーションによってしか、正確に評価できない。

多バンチ不安定性を問題にするときは、電子陽電子リングの場合、バンチ間隔がバンチ長に比べ大きいので、バンチの内部振動は考慮する必要はない。バンチは重心は運動するが、分布は不変だと考えてシミュレーションすれことができる。一方電子、イオン雲はビームのようにかたまって運動するわけではないので、多数のマクロ粒子で表す。式で表すと以下のようになる。

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}_b}{ds^2}+K(s)\boldsymbol{x}_b=\frac{r_e}{\gamma}\sum_{c=1}^{N_c}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_c)\delta_P(s-s_c) \quad (86)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{x}_c}{dt^2} &= 2r_cc^2\sum_{turn}\sum_{p=1}^{N_b}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_c-\boldsymbol{x}_b)\delta_P(t-t_p)\\ &+ \frac{e}{m_e}\frac{d\boldsymbol{x}_c}{dt}\times\boldsymbol{B}-2r_ec^2\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{x}}, \quad (87)\end{aligned}$$

N_b はバンチ数で、N_c は雲中の電子、イオン数である。

F の性質は式 (23) で述べたが、具体的にはビームがガウス分布の場合複素誤差関数で表される。雲の粒子がガウス分布をしたビームから受ける力はやはり同じ F である。作用反作用を考えれば当然のことである。図 11 は KEK-PF におけるイオン-ビームの 2 流体不安定性による振動の様子をシミュレーションした結果である。リングのある場所での通過するビームの位置、イオンの重心位置、イオン雲のサイズを示す。イオンはビームが通過するたびに作られていく。最初イオンのサイズが変動するのはビームの力により、振動を開始ししばらくして周波数広がりにより振動が収まり、サイズが安定するのが 4 周位までに起こっている。イオン重心とビームは徐々にイオンの振動数で振動を開始し、10 周後 200μm 程度で飽和する。垂直ビームサイズ $\sim$ 100μm である。イオンサイズも振動が大きくなるにつれ大きくなる。図 12 は KEKB におけるイオン-ビーム不安定性による振動の成長である。振幅はビームサイズ程度 ($\sqrt{\varepsilon_y}=10^{-5}m^{1/2}$) で収まっていることがわかる。このように前節 7 の線形理論で取り入れられなかったいくつかの点が考慮できるようになる。さらにフィードバックをシミュレーションにいれ、許容振幅に押さえられるようにするための減衰率を決めるなどの検討が行われている。

電子雲に関しても同様で、違いは質量と初期条件である。イオンはビームの通過する場所に作られるが電子はチェンバーの壁で作られる。質量が軽いためイオンのようなきれいな線形振動は見えない。71 は質量比 50000 倍 (電子と CO イオン) から全く満たされない。それでも電子雲全体としてはビームに線形効果を及ぼす。それは 8.2 で航跡場的扱いができていることからも推察される。むしろ電子雲の分布がチェンバー全体に広がっているため、最終的に現れる振動は線形に近く、ビームの振動が大きくなっても増幅が収まらない、結果的にビームロスを起こすことになる。これらは理論的には説明できないがシミュレーションによって見ることができる。図 13 に

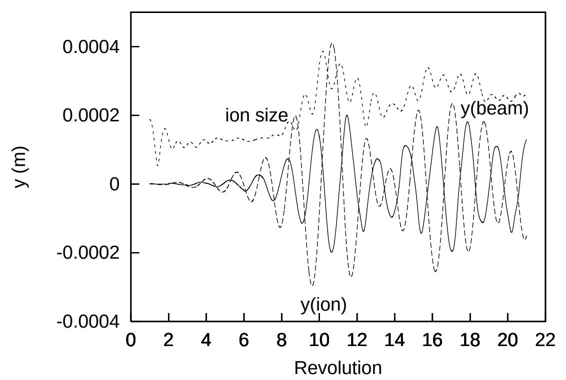

図 11: KEK-PF におけるイオン-ビームの 2 流体不安定性による振動の様子 (シミュレーション)。

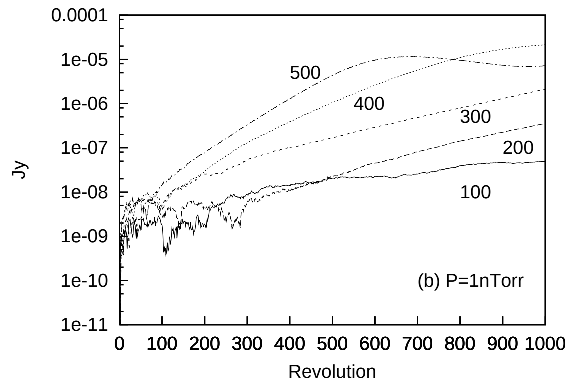

図 12: KEK-KEKB におけるイオン-ビーム不安定性による振動の成長 (シミュレーション)。図の数字はバンチの先頭からの位置。$\times\beta_y$ により y の振幅が得られる。

KEKB における電子雲不安定性による振幅の成長と振動の様子を示す。振動モードはきれいな正弦波ではないが、振幅はチェンバーサイズである cm まで指数関数的に増加している。

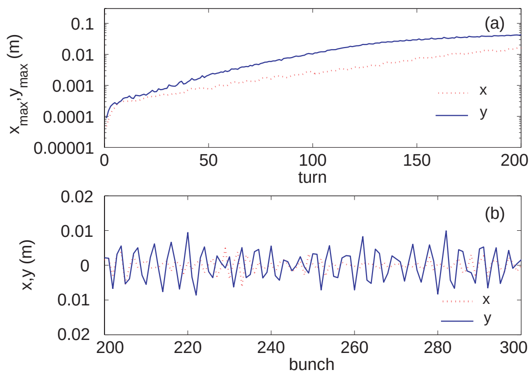

図 13: KEKB における電子雲不安定性による振幅の成長と振動の様子 (シミュレーション)。上図はバンチ列中最大振幅の増加、下図は 200-300 番目のバンチにかけての振動の様子。

実験では節 4 にあるようにビームの通過を定点でとらえ、フーリエ解析が行われる。実験結果を図 8 に示したが、シミュレーションでも同様のことができる。図 14 に定点を通過するビームの位置のフーリエ解析の結果である。電子雲が自由空間にある場合とソレノイド磁石にある場合でのバンチ結合振動モードを示す。実験とよく一致しているのがわかる。ソレノイドで現れる周波数は電子がチェンバーの縁を回転していく周波数に対応する。

9.2 単バンチ不安定性

単バンチ不安定性ということで、前のバンチとの相関は考えない。前のバンチの運動には無関係だが、前のバンチを前提とした、電子雲の与えられた分布を与えて、ビームと電子雲の相互作用を解く。バンチ内振動を表現するために、バンチは多数のマクロ粒子で表される。ビームの作る電磁場は横方向なので、電子雲を 2 次元面内に配列させ、双方のポテンシャルをポアッソン方程式を解くことで決め、相互作用を計算する。このような相互作用の計算の仕方は加速器分野では衝突型加速器におけるビームビーム衝突効果、陽子ビームの空間電荷効果のシミュレーションなどでも行われている。前で述べたように不安定

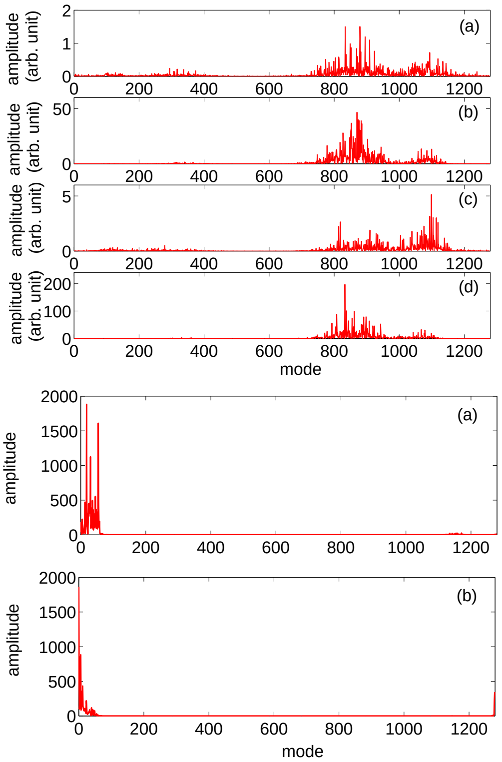

図 14: KEKB における電子雲不安定性による不安定性のモード。上 4 図自由空間、下 2 図ソレノイド磁石中。

性のメカニズムはバンチの前方での相互作用が後方に伝搬する点にある。電子雲の場合、ビームの通過とともにバンチの前から後ろへと移動に従って、静止系の電子が振動することである。その振動数はわかっているので、シミュレーションでもその振動が十分に表現できるようバンチを進行方向に切って、それぞれのスライス毎に電子の運動を求めていく (積分していく)。$\omega_e\sigma_z/c$ がバンチが通過する際に電子が振動する位相角である。Δz のスライスが通過するで間の電子振動の位相角が 1 より十分小さい、$\omega_e\Delta z/c < 1$、同じことだが $\omega_e\sigma_z/c$ より十分多くのスライスで切るということである。おおざっぱに $\omega_e\sigma_z/c \times 10$ 程度であれば十分である。バンチに沿って積分していく際ビームの受けた力も記憶していき、次回の相互作用には電子は初期化されるがビームには過去の相互作用の記憶が蓄積されていく。ポアッソン方程式に対する境界条件は電子陽電子ビームの場合パイプ径に比べ横方向ビームサイズが小さいため、自由境界条件を用いる。自由境界条件を満たすグリーン関数は以下である。

$$G(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \tag{88}$$

ポテンシャルは荷電分布とグリーン関数の積分により得られる。

$$\phi(x,y) = \int G(x-x',y-y')\rho(x',y')dx'dy' \tag{89}$$

効率的に計算するためにフーリエ変換と畳み込みを用いる [21]。

$$G_k = \int G(x,y)e^{-ik_x x - ik_y y}dxdy \tag{90}$$

$$\rho_k = \int \rho(x,y)e^{-ik_x x - ik_y y}dxdy \tag{91}$$

$$\phi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int G_k\rho_k e^{ik_x x + ik_y y}dk_x dk_y \tag{92}$$

ビーム粒子、電子の受ける作用は以下で計算される。

$$\Delta p_x = -\frac{r_e}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{93}$$

このスライスと電子の相互作用の計算を、スライス数 × ターン数繰り返し、ビームの運動をシミュレーションする。

図 15 に KEKB の場合での、ある周回 (数 100 ターン) のビームスライスの通過 (バンチの進行方向に沿って) に沿ってビームの重心、サイズ、電子雲の重心が

図示されている。シンクロトロン振動の無有に対しての 2 図示されている。シンクロトロン振動がないとバンチ後部のみ振動する尻振り運動だが、シンクロトロン振動があるとバンチ全体に振動が発生する。電子雲の重心は常に毎回初期化されているため 0 から始まり、ビームとある位相関係でバンチ通過とともに徐々に振動が大きくなる。

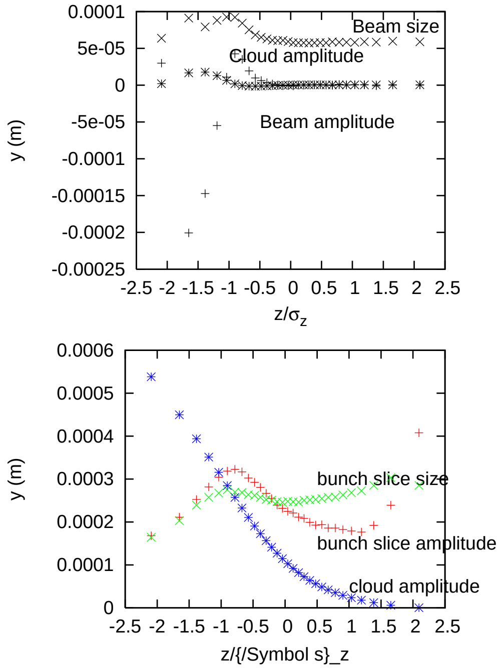

図 15: バンチ進行方向に沿ってのスライス毎のビームの重心、サイズ、電子雲の重心。右がバンチ前方、単位はバンチ長。上図はシンクロトロン振動をしない場合、下図はしている場合。

図 16 に y 方向のビームサイズの増大を電子密度毎にプロットした。$\rho_e = 0.6 \times 10^{11}\ \mathrm{m}^{-3}$ を超えた電子密度でビームサイズの増大が見られ、閾値がわかる。

この振動をフーリエ変換することで実験で得られた周波数スペクトルと比較することができる。図 17 にシミュレーションによる振動をフーリエ変換して求めた電子密度毎の周波数スペクトルを示す。図 10 はバンチ列に沿って電子密度が高くなっていくと考えられる。密度が高くなるにつれサイドバンドが高い方にシフトしていく、またサイドバンドの周波数ピークが $\omega_\beta + \omega_s$ と $\omega_\beta + 2\omega_s$ にあるという点で非常に良く一致する。

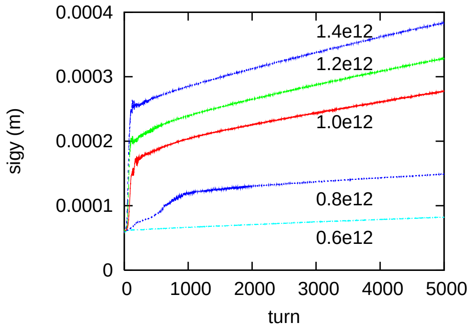

図 16: 電子雲密度毎の y 方向ビームサイズの増大。

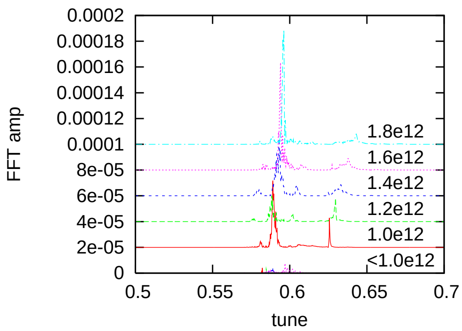

図 17: 電子雲密度毎の y 方向振動の周波数スペクトル

9.3 陽子ビームの不安定性

J-PARC 陽子ビームのようにバンチ長と、バンチ間隔がともに大きく同じような加速器では単バンチ、多バンチと区別することができない。また周波数域も MHz から GHz と広い。電子のバンチ内の振動数であるが 100 位になる。電子の運動をなめらかに表現するにはバンチを 1000 程度にスライスする必要がある。シミュレーションとしてはタフな作業になる。このような複雑さが避けられないのは、不安定性増大とランダウ減衰の両方を同時に考慮しようとするからである。不安定性増大だけに注目すれば多バンチ不安定性で行ったようにバンチをマクロ粒子 (マイクロバンチ) 列で表してしまえば簡単に計算できる。一方ランダウ減衰は確立した考えであるので、計算で求められた成長率とランダウ減衰率の比較で、閾値以上かどうかは判断できる [22]。

10 Coherent Synchrotron Radiation (CSR)

10.1 進行方向単バンチ不安定性

これまで論じたビームと電子雲、イオン雲との相互作用は横方向の不安定性を起こした。ここで論じるコヒーレント放射光による不安定性は縦波（粗密波）である。また媒介するのは進行する電磁場である。Sec.6,8.3 において横方向で見たように、バンチビームの不安定性に関してもコースティングビームで考えることができる。運動方程式は以下である。

$$\frac{dp_z}{ds} = -\frac{N_b r_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty} W_0(z-z')\rho_0(z')dz' \quad (94)$$

$$\frac{dz}{ds} = -\eta_p p_z \quad (95)$$

上式の RF 復元力に対応する $\mu_s^2 z/\eta_p$ が省かれている。

$z-p_z$ に関する Vlasov 方程式

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}z'-\frac{\partial\Psi}{\partial p_z}p_z'=0 \quad (96)$$

に運動方程式を代入して、以下の式を得る。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s}-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\eta_p p_z + \frac{\partial\Psi}{\partial p_z}\frac{N_b r_0}{\gamma L}\int_{-\infty}^{\infty}W(z-z')\rho(z')dz'=0 \quad (97)$$

分布関数 Ψ を z に関する縦波とエネルギー分布の積として表す。

$$\begin{aligned}\Psi &= \rho_p(p_z)\left[\frac{1}{L}+a\exp\left(\frac{2\pi ins}{L}-i\omega t\right)\right] \quad (98)\\ &= \rho_p(p_z)\left[\frac{1}{L}+a\exp\left(-i\frac{\omega-n\omega_0}{c}s+i\frac{\omega z}{c}\right)\right]\end{aligned}$$

ここで定数部分 $1/L$ は進行方向一様分布を意味し、z 方向の密度はリング 1 周あたり n 周期濃淡がある分布を表す。Vlasov 方程式に代入して

$$\begin{aligned}&-i\left[\frac{\omega(1+\eta_p p_z)-n\omega_0}{c}\right]\rho_p\\ &= -\rho_p'\frac{N_b r_0}{\gamma L}\int dz' W(z-z')e^{-i\omega(z-z')/c}\int\frac{\rho_p}{L}\\ &= -\rho_p'\frac{N_b r_0 c}{\gamma L^2}Z(\omega)\int dp_z'\rho_p(p_z') \quad (99)\end{aligned}$$

Ψ, ρ_p は 1 で規格化されている。両辺を $(\omega(1+\eta_p p_z)-n\omega_0)/c$ で割り、p_z で積分すれば、安定性を論じるための分散関係式を得る。

$$1=-i\frac{N_b r_e c^2}{\gamma L^2}Z(\omega)\int\frac{\rho_p'}{\omega(1+\eta_p p_z)-n\omega_0}dp_z \quad (100)$$

部分積分を行い

$$1=-i\frac{N_b r_e c^2}{\gamma L^2}\eta\omega Z(\omega)\int\frac{\rho_p}{(\omega(1+\eta_p p_z)-n\omega_0)^2}dp_z \quad (101)$$

ここで横方向で行ったように Lorentz 分布を仮定すると、積分は簡単に実行できる。

$$\rho_p(p_z)=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma_p}{p_z^2+\sigma_p^2} \quad (102)$$

$$1=\frac{N r_e c^2}{\gamma L}\frac{\eta\omega Z(\omega)}{[\omega(1+i\eta\sigma_p-n\omega_0]^2} \quad (103)$$

$Z(\omega)$ がピークになる n に対して、

$$i\omega\eta\sigma_p=\sqrt{\frac{N_b r_e c^2}{\gamma L}\eta\omega Z(\omega)} \quad (104)$$

両辺を二乗し、大雑把であるが、安定であるためのインピーダンスの条件で得られる。

$$\left|\frac{Z(n\omega)}{n}\right|<0.5\frac{\gamma\eta L Z_0}{N_b r_e}\sigma_p^2 \quad (105)$$

ここで $Z_0=4\pi/c=377\Omega$ である。横方向と同じく、実際の分布はローレンツ分布ではないので、一般的

に使われる式は以下で Keil-Schnell の公式 [24] として知られている。

$$\left|\frac{Z(n\omega)}{n}\right| < 0.34\frac{\gamma\eta L Z_0}{N_b r_e}\sigma_p^2 \tag{106}$$

この公式はバンチ長に焼き直すことができることも横方向同様である [25]。

$$2\pi\nu_s\sigma_z = \eta\sigma_p L \tag{107}$$

ビームの線密度は同じにとるので、$N_b/L \to N_b/2\sigma_z$ にするようにしなければならない。横方向と同じく、インピーダンスの Q は $\omega\sigma_z/c$ より大きいと、バンチからはみ出るので、実効的には

$$Q_{eff} = \min(Q, \omega\sigma_z/c) \tag{108}$$

である。

この式は簡単で便利なのだが、KEK ではどちらかというと不人気である (私は好きであるが)。KEK では Vlasov 方程式を摂動で解く方法が昔から行われている。それも非摂動分布をガウス分布

$$\exp\left[-\frac{\sigma_z^2/\beta_z + \beta_z\sigma_p^2}{2\varepsilon_z}\right] \tag{109}$$

$$\beta_z = \alpha L/2\pi\nu_s$$

を使うのは良くなく、数値的に解いた平衡解から摂動により固有値問題を解くという方法である [?]。

10-20 年前は縦方向不安定性のシミュレーションは上手くできないとされていた。マクロ粒子によりビーム分布を作って、航跡場と積分して航跡力を求めるのだが、ビーム分布に $\sqrt{N}$ 統計ノイズが避けられないため、不安定が助長されるのである。周波数の高い航跡場 (インピーダンス) を考慮しようとすればするほど、進行方向にバンチをたくさんスライスする必要が出てきて統計ノイズが厳しくなる。最近の計算機の進歩でマクロ粒子数は依然と比べものにならないくらい増やせるようになったのである程度はシミュレーションも可能にはなってきている。

Vlasov 方程式を放射減衰、励起を考慮した Fokker-Plank 項をいれて解く方法も行われている。[?] 粒子を運動されるのではなく、分布を表す場の量を「逆」運動させ (式 4 を参照)、Fokker-Plank 項による緩和を経て (不安定を含む準) 平衡解を求める。

$$\Psi' = -[\Psi, H] + \frac{\partial\Psi}{\partial p_z}\left(\frac{2}{\tau} + B\frac{\partial\Psi}{\partial p_z}\right) \tag{110}$$

ここで τ,B は放射減衰、放射励起項 ($B = \sigma_p^2/\tau$)。

ついでに触れておくと FEL も縦方向不安定性の 1 種である。アンジュレータのインピーダンスが $\omega = \omega_u\gamma^2$ に共鳴ピークを持つためビームの粒子分布が式 (98) のモードが不安定を起こす状態が FEL 発振である。($\omega_u = 2\pi c/\lambda_u$, λ_u:アンジュレータ波長)

10.2 CSR によるインピーダンス

CSR インピーダンスは総研大博士課程 Demin Zhou 氏が研究しているのを (一応指導教官として) 見ていたくらいなので、さらっと流したい。詳しくは彼あるいは吾郷氏の博士論文を読んでいただきたい。

自由空間、平行平板の CSR は J.Murphy 氏等の論文 [23] に詳しく書かれている。天下り的であるが、インピーダンスは以下で表される。

$$Z(\omega) = \frac{iAZ_0}{2}\left(\frac{\omega R}{c}\right)^{1/3} \tag{111}$$

ここで

$$A = 3^{-1/3}\Gamma[2/3](\sqrt{3}i - 1) = 1.63i - 0.94 \tag{112}$$

R は偏向磁場内での軌道の曲率半径である。

Keil-Schnell の式 (106) は以下のように変形される。

$$\frac{\omega R}{c} < 2\left(\frac{N_e r_e \omega_0 R}{|\eta|\gamma\sigma_p^2\sqrt{2\pi}c\sigma_z}\right)^{3/2} \tag{113}$$

右辺が大きいと不安定になる。この式は周波数とバンチ内粒子数の関係になっている。与えられたバンチ内粒子数に対して、式で決まる周波数より遅い周波数で不安定になるということである。

実際にはインピーダンスの遅い周波数 (長波長) 成分はビームチェンバーのため以下の条件でカットされている。

$$\omega R/c > (\pi R/2b)^{3/2} \tag{114}$$

また不安定によりビーム分布に内部構造が発生するためには

$$\omega\sigma/c > 1 \tag{115}$$

である必要がある。

これら 3 条件 [28]、式 (113)(114)(115) により CSR による不安定性が起こるか、だいたいの目安をつけることができる。

チェンバーの境界を考慮に入れたCSRインピーダンスの計算は上下平行平板を境界とした場合が行われていたが、左右の境界も含めたインピーダンスは吾郷、横谷氏により初めて行われた [29]。曲線座標系で表したMaxwell方程式のフーリエ成分の満たす式を解くことで横方向電場を計算し、

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}_\perp}{ds} = \frac{i}{2\pi}\left[\nabla_\perp^2 \boldsymbol{E}_\perp + \frac{2k^2 x}{R}\boldsymbol{E}_\perp\right] \tag{116}$$

進行方向電場を次の関係 (近軸光線近似) から計算し、インピーダンスを計算する。

$$E_s = \frac{i}{k}\left(\nabla_\perp \cdot \boldsymbol{E}_\perp - \mu_0 c J_z\right) \tag{117}$$

この方法を使ったコードが、その後も生出、Zhou氏によりそれぞれ開発されている。

長い偏向磁石あるいはトロイダルパイプ内での周回運動での CSR に対して高い Q のインピーダンスが発生することがわかっている。実際問題では何台かの偏向磁石での CSR の干渉という形での高い Q のインピーダンスが現れる。繰り返すがバンチ長をはみ出すような高い Q は不安定性には寄与しない。SuperKEKB のダンピングリングでは数台の偏向磁石の干渉まで考慮する必要があるようである。

11　まとめ

加速器に見られる2流体不安定性について、全体論、e-p、イオン、電子雲不安定性について解析的およびシミュレーションにより述べた。定性的に、ファクターを無視すれば定量的にも、解析的手法で2流体不安定性をよく説明できる。実際には解析的手法では考慮できない、いろいろな条件があるので、数値的手法の助けやシミュレーションが必要になる。

シミュレーションもいきなりコードを書いて結果が出ても、結果の妥当性の評価ができない。今の世の中計算機が発達しているので、あまり凝った解析的扱いは必要ないとは思われるが、物理の本質的なところは理解しておくために、線形理論は重要である。

光電子による不安定性理論は、伊澤、佐藤 (佳)、豊増氏によりPFで観測されていた不安定性の解釈から始まりました。その際には小林 (正)、生出氏と良く議論していただきました。1995年1月か2月にKEKで最初の発表をした翌日SLACからコピーを送れという連絡が入りました。その後M. Furman氏がPEP-IIに関して検討を始めました。4月ころつくばでのILCワークショップで話をした際にF. Zimmermann氏が来て、彼も始めるといっていました。以来15年以上経ち、KEKBも無事に終わりました。多く議論をしてくださったKEKPF、KEKBの方々、海外の研究者の方々に感謝します。

参考文献

[1] K. Ohmi, ”加速器におけるプラズマ型不安定性”, 加速器 Vol. 3, No. 1, 2006.

[2] E. Keil and B. Zotter, ”Landau damping of coupled electron-proton oscillations”, CERN-ISR-TH/71-58 (1971).

[3] K. Ohmi, T. Toyama and G. Rumolo, ”Electron cloud instability for a coasting proton beam in circular accelerators”, proceedings of ECLOUD04, 351 (2004).

[4] S. Sakanaka, OHO86.

[5] M. Izawa, et. al., ”The vertical instability in a positron bunched beam”, Phys. Rev. Lett., 74, 5044 (1995).

[6] T. Raubenhemer and F. Zimmermann, ”Fast beam-ion instability II. Linear theory and simulations” Phys. Rev. E**52**, 5487 (1995).

[7] G. Stupakov, T. Raubenhemer and F. Zimmermann, ”Fast beam-ion instability II. Effect of ion decoherence”, Phys. Rev. E**52**, 5499 (1995).

[8] K. Ohmi, ”Beam-photoelectron interactions in positron storage rings”, Phys. Rev. Lett. **75**, 1526 (1995).

[9] K. Ohmi, ”Numerical study for the two-beam instability due to ions in electron storage rings”, Phys. Rev. E**55**, 7550 (1997).

[10] K. Kanazawa, Y. Suetsugu, H. Hiramatsu, H. Fukuma, M. Tobiyama, ”Measurement of the electron cloud density at KEKB”, proceedings of ECLOUD07.

[11] Y. Suetsugu, K. Kanazawa, K. Shibata, H. Hisamatsu, "Recent studies on photoelectron and secondary electron yields of TiN and NEG coatings using the KEKB positron ring", Nucl. Instru.Meth. **A578**,470 (2007).

[12] M. Furman, G. Lambertson, proceedings of MBI97 (KEK Report No. 97-17, 1997, p170.

[13] S.S. Win, K. Ohmi, H. Fukuma, M. Tobiyama, J. Flanagan, S. Kurokawa, "Numerical study of coupled bunch instability caused by an electron cloud", Phys. Rev. ST-AB, **8**, 094401 (2005).

[14] M. Tobiyama, J. Flanagan, H. Fukuma, S. Kurokawa, K. Ohmi, S. Win, "Coupled bunch instability caused by an electron cloud", Phys. Rev. ST-AB, **9** 012801 (2006).

[15] M. Tobiyama, E. Kikutani, "Development of a high speed digital process system for bunch-by-bunch feedback system ", Phys. Rev. ST-AB, **3**, 012801 (2000).

[16] J. Flanagan et al., "Observation of vertical betatron sideband due to electron cloud in the KEK LER", Phys. Rev. Lett., **94**, 054801 (2005).

[17] E. Benedetto, J. Flanagan, K. Ohmi, "Simulation of Synchro-betatron sideband instability caused by electron cloud at KEK", PAC07 proceedings.

[18] K. Ohmi and F. Zimmermann, "Head-tail instability caused by electron cloud in positron storage rings", Phys. Rev. Lett., **85**, 3821 (2000).

[19] K. Ohmi, F. Zimmermann, E.Perevedentsev, "Wake field and fast head-tail instability caused by electron cloud", Phys. Rev. E**65**, 16502 (2002).

[20] H. Fukuma, "Electron cloud effect in KEKB", proceedings of ECLOUD04.

[21] R. Hockney, J. Eastwood, "Computer Simulation using particles", Taylor and Francis, 1988.

[22] K. Ohmi, T. Toyama, C. Ohmori, "Electron cloud instability in high intensity proton rings", Phys. rev. ST-AB, **5**, 114402 (2002).

[23] J. Murphy, S. Krinsky, R. Gluckstern, "Longitudinal wakefield for an electron moving on a circular orbit", Particle Accelerators, **57**, 9 (1997).

[24] E. Keil, W. Schenell, CERN Report TH-RF/69-48 (1969).

[25] D. Boussard, CERN Lab II/RF/Int 75-2 (1975).

[26] oideyokoya K. Oide, K. Yokoya, "Longitudinal single bunch instability in electron storage rings", KEK-Preprint-90-10.

[27] wornock M. Venturini, R. Warnock, Phys. Rev. Lett. **89**,224802 (2002).

[28] S. Heifets, G. Stupakov, "Single-mode coherent synchrotron radiation instability" Phys. rev. ST-AB **6**, 064401 (2003).

[29] T. Agoh, K. Yokoya, "Calculation of coherent synchrotron radiation using mesh", Phys. Rev. ST-AB **7**, 054403 (2004).