

LINAC 入門

LINAC (Linear Accelerator) を線形加速器, 又は直線加速器と訳すと, 直流電圧を加速に用いるタイプと高周波 (rf) 電圧を加速に用いるタイプの二つに分類できる。それぞれが形式の異なるいくつかの加速器にわけられるが, ここでは rf を使用するタイプの中から, 下記の 3 種類について解説する。

- 1) Proton linac (Alvarez 型, Drift Tube Linac, (DTL))
- 2) Electron linac (Disk loaded)
- 3) RFQ (Radio Frequency Quadrupole)
 - 1) と 2) は現存する LINAC の代表であり, そして
 - 3) は最近開発されて, 注目をあびている。

1. 序

1.1 Background

LINAC が実現されるための条件

(1) Structure

粒子を加速するための加速管。粒子の質量と速度により種々のタイプが考えられている。加速管が現実的な machine となるためには, それが理論的に優れていると同時に, 工作精度, 冷却, 放電, 振動等の製作上, rf 運転上の問題を解決できる構造であることが重要である。

(2) rf power source

加速管の性能を発揮するためには, その周波数領域で, 必要な RF 電力を作り出せることが必要である。

LINAC が原理的に成功したのは 1928 年であったが, その後の発展が円形加速器 (rf power のしめる比重が小さい) に遅れをとり, 第 2 次大戦後になったのはこの理由による。

(3) イオン源

(4) 諸技術

真空, コントロール, alignment 等。

この中で, (1) と (2) は歴史的発展からみても車の両輪ともいべきものであって, どちらが欠けても満足な LINAC はできない。経験的に相方に同程度の経費をかけるのが良いとも言われる。次世代の high energy linac も (1) と (2) の相方において新しいアイデアが必要かもしれない。

例 1 single cell と multi cell (high energy proton 用の場合)

2 章以下で述べる LINAC は周期的構造を持つ multi cell 構造になっている。簡単に考えられることだが, multi cell 構造をやめて, rf 的に独立な多くの単一空洞を直線的に並べれば, rf 的にもっとも簡単な linac ができる (Fig. 1.1) この場合 multi cell において見られる rf の難しい問題 (high power, higher mode, low v_g 等) はほとんどなくなってしまふ。実際このような proposal が存在する (ref. 1)。

陽子 100 MeV \rightarrow 350 MeV, 200 mA, 200 MHz, 320 cavities, rf source 225 kW \times 320 個 energy gain (4W) \sim 1 MeV/cavity

この場合, 出力エネルギーは自由に变化させられる。又どこかの rf generator が故障しても, 他のセクショ

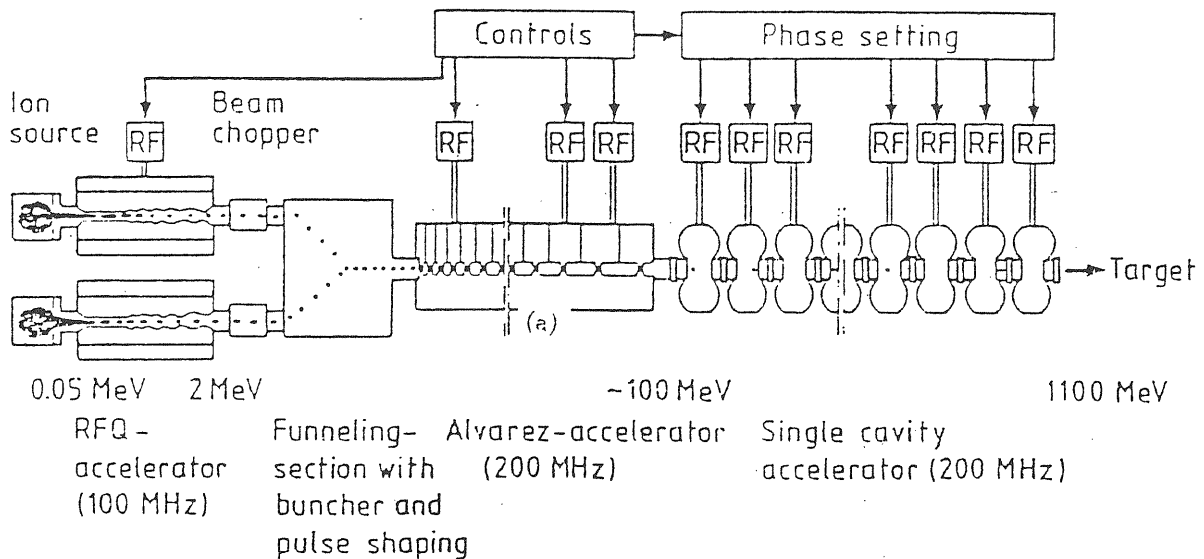


Fig.1.1 Schematic illustration of the linear accelerator. There are four sections; ion source, RFQ, DTL and single cavity accelerator.

で容易に補助ができる。ただ、320個の rf generator を適当な power と phase でコントロールすることは容易ではないが、コンピューターが進歩している現在ではそれほどのもでもない。rf power 技術から見ると 225 kW は取扱いが容易であるが、multi cell の drive に必要となる MW order の power は容易ではない。

どのようなタイプを選ぶかは、rf 特性および必要経費の最適化による。

1.2 Brief history

1928年 Wideröe K^+ , N^+ 加速成功

1931年 Sloan, Lawrence Hg^+

$f = 10 \text{ MHz}$, $\Delta W = 42 \text{ keV} \times 31 \sim 1.26 \text{ MeV}$

全長 1.14 m

Fig. 1.2 に Wideröe 型の原理を示す。

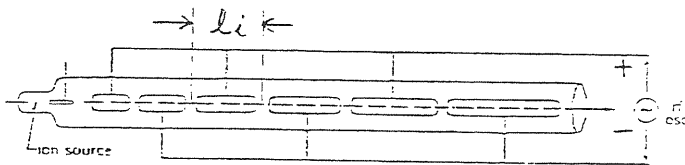


Fig.1.2 Wideröe type linac.

synchronous 条件

$$\frac{l_i}{v_i} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} \quad (1.1)$$

ここに l_i はユニットセルの長さであり、 v_i はそのセルを通過中の荷電粒子の速度である。

$v \ll c$ (光速) では

$$E_K = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m c^2 \beta^2 \quad (1.2)$$

故に

$$l_i = T \sqrt{\frac{E_K}{2m}} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{E_K}{2m}} \\ = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{E_K(\text{eV})}{2mc^2}} \quad (1.3)$$

$$l_i = \frac{\beta \lambda}{2} \quad (1.4)$$

Hg の場合 1.26 MeV で $l_i = 5.5 \text{ cm}$ 程度、proton では $l_i = 78 \text{ cm}$ と相当長くなってしまふ。

rf generator の制約から、今日から見れば低い rf 周波数が採用され、そのために重イオンを加速することになった。

1937~1945年 Hansen, Varian. Klystron の開発

1945年~ Alvarez, 32 MeV 陽子 DTL, 4 MeV \rightarrow 32 MeV, 200 MHz, 全長 12 m, 現在稼働中の DTL の元祖 (Alvarez 型)

Fig. 1.3 に DTL を示す。

synchronous 条件

$$\frac{l_i}{v_i} = T = \frac{1}{f} \quad (1.5)$$

故に $l_i = \beta \lambda$

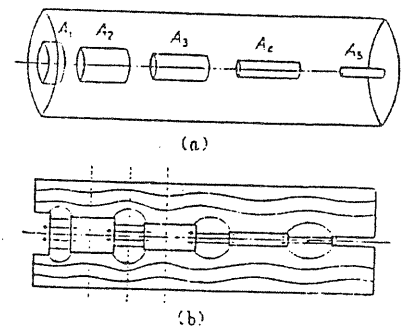
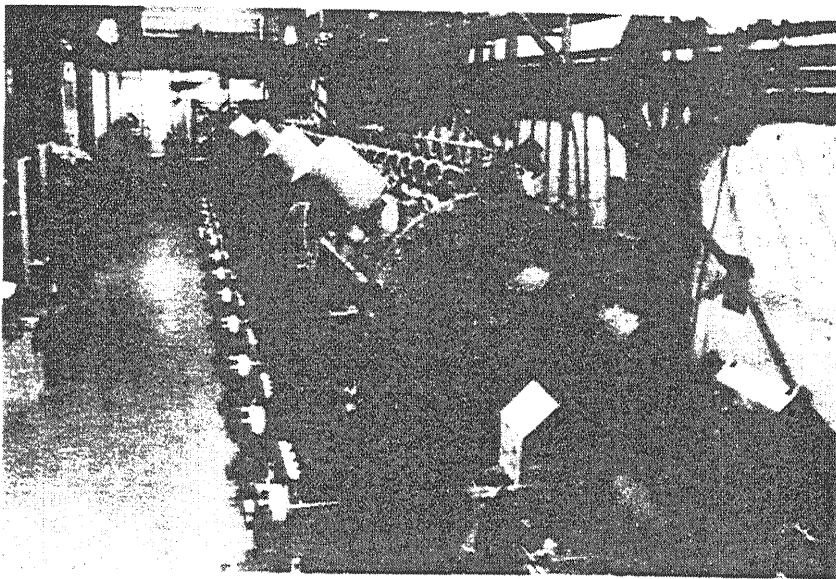
1947年~ Hansen disk-loaded linac (Mark I)

4.5 MeV, 1 MW, 2856 MHz, 全長 2.7 m

1952年 Blewett drift tube 内の Q-magnet.

1965年 P. Wilson superconducting linac

1980年 Stokes RFQ



アルバレ型線型加速器

Fig.1.3 Alvarez linac (KEK 20-MeV).

以上、このlectureに関連する部分のみを示した。

1.3 円形導波管内の電磁場

加速管で興味あるモードは、円形導波管のTMモード($H_z = 0, E_z \neq 0$)なので、その概略をここでまとめておく。円筒座標系(r, θ, z)を用いて、Maxwell方程式から得られる波動方程式を E_z について書くと

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \quad (1.6)$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.7)$$

変数分離法で、 $E_z = E_{zr} \cdot E_{z\theta} \cdot E_{zz}$ として(1.6)を書直すと

$$\frac{d^2 E_{zz}}{dz^2} = k_z^2 E_{zz} \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2 E_{z\theta}}{d\theta^2} + m^2 E_{z\theta} = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{d^2 E_{zr}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_{zr}}{dr} + \left(k_c^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) E_{zr} = 0 \quad (1.10)$$

$$k_z^2 + k^2 = k_c^2 \quad (1.11)$$

(1.8), (1.9)の解は

$$E_{zz} = c_1 e^{-k_z z} + c_2 e^{k_z z} \quad (1.12)$$

$$E_{z\theta} = B_1 \cos m\theta + B_2 \sin m\theta \quad (1.13)$$

(1.10) 式はm次のBessel方程式で J_m, N_m を第1種、第2種のBessel関数として

$$E_{zr} = A_1 J_m(k_c r) + A_2 N_m(k_c r) \quad (1.14)$$

半径aの円形導波管を考える。TMモード($H_z = 0$)の境界条件として

(1) $0 \leq r \leq a$ で E_z は有限、

(2) $r = a$ で $E_\theta = E_z = 0$ 。

(1)より $A_2 = 0$ となる。(2)より

$$J_m(k_c a) = 0 \quad (1.15)$$

(1.15)のn番目の根を P_{mn} とすれば

$$k_c = \frac{P_{mn}}{a} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (1.16)$$

z方向へ伝播する波を考えると、(1.11)より

$$k_z = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{\left(\frac{P_{mn}}{a}\right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \quad (1.17)$$

k_c と k の大小によって、言いかえると、考えている導波管の“大きさ”と較べて波長が大きいかどうかにより、導波管の中の振舞いが大きく変化する。

(A) $k_c > k$ の時

k_z は実数となるので、波は導波管の中で減衰する。(境界条件(1)より(1.12)式で指数関数的に増大する解は許されない)TM₀₁モードに対しては

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{P_{01}} = 2.61a \quad (1.18)$$

$\lambda > \lambda_c$ の時、波は導波管の中を伝播できない。 λ_c をしゃ断波長と呼ぶ。

(B) $k_c < k$ の時

$k_z = j\beta$ とおけて、波は伝播可能。

$$E_z = J_m\left(\frac{P_{mn}}{a} r\right) \cos m\theta e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.19)$$

と書ける。位相定数 β は(1.17)より

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{P_{mn}}{a}\right)^2} \quad (1.20)$$

この波をTM_{mn}モードと呼ぶ。管内波長 λ_g は上式より

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2} \quad (1.21)$$

上式より管内波長 λ_g は自由空間波長 λ より長いことがわかる。

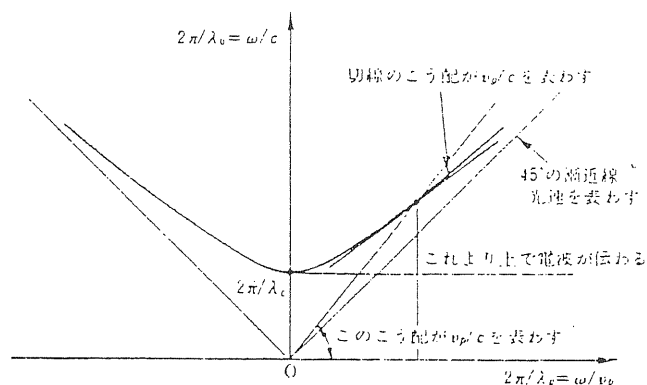


Fig. 1.4 導波管内の管内波長 λ_g と自由空間波長 λ_0 の関係

位相速度 v_p は

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = f \lambda_g \quad (1.22)$$

$\lambda_g > \lambda$ なので、 $v_p > c$ であることがわかる。群速度 v_g は、(1.11)から、 $\omega^2 \epsilon \mu = k_c^2 + \beta^2$ だから

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\lambda}{\lambda_g} = c \frac{\lambda}{\lambda_g} \quad (1.23)$$

$\lambda_g > \lambda$ なので、 $v_g < c$ である。

(1.22), (1.23)より

$$v_g v_p = c^2 \quad (1.24)$$

が成立する。

(C) $k = k_c$ の時

(1.21)より $\lambda = \lambda_c$ の時は $\lambda_g = \infty$ と考えられる。即ち波長が ∞ (全ての場所で同位相) と見なせる波が存在する。

(1.21) を図示すると Fig. 1.4 が得られる。

(A)(B)(C) の状態を Fig. 1.5 に示す。

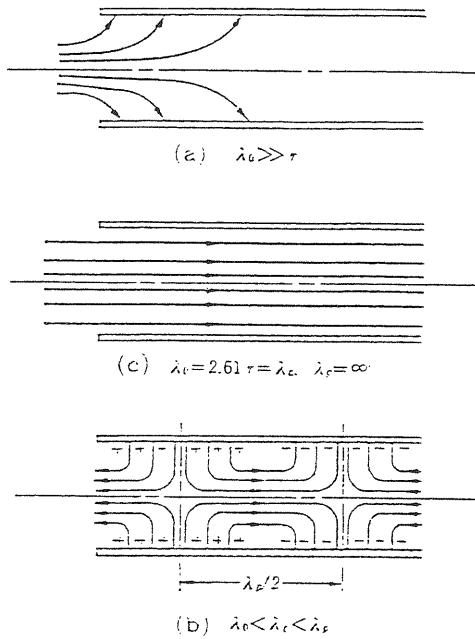


Fig.1.5 円形導波管中の TM_{0n} 波の電場の様相

TM_{01} ($m = 0, n = 1$) モードの表式は、

$$E_z = J_0 \left(\frac{P_{01} r}{a} \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.25)$$

$$E_r = \frac{j\beta}{P_{01}/a} J_1 \left(\frac{P_{01} r}{a} \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.26)$$

$$E_\theta = 0 \quad (1.27)$$

$$H_r = 0 \quad (1.28)$$

$$H_\theta = \frac{j\omega \epsilon}{P_{01}/a} J_1 \left(\frac{P_{01} r}{a} \right) e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (1.29)$$

$$H_z = 0 \quad (1.30)$$

1.4 周期構造の中の電磁場

前節で見たように導波管の中では位相速度 $v_p > c$ となるので、これを加速に使用することができない。
 $v_p \leq c$ を実現するために、周期構造を持つ加速管の一般的な性質を、Slater (ref.2) は Floquet's theorem により解析したので、簡単に紹介する。

Floquet's theorem

周期構造を持つ加速管のモードと周波数が決まっている時、加速管を周期 d だけ進む電磁波は、ある定数 (複素数) だけ変化する。この定数を $e^{-\gamma d}$ と書く。このような性質を持つ簡単な関数は $e^{-\gamma z}$ である。そこで一般的には、こうした性質を持つ関数は、周期 d を持つ周期関数 B と $e^{-\gamma z}$ を掛け合わせたものとなる。周期関数 B は Fourier 展開できて

$$e^{-2\pi n j z / d}, \quad n = \text{integer}, \quad (1.31)$$

と表わされる。

故に電磁場は次の形を持つ。

$$e^{-(\gamma + 2\pi n j / d) z} \quad (1.32)$$

(1.32) は γ によって異なる性質を示す。

lossless ならば γ は real か pure imaginary である。

$\gamma = \text{real}$ の時は、attenuated wave を示す。

$\gamma = \text{pure imaginary}$ なら $\gamma = j\beta_0$ とおくと

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{d} \quad (1.33)$$

と書ける。時間項とあわせると

$$e^{j(\omega t - \beta_n z)} \quad (1.34)$$

となる。

(1.34) は周波数 ω 、波長 $\frac{2\pi}{\beta_n}$ 、位相速度

$$v_n = \frac{\omega}{\beta_n} \quad (1.35)$$

で、 z 方向へ進む波を表わしている。

以上より、周期構造は、位相速度 v_n の異なる多くの進行波を重ねあわせた状態を作ると考えられる。

粒子の加速は、粒子速度と (1.35) で表わされる位相速度が等しくなる状態 (resonant mode) で実現される。その場合、粒子から見ると、resonant mode は常に一定の振幅を持つように (時間に依存しない) 見える。その他の mode (non-resonant mode) は、粒子から見て、正弦波的な進行波に見えるので、粒子に対する最終的な効果は無視できる。

(1.33) について $\omega - \beta_0$ 平面上の性質を考える。

1. β_0 は $\frac{2\pi}{d}$ の周期性を持つ。

2. β_0 は偶関数である。これは z の $+$ と $-$ の両方向の進行波が存在することに対応する。

そこで、 ω を β_0 の関数としてプロットすると Fig. 1.6 となる。

$\omega = \omega_0$ になる周波数を考えると n に対応して無限の β_n が存在する。その位相速度 v_{pn} は原点からその点へひいた直線の傾きで与えられて

$$v_{pn} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_0 + \frac{2\pi n}{d}} \quad (1.36)$$

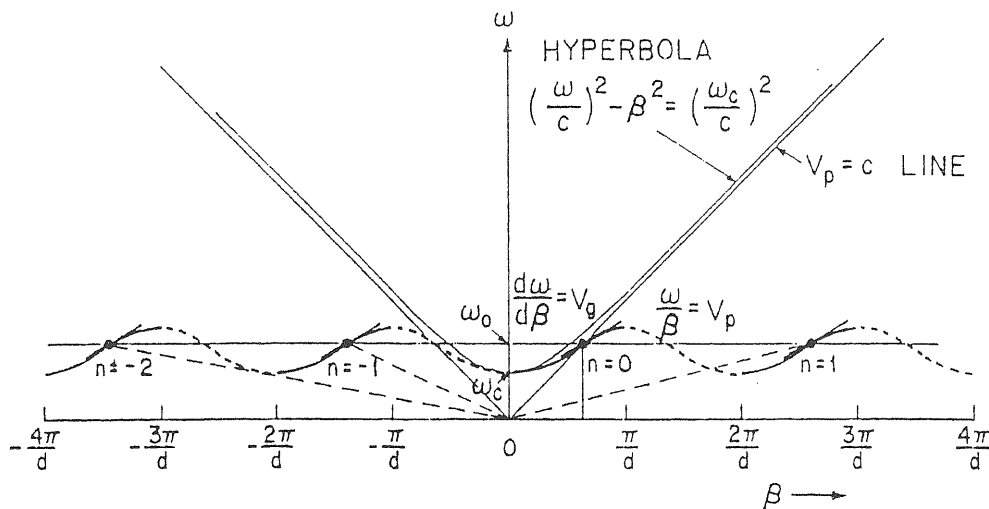


Fig.1.6 Brillouin diagram for a periodic structure.

しかし v_g は全ての n について等しい。

$v_g v_{pn} > 0$ forward wave Fig.1.6 の実線

$v_g v_{pn} < 0$ backward wave Fig.1.6 の点線

$\beta = 0, \frac{n\pi}{d}$ では $v_g = 0$ となっている。この時隣り合う cell の phase shift は $\beta d = n\pi$ であり、各 cell で反射する反射波の位相が $2n\pi$ の同相で重ねあわされる結果、定在波が生じている状態である。又、 v_g が大きいのは $\beta = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{d}$ 即ち $\frac{\pi}{2}$ mode であることがわかる。2.6節の linear chain model で具体的に示すが、 $\beta = 0$ と $\beta = \frac{\pi}{d}$ に対応する周波数の差、 $\Delta\omega = \omega_\pi - \omega_0$ (パスバンド)の大きさは、隣り合う cell の coupling の大きさに比例するから、その選び方により位相速度を決めることができる。

1.5 陽子加速と電子加速

LINAC の中で、粒子を加速するとは、“加速モードの電磁波の位相速度 v_p と粒子速度 v を一致させること”と言いかえることができる(1.4節)。故に加速管の設計は、入力 RF power から位相速度 v_p を持つ rf 成分を(効率よく)作り出すことを意味する。1.4節の(1.22)であらわせるように、一般に導波管の中では $v_p > c$ であるから、これをただちに粒子加速に使用することはできない。そこで、何らかの形の“障害物”を入れて $v_p \leq c$ に落とさなければいけない。この場合 $v_p \ll c$ (イオン加速用)と $v_p \sim c$ (電子加速用)では、加速管の構造及び使用する rf 周波数が大きく異なる結果を生む。勿論イオン速度 $\sim c$ の領域では、電子加速用の構造が使用できる。又、 $v \ll c$ のイオンの加速に、例えば電子加速用の disk loaded type を使用することはできるが、そうした場合には、加速効率が悪くて非現実的な大きさになってしまうから、普通はより適切な加速方式を選ぶことになる。よく使用される記号を用いると

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2 \gamma \quad (1.37)$$

$$E_k = W - mc^2 \approx \frac{1}{2} mv^2 (v \ll c) \quad (1.38)$$

$$\beta = v/c$$

$$mc^2 = 0.511 \text{ MeV for electron}$$

$$= 938 \text{ MeV for proton.}$$

Fig.1.7 を見るとわかるように、電子の場合 3 MeV で早くも $\beta = 0.99$ となるのに対し、陽子では 100 MeV で $\beta = 0.43$ である。即ち電子では、加速領域のほとんど全域にわたって $v \approx c$ (一定)と考えて良いが、陽子では、(普通の linac のエネルギー域では)加速管の中で速度が大きく変化することになる。これは一様な構造と形が変化する構造との差となり、技術的に大きな差となる。Alvarez 型リニアックのユニットセルは $\beta\lambda$ で与えられる(2.1節)。又、disk loaded 型 $\frac{\pi}{2}$ mode の disk 間隔は $\frac{\lambda}{4}$ で与えられる。(4.1節)。

Table 1 を見ると、陽子リニアック、電子リニアックに使用されている。典型的な周波数から、夫々のお

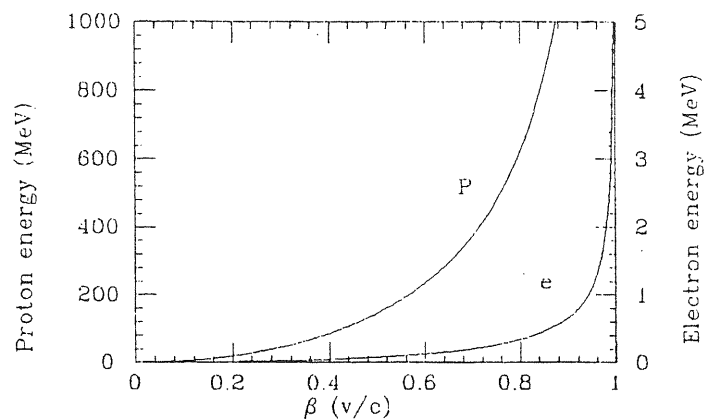


Fig.1.7 Energy vs velocity.

よその大きさが想像できよう。なお、加速 gain は 200 MHz で 3 MeV/m 以下、3000 MHz で 10 MeV/m 以下の値が選ばれている。

Table 1. 運動エネルギーと β , $\beta\lambda$

粒子	E_k (MeV)	β	200 MHz $\beta\lambda$ (cm)	3000 MHz $\beta\lambda$ (cm)
P	0.75	0.04	6.0	0.40
P	10	0.14	22	1.4
P	100	0.43	64	4.3
e	0.1	0.55	82	5.5
e	1	0.94	141	9.4
e	10	0.999	150	10.0
e	100	0.9999	150	10.0

粒子の beam dynamics も $v \ll c$ と $v \approx c$ では異なる。

(1) longitudinal acceptance (4.2 節)

$v \ll c$ でとじている acceptance が $v \approx c$ では open になる。この場合粒子は漸近的な位相 ϕ_∞ に近づき、位相振動の周期は無量大となる。

(2) 相対論的効果による距離の減少。

粒子がみる距離は $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍になる。SLAC・2 miles が 38cm に見えるとすれば、原則的に外からの集束は必要ない。

(3) radial focusing 力が $\beta^{-3} r^{-3}$ で減少し、 $v=c$ で消失する (2.5 節) ので、(2) の事情とあわせて有利になる。

(4) $v=c$ では E_z の r-dependence がなくなる (4.1 節)

以上の差は、加速管の構造、運転の方法等に違いをもたらす。DTL では工学的に最も難しく、又運転時に変えるパラメータは集束用 Q-magnet であるが disk loaded ではそれがない。DTL は $v_g=0$ となる 2π モードなので当然 standing-wave 型である。disk loaded 型では、traveling-wave 型が多い。

陽子と電子の質量の差に由来して、次のような分類となる。

Table 2. 陽子加速と電子加速

陽子	電子
Alvarez 型	disk loaded
200 MHz ~ 800 MHz	3000 MHz
定在波型	進行波型
$v < c$, 変化する	$v \approx c$, 一定
安定位相 $\phi_s =$ 一定とできる。	漸近的な位相へ bunching する。
位相振動	位相振動の周期 ∞
横方向集束磁石	必要なし
三極管又は四極管	クライストロン

2. Proton linac (ref. 3, 4, 5, 6, 7, 8)

Alvarez 型 (DTL) linac を取扱う。

TM₀₁₀ で励起されている円筒空洞の電磁場を Fig. 2.1 に示す。3 番目の 0 は、z 方向に E_z の node が 0 ケあ

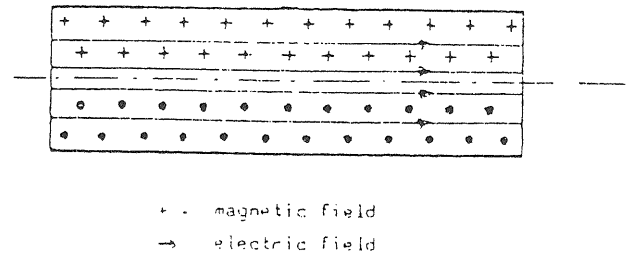


Fig. 2.1 TM010 mode.

ることを示している。円筒の中に $\beta\lambda$ の間隔で drift tube を設置すると Fig. 2.2 に示すように全ての gap の間には同相の電圧が誘起される。粒子は加速電圧の rf のタイミングに gap の部分を動き、減速電圧が gap に表われている時は、ドリフトチューブの中をシールドされながら動く。1 つの gap から次の gap までに高周波の位相は 2π だけ変化する。粒子が安定に加速されるためには、縦方向 (longitudinal) と横方向 (transverse) の安定性が要求される。縦方向の安定性は、Fig. 2.3 の ϕ_s の rf の位相にある粒子 (synchronous particle) のまわりを、他の粒子は振動しながら (位相振動、エネルギー振動) 加速されることで達成される。即ち ϕ_s より先に gap へ入った粒子は、受ける加速電圧が ϕ_s の粒子よりも小さいので、速度の増加が小さくなり、次の gap へ入射する時は ϕ_s の位相へ近づくことになる。これは安定位相 ϕ_s と同期して動く粒子の上にとる座標系では、他の粒子は静電ポテンシャルの谷の中で振動することに対応する (2.3 節 Fig. 2.9)。しかし静電ポテンシャルのもとでは、x, y, z の全方向についての安定な平衡はあり得ないとする Earnshaw の定理により、横方向の粒子は逆に不安定になってしまう (2.5 節)。そこで、transverse stability を確保するために、ドリフトチューブの中へ集束用四極磁石を組み込んでいる。エネルギーの低い領域では必要な集束磁場は強くなり ($F=qv \times B$)、しかも Q-magnet を組み込む drift チューブの space は小さくなるので ($\propto \beta\lambda$) 技術的に難しい問題となる。

Fig. 2.2 の AB 又は EF の平面は電場に関して対称であるので、この部分をとり出して re-entrant type の unit cell と考えることができる (Fig. 2.4)。この場合ドリフトチューブの gap の間に capacitance C が集中し、磁場が集中する外壁の部分をインダクタンス L と考えて、ユニットセルを LC の等価回路で置きかえて

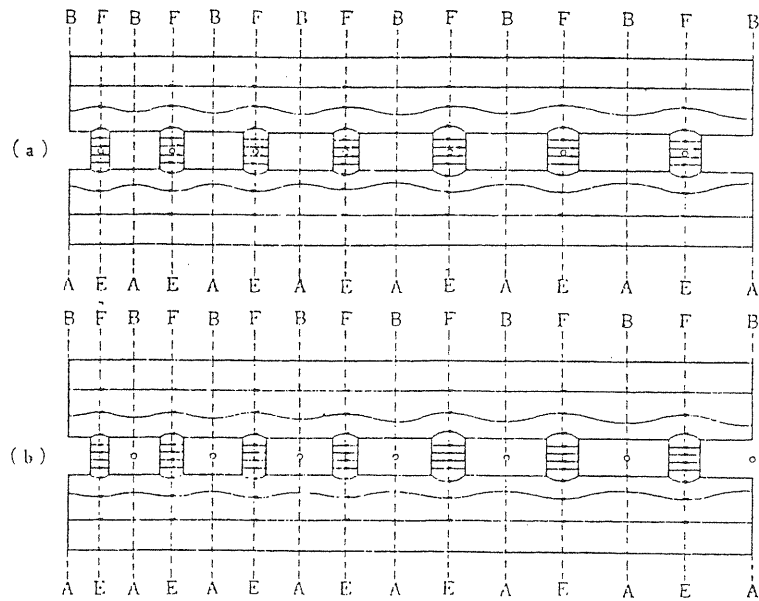


Fig.2.2 Alvarez 型加速空洞の加速電場の分布

(a) イオンは drift tube の間の加速ギャップで左より右に加速される。(b) は (a) より半周期後の電場分布。イオンは drift tube の中であって力を受けない。

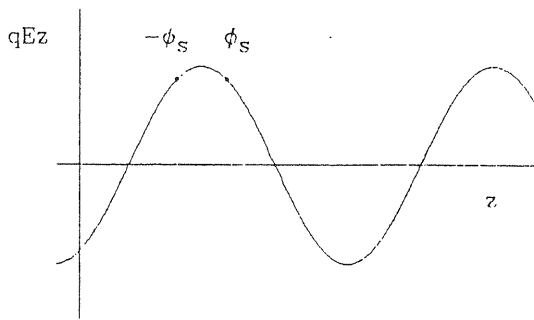


Fig.2.3 Accelerating field and stable phase.

考えられる(2.6節)。

Alvarez 型リアックの加速の有効性の目安として effective shunt impedance ZT^2 がある (Fig.2.5)。low energy end では ZT^2 は急速に減少するので、横方向の集束性の問題とあわせて、リアックへの入射エネルギーはできる限り高い方が望ましい。現在多く使用されている Cockcroft-Walton 型の preinjector は、その最大加速電圧は 800 kV 程度であり、DTL 側からはやや低すぎるエネルギーである。5章で述べる RFQ は injection energy を 2 MeV 程度まであげられる可能性があり、有望視されている。high energy 側では ZT^2 はゆるやかに減少するので shunt impedance の高い別の structure (side-coupled cavity 等) を考えることになる。

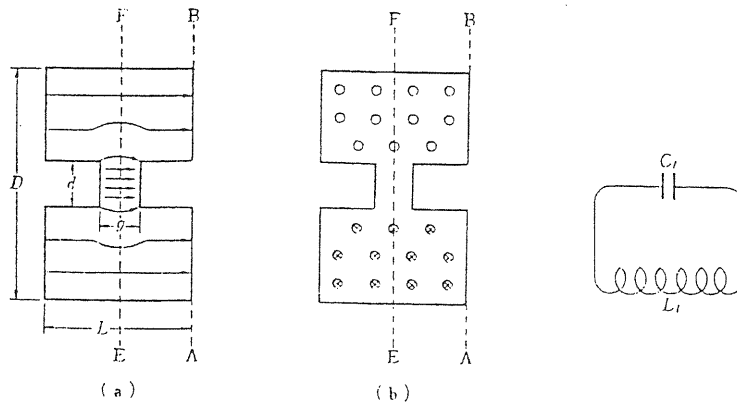


Fig.2.4 Alvarez 型加速タンクの unit cell を形成する空洞共振器

(a) 電場分布: 電場は幾何学的な対称性から EF 面に垂直であるから、EF 面に導体板を入れても電場の分布は変わらない。ABEF はリエントラント型空洞で half cell とよぶことがある。(b) (a) より 1/4 周期後の磁場分布。加速ギャップ d には電場が生じ、 D と d の間の円筒部には磁場が生じるので、(c) のような等価共振回路で空洞の性質を表わすことができる。

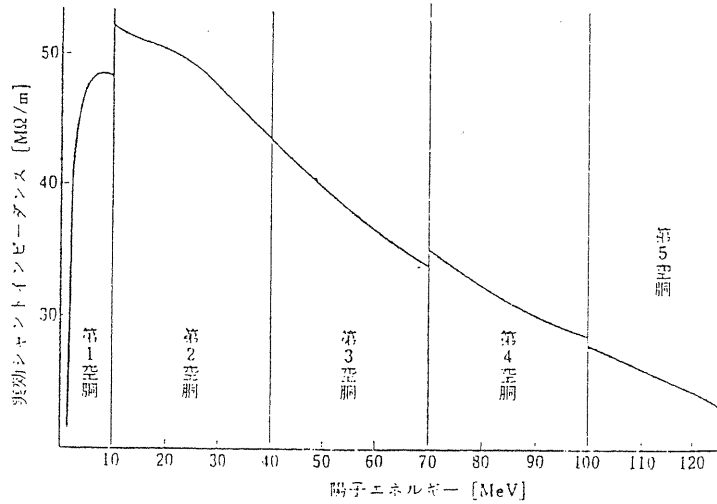


Fig. 2.5 201.25 MHz, 125 MeV 線形陽子加速器の effective shunt impedance
 空胴内径や drift tube の外径が各空胴によって異なるので, effective shunt impedance が不連続となっている

2.1 Alvarez linac の電磁場

(1) 基本式

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2)$$

$$\frac{dw}{dt} = q \vec{V} \cdot \vec{E} \quad (2.3)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\vec{p} = m r \vec{v}, \quad \frac{d}{dt} = \beta c \frac{d}{dz} \quad (2.4)$$

$$W^2 = (mc^2)^2 \gamma^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$$\frac{d}{dt}(r\beta) = r^3 \frac{d\beta}{dt} = c \frac{dr}{dz}$$

軸対称性の電磁場 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ を円筒座標系 (r, θ, z) で取扱う。加速に興味ある TM モード ($H_z = 0$) を考える。振動項 $e^{j\omega t}$ を仮定する。

Maxwell 方程式から

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$-\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$E_\theta = B_r = B_z = 0 \quad (2.9)$$

上式を E_z について整理すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

(2) Space harmonics

定常状態, 定在波を仮定する。

$$E_z(z, r, t) = E_z(z, r) \cos \omega t \quad (2.11)$$

加速管の構造は Fig. 2.6 に示すように $z = 0$ で対称であり, 周期的と仮定する (周期 $2L$)。この場合 $E_z(z, r)$ は Fourier 余弦展開できる。

$$E_z(z, r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(r) \cos \frac{m\pi z}{L} \quad (2.12)$$

$$a_0(r) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L E_z(z, r) dz \quad (2.13)$$

$$a_m(r) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L E_z(z, r) \cos \frac{m\pi z}{L} dz \quad (m \neq 0) \quad (2.14)$$

ここで周期を L でなく, $2L$ にとったのは, π -mode の運転では, 2つの gap ($2L$) で, 一周期となるからである。(2.11)式は波動方程式(2.10)を満足するので,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 a_m(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_m(r)}{\partial r} - k_m^2 a_m(r) \right] \times \cos \frac{m\pi z}{L} = 0 \quad (2.15)$$

上式より

$$a_m(r) = A_m I_0(k_m r) \quad (2.16)$$

と書けることがわかる。故に

$$E_z(z, r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m I_0(k_m r) \times \cos \frac{m\pi z}{L} \cos \omega t \quad (2.17)$$

$$k_m^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left[\left(\frac{m\lambda}{2L}\right)^2 - 1 \right] \quad (2.18)$$

I_0 は 0 次の変形 Bessel 関数であり, $I_0(x) = J_0(jx)$ の関係がある。他の成分は(2.5), (2.8)と公式 $\int x I_0(x) dx = x I_1(x)$ を用いると

$$E_r(z, r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m m \pi}{k_m L} I_1(k_m r) \times \sin \frac{m\pi z}{L} \cos \omega t \quad (2.19)$$

$$B_\theta(z, r, t) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \omega}{k_m c^2} I_1(k_m r) \times \cos \frac{m\pi z}{L} \sin \omega t \quad (2.20)$$

このように場を Fourier 展開した理由は, 粒子の速度がある space harmonic の位相速度と一致する時に, synchronous 条件が満足されて, 粒子が加速されるからである(1.4節)。

ここで $E_z(z, r)$ について次の仮定をする。

$$E_z(z, r=d) = \frac{E_0 L}{g} \quad \text{for} \quad -\frac{g}{2} \leq z \leq \frac{g}{2}$$

$$E_z(z, r=d) = (-1)^P \frac{E_0 L}{g} \quad \text{for} \quad \pm L - \frac{g}{2} \leq z \leq \pm L + \frac{g}{2} \quad P = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$E_z(z, r=d) = 0 \quad \text{その他} \quad (2.21)$$

この場合, $P\pi$ は隣接する cell の phase shift を表わす。

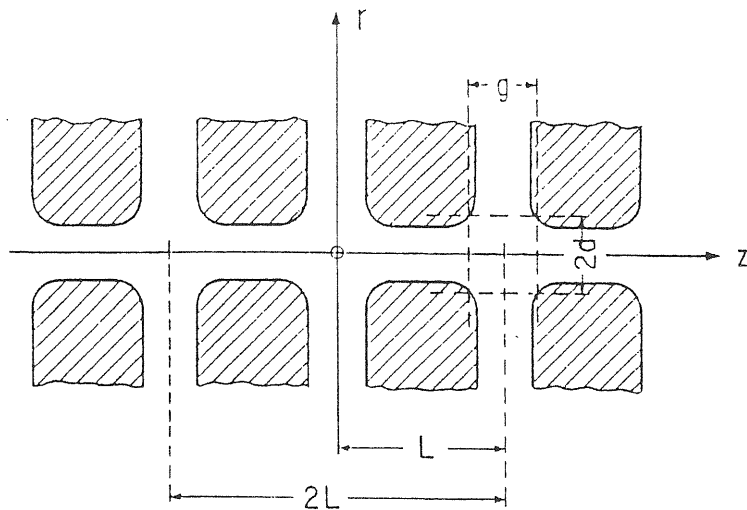


Fig.2.6 DTL gap geometry.

	$\Delta\phi$	
$P = 0$	0	0 - mode
$P = 1$	π	ヴィデレー型
$P = 2$	2π	Alvarez 型
$P = 4$	4π	4π - mode 加速*

* Alvarez 型リアックで, $m/e = 2(m_p/e)$ の値を持つ粒子を加速する。

(2.13)(2.14)(2.16)(2.21)から A_m を求めると

$$A_0 = \frac{E_0}{I_0(k_0 d)} \quad (2.22)$$

$$A_m = \frac{2E_0 \sin \frac{m\pi g}{2L}}{I_0(k_m d) \frac{m\pi g}{2L}} \quad \text{for } P+m = \text{偶数} \quad (2.23)$$

$$A_m = 0 \quad \text{for } P+m = \text{奇数}$$

(3) synchronous condition

定在波を示す(2.17)は 2 つの進行波の和として表わせる。

$$E_z(z, r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{2} I_0(k_m r) \left[\cos\left(\frac{m\pi z}{L} - \omega t\right) + \cos\left(\frac{m\pi z}{L} + \omega t\right) \right] \quad (2.24)$$

上式で表わされる進行波の位相速度は

$$v_{w,m} = \pm \frac{\omega L}{m\pi} \quad (2.25)$$

粒子速度 v_s と harmonic number P の波の位相速度が一致している時に, 粒子は $P\pi$ モードに synchronize しているという。

$$v_s = v_{w,P} \quad (2.26)$$

上式を書きなおすとユニットセルの長さLは次式で与えられる。

$$L_P = \frac{P\beta\lambda}{2} \quad (2.27)$$

Alvarez型の陽子加速ではP=2が使用される。

$$L = \beta\lambda \quad (2.28)$$

陽子リニアックでH_e⁺, d⁺等のイオンを加速しようとしても、普通は同期条件がくずれて加速できない。そこで、イオン速度v_iを陽子の1/2に選んで入射し、P=4の加速モードを考えてみると、この場合のユニットセルL_iは

$$L_i = \frac{4 \times \frac{\beta}{2} \lambda}{2} = \beta\lambda$$

となるので、陽子リニアックのディメンジョンのまま他のイオン(但しm/eが陽子の2倍の値を持つもの)を加速できることがわかる。これを4πモード加速と呼ぶ。

(2.23), (2.27)より次のように書く。

$$T = \frac{\sin \frac{m\pi g}{2L}}{I_0(k_m d) \frac{m\pi g}{2L}} = \frac{\sin \frac{\pi g}{\beta\lambda}}{I_0(k_m d) \frac{\pi g}{\beta\lambda}} \quad (2.29)$$

普通I₀(k_md) ~ 1と近似できるので

$$T = \frac{\sin \frac{\pi g}{\beta\lambda}}{\frac{\pi g}{\beta\lambda}} \quad (2.30)$$

Tをtransit time factorと呼ぶ。よって(2.23)は

$$A_m = 2 E_0 T \quad (2.31)$$

(2.18)(2.25)(2.26)より

$$k_P = \frac{2\pi}{r\beta\lambda} \quad (2.32)$$

(2.31)より、transit time factorは平均電場E₀とm-th harmonic componentとの比を表わすことがわかる。

Fig. 2.7にtransit time factor vs g/Lを示す。gapの長さの決め方には2つの制約がある。第1は、放電限界であり、第2はユニットセルの共振周波数f₀を一定に保つ必要性である。放電限界はいわゆるKilpatrick field limitで考えられる。原論文とは、異なる表現であるがE(MV/cm)を表面電圧、f(MHz)を周波数として

$$f = 1.643 \times 10^4 E^2 e^{-0.085/E} \quad (2.33)$$

でfield limitが与えられる。普通DTLではドリフトチューブ表面の最大電場が、Kilpatrick limitを越えないような設計をする。Fig. 2.8にKilpatrick limitを示す。共振周波数f₀はタンクの直径D、ドリフトチ

ューブの直径d、ドリフトチューブのコーナー半径、そしてg/Lの関数であるが、製作上の要請から、いくつかのmechanicalな寸法を同一にすることが多いので、むしろg/Lでf₀を調整するという設計法が選ばれる。普通は0.2~0.4の間を選ぶ。

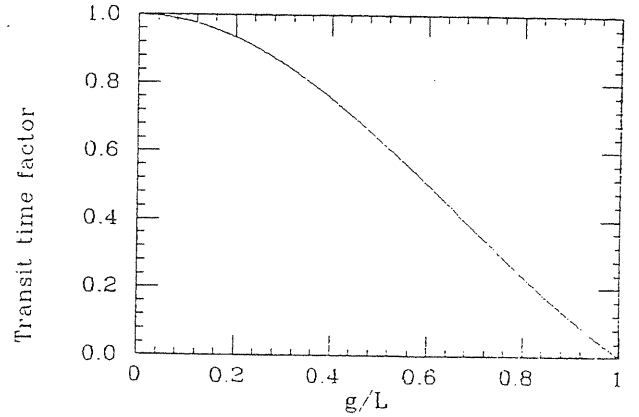


Fig.2.7 Transit time factor.

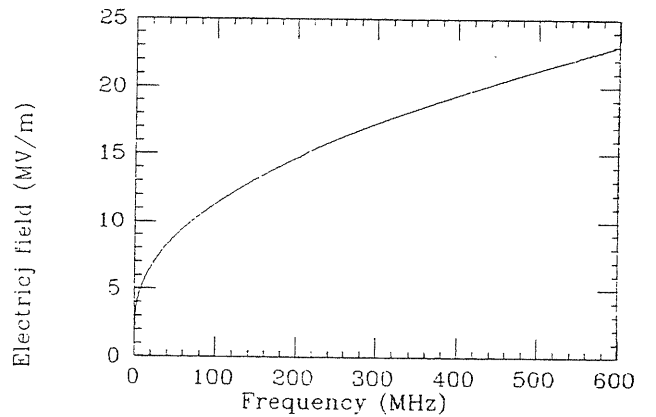


Fig.2.8 Kilpatrick field limit.

[4] energy gain

gap中心をrf位相φの時に通過する粒子の1周期(2L, 2つのgapを含む)あたりのenergy gainは、(2.3)(2.17)より

$$\begin{aligned} \Delta W &= q \int_{-L}^L E_z(z, r, t, \phi) dz \\ &= q \sum_{m=0}^{\infty} A_m I_0(k_m r) \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi z}{L} \cos(\omega t + \phi) dz \end{aligned}$$

ここで粒子速度v_s(一定と仮定する)と、前節の同期条件を用いると

$$\omega t + \phi = \omega \frac{z}{v_s} + \phi = \frac{P\pi z}{L} + \phi \quad (2.34)$$

故に

$$\begin{aligned} \Delta W &= q A_P L I_0(k_P r) \cos \phi \\ &= q 2E_0 T L I_0(k_P r) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.35)$$

$r \leq d$ では $I_0(k_P r) \sim 1$ だから one gapあたりの energy gain は

$$\Delta W = q E_0 T L \cos \phi \quad (2.36)$$

(2.35)より加速に寄与するのは P - th space harmonic だけであるとわかる。(2.19)(2.20)を使って transverse の energy gain を計算すると、やはり P - th space harmonic だけが寄与することがわかる。これは、数学的には、Fourier 級数の直交性に由来する性質である。以上より、進行波の P-th 空間高調波だけを考えれば充分であることがわかる。

$$E_z(z, r, t) = E_0 T I_0(k_P r) \times \cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{\beta_w c}\right) \quad (2.37)$$

$$E_r(z, r, t) = -r_w E_0 T I_1(k_P r) \times \sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{\beta_w c}\right) \quad (2.38)$$

$$B_\theta(z, r, t) = -\frac{\beta_w r_w}{c} E_0 T I_1(k_P r) \times \sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{\beta_w c}\right) \quad (2.39)$$

ここで β_w , r_w は、P-th harmonics に同期する粒子と等しいものとする。この場合

$$\phi = \omega t - \frac{\omega z}{\beta_w c} \quad (2.40)$$

は、同期粒子の場合は一定となることに注意する。

2.2 運動方程式

longitudinal motion, (2.2)より

$$\frac{dW}{dz} = q E_z \quad (2.41)$$

radial motion, (2.2)より

$$\beta c \frac{d}{dz} (m r \beta c \frac{dr}{dz}) = q (E + \vec{v}_z \times \vec{B}) r \quad (2.42)$$

波の位相速度と同じ速度で動く粒子(同期粒子)を仮定する。実際には、上の条件を満足するように、unit cell の長さ ($L = \beta \lambda$) を決め、粒子が定められた energy gain を得るように rf 電力を供給する。この場合、進行波の位相と同期粒子の位相差 ϕ_s は一定となる。

$$\phi_s = \omega t_s - \frac{2\pi}{\lambda} \int \frac{dz}{\beta} \approx \omega t_s - \frac{2\pi z}{\beta_s \lambda} \quad (2.43)$$

他の粒子は同期粒子の位相 ϕ_s とエネルギー W_s を基準にして考える。

$$\frac{d}{dz} (\phi - \phi_s) = \omega \left(\frac{dt}{dz} - \frac{dt_s}{dz} \right) = \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_s} \right)$$

$$= -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{W - W_s}{\beta_s^3 r_s^3 m c^2} \quad (2.44)$$

s は同期粒子を表わす。

(2.41)(2.37)より

$$\frac{d}{dz} (W - W_s) = q E_0 T I_0(k_P r) \times (\cos \phi - \cos \phi_s) \quad (2.45)$$

(2.44)(2.45)より

$$\frac{d}{dz} (\beta_s^3 r_s^3 \frac{d}{dz} (\phi - \phi_s)) = -\frac{q}{m c^2} \frac{2\pi}{\lambda} E_0 T \times I_0(k_P r) (\cos \phi - \cos \phi_s) \quad (2.46)$$

transverse motion は(2.42)(2.38)(2.39)より

$$\frac{d}{dz} (\beta r \frac{dx}{dz}) = \frac{q}{m c^2} \left[-E_0 T I_1(k_P x) \times \sin \phi r_w \frac{1 - \beta \beta_w}{\beta} \right] \quad (2.47)$$

$$\frac{d}{dz} (\beta r \frac{dy}{dz}) = \frac{q}{m c^2} \left[-E_0 T I_1(k_P y) \times \sin \phi r_w \frac{1 - \beta \beta_w}{\beta} \right] \quad (2.48)$$

2.3 Longitudinal motion

仮定 軸付近 $I_0(k_P r) \sim 1$

$\beta_s, r_s, E_0, T, \phi_s$ を一定とみなす。

$$\cos \phi - \cos \phi_s = -\sin \phi_s \Delta \phi$$

$$\Delta \phi = \phi - \phi_s$$

$$\Delta W = W - W_s$$

(2.44)(2.45)より

$$\frac{d}{dz} \Delta \phi = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Delta W}{\beta_s^3 r_s^3 m c^2} \quad (2.49)$$

$$\frac{d}{dz} \Delta W = -q E_0 T \sin \phi_s \Delta \phi \quad (2.50)$$

上の2式より

$$\frac{d^2}{dz^2} \Delta \phi = \frac{2\pi q E_0 T \sin \phi_s}{\lambda \beta_s^3 r_s^3 m c^2} \Delta \phi \quad (2.51)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \Delta W = \frac{2\pi q E_0 T \sin \phi_s}{\lambda \beta_s^3 r_s^3 m c^2} \Delta W \quad (2.52)$$

上式は $\sin \phi_s < 0$ の場合に $\Delta \phi, \Delta W$ は安定粒子のまわりで単振動することを示している。そこで粒子が受ける effective な力を、近似しない形で書くと

$$F = -\frac{2\pi q E_0 T}{\lambda \beta_s^3 r_s^3 m c^2} (\cos \phi - \cos \phi_s) \quad (2.53)$$

これから粒子が感じる実効的な potential は

$$U = -\int F d\phi$$

$$= \frac{2\pi q E_0 T}{\lambda \beta_s^3 \gamma_s^3 mc^2} (\sin \phi - \phi \cos \phi_s) \quad (2.54)$$

Fig. 2.9 に実際に粒子が感じる力 qE_z , effective potential, $\phi - \Delta W$ 平面上で単振動の限界を表わす粒子の軌道(セパトリックス)を示す($\phi_s = -30^\circ$ の場合を示してある)。

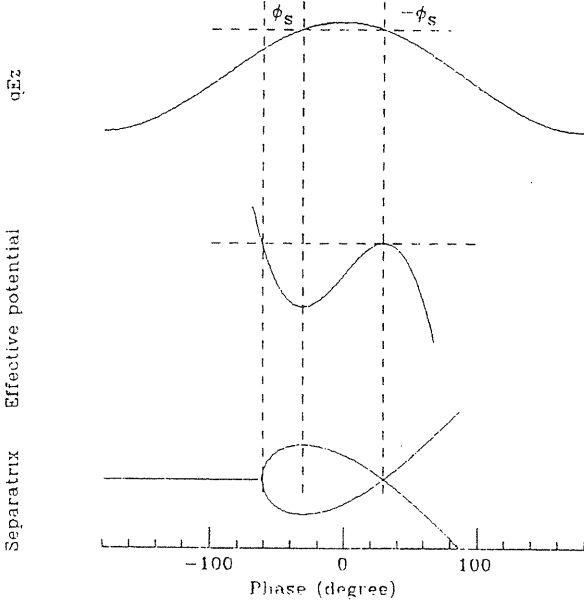


Fig.2.9 Acceleration field, effective potential and trajectories of separatrix vs phase.

$\phi - \Delta W$ の位相空間の概念を使って考えるとわかりやすいので, (2.46) に $\frac{d}{dz} \Delta \phi$ をかけて積分すると

$$\frac{(\Delta W)^2}{\frac{\lambda}{2\pi} 2\beta_s^3 \gamma_s^3 mc^2 q E_0 T} + \sin \phi - \phi \cos \phi_s + C = 0 \quad (2.55)$$

積分定数 C の値に対応して, $\phi - \Delta W$ 空間で粒子の軌道を書くことができる。特に

$$C = \sin \phi_s - \phi_s \cos \phi_s \quad (2.56)$$

の場合に, 軌道は Fig. 2.10 に示すようにセパトリックスとなり, 安定領域限界を与える。

そこで, $\Delta W = 0$ とおくと

$$\sin \phi - \phi \cos \phi_s + \sin \phi_s - \phi_s \cos \phi_s = 0 \quad (2.57)$$

第1の解は, $\phi = -\phi_s$ であり, セパトリックスの右端を与える。第2の解(左端)は数値計算で求めるが, およそ $2\phi_s$ の値になる。故に longitudinal な phase acceptance (この範囲内の rf 位相へ入射する粒子を安定に加速できる)は

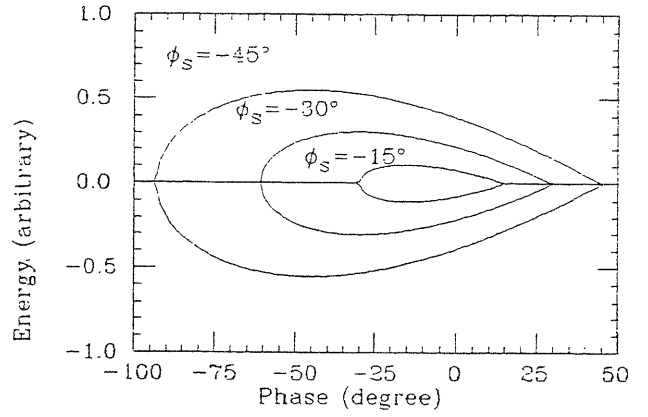


Fig.2.10 Longitudinal acceptance.

$$\Delta \Phi \sim |\phi_s| + |2\phi_s| = 3|\phi_s| \quad (2.58)$$

許されるエネルギー振動の最大振幅は, (2.55)(2.56) より $\phi = \phi_s$ とおくと

$$\Delta W_{\max} = \pm \left\{ \frac{2}{\pi} \lambda q E_0 T mc^2 \beta_s^3 \gamma_s^3 \times (\phi_s \cos \phi_s - \sin \phi_s) \right\}^{1/2} \quad (2.59)$$

いわゆる longitudinal acceptance は $\phi - \Delta W$ 平面での ellipse の面積で示されて

$$A_1 \sim \pi \frac{3|\phi_s|}{2} \Delta W_{\max} \quad (2.60)$$

KEK 20 MeV のパラメータでは $\Delta W = \pm 44$ keV となる。但し $\lambda = 1.5$ m, $E_0 = 1.5$ MV/m, $T = 0.75$, $\beta_s = 0.04$, $\phi_s = -26^\circ$ とした。

Fig. 2.11 と Fig. 2.12 に KEK 20 MeV 陽子リニアックと, 現在計画中の 40 MeV 陽子リニアック (20 MeV \rightarrow 40 MeV まで加速) の longitudinal phase acceptance と夫々の out put における emittance を示す。

セパトリックス内の粒子の運動は $\Delta \phi$, ΔW の夫々については単振動, $\phi - \Delta W$ 平面上では ellipse を描くことになる。単振動の波数は(2.51)より

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} = \sqrt{-\frac{2\pi q E_0 T \sin \phi_s}{\lambda \beta_s^3 \gamma_s^3 mc^2}} \quad (2.61)$$

λ_1 は単振動の1周期に粒子が進む距離を与える。q, E_0 , T, は正であるから $\sin \phi_s < 0$ が条件となっている。Fig. 2.13 に KEK 20 MeV 陽子リニアックの longitudinal phase oscillation を示す。(longitudinal motion については 4.2 も参照のこと)

プリバンチャー

(2.58)より DTL LINAC が capture できる粒子はたかだか $3|\phi_s|$ にすぎないことがわかった。普通 $\phi_s \sim -30^\circ \sim -25^\circ$ の値が選ばれるので入射ビーム (LINAC にとっては DC 的なビーム) の 25% しか capture

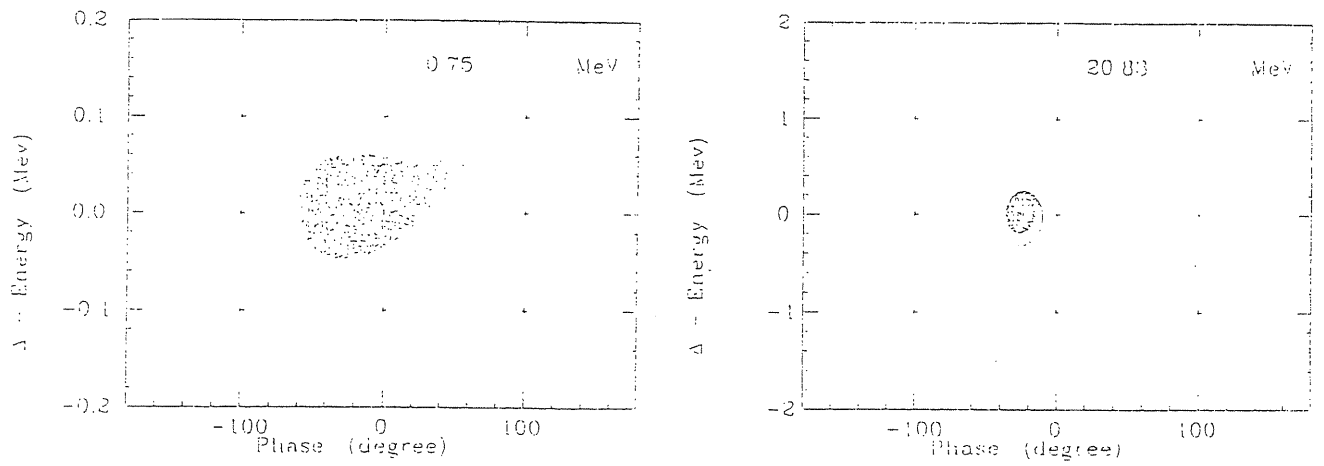


Fig.2.11 Longitudinal acceptance of KEK 20-MeV DTL.

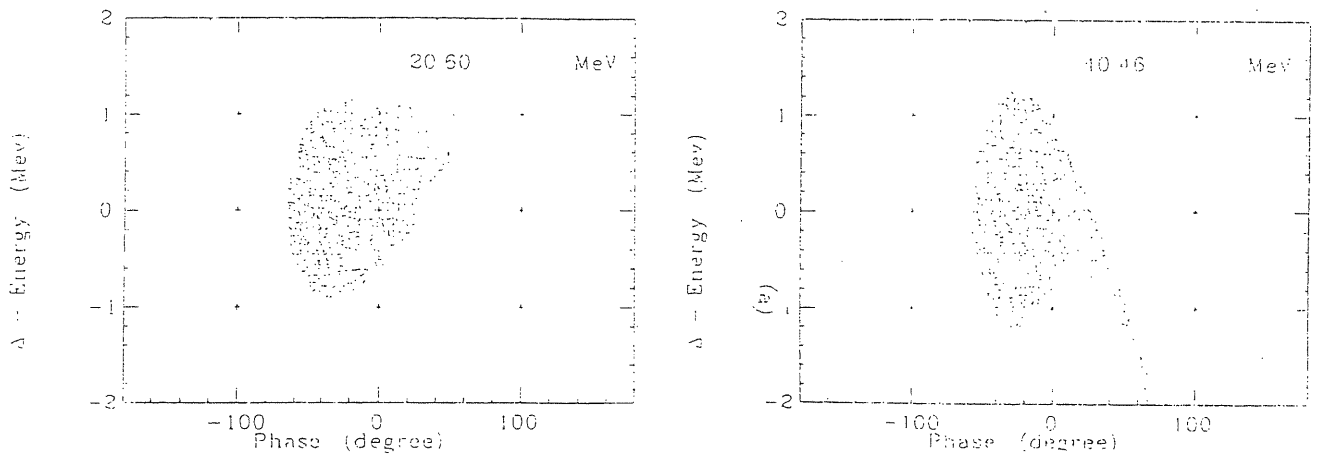


Fig.2.12 Longitudinal acceptance of KEK 40-MeV DTL.

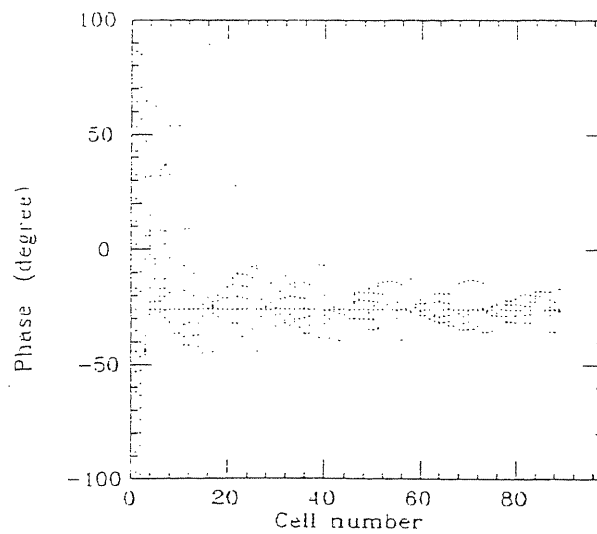


Fig.2.13 Longitudinal phase oscillation.

できないことがわかる。そこでリニアックから距離だけ上流側に簡単な rf 空洞をおいて $V_0 \sin \omega t$ の加速電圧を与えることにより、入射ビームに速度変調をかけ、リニアックの入口で、アクセプタンスの中へ入る粒子の個数を多くする工夫をする。このシステムをプリバンチャーと呼ぶ。1 個の rf 空洞を使用した場合、capture 効率は 60~70% まで上げることができる。

2.4 Liouville の定理と adiabatic damping

Liouville の定理、断熱変化の概念を用いて、phase space ($\phi - \Delta W$) 上の粒子の運動を考えるとわかりやすい場合がある。Liouville の定理では、位相空間上でしめる粒子の面積が一定とされる。即ち longitudinal emittance と transverse emittance が保存される。(2.44) (2.45) は Hamiltonian として

$$H = -\frac{\pi}{\lambda \beta_s^3 r_s^3 mc^2} (\Delta W)^2 - qE_0 T I_0 (k_p r) \times (\sin \phi - \phi \cos \phi_s) \quad (2.62)$$

を選ぶと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\Delta W) &= -\frac{\partial H}{\partial (\Delta \phi)}, \\ \frac{d}{dz} (\Delta \phi) &= \frac{\partial H}{\partial (\Delta W)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

と表わせるので Liouville の定理が応用できる。リニアックでは (2.62) の β_s , r_s 等のパラメータが変化するのがこの変化の割合が、 λ_1 に対してゆるやかな断熱変化の場合には、初めに位相空間上の ellipse 上の粒子集団は、パラメータが変化し、H が変化したあとでも H が一定の ellipse 上にある。故に、加速管の入口を 1、出口を 2 で表わすと、(2.62) で表わされる ellipse の軸の比は

$$\frac{\Delta W_1}{\Delta \phi_1} = \left(-\frac{\lambda}{2\pi} \beta_1^3 r_1^3 mc^2 q E_{0,1} T_1 \sin \phi_{s,1} \right)^{1/2} \quad (2.64)$$

$$\frac{\Delta W_2}{\Delta \phi_2} = \left(-\frac{\lambda}{2\pi} \beta_2^3 r_2^3 mc^2 q E_{0,2} T_2 \sin \phi_{s,2} \right)^{1/2} \quad (2.65)$$

又 Liouville の定理から

$$\Delta \phi_1 \Delta W_1 = \Delta \phi_2 \Delta W_2 \quad (2.66)$$

故に加速管の入口と出口では位相振動の振幅は次のように減少する。

$$\frac{\Delta \phi_2}{\Delta \phi_1} = \left[\frac{\beta_1^3 r_1^3 E_{0,1} T_1 \sin \phi_{s,1}}{\beta_2^3 r_2^3 E_{0,2} T_2 \sin \phi_{s,2}} \right]^{1/4} \quad (2.67)$$

エネルギー振動の振幅は

$$\frac{\Delta W_2}{\Delta W_1} = \left[\frac{\beta_2^3 r_2^3 E_{0,2} T_2 \sin \phi_{s,2}}{\beta_1^3 r_1^3 E_{0,1} T_1 \sin \phi_{s,1}} \right]^{1/4} \quad (2.68)$$

2.5 Transverse motion

(1) rf defocusing

2.2 節の (2.47) を書きなおす。仮定

$$I_1(k_p x) \sim \frac{k_p x}{2} = \frac{\pi x}{\beta_s r_s \lambda}, \quad \beta_s = \beta_w = \beta$$

$$\frac{d}{dz} \left(\beta r \frac{dx}{dz} \right) = \frac{q}{mc^2} \frac{-\pi E_0 T \sin \phi}{\lambda \beta^2 r^2} x \quad (2.69)$$

longitudinal stability の領域では $\sin \phi < 0$ であるから上式によれば x は exponential で増加してしまう。定性的には、 ϕ_s は、field が增加する位相にあるので、gap からドリフトチューブへ入る時の方が radial force が強いからと考えることができる (Fig. 2.14)。イオン加速では $\beta \ll 1$ の場合が多いので、rf defocusing 力は大きくなる。この defocusing 力をおさえて粒子を安定に加速するために、外部磁場を使用する。なお、相対論的極限では rf defocus はなくなることに注意する。Alvarez 型では、普通はドリフトチューブの中に四極マグネットを組み込んで (Fig. 2.15)、強集束法によりビームを安定させる (ref 9,10)

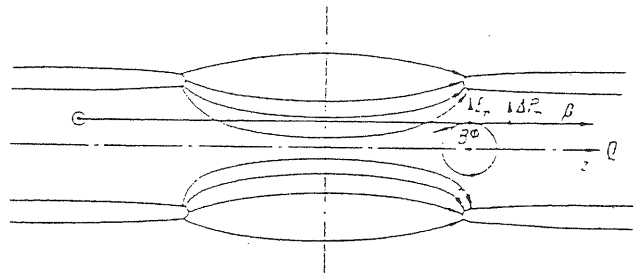


Fig. 2.14 Radial defocusing force.

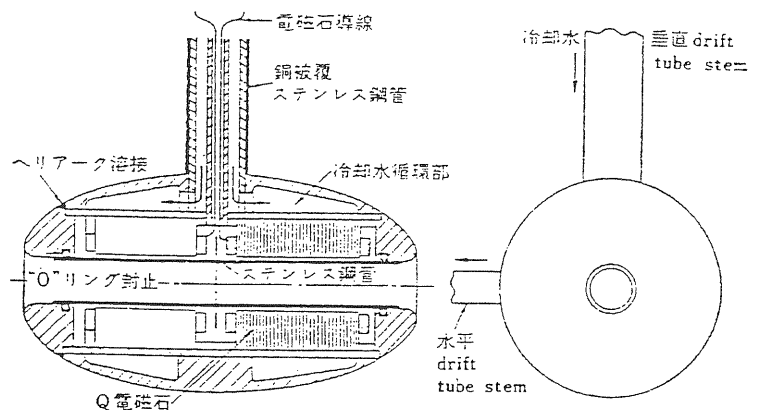


Fig. 2.15 BNL の AGS 入射器として使用された 50 MeV 線形電子加速器の drift tube

(2) 四極マグネット(Q磁石)による強集束
Q磁石による力は、磁場勾配を

$$B' = \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (2.70)$$

とすれば、

$$F_x = -qvB'y, \quad F_y = qvB'x \quad (2.71)$$

なる力を粒子は受ける(Fig. 2.16)。故に(2.69)へ外場による項を加えると

$$\frac{d}{dz} \left(\beta_s r_s \frac{dx}{dz} \right) = \frac{q}{mc^2} \times \left(\frac{-\pi E_0 T \sin \phi}{\lambda \beta_s^2 r_s^2} - cB' \right) x \quad (2.72)$$

式を簡略化するために次のように置きかえる。

$$k^2_{t,rf} = -\frac{q}{mc^2} \frac{\pi E_0 T \sin \phi}{\lambda \beta_s^2 r_s^2} \quad (2.73)$$

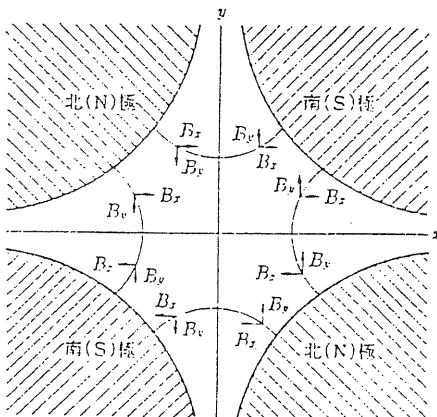
$$k^2_{t,q} = \frac{q}{mc^2} \frac{cB'}{\beta_s r_s} \quad (2.74)$$

$$k^2_t = k^2_{t,q} - k^2_{t,rf} \quad (2.75)$$

故に(2.72)は

$$\frac{1}{\beta_s r_s} \frac{d}{dz} \left(\beta_s r_s \frac{dx}{dz} \right) = -k^2_t x \quad (2.76)$$

k^2_t は z の関数であり、 B' の符号はFDFD又はFFDDの形で周期的に変化し、強さも変化する。設計するリアックの加速電流が大きくて、space charge forceが無視できない場合には、(2.72)の右辺にspace chargeによる項を付加しなければいけない。更にリアックの中で B' をどのように変化させるべきかという面白い問題もあるが、ここでは、まずどのようにして(2.76)を解いて、安定領域を見つけるかを以下の節で考えてみる。



(3) Hill's equation

(2.76)は一般に次の形に書ける。 r は x 又は y を表わすと考えてよい。

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + K^2(z)r = 0 \quad (2.77)$$

$K(z)$ は周期 l の周期関数とする。

$$K^2(z+l) = K^2(z) \quad (2.78)$$

次の形の(2.77)の解を求めてみよう。

$$r = c \sqrt{\beta(z)} \cos(\psi(z) + \delta) \quad (2.79)$$

(2.79)を(2.77)へ代入すると

$$\frac{d^2}{dz^2} \sqrt{\beta} - \frac{1}{(\sqrt{\beta})^3} + K^2(z)\sqrt{\beta} = 0 \quad (2.80)$$

$$\psi(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\beta} \quad (2.81)$$

ベータatron関数 $\beta(z)$ は $K(z)$ と同じ周期性を持ち、解の振幅を決め、位相関数 $\psi(z)$ は解の位相を決める。特に1周期 l 当りの位相の進みを μ と定義する。

$$\mu = \int_{z_0}^{z_0+l} \frac{dz}{\beta} \quad (2.82)$$

考えているorbitのとりうる最大半径を a と仮定し、その時の β を β_{max} と書くと(2.79)は

$$r = \frac{a}{\sqrt{\beta_{max}}} \sqrt{\beta} \cos(\psi + \delta) \quad (2.83)$$

と書ける。

ビームのエミッタンスは $r-r'$ 平面上の面積で定義する。

$$E = \pi \int r \int r' = \pi a \frac{a}{\beta_{max}} = \frac{\pi a^2}{\beta_{max}} \quad (2.84)$$

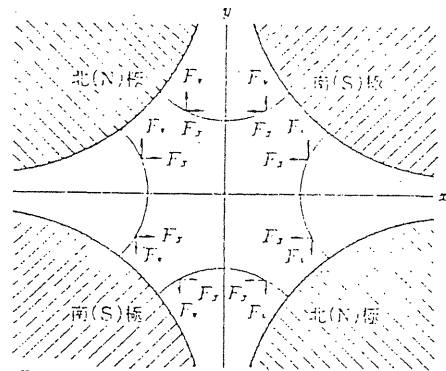


Fig. 2.16 Q磁石(4極磁石, quadrupole magnet)のつくる磁場と正に帯電した粒子が紙面の裏から表へすすむとき受ける力
 x 方向には集束し、 y 方向には発散する。

[4] transfer matrix

Hill's equation を解くために transfer matrix の方法を用いる。一般に $z = z_0 + \ell$ までの運動を transfer matrix を用いて書くことができる。

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_{z+\ell} = M \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}_z \quad (2.85)$$

M は一般に次の形で書ける。

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

$$\beta \gamma - \alpha^2 = 1 \quad (2.87)$$

注) ここで使用する β は v/c とは異なるので注意する。運動が安定するためには、1 周期 ℓ について、

$$|\cos \mu| \leq 1 \quad (2.88)$$

が必要となる。

$$\text{又, } \alpha = -\frac{\beta'}{2} \quad (2.89)$$

が成り立つ。

さて、力が $z = z_0$ から $z_0 + \ell$ まで一定の場合には $(k^2(z) = \pm k^2)$ (2.77) は簡単に解ける。

focusing section $k^2 > 0$

$$M_f = \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{\sin \theta}{k} \\ -k \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

$$\theta = k\ell \quad (2.91)$$

defocusing section $-k^2 < 0$

$$M_d = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \frac{\sinh \theta}{k} \\ k \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

drift space $k^2 = 0$

$$M_{dr} = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

ここで、Fig. 2.17 に示すような対称性を持つ場合

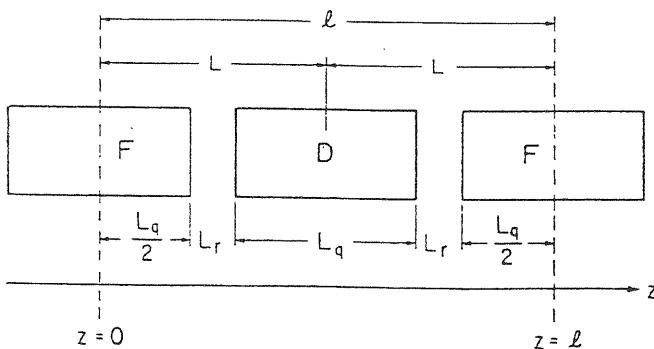


Fig.2.17 FD lattice.

について transfer matrix の性質をまとめてみよう。この配置では $z = 0$ で k^2 が対称であり、又、 $z = \frac{\ell}{2}$ に関して対称になっていることを利用すると、 $z =$

0 から $z = \ell$ までの transfer matrix は、その区間を $2n$ 個のエレメントに分割できる時に次のように書まる。

$$M = M_1 M_2 \cdots M_n \cdot M_n \cdots M_2 M_1 = M'_h \cdot M_h \quad (2.94)$$

$$M'_h = \begin{pmatrix} M_{h22} & M_{h12} \\ M_{h21} & M_{h11} \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

ここで各エレメントの matrix は (2.90) (2.92) (2.93) の形だから $M_{11} = M_{22}$ である。故に $M_{11} = M_{22}$ が成り立ち、(2.86) とくらべると、

$$\alpha(0) = 0 \quad (2.96)$$

が成り立つ。よって (2.89) より

$$\beta'(0) = 0 \quad (2.97)$$

又、 β は $k(z)$ と同じ対称性を持つことから、 β は focusing magnet の中心で最大となり、defocusing magnet の中心で最小となることがわかる。

(2.85) (2.86) (2.87) (2.94) (2.95) (2.96) より、

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu & \beta_{\max} \sin \mu \\ -\frac{\sin \mu}{\beta_{\max}} & \cos \mu \end{pmatrix} = M'_h M_h \quad (2.98)$$

ここで $z = 0$ を Fig. 2.17 に示すように focusing magnet の中心にとっているので $\beta(0) = \beta_{\max}$ となる。

(2.98) と $\det M = 1$ より、

$$\cos \mu = M_{h11} M_{h22} + M_{h12} M_{h21} = 2 M_{h11} M_{h22} - 1 \quad (2.99)$$

$$\beta_{\max}^2 = -\frac{M_{h12} M_{h22}}{M_{h21} M_{h11}} \quad (2.100)$$

次に、 $z = \frac{\ell}{2}$ から $z = \frac{\ell}{2} + \ell$ までの transfer matrix 計算する。 $z = \frac{\ell}{2}$ で $\beta = \beta_{\min}$ だから

$$\begin{pmatrix} \cos \mu & \beta_{\min} \sin \mu \\ -\frac{\sin \mu}{\beta_{\min}} & \cos \mu \end{pmatrix} = M_h M'_h \quad (2.101)$$

故に、

$$\beta_{\min}^2 = -\frac{M_{h12} M_{h11}}{M_{h21} M_{h22}} \quad (2.102)$$

ビームの modulation ratio を次のように定義する。

(2.100) (2.102) より、

$$\varphi = \frac{\Gamma_{\max}}{\Gamma_{\min}} = \sqrt{\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}} = \sqrt{\frac{M_{h22}}{M_{h11}}} \quad (2.103)$$

以上の計算により、ビームの radial motion を表わす重要なパラメータである phase advance μ , modulation ratio φ , betatron function β_{\max} と transfer matrix との関係がわかった。より具体的には、gap を 2 つ含む長さ ℓ を period に選び、その半分 $\ell/2$ までの transfer matrix を計算すれば良い。

最後に rf defocusing force を thin lens approximation で処理することにしよう。即ち Fig 2.17 の gap

の部分 (L_r) で受ける rf defocusing force を次の形で近似する。

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

$$-\frac{1}{f_d} = k \sinh(kL) \approx k^2 L \left(1 + \frac{(kL)^2}{6} \right) \geq 0 \quad (2.105)$$

$$S = \frac{\cosh(kL) - 1}{k \sinh(kL)} - \frac{L_a}{2} = \frac{L_r}{2} \left(1 - \frac{(kL)^2}{12} \right) \quad (2.106)$$

k^2 として、(2.73) の $k_{r,rf}^2$ をとって、

$$\theta_r^2 = -\frac{q}{mc^2} \frac{\pi E_0 T \sin \phi L^2}{\lambda \beta_s^3 r_s^3} = k_{r,rf}^2 L^2 \quad (2.107)$$

$$\Delta = -\theta_r^2 = -(k_{r,rf} L)^2 = -(kL)^2 \quad (2.108)$$

最終的に、 M_r は次の形で近似する。

$$M_r \approx \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_r}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\Delta}{L} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L_r}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

これは、gap の長さの半分の drift space + impulse + drift space の形に相当している。

以上の知識を基礎にして、長さ L についての matrix を計算し、(2.99) (2.100) (2.103) の関係から beam の運動を表わすパラメータを求める。

$$\theta_0 = k_q L \quad (2.110)$$

$$k_q^2 = \frac{q}{mc^2} \frac{c B'}{\beta_s r_s} \quad (2.111)$$

$$A = L_q / L \quad (2.112)$$

このように parameter を定義すると、

FDFD の場合

$$\cos \mu = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{3} \right) A^2 \theta_0^4 - 2 \Delta \quad (2.113)$$

$$r = \frac{\beta_{\max}}{L} = \frac{2 \left[1 + \left(1 - \frac{A}{2} \right) \frac{A}{2} \theta_0^2 - \frac{3}{4} \Delta \right]}{\sin \mu} \quad (2.114)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}} = \frac{1 + \left(1 - \frac{A}{2} \right) \frac{A}{2} \theta_0^2 - \frac{\Delta}{2}}{\cos \frac{\mu}{2}} \quad (2.115)$$

$$\theta_0^2 = \left(\frac{1 - \cos \mu - 2 \Delta}{A^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{3} \right)} \right)^{1/2} \quad (2.116)$$

FFDD の場合

$$\cos \mu = 1 - \left(4 - \frac{4}{3} A \right) A^2 \theta_0^4 - 8 \Delta \quad (2.117)$$

$$r = \frac{\beta_{\max}}{L} = \frac{4 \left[1 + A \theta_0^2 - \frac{5}{2} \Delta \right]}{\sin \mu} \quad (2.118)$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}}} = \frac{1 + A \theta_0^2 - 2 \Delta}{\cos \frac{\mu}{2}} \quad (2.119)$$

$$\theta_0^2 = \left(\frac{1 - \cos \mu - 8 \Delta}{A^2 \left(4 - \frac{4}{3} A \right)} \right)^{1/2} \quad (2.120)$$

θ_0^2 が決まると (2.110) (2.111) より B' が求まる。

$$B' = \frac{mc r_s \beta_s \theta_0^2}{q L^2} \quad (2.121)$$

Fig.2.18 に FDFD の場合の stability diagram を示す。

横軸に Δ (rf defocusing) をとり、縦軸に θ_0^2 (focusing force $\propto B'$) をとる。安定領域は $\cos \mu = -1$ と $\cos \mu = 1$ の太い点線で囲まれた部分である。

focusing 力が強くなると φ (modulation の比) は大きくなること、又 r (β_{\max}) には θ_0^2 の最適値があることがわかる。

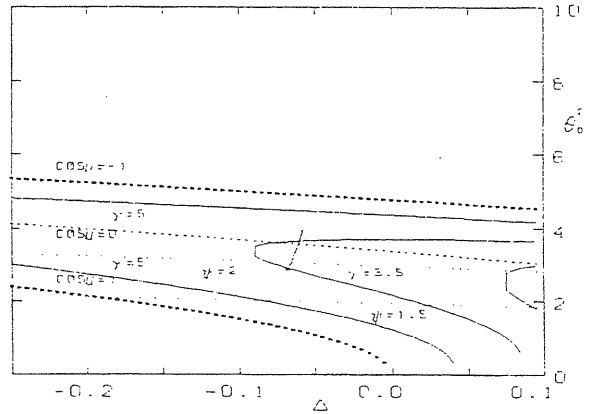


Fig.2.18 Stability diagram.

2.6 Linear chain model

ユニットセルを LCR 回路のタンクと置きかえて、周期的な structure を電気回路で考えると、周期的な structure に特有の重要な性質が導き出せる。Fig. 2.19 のような coupling 定数 r で結ばれている同一の N 個の LC 回路を考える。

初めにこれらの N 個が ring を作っていると考える。

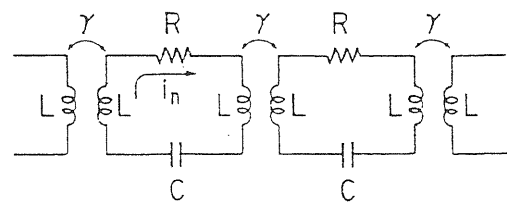


Fig.2.19 A ring of LC circuits.

回路方程式は

$$i_n \left(2j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right) + j\omega L r (i_{n-1} + i_{n+1}) = 0 \quad (2.122)$$

変形すると

$$i_n \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + \frac{r}{2} (i_{n-1} + i_{n+1}) = 0 \quad (2.123)$$

$$\omega_0'^2 = \frac{1}{2LC}, \quad Q = \frac{2\omega_0 L}{R}, \quad \frac{\omega_0'^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0'^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0}{j\omega Q} \quad (2.124)$$

この解は

$$i_n(q) = e^{j\frac{2\pi q n}{N}} \quad (2.125)$$

$$1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2} + r \cos \frac{2\pi q}{N} = 0 \quad (2.126)$$

nは cell 番号, q は mode 番号である。
周期的境界条件から

$$i_{N+1}(q) = i_1(q) \quad (2.127)$$

これから q の整数条件が出る。

$$q = m = \text{integer}, 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.128)$$

ここで $i_n = i_{N+1}^*$ に注意する。 i_n と i_n^* は、時間項を考えると進行波を表わしていることがわかる。定在波を作ってみると、

$$U_n(q) = \cos \frac{2\pi q n}{N} = \frac{i_n(q) + i_n(q)^*}{2} \quad (2.129)$$

$$V_n(q) = \sin \frac{2\pi q n}{N} = \frac{i_n(q) - i_n(q)^*}{2j} \quad (2.130)$$

U_n, V_n も当然ながら (2.123) の解となっている。
そこで (2.123) より $n=0$ とおくと、

$$U_0 \left(1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2}\right) + \frac{r}{2} (U_{-1} + U_1) = 0 \quad (2.131)$$

$U_{-1} = U_1$ だから、

$$U_0 \left(1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2}\right) + r U_1 = 0 \quad (2.132)$$

(2.123) にて $n=N$ とおくと、

$$U_N \left(1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2}\right) + r U_{N-1} = 0 \quad (2.133)$$

(2.132) (2.133) は回路的には Fig. 2.20 のように half cell で表わされ、これはリング状のタンクを cell

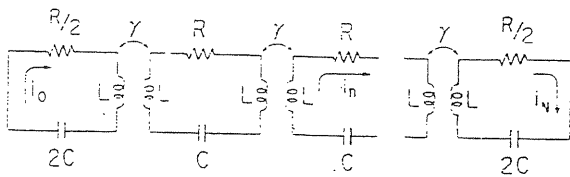


Fig.2.20 A N+1 linear chain model.

の中心から分割して chain にしたことになる。linear chain を、格子振動でよくみかける周期的境界条件を使って導く方法を Nagle (ref. 11) に従って紹介した。まとめると、回路方程式は、

$$i_0 \left(1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2}\right) + r i_1 = 0$$

$$i_n \left(1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2}\right) + \frac{r}{2} (i_{n-1} + i_{n+1}) = 0 \quad (2.134)$$

$$i_N \left(1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2}\right) + r i_{N-1} = 0$$

$$i_n^q = \sqrt{\frac{2W_q}{N}} \cos \frac{\pi n q}{N} \quad (2.135)$$

$$\frac{\omega_q^2}{\omega_0^2} = \left(1 + r \cos \frac{\pi q}{N}\right)^{-1} \quad (2.136)$$

q は mode number で、0, 1, 2, ..., N

規格化定数 $W_q = \frac{1}{2}$, $q=0, N$, その他は 1。

dispersion relation (2.136) を Fig. 2.21 に、plot した。ここで $q=0$ を 0 mode, $q = \frac{N}{2}$ を $\frac{\pi}{2}$ mode, $q=N$ を

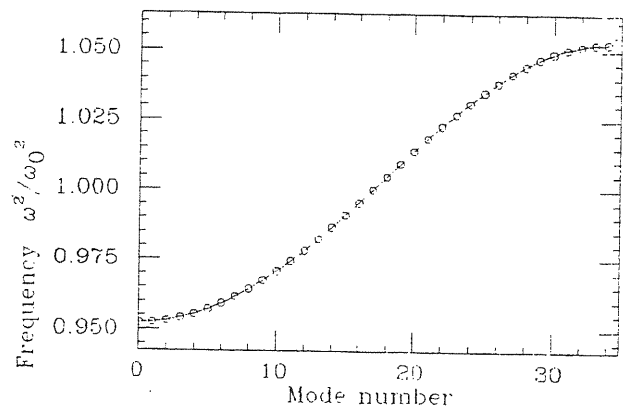


Fig.2.21 Dispersion relation. $\gamma=0.05$.

π mode と呼ぶが、これは $\frac{\pi q}{N}$ が隣りあう cell の間の phase shift を与えるからである。0 mode と π mode の間をパスバンドと呼ぶ。そのバンド幅 (BW) は (2.136) より

$$BW \sim \omega_0 r \quad (2.137)$$

隣りあうモードの間かくを mode separation と呼び、

Fig. 2.21 より $\frac{\pi}{2}$ mode で最大となることがわかる。

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \sim \frac{r \pi^2}{4N^2} \text{ at } 0 \text{ and } \pi \text{ mode} \quad (2.138)$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \sim \frac{r \pi}{2N} \text{ at } \frac{\pi}{2} \text{ mode} \quad (2.139)$$

リアックを運転する時には、加速モードとその最近接モードはオーバーラップしてはならないので、上式は加速タンク内のユニット・セルの総数を定めることになる。

$$\frac{1}{Q_{\pi,0}} < \frac{r \pi^2}{4N^2} \quad (2.140)$$

$$\frac{1}{Q_{\frac{\pi}{2}}} < \frac{r \pi}{2N} \quad (2.141)$$

回路モデルを複雑にすれば、加速管の全体としての性質をほとんどこのモデルで表わすことができるので、

有益な手法と考えられる。

2.7 Alvarez型リニアックの安定化 (stabilization) (ref. 12)

Alvarez型リニアックは群速度 $v_g = 0$ の 2π モード (加速モード) で運転されている。 $v_g = 0$ とは、加速管内でのエネルギーの移動ができにくいことを意味しており、長い加速管の場合や強い beam loading の場合には、その欠陥が表面に出てくる。そこで色々な細工をして加速モードを変えずに $v_g \approx 0$ の structure を作ることを安定化 (stabilize) と呼ぶ。普通 Alvarez 型は、パスバンドの下端 ($v_g = 0$) で運転しているが (Fig. 2.22, a), 細工により別のパスバンドを作り出す (Fig. 2.22, b)。二つのパスバンドを近づけると (合流させると)、加速モードと下のパスバンドのモード (coupling mode) とが coupling を生じて $v_g \approx 0$ の状態を作る (Fig. 2.22, c)。coupling mode 作る方法として、ステム、ポスト等が使用される。

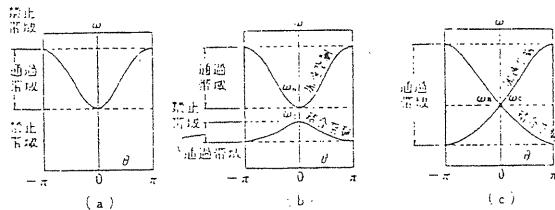


Fig. 2.22 (a) 同一構造の共振器を接続した単一周期の加速空洞の Brillouin 図表 $\theta = kx$ は共振器あたりの位相変化量。 $v_g = \omega / \partial k = l / (\partial \omega / \partial \theta)$ 。(b) 上は加速共振器の、下は結合空洞の pass band。(c) 加速共振器のモードの共振角周波数 ω_1 と結合空洞の共振角周波数 ω_2 を合流させ ω_0 での群速度 v_g を大きくする

[1] Alvarez 型 DTL の TM mode とステムモード
直径 45 cm, 長さ 251 cm のモデル空洞のモードを Fig. 2.23 に示す。

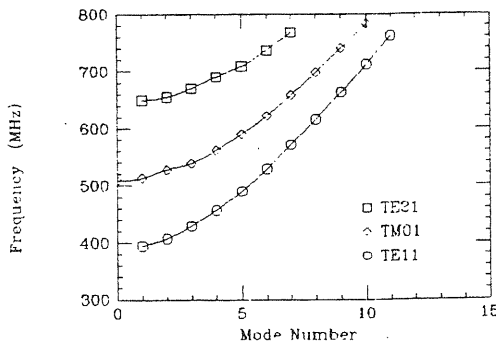


Fig. 2.23 Dispersion curve without drift tubes.

Table. 3 共振周波数の計算値と実測値

	計算値	実測値
TE 111	394.76 MHz	394.5 MHz
TE 112	407.66	407.5
TE 113	428.31	429.1

TM 010	509.95	509
TM 011	513.32	513

この空洞に15個のドリフトチューブをとりつけると、Fig. 2.24のモード図が得られる。

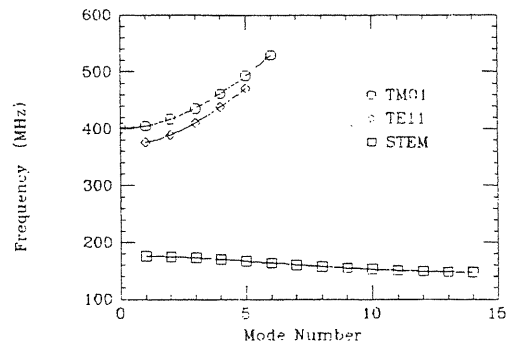


Fig. 2.24 Dispersion curve with drift tubes

TM010の計算値は402.18 MHz, 実測値は401.67 MHzであった。Fig. 2.24にはステムモード (Fig. 2.25 参照) が観測されている。この場合にはステムモードは、TM010モードと充分離れているので両者がカップルすることはない。

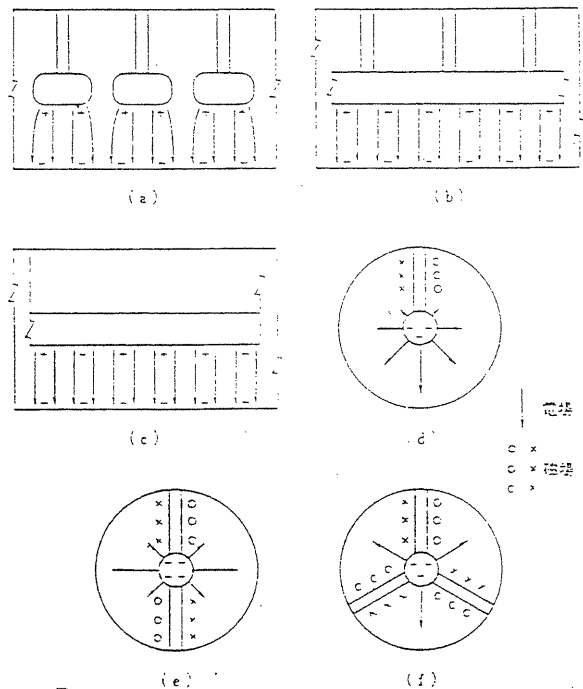


Fig. 2.25 Stem モードの電磁場
(a)-(d) は 1 stem, (e) は 2 stem, (f) は 3 stem.

そこでステムモードの周波数を上げるためにステムの数をふやすと Fig. 2.26のようなモード図が得られ、TM010で $v_g \approx 0$ となっていることがわかる。

[2] post による DTL の安定化

Fig. 2.27に示すように、ドリフトチューブの中心へタンクの外壁から丸棒 (post) を挿入していくと、post の inductance L と、post の先端とドリフトチュ

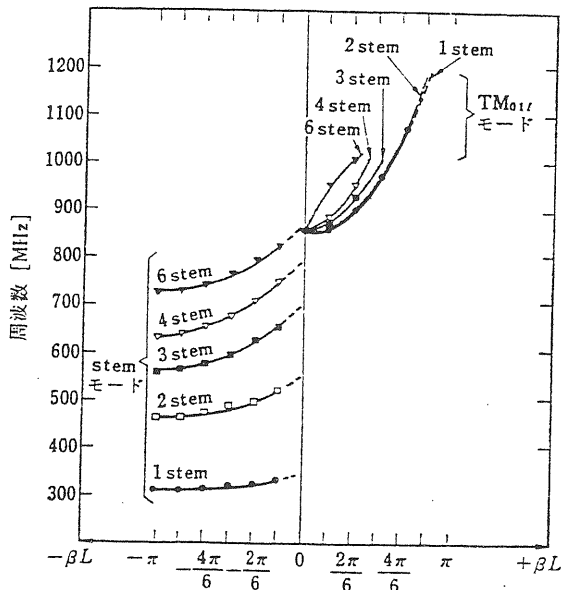


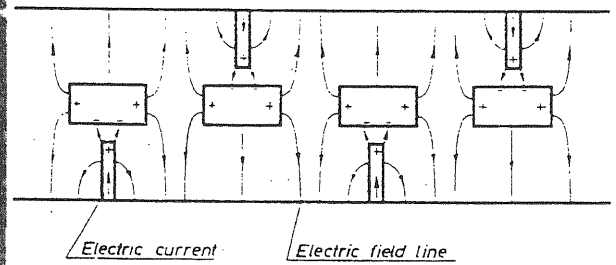
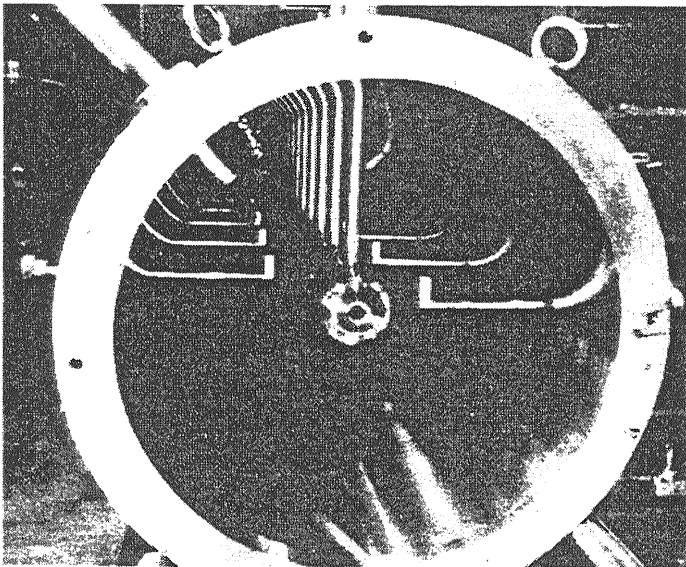
Fig.2.26 空洞1個あたりの位相変化
 試験空洞における stem モードの stem 数による共振周波数の変化
 なお共振周波数は stem の形状によっても変わる²⁹⁾。

ープとが作る capacitance C とで共振周波数が決まり、ポストを外壁から交互につけることによって stabilize に必要なポストモードを作ることができる。14節で示したように v_g が大きいのは cell の間の phase shift が $\frac{\pi}{2}$ の $\frac{\pi}{2}$ mode である。ポストを交互におくことにより、ある gap の加速モードはポストと $\frac{\pi}{2}$ の phase shift でカップルし、そのポストは次の gap の加速モードと $-\frac{\pi}{2}$ の phase shift でカップルするようになるので、 v_g が大きくなるとも考えられる。

Fig. 2.28 にモデル空洞のポストによるモード図を示す。stabilize の効果を見るために、モデル空洞の端板を動かして perturbation を与えた結果を Fig. 2.29 に示す。stabilization が実現できたかどうかの指標として、共振周波数の変化と field の distortion があることを Fig. 2.30 と Fig. 2.31 に示す。又ポストの先にタブ (Fig. 2.27) をつけて、タブを回転させると、ポストモードのカップリングを変えることができるので、加速モードの field に任意の傾きを持たせることができる (Fig. 2.32)。ポストよりもステムを使用の方が大きい v_g を得ることができるが、mechanical に作りやすいという理由によりポストを採用する linac もある。

[3] biperiodic structure

$\frac{\pi}{2}$ mode は群速度が大きく、mode separation が大きいので、これを効率よく使用することを考える。Fig. 2.33 に示すように $\frac{\pi}{2}$ mode では励起されない空洞は加速効率を下げているので、この空洞の長さを短くしたものが Fig. 2.33 (b) である (biperiodic)。更にこの短かい空洞を加速軸からはずしたものが Fig. 2.33 (c) であり、side-coupled structure と呼ばれる。DTL は Fig. 2.5 に示したように高エネルギーになると shunt impedance が下がるので、Los Alamos ではこのタイプを 800 MeV の陽子加速器に利用した。この形の空洞は accelerating cavity の ZT^2 を自由に optimize できる長所がある。



Field pattern of the post 0 mode at confluence.

Fig.2.27 DTL with post coupler and post mode.

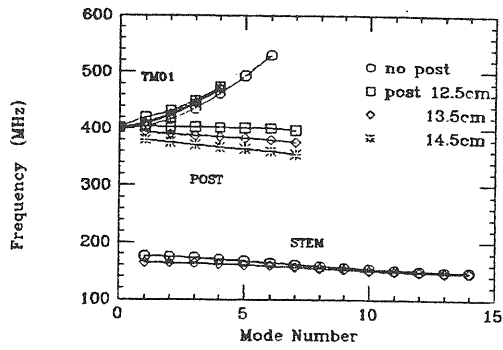


Fig.2.28 Dispersion curve vs post length.

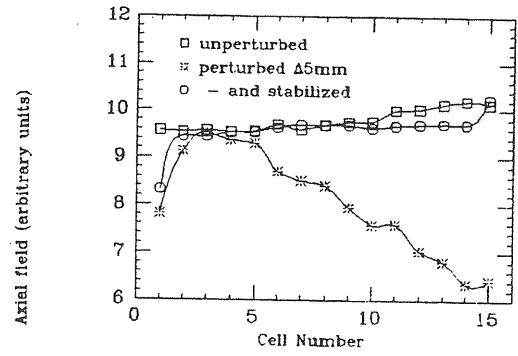


Fig.2.29 Field distribution before and after post stabilization.

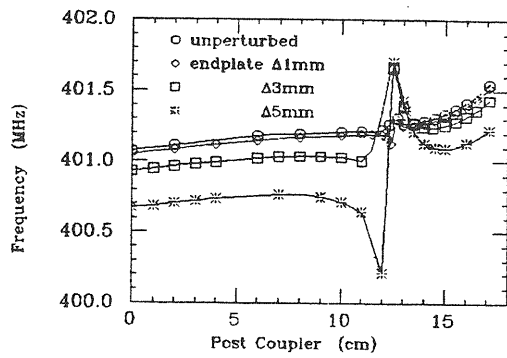


Fig.2.30 Frequency shift by insertion of post, taking endplate perturbation for parameter.

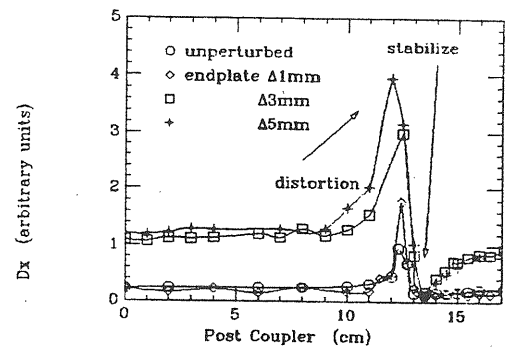


Fig.2.31 Distortion parameter vs post length.

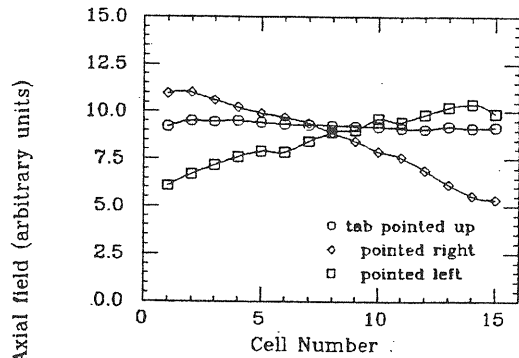


Fig.2.32 Field distribution vs tab rotation

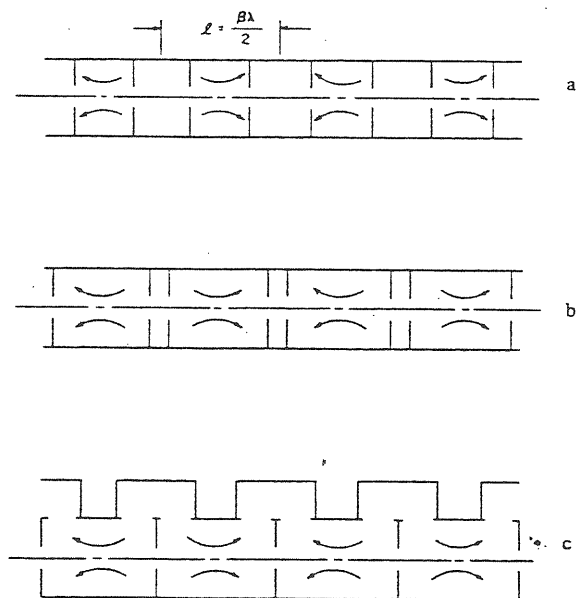


Fig.2.33 $\frac{1}{4}\pi$ -mode operation of a resonant cavity chain.

2.8 DTL の RF 電力給電

Alvarez 型リニアック (DTL) のタンク内壁とドリフトチューブの表面は普通電導性の良い銅で作るので $Q_0 \approx 70000$ (200 MHz) になり, 外部からの給電管をつないだ状態でも $Q_L \approx 35000$ の高い値を持っている。パルス運転の場合, タンクへの入力 rf 電力は, Fig. 2.34 に示すような方形波が使用される。タンク内

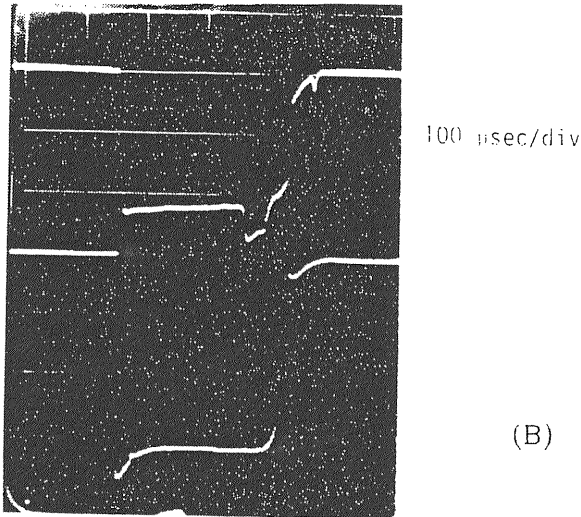
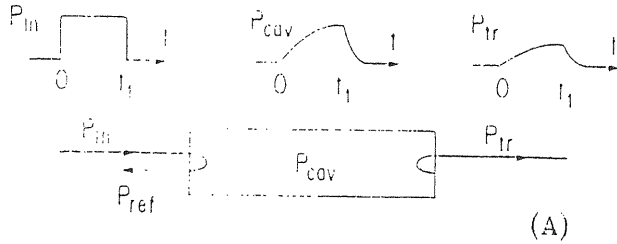


Fig.2.34 (A) Power relation.

(B) Upper: P_{in} with compensation.

(B) Lower: P_{in} with no compensation.

の rf fields は, LC 回路の過渡現象と同じように, 時定数 $\tau = \frac{2Q_L}{\omega_0} \approx 56 \mu s$ で exponentially に増加する。KEK20-MeV 陽子リニアックでは, ビームのパルス幅は, $5 \mu s$ と短い, 加速するための field level を達成する必要から, $275 \mu s$ の方形波を使用してタンクを励起し, 最後の $10 \mu s$ 程度の部分にビームを注入している。

時刻 $0 < t < t_1$ の間に rf power P_{in} を給電する時, タンク内の power P_{cav} , 反射 power P_{ref} , 透過パワー P_{tr} , タンク内で field の増加分に費やされるパワー P_{field} は次のようになる。 β_1, β_2 は, 入力及び出力ポートのカップリング係数である。

$0 < t < t_1$

$$P_{cav} = \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q_L}\right)\right)^2 \times P_{in} \equiv P_{abs}^{wall} \quad (2.142)$$

$$P_{field} = \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \frac{Q_0}{Q_L} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q_L}\right)\right) \times \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q_L}\right) P_{in} \quad (2.143)$$

$$P_{ref} = \frac{\left(1 - \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_1 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q_L}\right)\right)^2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} P_{in} \quad (2.144)$$

$$P_{tr} = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q_L}\right)\right)^2 P_{in} \quad (2.145)$$

$t_1 < t$

$$P_{cav} = \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 t_1}{2Q_L}\right)\right)^2 \times \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q_L}(t-t_1)\right) \quad (2.146)$$

$$P_{field} = \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \frac{Q_0}{Q_L} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 t_1}{2Q_L}\right)\right) \times \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q_L}(t-t_1)\right) \quad (2.147)$$

$$P_{ref} = \frac{4\beta_1^2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 t_1}{2Q_L}\right)\right)^2 \times \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q_L}(t-t_1)\right) \quad (2.148)$$

$$P_{tr} = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_0 t_1}{2Q_L}\right)\right)^2 \times \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q_L}(t-t_1)\right) \quad (2.149)$$

$$Q_0 = (1+\beta_1+\beta_2)Q_L \quad (2.150)$$

Fig. 2.35 に $\beta_2 = 0$ (one port) の場合の, P_{in}, P_{cav}, P_{ref} の様子を, $\beta_1 < 1, \beta_1 = 1, \beta_1 > 1$ のそれぞれについて示す。

普通 $\beta \approx 1$ でタンクをドライブする。この場合, 技術的に注意することは, $t = 0$ では $P_{ref} = P_{in}$ 即ち全反射することである。 $P_{in} = 1 \text{ MW} \sim 1.5 \text{ MW}$ と大きいので, 使用している rf component の耐圧等に注意

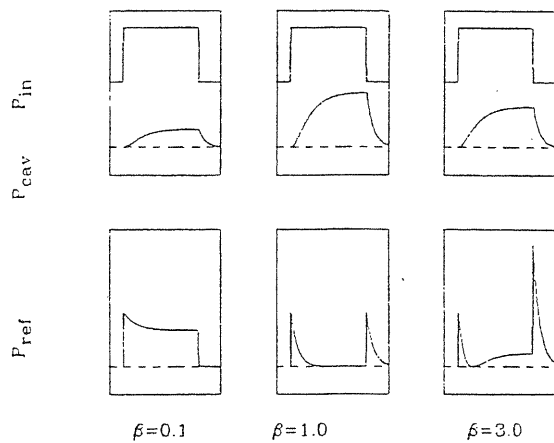


Fig.2.35 Power relation.

が必要である。

又, $t < t_1$ において, $t = \infty$ とおくと, 定常状態における power relation が得られる。

$$P_{cav} = \frac{4\beta_1}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} P_{in} \quad (2.151)$$

$$P_{field} = 0 \quad (2.152)$$

$$P_{ref} = \frac{(1-\beta_1+\beta_2)^2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} P_{in} \quad (2.153)$$

$$P_{tr} = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1+\beta_2)^2} P_{in} \quad (2.154)$$

これらの式を用いると, steady state の測定から, 簡単に β_1, β_2 等を求めることができる。

必要な rf power は次の形になる。

$$P_{gen} = P_c + P_b + P_f \quad (2.155)$$

P_{gen} = rf 出力

P_c = タンク励振用

P_b = beam power

P_f = 給電管の損失

P_c は次式より求める。

$$Z = \frac{E_0^2}{P_c/L} \quad (2.156)$$

ビームを加速するために必要な電力は,

$$P_b = \text{ビーム電流} \times \text{加速電圧} = i_b V \quad (2.157)$$

給電管の損失は $P_f \approx 0.02 \times (P_c + P_b)$ (10 m long) 程度と言われる。

KEK 20-MeV linac では次の値となる。

$$P_c \sim 1 \text{ MW}$$

$$P_b \sim 100 \text{ mA} \times 20 \text{ MV} = 2 \text{ MW}$$

故に total 3 MW 程度の rf 電力が必要となる。

ところでタンク励振時に, タンクに貯えられるエネルギーは $Q = \frac{\omega U}{P_c}$ からおよそ 50 joule である。これに対して, 100 mA, 5 μ s のビームがタンクから持ち出すエネルギーは

$$\Delta U = 100 \text{ mA} \times 20 \text{ MV} \times 5 \mu\text{s} = 10 \text{ joule}$$

となり, タンク内に貯えられたエネルギーの 1/5 が消費されることになる (beam loading)。即ち 5 μ s のビームの初めと終りでは field の強さが約 10% 減少する。この beam pulse の間の field level の変化は, 余分のエネルギーの広がりを与えて具合が悪いので, (2.155) の P_b に相当する電力を, beam がタンクに入射するタイミングと合わせてタンクへ給電する。これをコンペーションと呼ぶ。Fig. 2.34 に示したタンク励振用のパルス電力には, コンペーション用の短かいパルス電力が重畳されている様子がわかる。コンペーションパルスがある場合のタンクレベルの波形を Fig. 2.36 に示す。

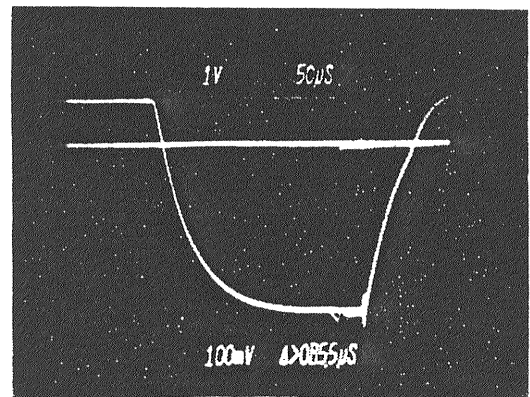


Fig.2.36 Tank level with rf compensation and beam loading.

ビームは空洞内に rf 電圧を誘起するが, ビームが実際に感じる電圧 E は, generator 電圧 E_0 とこの induced 電圧 E_b をベクトル的に合成したものとなる。

Fig. 2.3 に示したように rf 位相 ϕ ($\neq 0$) にビームは入射するので, この合成電圧は, E_0 に phase shift を与える (Fig. 2.37)。

KEK 20-MeV linac では 100 mA, 4 μ sec の beam で約 4° の phase shift を観測している (Fig. 2.38)。

beam pulse が長くて, この phase shift が無視できない場合には, phase の compensation もする必要がある。beam loading の詳しい扱いは ref 13 を参照のこと。

最後に rf 系のブロック図を示す (Fig. 2.39)。200 MHz のクライストロンが存在しないので, 出力管には電子管 (三極管又は四極管, KEK では三極管 TH 516) を用いている。電子管の power gain はクライストロンにくらべると大分小さい (10~100) ので, 多段の増幅回路が必要となり, 各真空管のバイアス電源等もあわせると system は複雑になってしまう。この周波数域でのクライストロンが望まれる由縁である。

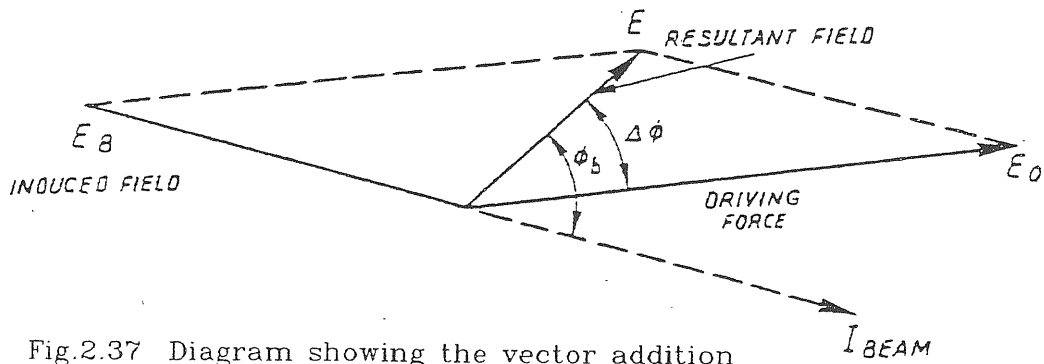


Fig.2.37 Diagram showing the vector addition of driving and beam-induced voltages.

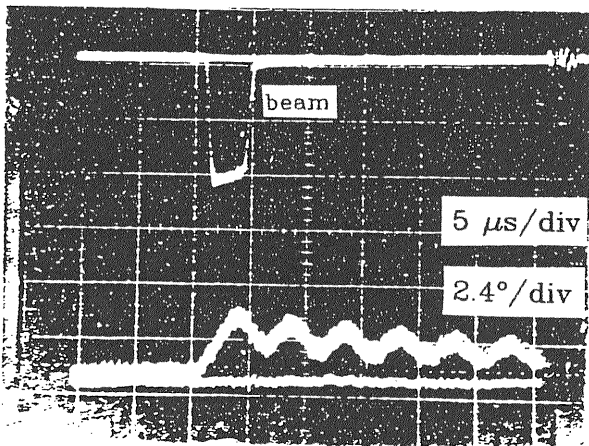


Fig.2.38 Phase shift due to beam loading

KEKでは、200MHz、2MW、275μs、くり返し20Hzのrf systemが2系統あり、独立にタンクをドライブしている。なお先に述べたコンペーンションパルスは電子管RCA 4616のコントロールグリッドに変調を加えて作り出している。

3. Design parameters

リニアックを考える時に有用ないくつかの指標をここでまとめておく。proton用とelectron用がまざっているので注意する。

DTLのenergy gain

$$\Delta W = qE_0 T L \cos \phi \quad (3.1)$$

$$E_0 = 1 \sim 3 \text{ MV/m}, T \sim 0.8, \phi \sim -30^\circ$$

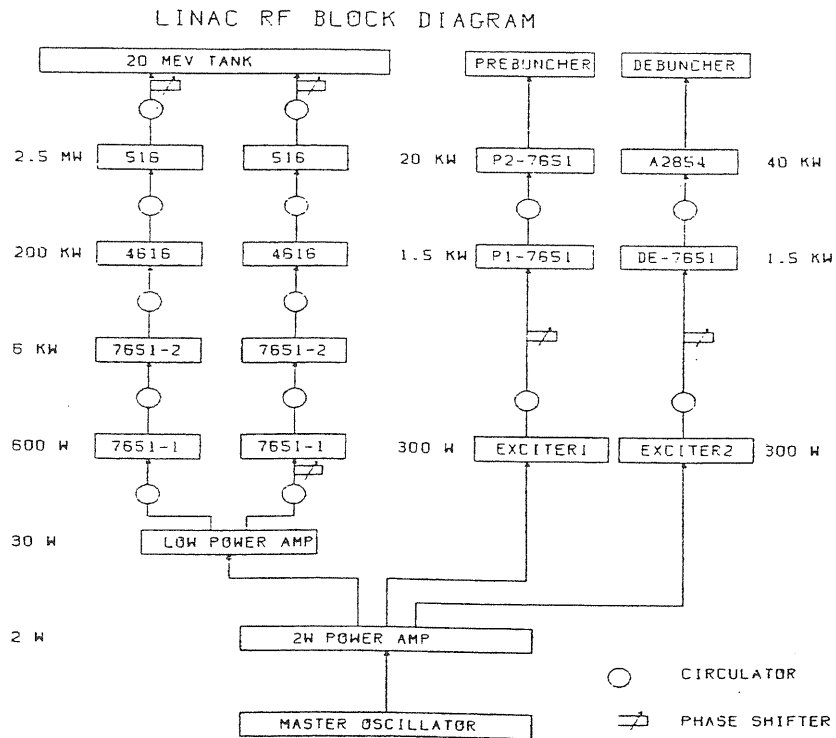


Fig.2.39 Block diagram of rf system.

shunt impedance

$$Z = \frac{E_0^2}{P_c/L} \text{ (M}\Omega/\text{m) for DTL} \quad (3.2)$$

P_c = dissipation power

$$r_0 = -\frac{E_0^2}{dP/dz} \text{ (M}\Omega/\text{m) for disk loaded and DTL} \quad (3.3)$$

P = power flow

power loss に対して、いかほどの加速電場が得られるか。

effective shunt impedance

$$Z_{\text{eff}} = Z T^2 \quad (3.4)$$

(3.1) (3.3) から E_0 を消去すると、

$$\Delta W = q \sqrt{Z T^2 P_c L} \cos \phi \quad (3.5)$$

となるから。DTL では Z よりも $Z T^2$ が効率の目安となる。

Q value

$$Q_0 = \frac{\omega U}{P_c} \quad (3.6)$$

$$Q_0 = \frac{\omega w}{\frac{dP}{dz}} \quad (3.7)$$

U = stored energy

w = stored energy per unit length

power loss に対していかほどの energy が貯えられているか。

r_0/Q_0

(3.2) (3.3) (3.6) (3.7) より

$$\frac{r_0}{Q_0} = \frac{E_0^2}{\omega U/L}, \quad \frac{r_0}{Q_0} = \frac{E_0^2}{\omega w} \quad (3.8)$$

disk loaded の energy gain

$$\Delta W = K (P_0 r_0 L)^{1/2} \quad (3.9)$$

P_0 = input rf power

$K = K(\tau)$, τ は attenuation parameter。

group velocity

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (3.10)$$

DTL $v_g = 0$

Disk loaded $v_g \sim K \left(\frac{a}{b}\right)^4$

$2a$ = disk aperture

$2b$ = cavity diameter

filling time

$$t_f = \frac{2Q_L}{\omega} \text{ standing wave 型} \quad (3.11)$$

$Q_L = \text{loaded } Q$

$$t_f = \frac{\ell}{v_g} = \frac{2Q\tau}{\omega} \text{ traveling wave 型} \quad (3.12)$$

ℓ = length of structure

$\tau = \alpha\ell$ = attenuation constant

α = attenuation parameter

power flow

$$P = v_g w \quad (3.13)$$

energy loss

$$\left[\frac{dP}{dz} \right]_{\text{wall}} = i^2_{\text{wall}} R \quad (3.14)$$

wall resistance

$$R = \frac{\rho}{2\pi b\delta} \quad (3.15)$$

b = radius of structure

skin depth

$$\delta = \left(\frac{2\rho}{\omega\mu} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

ρ = resistivity = $1.70 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ (Cu)

μ = $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

δ = $4.6 \mu\text{m}$ (200 MHz)

$1.2 \mu\text{m}$ (3000 MHz)

superconducting cavity E_{surface}/E_0

超電導材料で wall loss が少ない。

$Q_0 \sim 10^8 \sim 10^{10}$, Cu cavity の $Q_0 \sim 10^4$ 。

このタイプの設計では、 Z が最大になる形を選ぶよりは、表面電場と加速電場の比 E_{surface}/E_0 が小さくなるような形状にする。

その理由は、空洞の loss P_c は beam power にくらべて全く無視できる上に、最大加速電場の上限は、表面電場に由来する電子の電界放射によって決まるからである。

Table 4.

$L = \text{const}$, energy range = const の場合の scaling

		desirable
transverse dimension	ω^{-1}	low
volume	ω^{-2}	
field	ω^0	
stored energy U	ω^{-2}	
resistance	$\omega^{1/2}$	low
surface area	ω^{-1}	
dissipated power P_c	$\omega^{-1/2}$	high
shunt impedance	$\omega^{1/2}$	high
Q	$\omega^{-1/2}$	low
filling time t_f	$\omega^{-3/2}$	high
available power	ω^{-2}	low
absolute mechanical tolerance	$\omega^{-1/2}$	low
relative mechanical tolerance	$\omega^{1/2}$	high
beam loading	$\omega^{1/2}$	high

electric field limit ω^2 high

4. Electron linac

電子リニアックには Fig. 4.1 に示すような disk loaded 型が用いられる。速度がすぐに光速に近づいて一定になるために、その beam dynamics は DTL に比べて simple になる。本章では、執筆者に電子リニアックについての経験がないので、百白そうな部分、例えば入射部分の設計、beam の blow up、加速管の設計等の話は割愛した。

4.1 Electron linac の電磁場 (disk loaded 型)

加速 mode は TM_{01} モードであり、DTL と同じである。2.1 節で示した DTL 内の電磁場は定在波であって、1.4 節で見た Brillouin diagram 内のパスバンドの端 $v_g = 0$ の部分 (Fig. 1.6) を使用している ($v_{g+} + v_{g-} = 0$)。周期的な構造 (周期 d) の場合、一般に propagation constant は

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{d} \quad (4.1)$$

$\beta_0 d$ が隣り合う cell の間の phase shift を与えることを以前に見た (1.4 節)。Alvarez 型は $\beta_0 = 0$ で $n = 1$ の space harmonic を使用している。これに対して電子リニアックでは普通 $n = 0$ の fundamental mode を使う。管内波長 λ_g あたりの disk の数を m とすれば phase shift は

$$\beta_0 d = \frac{2\pi}{m} \quad (4.2)$$

で与えられる。

1.4, 2.2 節の話はほとんどそのまま適用できる。即ち、

$$E(z) = E_z(z, r) e^{j(\omega t - \beta_n z)} \quad (4.3)$$

とにおいて、波動方程式から $E_z(z, r)$ を求めればよい。結果は、

$$E_z(z, r, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_0(k_{rn} r) e^{j(\omega t - \beta_n z)} \quad (4.4)$$

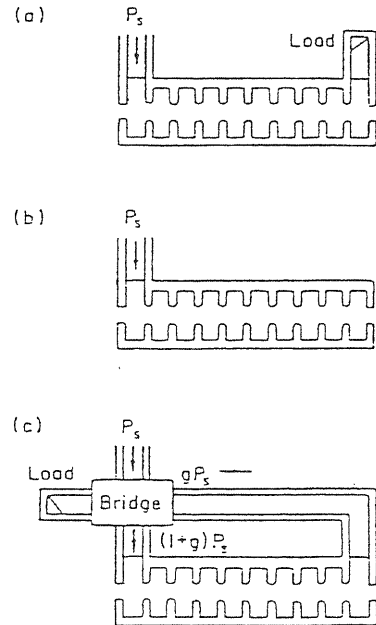
$$E_r(z, r, t) = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\beta_n}{k_{rn}} J_1(k_{rn} r) e^{j(\omega t - \beta_n z)} \quad (4.5)$$

$$B_\theta(z, r, t) = j \sum a_n \frac{k}{k_{rn} c} J_1(k_{rn} r) e^{j(\omega t - \beta_n z)} \quad (4.6)$$

$$k_{rn}^2 = k^2 - \beta_n^2 \quad (4.7)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (4.8)$$

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{d} \quad (4.9)$$



Linacs with (a) traveling-wave, (b) standing-wave and (c) traveling wave with feedback structures and source power P_s .

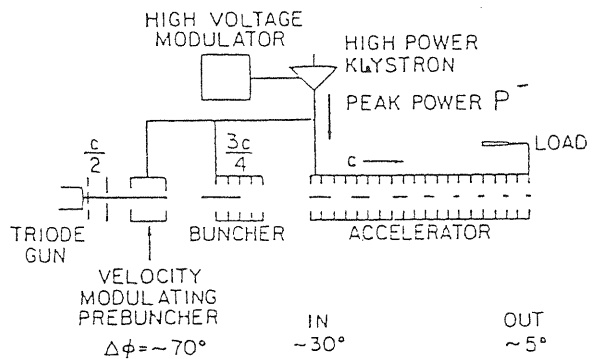


Fig.4.1 Disk loaded electron linac.

space harmonic の位相速度は、

$$v_{pn} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_0 + \frac{2\pi n}{d}} \quad (4.10)$$

電子加速では $n = 0$ と選び、特に位相速度が

$$\therefore v_{p0} = \frac{\omega}{\beta_0} = c \quad (4.11)$$

の時は、(4.7) より

$$k_{rn}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_0^2 = 0 \quad (4.12)$$

$J_0(0) = 1$ だから (4.4) より $E_z(z, r, t)$ は r に依存しないことになる。即ち r 方向に広がりを持つ粒子が受ける加速は、場所によらないから、これは大きな利点となっている。Alvarez 型では $\beta_0 = 0$, $n = 1$ だから 2.1 節 (2.25) で示したように

$$v_p = \frac{\omega d}{2\pi} \quad (4.13)$$

注) 2.1節の k_m^2 と本節の k_{rn}^2 は、 -1 だけ符号が異なっているため2.1節では $J_0 \rightarrow I_0$ となっている。

4.2 Longitudinal motion

longitudinal motionについてSlater (ref. 2)に従って、下の三つの場合について考える。

1. 波の位相速度 $v_0 = \text{const.} \ll c$
2. 波の位相速度 $v_0 = \text{const.} = c$
3. 波の位相速度 $v_0 = \text{variable}$

加速電場は、特定の位相速度を持つsin波を考えればよいから

$$E_z = E \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_0} \right) \quad (4.14)$$

DTLの場合と異なり $\varphi = 0$ を加速が零の位相とし、 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ を最大加速の位相としている。

運動方程式は

$$\frac{dp}{dt} = qE \sin \omega \left(t - \frac{z}{v_0} \right) \quad (4.15)$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad v = \frac{dz}{dt} \quad (4.16)$$

ここでは $q > 0$ としているが、 $q < 0$ の場合には、 $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ とすればよい。

波が定速度 v_0 で進む座標系を考える。これは2.3節のsynchronous条件(同期粒子)と同じである。

他の粒子の座標を次の形で表す。

$$z' = z - v_0 t \quad (4.17)$$

$$\frac{dz'}{dt} = v' = v - v_0 \quad (4.18)$$

Hamiltonianを次の形にとると、運動方程式(4.15)(4.18)が得られる。

$$H = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} - p v_0 - qE \frac{v_0}{\omega} \cos \frac{\omega z'}{v_0} \quad (4.19)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z'}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (4.20)$$

(4.19)は時間を含まないため、Hは運動の恒量となる。(4.19)を $\frac{p}{mc}$ と $\left(\frac{\omega z'}{v_0} = \phi\right)$ の位相平面上に、 $v_0 = \frac{c}{2}$ の条件のもとにplotしたのがFig. 4.2である。任意のパラメータ $\frac{qE v_0}{mc^2 \omega}$ は0.1とした。 $f = 2856 \text{ MHz}$ で $E = 6.1 \text{ MV/m}$ に相当する。

ここには、3種の軌道がある。

1. captureされて、周期運動をする。
2. $v \gg \frac{c}{2}$ で、通り抜けてしまう。

3. $v \ll \frac{c}{2}$ で、すべりおちてしまう。

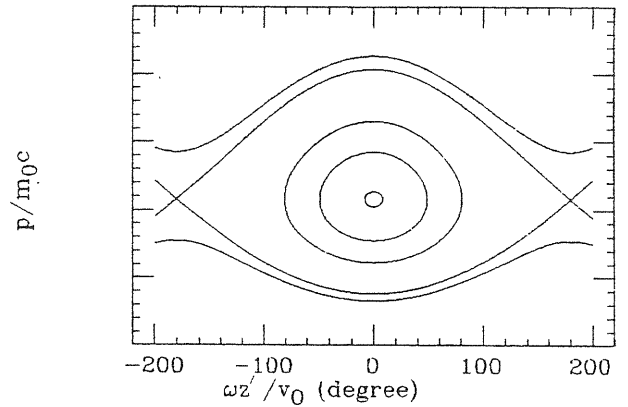


Fig.4.2 Longitudinal acceptance. $\beta=0.5$.

周期運動を詳しくみよう。運動量pを展開して

$$p \approx \frac{m v_0}{(1-\beta_0^2)^{1/2}} + \frac{m v'}{(1-\beta_0^2)^{3/2}} = p_0 + p' \quad (4.21)$$

Hamiltonian(4.19)も同様にすると

$$H = \frac{m c^2}{(1-\beta_0^2)} + \frac{p'^2}{2 m_l} - qE \frac{v_0}{\omega} \cos \frac{\omega z'}{v_0} = H_0 + H' \quad (4.22)$$

ここで

$$m_l = \frac{m}{(1-\beta_0^2)^{3/2}} \quad (4.23)$$

運動方程式は、次式より得られる。

$$\frac{dp'}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial z'}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'} \quad (4.24)$$

(4.24)より単振動の方程式が得られて、その周期は

$$\omega_0 = \left(\frac{q}{m} E \frac{\omega}{v_0} (1-\beta_0^2)^{3/2} \right)^{1/2} \quad (4.25)$$

2.3節の(2.59)のように、振動のエネルギーを求めると

$$\Delta W = \pm 2 m c^2 \beta_0 \left(\frac{q E v_0}{m c^2 \omega (1-\beta_0^2)^{1/2}} \right)^{1/2} \quad (4.26)$$

注意点

- 1) $\Delta W \propto \sqrt{E}$
- 2) Fig. 4.2で、長円の高さは $\propto (m c^2)^{-1/2}$
- 3) $v_0 \rightarrow c$ の時は $\omega_0 \rightarrow 0$, $\Delta W \rightarrow \infty$ となる。この理由はmassが大きくなるために、加速による速度変化の割合が小さくなるため。
- 4) $v_0 = c$ の時、 $\Delta W = \infty$ となり、周期運動をする軌道は、エネルギーの大きい方向(上の方向)へopenとなる。

$v_0 = c$ の時の軌道を Fig. 4.3 に示す。2種類の軌道がある。

1) capture される。

2) 入射エネルギーが不足して capture されない。capture される粒子は、図の左上の方へ動いていく。その位相 ϕ_∞ (漸近的な) は、入射時のエネルギーと位相によって決まる。 ϕ_∞ が $-\frac{\pi}{2}$ になれば、常に最大の加速電場を受けることになる。

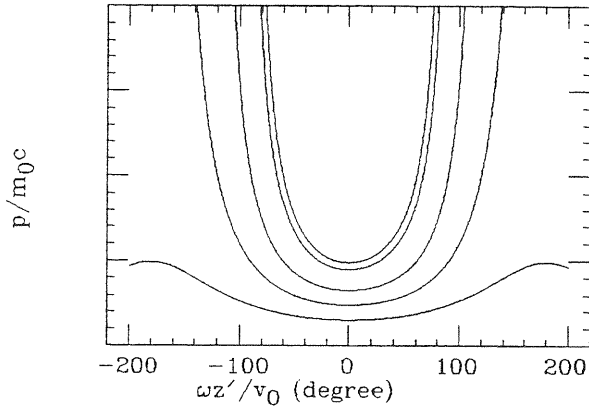


Fig.4.3 Longitudinal acceptance. $\beta=1.0$.

ϕ_∞ を求めてみよう。 $\phi_0 = 0$, β_0 で入射する粒子が $p = \infty$, $\phi = \phi_\infty$ になるとして、(4.19) と Liouville の定理を用いると

$$\cos \phi_\infty = \cos \phi_0 - \frac{2\pi mc^2}{qE\lambda} \left(\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0} \right)^{1/2} \quad (4.27)$$

$\phi_0 = 0$, 右辺第2項が1の入射条件の時には、 $\phi_\infty = -\frac{\pi}{2}$ となり、最大加速の位相に shift する。この条件は $\beta_0 = 0.75$ (262 keV) で $E = 12 \text{ MV/m}$, $\beta_0 = 0.94$ (1 MeV) で $E = 5.4 \text{ MV/m}$ の電場を必要とする。入射の時に $\pm \Delta\phi$ の bunch length で $\phi = 0$ へ入射すると

$$\frac{\pi}{2} \leq \phi_\infty \leq \frac{\pi}{2} + \frac{(\Delta\phi)^2}{2} \quad (4.28)$$

の広がりを持つことが (4.27) よりわかる。

ex. $\Delta\phi = \pm \frac{1}{4} \text{ rad} = \pm 14^\circ$ の入射の時、

$$\frac{(\Delta\phi)^2}{2} = 1.8^\circ \text{ (full width) となる。}$$

Fig. 4.4 にこの様子を示す。

この位相の広がり $\Delta\phi$ (full width, 1.8°) は電子の運動エネルギーに広がり $\pm \Delta W$ を与える。sin 波の頂上で加速されるとすれば、(4.15) より

$$\frac{\Delta W}{W_\infty} = 1 - \cos \frac{\Delta\phi}{2} \approx \frac{(\Delta\phi)^2}{8} \quad (4.29)$$

$\Delta\phi = 5^\circ$ とすれば 0.1% となる。

又、(4.27) より電子が capture される条件として、

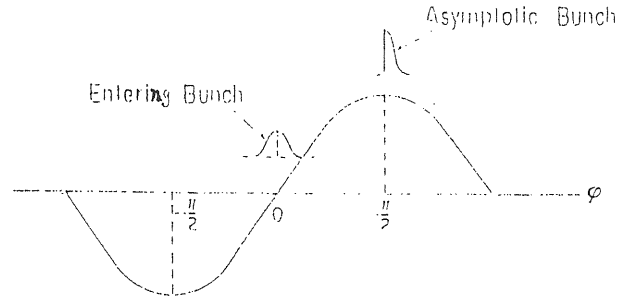


Fig.4.4 Asymptotic bunching process.

次の関係が得られる。

$$\frac{qE\lambda}{\pi mc^2} \left(\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0} \right)^{1/2} > 1 \quad (4.30)$$

今までは波の位相速度が一定の場合を考えたから、安定粒子の位相は 0 であった。次に波の位相速度が変化する場合を考える。ここでは同期粒子は加速を受けて速度が変化するので $v_0 = v_0(z)$ となる。

電場は

$$E_z = E \sin \omega \left(t - \int \frac{dz}{v_0(z)} \right) \quad (4.31)$$

同期粒子の運動量は

$$p_0 = \frac{m v_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c} \quad (4.32)$$

運動方程式は

$$\frac{dp_0}{dt} = qE \sin \omega \left(t - \int \frac{dz}{v_0(z)} \right) \quad (4.33)$$

同期粒子の存在を仮定すると

$$t - \int \frac{dz}{v_0(z)} = t_0 = \text{constant} \quad (4.34)$$

他の粒子は同期粒子を基準にして考える。

$$z = z' + z_0 \quad (4.35)$$

(4.15) (4.21) (4.22) より

$$m_l \frac{dv'}{dt} = qE \left\{ \begin{aligned} &\sin \omega \left(t_0 - \frac{z'}{v_0} \right) \\ &- \sin \omega t_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

上の運動方程式を得る Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H' = &\frac{p'^2}{2m_l} - qE \frac{v_0}{\omega} \cos \omega \left(t_0 - \frac{z'}{v_0} \right) \\ &+ qE z' \sin \omega t_0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

これは、2章陽子加速の項と同じになるので、Fig.4.5 に acceptance を示すだけで、以下は省略する。但し変数のとり方がちがっているのに注意する。

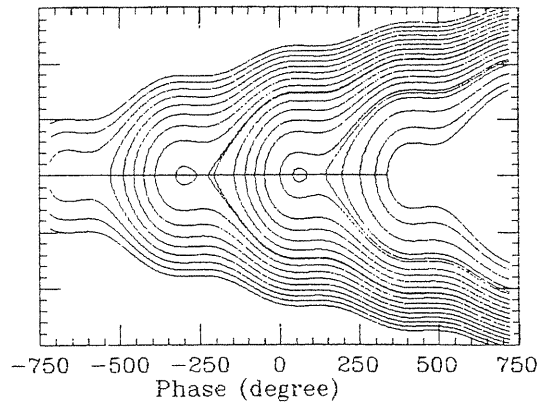


Fig.4.5 Longitudinal acceptance.

4.3 Transverse motion

2.5節で示したように $\beta_s \rightarrow 1$ の limit では, rf defocusing force は消えるので, transverse motion を表す式は, 2.2節 (2.42) より $\beta = 1$ とおいて

$$\frac{d}{dz} \left(r \frac{dr}{dz} \right) = 0 \quad (4.38)$$

積分すると $r \frac{dr}{dz} = \text{const}$ (4.39)

リアックの入口で $r_0 \theta_0$ の広がりを持つ粒子を考える。加速 gain が距離に比例すると仮定

($r = \frac{r_f}{L} z$, r_f は final energy) して (4.39) を積分すると

$$x - x_0 = \frac{r_0}{r_f} L \theta_0 \ln \frac{z}{z_0} \quad (4.40)$$

$r_0 = \frac{r_f}{L} z_0$ だから

$$x - x_0 = z_0 \theta_0 \ln \frac{z}{z_0} \quad (4.41)$$

(4.41) は $z - z_0$ の長さが

$$L_{\text{eff}} = z_0 \ln \frac{z}{z_0} \quad (4.42)$$

の長さに短く見えることを示している。これは, (4.38) が transverse の運動量保存を意味するから, r の増大とともに, transverse の速度は遅くなり, 従って divergence もゆるくなるためである。この性質により $\beta = 1$ の加速では, 外からの集束力は一般に必要でない。

ex. $z_0 = 3 \text{ m}$, $z = 3000 \text{ m}$, $\frac{r_f}{L} = 26.66$ ($r_f \approx 40 \text{ GeV}$) の場合

2997 m \rightarrow 20.7 m の長さに見える。

4.4 Traveling-wave disk loaded structure

加速管の性格を決める重要なパラメータは

1) 加速モード \rightarrow phase shift per cell

2) attenuation の選び方により, 2つの型がある。

constant impedance \rightarrow uniform rf structure

constant gradient \rightarrow $\begin{cases} \text{non uniform rf structure} \\ E_z = \text{const} \end{cases}$

(1) 加速モード

operating mode は

$$\Phi_0 = \frac{2\pi}{n} \quad (4.43)$$

n は, 導波管中の波長 λ_g の中の disk の数を示す。普通 $n = 2, 3, 4$, $\Phi_0 = \pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{2}$ が選ばれる。Fig. 4.6 にそれぞれの場合の電磁波の様子を示す。shunt impedance が n に依存する様子を Fig. 4.7 に示す。 $n = 3$ のあたりに極大があるので $\frac{2}{3}\pi$ が選ばれることが多い。

(2) constant impedance 型 (CI型)

w = stored energy per unit length

P = energy flow

D = dissipation energy とすれば, エネルギー保存則から

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} + D = 0 \quad (4.44)$$

ここで (3.7) (3.13) を用いると

$$D \equiv \frac{P_c}{L} = \frac{\omega w}{Q} = \frac{\omega P}{v_g Q} \quad (4.45)$$

定常状態では $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ だから

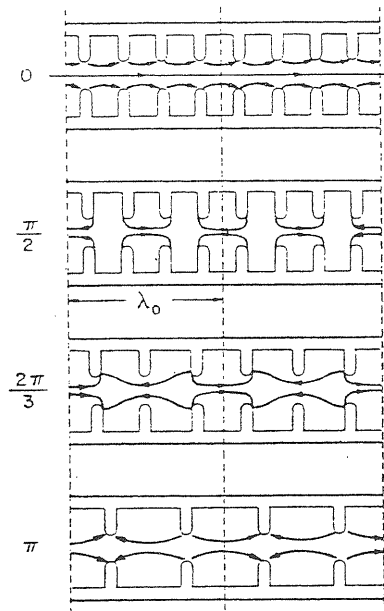


Fig.4.6 Instantaneous traveling-wave configurations of the electric field for 0, $\pi/2$, $2\pi/3$ and π phase shift per cavity.

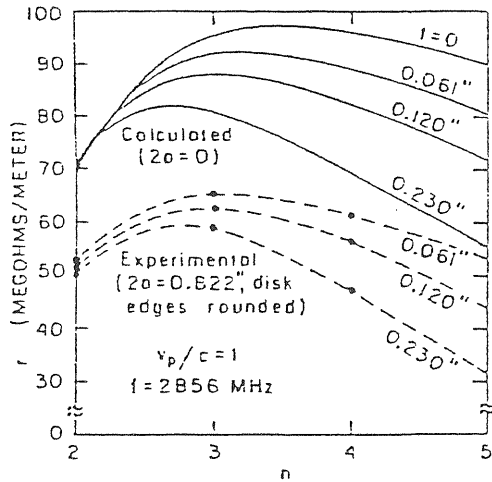


Fig.4.7 Shunt impedance per unit length versus number of disks per wavelength for various thickness t .

$$\frac{dP}{dz} + \frac{\omega P}{v_g Q} = 0 \quad (4.46)$$

加速管の構造が一樣ならば、 v_g 、 Q は一定と考えられるので、上式より

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\omega}{v_g Q} z\right) \quad (4.47)$$

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{\omega}{2 v_g Q} z\right) \quad (4.48)$$

ここで、加速管の長さを ℓ として、

$$\alpha \equiv \frac{\omega}{2 v_g Q} = \frac{\tau}{\ell} \quad (4.49)$$

$$\tau = \alpha \ell \quad (4.50)$$

と定義すれば、

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{\tau}{\ell} z\right) = E_0 \exp(-\alpha z) \quad (4.51)$$

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{2\tau}{\ell} z\right) = P_0 \exp(-2\alpha z) \quad (4.52)$$

shunt impedance の定義を用いると

$$E_0 = \sqrt{2\tau P_0 r_0 / \ell} \quad (4.53)$$

τ は attenuatron parameter と呼ばれ、単位長さあたりの電圧の減衰量 \times 加速管の長さ (multiple feed の時は、feed と feed の間かく) である。

rf の位相 θ (ここでは crest を原点にとる) に乗って、長さ ℓ だけ加速される時の energy gain は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\ell E \cos \theta dz = E_0 \ell \left(\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) \cos \theta \\ &= (2\tau)^{1/2} \left(\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) (P_0 r_0 \ell)^{1/2} \cos \theta \end{aligned} \quad (4.54)$$

V は τ に依存することがわかる。 τ を最適化してみ

よう。 $\frac{dV}{d\tau} = 0$ より V が最大となる条件は

$$\tau = \frac{1}{2} (e^\tau - 1) \quad (4.55)$$

$\tau \approx 1.26$ の時に V は max となり

$$V_{\max} \approx 0.903 (P_0 r_0 \ell)^{1/2} \cos \theta \quad (4.56)$$

(4.54) を Fig. 4.8 に示してある。

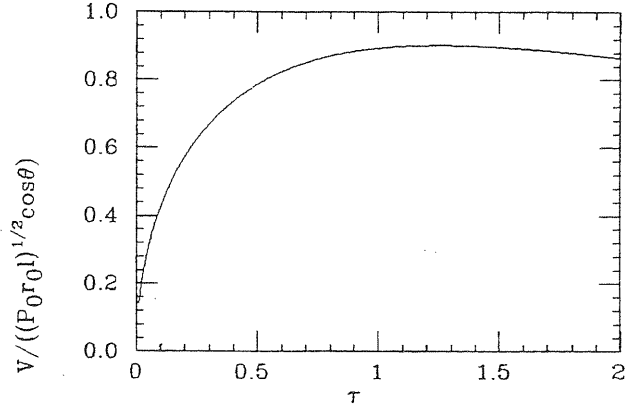


Fig.4.8 Normalized energy gain in a CI linac vs attenuation parameter.

$\tau = 1.26$ 付近は broad なので、 τ の撰択の任意性は大きい、一般に beam loading, filling time, tolerance 等の考察からは、 τ は、小さい値が適している。即ち、(4.49) と filling time の定義 (3.12) より、

$$t_f = \frac{\ell}{v_g} = \frac{2Q\tau}{\omega} \quad (4.57)$$

t_f は短い方が rf pulse を短くできる。又、beam loading による transient time を短くするには、 v_g が大きいこと、又は、 $Q\tau$ が小さいことが望ましい。更に filling time t_f 後の時刻に、加速管に store されている energy は、

$$W = \int_0^\ell w dz = \int_0^\ell \frac{P}{v_g} dz = P_0 t_f \frac{1 - e^{-2\tau}}{2\tau} \quad (4.58)$$

Fig. 4.9 に stored energy W と injection energy $P_0 t_f$ の比を示す。あきらかに τ が小さい方が energy の変換効率は優れている。

(3) constant gradient 型 (CG型)

CI型では rf の入口付近の field が高くて、放電や熱の問題がおこる。そこで、 $E = \text{一定}$ となるような加速管を考えてみる (Fig. 4.10)。

shunt impedance の定義を書くと、

$$r_0 = -\frac{E^2}{dP/dz} \quad (4.59)$$

r_0 が一定とすれば、 E を一定に保つには、

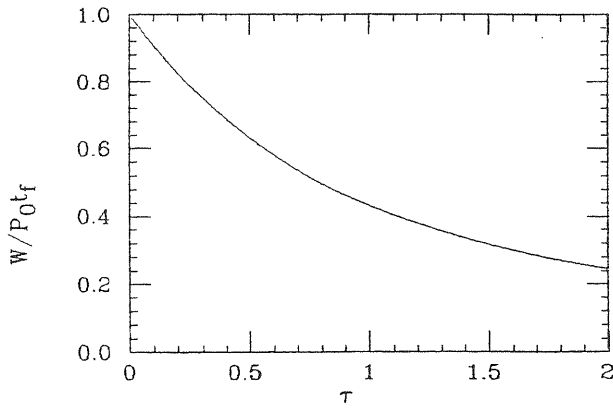


Fig.4.9 Fraction of the input rf energy remaining in a traveling wave linac at the end of the fillig time.

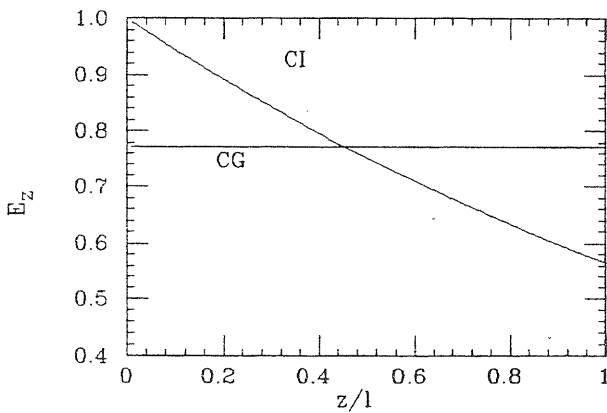


Fig.4.10 Electric field strength vs normalized distance z/l . $\tau=0.57$.

$$\frac{dP}{dz} = \text{constant} \quad (4.60)$$

が必要となる。

加速管の入口 ($z=0$) で $P=P_0$, 出口 ($z=l$) で P_l として (4.60) を積分すれば,

$$P(z) = P_0 - (P_0 - P_l) \frac{z}{l} \quad (4.61)$$

(4.52) より $P_l/P_0 = \exp(-2\tau)$ だから

$$P(z) = P_0 \left[1 - (1 - e^{-2\tau}) \frac{z}{l} \right] \quad (4.62)$$

但し, α は z の関数で,

$$\tau = \int_0^l \alpha(z) dz \quad (4.63)$$

と定義しなおす。

(4.62) より

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{P_0}{l} (1 - e^{-2\tau}) \quad (4.64)$$

上式が示すように, CG型ではエネルギー lossは一定である。これにくらべると CI型では (4.52) より,

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{2\tau}{l} P \quad (4.65)$$

この場合, 加速管の中の energy flow P は大きく変わるので P_c も大きく変化する。これは冷却の問題がむずかしくなることを意味している。

群速度 (4.48) (4.53) (4.64) (4.62) より

$$v_g(z) = \frac{\omega l}{Q} \frac{1 - (1 - e^{-2\tau}) \frac{z}{l}}{1 - e^{-2\tau}} \quad (4.66)$$

(4.62) と上式をくらべると, P と v_g の変化の割合は同じことがわかる。

attenuation

$$\alpha(z) \equiv \frac{\omega}{2v_g Q} = \frac{1 - e^{-2\tau}}{2l \left[1 - (1 - e^{-2\tau}) \frac{z}{l} \right]} \quad (4.67)$$

filling time (4.66) より

$$t_f = \int_0^l \frac{dz}{v_g} = \frac{2Q\tau}{\omega} \quad (4.68)$$

CI型と同じである。

stored energy (4.62) (4.66) (4.68) より

$$W = \int_0^l \frac{P}{v_g} dz = P_0 t_f \frac{1 - e^{-2\tau}}{2\tau} \quad (4.69)$$

CI型と同じである。

加速電場 (4.59) と (4.64) より

$$E = \left[(1 - e^{-2\tau}) \frac{P_0 r_0}{l} \right]^{1/2} \quad (4.70)$$

一定となっている。

energy gain

$$V = \left[(1 - e^{-2\tau}) P_0 r_0 l \right]^{1/2} \cos \theta \quad (4.71)$$

energy gain について, CI型(4.54)とCG型(4.71)の比較を Fig. 4.11に示す。全般にCGが, わずかにCIよりも gain は大きい。 τ が大きくなるとその差は大きくなる。

[4] beam loading (steady state)

前節までの話は, 電流が小さくて beam loading の効果を見逃して良い場合である。beam 加速により field の energy は減少する。定常状態の beam loading を考えてみる。

energy flow P の減少は, 2つの原因による。

$$\frac{dP}{dz} = \left(\frac{dP}{dz} \right)_{\text{wall}} - (iE)_{\text{beam}} \quad (4.72)$$

ここで i は peak current を表す。

CI型, CG型ともに, 次の関係が成り立つ。

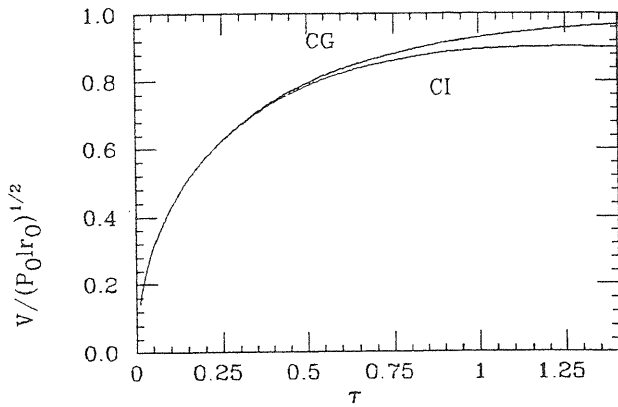


Fig.4.11 Comparison of the energies of CI and CG linacs vs τ .

$$E^2 = 2 \alpha r_0 P \quad (4.73)$$

z で微分すると,

$$E \frac{dE}{dz} = r_0 P \frac{d\alpha}{dz} + \alpha r_0 \frac{dP}{dz} \quad (4.74)$$

(4.59) (4.72) (4.73) を用いると

$$\frac{dE}{dz} = -\alpha E \left(1 - \frac{1}{2\alpha^2} \frac{d\alpha}{dz}\right) - \alpha i r_0 \quad (4.75)$$

CI 型の場合

$$\frac{d\alpha}{dz} = 0 \text{ だから (4.75) より}$$

$$\frac{dE}{dz} = -\alpha E - \alpha i r_0 \quad (4.76)$$

$z = 0$ で $E = E_0 = \sqrt{2 \alpha P_0 r_0}$ とすれば, 上式より,

$$E(z) = E_0 e^{-\alpha z} - i r_0 (1 - e^{-\alpha z}) \quad (4.77)$$

上式は, ビームが感じる field は, driving field と beam induced field の重ね合わせと考えるとよいことを示している。故に driving field に対して θ の位相を持つ beam が感じる field は,

$$E(z) = E_0 e^{-\alpha z} \cos \theta - i r_0 (1 - e^{-\alpha z}) \quad (4.78)$$

energy gain は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\ell E(z) dz \\ &= (2\tau)^{1/2} \left(\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) (P_0 r_0 \ell)^{1/2} \cos \theta \\ &\quad - i r_0 \ell \left(1 - \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

CG 型の場合

(4.67) より $\frac{d\alpha}{dz}$ を求めて, (4.75) へ代入すると

$$\frac{dE}{dz} = -\alpha i r_0 \quad (4.80)$$

$z = 0$ で $E = E_0$ の条件で解くと

$$E = E_0 + \frac{i r_0}{2} \ln \left(1 - \frac{z}{\ell} (1 - e^{-2\tau}) \right) \quad (4.81)$$

energy gain は

$$\begin{aligned} V &= \left[(1 - e^{-2\tau}) P_0 r_0 \ell \right]^{1/2} \cos \theta \\ &\quad - \frac{i r_0 \ell}{2} \left(1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

(4.79) (4.82) の両式は, beam loading によってリニアにエネルギーが減少することを示している。両者の係数の比較より CG 型の方がエネルギー変動が少ないことがわかる。Fig. 4.12 に beam loading による電場の減少の様子を示す。

以上, CI 型と CG 型の加速管の基本的な特性を列挙した。ほとんどの量は減衰パラメータ τ の関数であることに注意する。 τ の選び方は加速器の用途によると思われるが, 加速エネルギーが小さくなる (Fig. 4.8) こと以外は, τ の小さい方が有利である。

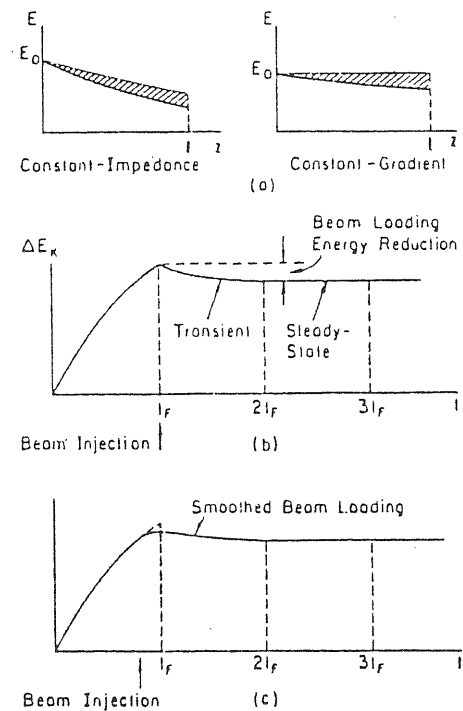


Fig.4.12 Effect of beam loading.

5. Radio Frequency Quadrupole (RFQ)

DTL への入射ビームは, 750kV 程度の Cockcroft-Walton 型加速器で作られるが, いくつかの改良点を持っている。

- 1) 入射エネルギーが低いので, DTL の加速効率が悪く, Q-magnet の組み込み, Q-magnet の強さ, 放電等の問題がおこる。

- 2) capture の効率60~80% with buncher.
- 3) 広い space を必要とする Cockcroft.
- 4) beam transport line の必要性。

RFQを使って“うまくゆけば”次のように改良される。

- 1) 高い入射エネルギー, ~ 2 MeV.
- 2) capture 90%以上。
- 3) 狭い space, rf 電源を含めて。
- 4) イオン源と直結。

RFQの基本モードは, Fig. 5.1に示す TE 210 であり, z 方向に E_z はない。ここで Fig. 5.2に見られるような4枚の電極 (vane) を設置すると, 電場は電極の間に集中する。その電場は次の形の potential から導き出せるものと仮定する。

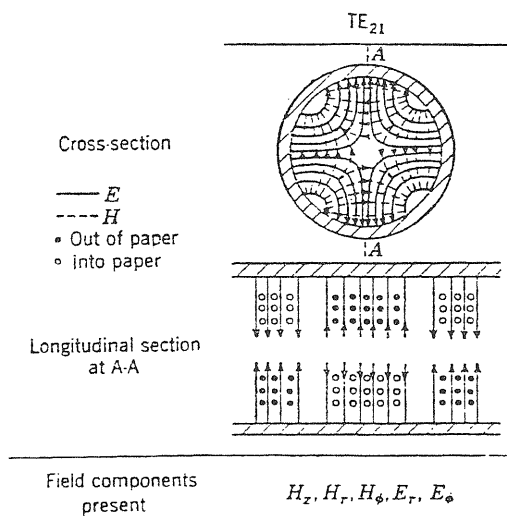


Fig. 5.1 TE21 mode.

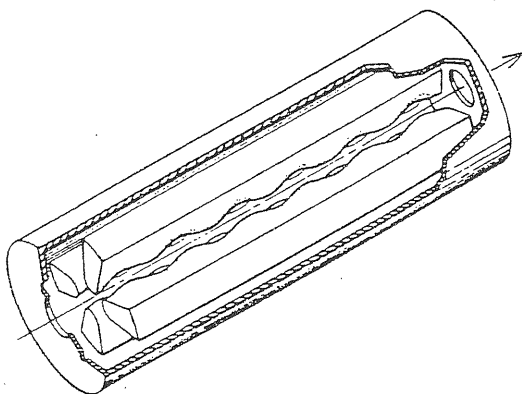


Fig. 5.2 Four vane type RFQ structure.

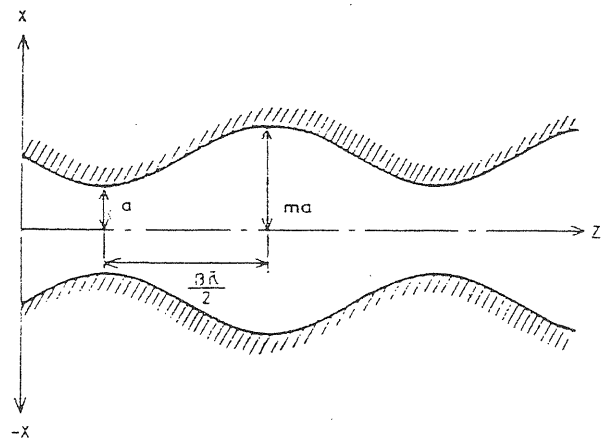


Fig. 5.3 Modulation of the vane.

$$U(r, \varphi, z, t) = U_0(r, \varphi, z) \sin \omega t \quad (5.1)$$

加速電場成分 E_z を作るために Fig. 5.3 に示すようなうねり (modulation) をつける。この modulation は, 対向する vane は同相でつけ, 隣りあう vane には逆相の形でつける。うねりの大きさを m (modulation factor) で表し, うねりの間隔を $\frac{\beta\lambda}{2}$ とする。

Kapchinskii と Teplyakov は 1970年に U_0 の形を導き, RFQの基本式を導出した (ref. 14)。

ここでは Los Alamos の Crandall et al. (ref. 15) の notation に従う。

$$U_0 = \frac{V}{2} \left[X \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos 2\varphi + A I_0(kr) \cos kz \right] \quad (5.2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\beta\lambda} \quad (5.3)$$

$$A = \frac{m^2 - 1}{m^2 I_0(ka) + I_0(mka)} \quad (5.4)$$

$$X = 1 - A I_0(ka) \quad (5.5)$$

$$E_r = -\frac{\partial U_0}{\partial r} = -\frac{XV}{a^2} r \cos 2\varphi - \frac{kAV}{2} I_1(kr) \cos kz \quad (5.6)$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial \varphi} = \frac{XV}{a^2} r \sin 2\varphi \quad (5.7)$$

$$E_z = -\frac{\partial U_0}{\partial z} = \frac{kAV}{2} I_0(kr) \sin kz \quad (5.8)$$

V は vane にかける rf 電圧, I_0, I_1 は変形 Bessel 関数で,

$$I_0(x) \sim 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \quad (5.9)$$

$$I_1(x) \sim \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16}, \quad I_0'(x) = I_1(x)$$

modulation のない flat な vane ($m=1$) では加速電圧は 0 であり ($A=0$), m を 1 からふやしていくと, E_z は大きくなるが, rf の focusing の項 X は小さくなる。

energy gain

unit cell ($\frac{\beta\lambda}{2}$) を進む粒子の得るエネルギーを考える。 $t=t_0$ に, 位相 ϕ_s で動く同期粒子は時刻 t において $z=v(t-t_0)$, $\omega t = \omega(\frac{z}{v} + t_0) = kz + \phi_s$ だから

$$\begin{aligned} \Delta W &= q \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} E_z \sin \omega t \, dz \\ &= \frac{\pi}{4} q AV I_0(kr) \cos \phi_s \end{aligned} \quad (5.10)$$

加速の平均電場は,

$$E_0 = \frac{2}{\beta\lambda} \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} E_z \, dz = \frac{2AV}{\beta\lambda} I_0(kr) \quad (5.11)$$

従って,

$$\Delta W = q E_0 \frac{\pi}{4} \frac{\beta\lambda}{2} \cos \phi_s \quad (5.12)$$

上式より transit time factor T は,

$$T = \frac{\pi}{4} \quad (5.13)$$

とかける。

transverse motion

$\beta \ll 1$ では運動方式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -q \frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -qV \left\{ \frac{Xx}{a^2} \sin \omega t + \frac{AkI_1(kx)}{2} \cos kz \sin \omega t \right\} \\ &\approx -qV \left\{ \frac{x}{a^2} \sin \omega t + \frac{A\pi^2}{2\beta^2 \lambda^2} \sin \phi_s \right\} x \end{aligned} \quad (5.14)$$

$\omega t = kz + \phi_s$ を用い, $\sin 2kz$ の振動は, transverse の振動が $\beta\lambda$ に比べて大きいとして無視した。

(5.14) は, Mathieu eq. であるが, 本稿ではこれ以上立入らない。

加速電場がない時は $A=0, X=1$ となり rf quadrupole 中の運動方程式となる。

focusing の強さを表す dimension less の parameter として次の量がよく使用される。

$$B = \frac{q\lambda^2}{m c^2} \frac{XV}{a^2} \quad (5.15)$$

RFQ の設計

capture 効率の良い RFQ を作るために, 入射部で縦方向に一樣なビームを序々に bunching させる方法, 言いかえると同期位相 ϕ_s を -90° からゆるやか

に加速位相 ($\sim -30^\circ$) まで変化させる。 Fig.5.4 に Los Alamos の設計例を示す。ここでは全体を四つに分けている

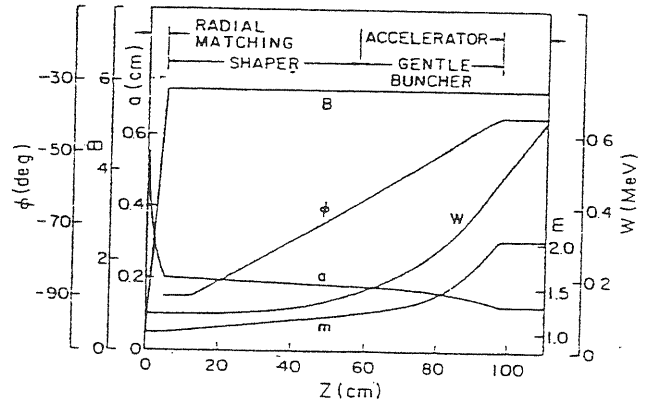


Fig.5.4 Parameters for the 425 MHz test design.

- 1) radial matching section
focusing strength = 0 \rightarrow full strength,
5 ~ 10 cell
 $\phi_s = -90^\circ = \text{const.}$
rf focusing の周期を持つ beam を作る。
- 2) shaper
 ϕ_s をゆっくり変化させる。
 m をゆっくり変化させる。
- 3) gentle buncher
 $\phi_s \rightarrow \phi_s$ (final)
 $m \rightarrow m$ (final)
- 4) accelerator
 ϕ_s, m を一定に保つ。

上記の四つの section において, ビームのどんなパラメータを, どのように変化させるかが重要な問題となり, いくつかの方法が提案されている。optimize する量をどう選ぶかは, 必要条件と boundary condition によって変わる。相方の例をあげると,

$I_{\text{max}}, \epsilon_{\text{max}}$ (emittance), ϵ_{growth} , capture, length, P_c, V, f_0 , aperture, $E_{k, \text{in}}, E_{k, \text{out}}, \Delta E_{k, \text{out}}, \Delta \phi_{\text{beam, out}}$.

Table 5 に KEK で製作中の 750 keV proton RFQ の parameter を示す。

Table 5

Parameters of the 750 keV proton RFQ

Frequency	201.08 MHz
Injection energy	50 keV
Final energy	750 keV

Vane voltage	89	kV	(1965).
Number of cells	118		Principles of Particle Accelerators (1968) Chapt 8.
Vane length	136.4	cm	Rev. Sci. Instr. 26 No.2 (1965).
Initial radius	2.4	cm	
Minimum radius	0.4	cm	なお、上記文献から適時図面を転用させていただきました。
Initial modulation	1.0		
Maximum modulation	2.0		
Initial phase	-90.0		
Final phase	-30.0		
Normalized acceptance	0.41	π cm mrad	

References

1. SNQ design report, 1983? (タイトルunknown).
 2. J. C. Slater, Review of Modern Physics **20** (1948) 473.
 3. K. Mittag, KfK 2555 (1978).
 4. L. Smith, Handbuch der Physik, Band XLIV, p. 341 (1959).
 5. Linear Accelerators, edited by P. M. Lapostolle and A. L. Septier (1970), A. 2 and B. 1.1.
 6. 熊谷寛夫 加速器 II-9 共立出版社.
 7. 核物理学講座 6 加速器 第2章 共立出版社.
 8. G. A. Loew and R. Talman, SLAC-PUB 3221 (1983).
 9. L. Smith and R. L. Gluckstern, Rev. Sci. Instr. **26** (1955) 220.
 10. J. P. Blewett, Phys. Rev. **88** (1952) 1197.
 11. D. E. Nagle and E. A. Knapp, Conf. on Proton Linear Accelerators at Yale Univ., p. 171 (1963).
D. E. Nagle, Linear Accelerators Conf., p. 21 (1964).
 12. D. A. Swenson, E. A. Knapp, J. M. Potter and E. J. Schneider, Int. Conf. High Energy Accelerators, p. 166 (1967).
E. J. Schneider and D. A. Swenson, 1968 Proton Linear Accelerator Conf., p. 499 (1968).
J. Ungrin, S. O. Schriber and R. A. Vokes, IEEE Trans. on Nuclear Science, NS **30** (1983) 3013.
 13. T. Nishikawa, BNL Accelerator Dept. Internal Report AADD-87 (1965).
 14. I. M. Kapchinskii and V. A. Teplyakov, Prib. Tekh. Eksp. No. 2, p. 19 (1970), No. 4, p. 19 (1970).
 15. K. R. Crandall, R. H. Stokes and T. P. Wangler, 1979 Linear Accel. Conf. p. 205 (1979).
- その他の参照又は引用文献
A. D. Vlasov, Theory of Linear Accelerators