高精度ビーム診断

1.　はじめに

本テキストは，高精度なビーム診断に必要な知識について述べるとともに，X 線自由電子レーザ SACLA において使用されているビーム診断機器を題材にそれぞれの機器の測定原理や性能についてまとめたものである。

まず，第 2 節にてビーム診断に必要となる電子ビームと検出器との相互作用についてまとめ，実際のビーム診断機器の測定原理を知る上での準備をする。次に，第 3 節にて SACLA のビーム診断で必要とされる性能とその性能を満たすためのビーム診断システムについて概観する。第 4 節から第 11 節までは各ビーム診断機器についてその測定原理と性能などについて解説し，第 12 節で締めくくる。なお，付録として第 13 節，第 14 節に電子ビームに付随する電磁場と RF 共振空胴に誘起する電磁場について計算の詳細を述べてあるので適宜参照されたい。

2.　電子ビームと検出器との各種相互作用

ビーム診断を行うには，電子ビームと検出器との相互作用により，電子ビームからの信号を取り出さなければならない。電子ビームからの信号を得る手段として大きく分けて次の 3 つに分類できる。

1. 電子ビームに付随する電磁場を電極やコイルでピックアップしたり，電子ビームが RF 共振空胴に誘起する RF 信号で検出したりする方法。
2. 電子ビームをターゲットに当てて出てくる光や電磁波を検出したり，ターゲット内に生じた電子・ホールペアを検出したりする方法。
3. 電子ビームを磁場で曲げた場合などに発生する放射を検出する方法。

本節では，これらの相互作用についてその原理をまとめる。

2.1.　電子ビームに付随する電磁場と鏡像電荷

電子は電荷を持っているため，電子ビームのまわりには電磁場が存在する。その電磁場を使ってビームのさまざまなパラメータを診断することができる。そこで，その電磁場の性質について述べる。

相対論的速度で進む電子ビームに付随する電磁場は，第 13 節にて示すように，ローレンツ収縮の影響で縦方向に $1/\gamma$ に圧縮されて横方向電場が強くなる。ここに，γ はローレンツファクタで，電子のエネルギーを E，静止質量を m_e，高速を c とおくと，

$$\gamma = \frac{E}{m_e c^2} \tag{2-1}$$

となる量であり，(13-3) でも表すことができる。また，静止した電荷の周りには電場しか存在しないが，運動する電荷の周りには磁場も発生する。また，電子ビームは金属製の真空パイプの中を飛行するので，パイプの内面に鏡像電荷が誘起され，ビームとともに移動する。これらの電磁場や鏡像電荷の振る舞いは，ビームの電荷量，位置，形状，バンチ長などに依存するので，適切に検出することでさまざまな情報を得ることができる。また，これらの電磁場や鏡像電荷を検出するだけであれば電子ビーム自体にはほとんど影響を与えることなく，電子ビームを失わずに検出でき，運転中，常時データを得ることが可能である。

ここで，半径 a の完全導体円筒内を速度 βc で飛行する点電荷 q に付随する電磁場と鏡像電荷を考える。なお，ここでは円柱座標を用い，円筒の軸方向が z 軸と一致しているとする。この電荷分布は解析的に求めることができるが容易では無いので，詳細は 13.3.3 節を参照されたい。結果的には，電荷の静止系での z 方向の鏡像電荷の分布は Fig. 76 に示すようになる。鏡像電荷の 70%は $|z|/a < 0.66$ の範囲に入り，$|z|/a < 3$ の範囲にはほぼすべての電荷が入る。これをローレンツブーストすると，鏡像電荷の幅は $1/\gamma$ になり，同時に磁場も発生する。たとえば，円筒の半径が 10mm で, 電子ビームのエネルギーが 1 GeV のとき，$a/\gamma\ \sim 5\ \mu\mathrm{m}$ となり，時間換算すると，

$a/\beta\gamma c\ \sim 17\ \mathrm{fs}$ となる。これは SACLA の電子ビームのバンチ長約 30 fs と同等かそれより短い。したがって，高エネルギーの電子ビームを考える際には鏡像電荷の幅は，ほぼバンチ長を反映すると考えてよい。

次に，電荷が円筒の中心からずれた位置にある場合を考える。電荷の位置は，$\rho = b,\ \phi = 0$ とする。このとき，鏡像電荷の分布は軸対象からずれて ϕ に依存するようになる。この分布は，13.3.3 節にて示すように，z 軸方向の電荷を積分した場合，

$$\begin{aligned}\sigma(\phi) &= -\frac{q}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab\cos\phi+b^2} \\ &= -\frac{q}{2\pi a}\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^m\cos m\phi\right]\end{aligned} \tag{2-2}$$

となる。なお，右辺の 2 つ目の式はフーリエ級数の公式（13-40）を使って変形した。この鏡像電荷をいくつかの電極などで検出すれば，ϕ の 0 次モーメントから電荷量，1 次モーメントからビーム位置，2 次モーメントからビームが楕円形と仮定したときの長軸と短軸の比や長軸の傾きを知ることができる [1]。

2.2. RF 空胴と電子ビームの相互作用

加速器では，RF 共振空胴に大電力 RF 源からの RF パワーを蓄積し，発生した強力な加速電場を使って電子を加速する。このとき，空胴内の RF 電磁場エネルギーの一部が電子ビームに移行して電子が加速されるという相互作用が起こっている。ビーム診断においては，逆に，RF 電磁場が存在していない RF 共振空胴を電子が通過したときに，電子ビームが RF 空胴内に電磁場を誘起する相互作用を使うことが多い。また，横方向の加速力を発生する RF デフレクタによって電子ビームに時間依存のキックを与えることで，バンチの時間構造の測定も行う。RF デフレクタ空胴については文献 [2] に詳細が述べられているので，ここでは電子が RF 空胴に誘起する電磁場についてまとめておく。詳細な計算については第 14 節を参照されたい。

RF 空胴にはその形状（境界条件）によって決まる共振モードがある。そのモードは，(14-1)，(14-2) の方程式を (14-6)，(14-7) の境界条件にしたがって解くことによって求められる。RF 空胴内の任意の電磁場はその空胴の各モードの電磁場 $\mathbf{E}_a$，$\mathbf{B}_a$ の線形和で表現できることが知られている。そして，空胴内の電磁場の各モードの時間発展は，(14-29)，(14-30) の微分方程式にて表される。

ここで，RF 空胴内にまったく電磁場がないとき，そこに電荷 q の電子ビームが通過することを考える。電子ビームは電荷が移動していることから電流源となるので，RF 空胴への作用は，(14-30) の右辺第 1 項によるものとなる。この項は，

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_a dv \tag{2-3}$$

の形をしていることから，電子ビーム軌道に平行な電場成分をもつモードのみが相互作用することを示している。最終的に誘起される RF エネルギー U は，ビーム軌道に沿った $\mathbf{E}_a$ の積分から求まるシャントインピーダンス (14-130)，(14-131)，(14-132) を使って，(14-136) のように，

$$U = \frac{\omega_a}{4}\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q}q^2 \tag{2-4}$$

と表すことができる。ここに，ω_a は共振周波数，R_{sh}/Q は規格化シャントインピーダンス (14-137) である。電子ビームが通過して RF パワーが誘起されれば，あとは空胴単体の自由振動となり，各モードの Q 値で決まる時定数で空胴内の RF 電磁場が減衰していく形となる。

さて，電子ビームに誘起される RF パワーは，(2-3) からわかるように，ビーム軌道付近での $\mathbf{E}_a$ の振る舞いによって変わってくる。すなわち，着目するモードによって検出できるビームのパラメータが異なってくる。たとえば，Fig. 1 左図に示す TM010 モードのように軸付近で $\mathbf{E}_a$ がほぼ一定の場合，得られるビーム誘起信号の振幅は，ビーム位置によらずビーム電荷量のみに比例し，位相はビームの到達時刻を反映したものとなる。また，Fig. 1 右図に示す TM110 モードのように

軸付近で $\mathbf{E}_a$ がほぼ線形に変化する場合，得られる信号の振幅は電荷量だけでなくビーム位置にも比例することとなる。このように，電子ビームが RF 空胴に誘起する電磁場をつかって，ビームの電荷量，到達時間，ビーム位置などを測定することができる。

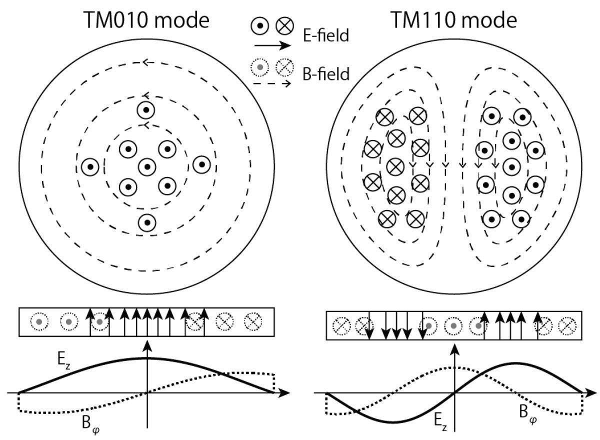

Fig. 1: TM010 モード（左図）と TM110 モード（右図）の電磁場分布の概略図。

2.3. 電子ビームの物質中での振る舞い

電子が物質中に入ると，物質を構成する原子を電離したり，原子の電磁場によって曲げられることで制動放射を出したりしてエネルギーを失う。また，入射電子は原子との相互作用によって多重散乱を受ける。これらの相互作用についてまとめる。

2.3.1. 電離損失

物質に入射した電子は，物質中の原子を電離したり励起したりすることにより，エネルギーを失う。それを電離損失と呼び，以下の式のように表される[3]。

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi r_e^2 m_e c^2 N_A Z}{\beta^2 A} \times \left\{ \ln\left[\frac{\gamma^2(\gamma+2)m_e^2c^4}{2I^2}\right] + F(\gamma) - \delta \right\} \qquad (2\text{-}5)$$

ここに，

$$F(\gamma) = 1 - \beta^2 + \frac{\left[\frac{\gamma^2}{8} - (2\gamma+1)\ln 2\right]}{(\gamma+1)^2} \qquad (2\text{-}6)$$

で，m_e, r_e は電子質量と古典電子半径，N_A はアボガドロ数，Z, A は原子番号と原子量，I は平均励起エネルギー，δ は密度効果補正パラメータである。I は物質により異なる量で，代表的なものを Table 1 にまとめる。また，δ は β, γ，および，密度に依存する量で，簡単に表すことができないが，たとえば文献 [4] にて調べることが可能である。

この dE/dx という量は，単位が MeV/(g/cm²) で，分母には実際の長さに密度をかけた量が使われている。多くの物質において，電子のエネルギーが 1 MeV 以上では電離損失の dE/dx がおよそ 2 MeV/(g/cm²) である。たとえば密度 2.7 g/cm³ のアルミニウムに 10 MeV の電子が当たる場合，電離損失の dE/dx は 1.6 MeV/(g/cm²) なので，1 cm あたりおよそ 4.3 MeV の電離損失があることがわかる。ひとつ注意点として，電子のエネルギーがおよそ 10 MeV 以上のときは，後述する制動放射損失が支配的となることに気をつけなければならない。

Table 1: 平均励起エネルギーと放射長。

物質	平均励起エネルギー I [eV]	放射長 X_0 [g/cm²]
グラファイト	78	42.70
アルミニウム	166	24.01
鉄	286	13.84
銅	322	12.86
タングステン	727	6.76
鉛	823	6.37

2.3.2. 制動放射と電磁シャワー

電子が物質に入射すると原子を電離するだけでなく，入射電子自身も原子の電磁場で曲げられるので，電磁放射（光子）を出すことによってもエ

ネルギーを失う。この放射を制動放射(bremsstrahlung) と呼ぶ。

制動放射による損失を示す量として，放射長(radiation length) X_0 がある。これは，電子が物質中でエネルギーが $1/e$ になるまでに飛行する長さとして定義される。この X_0 は以下の式で求めることができる [5]。

$$\frac{1}{X_0} = \frac{4\alpha r_e^2 N_A}{A}\{Z^2[L_{rad} - f(Z)] + ZL'_{rad}\} \tag{2-7}$$

ここに，α は微細構造定数で，

$$\frac{4\alpha r_e^2 N_A}{A} = 716.4 \tag{2-8}$$

となり，$f(Z)$ は，$a = \alpha Z$ とおいたときに，

$$f(Z) = a^2\left(\frac{1}{1+a^2} + 0.20206 - 0.0369a^2 + 0.0083a^4 - 0.002a^6\right) \tag{2-9}$$

と表される量である。また，L_{rad}，L'_{rad} は物質によって異なり，原子番号が 5 以上では，

$$L_{rad} \simeq \ln 184.15\, Z^{-\frac{1}{3}} \tag{2-10}$$

$$L'_{rad} \simeq \ln 1194\, Z^{-\frac{2}{3}} \tag{2-11}$$

が良い近似となる。主な物質の X_0 を Table 1 に示す。原子番号が大きくなるにつれて X_0 が小さくなり，制動放射損失が大きくなることがわかる。

さて，制動放射は Fig. 2 からもわかるように，あるエネルギーを境に支配的となる。それを表すために，電離損失と制動放射損失が等しくなるエネルギーを臨界エネルギーと呼び，E_c で表す。この E_c は，固体物質の場合，

$$E_c \simeq \frac{610}{Z + 1.24}\ [\mathrm{MeV}] \tag{2-12}$$

が良い近似となる。

制動放射のエネルギースペクトルは，E_c よりエネルギーの高い電子については，

$$\frac{d(\hbar\omega)}{d\eta} \propto \frac{3}{4}\eta^2 - \eta + 1 \tag{2-13}$$

という近似的な関係があることが知られている [6]。ここに，$\eta = \hbar\omega/E$ であり，$\hbar\omega$ は制動放射の光子エネルギー，E は入射電子のエネルギーで，$0 < \eta < 1$ の関係を満たす。これを $\hbar\omega$ で割って光子数スペクトルにすると，

$$\frac{dN}{d\eta} \propto \frac{3}{4}\eta - 1 + \frac{1}{\eta} \tag{2-14}$$

の関係となることがわかる。これらの式は，$\eta \sim 1$ でも有意な値を持つことを示しており，制動放射は入射電子のエネルギーに近い光子も放射しうることを表している。

次に，1 GeV 以上の電子になると，制動放射によってエネルギーの高い光子が出て，それが電子・陽電子の対生成をして，さらにそれらが制動放射をして…，というふうに連鎖反応が起こり，大量の電子・陽電子・光子が発生する。これを電磁シャワーと呼ぶ。この場合，物質に与えるエネルギーは，電子の入射直後は小さく，シャワーが最も成長したところで最大となり，そこからシャワーが消えていくに連れて小さくなる，という形となる。これを数式で表現すると，2 つのパラメータ，

$$t = \frac{x}{X_0},\quad y = \frac{E}{E_c} \tag{2-15}$$

を使って，

$$\frac{dE}{dt} = E_0 b \frac{(bt)^{a-1}e^{-bt}}{\Gamma(a)} \tag{2-16}$$

というガンマ分布で表すことができる。ここに，E_0 は入射電子のエネルギーで，a, b は物質によって異なる定数である。この dE/dt は $t = (a-1)/b$ で最大値をとり，これを t_{max} とおくと，

$$t_{max} = \frac{a-1}{b} = \ln y - 0.5 \tag{2-17}$$

となることが知られている。多くの物質において b はおよそ 0.5 であることがわかっており，上式から a の値も求めることができる。たとえば，1 GeV の電子がアルミニウムに入射する場合，$E_c = 43$ MeV，$t_{max} = 2.65$ となり，$b = 0.5$ のとき，$a = 2.3$ となる。したがって，シャワーが最も成長する場所は，

$$t_{max}X_0 = 63.6\ [\mathrm{g/cm^2}] \tag{2-18}$$

となる。アルミニウムの密度は 2.7 g/cm³ なので，実際の長さで，24 cm くらいのところで最もシャワーが成長することがわかる。

また，電磁シャワーは横方向にも広がりを持つ。その半径はモリエール（Moliere）半径 R_M とよばれ，

$$R_M = \frac{X_0 E_s}{E_c} \tag{2-19}$$

と表される。ここに，E_s はスケールエネルギー（scale energy）と呼ばれる量で，

$$E_s = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} m_e c = 21.2052\ \mathrm{MeV} \tag{2-20}$$

である。電磁シャワーは，そのエネルギーの約 90% が半径 R_M の範囲に収まることが知られている。さきほどの 1 GeV の電子がアルミニウムに入射する場合，R_M はおよそ 11.8 g/cm² で，密度で換算すると，4.4 cm となる。

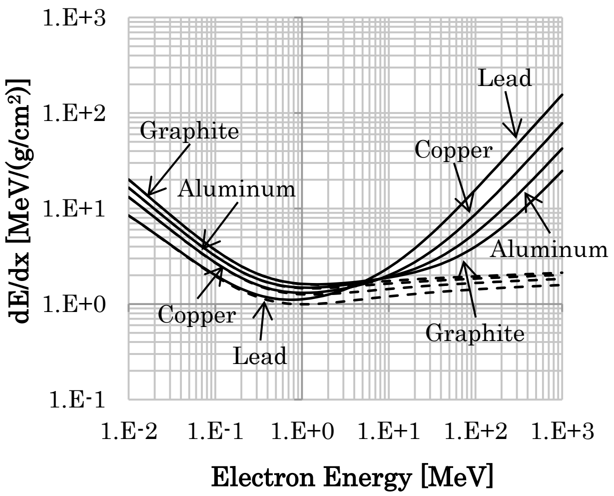

Fig. 2: グラファイト，アルミニウム，銅，鉛の中での電子のエネルギー損失率 [4]。実線が電離損失と制動放射損失を合わせた全損失パワーで，破線が電離損失のみを表す。

2.3.3. 多重散乱

物質に入射した電子は，原子との相互作用でエネルギーを失うだけでなく，多くの散乱を受けてランダムに軌道が曲げられる。この散乱角の分布は小さい角度でガウス分布となるが，ラザフォード散乱による大角度散乱の寄与もあるので，大きい角度ではガウス分布よりやや大きいテールを持つ。この分布の RMS は以下の式で示される [5]。

$$\theta_0 = \theta_{\mathrm{plane}}^{\mathrm{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{\mathrm{space}}^{\mathrm{rms}} \tag{2-21}$$

$$\theta_0 = \frac{13.6\ \mathrm{MeV}}{\beta c p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0} \right] \tag{2-22}$$

ここに，$\theta_{\mathrm{plane}}^{\mathrm{rms}}$ は平面に射影したときの角度の RMS，$\theta_{\mathrm{space}}^{\mathrm{rms}}$ は 3 次元空間で見た角度の RMS，p は電子の運動量，X_0 は放射長で，x は g/cm² 換算の長さである。そして，電子の横方向位置も散乱によってシフトするが，その RMS は，

$$y_{\mathrm{plane}}^{\mathrm{rms}} = \frac{1}{\sqrt{3}} x \theta_0 \tag{2-23}$$

となる。

一例として，エネルギーが 1 GeV，エミッタンスが 1 nm rad，RMS 半径が 10 μm，Twiss パラメータの $\alpha = 0$ の電子ビームが厚さ 0.1 mm のアルミニウム板を通過したあとのエミッタンスを計算してみる。まず，もとのビームの角度広がりは，1 nm rad / 10 μm = 0.1 mrad である。次に，アルミニウムの密度は 2.7 g/cm³ なので，$x = 0.027\ \mathrm{g/cm^2}$ となる。したがって，θ_0 は，

$$\theta_0 \simeq \frac{13.6\ \mathrm{MeV}}{1\ \mathrm{GeV}} \sqrt{\frac{0.027}{24.01}} \left[1 + 0.038 \ln \frac{0.027}{24.01} \right] \simeq 0.34\ \mathrm{mrad} \tag{2-24}$$

となる。よって，もとのビームの角度広がりとの 2 乗和の平方根をとると，通過後のビームの角度広がりは，0.35 mrad となる。このように，角度分布の幅がかなり大きくなったことがわかる。また，$y_{\mathrm{plane}}^{\mathrm{rms}}$ は，

$$y_{\mathrm{plane}}^{\mathrm{rms}} \simeq \frac{0.027 \times 0.35 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}} \simeq 5.5 \times 10^{-6}\ \mathrm{g/cm^2} \tag{2-25}$$

となる。これは，実際の長さで 2.0 μm で，もとのビーム半径 10 μm との 2 乗和の平方根をとると，10.2 μm となる。アルミニウム板が薄いこともあって，通過直後の電子ビームの形状はほとん

ど変わらないことがわかる。以上のことから，通過後のエミッタンス ϵ は，

$$\epsilon \simeq 10.2\ [\mu\mathrm{m}] \times 0.35\ [\mathrm{mrad}] \simeq 3.6\ \mathrm{nm\ rad} \quad (2\text{-}26)$$

に悪化することが予想される。

2.4. 電子ビームの放射現象

電子ビームが物質に入射したり，磁場で曲げられたりすると，さまざまな放射現象が生じる。この放射現象としては，物質に入射した瞬間にその境界で発生する遷移放射，物質中の光速より速い速度で進む粒子から発生するチェレンコフ放射，磁場で曲げられたときに生じるシンクロトロン放射がある。これらの放射現象はビーム診断に有用であるので，その原理について順に述べる。また，放射の波長が電子ビームの時間構造と同程度かそれより長くなるとコヒーレントな放射となる。このコヒーレント放射についても触れておく。なお，制動放射も電子の放射現象のひとつであるが，制動放射についてはさきに述べたのでここでは割愛する。

2.4.1. 遷移放射

高エネルギーの電子が真空から物質に入射することを考える。真空中で電子に付随する電磁場と，物質内で電子に付随する電磁場は異なるため，その差を補うための放射が生じる [7]。これが遷移放射である。この遷移放射は前方に集中することが知られており，放射の方向に対して角度 $1/\gamma$ rad. 程度の円錐部分にピークを持ち，それより外側では強度が急速に下がっていく。そして，遷移放射のスペクトルは $\gamma \sim 1000$ にてX線領域まで伸びることが知られている。

遷移放射のエネルギーの周波数・角度分布は，

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\theta} = \frac{e_0^2 \gamma}{2\pi^2 \epsilon_0 c} \times \left[\frac{(\gamma\theta)^3}{\left(\frac{\omega}{\gamma\omega_p}\right)^4 \left\{1 + \left(\frac{\gamma\omega_p}{\omega}\right)^2 + (\gamma\theta)^2\right\}^2 \{1 + (\gamma\theta)^2\}^2} \right] \quad (2\text{-}27)$$

と表される [7]。ここに，e_0 は素電荷（本節では自然対数の底 e と区別するために添字0をつけた），ω_p は物質のプラズマ振動数である。なお，この式は単位立体角あたりではなく，光軸のまわりの ϕ 方向に一周積分した値となっていることに注意されたい。これを角度 θ で積分して求めた周波数スペクトルは，

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{e_0^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c} \left\{ \left[1 + 2\left(\frac{\omega}{\gamma\omega_p}\right)^2 \right] \ln\left[1 + \left(\frac{\gamma\omega_p}{\omega}\right)^2 \right] - 2 \right\} \quad (2\text{-}28)$$

となる。このスペクトルは $\omega \sim \gamma\omega_p$ あたりまで伸びている形となっている。たとえば金のプラズマ周波数はeV換算で，$\hbar\omega_p \sim 80$ eV となるので，エネルギー 1 GeV の電子が金標的に当たったときには 160 keV 程度のX線の遷移放射が発生しうることを示している。そして，(2-28) を積分して得られる全放射エネルギーは，

$$I = \frac{e_0^2 \gamma \omega_p}{12\pi \epsilon_0 c} \quad (2\text{-}29)$$

となる。このように全放射エネルギーは γ に比例することがわかる。

さて，ビーム診断においては可視光や電波領域の遷移放射を扱うことが多い。とくに，可視光領域のものを，遷移放射光（Optical Transition Radiation）と呼ぶ。この遷移放射光は各電子が物質に入射した1点1点が発光点となり，また，瞬間的な放射であるので，電子ビームの横方向プロファイル（形状）の測定，時間プロファイルの測定の双方に重要である。そこで，$\omega \ll \gamma\omega_p$ での遷移放射の性質について考える。まず，この条件での周波数スペクトルは，

$$\frac{dI}{d\omega} \simeq \frac{e_0^2}{2\pi^2 \epsilon_0 c} \ln\left(\frac{\gamma\omega_p}{e\omega}\right) \quad (2\text{-}30)$$

と近似できる。したがって，遷移放射のスペクトルは周波数の対数に比例して単調減少することとなる。また，放射エネルギーは γ の対数に比例して大きくなることがわかる。たとえば，1 GeV の電子1個が金標的に当たったときの可視光の遷移放射のエネルギーを求めてみる。可視光の角周波数の範囲を $2\pi \cdot (4-8) \times 10^{14}$ rad/s とすると，この範囲で (2-30) を積分して，

$$I \simeq 1.24 \times 10^{-20}\,\mathrm{J} \tag{2-31}$$

が得られる。電子ビームのバンチの電荷が 1 nC とすると，遷移放射光のエネルギーは全部で $7.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{J}$ となり，角周波数 $2\pi \cdot 6 \times 10^{14}\,\mathrm{rad/s}$ の光子数にして，およそ 2×10^{8} 個となる。とくに，これをレンズで CCD カメラに結像してビームプロファイルを見る場合，この光を 1000 ピクセル程度で観測することとすると，1 ピクセルあたりおよそ 10 万個の光子がえられることとなり，十分に観測可能であると考えられる。

次に，遷移放射光の角度分布を考える。$\omega \ll \gamma\omega_p$ の場合，(2-27) は $\theta \simeq 1/\gamma$ でピークを持つものの，$1/\gamma < \theta < \omega_p/\omega$ までは $1/\theta$ に比例して減少し，それ以上の角度では $1/\theta^5$ で減少する。さきほどの 1 GeV の電子ビームの場合，$\theta \simeq 10/\gamma$ でも $\theta \simeq 1/\gamma$ の場合の 10%程度の遷移放射光エネルギーがあるので，角度依存性は比較的緩やかである。

2.4.2.　チェレンコフ放射

物質中に入射した電子がその物質内の光速より速く飛行する場合，チェレンコフ放射と呼ばれる放射が出ることが知られている [7]。このチェレンコフ放射の角度は，

$$\cos\theta_c = \frac{1}{n\beta} \tag{2-32}$$

で表される。ここに，n は物質の屈折率である。したがって，チェレンコフ放射が出るための電子の速度のしきい値は，

$$\beta = \frac{1}{n} \tag{2-33}$$

となることがわかる。電子が単位長さあたりに単位エネルギー幅の光を出すときの光子数は，

$$\frac{d^2N}{dEdx} = \frac{\alpha}{\hbar c}\sin^2\theta_c = \frac{\alpha}{\hbar c}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \tag{2-34}$$

となる [5]。ここに，α は微細構造定数，$\hbar$ はプランク定数の $1/2\pi$ である。

たとえば，十分にエネルギーの高い $(\beta \sim 1)$ 電子が屈折率 1.6 の石英に入射する場合，チェレンコフ放射の角度は，

$$\theta_\mathrm{c} = \cos^{-1}\frac{1}{1.6} \simeq 51\ \mathrm{deg.} \tag{2-35}$$

である。また，周波数範囲 $(4-8) \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$ にてこの電子 1 個が 1 cm あたりに放射する光子数は，

$$N \approx 3.7 \times 10^{2}\ \text{個} \tag{2-36}$$

と算出できる。

2.4.3.　シンクロトロン放射

高エネルギーの電子が磁場などで軌道を曲げられると，軌道の接線方向にシンクロトロン放射が出る。ここでは，電子ビームが偏向電磁石の中で曲げられて円軌道上を進むときに出るシンクロトロン放射について簡単にまとめる [8]。

エネルギー $\gamma m_e c^2$，運動量 $\beta\gamma m_e c$ の電子ビームが磁場 B で曲げられる際のシンクロトロン放射について考える。このときの曲率半径 ρ は，

$$\rho = \frac{\beta\gamma m_e c}{eB} \simeq \frac{\gamma m_e c}{eB} \tag{2-37}$$

である。この場合のシンクロトロン放射のスペクトルは，以下に示す臨界角周波数 ω_c でピークを持つ分布となる。

$$\omega_c = \frac{3\gamma^3 c}{2\rho} \tag{2-38}$$

そして，このスペクトルは，$\omega \gg \omega_c$ で指数関数的に減少し，$\omega \ll \omega_c$ で $\omega^{\frac{1}{3}}$ に比例する。したがって，低振動数側では緩く下がっていくようなスペクトルとなる。たとえば，1 GeV の電子ビームが 1 T の磁場で曲げられるとき，曲率半径は $\rho \simeq 3.3\,\mathrm{m}$ なので，$\omega_c \simeq 1 \times 10^{18}\,\mathrm{rad/s}$ で，光子エネルギーにして $\hbar\omega_c \simeq 6.7 \times 10^{2}\,\mathrm{eV}$ の軟 X 線となる。また，電子 1 個あたりの全放射パワー P は，

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 c\gamma^4}{4\pi\epsilon_0\rho^2} \tag{2-39}$$

である。

次に，シンクロトロン放射の RMS 角度発散 σ_θ についてまとめる。まず，$\omega = \omega_c$ のとき，

$$\sigma_\theta \simeq \frac{0.64}{\gamma}\ \mathrm{rad} \quad (\omega = \omega_c) \tag{2-40}$$

であることが知られている。そして，$\omega \gg \omega_c$ と $\omega \ll \omega_c$ のときの振る舞いはそれぞれ，

$$\sigma_\theta \simeq \frac{0.58}{\gamma}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{rad} \quad (\omega \gg \omega_c) \tag{2-41}$$

$$\sigma_\theta \simeq \frac{1.07}{\gamma}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{-\frac{1}{3}}\ \mathrm{rad} \quad (\omega \ll \omega_c) \tag{2-42}$$

である。

2.4.4. コヒーレントな放射

これまでに述べた遷移放射やシンクロトロン放射などの放射において，電子ビームの時間構造と比べて波長が同程度かそれより長い領域ではコヒーレントな成分が現れる。電子 1 個の放射エネルギーの波長依存性を $P_e(\lambda)$，電子数を N_e とおくと，コヒーレント成分を考慮に入れた放射パワーは，

$$P(\lambda) \sim P_e(\lambda)\left[N_e + {N_e}^2 F(\lambda)\right] \tag{2-43}$$

となる [9]。ここに，$F(\lambda)$ は形状因子と呼ばれる量で，

$$F(\lambda) = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-j\frac{2\pi z}{\lambda}}\, dz\right|^2 \tag{2-44}$$

と定義される。式中の $f(z)$ は電子数分布を表す関数である。放射パワーは，(2-43) の角かっこ内第 1 項に示すコヒーレントでない成分と，第 2 項に示すようなコヒーレントな成分の和となる。そして，コヒーレントな成分は電子数の 2 乗に比例するので，強度が極端に大きくなる。このことから，放射のコヒーレントな成分を検出することで，電子ビームのバンチ長などの時間構造を類推することが可能である。

2.5. 電子ビームによる電離にともなう現象

電子ビームが物質に入射すると，2.3.1 節に述べた要領で物質を電離する。電離によって発生した電子・ホールペアは，蛍光体に吸収されると光として信号を取り出すことができたり，電極を付けて電圧をかけておけば電荷として直接取り出したりできる。これらの蛍光や電荷の取り出しについてその原理を述べる。

2.5.1. 電子ビームによる蛍光

蛍光体に電子ビームが入射するとそのエネルギーが蛍光物質に吸収されて発光する。この光をレンズと CCD カメラで撮像したり，フォトダイオードなどで強度を測定したりしてビームの形状や電荷量などを観測することができる。さて，固体の蛍光体には大きく分けて無機結晶シンチレータとプラスチックシンチレータがあるが，加速器では耐放射線性や真空での使用に対応している必要があるので，無機結晶シンチレータが選ばれることがほとんどである。したがって，ここでは無機結晶シンチレータについて述べることとする。

一般に，無機結晶は純粋なもので蛍光を発するものと，蛍光物質をドープすることによって発光するものとがある [5]。いずれも発光原理は同じで，入射した電子によって結晶内の価電子帯の電子が電離されて伝導帯に移り，それが蛍光物質にて捕捉され，エネルギーの低い準位に遷移する際に蛍光を発する，というメカニズムである。その様子を図示したものを Fig. 3 に示す。

まず一例として，伝統的に放射線検出器としてよく使われている NaI(Tl) について紹介する。これはヨウ化ナトリウム NaI の結晶にタリウム Tl を適量ドープしたものである。発光量はおよそ 40000 Photons/MeV である [5]。NaI(Tl) はよく普及していることから各種シンチレータの発光量の基準として，NaI(Tl) に対して何%の発光量といった具合に比較されることが多い。しかし，NaI(Tl) は潮解性があるため扱いにくく，加速器のビーム診断に使われることは稀である。

次に，加速器でよく使われる蛍光体として，Desmarquest 社の AF-995R がある。これは，化学組成が Al_2O_3:Cr で，アルミナ Al_2O_3 に酸化クロム Cr_2O_3 が 0.5%ドープされたものである [10]。発光の中心波長は 693nm で赤色である。蛍光の立ち上がりはマイクロ秒オーダであるが，時定数は約 3 ms で比較的遅い部類となる [11]。発光量の絶対的な数値について筆者は見つけることが

できなかったが，0.1 nC 程度の電子ビームを CCD カメラで撮影する用途には十分な発光量があることは確かである。AF-995R はアルミナでできているため耐放射線性があり，電子線型加速器で幅広く使用されている。しかし，この蛍光体は多結晶構造で不透明なため蛍光体内での乱反射のため像がにじんでしまう。そのため，高分解能測定には不向きである。

最後の例として，高分解能測定に適したシンチレータとして YAG:Ce がある [12]。これは，化学組成が $Y_3Al_5O_{12}$: Ce となっている結晶で，Ce は 0.5% 程度のものが多い。発光の中心波長は 540 nm（黄色）で，時定数は約 70ns と無機結晶シンチレータの中ではかなり早い部類に入る。発光量は NaI(Tl)の 1/3 程度である。YAG:Ce は透明な結晶なので，AF-995R のような乱反射がなく鮮明な像を得ることができる。通常は結晶表面での多重反射による分解能低下を最小限に抑えるため，厚さ 0.1 mm 程度の薄い結晶が使われる。また，耐放射線性も比較的良いとされ，加速器などで広く使われている。

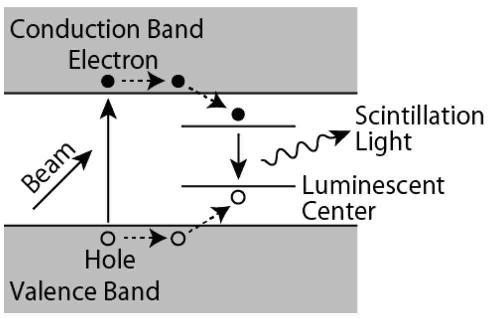

Fig. 3: 無機結晶シンチレータの発光原理。

2.5.2. 電子ビームによって電離された電荷の検出

固体・液体・気体の相の違いを選ばず，絶縁体であれば電子ビームによって電離された電荷（固体の場合は電子・ホールペア，液体・気体では電子とイオン）を電場で引き寄せて電極から取り出すことが可能である。このような電離検出器は，絶縁体を電極で挟み，電圧をかけて電荷を引き寄せる。このとき，かける電圧と得られる電荷量にはおおむね Fig. 4 のような関係があり，電圧が低いところのプラトー部分を電離箱領域，その次に現れる直線的な振る舞いをする部分を比例計数管領域，そのあとのプラトー部分をガイガー・ミュラー計数管領域と呼び，それ以上の電圧では放電し続ける領域となる。この 3 つの領域にはそれぞれ特徴があり，用途によって使い分けされる。

まず，電離箱領域より低電圧のところでは，電子ビームによって電離した電荷の一部が電極に到達する前に再結合する。そのため，全電荷量は検出できないが，電離した電荷に比例した信号は得られる。この領域は電荷が再結合することから再結合領域とも呼ばれる。

次に，電離箱領域では，電子ビームによって電離された電荷が再結合することなく電極に集められるので，電子ビームが電離した電荷量がそのまま電極で検出される。そして，その電荷量は電圧にあまり依存しない。しかしながら，電離箱領域は得られる電荷量が少ないので，電子 1 個が通過した程度では検出が困難である。ただし，電子ビームを直接検出する場合は十分な数の電子が通過するので電離箱領域にて検出可能である。

その次に，比例計数管領域では，電荷が引き寄せられる間にその電荷が他の分子を電離して電荷が増幅される。その増幅率の分だけ増えた電荷が検出される。そのため，電子 1 個が通過した場合でも検出でき，得られた電荷量は電子が失ったエネルギーに比例する。したがって，電子の個数と損失エネルギーの両方が検出できる。ただし，電子が当たる頻度が電極間の電荷のドリフト時間に比べて高い場合は，数えきれなくなってしまうので注意が必要である。

最後に，ガイガー・ミュラー計数管領域では，電荷の増幅効果が電極間の物質全体にわたって起こる。そのため，電子の損失エネルギーによらず似たような電荷量が得られるようになる。このことにより，電極間電圧に対する依存性も小さくなる。この領域はわずかでも電離が起これば一定量の電荷が得られるので，単純に個数だけ数えたい場合に適する。ただし，電離が全体にわたって起こるため，そこからもとの状態にもどるまでに

一定の時間が必要で，その間はデッドタイムとなり検出ができなくなることに注意が必要である。

以上のことから，線型加速器での電子ビームのような多数の電子の電離を扱う場合は，電離箱領域を使うのがよさそうである。また，電離箱領域よりも低電圧の領域でも信号が十分とれる場合は問題にならなさそうである。

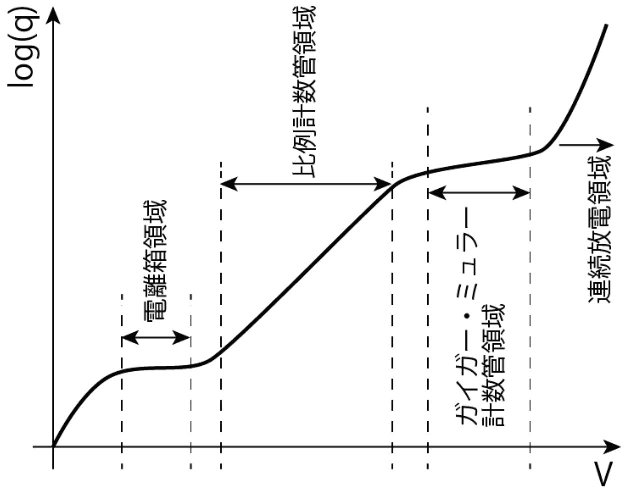

Fig. 4: 電離検出器の電極電圧と検出電荷量の関係。

3. SACLA のビーム診断システム

SACLA のビーム診断システムを考えるにあたり，まず，必要とされる性能とその由来についてまとめる。その後，その性能を満たすために設置した各種ビーム診断機器についてその概略を述べる。

3.1. ビーム診断システムに必要な性能

SACLA においてビーム診断システムに必要とされる性能には，ビーム軌道に関するもの，ビームプロファイルに関するもの，ビームの時間構造に関するものなど，さまざまな項目がある。これらの必要性能について順に述べる。

まず，アンジュレータ区間において，電子ビームと X 線とが数 μm以内の精度で重なりあっていなければならないという要請がある。そのため，電子ビームの軌道，すなわち，ビーム位置を 1 μm 以下の分解能で測定できることが必要となる。

次に，X 線自由電子レーザを発生させるには，規格化スライスエミッタンスにて 1 mm mrad 以下が必要とされる。これは射影エミッタンスでも 1 mm mrad 程度のビームでなければならないことを暗に示している。そこで，このような小さいエミッタンスを測定できるような高分解能なビームプロファイルモニタが必要である。たとえば，規格化エミッタンス 1 mm mrad の場合，エネルギーが 8 GeV になるとエミッタンスが約 64 pm rad となる。この状態でベータ関数が 1 m まで絞られるとビームの半径はわずか 8 μm となる。このようなビームの形状が測定でき，エミッタンスが求められるよう，数 μm 分解能のビームプロファイルモニタが必要となる。

その次に X 線自由電子レーザで必要となるのが，3 kA 以上のピーク電流と，それを達成するためのバンチ長 30 fs までのバンチ圧縮である。そのため，時間分解能 10 fs の時間構造測定システムが必要となる。それに加えて，SACLA では，1 ns で切りだされた電子ビームを速度変調バンチング，および，磁場シケイン型のバンチ圧縮器を 3 台使用してバンチ長を縮めていくので，バンチ圧縮の各段階でのバンチ長を適宜おさえておく必要がある。

そのほかにも，ビームが適切に加速・輸送できているかを測定するための電荷量モニタが必要である。電荷量の情報はピーク電流の測定にも必要なので，そういった意味でも重要である。

また，各磁場シケインでのビームエネルギーはバンチ圧縮の状態を推定する上で重要であるし，加速器の出口でのエネルギーはX線の波長にも影響するので，そこでは 10^{-4} 程度のエネルギー分解能が必要とされる。エネルギー測定は，磁場シケインなどのエネルギー分散部でビーム位置を測定すればよいが，10^{-4} のエネルギー分解能を得るには，たとえば，エネルギー分散が 100 mm の場合に 10 μm の分解能で位置測定ができなければならないことを意味する。

SACLA の入射部では速度変調バンチングという，電子ビームの飛行時間差を使ったバンチ形成を行うので，その状態を監視するのにビームの到

達時間も重要な情報になる。また，ユーザ実験においてはポンプ・プローブ実験のようにビームの到達時間を正確に知る必要のあるものがあり，そのようなユーザに到達時間を提供することも重要である。このような用途には，バンチ長と同程度の数 10 fs の時間分解能を持った到達時間検出器が必要である。

あと，X 線自由電子レーザの生成に直接関係しないが，アンジュレータの永久磁石の放射線損傷による減磁を防ぐために，ビーム損失やビームハローを低く抑えなければならない。この量は 1 ショットあたり 1 fC 程度が限度と見積もられており，このような低電荷量のビーム損失やビームハローの測定が必要である。

最後に，データ収集に関するものとして，ショットごとに同期したデータ収集ができなければならないという条件もある。たとえば，ビーム軌道を測定する場合，位相空間内の点を決めるためにはビームの位置と傾きの 2 つの情報が必要となる。そのためには，少なくとも 2 ヶ所でのビーム位置情報が必要で，それらがショットごとに同期していなければならない。さらに，アンジュレータ区間で十分に軌道を測定しようとすると，100 m にわたるアンジュレータ区間の複数のデータ収集用 VME システムの間を同期しなければならない。このような高度な同期データ収集システムが必要である。

このように，SACLA では高精度なビーム診断機器が必要であることがわかる。

3.2. SACLA のビーム診断機器

前節で述べたそれぞれの必要性能に対応するビーム診断機器を測定パラメータごとにまとめる。これらそれぞれの機器の詳細については次の第 4 節以降で解説する。

3.2.1. ビーム位置測定

SACLA のビーム位置測定には主として RF 空胴型ビーム位置モニタ（RF-BPM）を用いている。これはアンジュレータ区間で必要となる 1 μm 以下の位置分解能を実用的に達成可能な唯一の方法であると考えられるためである。アンジュレータ区間以外では必ずしも RF-BPM である必要はないが，システムのメンテナンス性などを考え，加速器部分にも同じ RF-BPM を使用している。現在 SACLA で使用されている RF-BPM は約 60 台となっている。RF-BPM の詳細は第 4 節で述べる。

3.2.2. ビームプロファイル測定

数 μm の分解能を持つビームプロファイル測定には, OTR や蛍光を利用したスクリーンモニタを使用している。場所によって必要な分解能が異なるため，ターゲットの種類や光学系の構成がいくつかあるが，現状，全部で約 40 台のスクリーンモニタが使用されている。スクリーンモニタの詳細は第 5 節にて記述する。

3.2.3. ビーム電荷量測定

ビームの電荷量測定には CT モニタを使用する。これは電子ビームに付随する磁場をピックアップして電荷量を検出するものである。SACLA では，クライストロンのような大電力パルス機器の近くでもノイズの影響を受けにくい高速差動 CT を開発し，使用している。現状，約 30 台の高速差動 CT が使用されている。この詳細は第 6 節で述べる。

3.2.4. ビームの時間構造測定

SACLA では 1 ns のビームのバンチ長を順次圧縮して最終的に 30 fs まで縮めるので，各段階に適した時間構造測定システムが必要である。

まず，最終的なバンチ長を測定するために RF デフレクタという特殊な空胴を使用して 10 fs の分解能で時間構造を測定する。RF デフレクタは横方向電磁場発生させる空胴で，この電磁場にて電子ビームを掃引し，時間プロファイルを空間プロファイルに変換したものをスクリーンモニタで検出する。RF デフレクタの詳細は第 7 節にて述べる。

次に，1 ps 程度かそれ以下の領域の時間構造を測定するために，ストリークカメラを設置している。スクリーンモニタからの OTR をストリークカメラで検出することにより，その光の時間構造から電子ビームの時間構造を知ることができる。この詳細を第 8 節にまとめている。

また，コヒーレント放射によるバンチ長測定もおこなっている。まず，入射部ではスクリーンモニタのターゲットにビームが当たったときにで

るコヒーレント遷移放射のマイクロ波を検出することで，1 ns から数 10 ps 程度のバンチ長をモニタする。次に，各バンチ圧縮器の磁場シケインの偏向電磁石で発生するコヒーレントシンクロトロン放射を測定することで，非破壊にバンチ長をモニタしている。これは 3 台のバンチ圧縮器のそれぞれに設置されている。対象となるバンチ長は 10 ps から 30 fs にあたるため，テラヘルツ領域の放射となる。これらのモニタについて，第 0 節にて述べている。

3.2.5. ビームの到達時間測定

ビームの到達時間測定には，まず，RF-BPM 空胴の基準空胴（TM010 モード）を用いる方法がある。これは第 4 節で記述している。また，入射部では高速差動 CT を使った方法や，専用の RF 空胴を使ったものも用いている。

3.2.6. ビーム損失・ビームハローの測定

アンジュレータ区間でのビーム損失やビームハローを高感度で検出するため，光ファイバ型ビームロスモニタとダイヤモンド型ビームハローモニタを設置している。まず，光ファイバ型ビームロスモニタは，ビームパイプなどに散乱された電子が光ファイバに当たった際に出るチェレンコフ光をとらえる検出器である。次に，ダイヤモンド ハローモニタは，ダイヤモンド板に電子ビームが当たった際に発生する電子・ホールペアを電圧のかかった電極でピックアップする検出器である。これらのモニタは第 10 節にて解説する。

3.2.7. データ収集システム

データ収集システムには SPring-8 蓄積リングなどで実績のある MADOCA を使用している。さらに，SACLA では同期データ収集が必要であるので，そのような仕組みも取り入れている。詳細は第 11 節で述べる。

4. RF 空胴型ビーム位置モニタ

4.1. 測定原理と特徴

RF 空胴に電子ビームが誘起する電磁場を使ってビーム位置を測定するには，2.2 節で述べたように，ビーム軸付近で z 方向電場が線形に変化するモードを使う必要がある。ピルボックス空胴の場合，このようなモードのなかで最も周波数が低いものは TM110 モードなので，このモードについて電子ビームが誘起する電磁場を考える。また，ビーム位置には TM010 モードの信号が必要になるので，その電磁場についても述べる。最後に，ビーム位置の誤差の要因のひとつとしてビームの傾きの信号についても述べる。

4.1.1. TM110 モードの電磁場

TM110 モードの規格化された z 方向電場を円柱座標 (ρ, ϕ, z) で表すと，(14-78)，(14-104) より，

$$E_z = \frac{2}{b\sqrt{\pi L}\, J_1'(\kappa_{1,1})} J_1\left(\frac{\kappa_{1,1}}{b}\rho\right)\cos\phi \tag{4-1}$$

となる。ここに，b, L は空胴の半径と長さで，J_1 は第 1 種第 1 次ベッセル関数，$\kappa_{1,1} \simeq 3.832$ は $J_1(x) = 0$ のひとつ目の解（零点と呼ぶ）である。ベッセル関数の性質から，x が十分小さいとき，$J_1(x) \simeq x/2$ と近似できる。また，$\phi = 0, \pi$ のときだけを考えることにすると，E_z は

$$E_z \simeq \frac{\kappa_{1,1} x}{b^2\sqrt{\pi L}\, J_1'(\kappa_{1,1})} \tag{4-2}$$

と近似できる。

この空胴に，速度 βc の点電荷 q が通過することとする。このとき，規格化シャントインピーダンス R_{sh}/Q は，(14-135) から，

$$\begin{aligned}\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q} &= \frac{8\beta^2 c^2 E_z^2}{\epsilon_0 \omega_a^3}\sin^2\frac{\omega_a L}{2\beta c}\\ &= \frac{8\beta^2 c^2 \kappa_{1,1}^2 x^2}{\pi\epsilon_0 \omega_a^3 b^4 L\left[J_1'(\kappa_{1,1})\right]^2}\sin^2\frac{\omega_a L}{2\beta c}\end{aligned} \tag{4-3}$$

となる。ここに，ω_a は共振角周波数で，

$$\omega_a = \frac{\kappa_{1,1} c}{b} \tag{4-4}$$

である。したがって，誘起される電磁場のエネルギーは，(2-4) より，

$$U = \frac{2\beta^2 q^2 x^2}{\pi\epsilon_0 b^2 L\left[J_1'(\kappa_{1,1})\right]^2}\sin^2\frac{\omega_a L}{2\beta c} \tag{4-5}$$

となる。誘起される電磁場のエネルギーはビーム位置の 2 乗と電荷の 2 乗に比例する。したがって，

電磁場の振幅がビーム位置と電荷に比例することとなる。また，ビーム位置の符号が変わると電磁場の位相が 180 度回るので，位相の情報も重要であることがわかる。なお，誘起される電磁場のエネルギーと空胴の長さ L の関係は，L が十分小さいうちは $U \propto L$ となることもわかる。

次に，この電磁場の位相について触れておく。電荷が通過した直後の電磁場の係数は，(14-125)，(14-126) より，

$$f_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = -\frac{\beta q x}{\epsilon_0 b\sqrt{\pi L}\, J_1'\left(\kappa_{1,1}\right)} \sin\frac{\omega_a L}{\beta c} \tag{4-6}$$

$$g_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = \frac{\beta q x}{\epsilon_0 bc\sqrt{\pi L}\, J_1'\left(\kappa_{1,1}\right)}\left(1-\cos\frac{\omega_a L}{\beta c}\right) \tag{4-7}$$

となる。これを初期条件として ω_a で自由振動することを考える。改めて

$$g_a(t) = A\cos\omega_a t + B\sin\omega_a t \tag{4-8}$$

とおき，$t = 0$ のときに，(4-6)，(4-7) を満たすこととすると，

$$g_a(0) = A = \frac{\beta q x}{\epsilon_0 bc\sqrt{\pi L}\, J_1'\left(\kappa_{1,1}\right)}\left(1-\cos\frac{\omega_a L}{\beta c}\right) \tag{4-9}$$

$$\begin{aligned}\dot{g}_{\mathrm{a}}(0) = B\omega_a &= -k_a f_a(0) \\ &= \frac{\beta\omega_a q x}{\epsilon_0 bc\sqrt{\pi L}\, J_1'\left(\kappa_{1,1}\right)}\sin\frac{\omega_a L}{\beta c}\end{aligned} \tag{4-10}$$

となる。このとき，$g_a(t)$ の位相 θ は，

$$\theta = \tan^{-1}\frac{A}{B} = \frac{\omega_a L}{2\beta c} \tag{4-11}$$

と得られる。

4.1.2. TM010 モードの電磁場

さて，以上の議論からビーム位置を算出するには TM110 モード空胴からの情報だけでなく，電荷と位相原点の情報が必要であることがわかった。これらの情報はビーム位置によらないものが必要となるので，ビーム軸付近で z 方向電場が変化しないモードを使用しなければならない。このようなモードで最も周波数が低くなるのが TM010 モードである。このモードの規格化された z 方向電場は，(14-78)，(14-104) より，

$$E_z = \frac{\sqrt{2}}{b\sqrt{\pi L}\, J_0'\left(\kappa_{0,1}\right)} J_0\left(\frac{\kappa_{0,1}}{b}\rho\right) \tag{4-12}$$

で，軸付近 ($|x| \sim 0$) では $J_0(x) \simeq 1$ と近似できる。このときの，規格化シャントインピーダンス，共振角周波数，誘起される電磁場のエネルギーはそれぞれ，

$$\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q} = \frac{16\beta^2 c^2}{\pi\epsilon_0\omega_a^3 b^2 L\left[J_0'\left(\kappa_{0,1}\right)\right]^2}\sin^2\frac{\omega_a L}{2\beta c} \tag{4-13}$$

$$\omega_a = \frac{\kappa_{0,1} c}{b} \tag{4-14}$$

$$U = \frac{4\beta^2 q^2}{\pi\epsilon_0 L\kappa_{0,1}^2\left[J_0'\left(\kappa_{0,1}\right)\right]^2}\sin^2\frac{\omega_a L}{2\beta c} \tag{4-15}$$

となる。このことから，TM010 モード空胴に誘起される電磁場のエネルギーはビーム位置に不感で，電荷の 2 乗に比例することがわかる。そして，TM010 モード空胴と TM110 モード空胴の共振周波数を一致させておくと，位相の周波数換算をする必要がなくなるので扱いやすい。また，TM010 空胴の位相はビームの到達時間を反映したものとなる。これと加速器の基準 RF 信号と位相比較すればビームの到達時間の変動を監視することも可能である。

4.1.3. 電子ビーム軌道が空胴の軸から傾いている場合

これまでは電子ビームの軌道が空胴の軸と平行な場合を扱ったが，実際はアライメントの誤差やビーム軌道の歪みなどの影響でまったくの平行とはならない。このため，わずかながら傾いて通過することも想定しておかなければならない。電子ビーム軌道が空胴の軸から x' だけ傾いているとき，(2-3) は，x' が十分小さいとすると，

$$\begin{aligned}\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_a dv &\simeq \beta c q E_z\left[x = x'\left(\beta c t - \frac{L}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\beta^2 c^2 q\kappa_{1,1} x'\left(t - \frac{L}{2\beta c}\right)}{b^2\sqrt{\pi L}\, J_1'\left(\kappa_{1,1}\right)}\end{aligned} \tag{4-16}$$

と近似できる。これを使って (14-115) の微分方程式を解き，誘起される電磁場のエネルギーを求めると，

$$U = \frac{2\beta^4 x'^2 q^2}{\pi\epsilon_0 L\kappa_{1,1}^2\left[J_1'(\kappa_{1,1})\right]^2}\left(\sin\frac{\omega_a L}{2\beta c} - \frac{\omega_a L}{2\beta c}\cos\frac{\omega_a L}{2\beta c}\right)^2 \tag{4-17}$$

となる。この式の中の三角関数をテイラー展開すると，$U \propto L^5$ となることがわかる。そのため，ビームの傾きによって誘起される電磁場のエネルギーは 4.1.1 節のビーム位置によって誘起されるエネルギーよりも空胴の厚さに対する依存性が強い。傾きの信号をあまり混入させないためには空胴に必要以上の厚みを持たせない設計にすべきである。

次に，この傾きの信号の位相を求める。電荷が通過した直後の電磁場の係数を，(14-115) の微分方程式を解いて求めると，

$$f_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = \frac{-\beta^2 q x'}{\epsilon_0\kappa_{1,1}\sqrt{\pi L}\,J_1'(\kappa_{1,1})} \times\left[1-\cos\frac{\omega_a L}{\beta c} - \frac{\omega_a L}{2\beta c}\sin\frac{\omega_a L}{\beta c}\right] \tag{4-18}$$

$$g_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = \frac{\beta^2 q x'}{\epsilon_0\kappa_{1,1} c\sqrt{\pi L}\,J_1'(\kappa_{1,1})} \times\left[\frac{\omega_a L}{2\beta c}\left(1+\cos\frac{\omega_a L}{\beta c}\right) - \sin\frac{\omega_a L}{\beta c}\right] \tag{4-19}$$

が得られる。4.1.1 節と同様に (4-8) の係数を求めると，

$$g_a(0) = A = \frac{\beta^2 q x'}{\epsilon_0\kappa_{1,1} c\sqrt{\pi L}\,J_1'(\kappa_{1,1})} \times\left[\frac{\omega_a L}{2\beta c}\left(1+\cos\frac{\omega_a L}{\beta c}\right) - \sin\frac{\omega_a L}{\beta c}\right] \tag{4-20}$$

$$\dot{g}_{\mathrm{a}}(0) = B\omega_a = -k_a f_a(0) = \frac{\beta^2 \omega_a q x'}{\epsilon_0\kappa_{1,1} c\sqrt{\pi L}\,J_1'(\kappa_{1,1})}\left[1-\cos\frac{\omega_a L}{\beta c} - \frac{\omega_a L}{2\beta c}\sin\frac{\omega_a L}{\beta c}\right] \tag{4-21}$$

となる。したがって，$g_a(t)$ の位相 θ は，

$$\theta = \tan^{-1}\frac{A}{B} = \tan^{-1}\left(-\cot\frac{\omega_a L}{2\beta c}\right) = \frac{\omega_a L}{2\beta c} - \frac{\pi}{2} \tag{4-22}$$

と求まった。これは，(4-11) からちょうど $\pi/2$ 位相がずれているので，位相情報を用いて位置の信号と傾きの信号とを区別することができる。

また，電子ビームの形状自体が傾いている場合（バンチの進行方向位置に応じて重心位置が変わる場合）も軌道が傾いているときと同じ位相の電磁場が誘起される。ここではその計算までは立ち入らないが，これまでと同様の方法で求めることができる。

4.1.4. RF-BPM の特長

ここで，他のビーム位置モニタと比較して RF-BPM が優れている点をまとめておく。RF-BPM はその他のボタン型やストリップライン型と違い，電子ビームが空胴の中心を通るときに信号が 0 となる。他の BPM では各電極からの比較的大きな信号の差をとってわずかな違いを取り出さなければならないので，分解能を高くするのが難しい。それに対し，RF-BPM はビームが中心を通るときに信号がなくなるので，信号を低ノイズに増幅することさえできれば高分解能化しやすい。また，RF-BPM は空胴自体がバンドパスフィルタの役目を果たすので，空胴のバンド幅以外のノイズが入る余地が少なく，S/N のよい信号を得やすい。他にも，RF-BPM を円筒対称な空胴として設計した場合，高精度な旋盤加工で製作できるため，ビーム軸と空胴の軸のずれを小さくしやすい。このように，1 μm 以下の分解能を得るには，RF-BPM が適していると言えよう。

4.2. 空胴の設計・製作

4.2.1. 空胴のパラメータの決定

空胴の設計において決めなければならないパラメータは，共振周波数，負荷 Q 値 Q_{L}，R/Q などである。SACLA の RF-BPM においてこれらのパラメータを決めていったときの考え方について述べる [13]。

周波数については，まず，内径約 22 mm のビームパイプの導波管としての遮断周波数 8.3 GHz より十分低い必要がある。次に，周波数は高いほうが TM110 モードのビーム軸付近の電場の変化の傾きが大きく取れるので，そのほうが高分解能測定に有利である。このことから，主加速器の RF 周波数として使用している 5712 MHz

付近が適当であろうと考えられる。しかしながら，加速周波数 5712 MHz を使用すると，加速管からの暗電流が RF-BPM に入った場合，大きな信号を出す可能性があるので，あえて 4760 MHz を選んだ（4760 = 5712 × 5 / 6)。こうすることにより，暗電流の影響をほとんど受けなくてすむ。

次に，負荷 Q 値 Q_{L} については，空胴に誘起された電磁場エネルギーが減衰する時定数，すなわち，BPM 空胴から出てくる信号の時定数を決めることとなる。そのため，空胴の応答性に関わる量となる。また，空胴の周波数バンド幅を決めることにもなるので，そのバンド幅に比例したノイズが入り，分解能を制限することとなる。他にも，Q 値が高いと温度変化によって共振周波数がずれて位相が流れることも懸念される。そして，Q_{L} が高くなくてよい場合は電気伝導率の高い材質でなくてもよいため，加工の容易な材質を選ぶことができる。以上のことをふまえて，Q_{L} の値を 50 程度とした。このとき，時定数は

$$\frac{2Q_{\mathrm{L}}}{\omega} = \frac{2 \times 50}{2\pi \times 4.76 \times 10^{9}} \simeq 3.3\ \mathrm{ns} \tag{4-23}$$

程度となる。バンド幅は，

$$\Delta f = \frac{4.76 \times 10^{9}}{50} \simeq 95\ \mathrm{MHz} \tag{4-24}$$

となる。このときの熱雑音パワー P_n は，絶対温度 300 K にて，

$$\begin{aligned} P_n = 4k_{\mathrm{B}}T\Delta f &\simeq 1.6 \times 10^{-12}\ \mathrm{W} \\ &\simeq -88\ \mathrm{dBm} \end{aligned} \tag{4-25}$$

となる。したがって，この RF-BPM の分解能はこの雑音パワーと信号出力が同程度になるところで制限されることとなる。

その次に，空胴の長さ L について考える。SACLA では通常の運転では最低 0.1 nC の電荷量があるので，そのときに 1 μm 以下の分解能が十分に得られるエネルギーが取り出せなければならない。このことを，ピルボックス空胴での近似で考える。まず，周波数を 4760 MHz とするため，(4-4) から空胴の半径 b は 38.4 mm となる。ビーム位置 x を 1 μm，電荷量を 0.1 nC とし，次に，(4-5) 式より，空胴の長さ L だけを残してパラメータを入れると，

$$U\ [\mathrm{J}] \simeq \frac{3.0 \times 10^{-15}}{L\ [\mathrm{mm}]} \sin^{2}(0.050\, L\ [\mathrm{mm}]) \tag{4-26}$$

となり，L を 5 mm にすると，

$$U \simeq 3.7 \times 10^{-17}\ [\mathrm{J}] \tag{4-27}$$

となる。このとき，入出力ポートから出て行く RF パワーのピーク値 P_0 は，(14-42) より，

$$P_0 = \frac{\omega U}{Q_{\mathrm{ext}}} \simeq 2.2 \times 10^{-8}\ \mathrm{W} \simeq -47\ \mathrm{dBm} \tag{4-28}$$

となる。ここで，Q_0 が十分大きいと仮定して，$Q_{\mathrm{ext}} \simeq Q_{\mathrm{L}} = 50$ と近似した。この P_0 はさきほど求めた熱雑音 (4-25) より十分大きいので，1 μm 以下の分解能に十分到達できると考えられる。また，特性インピーダンス $Z_0 = 50\ \Omega$ の伝送線路の電圧のピーク値 V_0 は，(14-43) より，

$$V_0 = \sqrt{P_0 Z_0} \simeq 1.1\ \mathrm{mV} \quad (0.1\ \mathrm{nC}, 1\ \mu\mathrm{m}) \tag{4-29}$$

と求まる。

最後に傾きに対する感度を計算しておく。ビーム軌道が傾いているときに誘起されるエネルギーは，(4-27) と同じ条件の場合，(4-17) より，

$$U \simeq 1.6 \times 10^{-12} \times x'^{2}\ [\mathrm{J}] \tag{4-30}$$

となる。これが (4-27) と同じエネルギーとなるには x' が 4.8 mrad になる必要がある。これほどビーム軌道が傾くことは考えにくいので，ここで仮定した条件では傾きによる信号は無視できる程度の大きさにしかならない。

4.2.2. 空胴の材質・形状

空胴の材質を考える際には Q 値との関係や真空に関する性質，加工の難易度などを考慮しなければならない。今回の場合，Q_{L} が 50 と高くないので無負荷 Q 値 Q_0 もそれほど高い必要はなく，たいていの金属材料が使える。加工や真空のことも考えて，切削・ろう付け・溶接などの取り扱いの比較的容易なステンレス鋼 SUS316L を使用することとした。

次に，形状について述べる。まず，SACLA の RF-BPM の概略図を Fig. 5 に示す。RF-BPM は TM110 モードの位置検出空胴と電荷と位相基準

を求めるための TM010 モード基準空胴を備えている。空胴がコの字に折れ曲がっているのは，サイズを小さくする工夫をしたのと，基準空胴に RF ポートのアンテナを取り付けやすくするためである。位置検出空胴には X 軸と Y 軸の位置が検出でき，かつ，電磁場の対称性が保たれるよう，4 個の RF ポートを取り付けている。RF ポート部分は，TM110 と同時に励振される TM010 モードのような不要な信号がこのポートから出て行かないように，スロットを切ってアンテナを立てている。スロットは放射状に切られているので，Fig. 6 に示すように，TM010 モードのような放射状にしか表面電流が流れないモードについてはスロット内に電場が立たない。逆に，TM110 モードについては，軸の周りに回転する方向の表面電流も流れるので，その電流がスロットを横切る際にスロットに電場が立ち，RF ポートとの結合が生じる。このように，不要な信号と結合させないようにすることで誤差要因を減らし，高分解能を達成しやすくしている。

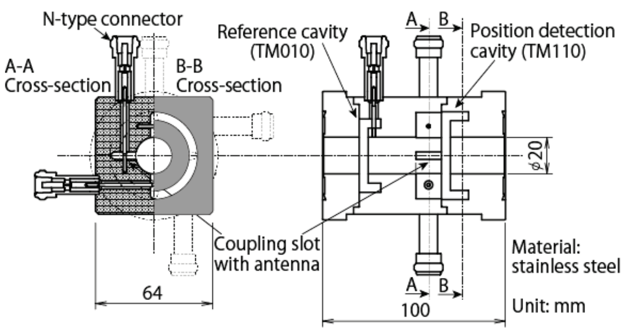

Fig. 5: RF-BPM 空胴の概略図

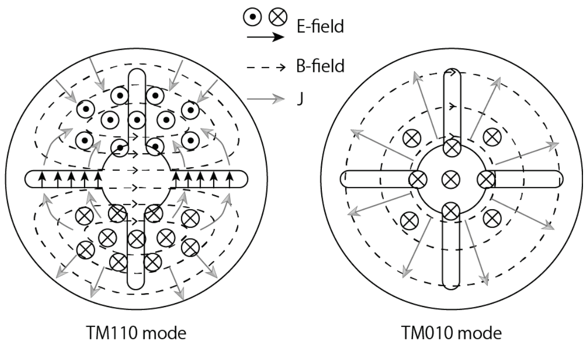

Fig. 6: 位置検出空胴のスロットと TM110，TM010 各モードとの結合の様子。

4.2.3. RF シミュレーション

3 次元 RF 電磁場シミュレータ HFSS にて RF-BPM 空胴のシミュレーション結果について簡単にまとめる。

まず，位置検出空胴の TM110 モードの電場強度を Fig. 7 に示す。TM110 の 2 玉の電場が適切に計算されている。次に，基準空胴の TM010 モードの電場強度を Fig. 8 に示す。こちらはほぼ軸対称な電場分布が適切に得られている。また，この結果から得られた Q 値やシャントインピーダンスなどのパラメータを Table 2 に示す。

4.2.4. 空胴の製作

RF-BPM 空胴は Fig. 5 からもわかるように 3 つのブロックにわかれている。これらのブロックを製作するわけであるが，空胴の内面は 10 μm 程度の

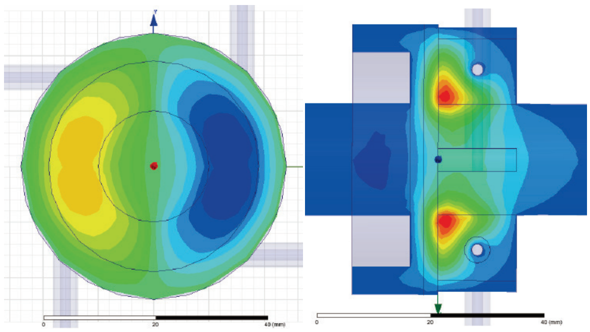

Fig. 7: 位置検出空胴の電場強度。左側は XY 平面内の Z 方向の電場を符号付きで示しており，右側は XZ 平面上の電場強度の絶対値を示す。

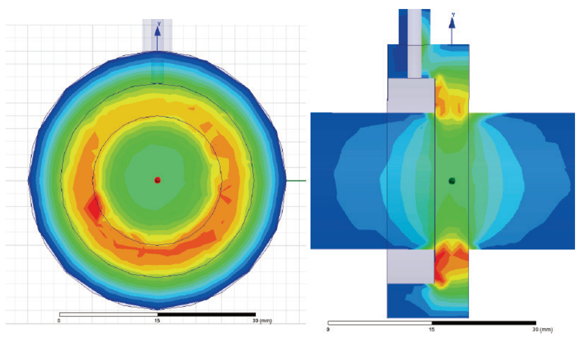

Fig. 8: 基準空胴の電場強度。左側は XY 平面内の電場，右側は XZ 平面上の電場の絶対値を示す。

Table 2: RF-BPM 空胴のパラメータのシミュレーション結果（計算値）と実測値。実測値のエラーバーはバラつきの RMS を示す。

位置検出空胴	計算値	実測値
共振周波数 [GHz]	4.760	4.758±0.005
無負荷 Q 値（Q_0）	600	642±32
外部 Q 値（Q_{ext}）	84.75	94.1±2.6
負荷 Q 値（Q_{L}）	40.3	43.8±0.8
規格化シャントインピーダンス（R/Q）	5.11×10^5 [Ω/m^2]	--
電圧振幅 (50Ω ポートにて)	8.2 mV/μm/nC (peak)	--
基準空胴		
共振周波数	4.760 GHz	4.758±0.005
無負荷 Q 値（Q_0）	570	592±45
外部 Q 値（Q_{ext}）	52.47	51.2±2.4
負荷 Q 値（Q_{L}）	48.29	47.1±1.9
規格化シャントインピーダンス（R/Q）	54.7 [Ω]	--
電圧振幅 (50Ω ポートにて)	108 V/nC (peak)	--

許容差で精密に加工するようにし，寸法だけである程度狙った周波数に来るようにしておく。このとき，Fig. 9 に示す周波数調整をする部分だけ 0.1 mm 程度の削り代を残しておく。この時点で空胴を仮組みして RF 測定をおこない，削り代の部分を削って周波数を追い込んでいく。この際に旋盤にチャッキングし直すことになるので，削り面が傾かないよう慎重に行う必要がある。

周波数調整が終わったブロックは真空ろう付けにて接合する。接合後，アンテナを差し込み，N 型真空フィードスルーコネクタを溶接する。溶接後，最終 RF 測定をおこない，周波数や Q 値を確認する。

実際に SACLA 用に製作した空胴の周波数と Q 値の平均値と RMS 値を Table 2 にまとめてある。おおむね設計通りの値が得られており，RF-BPM として十分に使用できるものに仕上がった。最後に据付された RF-BPM 空胴の写真を Fig. 10 に載せておく。

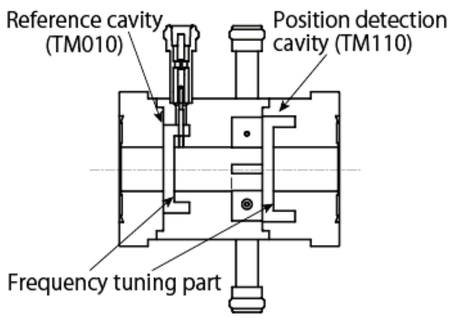

Fig. 9: RF-BPM 空胴の周波数調整部分。

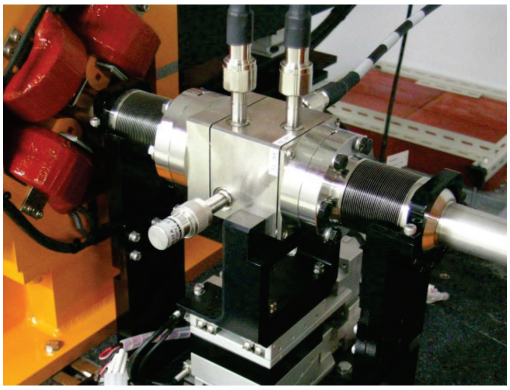

Fig. 10: RF-BPM 空胴の写真。

4.3. 信号処理回路とビーム位置の算出

4.3.1. 処理回路の構成

信号処理回路のブロック図を Fig. 11 に示す。RF-BPM 空胴からの信号は切替可能な減衰器でレベル調整された後，加速器の低電力 RF システム [14] に使用されているものとほぼ同じ IQ (In-phase and Quadrature) 復調器にて検波され，波形記憶 AD 変換器にて記録される。IQ 復調器を使用することで，位置の信号と，位相が $\pi/2$ ずれた傾きの信号とを区別しやすいようにしている。初段の減衰器では 0 dB から 60 dB まで遠隔操作で切り替え可能としてある。これにより，電荷量の範囲として 0.1 nC から 1 nC まで 20 dB 相当変わったとしても，位置の測定レンジが 100 μm から 10 mm 程度までの 40 dB 相当の切り替えができるようになっている。この切替式減

衰器は切り替えても位相変化が数度以内となるように調整されている。IQ 復調器から出てくるベースバンド信号は 238 MHz サンプリングの 12 ビット AD ボード，または，16 ビット AD ボードにて記録される。とくに分解能の必要なアンジュレータ部分の RF-BPM には 16 ビット AD ボードが使用されている。

4.3.2.　処理回路の性能

本処理回路の性能について回路単体で測定したものについていくつか述べる。まず，リニアリティをとったものを Fig. 12 に示す，回路のフルスケールにわたって十分なリニアリティがあり，直線からの誤差は最大 1%である。この程度の誤差であれば 100 μm フルスケールの場合に誤差がたかだか 1 μm となり，SACLA では問題とはならない。

次に，入力信号の振幅を一定にして位相をかえたときの振幅誤差と位相誤差を Fig. 13 に示す。振幅誤差はリニアリティのときと同様に 1%以下，位相誤差は 0.5 度以下となっており，位置を示す信号に，位相が $\pi/2$ 離れた傾きの信号が極力混入しないようになっている。

最後に，実際にビームを使ってえられた IQ 復調後の振幅・位相の生波形を Fig. 14 に示す。振幅・位相とも適切に復調・記録されており，ピーク部分の 1 点のデータを使って位置を算出している。

4.3.3.　ビーム位置の算出

位置検出空胴と基準空胴からの信号の振幅位相からビーム位置を算出するには，以下の式を使えばよい。

$$x = C_x \frac{|V_x|}{|V_r|} \cos[\arg(V_x) - \arg(V_r) - \Phi_x] \qquad (4\text{-}31)$$

ここに，V_x, V_r はそれぞれ位置検出空胴，基準空胴の信号の複素振幅で，C_x はビーム位置の較正係数，Φ_x は位相オフセットの補正である。Φ_x は cos の位相が 0，または，π をとるように決めてあり，ビーム位置の符号が正しく与えられるようになっている。この式は，V_x を V_r で複素数とし

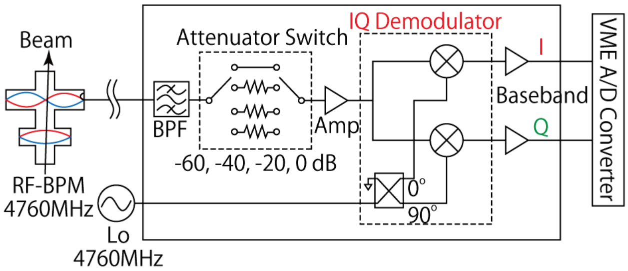

Fig. 11: RF-BPM の信号処理回路のブロック図。

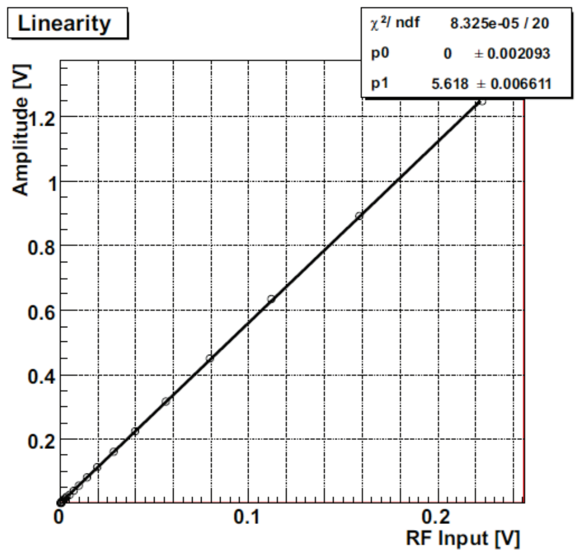

Fig. 12: 信号処理回路のリニアリティ。

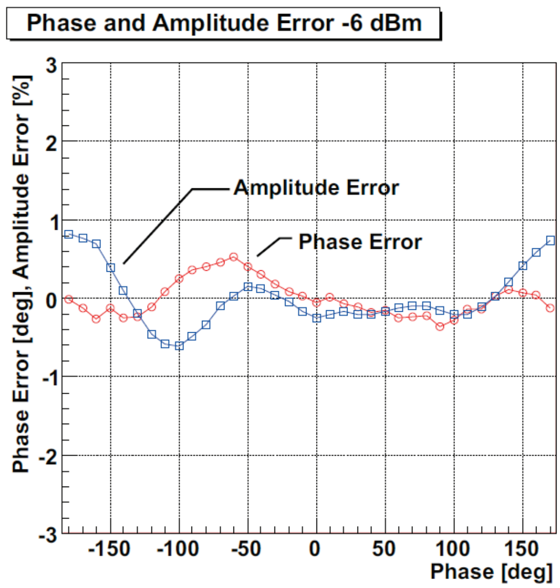

Fig. 13: 信号処理回路の振幅・位相誤差。

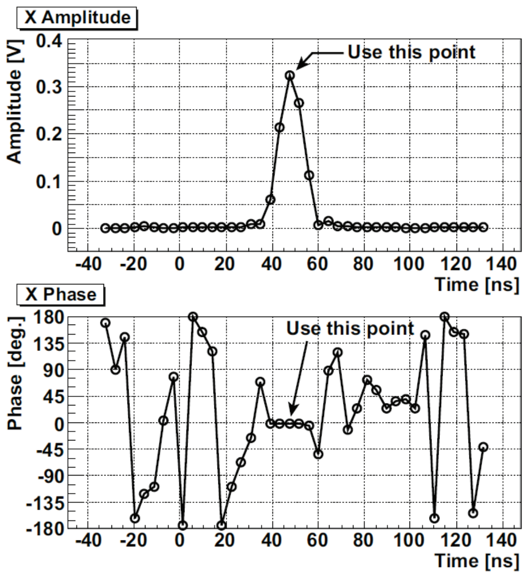

Fig. 14: RF-BPM の IQ 復調後の生信号。上図が振幅で下図が位相である。振幅がピークとなる点を使用してビーム位置を算出している。

て割った形となっており，基準空胴の信号を用いて電荷量の補正と位相原点（到達時間）の補正の両方をおこなっている。なお，C_x, Φ_x は電子ビームのデータを使って求めることとなる。求め方については次節にて述べる。

4.4. 較正と位置分解能測定･到達時間分解能測定

本節では実際の電子ビームを使って RF-BPM の感度を較正した結果と，位置分解能・到達時間分解能を測定した結果について述べる。RF-BPM には自動 XZ ステージに載っているものと載っていないものがある。ステージに載っているものはそのステージを動かして較正をおこない，載っていないものはステアリング電磁石でビーム軌道を振って較正をおこなった。位置分解能・到達時間分解能については，複数の RF-BPM のデータを比較することによって測定することができる。位置分解能については最低 3 台の RF-BPM があれば測定できるので，3 台でおこなった場合と 4 台以上でおこなった場合の 2 つの場合について述べる。到達時間分解能については，2 台の比較で十分なのでその結果についてまとめる。

4.4.1. XZ ステージを用いた較正

電子ビームを一定に保っておき，XZ ステージにて RF-BPM を動かすことで較正を行うことを考える。RF-BPM を動かすと，位置検出空胴と基準空胴の複素振幅は複素平面上で Fig. 15 のような軌跡をたどる。この図から位相オフセット Φ_x が決まる。次に，ステージを動かして $|V_x|\cos[\arg(V_x)-\arg(V_r)-\Phi_x]$ をプロットしたものを Fig. 16 に示す。このデータを取ったときのビームのエネルギーは 7 GeV で，電荷量は 0.1 nC である。この傾きはおよそ 3 V/mm なので，フルスケールが±1 V であることを考えると±0.3 mm 以上の範囲を測定可能であることがわかる。なお，較正係数 C_x を求めるには $|V_r|$ をこの傾きで割ってやればよい。

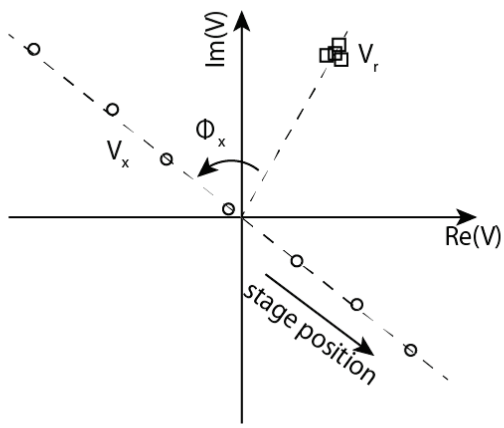

Fig. 15: XZ ステージで RF-BPM 空胴を動かしたときの信号の複素振幅の振る舞い。

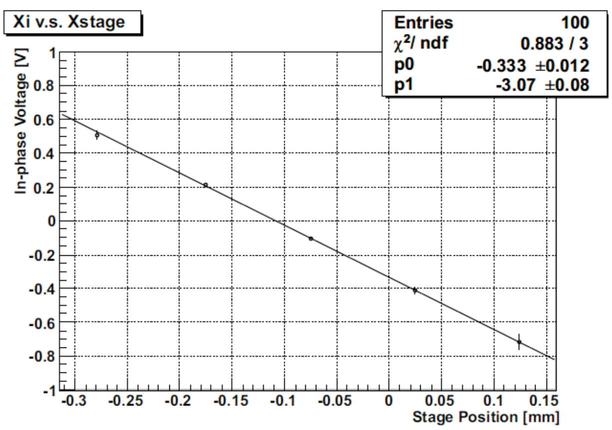

Fig. 16: XZ ステージで RF-BPM 空胴を動かして取得した較正データ。

4.4.2. ステアリング電磁石を用いた較正

XZ ステージに載っていない RF-BPM は，空胴自身を動かすことができないのでビームを振って較正するしかない。ビームを振るには軌道補正用のステアリング電磁石を用いてキックするのがよい。そして，そのキック量を較正したい RF-BPM まで転送し，実際のデータと比較すればよい。ステアリング電磁石のキック角を k [rad]，ステアリング電磁石から RF-BPM までの転送行列を M とおくと，RF-BPM でのビームの位置と傾き (x, x') は，

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \quad (4\text{-}32)$$

となる。転送行列は実際の加速器構成や四極電磁石の電流値などに合わせて求めてやればよい。このとき，ステアリング電磁石と RF-BPM との間のベータトロン位相差が π の整数倍付近にならないようにしなければならない。というのは，そのような場合はビーム位置がキック角によらずほぼ一定となり，誤差が大きくなるためである。

この方法でビームを蹴ったときの軌道の計算値とビーム位置のデータを Fig. 17 に示す。RF-BPM のデータは電磁石でキックする前と後の差をプロットしている。このデータの取得時にはある程度 RF-BPM が較正されたあとなので，軌道の計算値とデータとがよく合っている。転送行列に誤差があると，ベータトロン振動の振幅だけでなく位相の進みにも誤差が出るが，このデータを見る限りそのような心配はなさそうである。

次に，ある RF-BPM でのビーム位置の計算値と BPM データを比較したものを Fig. 18 に示す。較正前は係数が 17%程度ずれているが，較正後はずれが 5%以下となっている。較正後でも若干のずれが残っているのは，測定中のビームのドリフト，および，ステアリング電磁石のキック角や転送行列の誤差などがあるためと考えられる。

4.4.3. 3 BPM 法による位置分解能測定

RF-BPM の重要な性能のひとつとして位置分解能があるので，その測定方法と結果についてまとめる。ここでは 3 台の BPM を使う方法（3BPM 法）について述べる。

この方法では，ドリフトスペースに 3 台の BPM を並べ，1 台目と 3 台目のデータを使って 2 台目の BPM でのビーム位置を内挿し，2 台目の測定

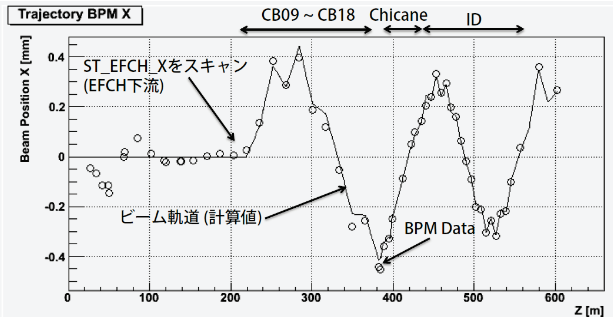

Fig. 17: ステアリング電磁石でビームをキックしたときの軌道の計算値（実線）と RF-BPM のデータ（○印）。横軸はビームの進行方向位置で，縦軸はビームの水平位置である。

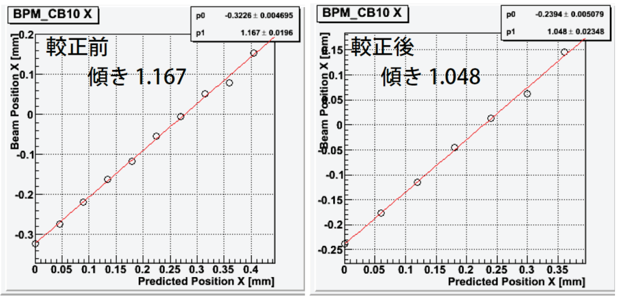

Fig. 18: ステアリング電磁石でビームをキックしてとった較正データの例。横軸はビーム位置の計算値で，縦軸は RF-BPM のデータである。左が較正前，右が較正後のプロットである。

値と比較する。1 台目と 2 台目の距離を L_1，2 台目と 3 台目の距離を L_2 とし，1 台目と 3 台目のビーム位置の測定値を x_1，x_3 とすると，2 台目でのビーム位置の推定値 $\hat{x}_2$ は，

$$\hat{x}_2 = \frac{L_1 x_3 + L_2 x_1}{L_1 + L_2} \quad (4\text{-}33)$$

となる。この計算をショットごとにおこない，2 台目の実データとの差 $x_2 - \hat{x}_2$ の標準偏差をとればそれが分解能に比例する。3 台の BPM の分解能がすべて等しいと仮定すると，誤差伝搬を考慮することで，

$$\sigma_{\mathrm{BPM}} = \frac{L_1 + L_2}{\sqrt{2({L_1}^2 + L_1 L_2 + {L_2}^2)}} \sigma_{\mathrm{res}} \quad (4\text{-}34)$$

の関係が得られる。ここに，σ_{res} は$x_2 - \hat{x}_2$ の標準偏差で，σ_{BPM} が BPM の分解能である。

次に，実際の測定結果について述べる。SACLA にはドリフトスペースに 3 台の BPM が近接して並んだところはないので，SACLA の実証機である SCSS 試験加速器でおこなった実験を例に説明する。このときの RF-BPM の配置を Fig. 19 に示す。また，ビームエネルギーは 250 MeV で，電荷量は 0.3 nC であった。得られた $x_2 - \hat{x}_2$ のヒストグラムを Fig. 20 に示す。この結果から，$\sigma_{\mathrm{res}} \simeq 0.233\ \mu\mathrm{m}$ となり，3 台の RF-BPM の分解能が全て等しいとすると，(4-34) より，

$$\sigma_{\mathrm{BPM}} \simeq 0.773\, \sigma_{\mathrm{res}} \simeq 0.18\ [\mu\mathrm{m}] \qquad (4\text{-}35)$$

という位置分解能が得られた。これは必要性能である 1 μm より十分に優れている。

4.4.4. 4 台以上の BPM による位置分解能測定

通常，BPM はドリフトスペースに 3 台並んでいるようなことはなく，BPM 間にはさまざまな加速器構成機器が並んでいる。そのような場合でも適用でき，また，4 台以上の BPM がある場合でも分解能を一度に測定する方法について考える。BPM が N 台あることとし ($N \geq 3$)，各 BPM 間の転送行列が全てわかっていることとする。ここで，n 番目の BPM でのビームの位置と傾きの推定値を $(\hat{x}_n, \hat{x}'_n)$ とおくと，この値は残り $N-1$ 台の BPM の位置データから求めることができる。この問題は，言い換えれば，与えられた運動方程式（ビームの転送行列）のもと，測定されたビーム位置を再現するように初期値 $(\hat{x}_n, \hat{x}'_n)$ を推定する問題である。ここでは，$(\hat{x}_n, \hat{x}'_n)$ を最小二乗法にて求めることとする。この計算をショットごとにおこない，得られた位置の推定値 $\hat{x}_n$ と測定値 x_n とを比較することにより BPM の分解能を求める。この方法の特長としては，BPM の間に他の機器があっても分解能を算出できることと，BPM の台数 N が十分に大きいと推定誤差が BPM の分解能に比べて十分に小さくできる点があげられる。この誤差は単純計算で $1/\sqrt{\mathrm{N}}$ に低減される。したがって，(4-34) のように各 BPM の分解能が等しいことを仮定して誤差伝搬させるような計算をしなくてもよいこととなる。

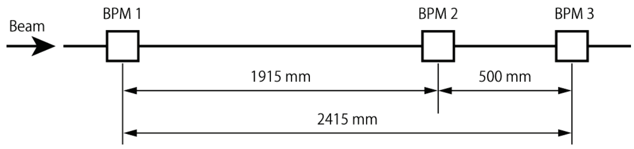

Fig. 19: 3BPM 法による RF-BPM の分解能測定のセットアップ。

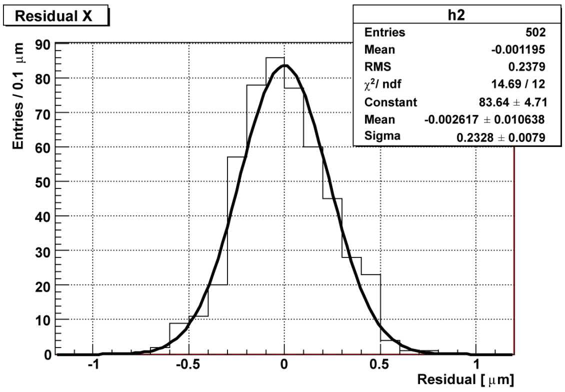

Fig. 20: 3BPM 法で得られたビーム位置の測定値と推定値の差のヒストグラム。フィットされている曲線はガウス分布である。

まず，n 番目から m 番目の BPM への転送行列を $M(m,n)$ とおく。そして，n 番目の BPM でのビームの位置と傾きの推定値を，

$$\hat{\xi}_n = \begin{pmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{x}'_n \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}36)$$

とおき，この推定値に転送行列をかけて得られた m 番目の BPM でのビームの位置と傾きを

$$\hat{\xi}_{m/n} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{m/n} \\ \hat{x}'_{m/n} \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}37)$$

とすると，

$$\hat{\xi}_{m/n} = M(m,n)\, \hat{\xi}_n \qquad (4\text{-}38)$$

となる。このようにして得られた各 BPM での位置の推定値 $\hat{x}_{m/n}$ が，測定値 x_m に最も近くなるような $\hat{\xi}_n$ を最小二乗法で決定する。すなわち，以下に示す評価関数

$$J = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} \left(x_m - \hat{x}_{m/n} \right)^2 \qquad (4\text{-}39)$$

を最小にする $\hat{\xi}_n$ を求めればよい。(4-37) より，

$$\hat{x}_{m/n} = M(m,n)_{11} \cdot \hat{x}_n + M(m,n)_{12} \cdot \hat{x}'_n \quad (4\text{-}40)$$

なので，これを（4-39）に代入すると，

$$J = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} [x_m - M(m,n)_{11}\hat{x}_n - M(m,n)_{12}\hat{x}'_n]^2 \quad (4\text{-}41)$$

となる。ここで，$M(m,n)$ の 1 行 1 列成分を $M(m,n)_{11}$ のように表した。J が最小のとき，

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}_n} = \frac{\partial J}{\partial \hat{x}'_n} = 0 \quad (4\text{-}42)$$

となるので，以下の連立方程式を解けばよい。

$$0 = \frac{\partial J}{\partial \hat{x}_n} = 2\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} \{[M(m,n)_{11}]^2 \hat{x}_n + M(m,n)_{11}M(m,n)_{12}\hat{x}'_n - M(m,n)_{11}x_m\} \quad (4\text{-}43)$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial \hat{x}'_n} = 2\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} \{M(m,n)_{11}M(m,n)_{12}\hat{x}_n + [M(m,n)_{12}]^2 \hat{x}'_n - M(m,n)_{12}x_m\} \quad (4\text{-}44)$$

したがって，

$$S = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} \begin{pmatrix} [M(m,n)_{11}]^2 & M(m,n)_{11}M(m,n)_{12} \\ M(m,n)_{11}M(m,n)_{12} & [M(m,n)_{12}]^2 \end{pmatrix} \quad (4\text{-}45)$$

とおいたとき，（4-43），（4-44）は，

$$S\hat{\xi}_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} \begin{pmatrix} M(m,n)_{11}x_m \\ M(m,n)_{12}x_m \end{pmatrix} \quad (4\text{-}46)$$

と書き直せるので，

$$\hat{\xi}_n = S^{-1}\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} \begin{pmatrix} M(m,n)_{11}x_m \\ M(m,n)_{12}x_m \end{pmatrix} \quad (4\text{-}47)$$

と求めることができる。

以上で計算方法がわかったので，この方法を SACLA の実際のデータに適用する。使用した RF-BPM は，SACLA のアンジュレータ区間の 20 台で，ビームエネルギーが 7 GeV，電荷量が 0.1 nC である。このデータから求めた $\hat{\xi}_n$ を使って得られたビーム軌道の推定値と RF-BPM の実際のデータとプロットすると，Fig. 21 のようになる。ビーム軌道の計算値がデータとよく合っていることがわかる。ある 1 台の RF-BPM について，ビーム位置の推定値と実際の測定値を散布図としてプロットしたものを Fig. 22 に示す。推定値と測定値が 1 μm 程度の精度で一致していることがわかる。この差の RMS を位置分解能としてプロットすると，Fig. 23 のようになった。解析に使用した 20 台の RF-BPM すべてが分解能 0.6 μm 以下の分解能を示しており，期待通りの結果となった。なお，この値は前節の SCSS 試験加速器のときの約 3 倍となっているが，これは電荷量が 1/3 になっているためと考えられる。実際，使用した RF-BPM 空胴や回路は双方ともおなじ設計のものである。

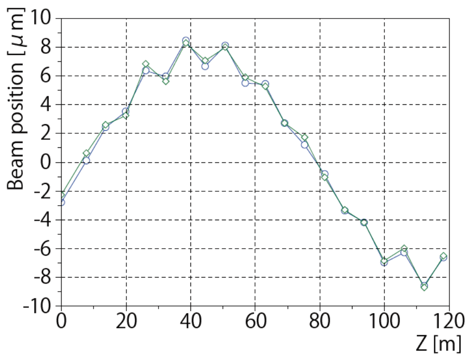

Fig. 21 ある 1 ショットでのビーム位置の推定値と測定値。青線に○が推定値で、緑線に◊が測定値である。横軸は BPM のビーム進行方向の位置で、縦軸がビーム位置である。

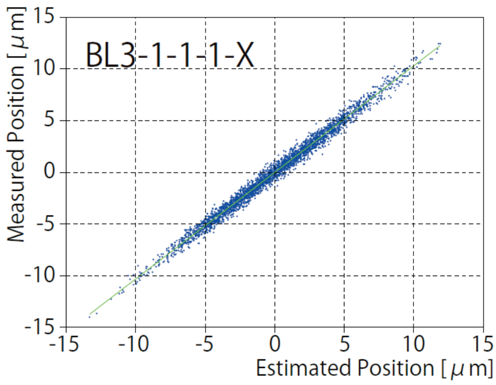

Fig. 22: ビーム位置の推定値と検出されたビーム位置の散布図の例。横軸がビーム位置の推定値で縦軸が測定値である。図中の緑線は分布に直線を最小二乗法でフィットした結果である。

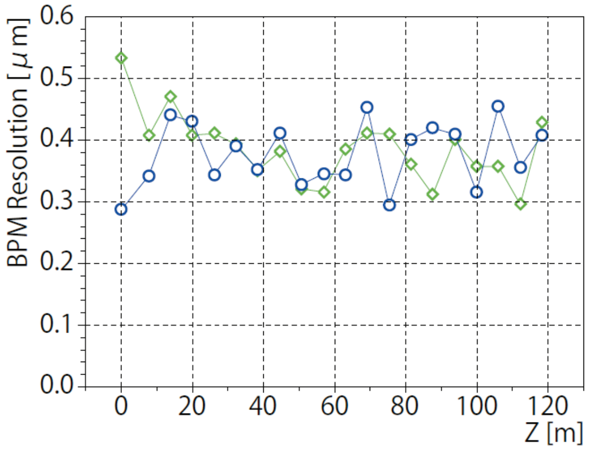

Fig. 23 各 BPM の位置分解能。青線に○が X、緑線に◊が Y の分解能である。横軸は BPM のビーム進行方向の位置で、縦軸が位置分解能である。

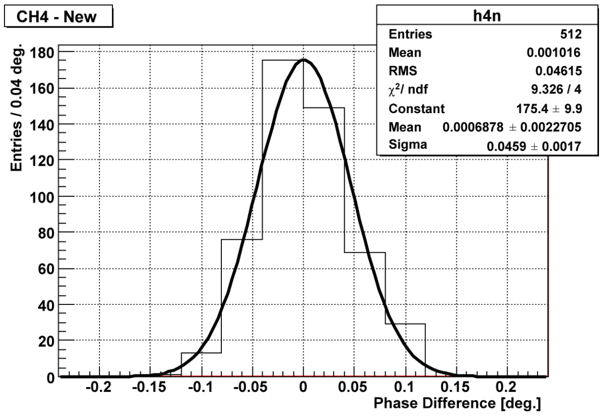

Fig. 24: 隣り合う 2 台の RF-BPM の到達時間測定値の差のヒストグラム。フィットされている曲線はガウス分布である。横軸は 4.76 GHz の位相を度で示したものである。

4.4.5. 2 台の BPM の比較による到達時間分解能測定

最後に，基準空胴のデータを使って到達時間分解能を求める。ビームの到達時間はビーム位置が多少変わってもその影響は無視できるので，2 台の BPM があれば十分である。そこで，4.4.3 節と同じデータを使い, 2 番目と 3 番目の RF-BPM での到達時間の比較を行う。この 2 台の RF-BPM の到達時間の差のヒストグラムを Fig. 24 に示す。この標準偏差は 4.76 GHz の位相で 0.0459 度であり，時間換算で 27 fs である。この値は 2 台分の到達時間分解能の 2 乗和の平方根となっているので, RF-BPM 1 台の実力としてはその $1/\sqrt{2}$ となる。この値は SACLA における加速 RF の位相安定度 50 fs より分解能がいいので, RF-BPM で到達時間を監視することで加速器のタイミング変動などを知ることができる。

5. 高分解能スクリーンモニタ

電子ビームの形状（プロファイル）を測定するために, SACLA では OTR や蛍光を使ったスクリーンモニタを使用している。これらの測定原理や設計のポイント，ビームを使って測定した結果について述べる。

5.1. 測定原理と特徴

スクリーンモニタは，電子ビームが金属ミラーにあたったときに出てくる遷移放射光や蛍光ターゲットにあたって出てくる蛍光をカメラで撮像することによってビームプロファイルを測定する。SACLA の電子ビームは 8 GeV になると半径が数 10 μm と非常に小さく，また，エミッタンス測定の際に四極電磁石で絞った際には幅が 10 μm 以下になりうる。そのため，分解能 10 μm 以下の撮像システムという，顕微鏡のような性能を持たせなければならない。また，発光源が乱反射などによって数 μm 以上ににじむようなことが起こってはならない。これらのことをふまえてスクリーンモニタの各コンポーネントについて留意すべき点を述べる。

5.1.1. 遷移放射光（OTR）

遷移放射光（OTR）の発生原理は 2.4.1 節で述べたとおりである。この放射は物質表面にて十分に小さい領域でおこる現象なので，発光源は電子ビームプロファイルをそのまま反映したものとなる。したがって，OTR をそのまま結像すればレンズ系の光学分解能にてビームプロファイルを測定することが可能である。

OTR を使用する場合の注意点としては，もともと発光量がそれほど大きくなく，低エネルギー・低電荷量などの条件では十分な光量が得られないことがある点が挙げられる。また，OTR は $1/\gamma$ rad の前方にしか出ないので，レンズ系の光軸を適切に合わせなければならない。

また，XFEL で使用する短バンチビームではコヒーレント OTR（C-OTR）が出ることも知られている。このようなビームについては OTR が非線形に増幅されてしまうので，OTR をつかってビームプロファイルを知ることはできなくなる。

5.1.2. 蛍光ターゲット

2.5.1 節で述べた蛍光を用いて，ビームプロファイルを測定することを考える。この場合，有限の厚みを持った蛍光体を電子が通過することで，電子の軌跡にそって蛍光が発せられる。まず，蛍光ターゲットが不透明な場合，発せられた蛍光がターゲット内で乱反射し，光源がにじんだようになってしまう。そのため，高分解能にするには透明の蛍光ターゲットでなければならない。しかし，透明なターゲットの場合は，Fig. 25 に示すように，表面の反射によって発光点の厚みが厚くなる影響が無視できない。さらに，電子は物質中で多重散乱を受けるためこれも光源がぼやける原因となる。そのため，高分解能にするには蛍光ターゲットは十分に薄いものでなければならない。これに適したターゲットとして YAG:Ce などがあり，SACLA では厚さ 0.1 mm の YAG:Ce を採用している。

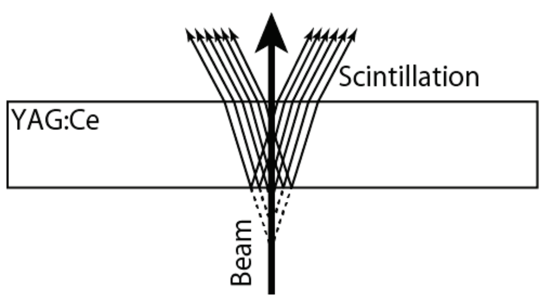

Fig. 25: 蛍光ターゲット内の反射の影響。

5.1.3. 光学系

数 μm の分解能が必要なスクリーンモニタでは光学系の設計が非常に重要である。まず，波動光学の基礎的な関係として，レンズの開口数 (Numerical Aperture, NA) と分解能に関するものがある。Fig. 26 に示すような光源とレンズを考える。このとき，レンズの開口数 NA は，

$$\mathrm{NA} = n \sin\theta \tag{5-1}$$

と定義される。ここに，n は光源からレンズまでの媒質の屈折率である（レンズの屈折率ではない）。通常，媒質は真空や空気なので，屈折率はほぼ 1 と考えてよい。このとき，光源の分解能 δ は，光の波長を λ とすると，

$$\delta = \frac{0.61 \times \lambda}{\mathrm{NA}} \tag{5-2}$$

であることが知られている。たとえば，波長 0.5 μm の光に対し，2 μm の光学分解能を得るには，$\mathrm{NA} \simeq 0.15$ であることが必要である。このとき，レンズが光源から 100 mm 離れているとすると，レンズの半径が 15 mm 以上であることが必要となる。また，NA は焦点深度 d とも関係があり，

$$d = \frac{\lambda}{\mathrm{NA}^2} \tag{5-3}$$

である。上記の条件のときは，焦点深度が 86 μm となる。この程度の条件であれば，厚さ 0.1 mm の YAG:Ce ターゲットにおいても十分な分解能が得られる可能性があることがわかる。

ここで，OTR の分解能について考える。OTR は $1/\gamma$ rad の前方に出るので，レンズを大きくしても実質的な NA は OTR の角度依存性によって制限される。例えば，1 GeV の電子ビームの場合，$1/\gamma \simeq 0.5$ mrad であり，たとえその 10 倍程度の角度まで NA があるとしても，δ は 60 μm 程度にしかならない。これではとても高分解能とは言えない。しかし，実際は OTR スクリーンで 10 μm 以下の分解能を達成可能である。OTR はラジアル偏光をしており，かつ，前方方向に出る性質があるなど，特殊な性質を持っているので，一般の光学の法則が成り立たない場合がある。実際，OTR の光学分解能を適切に計算すると，ビームエネルギーが十分に高いとき（$\gamma \gg 1$），

$$\delta_{\mathrm{OTR}} \simeq \frac{1.44 \times \lambda}{\mathrm{NA}} \tag{5-4}$$

と近似できる [15]。このことは，OTR の光学分解能はビームのエネルギーによらず，放射の角度分布も考慮に入れなくてもよいことを示している。たとえば，光源から 100 mm 離れたレンズで波長 0.5 μm の光に対し，2 μm の光学分解能を得たいときは，レンズの半径が 39 mm 以上であることが必要である。

次に，光学系の焦点距離や倍率について考える。光源から長さ L 離れたところに焦点距離 f のレンズがあるとき，レンズから L' 離れたところで焦点を結ぶとすると，

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} = \frac{1}{f} \tag{5-5}$$

の関係が成り立つ。このとき，光学系の倍率 m は，

$$m = \frac{L'}{L} \tag{5-6}$$

となることが簡単な幾何光学で理解できる。一般にスクリーンモニタの画像は CCD カメラなどの撮像素子で記録するが，カメラの分解能はピクセルサイズで制限される。たとえば，ピクセルサイズが 8 μm の場合, 2 μm の分解能を得たければ光学系の倍率を 4 倍としなければならないことがわかる。仮に L を 100 mm とすると, L' は 400 mm となり，レンズの焦点距離は 80 mm という計算になる。

他にも光学系の設計においては，幾何収差・色収差，絞りの効果など，さまざまなことを考えなければならないが，これ以上は本書の領域を超えるのでこの程度の解説にとどめておく。

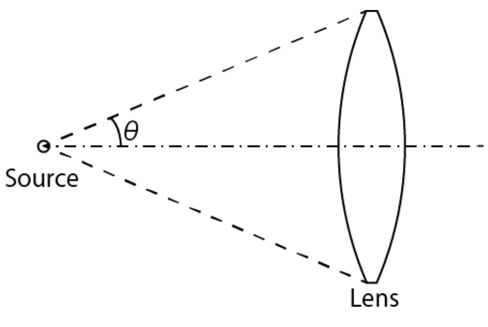

Fig. 26: レンズの開口数

5.2. スクリーンモニタの設計と基礎性能

スクリーンモニタは，真空チャンバ内のターゲットをビーム軸上に挿抜するためのスクリーンモニタチャンバと，レンズや CCD カメラの載った光学架台からなる。これらの機器の設計と単体の性能について述べる。

5.2.1. スクリーンモニタチャンバ

スクリーンモニタチャンバは, OTR ターゲットや蛍光ターゲットをビーム軸上に挿入するためのアクチュエータ付きの真空チャンバである。このチャンバに要求される機能は以下のとおりである。

- 最大で 2 種類のターゲットを選択できること
- ターゲットの位置精度や再現性が 10 μm以下であること
- ターゲットからの光はビームの進行方向に対して直角方向に出すこと

まず，2 種類のターゲットを選択する必要があるのは，2 つの理由がある。ひとつは，電子ビームのエネルギーが低い領域で OTR の光量が小さい場合に，光量の多い蛍光ターゲットも選択できるようにするためである。ふたつめは，高精度な測定が必要なところでフォーカス調整や倍率較正のためのターゲットを選択できるようにするためである。

次に，ターゲットの位置精度については，ビームの位置を適切に知るためと，フォーカスがずれないようにするための 2 つの理由がある。ターゲットの位置とチャンバ外の基準面との距離が精度よく製作されており，かつ，チャンバを精密にアライメントしておけば，ビームの軌道がずれていないかを精度よく判断することができる。また，ターゲット位置の再現性が悪いと光学系の焦点がずれて像がぼけてしまう。高分解能な光学系は焦点位置に敏感なため，高い再現性が必要である。

最後に，ターゲットからの光は，電子ビームと同じ方向から観測することが構造上できないので，光軸を曲げなければならない。光学的にも機

構的にも設計が容易なのは直角に曲げる場合である。

これらの要求をみたすように設計されたSACLAのスクリーンモニタチャンバの概略図と写真をFig. 27に示す。このチャンバは2種類のターゲットとビーム通過孔の3段が切り替えられるようになっている。ターゲットは鉛直のシャフトに取り付けられ，その両端が大気中のリニアガイドに固定されている。このシャフトは真空ベローズを介して真空チャンバとつながっており，ベローズが伸び縮みすることによって上下に動かせるようになっている。シャフトの駆動は3段式のニューマチックアクチュエータ（圧縮空気駆動）で行う。

ターゲット部分はビームが通る孔やターゲットからの光が通る孔が開けられていて，ビームと直角方向に光が取り出せるようになっている。OTRターゲットの金属ミラーは斜め45度に取り付けることでOTRを直角方向に放射させる。蛍光ターゲットは取り付け方がふたつある。ひとつはビームに垂直に取り付け，そのすぐ後ろに斜め45度のミラーを置くことで，蛍光を直角方向に取り出すものである。もうひとつは斜め45度にターゲットを設置して蛍光を直接取り出せるようにしているものである。ターゲットからの光は合成石英窓から大気中に取り出し，光学系に導く。

以上のような機構で設計・製作することにより，先に述べた要求性能を満たすことができている。

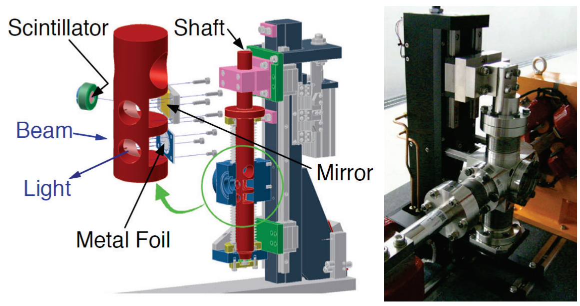

Fig. 27: スクリーンモニタチャンバの概略図と写真。

5.2.2.　ターゲット

SACLAではOTRターゲットとしてステンレスミラーを，蛍光ターゲットとしてDesmarquest AF-995RとYAG:Ceの2種類を用途に合わせて使い分けている。

まず，OTRターゲットは厚さ0.1 mmのステンレスフォイルを使用している。このように薄いターゲットを使用することで，多重散乱によるエミッタンスの悪化や制動放射の発生をできるだけ小さくし，ビームロスを低減することができる。フォイル1枚では強度が足りないので，Fig. 28に示すように，ビームが当たらない周辺部は10枚のフォイルを積層して拡散接合し，厚さ1 mmの支持部を構成している。中心部はRa 4.8 nmの鏡面仕上げとなっており，平面度は約3 µmで，十分な精度の鏡として仕上がっている。なお，中心部のまわりのスポーク状の構造は，製造時の応力を逃して変形を抑えるための工夫である。

次に，Desmarquest AF-995Rは厚さ1 mmのものを使用し，SACLA入射部の低エネルギー部分やビームダンプなどの分解能がそれほど必要ない部分で使用している。これはスクリーンモニタチャンバのシャフトに斜め45度に取り付けて直接横から像が見えるようになっている。

最後に，YAG:Ceについては，OTRに匹敵する分解能を得るために選んだターゲットで，厚さ0.1 mmの薄いものをビームに直角に設置して使用している。ビームに直角にする理由としては，YAG:Ceは透明なため，Fig. 29に示すように，斜めのYAG:Ceをビームが通過する場合，横から見ると通過距離に相当する幅だけ光源が広がってしまうことである。また，直角のときは電子ビームの通過距離が最小となるので，反射によって光源の厚みが増える効果や，電子の多重散乱の影響などが低減できる。このような理由で，YAG:Ceは薄いターゲットをビームに直角に設置することで十分な分解能を得られるようにしている。

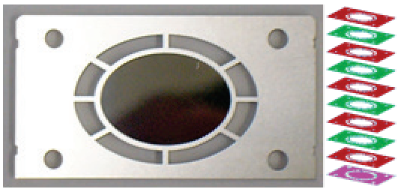

Fig. 28: OTR ターゲットの概略図。

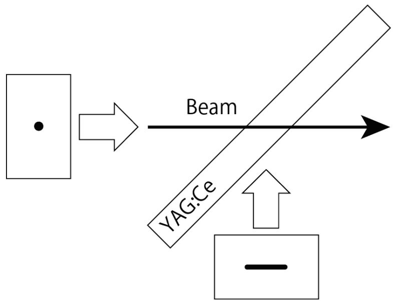

Fig. 29: YAG:Ce ターゲットを見る角度による像の見え方の違い。

5.2.3.　光学架台

光学架台は，レンズ・絞り・CCD カメラなどを一直線上に配置し，倍率やフォーカスを自動，または，手動で調整できるようになっている装置である。SACLA では自動と手動は用途によって使い分けており，手動のものは運転停止時に調整して運転時はそのままで使用しなければならないが，自動のものは運転時でも倍率やフォーカスを調整可能である。

高い分解能を持つ光学系にするには，まず，倍率を高くして CCD カメラのピクセルサイズで分解能が制限されないようにしなければならない。SACLA では最高分解能を得る場合の倍率を 4 倍とし，2 μm の分解能を得ることを目指した。このとき, 2/3 インチの CCD カメラ（8.8 x 6.6 mm^2, ピクセルサイズ 6.45 μm）では視野が (2.2 x 1.7 mm^2）と小さいので, ビームが視野から外れることが懸念される。そこで，4 倍光学系を採用するところは自動ステージを付けて倍率を遠隔操作できるようにし，1−4 倍の可変とした。

次に，チャンバなどの構造上の制約から，レンズはターゲットから 100 mm までしか近づけられない。この場合，1−4 倍の可変光学系にするには CCD カメラの移動量が 200 mm 程度必要となり，光学系の全長は 600 mm 程度と長いものになる。したがって，このような長い自動ステージで精度の高いものを設計しなければならない。

このような要求を満たすように設計・製作した光学架台の写真を Fig. 30 に示す。リニアガイドにレンズとカメラそれぞれの台が載っており，別々のモータで駆動できるようになっている [16]。倍率を 1 倍から 4 倍に変えたときの像の中心のずれは数 10 μm となっており，倍率を変えると視野が大きくずれるようなことはない。

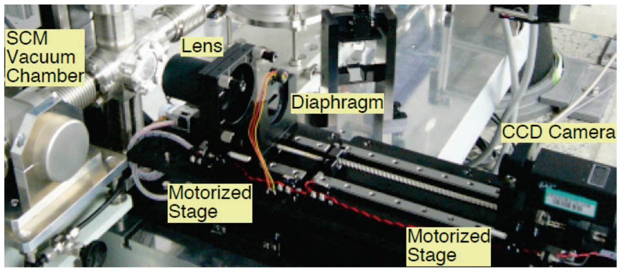

Fig. 30: 光学架台の写真

5.2.4.　レンズの設計

レンズについても用途に合わせて何種類かを使い分けている。分解能がそれほど要らないところでは市販のアクロマートレンズを組み合わせて使用している。高分解能が要求される 4 倍光学系で使用するレンズについては，詳細に設計してカスタムレンズを製作した [17]。以下，そのカスタムレンズの設計について述べる。

まず，レンズの開口数 NA についてであるが，2 μm 程度の光学分解能がとれるようにするには，0.2 程度の NA が必要である。このときレンズの直径は 40 mm 以上となるので，直径 50 mm のレンズで設計した。次に，OTR の広いスペクトルにわたって収差なく結像できるよう，低分散ガラスを使用し，かつ，レンズ枚数をなるべく少なくなるような設計にすることとした。光学シミュレーションソフトウェア ZEMAX [18] で収差などを確認しながら設計をおこなった。その結果，レンズの構成は 3 群 4 枚となり，4 倍光学系では Fig. 31 のようなレイアウト，および，光線追跡結果となった。シミュレーションの結果として得られた光源での分解能は 2.5 μm となった。

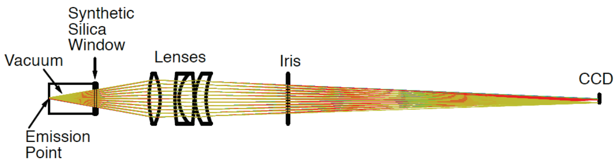

Fig. 31: 光学系のレイアウト，および，光線追跡。

5.2.5.　CCD カメラ，絞り

スクリーンモニタの CCD カメラとしては，用途に合わせて JAI 社の CV-M4+CL と CV-A10CL を使い分けている [19]。それぞれの主要諸元を Table 3 に示す。いずれのカメラもモノクロで，CameraLink にて画像データを伝送するタイプのものである。多数の CCD カメラは CameraLink 切替器で切り替えられるようになっており，見たいスクリーンを挿入してカメラを切り替えて観測するというスタイルで使用している。

次に，絞りについては遠隔操作で開口数や光量を調節できるよう，電動式のものとした。SACLA で使用しているのは日本精密測器社の V-6335RH である。この絞りは最大直径 35 mm まで開けることができるものである。

Table 3: CCD カメラの主要諸元。

	CV-M4+CL	CV-A10CL
CCD 型	2/3 型	1/2 型
CCD サイズ	8.8 x 6.6 mm^2	6.4 x 4.8 mm^2
画素数	1380 x 1030	768 x 576
画素サイズ	6.45 μm	8.3 μm

5.2.6.　光学系の評価

設計・製作した光学系をビームと使って試験する前に単体での性能を評価した。方法としては，グリッド・ディストーション図表をターゲットとして使用し，その像の解像度を測定することとした。使用したターゲットは，ドットの直径が 62.5 μm，ドットの間隔が 125 μm のものである。スクリーンモニタの 4 倍光学系で実際に撮像したグリッド･ディストーション図表の画像を Fig. 32 に示す。そして，図中の A-A’ 線に沿った画素強度分布とその微分を Fig. 33 に示す。微分のピークの半値半幅（HWHM = Half Width at Half Maximum）は像面において 9.9 μm であった [17]。これはシミュレーションで得られた値である，物体面で 2.5 μm，像面で 10 μm の分解能とほぼ一致している。このように，光学系は設計通りの性能があることが確かめられた。

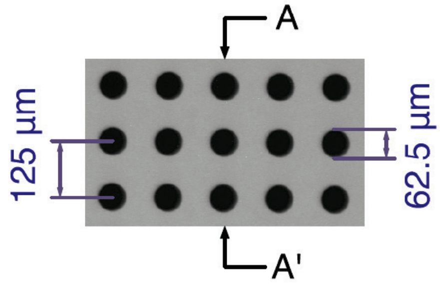

Fig. 32: グリッド･ディストーション図表の画像。

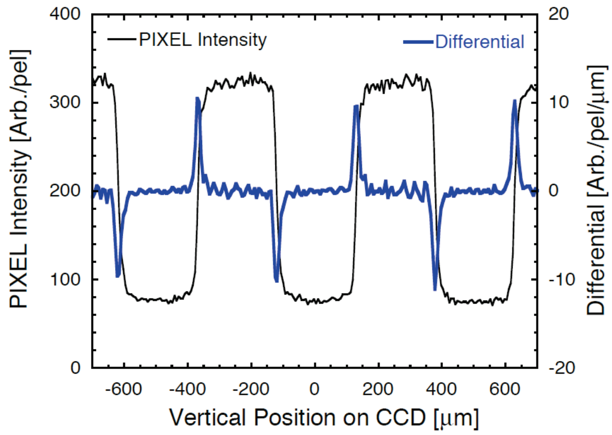

Fig. 33: Fig. 32 の A-A’線に沿った画素強度分布（矩形の線）とその微分（スパイク状の線）。

5.3.　電子ビームプロファイル測定

以上に述べたスクリーンモニタで実際に電子ビームプロファイルを測定した際の結果を示す。まず，SCSS 試験加速器にて評価したときの結果を述べる。次に，SACLA の短バンチビームを観測した際に発生したコヒーレント OTR とその対策について記述し，最後にスクリーンモニタを使って測定したエミッタンスなどのビームパラメータについて紹介する。

5.3.1. SCSS 試験加速器のデータ

SCSS 試験加速器の 250 MeV の電子ビームのプロファイルを測定した結果を Fig. 34 に示す。この測定では分解能を調べたいので，四極電磁石で電子ビームを水平に絞って光源のサイズをできるかぎり小さくしている。得られた画像の幅は，OTR, YAG:Ce とも標準偏差で 10 μm あまりであり，SCSS 試験加速器のエミッタンスから予想されるビームの幅と矛盾しないことが確かめられている。YAG:Ce で若干幅が大きいのは YAG:Ce 表面での反射や電子の散乱などが原因であると考えられる。

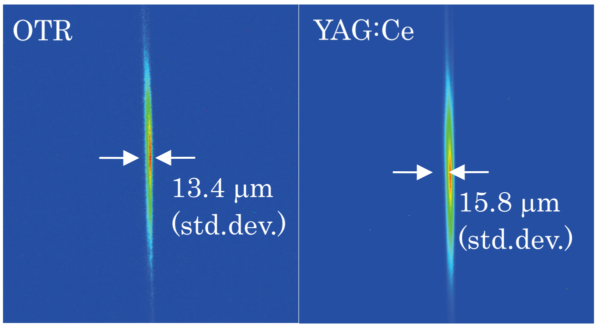

Fig. 34: OTR の画像（左）と YAG:Ce の画像（右）。水平軸への射影サイズが最小となるように四極電磁石で電子ビームを収束している。

5.3.2. コヒーレント OTR の発生とその対策

SACLA においてスクリーンモニタでビームプロファイルを測定したところ，バンチ長が長いうちは設計通りの動作をしていた。しかし，バンチ長が 100 fs 以下になると，コヒーレント OTR (C-OTR) による異常発光 [20] と考えられる画像が見られた。その様子を Fig. 35 に示す。コヒーレント OTR が発生するためには，電子ビームに可視光の波長(~0.5 μm)と同程度の密度変調が存在する必要がある。バンチ圧縮の過程などでそのような変調ができるのではないかと考えられている。

さて，このような C-OTR が発生してしまうと，ビームプロファイルが取れないので対策が必要である。まず，ターゲットとして使用していた OTR 用金属ターゲットを YAG:Ce に交換した。しかし，それでもなお C-OTR が発生してビームプロファイルがとれなかった。そこで，蛍光は指向性を持たないが，OTR は $1/\gamma$ rad の指向性を持っていることを利用して，Fig. 36 のように空間マスクを用いて C-OTR を遮断することを考えた。その結果，Fig. 37 に示すように，マスクされた部分では YAG:Ce の蛍光が結像されて適切にビームプロファイルが見えているのに対し，マスクから外れたところは C-OTR の異常な発光が見えている。このように，C-OTR は空間的に分離することが可能である。

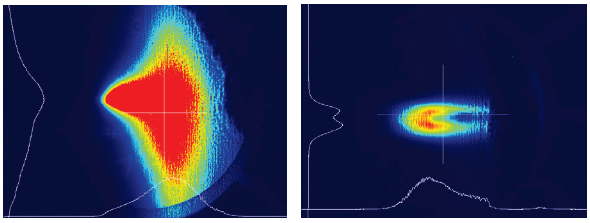

Fig. 35: コヒーレント OTR の画像の例。左右の違いはショットが異なるだけで同じスクリーンモニタを使用している。

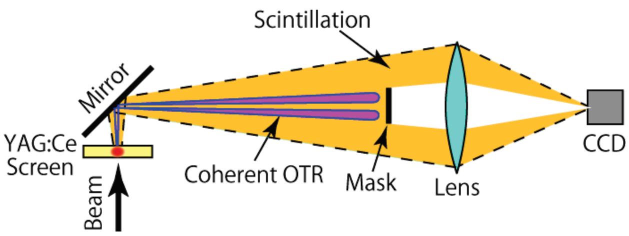

Fig. 36: YAG:Ce ターゲット使用時の C-OTR のマスクの概略図。

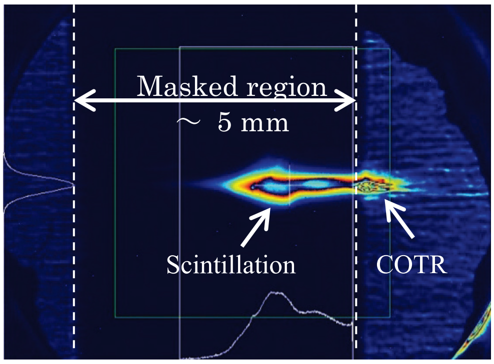

Fig. 37: C-OTR マスク付きの光学系で撮像した YAG:Ce ターゲットからのビームプロファイル。

5.3.3. エミッタンス測定・Twiss パラメータ測定

電子ビームプロファイルを使って測定できるビームパラメータとして，エミッタンスと Twiss パラメータがある。ここでは，Q スキャン法による測定を紹介し，その結果について簡単に述べる。Q スキャン法とは，スクリーンモニタの上流の四極電磁石の電流をスキャンし，収束力とビームサイズとの関係を求める [21]。このとき，ビームサイズ σ_x の 2 乗は以下の関係を満たす。

$$\sigma_x^2 = \beta\epsilon\left(Ll_Q K + \frac{\alpha L}{\beta} - 1\right)^2 + \frac{\epsilon L^2}{\beta} \qquad (5\text{-}7)$$

ここに，α, β は四極電磁石の位置での Twiss パラメータ，ϵ はエミッタンス，L は四極電磁石からスクリーンモニタまでの距離，l_Q, K はそれぞれ四極電磁石の有効長と K 値である。四極電磁石の K 値は電流に比例するので，(5-7) は放物線となる。

SACLA にて Q スキャン法をおこなった結果のプロットを Fig. 38 に示す。このデータは 3 番目のバンチ圧縮器の下流で測定したもので，ビームエネルギーは 1.4 GeV である。なお，スクリーンモニタのターゲットは YAG:Ce で，C-OTR 抑制のマスクをつけたものを使用した。このデータを放物線でフィッティングして得られたパラメータからエミッタンスを求めると，規格化エミッタンスで 1.09 mm mrad となった。このときのデータでは，ビームサイズが最小で 30 μm (RMS) まで絞られているが，そのような細いビームにおいてもビームプロファイルが適切に観測できている。

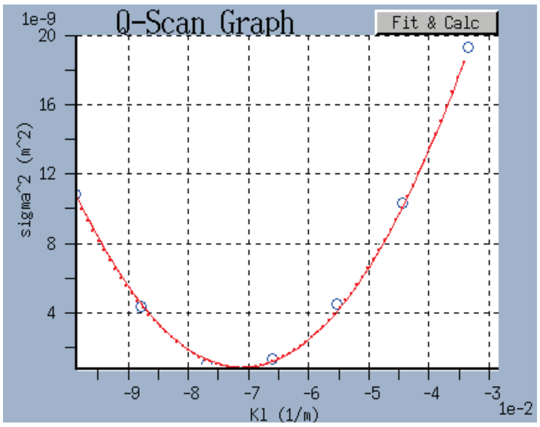

Fig. 38: Q スキャン法で得られた四極電磁石の強さとビームサイズの 2 乗の関係を示すプロット。○がデータで実線は放物線でフィットした結果である。

6. 差動 CT 型ビーム電荷モニタ

ビーム電荷を測定するための CT 型モニタについて，その測定原理を解説し，SACLA で開発した差動型高速 CT モニタについて述べる。

6.1. CT の測定原理と特徴

まず，CT の測定原理について考えるため，ビームが矩形電流のときの信号を解析的に求める。

6.1.1. 測定原理

電子ビームのまわりには，13.3 節にて示したような電磁場が存在する。この磁場をコイルでピックアップしてパルス信号として取り出すのが CT 型ビーム電荷モニタである。

その測定原理を示すための例として，Fig. 39 のような状況を考える。半径 a の円筒内をエネルギー $\gamma m_e c^2$，電荷 q の電子ビームが通っていて，ビーム電流の z 方向依存性は幅 cT の矩形一様分布と仮定する。また，$\gamma \gg 1$ と仮定して $\beta \simeq 1$ と近似し，円筒表面付近の電磁場の広がりはローレンツ収縮が十分に効いていることとして電子ビームの電流分布の幅とほぼ同じであると近似する。このとき，ビーム電流 $I_{\mathrm{beam}}(t)$ は，

$$I_{\mathrm{beam}}(t) = \begin{cases} \dfrac{q}{T} & (0 \le t \le T) \\ 0 & (t < 0, T < t) \end{cases} \qquad (6\text{-}1)$$

と表すことができる。また，円筒表面の電荷密度 $\sigma(t)$ は，

$$\sigma(t) \simeq \begin{cases} \dfrac{q}{2\pi a c T} & (0 \le t \le T) \\ 0 & (t < 0, T < t) \end{cases} \qquad (6\text{-}2)$$

と近似できる。このとき，$0 \le t \le T$ での円筒表面での電場 $E_\rho(t)$ は，

$$E_\rho(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 acT} \quad (0 \le t \le T) \qquad \text{(6-3)}$$

となる。したがって，円筒表面付近の磁場分布 $B_\phi(z,t)$ は，(13-27)，(13-28) より，

$$B_\phi(t) = \frac{E_\rho}{c} = \frac{\mu_0 q}{2\pi aT} \quad (0 \le t \le \mathrm{T}) \qquad \text{(6-4)}$$

と求まる。

さて，Fig. 39 の等価回路を考えると，Fig. 40 のようなものになる。ここに，L は CT のコイルのインダクタンス，R は伝送線路のインピーダンスで通常 50 Ω である。電子ビームが通るとビーム電流に比例した磁場がコイル内に発生し，電磁誘導により電圧が生じる。ここで，コイル内の磁場は一様と仮定し，(6-4) にコアの比透磁率 μ_r をかけたもので近似できるとする。このとき，Fig. 40 の回路の方程式は, コイルの面積を A とおき，CT に流れる電流を I とおくと，

$$\begin{aligned} RI + L\frac{dI}{dt} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -A\frac{dB_\phi}{dt} \\ &= -\frac{A\mu_r\mu_0 q}{2\pi aT}[\delta(t) - \delta(t-T)] \end{aligned} \qquad \text{(6-5)}$$

となる。ここに，$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数で，

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \qquad \text{(6-6)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \qquad \text{(6-7)}$$

を満たす関数である。(6-5) の微分方程式を解くにはラプラス変換を使うのがよい。ここではラプラス変換法の詳細については記載しないので適宜公式集などを参照されたい。$I(t)$ のラプラス変換を $\tilde{I}(s)$ とおくと，(6-5) のラプラス変換は，

$$R\tilde{I} + sL\tilde{I} = -\frac{A\mu_r\mu_0 q}{2\pi aT}(1 - e^{-sT}) \qquad \text{(6-8)}$$

となる。よって，

$$\tilde{I} = I_0 \frac{1 - e^{-sT}}{s + \frac{R}{L}} \qquad \text{(6-9)}$$

が得られる。ここで，

$$I_0 = -\frac{A\mu_r\mu_0 q}{2\pi aTL} \qquad \text{(6-10)}$$

とおいた。これを逆ラプラス変換すると，I は，

$$I = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ I_0 e^{-\frac{R}{L}t} & (0 \le t < T) \\ -I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-T)} & (T \le t) \end{cases} \qquad \text{(6-11)}$$

と求まる。これをプロットすると，Fig. 41 のようになる。このように，CT からの信号は，ビーム電流に比例し，ビームの形状に近いパルス波形として得られることがわかる。また，コイルの巻く方向を変えると極性が反転した波形が得られる。

ここで実際の CT やビームの状況に近い以下のようなパラメータを入れてみる。

$$\begin{aligned} A &= 100\ \mathrm{mm^2} \\ \mu_r &= 10 \\ q &= 1\ \mathrm{nC} \\ T &= 10\ \mathrm{ps} \\ a &= 10\ \mathrm{mm} \\ L &= 0.1\ \mathrm{\mu H} \\ R &= 50\ \Omega \end{aligned} \qquad \text{(6-12)}$$

このとき，(6-11) の係数は，

$$I_0 = 20\ \mathrm{A} \qquad \text{(6-13)}$$

で，50 Ω に対して 1 kV の出力となる。また，時定数は，

$$\frac{L}{R} = 2\ \mathrm{ns} \qquad \text{(6-14)}$$

となる。実際の CT では，コイルの有限の大きさや寄生容量，コアの周波数特性などの影響で波形がなまされて出てくる。したがって，ビーム電流が測定できるのは信号の立ち上がり時間よりバンチ長が長い場合に限られる。バンチ長が短い場合は積分された波形が出ることになるので，電荷量しかわからない。

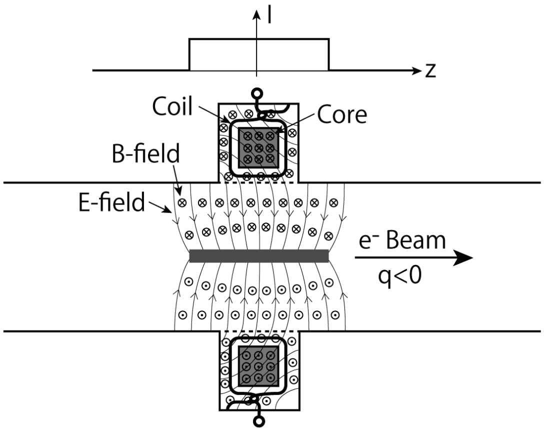

Fig. 39: CT モニタの模式図。

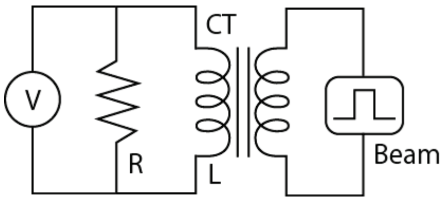

Fig. 40: CT モニタの等価回路。

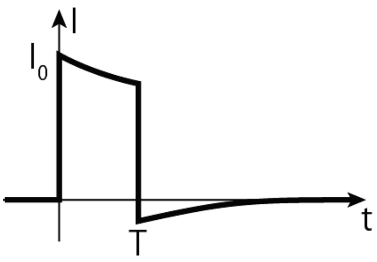

Fig. 41: CT 波形 (6-11) のプロット。

6.1.2. CT の特徴

ビーム電流やビーム電荷を測定する方法として CT モニタが適している理由についてまとめる。まず，電荷や電流に比例する信号をとるには，ほかにもボタン電極やストリップライン電極が存在する。また，RF-BPM の基準空胴の振幅も電荷に比例する。これらが電荷検出に適さない理由として，電極によるピックアップの場合，Fig. 42 に示すようにビームからの信号は＋と－のパルスが続いて出てくるので，後段の回路で積分されるとほとんど信号が残らない。また，RF-BPM の基準空胴を使用する場合は，ケーブルなどでの RF 損失によって個々の検出器の信号強度が異なるので比較しにくいなどの問題がある。それに比べて CT モニタからの出力パルスはほぼ単極パルスであるので，パルスの高さから電流が測定でき，パルスの積分から電荷量が測定できるので，ビーム電流や電荷量を測定するのに適しているといえる。

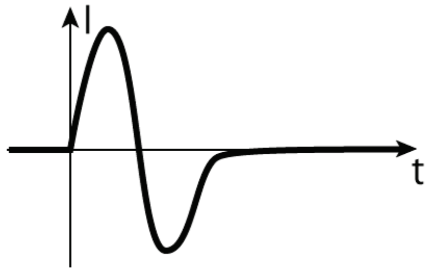

Fig. 42: ボタン電極やストリップライン電極からの信号の形状。

6.2. 高速差動 CT とその検出回路

SACLA では，外来ノイズ低減と高速波形測定をめざして，高速差動 CT を開発した。その開発の動機と設計のポイント，および，検出回路について述べる。

6.2.1. 高速差動 CT

SACLA のような線型加速器では，パルスクライストロンに代表される高圧パルス電源を使用した機器が多数使用される。そのため，周辺の電気回路は，パルス電源付近の接地電位の変動や，電磁ノイズの影響を大きく受ける。CT モニタもそれに当てはまり，なにも対策しないとパルス電源の影響を受けて波形に大きなノイズが乗ることになる。そこで，そのノイズの影響を低減するため，差動 CT を開発することとなった。

差動 CT とは，巻き方向の異なる 2 つのコイルをコアに巻き，互いに極性の異なる信号を取り出すものである。コイルを逆に巻いている様子は Fig. 39 にも示されている。一般に外来ノイズはコイル内の磁場にはほとんど影響を与えず，別のところで乗ってくるので巻き方向によらない。これをコモンモードノイズと呼ぶ。したがって，2 つの信号の差を取ればコモンモードノイズが相殺してビームの信号だけが残ることになる。このよ

うにしてノイズの影響を受けない CT モニタが作れることとなる。

また，SACLA の入射部では，電子銃からの電子ビームがチョッパによって約 1 ns のビームとして切りだされ，速度変調バンチングでバンチ長を縮める。そのため，入射部の各空胴を通過したあとのバンチ長を測定することが重要となる。そこで，CT モニタにてバンチ長を測定することを考え，高速差動 CT として開発することとした。

高速化のポイントとしては，以下のような項目があげられる。

- 高周波でも十分な比透磁率のあるコアを使う。
- コイルの巻き数を少なくして導線の遅延を減らす。
- コイルから同軸コネクタまでの距離を極力短くしてコイルと同軸部との間の反射などの影響を低減する。
- CT モニタの筐体はなるべく小さくし，低い周波数での共振が起こらないようにする。

このようなことを念頭において設計することで，信号の立ち上がりの速い CT モニタを作ることができる。

SACLA にて使用している高速差動 CT [22] の概略図を Fig. 43 に，写真を Fig. 44 に示す。内径 22 mm のビームパイプの途中にセラミックギャップがあり，そこに高周波コアが装着されている。このコアの上下左右の 4 ヶ所に 1 巻のコイルが巻かれていて，対向するコイルは逆向きの信号が出るように巻き方向を決めている。コイルはそのすぐ近くで SMA コネクタに接続されている。そして，このコアのまわりは極力内径の小さいケースで覆われ，無用な共振を防ぐとともに，外からの電磁ノイズが入らないようにしている。

高速化のポイントとして示したように，コイルの巻数は最小の 1 回で，コアとしては，日立金属社のファインメット [23] を使用しており，1 GHz でも比透磁率が 10 程度となっているものである。コアや筐体内部の大きさについても極力小さくし，必要以上に大きくなって低い周波数の共振が起こらないようにしている。また，全部で 4 個の出力を用意して，すべての信号の平均をとることでビームの位置依存性が出ないようにしている。

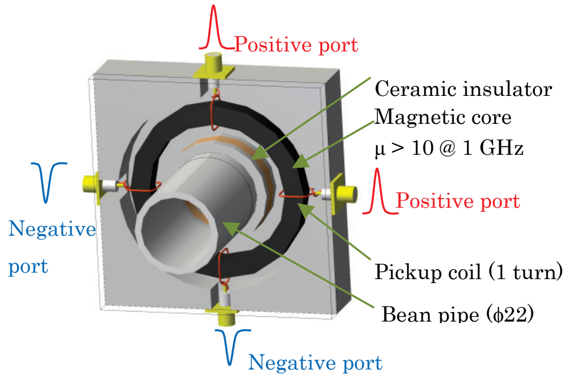

Fig. 43: 高速差動 CT の概略図。

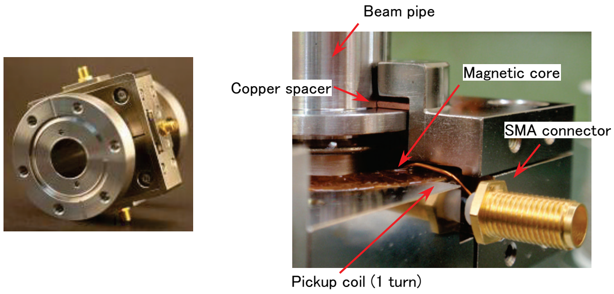

Fig. 44: 高速差動 CT の写真。

6.2.2. 検出回路

CT モニタからの信号は，Fig. 45 に示すように，検出器本体のすぐ近くに設置されたプリアンプで増幅・波形整形され，クライストロンギャラリの主アンプをへて 238 MSPS の VME 波形記録 AD ボードによって記録される。プリアンプから主アンプまでは，途中でノイズが乗らないようにするためと，波形をなまらせないため，高周波用の差動平衡ケーブルで伝送している。主アンプでは信号をアンプで受けたあと，ゲイン調整用のアッテネータ切替器を介して AD ボードに出力している。

また，入射部の速度変調バンチングの途中にある 2 台の CT については，生波形を 12 GHz 帯域の高速オシロスコープで読み出すことによりバンチ長をモニタできるようにしている。

6.3. ビームデータ

電子ビームを使って得られた高速差動 CT モニタのデータ [22] について，生波形や検出回路通過後のものについていくつか紹介する。

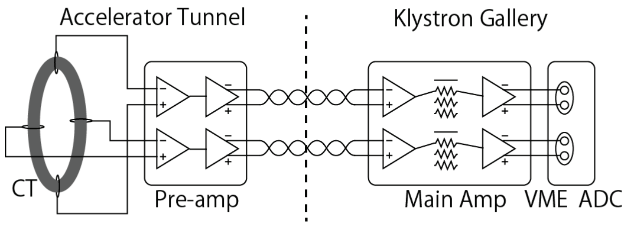

Fig. 45: CT の検出回路ブロック図。

6.3.1.　生波形

短バンチ（< 1 ps）の電子ビームを高速差動 CT で検出したときの生波形を Fig. 46 に示す。この信号は 12 GHz 帯域のリアルタイムオシロスコープにて取得した。電荷量はおよそ 0.3 nC であった。信号の立ち上がりは，10-90%でおよそ 200 ps と高速な動作をしていることがわかる。このことから，500 ps 程度以上のバンチ長であれば測定可能であることが推測される。

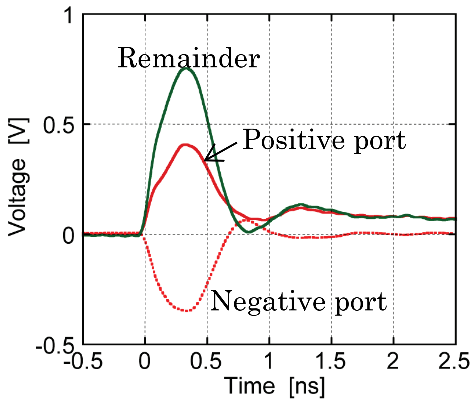

Fig. 46: 高速差動 CT の生波形。

6.3.2.　コモンモードノイズの低減効果

前節の生波形を，時間幅を広くしてとったものを Fig. 47 に示す。ビームの信号は時間 0 のところの鋭いピークである。このレンジで見ると，CT の信号は 10 mV 程度のコモンモードノイズの上に乗っているような形となっている。このノイズはクライストロンの高圧パルスモジュレータなどから来ていることが推測される。これらの信号をオシロスコープの機能で差し引いたものも同じ図にプロットしているが，ノイズ成分が相殺しておよそ 1/10 になっていることがわかる。このように，高速差動 CT はノイズに強いものとなっていることがわかる。

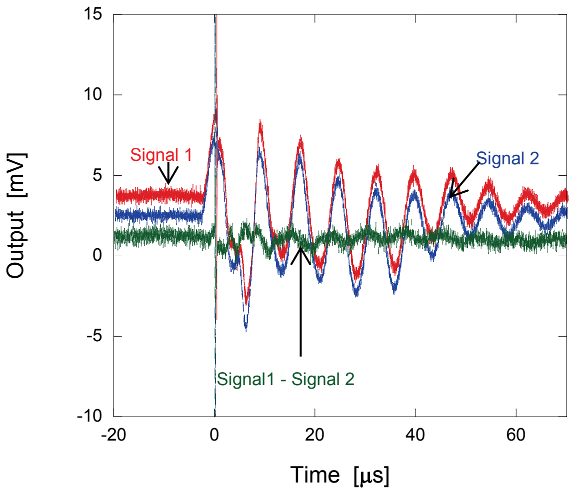

Fig. 47: 高速差動 CT のノイズ。Signal 1 が＋の信号，Signal 2 が－の信号で，その差をとったものもプロットしている。

6.3.3.　ファラデーカップを用いた較正

高速差動 CT の出力信号と電荷量の関係を較正するため，SACLA の 3 番目のバンチ圧縮器の下流にファラデーカップを設置している。そのファラデーカップと高速差動 CT の出力とを比較したデータを Fig. 48 に示す。左の図は高速差動 CT とプリアンプの間を数 m の同軸ケーブルでつないだ時のもので，若干直線からずれている。そこで，CT からの信号が急峻すぎて初段のアンプが非線形な応答をしているのではないかと考えた。そこで，30 m の細い同軸ケーブル（外径約 1 mm）をつないだところ，高周波成分が減衰して十分線形な特性が得られた。このように，速い信号を扱う際には，アンプの特性が非線形になることもあることに注意が必要であるが，適切な対策を取れば検出回路の応答も含めて十分に線形な応答が得られることがわかる。

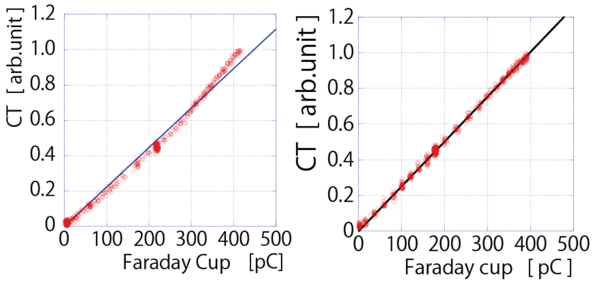

Fig. 48: 高速差動 CT システムのリニアリティ。左図は CT とプリアンプの間を短いケーブルでつないだときのもので，右図は 30 m の同軸ケーブルを間に入れたときのもの。

6.3.4. 入射部でのバンチ長測定

最後に，入射部の比較的バンチ長が長い部分において，高速差動 CT にてバンチ長を測定した際のデータについて述べる。まず，入射部の加速空胴と高速差動 CT の配置について Fig. 49 に示す。図中，CT-238 と CT-476 は生波形を常時観測できるようにしており，12 GHz 帯域のリアルタイムオシロスコープで波形を取得している。データの一例として，238 MHz サブハーモニックバンチャ(SHB)の電力を変化させたときの CT-476 の生波形を Fig. 50 に示す。RF 電力が大きくなると速度変調バンチングによってバンチ長が短くなり，5.6 kW のときに細く高い信号になっていることがわかる。さらにパワーを増やして 10 kW にすると，オーバーバンチングしてピーク電流が下がっていることがわかる。このように，数 100 ps のバンチ長が高速差動 CT にて監視できることがわかる。

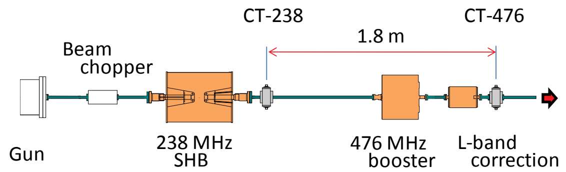

Fig. 49: 入射部における加速空胴と CT の配置。

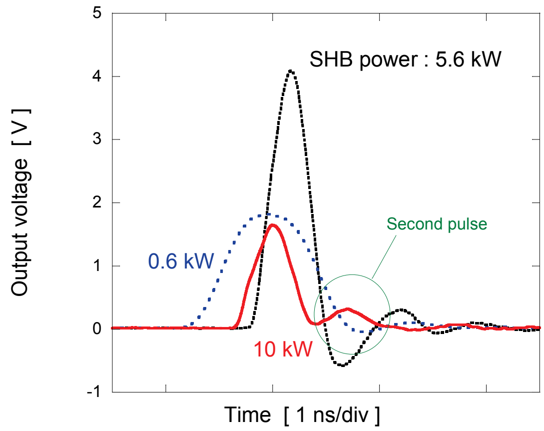

Fig. 50: CT-476 の出力波形。青破線： SHB 電力が 0.6 kW の時の出力波形，黒点線：SHB 電力が 5.6 kW の時の出力波形，赤実線：SHB 電力が 10 kW の時の出力波形。

7. RF デフレクタによる時間構造測定

SACLA では，バンチ圧縮によりバンチ長を約 30 fs まで圧縮し，ピーク電流を 3 kA にしなければ，X 線 FEL の増幅ができない。そこで，圧縮後のバンチの時間構造を 10 fs 程度の分解能で観測するための RF デフレクタを開発し，使用している。その RF デフレクタによるバンチの時間構造の測定原理とその結果について述べる。

7.1. 測定原理

7.1.1. RF デフレクタによる時間構造測定

RF デフレクタとは，通常の加速管と異なり，ビームの進行方向に対して横方向に加速する電磁場を発生させる加速管である。この RF デフレクタを用いた時間構造測定の概略図を Fig. 51 に示す。RF デフレクタのゼロクロス位相にバンチを載せると，電子の到達時間に比例したキック力を与えることができ，時間掃引できることになる。その状態である程度ドリフトさせると時間プロファイルが空間プロファイルに変換される。そのプロファイルを下流のスクリーンモニタで観測すればバンチの時間構造が測定できるという仕組みである。

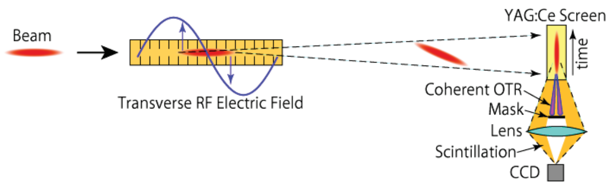

Fig. 51: RF デフレクタを用いた時間構造測定の概略図。

7.1.2. 時間プロファイルから空間プロファイルへの変換

ビームの時間プロファイルが空間プロファイルに変換される際の変換係数について考える。RF デフレクタの最大キック電圧を V_T とし，角周波数を ω とおくと，そのゼロクロス位相でのキック電圧の時間微分は，

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_0 = V_T\omega \tag{7-1}$$

である。このとき，ビームの運動量を p とおくと，キック後距離 L ドリフトしたあとの空間方向の位置のシフト量 Δy は，

$$\Delta y \simeq \frac{e\left.\frac{dV}{dt}\right|_0 \Delta t}{pc} L = \frac{eV_T\omega\Delta t L}{pc} \tag{7-2}$$

となる。ここに，Δt はゼロクロスタイミングからの時間のずれで，e は素電荷である。このように，時間に比例した位置シフトが起こり，その比例係数は上式で与えられることがわかった。このとき，空間プロファイルのサイズ σ_y は，時間の単位でのバンチ長を σ_t，RF デフレクタが OFF のときのサイズを σ_{y_0} とおくと，

$$\sigma_y \simeq \sqrt{\sigma_{y_0}^2 + \left(\frac{eV_T\omega\sigma_t L}{pc}\right)^2} \tag{7-3}$$

となる。

7.1.3. 時間分解能

RF デフレクタの時間分解能は，$\Delta y = \sigma_{y_0}$ となるときの Δt として得られる。したがって，時間分解能 σ_{t_0} は，

$$\sigma_{t_0} = \frac{\sigma_{y_0} pc}{eV_T\omega L} \tag{7-4}$$

となる。時間分解能はキック電圧・RF 周波数・ドリフト距離を増やすと良くなり，ビームサイズ，ビームエネルギーが増えると悪くなることがわかる。

ここで，SACLA でのバンチ長測定を想定したときにキック電圧がどれだけ必要か考える。バンチ長が最短となる 3 番目のバンチ圧縮器のところでは，ビームエネルギーが 1.4 GeV，すなわち，運動量が 1.4 GeV/c となる。RF 周波数は主加速器に使用している 5.712 GHz と同じとする。そして，スクリーン上のビームサイズは 100 μm RMS，ドリフト距離は 10 m とする。このとき，キック電圧と時間分解能の関係は，(7-4) より，

$$\sigma_{t_0} \simeq \frac{390}{V_T}\ [\mathrm{fs/MV}] \tag{7-5}$$

となる。したがって，この条件で 10 fs の時間分解能を得るには 39 MV 以上のキック電圧が必要であることがわかる。

7.1.4. RF デフレクタ以降のビームの転送

前節までは RF デフレクタからスクリーンモニタまでが単なるドリフトと考えてきたが，間に四極電磁石などの機器が入った場合でも適切にビームを転送すればビームプロファイルを計算することが可能である [24]。ここでは導出の詳細は述べないが，結果のみを記すこととする。

まず，位置のシフト量 Δy は，

$$\Delta y = \frac{eV_T}{pc}\omega\Delta t\sqrt{\beta_d\beta_s}\sin\Delta\Psi \tag{7-6}$$

と得られる。したがって，キック後のビームサイズ σ_y は，

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{y_0}^2 + \left(\frac{eV_T\omega\sigma_t}{pc}\right)^2 \beta_d\beta_s\sin^2\Delta\Psi} \tag{7-7}$$

となる。ここに，β_d，β_s はそれぞれ RF デフレクタとスクリーンモニタでのベータ関数で，$\Delta\Psi$ は RF デフレクタからスクリーンモニタまでのベータトロン位相変化である。この式からわかることは，$\sigma_{y_0} = \sqrt{\beta_s\epsilon}$ （ϵ はエミッタンス） が小さいほうがよく，また，$\beta_d\beta_s$ が大きいほうがよいこ

とである。このとき，β_d を大きくとるのがよいこととなる。これは，Twiss パラメータの関係式，

$$\beta\gamma = 1 + \alpha^2 \tag{7-8}$$

からもわかるように，RF デフレクタ位置での γ を下げることである。これは，RF デフレクタでのビームの角度発散を小さくすることを意味しており，RF デフレクタはビームに角度変調を与えることからも妥当な結果といえる。このことをビームが占める位相空間の分布で概略を示すと Fig. 52 のようになる。この図からも，β_d を大きくとった方がより高分解能な測定ができることがわかる。

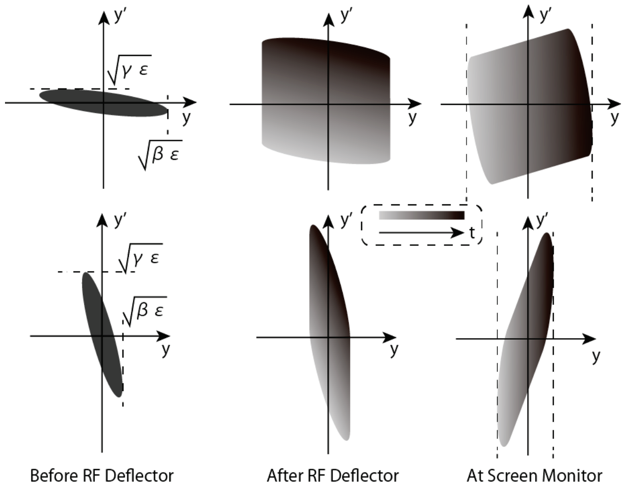

Fig. 52: RF デフレクタで時間構造を測定するときの位相空間分布の振る舞い。上が $\boldsymbol{\beta_d}$ を大きくとったときで，下が $\boldsymbol{\beta_d}$ を小さくとったときである。左から順にそれぞれ，RF デフレクタ直前，RF デフレクタ直後，スクリーンモニタでの位相空間分布である。なお，バンチ内の時間を濃淡で表現している。

7.1.5.　E-t 位相空間測定

バンチ圧縮の振る舞いを詳細に知りたいときに，バンチ内の時間とエネルギーの関係（E-t 位相空間）がわかると役に立つ。というのは，磁場シケインによるバンチ圧縮器はこの E-t 位相空間を回転させる働きをするからである。E-t 位相空間が知りたいときは，RF デフレクタのキック方向と垂直方向にエネルギー分散が出るようにすればよい。

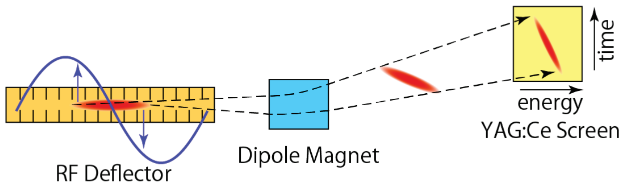

Fig. 53: RF デフレクタで E-t 位相空間を測定するセットアップの概略図。

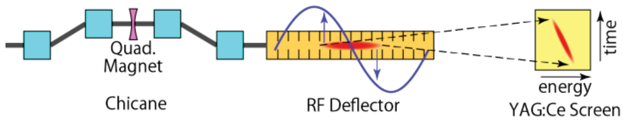

Fig. 54: RF デフレクタ上流の磁場シケインでエネルギー分散を漏らして E-t 位相空間を測定するセットアップの概略図。

このような方法として，まず考えられるのが，Fig. 53 に示すように，RF デフレクタで掃引したあとに偏向電磁石で曲げることによりエネルギー分散を発生させることである。ただし，この方法は RF デフレクタのあとにエネルギー分析用のビームラインが必要で，大掛かりなセットアップとなる。

もうひとつの方法として，磁場シケインからエネルギー分散を漏らす方法がある。バンチ圧縮器の磁場シケインの直後に RF デフレクタを設置する場合はこの方法が手軽である。そのセットアップの概略図を Fig. 54 に示す。シケイン中間のエネルギー分散のあるところに四極電磁石を設置することで，本来はエネルギー分散のないシケイン下流に分散を漏らすことができる。シケイン中間でのエネルギー分散を η_0，四極電磁石からスクリーンまでの距離を L，四極電磁石の焦点距離を f_Q とおくと，スクリーンでのエネルギー分散 η_1 とその微分 η_1' は，

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_1'\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{f_Q} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_0\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\eta_0\\ 0\end{pmatrix} = -\frac{\eta_0}{f_Q}\begin{pmatrix}L\\ 1\end{pmatrix} \tag{7-9}$$

と近似できる。このように，シケイン中間の四極電磁石でスクリーンモニタの位置にエネルギー

分散を発生させることができ，E-t 位相空間が測定できることがわかる。

7.2. RF デフレクタ空胴

SACLA の RF デフレクタ空胴には，前節で述べたように，周波数 5.712 GHz のときに約 40 MV のキック電圧が必要である。この条件をみたすべく，C バンド RAIDEN 空胴（Racetrack-shaped iris-coupling deflection structure) [25] を開発した。この空胴の概略図を Fig. 55 に示す。RAIDEN 空胴は，円筒導波管の TM11 モードと TE11 モードの混成双極モード HEM11 を使用する。このモードは，空胴が軸対称のときに X 方向のモードと Y 方向のモードが縮退するので，どちらか一方のモードだけが励振されるよう，結合孔をレーストラック型にして軸対称性を破っている。また，群速度と位相速度が逆向きとなっており，RF パワーは下流のカプラから印加する形となる。SACLA では，有効長 1.7 m の C バンド RAIDEN 空胴を 2 本使用し，これを 50 MW クライストロンで励振して 40 MV 以上のキック電圧が出せるようになっている。この C バンド RAIDEN 空胴のパラメータは Table 4 にまとめたとおりである。空胴の設計については，文献 [2] にて詳しく述べられているので，そちらを参照されたい。

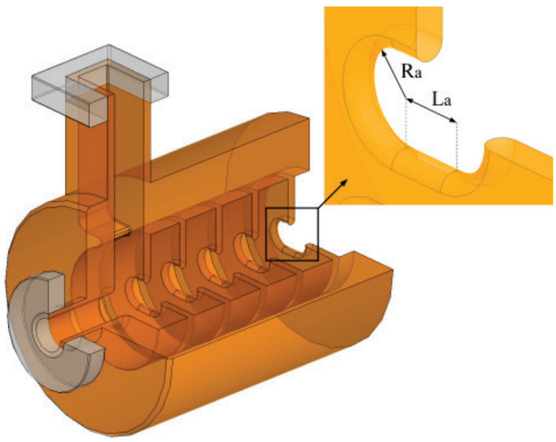

Fig. 55: RAIDEN 空胴の概略図。

Table 4: C バンド RAIDEN 空胴のパラメータ。

必要横方向偏向電圧	V_T	> 40	MV
バンチ長	σ_z	< 200	fs
解析ビームのエネルギー	cp_z	1.4	GeV
共振周波数	f_a	5712	MHz
セル間遷移位相(セル移相)	βD	5π/6	rad
群速度（光速比）	v_g/c	-2.13	%
加速管充満時間	T_f	0.27	μs
無負荷 Q	Q_a	11200	
シャントインピーダンス	r_T	27.7	MΩ/m
加速管タイプ	定インピーダンス型		
共振モード	HEM11		
セル数	77+2 カップラーセル		
加速実効長（加速管長）	L	1706 (1807)	mm
加速管台数		2	台

7.3. 測定データ

実際の電子ビームの時間構造の測定したデータについて簡単に紹介する。まず，RF 位相の決め方とキック電圧の較正方法について述べ，ビームの時間構造のデータを示すこととする。

7.3.1. RF 位相の決定とキック電圧の較正

まず，RF デフレクタの位相はゼロクロスなので，RF デフレクタを ON にしたときに電子ビームの重心位置が動かなければよい。RF デフレクタが ON のときに位相を調整し，スクリーンモニタの中央に電子ビームが来るようにすればそこが測定位相となる。

次に，キック電圧の較正は，RF 位相の設定値をわずかに変化させたときのスクリーン上でのビーム重心位置の変動を見ればよい。キック電圧を 22 MV にしたときの RF 位相とビームの重心位置の関係を Fig. 56 に示す。このデータを (7-2) の関係と照らしあわせればキック電圧の較正ができ，スクリーン上のサイズと時間との換算が可能となる。このデータでは，位相 1 度に対して約 3 mm 移動している。5.712 GHz の 1 度は約 500 fs なので，1 mm あたり約 170 fs に換算できる。こ

の場合，キック電圧を 40 MV まで上げれば 1 mm あたりで 100 fs 以下となり，通常のビームサイズが 100 μm RMS であれば 10 fs の分解能が出せることがわかる。

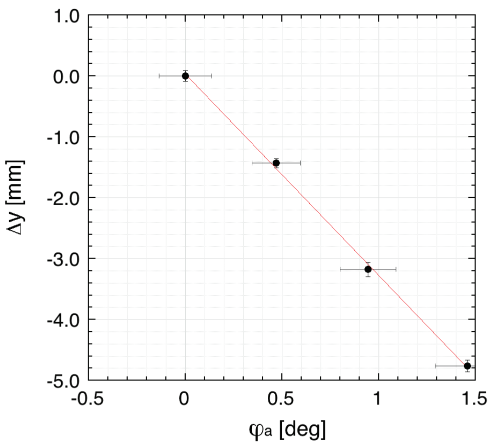

Fig. 56: バンチの重心移動と RF 位相の関係。

7.3.2.　時間構造測定

RF デフレクタで実際にビームの時間構造を測定した例を Fig. 57 に示す。RF デフレクタが OFF のときに比べて ON のときは上下方向にプロファイルが引き伸ばされ，約 100 fs のバンチの構造が取得できていることがわかる。このように，RF デフレクタによって，時間プロファイルが適切に空間プロファイルに変換され，時間構造が適切に測定できている。

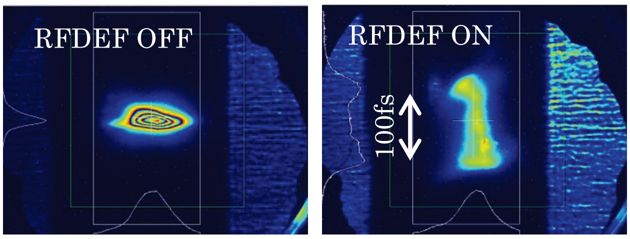

Fig. 57: RF デフレクタで測定したビームの時間構造の例。左は RF が OFF の場合で，右は RF を ON にして時間掃引した場合である。

8.　ストリークカメラによるバンチ長測定

バンチの時間構造測定については，RF デフレクタによる方法のほかに，ストリークカメラを用いる方法がある。ストリークカメラとは光の時間構造を測定するためのカメラである。そこで，電子ビームの時間構造を瞬時的な放射現象である OTR を使って光の時間構造に変換し，ストリークカメラで検出することで時間構造が測定できる。現時点で最も時間分解能が良いストリークカメラは浜松ホトニクス社の FESCA-200 [26] で，200 fs の時間分解能を持つ。これを使えば，数 100 fs 領域の時間構造が測定できると考えられる。本節では，ストリークカメラの原理と OTR 伝送系について解説し，測定データを少し紹介する。

8.1.　ストリークカメラの検出原理

ストリークカメラの内部の概略図を Fig. 58 に示す。入射光はスリットで細く切りだされ，光電面にあたることによって光電子を放出させる。光電子は加速電極で加速され，掃引電極によって時間に比例したキックを受けることで時プロファイルが空間プロファイルに変換される。掃引された光電子は MCP (Micro-Channel Plate) にて増倍され，蛍光面に当たることで可視光の画像となる。それを CCD カメラで撮像することで空間プロファイル画像が得られ，時間構造が測定できる。

　ストリークカメラの時間分解能は光量や波長に依存することが知られている。ストリークカメラの時間分解能は先に述べたように最高性能の

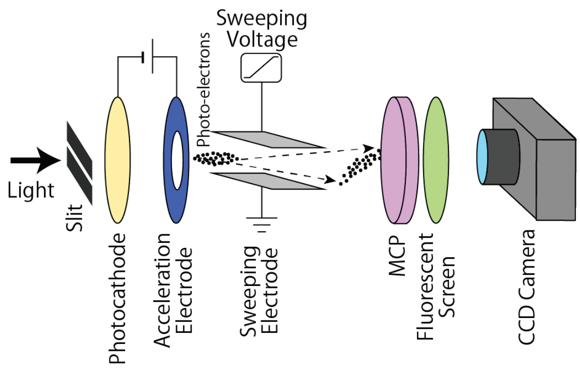

Fig. 58: ストリークカメラの概略図。

もので 200 fs であるが，このような性能は入射光が強すぎても弱すぎても得られない。光が強すぎると光電子の空間電荷効果の影響で光電子群が発散してしまって時間分解能が悪化する。光が弱すぎると像がまばらになってしまって正確な測定ができない。また，入射光の波長は光電面の感度領域の長波長端に合わせるのが良い。というのは，短波長の光による光電子は初期運動量が大きいため，光電子が発散する原因となるからである。このように，高い時間分解能を目指すときは，光量と波長をうまく調整する必要がある。

8.2. OTR 伝送系の設計

ストリークカメラは測定の初期にさまざまな微調整が必要なため加速器トンネル内に設置することができない。そこで，Fig. 59 に示すように，OTR を加速器トンネルからその外のストリークカメラに導かなければならない。その伝送系について考える。

まず，もともと光量の多くない OTR を長い距離にわたって伝送する必要があるため，収束デバイスでコリメートして平行光にし，伝送損失を低減する必要がある。そして，反射率の高いミラーを使用することも当然ながら必要である。ここで，収束デバイスとしてレンズを使用することが思い浮かぶが，レンズは時間構造測定に適さない。というのは，レンズに使用する光学材料には分散があるため，波長によって伝播速度が異なり，時間構造がなまされてしまうからである。たとえば，石英ガラスの場合，波長が 100 nm 変わると屈折率が約 0.4%変わる。したがって，屈折率が 1.46 で厚さ 10 mm の石英ガラスを通過した場合，波長が 100 nm 異なると 200 fs 程度の伝播時間差が生じる。これでは時間分解能を悪化させる原因となるので，収束デバイスには凹面ミラーなどの反射光学系を利用しなければならない。

次に，ストリークカメラの時間分解能は前節にて述べたように波長依存性があるので，光電面の感度領域の長波長端付近を通すバンドパスフィルタを使用するのがよい。このようなフィルタを使用することで, OTR 伝送系内の分散の影響を低減する効果もある。

以上のようなポイントを押さえればストリークカメラで数 100 fs 分解能の時間構造測定ができると考えられる。

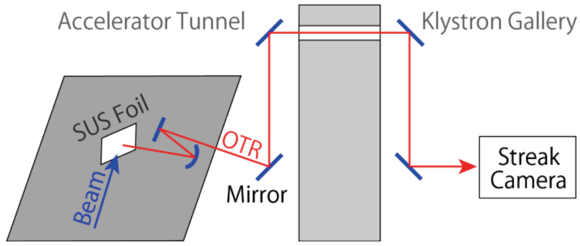

Fig. 59: OTR 伝送系の概略図。

8.3. 測定データ

SACLA では，3 番目のバンチ圧縮器の下流のスクリーンからの OTR をストリークカメラで検出できるようになっている。通常，3 番目のバンチ圧縮器の下流ではバンチ長が約 30 fs になるのに加え, C-OTR が発生するのでストリークカメラは使えないが，3 番目のバンチ圧縮器の電磁石を OFF にしてバイパスすれば，2 番目のバンチ圧縮器の下流でのバンチ長が測定できる。このときのバンチ長は数 100 fs から 1 ps 程度なので，ストリークカメラが適していることがわかる。そして，このバンチ長であれば C-OTR は発生しない。なお，SACLA で使用しているストリークカメラは FESCA-200 である。OTR 伝送系では先に述べたように反射光学系で OTR をコリメートして伝送し，600 nm のロングパスフィルタで波長を制限している。バンドパスフィルタではなく，ロングパスフィルタを使用した理由は，光電面の感度領域が波長 800 nm 以下のため，実質的に 600 – 800 nm のバンドパスフィルタを使用していることと等価になるためである。

実際に電子ビームのバンチ長をストリークカメラで測定したデータを Fig. 60 に示す。なお，この時のデータは 1 ショットでは強度が小さかったため，50 ショット積算したものを使っている。このように，500 fs 程度のバンチ長が適切に測定できている。

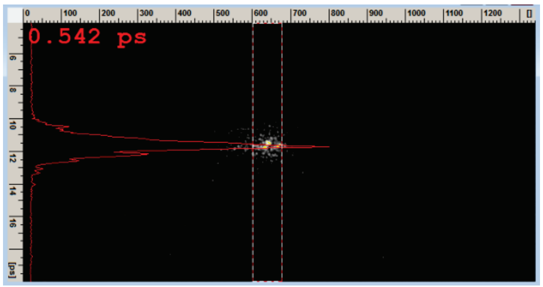

Fig. 60: ストリークカメラで測定したバンチ長の測定結果の例。縦方向に時間掃引しており，画面左の実線は得られた画像を射影したものである。FWHM で 0.54 ps のバンチ長が得られている。

9.　コヒーレント放射によるバンチ長測定

2.4.4 節で述べたように，コヒーレントな放射を検出することでバンチ長などの時間構造を類推することができる。そこで，SACLA では，入射部の速度変調バンチングの測定にコヒーレント遷移放射を，3 ヶ所のバンチ圧縮器でのバンチ長測定にコヒーレントシンクロトロン放射を利用している。この 2 つのコヒーレント放射のモニタについて述べる。

9.1.　コヒーレント遷移放射検出器

9.1.1.　検出器の構成

SACLA の入射部における速度変調バンチングの領域では，バンチ長が 1 ns から数 10 ps まで縮められる。このようなビームからのコヒーレント遷移放射（CTR）を検出することで速度変調バンチングの振る舞いを調べることができる。遷移放射を使う理由としては，シンクロトロン放射をさせるための偏向電磁石がないことと，ビームプロファイル測定用の蛍光体からの遷移放射が随所で使えることが挙げられる。SACLA での CTR 検出器の概略図を Fig. 61 に示す。スクリーンモニタの光学系架台に出し入れ可能なミラーが取りつけられており，そのミラーで CTR を検出器に導く形となっている。

CTR の検出には，Fig. 62 に示すような RF 波長計を使用している。先に述べたバンチ長から類推される CTR の周波数は 1 GHz – 数 10 GHz の領域であるため，RF 検波器を利用するのがよい。そして，ただ検波するのではなく，断面の異なる矩形導波管を連ねたところに検波器を設置している。このことにより，導波管の遮断周波数を利用したハイパスフィルタ効果を用いておおまかなスペクトル情報も得られるようになっている。

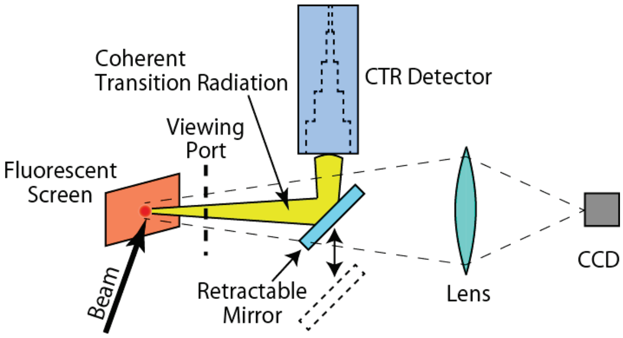

Fig. 61: CTR 検出器の概略図。

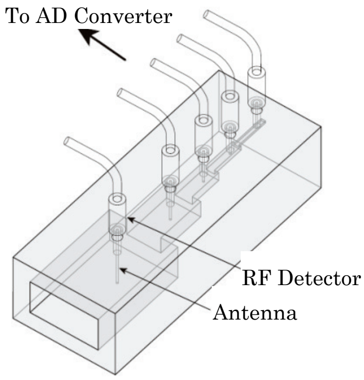

Fig. 62: CTR 検出器の RF 波長計。

9.1.2.　測定データ

CTR 検出器の測定データの例として，238 MHz サブハーモニックバンチャ（SHB）の入力パワーを変化させて加速電圧を変え，そのときの CTR 検出器の出力をとったものを Fig. 63 に示す。SHB の電圧を上げていくとバンチ長が短くなって CTR 強度が強くなり，175 kV 付近でバンチ長が最短となることがわかる。それ以上の電圧ではオーバーバンチングされてバンチ長が長くなり，CTR 強度が下がることがわかる。これは 1 次元シミュレーションとの結果と一致しており，CTR 検出器によってバンチ長が測定できていることがわかる。

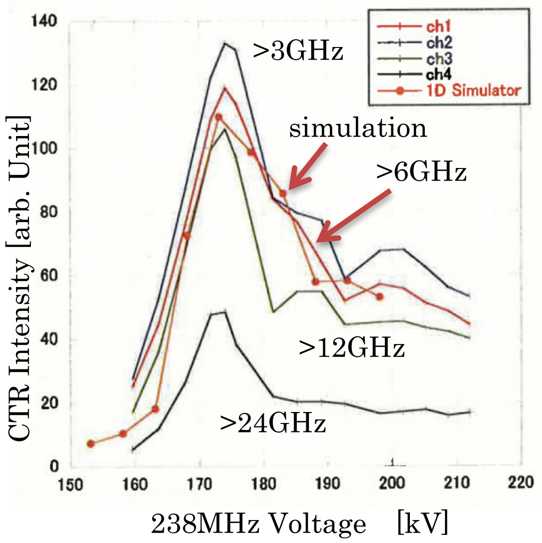

Fig. 63: 238 MHz SHB の加速電圧を変えたときの CTR 強度。RF 波長計の遮断周波数ごとのデータがプロットされている。また，●付きのプロットは 1 次元電子ビームシミュレーションから得られた CTR 強度である。

9.2. コヒーレントシンクロトロン放射検出器

9.2.1. 検出器の構成

SACLA の 3 ヶ所のバンチ圧縮器（BC1, BC2, BC3）のそれぞれでバンチ長が監視できるよう，コヒーレントシンクロトロン放射（CSR）の検出器が各バンチ圧縮器に設置されている [27]。バンチ圧縮器は 4 台の偏向電磁石で構成されているので，その電磁石からの CSR を利用できる。バンチ圧縮後のバンチ長を監視したいので，各バンチ圧縮器の 4 台目の偏向電磁石からの CSR を検出することとしている。SACLA の電子ビームシミュレーションから得られたビームの時間構造をもとに CSR スペクトルを計算した結果を Fig. 64 に示す。各バンチ圧縮器の直後でのバンチ長は上流から順に，約 3 ps，約 300 fs，約 30 fs なので，CSR のスペクトルの立ち上がりはバンチ圧縮器ごとにおよそ 1 桁ずつ異なっている。CSR 強度がピークとなる周波数は 100 GHz から 10 THz 程度のテラヘルツ領域である。SACLA ではこの CSR の強度を焦電検出器（Pyroelectric Detector）で検出している。バンチ長が変わると CSR スペクトルの立ち上がり位置が変わることになるが，それに応じて積分強度も変わるので，CSR の強度を測定するだけでも相対的なバンチ長の変動が測定可能である。

SACLA の CSR 検出器の概略図を Fig. 65 に示す。バンチ圧縮器の 4 台目の偏向電磁石からの CSR を真空チャンバ内に設置された穴あきミラーで反射する。ビューポートから取り出された CSR は，テラヘルツレンズで焦電検出器に集光されて検出される。ミラーには電子ビームが通る穴が開いているので，通常の運転中でも常時 CSR を監視することができる。ビューポートについては，BC1 と BC2 には合成石英を，BC3 にはシリコン単結晶を使用している。この理由は，合成石英は数 THz 以上のテラヘルツ波を吸収して透過しないため，10 THz 付近を検出したい BC3 には不向きなためである。シリコン単結晶は 1 THz 以上であれば近赤外まで十分な透過率がある。

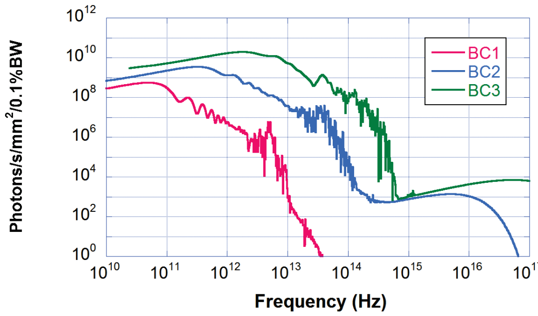

Fig. 64: 各バンチ圧縮器における CSR スペクトルの計算結果。

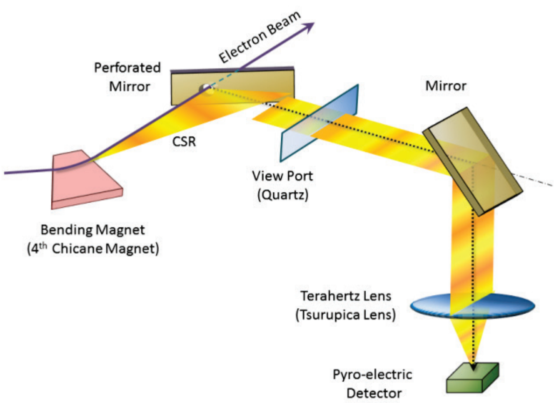

Fig. 65: CSR モニタの概略図。

9.2.2.　測定データ

電子ビームを用いて測定したデータの例として，BC2 の CSR 検出器の結果を紹介する。

　まず，CSR 強度の電荷量依存性を Fig. 66 に示す。(2-43) に示したように，CSR 強度は電荷量の 2 乗に比例するはずであるが，実際にそのようになっていることがわかる。したがって，このデータは CSR が適切に検出できていることを示す証拠のひとつである。

　次に，バンチ長と CSR 強度を示すデータとして，BC2 上流の S バンド加速器の RF 位相と CSR 強度との関係を Fig. 67 に示す。図中，S バンド位相が 0 度のときのバンチ長が約 500 fs FWHM で，位相を 1 度動かすごとにバンチ長が約 100 fs 変わることが，RF デフレクタでの測定でわかっている。このことから，CSR 検出器は数%のバンチ長の変動に十分な感度があることがわかる。

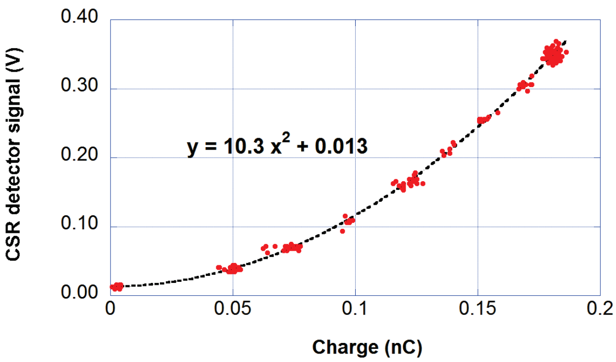

Fig. 66: ビーム電荷量と CSR 強度の関係。

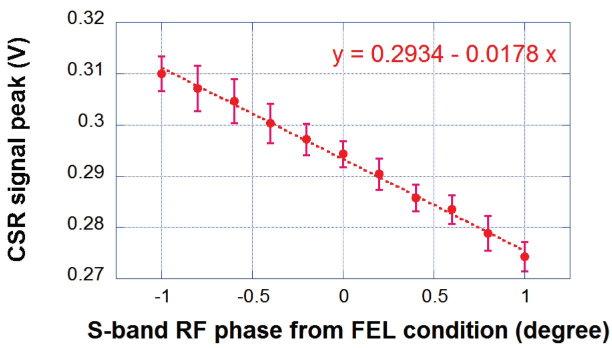

Fig. 67: S バンド加速器の RF 位相と CSR 強度の関係。エラーバーは、測定ごとのばらつきの標準偏差を示す。

10. ビームロスモニタ・ハローモニタ

アンジュレータビームラインに設置しているビームロスモニタとハローモニタについて簡単に紹介する。アンジュレータの永久磁石にてビームロスが発生したり，永久磁石にビームハローが当たったりすると永久磁石が減磁してアンジュレータの性能が落ちることがわかっている。そこで，ビームロスやビームハローをモニタし，永久磁石へのダメージを最小限にとどめることとしている。

10.1. 光ファイバ型ビームロスモニタ

10.1.1. 検出器の構成

光ファイバ型ビームロスモニタは，ビーム損失にともなって発生した電磁シャワー（2.3.2 節）の電子・陽電子が光ファイバに当たって生じるチェレンコフ光（2.4.2 節）を検出するモニタである。その概略図を Fig. 68 に示す。発生したチェレンコフ光は光ファイバを伝搬し，端に取り付けられた光電子増倍管にて検出される。光電子増倍管の信号は高速に波形を取得できる AD 変換器でその強度と時間を記録する。検出された信号の強度からビーム損失の量がわかり，時間から損失の起こった場所がわかる仕組みになっている。

　SACLA ではこの光ファイバ型ビームロスモニタをアンジュレータ区間に使用してビーム損失を監視している [28]。使用している光ファイバは，材質が石英で，コア径が 400 μm と大きいファイバを使用し，十分なチェレンコフ光の強度が得られるようにしている。この光ファイバをアンジュレータの真空チャンバに沿って敷設している。光ファイバの端の光電子増倍管で検出された信号は，2 GSPS の高速 AD 変換ボードで記録され，チェレンコフ光の強度と到達時刻がわかるようになっている。

10.1.2. 測定データ

SACLA の光ファイバ型ビームロスモニタのデータの例を Fig. 69 に示す。横軸は信号の時間情報から得られた損失の場所を示しており，このデータでは 1 台目のアンジュレータ付近でビーム損失

があることがわかる。そして，場所ごとの損失の量がピークの高さでわかるようになっている。このロスモニタは 0.5 pC 以下のわずかなビーム損失にも感度があることが実験的に確かめられている。

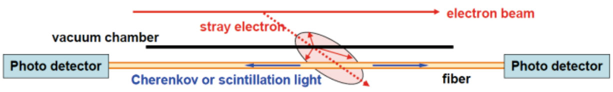

Fig. 68: 光ファイバ型ビームロスモニタの概略図。

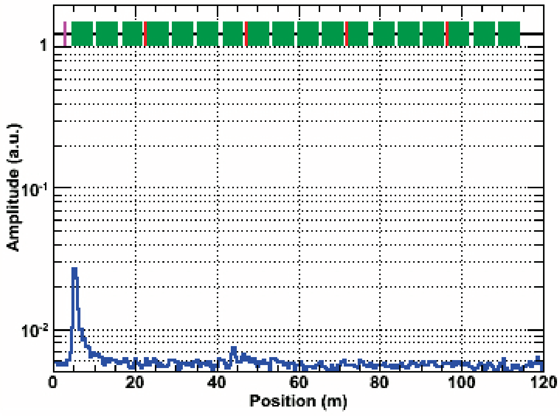

Fig. 69: ビームの進行方向位置に対するビームロスの強度のプロット。上部の■がアンジュレータの位置を表している。

10.2. ダイヤモンド ハローモニタ

10.2.1. 検出器の構成

ダイヤモンド ハローモニタは，電子ビームがダイヤモンド板を通過した際に生じる電子・ホールペア（2.5.2 節）を電極で検出することによって，当たった電子の量を測定する検出器である。この概略図を Fig. 70 に示す。ダイヤモンド板を一対の電極で挟み，そこに電圧をかけておく。このとき，電子ビームが当たって生成した電子・ホールが電極に引き寄せられて信号として出力される。標的にダイヤモンドを使う理由としては，耐放射線性に優れていること，絶縁耐圧が大きいこと，熱に強いこと，などが挙げられる。

SACLA では，アンジュレータビームラインのすぐ上流にこのダイヤモンド ハローモニタを設置し，アンジュレータの永久磁石に損傷を与えるようなビームハローがないかどうか監視している [29]。検出器部分は，厚さ 0.3 mm の人工ダイヤモンド板にアルミニウム電極を蒸着した構造となっている。この電極に 100 V のバイアス電圧をかけて電子・ホールを検出している。この電圧では電離箱領域よりやや低い領域の電圧であるが，電源が安定していれば出力信号も安定となるのでとくに問題にならない。また，電圧が低いほうが放電の心配もなくなる。

SACLA のダイヤモンド ハローモニタにはこのダイヤモンド検出器を 2 個使用しており，Fig. 71 に示すように，ステッピングモータによるアクチュエータでビーム軸付近に上下から挿入できるようになっている。通常はこの開口幅をアンジュレータのギャップと同じ間隔にしてビームハローを監視している。また，ダイヤモンド検出器を裸のままでビームに近づけると，電子ビームに付随する電磁場による航跡場の影響を受けてビームハローの信号よりも大きなノイズが発生する。そこで，RF コンタクトで覆うことで航跡場の影響を低減している。

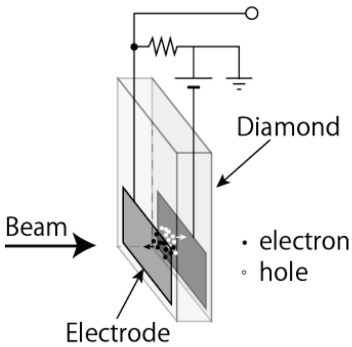

Fig. 70: ハローモニタの概略図。

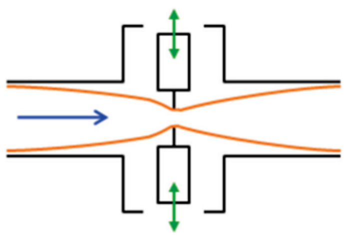

Fig. 71: SACLA のハローモニタの構成と RF コンタクトの概略図。

10.2.2. 測定データ

SACLA での測定データの一例として，ダイヤモンド検出器をビームに近づけたときの距離と検出電荷量の関係を Fig. 72 に示す。縦軸はダイヤモンド検出器からの電荷量であるが，実際のビームハローの量はその約 100 分の 1 であることが実験的に確かめられている。このデータによると，ビーム中心から 0.2 mm 以上離れた位置に存在するハローの量は約 0.1 pC で，1 mm 以上離れれば検出限界の 0.3 fC 以下となっている。アンジュレータのギャップは 3.5 mm（ビーム中心から 1.75 mm）以上で運転しているので，ビームハローが当たる心配はないと考えられる。

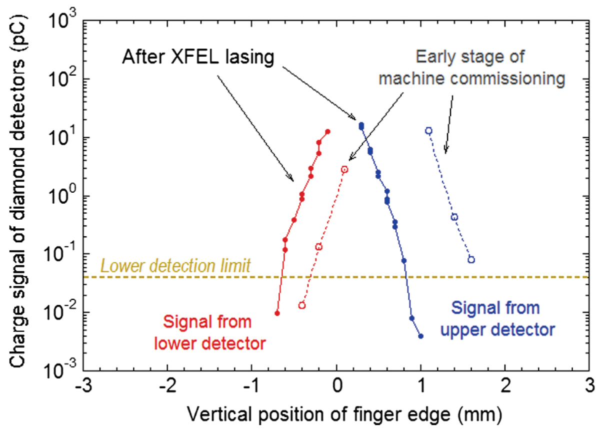

Fig. 72: ハローモニタで測定したビームハローの量。

11. データ収集

SACLA のビーム診断機器の各種データは SPring-8 の制御システム MADOCA (Message And Database-Oriented Control Architecture) [30] を使って収集されている。また，RF-BPM，CT モニタ，スクリーンモニタのデータはショットごとにタグをつけてデータ間の同期がとれるようになっている [31]。これらの制御・データ収集システムについて簡単に述べる。

11.1. MADOCA の概要

MADOCA とはもともと SPring-8 蓄積リングの制御のために独自に開発された制御フレームワークである。MADOCA は，Fig. 73 の概略図に示すように，制御室の制御端末，加速器各所に分散された VME システム，データ保存用のデータベースシステムの大きく分けて 3 つのシステムからなる，クライアント・サーバ型の分散制御アーキテクチャとなっている。たとえば，制御端末の GUI ソフトウェアからの命令は，制御端末上の Message Server, Access Server を経由して VME 上の Equipment Manager (EM) に送られ，VME システム内の各種ボードを制御したり，ボードからデータを収集したりできるようになっている。また，VME システム上には Poller というプロセスが動いており，各種データを定期的に収集して，上位のデータベースに保存されるようになっている。このデータは制御端末からも閲覧でき，さまざまなデータの時間変動や相関関係などを調べられるようになっている。

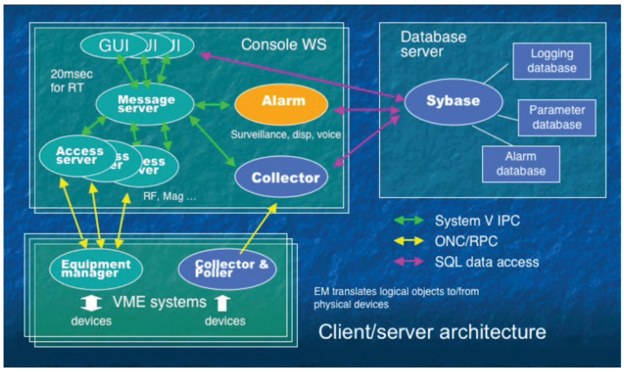

Fig. 73: MADOCA の概略図。

11.2. 同期データ収集

SACLA のような線型加速器ではショットごとにビームの初期条件が異なるので，各種ビーム診断データを比較する際にショットが同じデータでなければ比較する意味がない場合が多い。たとえば，4.4.4 節に述べた RF-BPM の位置分解能測定では，ショットが異なると初期条件が大きく変わるので，データに同期がとれていないと適切な解析ができない。そこで，SACLA ではショットごとのデータの同期をとった上で収集するシステムを導入している。このシステムを利用して，

RF-BPM と CT のデータは全ショット収集している。スクリーンモニタについては全ショットではないが，同期用のタグをつけて他のデータとの同期がとれるようになっている。

同期データ収集システムの概略図を Fig. 74 に示す。同期データ収集をする VME システムには，トリガモジュールなどのボードでビームのマスタトリガ信号をカウントできるようにしており，さらに，トリガが来たときに割り込みがかけられるようになっている。マスタトリガ信号のカウンタはあらかじめネットワーク経由ですべての VME システムにわたって同期がとられている。マスタトリガ信号が来ると VME システムに割り込みがかかり，同期収集の対象となるデータが AD 変換ボードなどから収集される。収集されたデータは，マスタトリガのカウンタ値のタグとともに共有メモリネットワークにて上位計算機に送られる。この共有メモリネットワークは LAN とは独立の同期データ収集専用となっていてデータ転送に遅れが出ないようになっている。上位の計算機では同じタグのデータをまとめてデータベースに保存できるようになっている。このようにして，60 pps で全ショットのデータが収集可能なシステムに仕上がっている。

この同期データは，RF-BPM の分解能測定だけでなく，ビーム軌道補正フィードバックやエネルギーフィードバックなどの加速器安定化のプロセスにも使われており，SACLA の安定な運転に欠かせないものとなっている。

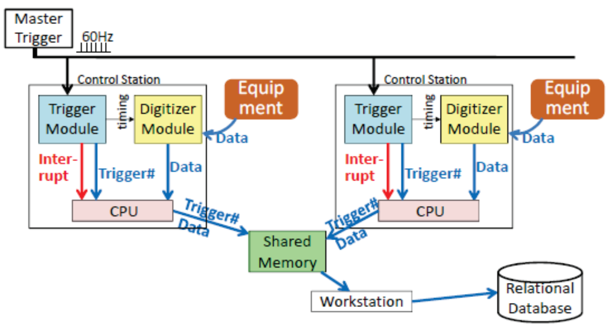

Fig. 74: 同期データ収集システムの概略図。

12. おわりに

X 線自由電子レーザ SACLA のような線型加速器にて高精度なビーム診断を行うための各種機器について，その測定原理や性能データを述べてきた。ここに述べたものは SACLA の要求に沿ってデザインされたもので，SACLA に適したものとはなっているが，世界一の性能を持っているとは限らないし，他の加速器に適しているかどうかはわからない。電子ビームと検出器との間にはさまざまな相互作用があり，測定したいパラメータによって利用する相互作用が異なるし，同じパラメータを測定するにしても違う相互作用を使うことで，精度の違いが出たり，C-OTR のような致命的な症状が出たり，別の長所・短所があったりする。また，同じ測定原理であっても，測定したいパラメータ領域に合わせて検出器を適切にデザインすることで全く性能の異なってくることもある。他の加速器のためのビーム診断機器をデザインしたりする場合に，ここに述べたビームと検出器との相互作用や，各種機器の測定原理や測定データが参考になれば幸いである。

謝辞

SACLA のビーム診断機器について，このような講義資料を作成する機会を与えていただいた古屋貴章教授をはじめ，高エネルギー加速器セミナーに関係する方々に厚く感謝いたします。ここに述べたことは，大竹雄次チームリーダ，新竹積 前主任研究員をはじめ，SACLA 加速器の各種スタッフの方々のご指導，ご協力のもとに開発・製作してきたものです。そして，SCSS 試験加速器の立ち上げから SACLA の供用にいたるまでの間，多岐にわたる貴重な経験をさせていただき，その経験が本テキストの執筆に非常に役に立ちました。この場を借りて深く御礼申し上げます。

13. 付録１：電子ビームに付随する電磁場

電子ビームに付随する電磁場について簡単にまとめる。電磁場のローレンツ変換，ローレンツ収縮について述べたあと，電荷に付随する電磁場について自由空間と完全導体円筒内の２つの場合について考える。

13.1. ローレンツ変換

まず，４元座標 x^α を以下のように導入する。

$$x^\alpha = (ct, x, y, z) \tag{13-1}$$

ある慣性系 S での任意の点 P の座標を x^α，S から見て z 方向に速度 βc で平行移動する慣性系を S′ とし，S'で見た P の座標をx'^αとする。そして，両慣性系の原点が $x^0 = x'^0 = 0$ のときに一致すると仮定する。このとき，各慣性系で見た点 P の座標は，

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^3) \\ x'^1 &= x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= \gamma(x^3 - \beta x^0) \end{aligned} \tag{13-2}$$

という関係になる。ここに，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{13-3}$$

である。逆変換は，

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma\left(x'^0 + \beta x'^3\right) \\ x^1 &= x'^1 \\ x^2 &= x'^2 \\ x^3 &= \gamma\left(x'^3 + \beta x'^0\right) \end{aligned} \tag{13-4}$$

である。

次に，ある座標変換

$$x'^\alpha = \xi'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{13-5}$$

を考える。この変換で，スカラー，ベクトル，テンソルがどのように変換されるかをまとめておく。スカラー Φ は，

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \tag{13-6}$$

となり，座標変換で値が変わらない。ベクトルについては，反変ベクトル A^α と共変ベクトル A_α の２つの変換性があり，それぞれ，添字の上付き，下付きで区別する。これらの変換性は，それぞれ，

$$A'^\alpha(x') = \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) \tag{13-7}$$

$$A'_\alpha(x') = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\alpha} A_\beta(x) \tag{13-8}$$

となる。この式では縮約記法を用いており，重複する記号については以下のように和を取るものとし，記号Σは省略する。

$$\sum_{\beta=0}^{4} \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) \longrightarrow \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) \tag{13-9}$$

テンソルについても反変テンソルと共変テンソルがあり，たとえば，２階テンソルの場合，それぞれ，

$$F'^{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial \xi'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \xi'^\beta}{\partial x^\delta} F^{\gamma\delta}(\mathrm{x}) \tag{13-10}$$

$$F'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial \xi^\delta}{\partial x'^\beta} F_{\gamma\delta}(x) \tag{13-11}$$

のように変換する。ベクトルやテンソルの添字は，計量テンソル

$$g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{13-12}$$

を用いて，

$$A^\alpha = g^{\alpha\beta} A_\beta \tag{13-13}$$

$$F_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} F^{\gamma\delta} \tag{13-14}$$

のように上げ下げすることができる。

13.2. ４元ポテンシャルとマクスウェル方程式

電磁場$\mathbf{E}, \mathbf{B}$はスカラーポテンシャルΦとベクトルポテンシャル$\mathbf{A}$を用いて以下のように書ける。

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{13-15}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{13-16}$$

ここで，４元ポテンシャルを，

$$A^\alpha = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathbf{A}\right) \tag{13-17}$$

と定義する。そして，電磁場テンソルを，

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \tag{13-18}$$

と定義する。ここに，

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{13-19}$$

と表記している。$F_{\alpha\beta}$を行列表示すると，

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{13-20}$$

となる。このとき，マクスウェル方程式は，

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{13-21}$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta \tag{13-22}$$

と書くことができる。ここに，$J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J})$ で，4元電流密度である。

次に，ローレンツ変換と電磁場の変換性を調べるため，例として，前節の慣性系S，S′間の変換(z方向への速度 βc でのブースト)を考える。2階テンソルの変換性から，

$$\begin{aligned} E'_x &= \gamma\left(E_x - \beta c B_y\right) \\ E'_y &= \gamma\left(E_y + \beta c B_x\right) \\ E'_z &= E_z \end{aligned} \tag{13-23}$$

$$\begin{aligned} B'_x &= \gamma(B_x + \beta E_y/c) \\ B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x/c) \\ B'_z &= B_z \end{aligned} \tag{13-24}$$

となる。このことから，ブースト方向に対して横方向の電磁場が γ 倍となることがわかる。また，横方向電磁場がブーストによって混ざりあうことがわかる。

最後に，電磁場の変換性を円柱座標でも表しておく。直交座標 (x, y, z) と円柱座標 (ρ, ϕ, z) の電磁場の関係は，

$$\begin{aligned} E_x &= E_\rho \cos\phi - E_\phi \sin\phi \\ E_y &= E_\rho \sin\phi + E_\phi \cos\phi \\ E_z &= E_z \end{aligned} \tag{13-25}$$

$$\begin{aligned} B_x &= B_\rho \cos\phi - B_\phi \sin\phi \\ B_y &= B_\rho \sin\phi + B_\phi \cos\phi \\ B_z &= B_z \end{aligned} \tag{13-26}$$

である。これを使って（13-23）と（13-24）を書き換えると，

$$\begin{aligned} E'_\rho &= \gamma\left(E_\rho - \beta c B_\phi\right) \\ E'_\phi &= \gamma\left(E_\phi + \beta c B_\rho\right) \\ E'_z &= E_z \end{aligned} \tag{13-27}$$

$$\begin{aligned} B'_\rho &= \gamma\left(B_\rho + \beta E_\phi/c\right) \\ B'_\phi &= \gamma\left(B_\phi - \beta E_\rho/c\right) \\ B'_z &= B_z \end{aligned} \tag{13-28}$$

となる。

13.3. 点電荷に付随する電磁場

等速で運動する点電荷に付随する電磁場について，自由空間に置かれた場合と完全導体の円筒内に置かれた場合についてまとめる。円筒内の電磁場については，簡単のため，無限に長い線電荷のつくる電場から始めて，その次に点電荷の場合を考えることとする。

13.3.1. 自由空間の電子に付随する電磁場

慣性系 S の原点に静止した電荷 q の点電荷が作る静電ポテンシャルは，円柱座標を使って

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\rho^2 + z^2}} \tag{13-29}$$

と書ける。したがって，電場は，

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \tag{13-30}$$

となる。これを z 方向に速度 βc で移動する慣性系 S′ から見る場合を考えると，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} \gamma\rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0\left[\rho'^2 + \gamma^2(z' + \beta c t')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} \rho' \\ 0 \\ z' + \beta c t' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13-31}$$

$$
\mathbf{B}' = \frac{-\beta\gamma q\rho}{4\pi\epsilon_0 c(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{-\beta\gamma c\mu_0 q\rho'}{4\pi\left[\rho'^2+\gamma^2(z'+\beta ct')^2\right]^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{13-32}
$$

が得られる。（$\mathbf{B}'$ の式で $c^2\epsilon_0\mu_0 = 1$ の関係を使った。）静止している電荷のまわりに磁場はないが，ブーストすると ϕ 方向の磁場が出現することがわかる。そして，この電磁場を S' の（$\rho' = a,\ z' = 0$）に静止した観測者（a は定数）が感じるとき，

$$
E_\rho(a,\phi,0) = \frac{\gamma q a}{4\pi\epsilon_0[a^2+(\beta\gamma ct')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{13-33}
$$

$$
B_\phi(a,\phi,0) = \frac{\beta\gamma c\mu_0 q a}{4\pi[a^2+(\beta\gamma ct')^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{13-34}
$$

となる。この式から，横方向電磁場が γ 倍になることがわかる。また，この観測者が十分に大きな電磁場を感じる時間 Δt は，

$$
\Delta t \approx \frac{a}{\beta\gamma c} \tag{13-35}
$$

で，距離に換算すると，

$$
\Delta z = \beta c \Delta t \approx \frac{a}{\gamma} \tag{13-36}
$$

となる。このことから，ローレンツ収縮により電磁場を感じる時間や，電磁場の進行方向への広がりが $1/\gamma$ に縮まっていることがわかる。この様子を図で表すと Fig. 75 のようなイメージになる。

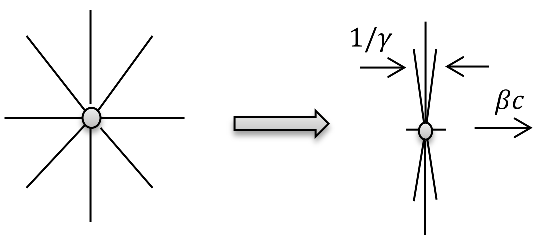

Fig. 75： 電磁場のローレンツ収縮。

13.3.2. 完全導体円筒内の線電荷に付随する電場

無限に長い線電荷が完全導体円筒内に置かれたときに生じる電場は鏡像法を用いて比較的簡単に求めることができる。詳細は文献[1]に書かれているので，ここでは結果だけ載せることとする。

半径 a の完全導体円筒の中に，線電荷密度 λ の無限に長い線電荷が（$\rho = b,\ \phi = 0$）に存在する場合を考える。このときの静電ポテンシャル Φ は，

$$
\Phi = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(b^2\rho^2 - 2b^3\rho\cos\phi + b^4) - \ln(b^2\rho^2 - 2a^2 b\rho\cos\phi + a^4)\right] \tag{13-37}
$$

となる。このとき，円筒表面での電荷 σ は，

$$
\sigma = \epsilon_0 \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = -\frac{\lambda}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab\cos\phi+b^2} \tag{13-38}
$$

となる。また，このときの電場は，

$$
\begin{aligned}
E_\rho &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{a^2-b^2}{\rho^2-2b\rho\cos\phi+b^2} \cdot\frac{(a^2+b^2)\rho - b(\rho^2+a^2)\cos\phi}{b^2\rho^2-2a^2b\rho\cos\phi+a^4} \\
E_\phi &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\cdot\frac{a^2-b^2}{\rho^2-2b\rho\cos\phi+b^2} \cdot\frac{b(a^2-\rho^2)\sin\phi}{b^2\rho^2-2a^2b\rho\cos\phi+a^4} \\
E_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{13-39}
$$

と書ける。また，フーリエ級数の公式

$$
1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2} \tag{13-40}
$$

を使うと，(13-38) は

$$
\sigma = -\frac{\lambda}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n \cos n\phi\right] \tag{13-41}
$$

と書きなおすこともできる。

13.3.3. 完全導体円筒内の点電荷に付随する電磁場

円筒内の点電荷の問題はかなり複雑となるので，原点に点電荷がある場合について導出し，原点から離れた場合は結果だけ載せることとする。詳細は文献[32]を参照するとよい。

半径 a の完全導体円筒の原点に点電荷 q がある場合を考える。導体上の静電ポテンシャルは 0 とする。円筒内の静電ポテンシャル Φ は，点電荷によるもの Φ_0 と導体表面に引き寄せられた電荷によるもの Φ_S の重ね合わせとなり，

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_S \tag{13-42}$$

$$\Phi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{\rho^2+z^2}} \tag{13-43}$$

と書き表すことができる。Φ_S についてはこの時点では詳しい関数形がわからないが，静電ポテンシャルの要請からラプラス方程式

$$\nabla^2\Phi_S = 0 \tag{13-44}$$

を満たさなければならない。これを変数分離して解くことを考える。系の対称性から Φ_S は ϕ によらないので，

$$\Phi_S = R(\rho)Z(z) \tag{13-45}$$

と書ける。これをラプラス方程式に代入して整理すると，

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial\rho} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \tag{13-46}$$

いかなる (ρ, z) に対しても上式は常に成り立つので，R の項と Z の項はそれぞれ定数となり，

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} - \lambda^2 R = 0 \tag{13-47}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda^2 Z = 0 \tag{13-48}$$

とすることができる（λ は定数)。第 1 式は変形されたベッセル微分方程式で，その解は

$$R = AI_0(\lambda\rho) + BK_0(\lambda\rho) \tag{13-49}$$

である。ここに，A, B は定数で，I_0, K_0 はそれぞれ，第 1 種，第 2 種の 0 次変形ベッセル関数である。ここで，Φ_S は原点で有限の値となるので，原点で発散する K_0 の寄与が無くなり，$B = 0$ となる。次に，Z については解が三角関数になることは明らかである。また Φ_S は z に関して偶関数になるべきなので，sin の項が消えて cos だけが残り，

$$Z = C\cos\lambda z \tag{13-50}$$

となる。したがって，

$$\Phi_S = ACI_0(\lambda\rho)\cos\lambda z \tag{13-51}$$

となることがわかる。いま，λ は任意の定数なので，実際の Φ_S の係数は λ に依存し，その係数を $f(\lambda)$ と表すと，

$$\Phi_S = \int_0^\infty f(\lambda)I_0(\lambda\rho)\cos\lambda z\, d\lambda \tag{13-52}$$

のように積分形で書くのが正しい。

さて，Φ_0 は，変形ベッセル関数の公式

$$\int_0^\infty K_0(ax)\cos bx\, dx = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{13-53}$$

を使って，

$$\Phi_0 = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0}\int_0^\infty K_0(\lambda\rho)\cos\lambda z\, d\lambda \tag{13-54}$$

と書きかえることができる。したがって，Φ は，

$$\Phi = \int_0^\infty \left[\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0}K_0(\lambda\rho) + f(\lambda)I_0(\lambda\rho)\right]\cos\lambda z\, d\lambda \tag{13-55}$$

となる。いま，$\rho = a$ において $\Phi = 0$ なので，

$$\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0}K_0(\lambda a) + f(\lambda)I_0(\lambda a) = 0 \tag{13-56}$$

でなければならない。よって，$f(\lambda)$ は

$$f(\lambda) = -\frac{q}{2\pi^2\epsilon_0}\frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} \tag{13-57}$$

と求まった。改めて（13-55）を書き直すと，

$$\Phi = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0}\int_0^\infty \left[K_0(\lambda\rho) - \frac{K_0(\lambda a)I_0(\lambda\rho)}{I_0(\lambda a)}\right]\cos\lambda z\, d\lambda \tag{13-58}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} - \int_0^\infty \frac{2K_0(\lambda a)I_0(\lambda\rho)}{\pi I_0(\lambda a)}\cos\lambda z\, d\lambda\right] \tag{13-59}$$

となる。このとき，円筒表面での電荷密度 σ は，

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=a}$$
$$= -\frac{q}{2\pi^2}\int_0^\infty \left[\lambda K_1(\lambda a) + \frac{\lambda K_0(\lambda a) I_1(\lambda a)}{I_0(\lambda a)}\right] \cos\lambda z \, d\lambda \tag{13-60}$$

のようになる。ここで，変形ベッセル関数の微分公式

$$I_0'(x) = I_1(x) \tag{13-61}$$
$$K_0'(x) = -K_1(x) \tag{13-62}$$

を使った。さらに，変形ベッセル関数の公式

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x} \tag{13-63}$$

を使うと，

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{q}{2\pi^2 a}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda z}{I_0(\lambda a)} d\lambda \\ &= -\frac{q}{2\pi^2 a^2}\int_0^\infty \frac{\cos\frac{tz}{a}}{I_0(t)} dt\end{aligned} \tag{13-64}$$

と変形できる。この積分は留数定理を用いて計算することができる。まず，下の積分を考える。

$$I_T \equiv \frac{1}{2\pi j}\oint_D \frac{e^{\frac{jzt}{a}}}{I_0(t)} dt \tag{13-65}$$

ここに, t は複素数で, 積分経路 D は, 定数 T を用いて，実軸上を $-T$ から T に向かって進み，そこから半径 T の半円を描いて一周するものとする。$T \to \infty$ のとき，半円部分の積分は指数関数で抑えられて 0 となるので，

$$\begin{aligned}I \equiv \lim_{T\to\infty} I_T &= \frac{1}{2\pi j}\lim_{T\to\infty}\oint_D \frac{e^{\frac{jzt}{a}}}{I_0(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\frac{jzt}{a}}}{I_0(t)} dt\end{aligned} \tag{13-66}$$

となる。この I は，(13-64) に出てきた積分の値の πj 倍となる。このことは，三角関数やベッセル関数の性質を考えれば容易にわかる。ここで，変形ベッセル関数の公式

$$I_0(jx) = J_0(x) \tag{13-67}$$

を考えると，(13-66) の非積分関数の極は，

$$t = j\kappa_1, j\kappa_2, \cdots \tag{13-68}$$

に存在する。ここに，ベッセル関数 $J_0(x)$ が 0 になるときの x （これを零点という）を小さいものから順に並べたものを $\kappa_1, \kappa_2, \cdots$ とした。したがって，留数定理から，

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\frac{jzt}{a}}}{I_0(t)} dt = \sum_{n=1}^\infty \operatorname*{Res}_{t\to j\kappa_n} \frac{e^{\frac{jzt}{a}}}{I_0(t)} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-\frac{\kappa_n z}{a}}}{I'_0(j\kappa_n)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-\frac{\kappa_n z}{a}}}{jJ_1(\kappa_n)}\end{aligned} \tag{13-69}$$

となる。ここで，変形ベッセル関数の公式

$$I_0'(jx) = jJ_1(x) \qquad (x \text{ は実数}) \tag{13-70}$$

を使った。したがって，円筒表面の電荷密度は，

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{q}{2\pi^2 a^2}\cdot \pi j I \\ &= -\frac{q}{2\pi a^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-\frac{\kappa_n z}{a}}}{J_1(\kappa_n)} \quad (z \geq 0)\end{aligned} \tag{13-71}$$

と求まった。このように，円筒表面の電荷密度は初等関数では表せず，無限級数の形となる。これをプロットすると，Fig. 76 のようになる。電荷の 70%程度が入る範囲はおよそ $|z|/a < 0.66$ である。電荷が z 軸方向に相対論的な速度で等速運動している場合は，この幅は $1/\gamma$ に縮まる。

　次に，円筒内の電場分布を求める。(13-59) を ρ と z で微分すると，

$$\begin{aligned}E_\rho = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Bigg[&\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &+ \int_0^\infty \frac{2\lambda K_0(\lambda a) I_1(\lambda\rho)}{\pi I_0(\lambda a)} \cos\lambda z \, d\lambda\Bigg]\end{aligned} \tag{13-72}$$

$$\begin{aligned}E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Bigg[&\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \int_0^\infty \frac{2\lambda K_0(\lambda a) I_0(\lambda\rho)}{\pi I_0(\lambda a)} \sin\lambda z \, d\lambda\Bigg]\end{aligned} \tag{13-73}$$

となる。また，これらの式は部分積分や留数定理を用いることによって変形でき，

$$E_\rho = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\kappa_n\rho}{a}\right)}{J_1^2(k_n)}e^{-\frac{\kappa_n z}{a}} \tag{13-74}$$

$$E_z = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\kappa_n\rho}{a}\right)}{J_1^2(\kappa_n)}e^{-\frac{\kappa_n z}{a}} \tag{13-75}$$

と書き表すこともできる。

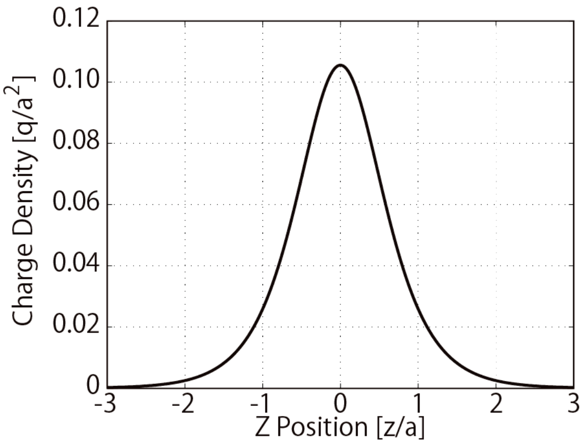

Fig. 76: 円筒内の点電荷が内面に誘起する電荷の分布。

最後に，点電荷 q が原点ではなく $\rho = b$，$\phi = 0$，$z = 0$ にある場合の静電ポテンシャルと表面電荷分布について，結果だけ載せておく。

$$\Phi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m\phi \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m\left(\frac{\kappa_{m,n}b}{a}\right)J_m\left(\frac{\kappa_{m,n}\rho}{a}\right)}{\kappa_{m,n}Y_{m+1}^2(\kappa_{m,n})}e^{-\frac{\kappa_{m,n}|z|}{a}} \tag{13-76}$$

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi a^2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m\phi \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m\left(\frac{\kappa_{m,n}b}{a}\right)}{J_{m+1}(\kappa_{m,n})}e^{-\frac{\kappa_{m,n}|z|}{a}} \tag{13-77}$$

ここに，

$$\varepsilon_m \equiv \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m>0) \end{cases} \tag{13-78}$$

で，$\kappa_{m,n}$ は m 次ベッセル関数の n 番目の零点である。ここで，表面電荷分布（13-77）を z で積分すると，

$$\sigma_\phi \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\sigma\, dz = -\frac{q}{\pi a}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos m\phi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m\left(\frac{\kappa_{m,n}b}{a}\right)}{\kappa_{m,n}J_{m+1}(\kappa_{m,n})} \tag{13-79}$$

となる。この式の n に関する無限和は，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m(\kappa_{m,n}x)}{\kappa_{m,n}J_{m+1}(\kappa_{m,n})} = \frac{x^m}{2} \tag{13-80}$$

となる（数値計算による [1]）。したがって，

$$\sigma_\phi = -\frac{q}{2\pi a}\left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^m\cos m\phi\right] \tag{13-81}$$

が得られ，無限に長い線電荷の場合（13-41）と一致することがわかる。

14. 付録 2 : RF 空胴の一般論と電子ビームが RF 空胴に誘起する電磁場

RF 共振空胴の一般論としてモードや Q 値などについて述べたあと，ピルボックス空胴を例に実際の共振モードの電磁場と共振周波数を求める。最後に，空胴に電荷が通過した際に誘起する電磁場を求める。

14.1. RF 空胴のモードと電磁場の方程式

14.1.1. RF 空胴内の電磁場のモード

3 次元空間内にある連結した閉空間 V があるとする。この空間 V にて共振する電磁場のモード $\mathbf{E}_a, \mathbf{B}_a$ を考える [33]。この $\mathbf{E}_a, \mathbf{B}_a$ 自体は時間に依存せず, かつ, divergence が 0 であるものとし, rotation が以下の関係を満たすものとする。

$$\nabla\times\mathbf{E}_a = k_a\mathbf{B}_a \tag{14-1}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}_a = k_a\mathbf{E}_a \tag{14-2}$$

[1] 筆者はこれを解析的に証明する文献を見つけられなかった。心当たりのある読者は筆者まで連絡いただけるとありがたい。

この式は，ベクトル微分の公式

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \tag{14-3}$$

を使って

$$\nabla^2\mathbf{E}_a+k_a^2\mathbf{E}_a=0 \tag{14-4}$$

$$\nabla^2\mathbf{B}_a+k_a^2\mathbf{B}_a=0 \tag{14-5}$$

と書きなおすことができる。そして，V の表面 S,S' において以下の境界条件を満たすとする。

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_a=0 \ \text{ and } \ \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_a=0 \ \text{ on S} \tag{14-6}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_a=0 \ \text{ and } \ \mathbf{n}\times\mathbf{B}_a=0 \ \text{ on S}' \tag{14-7}$$

ここで，$\mathbf{n}$ は表面の法線ベクトルである。また，

$$\int_V \mathbf{E}_a^2 dv=1 \tag{14-8}$$

$$\int_V \mathbf{B}_a^2 dv=1 \tag{14-9}$$

と規格化されているものとする。このモードで励起された電磁場は，

$$\mathbf{E}=f_a(t)\mathbf{E}_a \tag{14-10}$$

$$\mathbf{B}=g_a(t)\mathbf{B}_a \tag{14-11}$$

と書くことができる。この $f_a(t)$, $g_a(t)$ は，(14-8), (14-9) を使って，

$$f_a(t)=\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_a dv \tag{14-12}$$

$$g_a(t)=\int_V \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_a dv \tag{14-13}$$

と求められるものである。

14.1.2. 電磁場の rotation の準備

次節にて（14-10）と（14-11）をマクスウェル方程式に代入するわけであるが，その前に，$\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ の rotation についての準備をしておく。$\nabla\times\mathbf{E}$ は単純に，

$$\nabla\times\mathbf{E}=f_a\nabla\times\mathbf{E}_a=k_af_a\mathbf{B}_a \tag{14-14}$$

としても間違いではないが，あとあとのために別の表記をしておく。まず，

$$\nabla\times\mathbf{E}=F_a\mathbf{B}_a \tag{14-15}$$

とおくと，

$$F_a=\int_V(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}_a dv \tag{14-16}$$

とできることがわかる。この式を，以下の関係式

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot[\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E}_a)]\\ &=(\nabla\times\mathbf{E})\cdot(\nabla\times\mathbf{E}_a)-\mathbf{E}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_a)\\ &=k_a\mathbf{B}_a\cdot(\nabla\times\mathbf{E})-k_a^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_a\end{aligned} \tag{14-17}$$

を使って変形すると，

$$\begin{aligned}F_a&=k_a\int_V\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_a dv+\int_V\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}_a)dv\\ &=k_af_a+\int_{S,S'}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}_a)d\sigma\\ &=k_af_a+\int_S(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}_a d\sigma\end{aligned} \tag{14-18}$$

となる。変形の途中で，ガウスの発散定理，ベクトル積の公式

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{14-19}$$

および，(14-7) を使った。このように，(14-18) 右辺第 2 項の表面積分を導くことができる。この表面積分は，$\mathbf{E}$ が（14-6）の境界条件を満たしていれば 0 であるが，有限の電気伝導率を持つ表面や空胴の入出力ポートを考えるときに境界条件を満たさない成分が出てくるので，そのような計算の際に重要となる。$\nabla\times\mathbf{B}$ についても同様に，

$$\nabla\times\mathbf{B}=G_a\mathbf{E}_a \tag{14-20}$$

とおくと，

$$G_a=k_ag_a+\int_{S'}(\mathbf{n}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{E}_a d\sigma \tag{14-21}$$

となる。

14.1.3. 電磁場の方程式

ここまでで示した RF 空胴の電磁場をマクスウェル方程式に代入して電磁場の方程式を導く。(14-10) をマクスウェル方程式

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \tag{14-22}$$

に代入して整理すると，

$$k_af_a\mathbf{B}_a+\mathbf{B}_a\int_S(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}_a d\sigma+\dot{g}_a\mathbf{B}_a=0 \tag{14-23}$$

となり，両辺に $\mathbf{B}_a$ との内積をとって V で積分すると，

$$k_a f_a + \int_S (\mathbf{n}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}_a d\sigma + \dot{g}_a = 0 \qquad (14\text{-}24)$$

が成り立つことがわかる。ここで，

$$\dot{g}_a = \frac{dg_a}{dt} \qquad (14\text{-}25)$$

とした。次に，(14-11) をマクスウェル方程式

$$\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbf{J} \qquad (14\text{-}26)$$

に代入すると，

$$k_a g_a \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_a\int_{S'} (\mathbf{n}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{E}_a d\sigma + \frac{\dot{f}_a}{c^2}\mathbf{E}_a = \mu_0\mathbf{J} \qquad (14\text{-}27)$$

となり，両辺に $\mathbf{E}_a$ との内積をとって V で積分すると，

$$k_a g_a + \int_{S'} (\mathbf{n}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{E}_a d\sigma - \frac{\dot{f}_a}{c^2} = \mu_0\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_a dv \qquad (14\text{-}28)$$

が成り立つ。(14-24) と (14-28) を合わせると，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c^2}\ddot{f}_a + k_a^2 f_a\\ &= -\frac{d}{dt}\left[\mu_0\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_a dv - \int_{S'}(\mathbf{n}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{E}_a d\sigma\right]\\ &- \int_S (\mathbf{n}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}_a d\sigma\end{aligned} \qquad (14\text{-}29)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c^2}\ddot{g}_a + k_a^2 g_a\\ &= k_a\left[\mu_0\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_a dv - \int_{S'}(\mathbf{n}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{E}_a d\sigma\right]\\ &- \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_S (\mathbf{n}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B}_a d\sigma\end{aligned} \qquad (14\text{-}30)$$

となる。これが RF 空胴の電磁場の方程式である。これらは，単振動の方程式の右辺に励振や減衰のもととなる項がついた形となっている。

14.2. RF 空胴の Q 値

RF 空胴の Q 値の定義について簡単に述べたあと，内部 Q 値 Q_0，外部 Q 値 Q_{ext}，負荷 Q 値 Q_{L} についてまとめる。その後，ある初期条件で減衰振動する際に入出力ポートから出て行く RF パワーについて述べる。最後に，空胴壁面のジュール損失によって生じる Q 値について考える。

14.2.1. Q 値の定義

電磁場の方程式 (14-29), (14-30) は単振動の方程式であるし，本節では RF 電磁場を考えているので，各項の時間依存性は $e^{j\omega t}$ の形になることと考えてよい。そこで，

$$f_a = E_0 e^{j\omega t} \qquad (14\text{-}31)$$

とおき，時間の 1 階微分の項は天下り的に

$$\frac{k_a E_0}{jcQ} e^{j\omega t} \qquad (14\text{-}32)$$

に従うものとする。このとき，(14-29) は，

$$\left(\omega^2 + \frac{k_a c}{Q}\omega + k_a^2 c^2\right)E_0 e^{j\omega t} = 0 \qquad (14\text{-}33)$$

となる。これを満たす ω は，

$$\begin{aligned}\omega &= \pm k_a c\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} + j\frac{k_a c}{2Q}\\ &= \pm\omega_a\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} + j\frac{\omega_a}{2Q}\end{aligned} \qquad (14\text{-}34)$$

である。ここで，

$$\omega_a = k_a c \qquad (14\text{-}35)$$

とした。このことから，f_a は周波数 $\omega_a\sqrt{1-1/4Q^2}$ で振動しながら時定数 $\omega_a/2Q$ で減衰することがわかる。パワーで考えるときはこの 2 乗になるので，時定数は ω_a/Q となる。ここに出てきた Q が Q 値の定義である。Q 値の意味としては，何らかの損失によって RF 空胴内のパワーが減衰するとき，そのパワーが $1/e$ になるまでに振動の位相が Q ラジアン回ることができる，という解釈ができる。また，蓄積エネルギー U に ω_a をかけた値を単位時間あたりの損失エネルギー P で割ったものが Q 値である，という解釈もできる。すなわち，

$$Q = \frac{\omega_a U}{P} \qquad (14\text{-}36)$$

が成り立つ。

14.2.2. Q 値の種類

RF 空胴の損失のうち，表面でのジュール損失などによって空胴内で消費される損失パワーに関する Q 値を内部 Q 値と呼び，Q_0 と表す。また，RF 空胴に取り付けられた入出力ポートから出て行くパワーに関する Q 値を外部 Q 値と呼び，$Q_{\rm ext}$ と表す。また，RF 空胴の全損失パワーに関する Q 値を負荷 Q 値と呼び，$Q_{\rm L}$ と表す。1 ポート空胴の場合，これらの Q 値の間に

$$\frac{1}{Q_{\rm L}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\rm ext}} \tag{14-37}$$

が成り立つ。この式は，損失パワーが $1/Q$ に比例することから理解することができる。また，N ポート空胴では各ポートの外部 Q 値を $Q_{{\rm ext},n}$ とすると，

$$\frac{1}{Q_{\rm L}} = \frac{1}{Q_0} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{Q_{{\rm ext},n}} \tag{14-38}$$

となる。このように，Q 値の便利なところとして，損失の要因はいろいろあっても，空胴内の電磁場への影響はそれぞれの要因ごとの Q 値によって簡単に表現できたり，損失要因ごとの比較ができたりすることが挙げられる。なお，Q 値はモードごとにすべて値が異なるので，異なるモードを考えるときには注意が必要である。

14.2.3. 入出力ポートから出て行く RF パワー

入出力ポートから出て行く RF パワー $P_{\rm ext}$ は，Q 値の定義式（14-36）から，

$$P_{\rm ext} = \frac{\omega_a U}{Q_{\rm ext}} \tag{14-39}$$

である。初期条件として空胴にエネルギー U_0 が蓄積されている状態から減衰振動する場合，$P_{\rm ext}$ は，

$$P_{\rm ext}(t) = \frac{\omega_a U_0}{Q_{\rm ext}} e^{-\frac{\omega_a}{Q_L}t} \tag{14-40}$$

となる。この入出力ポートが特性インピーダンス Z_0 の伝送線路につながっている場合，得られる電圧 V は，

$$V(t) = \sqrt{Z_0 P_{\rm ext}(t)} = \sqrt{\frac{\omega_a U_0 Z_0}{Q_{\rm ext}}} e^{-\frac{\omega_a}{2Q_L}t} \tag{14-41}$$

のようになる。したがって，入出力ポートから取り出されるパワーのピークは，$t = 0$ として，

$$P_{\rm ext}(0) = \frac{\omega_a U_0}{Q_{\rm ext}} \tag{14-42}$$

となり，ピーク電圧は，

$$V(0) = \sqrt{\frac{\omega_a U_0 Z_0}{Q_{\rm ext}}} \tag{14-43}$$

と求まる。

14.2.4. 空胴内壁のジュール損失の例

RF 空胴が電気伝導率 σ の金属でできているとする。このとき，表面付近の電場は表面にほぼ垂直だがわずかに平行な成分ができるため，これがジュール損失を生じさせることとなる。本節ではまず，金属表面での電場の振る舞いを考え，ジュール損失に伴う Q 値を導く。

z 方向に進む $e^{j\omega t - kz}$ に比例した電磁波を考え，金属表面に垂直に照射されていることとする。金属では，オームの法則から，

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{14-44}$$

の電流が生じる。このとき，$e^{j\omega t - kz}$ に比例した RF 電磁場のマクスウェル方程式を考えると，

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + j\omega \mathbf{B} = 0 \tag{14-45}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - (\mu\sigma + j\omega\epsilon\mu)\mathbf{E} = 0 \tag{14-46}$$

が成り立つ。(14-3) を使ってこれらの式を合わせると，

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{B} + (\omega^2\epsilon\mu - j\omega\mu\sigma)\mathbf{B} = 0 \tag{14-47}$$

となる。このことから，

$$k = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\epsilon\mu} \tag{14-48}$$

となることがわかる。σ が十分に大きい場合，平方根内の第 2 項を無視して，

$$k \simeq \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \tag{14-49}$$

と近似できる。(14-45) より，

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} -B_y \\ B_x \end{pmatrix} \tag{14-50}$$

であるが，E_x, E_y は $e^{j\omega t - kz}$ に比例するため，

（14-50）の左辺は,

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix}=-k\begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix} \tag{14-51}$$

となる。したがって，金属表面に平行な電磁場には,

$$\begin{pmatrix}E_x\\E_y\end{pmatrix}=-\frac{j\omega}{k}\begin{pmatrix}-B_y\\B_x\end{pmatrix} \tag{14-52}$$

すなわち,

$$\mathbf{E}=-\frac{j\omega}{k}\mathbf{n}\times\mathbf{B}=(1+j)\sqrt{\frac{\omega}{2\mu\sigma}}\mathbf{B}\times\mathbf{n} \tag{14-53}$$

が成り立つ。これが金属表面に平行な電磁場の関係式である。

次に, RF 空胴内の電磁場を考えるため, (14-53) を（14-30）の S での面積分に代入する。(右辺の他の項は考えないので 0 とする。）すると,

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\ddot{g}_a+k_a^2g_a &\\ =-\frac{1+j}{c^2}\sqrt{\frac{\omega_a}{2\mu\sigma}}\frac{d}{dt}\int_S\left(\mathbf{n}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{n})\right)\cdot\mathbf{B}_a d\sigma &\\ =-\frac{1+j}{c^2}\sqrt{\frac{\omega_a}{2\mu\sigma}}\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_a d\sigma &\\ =-\frac{1+j}{c^2}\sqrt{\frac{\omega_a}{2\mu\sigma}}\dot{g}_a\int_S|\mathbf{B}_a|^2 d\sigma &\end{aligned} \tag{14-54}$$

となる。なお，この途中でベクトル積の公式

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \tag{14-55}$$

を使った。さらに変形すると,

$$\ddot{g}_a+(1+j)\sqrt{\frac{\omega_a}{2\mu\sigma}}\dot{g}_a\int_S|\mathbf{B}_a|^2d\sigma+\omega_a^2g_a=0 \tag{14-56}$$

となる。これを解いて複素周波数 ω を求めると, Q 値は,

$$\frac{1}{Q}=\frac{2\mathrm{Im}(\omega)}{\omega_a}\simeq\sqrt{\frac{1}{2\mu\sigma\omega_a}}\int_S|\mathbf{B}_a|^2d\sigma=\frac{\delta}{2}\int_S|\mathbf{B}_a|^2d\sigma \tag{14-57}$$

と求まる。ここに, δ は表皮深さ（skin depth）と呼ばれる量で,

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \tag{14-58}$$

である。ここで求めた Q 値は空胴自体が消費するパワーなので，内部 Q 値に相当するものである。

14.2.5. その他の損失要因

前節に述べたもの以外にも，空胴内の媒質による損失や，入出力ポートからの損失など様々なものが考えられる。ここでは詳しくは立ち入らないが，これらの要因による Q 値は（14-29),（14-30）の右辺を適宜考慮して方程式を解くと求めることができる。

14.3. ピルボックス空胴の共振モード

RF 空胴の実例として，金属製のピルボックス空胴（円筒空胴）をとりあげ,（14-4),（14-5）の方程式を（14-6）の境界条件のもとに解き，共振モードを求める。ピルボックスの半径を b，高さを L とする。高さ方向の境界は $z=0,L$ にあるものとする。

14.3.1. 電場の方程式と変数分離

円柱座標において（14-4）を書き下すと,

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}_a}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbf{E}_a}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\mathbf{E}_a}{\partial\phi}+\frac{\partial^2\mathbf{E}_a}{\partial z^2}+k_a^2\mathbf{E}_a=0 \tag{14-59}$$

となる。ここで $\mathbf{E}_a$ の各成分を

$$E_i=R_i(\rho)\Phi_i(\phi)Z_i(z)\quad i=\rho,\phi,z \tag{14-60}$$

と変数分離すると,

$$\frac{1}{R_i}\frac{\partial^2R_i}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho R_i}\frac{\partial R_i}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\Phi_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\phi^2}+\frac{1}{Z_i}\frac{\partial^2Z_i}{\partial z^2}+k_a^2=0 \tag{14-61}$$

となる。これが常に成り立つので、各変数の項は定数にならなければならない。そこで,

$$\frac{1}{\Phi_i}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\phi^2}=-n^2 \tag{14-62}$$

$$\frac{1}{Z_i}\frac{\partial^2Z_i}{\partial z^2}=-k_l^2 \tag{14-63}$$

とおくと,

$$\frac{1}{k_a^2-{k_l}^2}\frac{\partial^2 R_i}{\partial\rho^2}+\frac{1}{(k_a^2-{k_l}^2)\rho}\frac{\partial R_i}{\partial\rho} +\left(1-\frac{n^2}{\rho^2(k_a^2-{k_l}^2)}\right)R^i=0 \tag{14-64}$$

となる。さらに，

$$k^2=k_a^2-k_l^2 \tag{14-65}$$

とおくと，

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial(k\rho)^2}+\frac{1}{k\rho}\frac{\partial R_i}{\partial(k\rho)}+\left(1-\frac{n^2}{(k\rho)^2}\right)R_i=0 \tag{14-66}$$

となり，これはベッセルの微分方程式なので，この解はベッセル関数を使って，

$$R_i(\rho)=A_{i,n}J_n(k\rho) \tag{14-67}$$

と表すことができる。ここに，$A_{i,n}$ は定数である。なお，今回は原点にて有限の値をとる必要があるので，第 1 種ベッセル関数のみで表した。また，(14-62), (14-63) より，

$$\Phi_i(\phi)=C_{i,n}\cos n\phi+D_{i,n}\sin n\phi \tag{14-68}$$

$$Z_i(z)=F_{i,l}\cos k_l z+G_{i,l}\sin k_l z \tag{14-69}$$

となる。ここに，$C_{i,n}, D_{i,n}, F_{i,l}, G_{i,l}$ は定数である。Φ_i は 2π ごとの周期性がなければならないので，n は整数である。

14.3.2. 境界条件の適用

ここから，(14-6) の境界条件を使って各種定数を決定していく。まず，$\rho=b$ にて，$E_\phi=E_z=0$ なので，$J_n(kb)=0$ でなければならない。したがって，n 次ベッセル関数の m 番目の零点（$\rho>0$）を $\kappa_{n,m}$ とおくと，

$$k=\frac{\kappa_{n,m}}{b} \tag{14-70}$$

となる。次に，$z=0,L$ にて，$E_\rho=E_\phi=0$ なので，

$$F_{\rho,l}=F_{\phi,l}=0 \tag{14-71}$$

$$k_l=\frac{l\pi}{L} \tag{14-72}$$

となり，l は整数である。また，(14-65) より，

$$k_a^2=\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \tag{14-73}$$

の関係が得られる。

14.3.3. TM モードの解

ここで，E_z が有限の値をとる場合について考える。まず，$\mathbf{E}_a$ は divergence が 0 なので，

$$\nabla\cdot\mathbf{E}_a=\nabla_t\cdot\mathbf{E}_t+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \tag{14-74}$$

である。ここに，∇_t，$\mathbf{E}_t$ はそれぞれ ρ,ϕ に関するベクトル微分演算子と電場ベクトルである。この式の ∇_t に関する gradient をとると，

$$\nabla_t^2\mathbf{E}_t+\frac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z=0 \tag{14-75}$$

となる。これを $\mathbf{E}_t$ についての (14-4) に代入すると，

$$-\frac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z+\frac{\partial^2\mathbf{E}_t}{\partial z^2}+k_a^2\mathbf{E}_t=0 \tag{14-76}$$

が得られる。さらに，(14-63)，(14-65) を使うと，

$$\mathbf{E}_t=\frac{1}{k_a^2-k_l^2}\frac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial z}\nabla_t E_z \tag{14-77}$$

という E_z から $\mathbf{E}_t$ を求める式が得られた。いま，$\mathbf{E}_t$ の z 依存性は sin 的なので，(14-77) より E_z については cos にならなければならない。したがって，$G_{z,l}=0$ である。また，Φ_z については，z 軸のまわりの回転でどちらかの項を消すことができる。$n=0$ のときに有限の値を取れるよう，cos の項を残して，$D_{z,n}=0$ とする。すると，E_z の最終形として，

$$E_z=\alpha_{n,m,l}J_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\rho\right)\cos n\phi\cos\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-78}$$

が得られた（$\alpha_{n,m,l}$ は定数）。(14-77) から E_ρ, E_ϕ を求めると，

$$E_\rho=\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\rho\partial z} =-\frac{\alpha_{n,m,l}\frac{l\pi}{L}}{\frac{\kappa_{n,m}}{b}}J_n'\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\rho\right)\cos n\phi\sin\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-79}$$

$$E_\phi = \frac{1}{k^2\rho}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi\partial z} = \frac{\alpha_{n,m,l}\, n\frac{l\pi}{L}}{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2\rho} J_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\rho\right)\sin n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-80}$$

となる。次に，(14-1) から $\mathbf{B}_a$ を求めると，

$$B_\rho = \frac{1}{k_a}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right) = -\frac{\alpha_{n,m,l}\, n\sqrt{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2\rho} \times J_n\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\rho\right)\sin n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-81}$$

$$B_\phi = \frac{1}{k_a}\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right) = -\frac{\alpha_{n,m,l}\sqrt{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\frac{\kappa_{n,m}}{b}} \times J_n'\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\rho\right)\cos n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-82}$$

$$B_z = \frac{1}{k_a}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho E_\rho\right)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\phi}\right) = 0 \tag{14-83}$$

が得られる。このモードは z 方向の磁場成分がないので，Transverse Magnetic Mode とよばれ，$\mathrm{TM}_{n,m,l}$ モードと表記される。このモードの共振周波数は，(14-35)，(14-73) より，

$$f_{n,m,l} = \frac{k_a c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2} \tag{14-84}$$

となる。

14.3.4. TE モードの解

次に，$E_z = 0$ の場合について考えたくなるが，これまでの電場の方程式に $E_z = 0$ を適用するより磁場の方程式 (14-5) からスタートしたほうが解きやすいので，そうすることとする。手順としては，変数分離して各変数の一般解を求めるところまでは同じで，そのあとの境界条件が異なるだけである。まず，$z = 0, L$ にて，$B_z = 0$ なので，B_z の z 依存性は sin 的になる。また，ϕ 依存性については z 軸まわりの回転で sin 的か cos 的かを選べるので，TM モードのときと同様に cos の項を残すこととする。したがって，

$$B_z = \beta_{n,m,l}\, J_n(k'\rho)\cos n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-85}$$

の形になる（$\beta_{n,m,l}$ は定数)。そして，(14-77) と同様の関係が磁場についても成り立つことが容易に示されるので，それを使うと，

$$B_\rho = \frac{1}{k'^2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial\rho\partial z} = \frac{\beta_{n,m,l}\frac{l\pi}{L}}{k'} J_n'(k'\rho)\cos n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-86}$$

$$B_\phi = \frac{1}{k'^2\rho}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi\partial z} = -\frac{\beta_{n,m,l}\, n\frac{l\pi}{L}}{k'^2\rho} J_n(k'\rho)\sin n\phi \cos\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-87}$$

が得られる。ここで，境界条件 (14-6) より $\rho = b$ にて $B_\rho = 0$ なので，

$$J_n'(k'b) = 0 \tag{14-88}$$

である。$J_n'(\rho)$ の m 番目の零点を $\kappa_{n,m}'$ とおくと，

$$k' = \frac{\kappa_{n,m}'}{b} \tag{14-89}$$

となる。したがって，k_a は，

$$k_a^2 = \left(\frac{\kappa_{n,m}'}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 \tag{14-90}$$

となる。次に，(14-2) を使って電場を求めると，

$$E_\rho = \frac{1}{k_a}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_z}{\partial\phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z}\right) = -\frac{\beta_{n,m,l}\, n\sqrt{\left(\frac{\kappa_{n,m}'}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\left(\frac{\kappa_{n,m}'}{b}\right)^2\rho} \times J_n\left(\frac{\kappa_{n,m}'}{b}\rho\right)\sin n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \tag{14-91}$$

$$E_\phi = \frac{1}{k_a}\left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right)$$
$$= -\frac{\beta_{n,m,l}\sqrt{\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2}}{\frac{\kappa'_{n,m}}{b}} \times J'_n\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\rho\right)\cos n\phi \sin\left(\frac{l\pi}{L}z\right) \quad (14\text{-}92)$$

$$E_z = \frac{1}{k_a}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho B_\rho)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\rho}{\partial \phi}\right) = 0 \quad (14\text{-}93)$$

が得られる。このモードは z 方向の電場が 0 なので，Transverse Electric Mode とよばれ，$\mathrm{TE}_{n,m,l}$ モードと表記される。このモードの共振周波数は，(14-35)，(14-90) より，

$$f_{n,m,l} = \frac{k_a c}{2\pi} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2} \quad (14\text{-}94)$$

となる。

14.3.5. 規格化

最後に, TM, TE 各モードの規格化定数を求める。なお, 本節ではスペース節約のため, $\kappa_{n,m}/b$, $l\pi/L$ はそれぞれ，k, k_l と簡略化して表記する。
まず, TM モードの電場 (14-78), (14-79), (14-80) について考える。これは，(14-8) より，

$$1 = \int_V |\mathbf{E}_a|^2 dv = \int_0^b d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \int_0^L dz\left(E_\rho^2 + E_\phi^2 + E_z^2\right) \quad (14\text{-}95)$$

を満たさなければならない。この積分のうち，ϕ と z に関するものは簡単にできて，

$$\int_V |\mathbf{E}_a|^2 dv = \frac{\alpha_{n,m,l}^2 \pi L k_l^2}{\varepsilon_n k^2}\int_0^b \left\{\rho[J'_n(k\rho)]^2 + \left(\frac{n^2}{k^2\rho} + \frac{k^2}{k_l^2}\rho\right)[J_n(k\rho)]^2\right\} d\rho \quad (14\text{-}96)$$

となる。ここに，ε_n は (13-78) にて定義した値である。ここで,

$$\frac{d^2}{d\rho^2}[J_n(k\rho)]^2 = 2k^2\{[J'_n(k\rho)]^2 + J_n(k\rho)\,J''_n(k\rho)\} \quad (14\text{-}97)$$

を使って，$[J'_n(k\rho)]^2$ の項を消去し，さらにベッセル微分方程式 (14-66) を使って 2 階微分を消去すると，

$$\int_V |\mathbf{E}_a|^2 dv = \frac{\alpha_{n,m,l}^2 \pi L k_l^2}{\varepsilon_n k^2}\int_0^b \left\{\frac{\rho}{2k^2}\frac{d^2}{d\rho^2}[J_n(k\rho)]^2 + \frac{1}{k}J_n(k\rho)\,J'_n(k\rho) + \frac{k_l^2 + k^2}{k_l^2}\rho[J_n(k\rho)]^2\right\} d\rho \quad (14\text{-}98)$$

となる。ここで，被積分関数の第 1 項を部分積分すると，$J_n(kb) = 0$ より，

$$\int_0^b d\rho\left\{\frac{\rho}{2k^2}\frac{d^2}{d\rho^2}[J_n(k\rho)]^2\right\} = \left[\frac{\rho}{2k^2}\frac{d}{d\rho}[J_n(k\rho)]^2\right]_0^b - \int_0^b \frac{1}{2k^2}\frac{d}{d\rho}[J_n(k\rho)]^2 d\rho = -\int_0^b \frac{1}{k}J_n(k\rho)\,J'_n(k\rho) d\rho \quad (14\text{-}99)$$

となるので,

$$\int_V |\mathbf{E}_a|^2 dv = \frac{\alpha_{n,m,l}^2 \pi L (k^2 + k_l^2)}{\varepsilon_n k^2}\int_0^b \rho[J_n(k\rho)]^2 d\rho \quad (14\text{-}100)$$

が得られる。ここで，ベッセル関数の直交性の公式,

$$\int_0^b \rho J_n(k\rho)\,J_m(k\rho) d\rho = \delta_{nm}\frac{b^2}{2}\left[J'_n(\kappa_{n,m})\right]^2 \quad (14\text{-}101)$$

を使うと，規格化積分が

$$\int_V |\mathbf{E}_a|^2 dv = \frac{\alpha_{n,m,l}^2 \pi b^2 L (k^2 + k_l^2)\left[J'_n(\kappa_{n,m})\right]^2}{2\varepsilon_n k^2} \quad (14\text{-}102)$$

と求まる。なお, δ_{nm} はクロネッカーのデルタで,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (\mathrm{n} \neq \mathrm{m}) \end{cases} \quad (14\text{-}103)$$

である。したがって，規格化定数は,

$$
\alpha_{n,m,l} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_n k^2}{\pi b^2 L(k^2+k_l^2)\left[J_n'\left(\kappa_{n,m}\right)\right]^2}}
= \frac{\kappa_{n,m}}{b^2\left|J_n'\left(\kappa_{n,m}\right)\right|}\sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\pi L\left[\left(\frac{\kappa_{n,m}}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2\right]}} \qquad (14\text{-}104)
$$

となる。

次に，TM モードの磁場（14-81)，(14-82)，(14-83) について考える。(14-9) より，

$$
1 = \int_V |\mathbf{B}_a|^2 dv = \int_0^b d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\phi \int_0^L dz \left(B_\rho^2 + B_\phi^2\right) \qquad (14\text{-}105)
$$

となるので，ϕ と z の積分を行うと，

$$
\int_V |\mathbf{B}_a|^2 dv = \frac{\alpha_{n,m,l}^2 \pi L(k^2+k_l^2)}{\varepsilon_n k^2} \times \int_0^b \left\{\rho[J_n'(k\rho)]^2 + \frac{n^2}{k^2\rho}[J_n(k\rho)]^2\right\} d\rho \qquad (14\text{-}106)
$$

となる。電場の場合と同様に（14-66）と（14-97）を使って $[J_n'(k\rho)]^2$ を消去し，計算を進めると，

$$
\int_V |\mathbf{B}_a|^2 dv = \frac{\alpha_{n,m,l}^2 \pi L(k^2+k_l^2)}{\varepsilon_n k^2}\int_0^b \rho[J_n(k\rho)]^2 d\rho \qquad (14\text{-}107)
$$

となり，電場の場合と一致する。

その次に，TE モードの磁場（14-85)，(14-86)，(14-87) について考える。規格化積分の ϕ と z の積分を行うと，

$$
\int_V |\mathbf{B}_a|^2 dv = \frac{\beta_{n,m,l}^2 \pi L k_l^2}{\varepsilon_n k'^2}\int_0^b \left\{\rho[J_n'(k'\rho)]^2 + \left(\frac{n^2}{k'^2\rho} + \frac{k'^2}{k_l^2}\rho\right)[J_n(k'\rho)]^2\right\} d\rho \qquad (14\text{-}108)
$$

となる。これまでと同様に（14-66）と（14-97）を使って $[J_n'(k'\rho)]^2$ を消去し，計算を進めると，

$$
\int_V |\mathbf{B}_a|^2 dv = \frac{\beta_{n,m,l}^2 \pi L\left(k'^2+k_l^2\right)}{\varepsilon_n k'^2}\int_0^b \rho[J_n(k'\rho)]^2 d\rho \qquad (14\text{-}109)
$$

となる。(k と k' の違いはあるが，部分積分なども適切に計算でき，余分な項はきれいに消えてくれる。）この形では（14-101）は使えないが，ベッセル関数の直交性の式には別のものがあり，

$$
\int_0^b \rho J_n(k'\rho) J_m(k'\rho) d\rho = \delta_{nm}\frac{\left({\kappa'_{n,m}}^2 - n^2\right)b^2}{2{\kappa'_{n,m}}^2}\left[J_n\left(\kappa'_{n,m}\right)\right]^2 \qquad (14\text{-}110)
$$

を使うことができる。したがって，

$$
\int_V |\mathbf{B}_a|^2 dv = \frac{\beta_{n,m,l}^2 \pi\left({\kappa'_{n,m}}^2 - n^2\right) b^2 L\left(k'^2+k_l^2\right)\left[J_n\left(\kappa'_{n,m}\right)\right]^2}{2\varepsilon_n {\kappa'_{n,m}}^2 k'^2} \qquad (14\text{-}111)
$$

が得られる。よって，規格化定数は，

$$
\beta_{n,m,l} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_n {\kappa'_{n,m}}^2 k'^2}{\pi\left({\kappa'_{n,m}}^2 - n^2\right) b^2 L\left(k'^2+k_l^2\right)\left[J_n\left(\kappa'_{n,m}\right)\right]^2}}
= \frac{{\kappa'_{n,m}}^2}{b^2\left|J_n\left(\kappa'_{n,m}\right)\right|}\sqrt{\frac{2\varepsilon_n}{\pi\left({\kappa'_{n,m}}^2 - n^2\right) L\left[\left(\frac{\kappa'_{n,m}}{b}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2\right]}} \qquad (14\text{-}112)
$$

となる。

最後に，TE モードの電場（14-91)，(14-92)，(14-93) について考える。規格化積分の ϕ と z の積分を行うと，

$$
\int_V |\mathbf{E}_a|^2 dv = \frac{\beta_{n,m,l}^2 \pi L k_l^2\left(k'^2+k_l^2\right)}{\varepsilon_n k'^2} \times \int_0^b \left\{\rho[J_n'(k'\rho)]^2 + \frac{n^2}{k'^2\rho}[J_n(k'\rho)]^2\right\} d\rho \qquad (14\text{-}113)
$$

となる。これまでと同様に（14-66）と（14-97）を使って $[J_n'(k'\rho)]^2$ を消去し，計算を進めると，

$$
\int_V |\mathbf{E}_a|^2 dv = \frac{\beta_{n,m,l}^2 \pi L\left(k'^2+k_l^2\right)}{\varepsilon_n k'^2}\int_0^b \rho[J_n(k'\rho)]^2 d\rho \qquad (14\text{-}114)
$$

となり，磁場の場合と一致する。以上で，規格化定数が適切に求められたことがわかる。

14.4. 電子ビームが RF 空胴に誘起する電磁場

電子ビームが RF 空胴に誘起する電磁場を計算するため，空胴内の電磁場の方程式（14-30）からス

タートし，簡単な場合の例を示す。そして，シャントインピーダンスを定義し，(14-30) を用いなくても済む方法について，解析的に解ける場合の例と，一般の空胴の場合での証明とを行う。

14.4.1. 誘起する電磁場とそのエネルギー その1

電子ビームが空胴に誘起する電磁場を考える際には，電子ビームが電流源となって電磁場を生み出すので，(14-30) の右辺第 1 項を考えればよい。よって，

$$\frac{1}{c^2}\ddot{g}_a + k_a^2 g_a = k_a\mu_0\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_a dv \tag{14-115}$$

を解けばよい。さて，加速器においてはピルボックス空胴の TM010 モードや TM110 モードのような，電場強度が z に依存しない場合を考えることが多いので，ここでもそのような場合について考える。

電荷 q の点電荷が速度 βc で z 方向に空胴を通過することを考える。このときの電流は，

$$I = \int_V \mathbf{J} dv = \beta c q \tag{14-116}$$

となる。($\mathbf{J}$ を直接表したければディラックのデルタ関数を使えばよいが，必要ないのでここには書かない。) また，電荷が通過する場所での $\mathbf{E}_a$ の z 成分を E_z^0 とおくと，(14-115) の右辺の積分は，

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}_a dv = \beta c q E_z^0 \tag{14-117}$$

となり，定数である。なお，TM010 モードのとき，$\rho = 0$ での E_z^0 は，(14-78)，(14-104) より，

$$E_z^0 = \frac{1}{bJ_1(\kappa_{0,1})}\sqrt{\frac{2}{\pi L}} = \frac{\kappa_{0,1}c}{b^2\omega_a J_1(\kappa_{0,1})}\sqrt{\frac{2}{\pi L}} \tag{14-118}$$

である。(14-115) は非斉次方程式なので，その一般解は，右辺が 0 の場合の一般解と (14-115) の特殊解との和となる。今回の場合，特殊解は定数解とするのが簡単で，

$$g_a(t) = \frac{\mu_0\beta c q E_z^0}{k_a} = \frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0\omega_a} \tag{14-119}$$

となる。ここに，ω_a は (14-35) に示された角周波数である。したがって，(14-115) の一般解は，

$$g_a(t) = A\cos\omega_a t + B\sin\omega_a t + \frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0\omega_a} \tag{14-120}$$

と表すことができる。ここで， $t = 0$ で電荷が空胴に入るものとし，電荷が入るまでは空胴内にまったく電磁場がないとすると，

$$g_a(0) = \dot{g}_a(0) = 0 \tag{14-121}$$

となるので，

$$A = -\frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0\omega_a},\quad B = 0 \tag{14-122}$$

となる。よって，

$$g_a(t) = \frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0\omega_a}(1-\cos\omega_a t) \tag{14-123}$$

が得られる。また，(14-24) より，

$$f_a(t) = -\frac{\dot{g}_a(t)}{k_a} = -\frac{\beta c q E_z^0}{\epsilon_0\omega_a}\sin\omega_a t \tag{14-124}$$

となる。たとえば，空胴の厚さを L とすると，電荷が通過した直後の f_a, g_a は，

$$f_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = -\frac{\beta c q E_z^0}{\epsilon_0\omega_a}\sin\frac{\omega_a L}{\beta c} \tag{14-125}$$

$$g_a\left(\frac{L}{\beta c}\right) = \frac{\beta q E_z^0}{\epsilon_0\omega_a}\left(1-\cos\frac{\omega_a L}{\beta c}\right) \tag{14-126}$$

となることがわかる。電荷の通過後は上式を初期条件として自由振動することとなる。

次に，空胴に蓄積されたエネルギーを求める。電磁場のエネルギー U は，

$$U(t) = \int_V\left(\frac{\epsilon_0|\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}\right)dv \tag{14-127}$$

なので，

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_V\left(\frac{\epsilon_0|f_a\mathbf{E}|^2}{2} + \frac{|g_a\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}\right)dv \\ &= \left(\frac{\epsilon_0 f_a^2}{2} + \frac{g_a^2}{2\mu_0}\right) \\ &= \frac{\beta^2c^2q^2(E_z^0)^2}{\epsilon_0\omega_a^2}(1-\cos\omega_a t) \end{aligned} \tag{14-128}$$

となる。電荷が空胴を通過した直後のエネルギーは，

$$U\left(\frac{L}{\beta c}\right)=\frac{\beta^2c^2q^2(E_z^0)^2}{\epsilon_0\omega_a^2}\left(1-\cos\frac{\omega_a L}{\beta c}\right) \quad (14\text{-}129)$$

と求まる。

14.4.2. シャントインピーダンスと電子ビームが誘起する電磁場との関係

前節では，(14 109) の右辺が単純だったため解析的に解くことができたが，実際の空胴にはビームパイプなどがついているので解析的に解くことが非常に困難である。RF 電磁場シミュレーションにて得られる $\mathbf{E}_a$ をもとに（14-115）の微分方程式を数値的に解いてもよいが，毎回微分方程式を解くのも不便である。そこで，シャントインピーダンスという量を導入し，電子ビームが誘起する電磁場を簡便に計算する方法について述べる。

シャントインピーダンス R_{sh} とは, 電磁場エネルギー U' が蓄積された空胴にて，失われるパワー P_{loss} と，電子ビームの軌跡に沿った加速電場の積分の最大値 V_{peak} との間の比例係数，という形で定義する。したがって，ここからは空胴にエネルギー損失があることを想定する。このことを数式で表すと，

$$R_{\mathrm{sh}}=\frac{V_{\mathrm{peak}}^2}{P_{\mathrm{loss}}} \quad (14\text{-}130)$$

$$V_{\mathrm{peak}}=\max\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \quad (14\text{-}131)$$

$$P_{\mathrm{loss}}=\frac{\omega_a U'}{Q} \quad (14\text{-}132)$$

となる。ここで，V_{peak} の積分の際には，電子ビームの飛行中に RF 電場 $\mathbf{E}$ の位相が進むことも考慮に入れておく必要があることに注意しなければならない。また，ここでの電磁場エネルギーは電子ビームが誘起したエネルギーとは別のものなので U' と表記を変えた。このシャントインピーダンスは，解析的に求めてもよいし，電磁場シミュレーションで得られた結果から数値的に求めてもよい。

解析的に計算できるものの一例として，前節のピルボックス空胴の場合についてシャントインピーダンスを算出する。まず，V_{peak} は，電子ビームが空胴の中心を通過する瞬間に RF 電場が最大値をとる位相での値となるので，

$$\begin{aligned}V_{\mathrm{peak}}&=\int_{-\frac{L}{2\beta c}}^{\frac{L}{2\beta c}}E_0E_z^0\beta c\cos\omega_a t\,dt\\&=\frac{2E_0E_z^0\beta c}{\omega_a}\sin\frac{\omega_a L}{2\beta c}\end{aligned} \quad (14\text{-}133)$$

と求められる。ここに，E_0 は電場の振幅を表す定数である。次に，空胴内電磁場のエネルギーを求める。定在波空胴では電場が最大のとき磁場が 0 になるので，空胴内のエネルギーは，

$$U'=\int_V\frac{\epsilon_0|\boldsymbol{E}|^2}{2}dv=\frac{\epsilon_0E_0^2}{2} \quad (14\text{-}134)$$

となる。したがって，シャントインピーダンスは，

$$R_{\mathrm{sh}}=\frac{V_{\mathrm{peak}}^2Q}{\omega_aU'}=\frac{8Q\beta^2c^2(E_z^0)^2}{\epsilon_0\omega_a^3}\sin^2\frac{\omega_aL}{2\beta c} \quad (14\text{-}135)$$

となる。これを使って，（14-129）を書き直すと，

$$U=\frac{\omega_a}{4}\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q}q^2 \quad (14\text{-}136)$$

という関係が得られる。この関係は後述するように一般の空胴でも成り立つので，実際の空胴にて電子ビームが空胴に誘起する RF パワーを求める際に便利である。とくに，R_{sh}/Q という値は規格化シャントインピーダンスとも呼ばれ，

$$\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q}=\frac{V_{\mathrm{peak}}^2}{\omega_aU'} \quad (14\text{-}137)$$

と表される。このように，R_{sh}/Q は空胴の損失の大小に関係なく形状だけで決まるもので，また，右辺の各パラメータは電磁場シミュレーションで容易に得られるもののみで表されている。したがって，空胴の設計の際や電子ビームと空胴の相互作用を考える際に重要なパラメータである。

最後に，一般の空胴で（14-136）が成り立つことを示す。まず仮定として，点電荷 q が z 方向に速度 βc で進むものとし，$\mathbf{E}_a$ の z 軸の原点は，

$$V_{\mathrm{peak}}=\int\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\int_{-\infty}^{\infty}E_0E_z(\beta ct)\beta c\cos\omega_a t\,dt \quad (14\text{-}138)$$

が適切な V_{peak} を与えるように合わされている

ものとする。ここに，E_0 は電場の振幅を表す係数で，$E_z(\beta ct)$ はビーム軌道に沿った $\mathbf{E}_a$ の z 成分を表す。このとき，(14-115) は，

$$\ddot{g}_a + \omega_a^2 g_a = \omega_a \mu_0 \beta c^2 q E_0 E_z(\beta ct) \tag{14-139}$$

となる。なお，(14-35) を使って k_a を消去している。この方程式をラプラス変換法にて解くこととする。ラプラス変換の各種定理や公式は示さずに使うので公式集などを参照されたい。また，通常のラプラス変換は時間 0 から∞までの積分で表されるが，今回の問題では $E_z(\beta ct)$ は±∞の極限で指数関数的に十分に小さくなると考えられるため，ラプラス変換が時間－∞から＋∞までの積分でも収束すると仮定して，

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{14-140}$$

ということで進めていくことにする。

まず，

$$V(t,\theta) = \int_{-\infty}^{t} E_0 E_z(\beta ct')\beta c \cos(\omega_a t' - \theta)\, dt' \tag{14-141}$$

を定義すると，

$$V_{\mathrm{peak}} = \lim_{t\to\infty} V(t,0) \tag{14-142}$$

となる。$V(t,\theta)$ のラプラス変換を $\tilde{V}(s,\theta)$ とおくと，

$$\tilde{V}(s,0) = \frac{E_0}{2s}\left[\tilde{E}_z\left(\frac{s - j\omega_a}{\beta c}\right) + \tilde{E}_z\left(\frac{s + j\omega_a}{\beta c}\right)\right] \tag{14-143}$$

となる。ここで，$E_z(z)$ のラプラス変換を $\tilde{E}_z(s)$ とした。ラプラス変換の最終値定理より，

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{peak}} &= \lim_{t\to\infty} V(t,0) = \lim_{s\to 0} s\tilde{V}(s,0) \\ &= \frac{E_0}{2}\left[\tilde{E}_z\left(\frac{-j\omega_a}{\beta c}\right) + \tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)\right] \end{aligned} \tag{14-144}$$

が得られる。さて，$t\to\infty$ のときに $V(t,\theta)$ は，$\theta = 0$ で最大値をとるので，

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \left.\frac{dV(t,0)}{d\theta}\right|_{\theta=0} \\ &= \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} E_0 E_z(\beta ct')\beta c \sin\omega_a t'\, dt' = 0 \end{aligned} \tag{14-145}$$

とならなければならない。この極限の中の関数をラプラス変換すると，

$$\frac{E_0}{2js}\left[\tilde{E}_z\left(\frac{s - j\omega_a}{\beta c}\right) - \tilde{E}_z\left(\frac{s + j\omega_a}{\beta c}\right)\right] \tag{14-146}$$

となる。ラプラス変換の最終値定理より，

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \left.\frac{dV(t,0)}{d\theta}\right|_{\theta=0} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{E_0}{2j}\left[\tilde{E}_z\left(\frac{s - j\omega_a}{\beta c}\right) - \tilde{E}_z\left(\frac{s + j\omega_a}{\beta c}\right)\right] \\ &= \tilde{E}_z\left(\frac{-j\omega_a}{\beta c}\right) - \tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right) = 0 \end{aligned} \tag{14-147}$$

となるので，

$$\tilde{E}_z\left(\frac{-j\omega_a}{\beta c}\right) = \tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right) \tag{14-148}$$

を満たすことがわかる。したがって，

$$V_{\mathrm{peak}} = E_0 \tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right) \tag{14-149}$$

となる。いま，空胴内の電磁場エネルギーは，

$$U' = \int_V \frac{\epsilon_0 |\boldsymbol{E}|^2}{2} dv = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \tag{14-150}$$

なので，規格化シャントインピーダンスは，

$$\frac{R_{\mathrm{sh}}}{Q} = \frac{V_{\mathrm{peak}}^2}{\omega_a U'} = \frac{2}{\epsilon_0 \omega_a}\left[\tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)\right]^2 \tag{14-151}$$

となる。

次に，(14-139) のラプラス変換を考える。ここでも最終値定理を使って十分に時間がたったあとの g_a を求めたいわけであるが，g_a は最終的に ω_a で永久に振動する形となるので，(14-139) をそのままラプラス変換してもうまくいかない。そこで，両辺に $e^{j\omega_a t}$, $\mathrm{e}^{-j\omega_a t}$ をかけたものをラプラス変換することで，最終値定理が使えるようにする。(14-139) の両辺に $e^{j\omega_a t}$ をかけたものをラプラス変換すると，

$$\begin{aligned} &(s - j\omega_a)^2 \tilde{g}_a(s - j\omega_a) + \omega_a^2 \tilde{g}_a(s - j\omega_a) \\ &\qquad = \omega_a \mu_0 c q \tilde{E}_z\left(\frac{s - j\omega_a}{\beta c}\right) \end{aligned} \tag{14-152}$$

となり，

$$\tilde{g}_a(s-j\omega_a)=\frac{\omega_a\mu_0 cq\tilde{E}_z\left(\frac{s-j\omega_a}{\beta c}\right)}{s(s-2j\omega_a)} \quad (14\text{-}153)$$

が求まる。両辺に $e^{-j\omega_a t}$ をかけたものも同様に，

$$\tilde{g}_a(s+j\omega_a)=\frac{\omega_a\mu_0 cq\tilde{E}_z\left(\frac{s+j\omega_a}{\beta c}\right)}{s(s+2j\omega_a)} \quad (14\text{-}154)$$

が得られる。これらの式に最終値定理を適用すると，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} g_a(t)e^{j\omega_a t} &= \lim_{s\to 0} s\,\tilde{g}_a(s-j\omega_a)\\ &=\frac{j\mu_0 cq}{2}\tilde{E}_z\left(\frac{-j\omega_a}{\beta c}\right)=\frac{j\mu_0 cq}{2}\tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)\end{aligned} \quad (14\text{-}155)$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} g_a(t)e^{-j\omega_a t} &= \lim_{s\to 0} s\,\tilde{g}_a(s+j\omega_a)\\ &=-\frac{j\mu_0 cq}{2}\tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)\end{aligned} \quad (14\text{-}156)$$

となる。なお，(14-139) に $e^{j\omega_a t}$, $\mathrm{e}^{-j\omega_a t}$ とは異なる関数をかけて最終値定理を適用するとすべて 0 になる。したがって，t が十分大きいとき，

$$\begin{aligned}g_a(t) &= \frac{j\mu_0 cq}{2}\tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)\left[e^{-j\omega_a t}-e^{j\omega_a t}\right]\\ &=\mu_0 cq\tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)\sin\omega_a t\end{aligned} \quad (14\text{-}157)$$

のように振る舞う。また，(14-24) より，f_a は，

$$f_a(t)=\frac{g_a(t)}{k_a}=\frac{q}{\epsilon_0}\tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)\cos\omega_a t \quad (14\text{-}158)$$

のように振る舞う。したがって，電子ビームが空胴に誘起するエネルギーは, t が十分大きいとき，

$$\begin{aligned}U &= \int_V\left(\frac{\epsilon_0|f_a\mathbf{E}_a|^2}{2}+\frac{|g_a\mathbf{B}_a|^2}{2\mu_0}\right)dv\\ &=\left(\frac{\epsilon_0 f_a^2}{2}+\frac{g_a^2}{2\mu_0}\right)\tilde{E}_z\left(\frac{j\omega_a}{\beta c}\right)^2\end{aligned} \quad (14\text{-}159)$$

となる。この値は時間に依存しない形となっており，もっともな結果である。これと (14-151) を合わせると，(14-136) が得られることがわかる。このようにして，一般の空胴に対して (14-136) が成り立つことが示された。

参 考 文 献

[1] 諏訪田 剛, “ビーム計測 I”, OHO ’02 (2002).

[2] 惠郷 博文, “高周波加速管”, 本テキスト.

[3] “Radiation Dosimetry: Electron Beams with Energies Between 1 and 50 MeV”, ICRU Report No. 35, (1984).

[4] “EStar: Stopping Power and Range Tables for Electrons”, http://physics.nist.gov/PhsRefData/Star/Text/ESTAR.html

[5] Particle Data Group, Phys. Rev. D **86**, 323-367 (2012).

[6] J. D. Jacson, “Classical Electrodynamics”, Third edition, Chap. 15, John Wiley and Sons, Inc. (1998)

[7] J. D. Jacson, “Classical Electrodynamics”, Third edition, Chap. 13, John Wiley and Sons, Inc. (1998)

[8] K. J. Kim, “Characteristics of Synchrotron Radiation”, Proceedings of US Particle Accelerator Summer School (1989).

[9] J. Nodvick, and D. Saxson, Phys. Rev. **96**, 180 (1954).

[10] Y. Hosono, et al., “アルミナ蛍光板の発光特性”, 第 1 回加速器学会年会プロシーディングス (2004).

[11] T. C. Liu, et al., “FLASH-TW experiment status report”, Proceedings of 29th International Cosmic Ray Conference, 101-103 (2005).

[12] G. Blasse and A. Bril, Appl. Phys. Lett. **11**, 53 (1967).

[13] H. Maesaka, et al., Nucl. Instrum. Meth. A **696**, 66 (2012).

[14] 大島 隆, “高精度低電力高周波システム”, 本テキスト。

[15] V. A. Lebedev, Nucl. Instrum. Meth. A **372**, 344 (1996).

[16] S. Inoue, et al., “XFEL に向けたスクリーンモニター試作機”, 第 5 回加速器学会年会プロシーディングス (2008).

[17] K. Yanagida, et al., “XFEL 用スクリーンモニタの光学系”, 第 5 回加速器学会年会プロシーディングス (2008).

[18] Radiant Zemax, LLC, http://www.radiantzemax.com

[19] JAI Corporation, http://www.jai.com

[20] A. Lumpkin, et al., Phys. Rev. ST AB **12**, 040704 (2009).

[21] S. Y. Lee, Accelerator Physics Second Edition, p. 62, World Scientific (2004).

[22] S. Matsubara, et al., “XFEL/SPring-8 “SACLA” 用の高速差動 CT の特性”, 第 8 回加速器学会年会プロシーディングス (2011).

[23] 日立金属株式会社, http://www.hitachi-metals.co.jp

[24] R. Akre, et al., “A Transverse RF Deflecting Structure for Bunch Length and Phase Space Diagnostics”, Proceedings of PAC’01, p. 2353 (2001).

[25] H. Ego, et al., “X 線自由電子レーザー施設 SACLA における時間構造診断用高電磁界 C バンドデフレクターの開発”, 第 8 回加速器学会年会プロシーディングス (2011).

[26] 浜松ホトニクス株式会社, http://www.hamamatsu.com

[27] C. Kondo, et al., “SACLA における CSR ビームバンチ長モニタの開発”, 第 8 回加速器学会年会プロシーディングス (2011).

[28] X.-M. Marechal, Y. Asano, T. Itoga, Nucl. Instrum. Meth. A **673**, 32 (2012).

[29] H. Aoyagi, et al., Phys. Rev. ST AB **16**, 032802 (2013).

[30] R. Tanaka, et al., “The First Operation of Control System at the SPring-8 Storage Ring”, Proceedings of ICALEPCS’97, (1997).

[31] M. Yamaga, et al., “Event-synchronized Data-acquisition System for SPring-8 XFEL”, Proceedings of ICALEPCS’09 (2009).

[32] C. J. Bouwkamp and N. G. de Bruijn, J. Appl. Phys. **18**, 562 (1947).

[33] J. C. Slater, “Microwave Electronics”, Chap. 4, D. Van Nostrand Company, Inc. (1950).