

$$\Gamma\left(\frac{n+1-\nu}{2}\right) B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$$

となる。これより、

$$\int_0^\infty z^3 K_{\nu}^2(z) dz = \frac{1}{3} \nu (1-\nu^2) \Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu)$$

となる。ここでガンマ関数の (最も美しい) 性質

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

を使うと、

$$= \frac{\pi}{3} \nu (1-\nu^2) / \sin \pi \nu \quad (\text{B-58})$$

となることがわかる。

これより、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi^3 K_{3/3}^2(\xi) d\xi &= \frac{20\pi}{3^4 \sqrt{3}}, \int_0^\infty \xi^3 K_{1/3}^2(\xi) d\xi \\ &= \frac{2^4 \pi}{3^4 \sqrt{3}} \quad (\text{B-59}) \end{aligned}$$

となる。次に (B-53) の θ に関する積分でくるものに、

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{(1/r^2 + \theta^2)^4}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2 d\theta}{(1/r^2 + \theta^2)^5}$$

があるが、これも次のようにして求まる。

$$I_1 = 2 \int_0^\infty \frac{d\theta}{(1/r^2 + \theta^2)^4} = r^7 \int_0^\infty \frac{x^{-1/2} dx}{(1+x)^4}$$

$$= r^7 B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$I_2 = r^7 \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{(1+x)^5} = r^7 B\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

となり、

$$I_1 = \frac{5\pi r^7}{2^4}, \quad I_2 = \frac{5\pi r^7}{2^7} \quad (\text{B-60})$$

となる。(B-59) を (B-54) に代入し、(B-60) を (B-53) に代入すると、

$$\langle Nu^2 \rangle = \frac{\hbar e^2}{\rho} \left(\frac{c}{\rho}\right)^2 r^7 \cdot \frac{55}{2^3 3 \sqrt{3}} / 4\pi\epsilon \quad (\text{B-61})$$

と求まる。

これを P_r と u_c で表わすと、

$$\langle Nu^2 \rangle = P_r u_c \frac{55}{2^3 3 \sqrt{3}} \quad (\text{B-62})$$

となる。さらにこれをリング一周について平均すると、

$$\overline{\langle Nu^2 \rangle} = \frac{U_0 u_c}{T} \frac{55}{2^3 3 \sqrt{3}} \quad (\text{B-63})$$

となる。(ただし曲率半径 ρ はすべての bending magnet で同じとする)