

## 第1章 加速器における電磁石の役割

加速器とは、一般にある有限な長さの空間の中で荷電粒子の運動量を、電磁気的な力をかりて増幅する装置と定義することが出来る。この加速器における電磁石の必要性を見るために、次の例を考えて見よう。

まず、荷電粒子が、イオン源と呼ばれる装置の中で熱運動をしている中性粒子から作られたとしよう(このとき中性粒子は、熱運動によってあらゆる方向の速度を持った粒子の集まりと考えられる)。この時、イオン源から引き出された荷電粒子は、熱運動の名残りとして、進行方向と垂直な面内に速度  $v$  を持っている。そのため、粒子が有限な時間  $t$  だけ進行方向に進んだとき、この粒子は、進行方向と直角な方向に  $vt$  だけずれることになる。これは、 $t$  を無限大にしたとき、その変位も無限大になることを意味している。従って、この変位を有限な空間内に閉じ込めるためには、図-1に示すように粒子の進行方向に沿って、レンズの役目をする装置を置かなければならない。

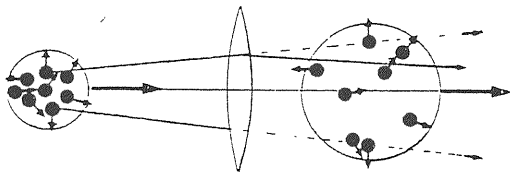


図 1.

この装置には、電場を利用するものと磁場を利用するものがある。いずれも、電荷  $q$  を持った粒子が、電磁場 ( $E, B$ ) 中を速度  $v$  で移動したときこれらから力を受けると言う効果(ローレンツ力)を利用するものである。

ローレンツ力

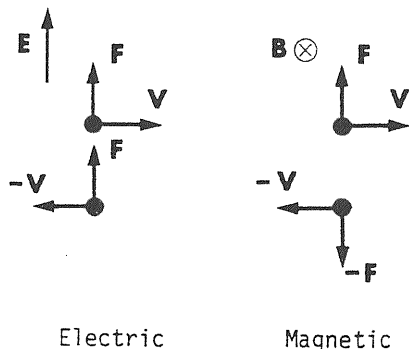


図 2.

$$F = q (E + v \times B) \quad (1.1)$$

このローレンツ力は図-2に示すように、電場に関しては、その大きさと方向が電荷  $q$  と電場  $E$  のみによって決まり、磁場に関しては、電荷  $q$  と磁場の強さ  $B$ 、および粒子の速度  $v$  の3つの積でその力の大きさと方向が決まる。

一般に、電場  $E$  と磁束密度  $B$  の実用的な強さは、電場の場合  $\sim 10^{17} \text{V/m}$ 、磁場の場合、鉄心を用いると2テスラ、超伝導コイルを用いると5~10テスラ程度となる。そのため、速度が小さい粒子の制御には電場を、粒子の速度が光速に近い場合には磁場を用いる方が効率的である。

高エネルギー加速器では、粒子の速度が光速に近いため、粒子の中心軌道と、その回りの運動の制御に磁場が用いられる。この磁場を発生させる装置が電磁石である。この電磁石は、一般に役割の違いによって次の3つの種類に分けることが出来る。

1. 偏向電磁石
2. 四極電磁石
3. 補正電磁石

〈偏向電磁石〉

図-3(a)に示すように、粒子の進む方向に垂直な面で  $x$  又は  $z$  方向に一様な強さを持った磁場を発生させる装置で、粒子の進む方向を変えるために用いる。これは光学系のプリズムの働きをするものである。

〈四極電磁石〉

図-3(b)に示すように、粒子の進む方向に垂直な面内で、次の2つの特長を持った磁場を発生させる装置である。

- イ) 全ての方向に対して磁場の強さがゼロとなる点すなわち磁場の中心を持つ。
- ロ)  $x$  および  $z$  軸上での磁場の強さが、中心からの距離に比例して強くなる。

粒子に対しては、収束又は発散作用を持つ。光学系と言う凸レンズ又は凹レンズの働きをするものである。

ただしこの電磁石は、磁場の特長から、レンズの場合と異なり、 $x$  方向で収束作用を持つ場合には、それと直角な方向では発散作用を持つ。

〈補正電磁石〉

第0近似では、粒子の運動には直接的にはかかわりはないが、加速器の粒子の密度を大きくするときに必要な電磁石である。

これには次のようなものがある。

A) ステアリング電磁石

$x$  および  $z$  方向に弱い偏向磁場(数100~KG)を発生させ、偏向および四極磁場の不完全さから発生

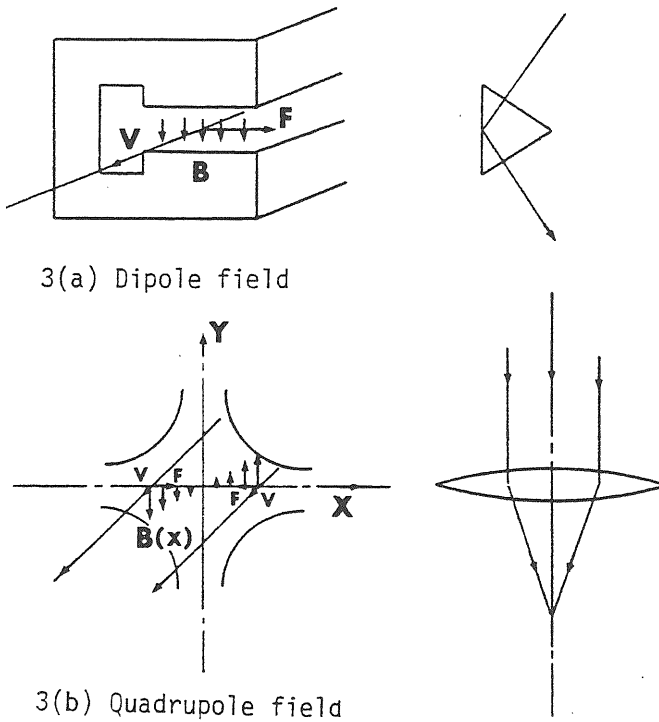


図 3.

する軌道の変形を修正するために用いる。

### B) 六極電磁石

粒子の進む方向に垂直な面内で、次の2つの特長を持った磁場を発生する装置である。

- イ) 四極磁場と同じように磁場の中心が存在する。
- ロ) 磁場の強さが中心からの距離の二乗に比例して強くなる。

粒子に対しては、偏向電磁石での曲げ角、および四極電磁石での収束力および発散力の運動量依存性を補正するために用いる。この運動量依存性を、光学系では分散および色差と呼ぶ。

これらの電磁石の他に、加速器への粒子の入射および取り出し時のみに使用する特殊な電磁石としてキッカー電磁石およびセパタム電磁石と呼ばれるものがある。

このように加速器においては、電磁石は、粒子を制御する最も基本的な装置である。

## 第2章 荷電粒子の磁場内でのふるまい

電磁石を考えると、電磁石のどのよう量が粒子の運動に関与しているかを知っておくことは重要である。そこでこの章では、磁場内での荷電粒子の運動について記述する。

### 2-1. 運動方程式とその解

荷電粒子が、磁場のみが存在する空間内を運動するとき、この粒子には、ローレンツ力が働く。これが、荷電粒子の運動を記述する運動方程式となる。

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

今、この方程式を円柱座標系を用いて  $(r, \theta, z)$  方向の成分に書き下すと次のようになる。

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - m r \dot{\theta}^2 = q (r \dot{\theta} B_z - \dot{z} B_\theta) \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = q (\dot{z} B_r - \dot{r} B_z) \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{z}) = q (\dot{r} B_\theta - r \dot{\theta} B_r) \quad (2.4)$$

加速器では、一般に  $\theta$  方向に磁場の主成分を持つような電磁石は用いない。そこで、以後の議論では  $B_\theta = 0$  とする。又、加速器では、中心軌道に沿った粒子の運動を記述することが主眼である。そこで、図-4に示すような、原点が中心軌道上を運動する粒子とともに移動する、移動座標系  $(x, s=vt, z)$  を用いる。

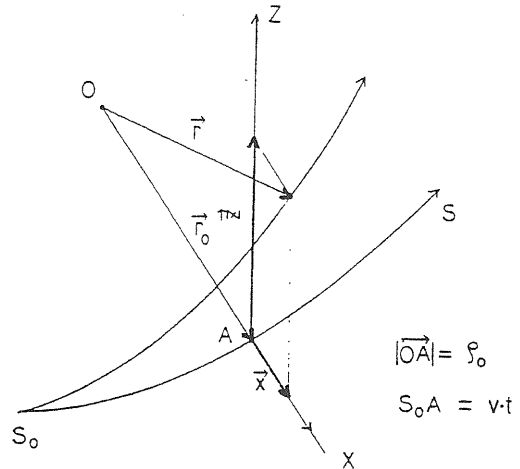


図 4.

この座標系を用いて(2.2)および(2.4)式を書き直すと次のようになる。

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{1}{r} \left( \frac{v_\theta}{v} \right)^2 = \frac{q B_z}{p} \left( \frac{v_\theta}{v} \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = - \frac{q B_r}{p} \left( \frac{v_\theta}{v} \right) \quad (2.6)$$

ここで  $p$  は、粒子の運動量  $(mv)$  を表わす。この2つの式が、磁場内での粒子の運動を記述する基本方程式である。今、我々は、中心軌道上の微小振動のみを考えよう。そこでまず  $r, z$  を次のように置き換える。

$$r = \rho_0 + x$$

$$z = z$$

ここで、 $\rho_0$  は中心軌道の曲率半径、 $x, z$  はこの中心軌道の回りの微小振動の変位である。

従って、 $v_\theta$  は次の式によって与えられる。

$$v_\theta = \sqrt{v^2 + \dot{x}^2 + \dot{z}^2}$$

今、 $v \gg \dot{x}, \dot{z}$  と考えることが出来るので

$$v_\theta \approx v$$

となる。

次に運動量と磁場をそれぞれの中心値の回りで展開する。

$$P = P_0 \left( 1 + \frac{\Delta P}{P_0} \right)$$

$$B_z = B_z^0 + \frac{\partial B_z}{\partial x} \cdot x$$

$$B_x = B_x^0 + \frac{\partial B_x}{\partial z} \cdot z$$

ここで  $B_z^0, B_x^0$  は、 $z$  および  $x$  方向の偏向磁場の強さ  $\frac{\partial B_z}{\partial x}$  および  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$  はそれぞれ  $z$  方向および  $x$  方向の四極磁場の強さである。これらを (2.5) および (2.6) 式に代入して  $\left( \frac{x}{\rho_0} \right), \left( \frac{\Delta P}{P_0} \right)$  に対して 1 次の項までを取ると次の 3 つの式が得られる。

$$P_0 = q\rho_0 B_z^0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + (B_0^2 - K_x) x = B_0 \left( \frac{\Delta P}{P} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K_z \cdot z = 0 \quad (2.9)$$

ここで  $B_0, K_x, K_z$  は次の式で与えられる。

$$B_0 = \frac{q}{p_0} B_z^0 = \frac{1}{\rho_0} \quad (2.10)$$

$$K_x = \frac{q}{p} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{B_z^0 \rho} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$K_z = \frac{q}{p} \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) = \frac{1}{B_z^0 \rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (2.12)$$

(2.7) 式が粒子の中心軌道を決める式であり、(2.8) (2.9) 式が、この中心軌道の回りの微小振動を記述する運動方程式である。

一般に、粒子の運動を記述するには中心軌道に対する位置  $x$  とその点での中心軌道に対する傾き  $x'$  が決まればよい。そこで (2.8) 式を  $s=0$  で初期値が  $(x_0, x_0', \frac{\Delta P}{P})$  を持つとして解いて見よう。

(2.8) 式を次のように変形する。

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + kx = F \quad (2.13)$$

ここで  $k, F$  は次の式で与えられる。

$$k = B_0^2 - K_x \quad (2.14)$$

$$F = B_0 (\Delta P / p) \quad (2.15)$$

(2.13) 式は  $F=0$  とすれば (2.9) 式の解を与えることになる。

ここで

$$X = x - \frac{F}{k}$$

と置き変えると (2.13) 式は

$$\frac{d^2 X}{ds^2} + kX = 0 \quad (2.16)$$

となる。この方程式の解の型は、 $k$  の正負によって異なる。

A)  $k > 0$  のとき

この 2 階の微分方程式の解は一般に次の型に与えられる。

$$X = A \sin \sqrt{k} s + B \cos \sqrt{k} s \quad (2.17)$$

故に

$$X' = A \sqrt{k} \cos \sqrt{k} s - B \sqrt{k} \sin \sqrt{k} s \quad (2.18)$$

この解は  $s=0$  で  $(x_0 - \frac{F}{k}, x_0', \Delta P / p)$  となることから係数  $A, B$  を求めると

$$A = \frac{1}{\sqrt{k}} x_0' \quad (2.19)$$

$$B = x_0 - F/k \quad (2.20)$$

となる。従って (2.13) 式の解  $x, x'$  は次のようになる。

$$x = x_0 \cos \sqrt{k} s + x_0' \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} s + \frac{F}{k} (1 - \cos \sqrt{k} s) \quad (2.21)$$

$$x' = -x_0 \sqrt{k} \sin \sqrt{k} s + x_0' \cos \sqrt{k} s + \frac{F}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} s \quad (2.22)$$

これを行列表現で書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta P}{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k} s & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} s & \frac{p}{\Delta P} \frac{F}{k} (1 - \cos \sqrt{k} s) \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k} s & \cos \sqrt{k} s & \frac{p}{\Delta P} \frac{F}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \frac{\Delta P}{P} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

ここで右辺の3行3列の行列を  $s=0$  から  $s=s$  までの転送行列と呼ぶ。

B)  $k < 0$  のとき

この2階の微分方程式の解は、次の型で得られる。

$$x = A \sinh \sqrt{-k} s + B \cosh \sqrt{-k} s \quad (2.24)$$

従って

$$x' = A \sqrt{-k} \cosh \sqrt{-k} s + B \sqrt{-k} \sinh \sqrt{-k} s \quad (2.25)$$

この解は  $s=0$  で

$$\left( x_0 - \frac{F}{(-k)}, x_0', \frac{\Delta p}{p} \right)$$

を満足することから  $A, B$  を決めることが出来る。

$$A = \frac{1}{\sqrt{-k}} x_0' \quad (2.26)$$

$$B = x_0 - F/(-k) \quad (2.27)$$

従って(2.13)式の解は次のようになる。

$$x = x_0 \cosh \sqrt{-k} s + x_0' \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh \sqrt{-k} s + \frac{F}{(-k)} (1 - \cosh \sqrt{-k} s) \quad (2.28)$$

$$x' = x_0' \sqrt{-k} \sinh \sqrt{-k} s + x_0' \cosh \sqrt{-k} s - \frac{F}{\sqrt{-k}} \sinh \sqrt{-k} s \quad (2.29)$$

これを行列表現で書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{-k} s & \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh \sqrt{-k} s & \frac{p}{\Delta p} \left( \frac{F}{-k} \right) (1 - \cosh \sqrt{-k} s) \\ \sqrt{-k} \sinh \sqrt{-k} s & \cosh \sqrt{-k} s & -\frac{p}{\Delta p} \left( \frac{F}{\sqrt{-k}} \right) \sinh \sqrt{-k} s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

## 2-2. 偏向および四極電磁石

一般に、高エネルギー加速器は、多くの偏向および四極電磁石を用いて作られている。そこで次に、偏向電磁石  $B = (0, 0, B_z)$  および四極電磁石

$$B = \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} x, 0, \frac{\partial B_x}{\partial z} z \right)$$

内での粒子の運動について考える。

### 2-2-1. 偏向電磁石

偏向電磁石内の運動方程式は、(2.8)および(2.9)式で  $k_x = 0, k_z = 0$  と置くことによって得られる。

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + B_0^2 x = B_0 \left( \frac{\Delta p}{p} \right) \quad (2.31)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = 0 \quad (2.32)$$

ここで  $B_0$  は  $\frac{q}{p_0} B_z^0$  又は  $\frac{1}{\rho_0}$  で与えられる。

この解は  $x$  方向に対して

$$K = B_0^2, F = B_0 \left( \frac{\Delta p}{p} \right)$$

と置くことによって(2.23)式から得られる。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos B_0 \ell & \frac{1}{B_0} \sin B_0 \ell & \frac{1}{B_0} (1 - \cos B_0 \ell) \\ -B_0 \sin B_0 \ell & \cos B_0 \ell & \sin B_0 \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

ここで  $\ell$  は磁場の実効長、一般には磁石の長さである。

従って偏向電磁石では  $(B_z^0 \ell)$  という物理量が粒子の運動を支配することになる。この  $(B_z^0 \ell)$  と磁場長  $\ell$  は、一般には磁場測定の結果から決められる。

又  $z$  方向に対しては、 $k=0$  かつ  $F=0$  とすることによって(2.23)式から得られる。

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

これは、自由空間内での運動になる。

次に、図-5に示すような扇型電磁石に、垂直に入射する粒子の、その後の運動について考える。図中のA点からB点までの  $x$  方向の転送行列を書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos B_0 \ell & \frac{1}{B_0} \sin B_0 \ell & \frac{1}{B_0} (1 - \cos B_0 \ell) \\ -B_0 \sin B_0 \ell & \cos B_0 \ell & \sin B_0 \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' = 0 \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

ここで  $B_0 l \ll 1$  (たとえばトリスタン電子リングでは,  $B_0 l \sim 0.025$  である) として各要素を  $B_0 l$  で展開して B 点での変位  $x$  を求めると次のようになる。

$$x = x_0 \left(1 - \frac{\ell L}{\rho^2}\right) + \frac{\ell L}{\rho} \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad (2.36)$$

$\frac{\Delta p}{p} = 0$  のとき, 入射する位置  $x_0$  によらず

$$L = \frac{\rho^2}{\ell} \quad (2.37)$$

のとき  $x = 0$  となる。これはこの電磁石が収束作用を持つことを意味する。

では  $\Delta p/p \neq 0$  のときはどうなるのであろうか? (2.36) 式より

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{x}{\rho_0} \quad (2.38)$$

が満される粒子に対しては  $x = x_0$ , すなわち中心軌道に対して平行に出て行くことになる。

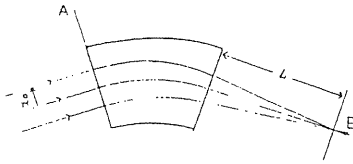


図 5.

## 2-2-2. 四極電磁石

四極電磁石内の粒子の運動方程式は(2.8)および(2.9)式において  $B_0 = 0$  と置いて得られる。

$$\frac{d^2 X}{ds^2} - K_x X = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{d^2 Z}{ds^2} + K_z Z = 0 \quad (2.40)$$

ここで  $K_x, K_z$  は(2.11)および(2.12)式より

$$K_x = \frac{1}{B_z^0 \rho} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad K_z = \frac{1}{B_z^0 \rho} \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

である。

ここで(2.39), (2.40)式を解く前に電流が存在しないような空間内での  $\frac{\partial B_z}{\partial x}$  と  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$  の間の関係について調べておく。今, 図-6 に示すような閉曲線 ABCD にアンペールの定理  $\oint B dl$  を適用する。

$$B_x \Delta x + \left(B_z + \frac{\partial B_z}{\partial x} \Delta x\right) \Delta z - \left(B_x + \frac{\partial B_x}{\partial z} \Delta z\right) \Delta x - B_z \Delta z = 0 \quad (2.41)$$

これより

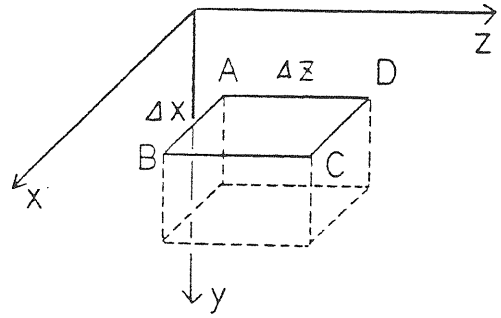


図 6.

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right) \Delta x \cdot \Delta z = 0 \quad (2.42)$$

これより任意の  $\Delta x \cdot \Delta z$  に対して左辺が常に成立するためには

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad (2.43)$$

でなければならない。このことは(2.39)および(2.40)式から分るように  $x$  方向に収束解を持つものは  $z$  方向に発散解を持つことになる。これは, 四極電磁石の重要な特長の1つである。

次に, (2.39)および(2.40)式の解を求めてみよう。この解は  $x$  方向に対しては  $K_x < 0$  のときは, (2.23)式で  $F = 0$  として得られ, このとき  $z$  方向に対しては  $K_z < 0$  であるから(2.30)式で  $F = 0$  として得られる。

$$K_x = K_z = -k \quad k > 0 \text{ とすると}$$

$x$  方向に対して

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k} \ell & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} \ell & 0 \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k} \ell & \cos \sqrt{k} \ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$z$  方向に対して

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k} \ell & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{k} \ell & 0 \\ \sqrt{k} \sinh \sqrt{k} \ell & \cosh \sqrt{k} \ell & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

となる。

四極電磁石の場合には $(\sqrt{k} \cdot \ell)$ と言う物理量が粒子の運動を支配している。このことから四極電磁石では、次の2つの量 $(\frac{\partial B_z}{\partial x}) \cdot \ell$ と磁場長 $\ell$ を測定しなければならない。

次に、図-7に示すように、粒子が四極電磁石に垂直に入射したとして、その後の運動について考えて見る。任意の点での $(x, x')$ は $-\sqrt{k} \ell < 1$ とした薄肉レンズの近似では次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ -k\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' = 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 - k\ell L & \ell + L \\ -k\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

これより任意の点での変位 $x$ は次のようになる。

$$x = (1 - k\ell L)x_0 \quad (2.47)$$

この式より任意の $x_0$ に対して常に

$$L = \frac{1}{k\ell} = \frac{p_0}{qB_z \ell} \left(1 + \frac{dP}{p_0}\right) \quad (2.48)$$

の点で $x=0$ となる。ここで $k$ は、今正の値を持つからこの電磁石は $x$ 方向に収束作用を持っていると言える。ここで注意しなくてはならないことは、この $L$ が運動量依存性を持っていることである。この運動量依存性を色収差と呼ぶ。この現象を図-7に示した。

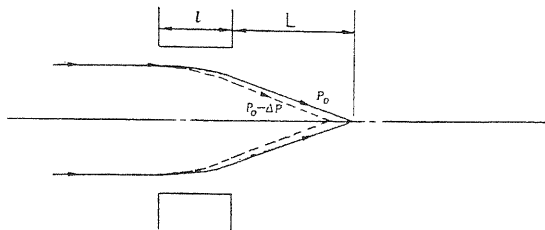


図 7.

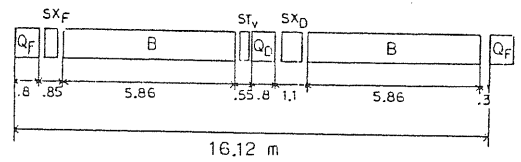
問題： $z$ 方向の粒子の運動について考えよ。

### 第3章 シンクロトロン内の軌道と電磁石の不完全さ

高エネルギー加速器では、中心軌道と呼ばれる設計軌道に沿って、偏向電磁石と四極電磁石をある周期性のもとに配置する。この周期性と言う概念を加速器に導入することによって、電磁石をより小さく作ることが可能となった。この理由については後で述べる。

この周期性を持った、基本構成を“ユニットセル”又は“ラティス”と呼ぶ。一般には、このユニットセ

ルは図-8に示すように偏向電磁石と四極電磁石で作られている。シンクロトロンは、基本的にはこのユニットセルの集合体である。



Normal cell structure of the TRISTAN main ring  
( $B$  = bending magnet,  $Q_F$  and  $Q_D$  = quadrupole magnet,  $SX_F$  and  $SX_D$  = sextupole magnet,  $ST_V$  = vertical steering magnet)

図 8.

この章では、まずシンクロトロン内の粒子の運動の特長について簡単に述べ、次にこのユニットセルを作る電磁石の不完全さによって生じるさまざまな影響について述べる。

#### 3-1. シンクロトロン内の粒子の運動

ユニットセル内の運動方程式は、一般に(2.8)および(2.9)式によって与えられる。

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{1}{\rho^2} - K(s)\right)x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dP}{p}\right) \\ \frac{d^2z}{ds^2} + K(s)z = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで $\rho$ : 曲率半径

$$K(s) = \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

である。

簡単のために $\frac{dP}{p} = 0$ の場合について考えると(3.1)式は $x, z$ 方向共に同じ型の2階微分方程式となる。

$$\frac{d^2y}{ds^2} + Ky(s)y = 0 \quad y = x, z \quad (3.2)$$

この解は、初期値を $(y_0, y_0')$ とすると任意の点では、行列表現を用いて書くと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ここで、行列

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

はガイド磁場のみによって決まる。又、ルウィビルの定理から、この行列は必ず次の条件を満たさなければならない。

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \quad (3.5)$$

さて、我々はここでガイド磁場にユニットセルと言う概念を導入する。これは、 $L$ と言う周期性をユニッ

トセルに持たせると

$$K_y(S + NL) = K_y(S + (N - 1)L)$$

が一般的に成立する事を言う。このようなユニットセル内を粒子が安定に運動するためには、任意のNに対して常に $y_N$ (粒子の中心軌道からのずれ)が有限な値を持つこと、すなわち

$$\begin{cases} y_N = \lambda y_{N-1} \\ y'_N = \lambda y'_{N-1} \end{cases} \quad (3.6)$$

を満す有限な $\lambda$ が存在しなければならない。これを数学的に表現すると、次の固有方程式を満す有限な $\lambda$ が存在することを意味する。

$$|M - \lambda I| = 0 \quad (3.7)$$

ここでIは単位ベクトルである。

(3.7)式に(3.4)式を代入して解くと

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4}}{2} \quad (3.8)$$

ここで $N \rightarrow \infty$ のときにも $\lambda$ が束縛されているような解を探して見よう。

そこで

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \cos \mu \quad (3.9)$$

と置き、 $\mu$ が実数であるとする、(3.8)式は次のように書き直す事が出来る。

$$\lambda = \cos \mu \pm i \sin \mu = e^{\pm i\mu} \quad (3.10)$$

従って

$$y_N = e^{\pm i\mu} y_{N-1} \quad (3.11)$$

となる。

この場合には、振動はするが発散はしない。一方 $\mu$ が虚数であれば

$$\lambda = e^{\pm \mu} \quad (3.12)$$

となり $N \rightarrow \infty$ で $y_N$ が発散することになる。

ここで一周がN個のユニットセル(長さL)から構成されているときには、この $\mu$ は次のように書くことが出来る。

$$\mu = \frac{2\pi M}{(NL)} s$$

ここでMはガイド磁場から決まる任意の正の実数である。(3.9)式から、運動が安定であるためには

$$\left| \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \right| = |\cos \mu| \leq 1 \quad (3.13)$$

を満す実数 $\mu$ が存在することである。

そこで、転送行列Mを次のような変数を用いて書き換える。

$$\begin{cases} \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \cos \mu \\ \frac{a_{11} - a_{22}}{2} = \alpha \cos \mu \\ a_{12} = \beta \sin \mu \\ a_{21} = -\tau \sin \mu \end{cases} \quad (3.14)$$

この $\alpha \beta \tau$ の間には(3.5)式より次の関係が成り立つ。

$$\beta \tau - \alpha^2 = 1 \quad (3.15)$$

(3.14)式を用いてMを書き直すと次のようになる。

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\tau \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

次にこの $\alpha, \beta, \tau$ とHill方程式((3.2)式)の解との関係について見てみよう。

今ユニットセルの転送行列をMとすると、s点とs+L点の間には次の関係が成り立っている。

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{s+L} = M \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_s$$

これより

$$y(s+L) = \cos \mu y(s) + \sin \mu (\alpha y(s) + \beta y'(s)) \quad (3.17)$$

となる。

一方、ユニットセルの内でのHill方程式((3.2)式)の解は次のように書ける。

$$y(s+L) = y(s) e^{\pm i\mu(s)} \quad (3.18)$$

(3.17)と(3.18)式より

$$\frac{y'(s)}{y(s)} = \frac{\pm i - \alpha}{\beta} \quad (3.19)$$

の関係が成立する。この式の両辺をsで微分すると

$$\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = \frac{-\alpha'}{\pm i - \alpha} - \frac{\beta'}{\beta} \quad (3.20)$$

ここで左辺を(3.2)および(2.19)式を用いて書き直すと次の式が得られる。

$$(\alpha^2 + k\beta^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - 1) \pm i(2\alpha + \beta') = 0 \quad (3.21)$$

これが常に成立するためには

$$2\alpha + \beta' = 0 \quad (3.22)$$

$$\alpha^2 + k\beta^2 + \alpha\beta' - \alpha'\beta - 1 = 0 \quad (3.23)$$

の2つの条件が満たされればよい。この(3.22)式を用いて(3.23)式より $\alpha, \alpha'$ を消去すると次のようになる。

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + k\beta^2 = 1 \quad (3.24)$$

この式と(3.22)式、および(3.15)式が $\alpha, \beta, r$ の基本方程式である。

又、Hill方程式の解は(3.19)式に(3.22)式を代入した次の式から求めることが出来る。

$$\frac{y'}{y} = \frac{\pm i + \frac{1}{2}\beta'}{\beta} \quad (3.25)$$

ここで、(3.18)式を代入すると次の2つの式が得られる。

$$\frac{y'(s)}{y(s)} = \frac{1}{2} \frac{\beta'}{\beta} \quad (3.26)$$

$$\frac{d\mu(s)}{ds} = \frac{1}{\beta} \quad (3.27)$$

(3.26)式より  $y(s) = a \cdot \sqrt{\beta}$

(3.27)式より  $\mu(s) = \int \frac{1}{\beta} ds$

故に、Hill方程式の一般解 $y(s)$ は、次のようになる。

$$y(s) = a\sqrt{\beta} \cos(\mu(s) + c) \quad (3.28)$$

$$\mu(s) = \int \frac{1}{\beta} ds \quad (3.29)$$

(3.28)式で表わされる振動をベータートロン振動、 $\mu$ をこの振動の $s$ 方向への位相の進みと言う。又(3.29)式を一周にわたって積分し $2\pi$ で割った値をベータートロン振動数 $\nu$ と言う。

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)} \quad (3.30)$$

又、一周にわたる $\beta(s)$ の平均値を $\bar{\beta}(s)$ とすると

$$\bar{\beta} = \frac{R}{\nu} \quad R: \text{平均半径} \quad (3.31)$$

となる。

これより、 $N$ 個のユニットセルから出来ているシンクロトロンでは、平均半径を一定にしたとき $\nu$ を大きくすると $\beta$ が小さくなり、中心軌道の回りを運動している粒子の振幅( $\sqrt{\beta}$ に比例)が小さくなる。そのためガイド磁場の有効領域が小さくなり、電磁石も小さくする事が出来る。この $\nu$ と $\sqrt{\beta}$ の関係を模式的に示したのが図-9である。

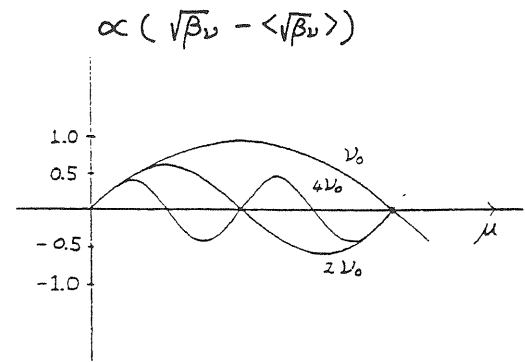


図 9.

### 3-2. 電磁石の不完全さによる粒子への影響

高エネルギー加速器では、ガイド磁場を作るために数10から数100、場合によっては数1000の電磁石が中心軌道に沿ってならべられる。一般に、これらの電磁石には次のような不完全さが存在する。

1) 磁場の強さと磁場の実効長の積が各電磁石毎に異なると言う不完全さ。これは、電磁石の製造時に、鉄心長、間隙寸法および鉄心材の磁気特性のパラッキ等によって生じるものと、電磁石の運転時、すなわち電源電流の不完全さによって作られるものの2つがある。

2) 電磁石の据え付け位置の不完全さ。これには偏向電磁石、四極電磁石の水平面の傾きと、四極電磁石での磁場中心の中心軌道からのずれがある。

粒子が、このような不完全さを持ったガイド磁場内を運動するとき、これによって次のような影響を受ける。

#### 1. 偏向磁場の不完全さ

粒子が、中心軌道とは別のある平衡軌道上を運動する。これを加速器では閉軌道からのずれ"COD"と呼ぶ。このCODが大きくなると真空チャンバーに粒子があたってビーム強度の損失が起る。

#### 2. 四極磁場の不完全さ

粒子のベータートロン振動数( $\nu$ )と振幅関数( $\beta$ )の値の変化、および半整数次の共鳴線に幅が生じる。

#### 3. 磁場の回転

水平方向と垂直方向の運動が独立ではなくなる。次に1)と2)について簡単に説明して置く。

#### 1) 偏向磁場の不完全さ

加速器を設計するときには、まずこのCODの大きさを推定しておく必要がある。これはHill方程式に偏向磁場の不完全さ $F(s)$ なる摂動を加えて、この方程式を解けばよい。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k(s)x = F(s) \quad (3.32)$$



ここで  $F(s)$  が誤差磁場を表わし

$$\text{偏向電磁石では } F(s) = \frac{\Delta B}{B\rho}$$

$$\text{四極電磁石では } F(s) = \frac{G \cdot \Delta x}{B\rho}$$

となる。ここで  $\Delta B$  は偏向磁場の誤差、 $G$  は四極磁場の強さ、そして  $\Delta x$  は四極中心と中心軌道のずれを表わす。今、この誤差  $F(s)$  がリング一周にわたって分布しているときには

$$x_p = \frac{\sqrt{\beta_p}}{2 \sin \pi \nu} \int \sqrt{\beta(s)} F(s) \cos(\pi \nu - |\mu_p - \mu(s)|) ds \quad (3.33)$$

となる。この式から COD に特長的なことは、ベータートロン振動の振動数が整数に近づくと、電磁石に不完全さがあると COD の振幅は急激に大きくなる。加速器の運転では、 $\nu$  が整数になることは必ず避けなければならない。

この式を実際に計算することは非常に複雑であるため一般には、この  $F(s)$  がリング一周にわたって統計的に分布しているとして  $x_p$  の 2 乗平均の平方を計算すると  $x_p$  の最大値は次のようになる。

$$x_p^{\max} = f \frac{\sqrt{n \cdot \beta \cdot \beta^{\max}}}{2 |\sin \pi \nu|} \quad (3.34)$$

ここで  $n$  は磁石の数、 $\beta$  は誤差を発生している点での振幅関数  $\beta^{\max}$  は  $\beta$  の最大値、そして  $f$  はバラツキの標準偏差 ( $\Delta B \ell / B\rho$ ) である。今、例としてトリスタン電子リングについて考えて見る。

$$\begin{aligned} f &= \left( \frac{\Delta B \ell}{B \ell} \right) \cdot \frac{\ell}{\rho} = 2 \times 10^{-4} \cdot \frac{6}{240} \\ &= 5 \times 10^{-6} \cdot (\text{測定値}) \\ n &= 264 \\ \beta &= 16 \\ \beta^{\max} &= 28 \\ \nu &= 37.25 \end{aligned}$$

として計算すると  $x_p^{\max}$  が 1.2 mm 程度となる。

この COD を取り扱う方法には、別にもう一つ有用な方法がある。それは、シンクロトロンでは、誤差磁場が周期的に分布していると考えられる。

そこでこの  $F(s)$  を位相  $\mu$  でフーリエ展開する。

$$F(s) = \sum_k f_k e^{ik\mu} \quad (3.35)$$

$$f_k = \frac{\langle \Delta B \cdot \ell \rangle_k}{B\rho} \quad (3.36)$$

この  $F(s)$  を Hill 方程式に入れて解くと次のようになる。

$$x_p = \sqrt{\beta_p} \sum_k \frac{\nu^2 f_k e^{ik\mu}}{|\nu^2 - k^2|} \quad (3.37)$$

この式から次の事が分る。それは一周にわたる誤差の分布をフーリエ展開したとき、その次数  $k$  の中でベータートロン振動数  $\nu$  に近い成分によって COD の大きさが決まる。従って、電磁石をならべるとき、 $\nu$  に近い成分が小さくなるように心掛けなければならない。

2) 四極磁場の不完全さ  
加速器において四極磁場の不完全さには次の 3 つの種類がある。

1 つは四極電磁石の四極磁場  $G$  とその長さ  $\ell$  の各電磁石毎のバラツキ、もう 1 つは、偏向電磁石内での系統のおよび統計的な四極磁場のバラツキがある。そして最後は、蓄積および電子リングのように、リング一周に分布する四極電磁石をあるグループ毎に分け、それらを別々の電源で励磁するときの電流値の違いによる ( $G \cdot \ell$ ) のバラツキ等がある。

これらのうち偏向電磁石内での系統的な ( $\Delta G \cdot \ell$ ) の誤差からはベータートロン振動数を基準値から  $\Delta \nu$  だけ変化させる。その他の統計的なバラツキからは、半整数次の共鳴線に幅 ( $\delta \nu$ ) を作ることになる。

一般にリング一周に四極磁場の誤差が分布していたとすると  $\Delta \nu$ 、 $\delta \nu$  は次の式によって与えられる。

$$\Delta \nu = -\frac{1}{4\pi} \sum \beta(s) k(k(s) \ell) \quad (3.38)$$

$$\delta \nu = \frac{1}{2\pi} \left| \sum \beta(s) k(s) e^{2i\mu(s)} \ell \right| \quad (3.39)$$

ここで注意しなければならないのは  $\Delta \nu = 0$  となるような誤差分布でも  $\delta \nu$  は 0 にはならないと言う事である。

最後に、四極磁場に誤差が存在する場合には、COD と同じように  $\beta$  の計算値が  $\Delta \beta$  だけづれる事になる。一般に  $\frac{\Delta \beta}{\beta}$  は次の式によって与えられる。

$$\frac{\Delta \beta(s)}{\beta(s)} = \frac{1}{2 \sin 2\pi \nu} \int k(y) \cdot \beta(y) \cos 2(\pi \nu + \mu(y) - \mu(s)) dy \quad (3.40)$$

又、誤差分母をフーリエ展開して解くと次のようになる。

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = -\frac{\nu}{4\pi} \sum_p \frac{a_p \exp(ip\phi)}{|\nu^2 - (p/2)^2|} \quad (3.41)$$

この (3.40) と (3.41) 式より次の重要な結論が得られる。

- 1)  $\nu$  が半整数のとき、理想的なガイド磁場以外では、 $\frac{\Delta \beta}{\beta}$  が発散してしまう。
- 2) 四極磁場誤差の一周の分布をフーリエ展開したとき、誤差成分の次数が  $2\nu$  に近いものほど  $\frac{\Delta \beta}{\beta}$  を大きくする。従って電磁石をならべるときには、この点に注意して据え付ける事が必要となる。

## 第4章 磁場の基礎方程式

電磁石を考えると、次の3つの基礎方程式を知っていれば基本的には十分である。

1) ガウスの定理

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{又は} \quad \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.1)$$

2) アンペールの定理

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{I} \quad \text{又は} \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (4.2)$$

3) 磁界  $\mathbf{H}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  の関係

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (4.3)$$

ここで  $\mathbf{M}$  は物質の磁化で、これは磁化率を  $x_m$  とすると  $\mathbf{M} = x_m \mathbf{H}$  で与えられる。従って、これを(4.3)式に代入すると次のようになる。

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + x_m) \mathbf{H} \quad (4.4)$$

これより、一般に磁性体の  $\mathbf{B}-\mathbf{H}$  曲線と呼ばれているものは図-10に示すように物質と真空の  $\mathbf{B}-\mathbf{H}$  曲線をたし合わせたものである。又  $1 + x_m$  を物質の比透磁率  $\mu_r$  と呼ぶ。

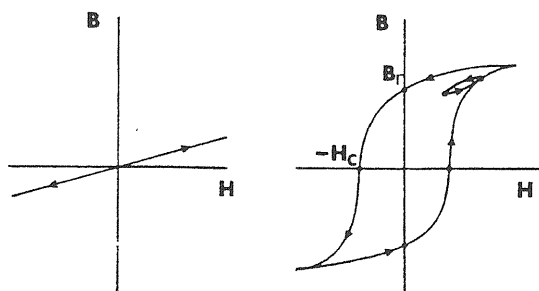


図 10.

### 4-1. スカラーポテンシャルと磁極面

取り扱う空間内に電流が存在しない場合には、磁場をスカラーポテンシャル  $\phi_m$  で表わすことができる。

鉄心を用いる電磁石では、この  $\phi_m$  が一定になる面を鉄を用いて作り、必要な磁場分布を作る。そこで、ここではこのスカラーポテンシャル  $\phi_m$  について考える。

磁束密度  $\mathbf{B}$  はスカラーポテンシャル  $\phi$  と次の関係にある。

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \text{grad}(\phi) \quad (4.5)$$

磁場ではガウスの定理が成り立つから

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.6)$$

(4.5), (4.6)式より

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= -\mu_0 \nabla \cdot (\text{grad}(\phi)) = 0 \\ \therefore \nabla^2 \phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

これを一般に、ラプラス方程式と言う。

今  $y$  方向に磁場が存在しない場合には、このラプラス方程式は2次元問題として取り扱うことができる。そこで、図-11に示すような円柱座標を用いて(4.5), (4.7)式を書くと次のようになる。

$$B_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad B_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (4.8)$$

$\nabla^2 \phi = 0$  より

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.9)$$

(4.9)式の原点  $r = 0$  で正則な解は次のようになる。

$$\phi_n = a_n r^n \sin n\theta + b_n r^n \cos n\theta \quad (4.10)$$

一般解は、この解の線型結合で表わされる。

$$\phi = \sum (a_n r^n \sin n\theta + b_n r^n \cos n\theta) \quad (4.11)$$

ここで第1項をノーマル成分  $\phi^N$ 、第2項をスキュー成分  $\phi^S$  と呼ぶ。スキュー成分とは、ノーマル成分を  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}$  回転したものと考えればよい。

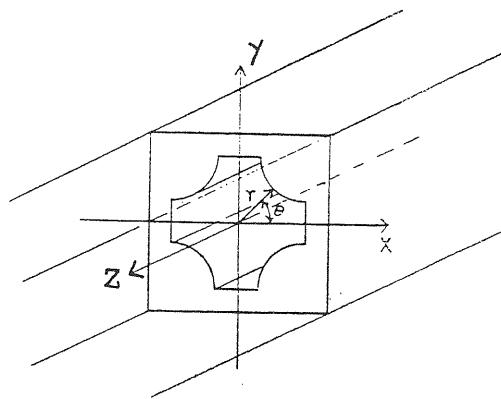


図 11.

このスカラーポテンシャルと磁場を直角座標  $(x, y)$  を用いて4次の項までを書くと表-2のようになる。

表-2. 等ポテンシャル面と磁場の形

次数	$\phi^N$	$B_x$	$B_y$
$n=1$ 2極磁場	$a_1 y$	0	$a_1$
$n=2$ 4極	$2a_2 xy$	$2a_2 y$	$2a_2 x$
$n=3$ 6極	$a_3(3x^2y - y^3)$	$a_3 \cdot 6xy$	$3a_3(x^2 - y^2)$
$n=4$ 8極	$4a_4(x^3y - y^3x)$	$4a_4(3x^2y - y^3)$	$4a_4(x^3 - 3y^2x)$

一例として図-12に四極磁場の等ポテンシャル面を示した。この電磁石のボア半径を $R_0$ とすると磁極の等ポテンシャル面を表わす式は次のようになる。

$$xy = R_0^2/2 \quad (4.12)$$

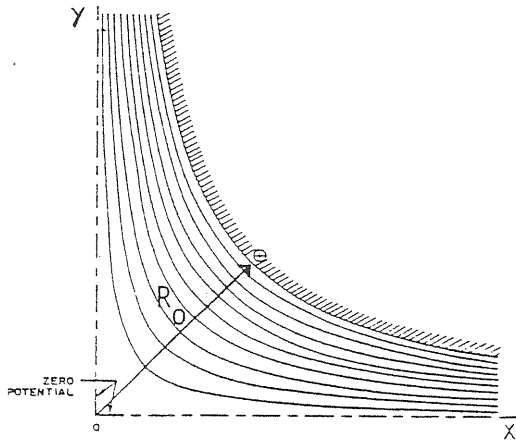


図 12.

問題：ボア半径  $R_0$  の六極電磁石の等ポテンシャル面を表わす式を  $R_0$  を用いて書け。

電磁石では、磁性体の飽和現象およびコイルを入れる空間の確保から、この等ポテンシャル面を有限な所で切断することになる。この切断によって、対称性の許される高次の磁場成分が現れる。一般に、 $N$ 極磁場には次の対称性がある。

$$\varphi(r, \theta) = -\varphi(r, -\theta) = -\varphi(r, \theta + \frac{2\pi}{N})$$

従って許される高次場成分( $n$ 次)は次のようになる。

$$n = 2N(2m + 1) \quad (4.13)$$

ここで $N$ が基本磁場の次数、 $m$ は1以上の整数である。

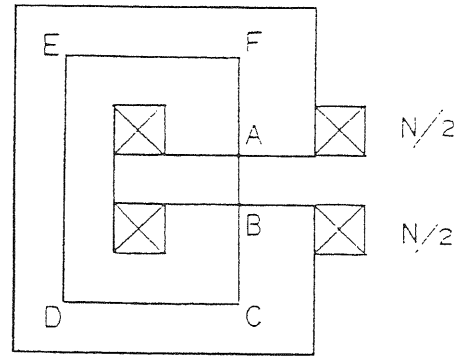
これより2極、4極磁場では次のような多極磁場が現れる。

2 極磁場	6, 10, 14	.....	極成分
4     "	12, 20, 28	.....	極成分

#### 4-2. 磁気回路

磁場の問題は、磁場の基礎方程式によって完全に数学的に表現することが出来る。これらの基礎方程式を用いたものに磁場計算のプログラム(リンダ, トリム, トスカ.....)がある。しかし実際の電磁石の設計にこの方法を適用することは少々見通しが悪い。そこで電磁石の概略設計時に有効な磁気回路という概念を導入しよう。この磁気回路とは、図-13に示すように、磁

界を作るコイルと磁束の通る鉄心および空隙とで構成されているものである。



$$NI = \frac{B}{\mu_0} \overline{AB} + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \overline{BCDEFA}$$

図 13.

今、この回路にアンペールの定理を適用する。

$$\oint H \cdot dl = I \cdot N \quad (4.14)$$

ここで $I$ はコイルに流す電流、 $N$ はコイルの巻き数である。

積分路として図-13の ABCDEFA をとると

$$H(\text{空隙}) \overline{AB} + H(\text{鉄心}) \overline{BCDEFA} = I \cdot N$$

と書ける。

今、簡単のため積分路に沿った磁束密度  $B$  が一定であるとすると

$$H(\text{空隙}) = \frac{B}{\mu_0}$$

$$H(\text{鉄心}) = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

従って

$$(NI) = \frac{B}{\mu_0} \overline{AB} + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \overline{BCDEFA} \quad (4.15)$$

この式より  $\mu_r \gg 1$  の場合には、空隙中の  $B$  は近似的に次の式によって得られる。

$$B \approx \frac{\mu_0 (NI)}{\overline{AB}} \quad (4.16)$$

又、磁束  $\Phi$  は次の式によって与えられる。

$$\Phi = \int B dS = B \cdot S \quad (4.17)$$

ここで $S$ は磁束の通る断面積である。

(4.14)と(4.15)式より $(NI)$ と $\Phi$ の間には次の関係が成り立つ。

$$(NI) = \frac{\overline{AB}}{\mu_0 S} \Phi + \frac{\overline{BCDEFA}}{\mu_0 \mu_r S} \Phi \quad (4.18)$$

この(4.18)式を電気回路の  $V = IR$  と比較すると電

圧がNI, 電流が $\phi$ , そして抵抗が

$$\frac{AB}{\mu_0 S}, \frac{BCDEFA}{\mu_0 \mu_r S}$$

に対応していることが分る。このような置き換えを行って電磁石を考える方法を磁気回路を用いる方法と言う。

ただし、これら2つの回路には下記に示す本質的な違いがある事は心に明記しておく必要がある。

#### 電気回路

導体と絶縁物との電気伝導度の比が $10^{15-18}$ と大きいため、電流が電気回路から外へもれることは無視出来る。

電気伝導度は電場の大きさに無関係。

#### 磁気回路

磁性体と非磁性体との透磁率の比が $10^{3-6}$ であるため磁束が磁気回路外(空气中)へもれることがある。

透磁率が磁場の大きさによって変化する。

## 第5章 電磁石

電流によって、空間に磁束密度Bを発生させる装置を総称して電磁石と呼ぶ。この電磁石には、鉄心を用いて空間内に磁場を作り出す鉄心型電磁石と、これをコイルのみで作る空心型電磁石の2つがある。これらの電磁石は、運転の仕方によって直流電磁石と交流用電磁石に、さらに、磁場の強さによって低磁場用と高磁場用に分けることが出来る。

又電流を流す導体には銅、アルミニウムのように常温で使用するものとNbTi, NbSn<sub>3</sub>, のように液体ヘリウム温度(4.2°k)以下に冷やして超伝導効果を利用するものがある。

電磁石の設計、製作に当っては、電磁石の使用方法和目的に応じて、磁極とコイルの形状、磁性体と導体の種類、および鉄心とコイルの製作方法を適格に選択することが、電磁石の性能の良し悪し、およびその寿命を決定する。

この章では、まず電磁石の設計に計算機プログラムを使用する有効性と限界についてまず述べ、その後鉄心型電磁石と空心型電磁石について説明する。

### 5-1. 計算機プログラムの有効性と限界

磁場計算のプログラムは、第4章で述べた、3つの基礎方程式を用いて作られている。このプログラムには、2次元問題のみを取り扱う事が出来る" LINDA", "TRIM"等と3次元問題も取り扱うことが出来る

"GFUN", "TOSCA"等がある。

現在、我々が自由に使用出来るプログラムは、これらの中で2次元プログラムLINDAとTRIMである。従って、本質的にBの磁石長手方向への積分値は求めることは出来ない。しかし、高エネルギー加速器のように磁石長が間隙長に比べて十分大きいような場合には、これらのプログラムを用いて計算した間隙内のgの分布は図14に示したように、測定値とよく一致している。このことは、磁極の設計に、これらのプログラムを使う有効性を示唆している。

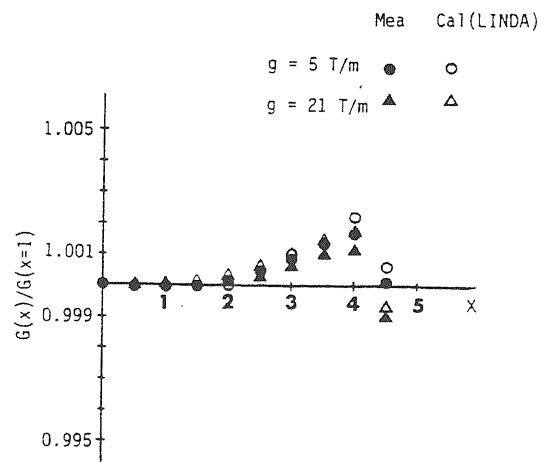


図 14.

しかし磁石長が間隙長に比べて大きくないとき(目安として磁石長と間隙長の比が3~5倍を考えればよいであろう)、この問題は2次元では取り扱うことが出来なくなる。このような場合、実際の間隙内のBとその分布は、計算値のそれから大きくずれてくる。又、鉄心内の磁束密度も電磁石の端面の影響を受けて計算値の数倍になることもある。従ってこのような電磁石を作るときには、まず2次元問題と仮定して磁極の計算を行い、それをもとにしてモデル電磁石を作り、間隙内の磁束密度とその分布および鉄心内の磁束を測る。その結果をもとにして、本体電磁石の形状と磁極形状を最終的に決定することが望ましい。

なお、たとえ磁石長と間隙長の比が十分大きくても、磁場の計算に必要な入力データ、たとえばB-H曲線、および鉄心の占積率のデータ、の精度が悪ければ計算と実測との間に差が生じる。ただしこれらの精度が問題になるのは鉄心が飽和するときで、そうでないときにはBもその分布もこれらの精度にはほとんどよらない。実測値と計算値は $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度でよく一致している。

5-2. 鉄心型電磁石の設計

この電磁石は、基本的には、第4章で説明した等ポテンシャル面を磁性体で作る、その磁極面によって間隙内に必要な磁束密度Bとその分布を作り出す。又、必要な磁界は、この磁性体を囲むように導体(これを一般にコイルと呼ぶ)を巻きこれに電流を流して作る。

この電磁石の設計にあたって、我々は、次の思想を出来るだけ守るべきである。

- 1) 必要な磁場分布以外の成分は作らない。  
 たとえば、偏向電磁石では2極成分以外の多極成分は作らない。
- 2) 必要な箇所以外に磁場を発生させない。  
 間隙以外に磁場を発生させても何の役にも立たない。むしろ害になる。
- 3) 必要以上に大きなものは作らない。  
 資源のむだである。

では、このような電磁石をどのように設計すればよいか?

一般的に、我々が用いる設計順序を下に示す。

- 1) 間隙内の使いやすさを考えて電磁石の型を決める。
- 2) 必要な最大起磁力を計算し、電源の作りやすさとケーブルでの発熱を考慮して、電流値を決め、コイルの寸法を決定する。
- 3) 必要な磁束密度Bと磁場有効範囲から、計算機プログラムを用いて磁極の形状を計算する。
- 4) 最後に鉄心内の最大磁束密度が1.5~2テラになるように形状を決める。

これを高エネルギー加速器で最も重要である偏向電磁石と四極電磁石の場合について考えて見よう。

〈偏向電磁石〉

偏向電磁石は、図15に示したような、互いに平行な磁極面を持った鉄心と、磁界を発生させるコイルよりなる。この偏向電磁石には、図15に示すように、その型によってC型、H型および窓枠型の3つの型がある。

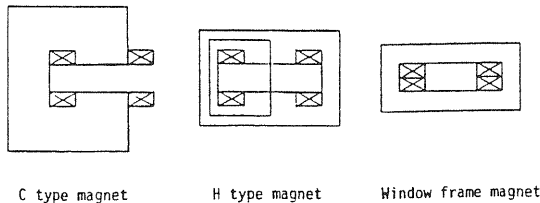


図 15.

これらの電磁石の特長をまとめると次の表のようになる。

表 3. 偏向電磁石の型による比較

	利 点	欠 点
C型電磁石	間隙内が利用しやすい	片方が開いているため磁気力によって変形しやすい。磁場の対称性が悪い。(四極磁場が出やすい)
H型電磁石	磁気力による変形を受けにくい。磁場の対称性がよい。	間隙内が利用しにくい。
窓枠型電磁石	磁気力による変形を受けにくい。高い磁場(2~2.5テスラ)まで磁場の対称性と一様性が他の2つに比べて良い。	間隙内が利用しにくい。コイルの利用スペースが狭い

次にこの電磁石の起磁力(NI)と間隙内の磁束密度(B)および間隙長(d)の関係性を求めておこう。

図15に示した磁路に沿ってアンペールの定理を適用すると、次の式を得ることが出来る。

$$B \cdot d / \mu_0 + \int \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_{\text{鉄心}} dl = NI \quad (5.1)$$

この式は鉄心が飽和していなければ、比透磁率 $\mu_r$ は $10^3 \sim 10^4$ と言う大きな値を持っている。従ってBは近似的に次式によって与えられる。

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{d} \quad (5.2)$$

たとえば $N=20$ ターン、 $I=1500$ A、 $d=0.07$ メートルとすると、間隙内のBは0.54テスラとなる。

次にコイルの寸法について考えて見よう。

コイルでの電力損失(w)は、導体の電気伝導度を $\rho$ ( $\Omega \cdot m$ )、コイルの1ターン当りの平均長を $l$ (m)、電流密度を $j$ (A/ $m^2$ )とすると次のように書ける。

$$w = j \cdot (NI) \cdot \rho \cdot l$$

この式より、コイルでの電力損失は電流密度に比例する。これより電磁石の運転経費を少なくするためにはjを小さく、又製造コストを下げるためにはjを大きくすればよいことになる。実際のコイルの設計ではこれら2つを考慮してjの値を決めることになる。

トリスタン電子リング偏向電磁石では、これらを考慮した結果 $j_{\text{max}} \sim 3$ A/ $mm^2$ となっている。

次に磁極形状について考える。

鉄心型電磁石においては、この形状の良しあしが性能を決定する。この磁極の形状は、計算機プログラムを用いてかなりの信頼度を持って設計することが出来る。そこで、ここでは図16に示すトリスタン電子リング用偏向電磁石の磁極形状について説明してみよう。

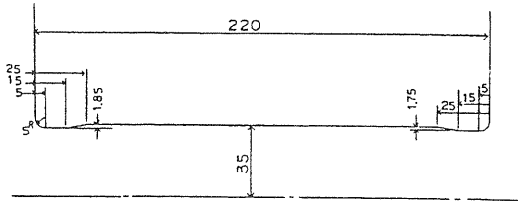


図 16.

この電磁石は、1 KGから6 KGまでの全ての範囲の B を連続的に利用する。そのため、この B の分布が励磁の強さによって大きく変化しないように磁極の形状を決めなければならない。一般に角を持つような磁極では、この点に磁束の集中が生じる。そのため角の部分の磁性体が飽和し始め B の分布が励磁の強さによって大きく変化することになる。この電磁石では、上の理由から角を半径 5 mm の円で切り落してある。この円の大きさは、B を大きくするに従って大きくしなければならない。又、この磁極には、磁場の有効範囲を、磁極幅を固定した条件のもとで出来るだけ広く取るために図に示してあるようなシムを付けてある。この電磁石ではこのような磁極形状にすることで、磁極中心の磁場の強さの 99.96% 以内の範囲を磁極幅の 0.6 倍の範囲で得ている。

最後に、これらの計算結果をもとにして、間隙内で最大磁場のとき、鉄心が飽和しないようにリターンヨークの形状をコイル寸法を考慮して、決定したものが図 17 に示す電磁石形状である。

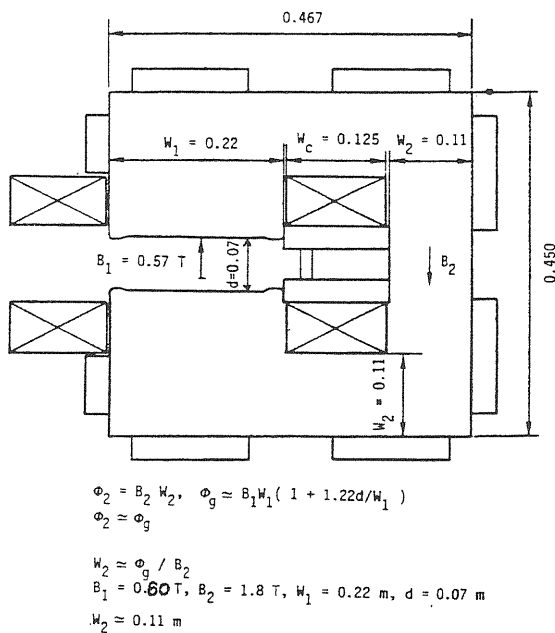


図 17.

次に四極電磁石の場合について考えて見よう。

基本的には、偏向電磁石と同じであるので、ここでは磁極形状の設計方法についてのみ話そう。

四極電磁石の磁極の基本形状は、次の式によって与えられる。

$$x = R_0^2 / (2g) \quad (5.3)$$

ここで x, y, R<sub>0</sub> の単位はメートルとする。

ここで R<sub>0</sub> は、図 18 に示したように電磁石のボア半径である。

(5.3) 式において、我々は、この x としてどこまで考えればよいのであろうか。

そこで四極磁場の強さ g (T/m) と起磁力の関係をまず求めておく。図 18 に示す回路にアンペールの定理を適用すると次のようになる。

$$\frac{1}{\mu_0} \int g r dr + \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \int B \cdot dl = NI$$

ここで  $\mu_r$  は、 $10^3 \sim 10^4$  であるから、左辺第 2 項を無視すると次のようになる。

$$g \approx 2\mu_0 NI / R_0^2 \quad (5.4)$$

この g と (5.3) 式で与えられる x との間には、ある密接な関係がある。

x 軸上の磁場 B<sub>y</sub> は、次の式によって与えられる。

$$B_y = g \cdot x \quad (5.5)$$

鉄心を用いた電磁石では、飽和磁束密度は、約 2 テスラ程度であるから (5.5) 式の g · x には次の条件がつく。

$$g \cdot x \leq 2 \quad (5.6)$$

又、ボア半径 R<sub>0</sub> の四極電磁石で許される g の最大値は、次のようになる。

$$g^{\max} \leq 2 / R_0 \quad (5.7)$$

従って四極電磁石の形状は、g を与えると (5.6) 式より x の最大値が決まり、この位置で (5.3) 式から決まる双曲線をやめればよいことになる。もし (5.6) 式を無視すると磁極が飽和して必要な g の分布が得られないことになる。

図 19 にトリスタン電子リング用四極電磁石の磁極形状を示す。この磁極は g<sup>max</sup> = 20 T/m, g の有効径 110 mm, ボア半径 50 mm に対して設計されたものである。図中の D 点が (5.4) 式から決まる点である。又、偏向電磁石の場合と同様に g 分布の有効範囲に BCD の位置にシムが付けてある。

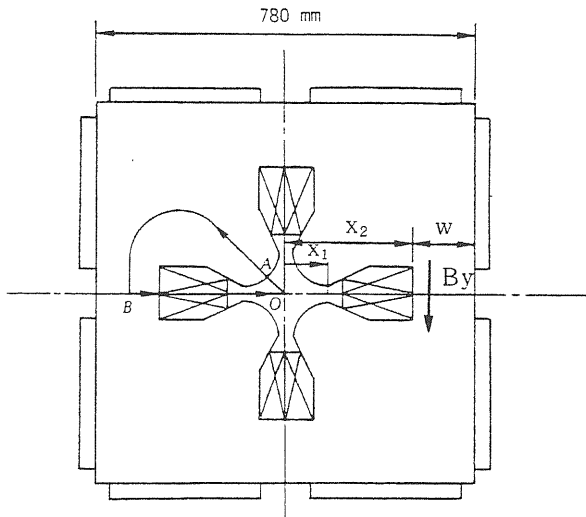
又、この x と g の有効範囲 x<sub>0</sub> (中心値の 99.9% 以内)

との間には次の経験公式がある。

$$\frac{x_0}{x} \approx \frac{1}{2} \quad (5.8)$$

この関係式を用いて(5.6)式を書か換えると次のようになる。

$$g \lesssim \frac{1}{x_0} < \frac{2}{R_0} \quad (5.9)$$



$$\overline{OA} = R_0$$

$$\phi \leq g x_1 x_2 / 2$$

$$W \approx \phi / B_y$$

図 18.

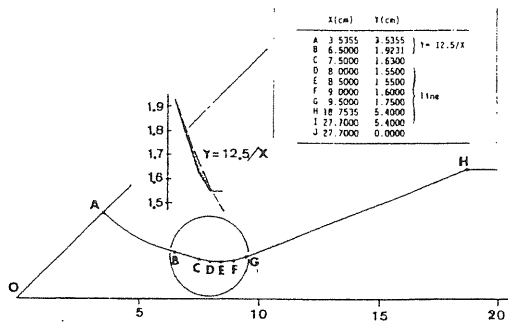


図 19.

この(5.9)式は、我々につきの重要な結論を与えてくれる。

四極電磁石では、ポアー半径を小さくすればするほど致達し得る  $g$  が大きくなり、又同じポアー半径でも磁場の有効範囲  $x_0$  を変えると、致達し得る  $g$  の値が変わる。

### 〈磁束のもれ〉

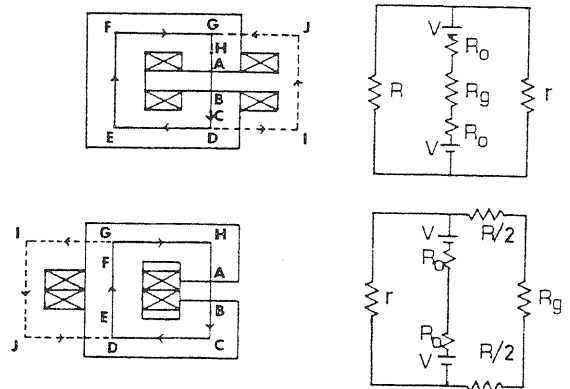
鉄心型電磁石を設計する場合、特に注意しなければならないのは磁束のもれと言う現象である。このもれとは、電磁石の間隙を通らないような磁束の総称である。

この“もれ”が存在しても、鉄心内の磁束密度が1.5テスラ以下であれば間隙内の磁束密度は設計値から大きくずれることはない(他の機器への影響は別にして)。この“もれ”と言う現象は、本質的には、鉄心内に空気間隙が存在することから生じるものである。

このもれの大きさは、間隙長、磁石形状、コイルの位置および透磁率の値によっては、間隙を通る磁束の数倍に達する事もある。

ではこのもれと言う現象を、磁気回路を用いて考えて見よう。

今、図20に示すような同じ断面形状を持った鉄心に a と b という2つのコイルの巻き方をする。



$$R_g = \overline{AB} / (\mu_0 S), R = \overline{CDEF} / (\mu_0 \mu_r S)$$

$$R_0 = \overline{HA} / (\mu_0 \mu_r S), r = \overline{DIJG} / (\mu_0 \mu_r S)$$

図 20.

この磁気回路を図20に示すような等価回路に置き直して考えよう。

今、2つの回路の電圧(起磁力)を一定にして、回路に流れる電流(磁束)  $I_a$  と  $I_b$  を求めると次のようになる。

$$I_a = \frac{2V}{\left(\frac{R \cdot r}{R+r}\right) + R_g + 2 \cdot R_0} \quad (5.10)$$

$$I_b = \frac{2V}{\frac{r(R_g+R)}{r+(R_g+R)} + 2R_0} \quad (5.11)$$

ここで  $R_g$  は、間隙の磁気抵抗、 $R_0$  : コイル部分の磁気抵抗、 $R$  : 鉄心内の磁気抵抗、そして  $r$  がもれ磁場に対する磁気抵抗である。

(5.10), (5.11)式より、鉄心が飽和していなければ

すなわち  $R, R_0$  が  $R_g$  に比べて小さければ、これらの磁気回路 a と b を次のように考えることが出来る。a と  
言う電磁石では、この磁気回路を定磁束(すなわち定  
電流回路)回路として考えることが出来、b の場合には  
定起磁力(定電圧回路)回路と考えることが出来る。

今、 $R_g \approx r$  として次の条件で解くとそれぞれ次のよ  
うになる。

$R_g \gg R, R_0$	$R, R_0 \approx 0 (\mu \rightarrow \infty)$
$I_A \approx \frac{2V}{R_g}$	$I_A \approx \frac{2V}{R_g}$
$I_B \approx \frac{4V}{R_g} = 2 \cdot I_A$	$I_B \approx \frac{r+R_g}{r \cdot R_g} \cdot 2V$

この簡単なモデルからわかるように、間隙内に同じ  
磁束密度を作る場合でも、そのコイルの位置によって、  
鉄心内の磁束が 2 倍も違う。たとえば a と  
言う電磁石で間隙および鉄心内で 1 テスラ  
と言う磁場の強さを発生させたとして、  
b と  
言う電磁石では鉄心内は 2 テ  
スラ  
と言うことになる。この値は鉄心の飽和磁束密度  
に近い  
ため、与えられた起磁力では、間隙内の磁束密  
度  $B$  は a と比べると小さくなる。この場合鉄心の断  
面積を 2 倍にすれば良いように思えるが、実はそうでは  
ない。それは、鉄心の断面積を  $N$  倍増やすと、それに  
ともな  
って鉄心の表面積が  $\sqrt{N}$  倍大きくなりその分磁  
束の  
もれが多くなる。したがって、鉄心内の磁束密度  
を半  
分に  
するためには、断面積を 4 倍にしなくては  
なら  
ない  
と言うことになる。このように b と  
言う電磁石の  
形状は、使用する鉄心と導体の量と言う 2 つの点か  
ら効  
率的であるとは言えない。しかし、コイルのスペ  
ース  
が全  
く  
足らないとか、電磁石の据え付け場所に空間的  
余  
裕  
がないとかの特殊な制限があるときには、この  
よ  
うな  
型の電磁石を用いることがある。従って、も  
れ  
磁  
場  
の  
影  
響  
を  
出  
来  
る  
だ  
け  
小  
さ  
く  
す  
る  
た  
め  
に  
は  
次  
の  
こ  
と  
に  
注  
意  
し  
て  
電  
磁  
石  
を  
設  
計  
し  
な  
け  
れ  
ば  
な  
ら  
な  
い。

1. コイルの位置は、使用する間隙の近くに置くこと。
2. 鉄心材の  $\mu$  は出来るだけ大きなものを使用すること。
3. もし間隙近くにコイルを置くことが出来ない場合には、間隙長は必要最小限におさえ、鉄心の磁路の長さを出来るだけ小さくかつ断面積を大きくするように設計すること。又、電磁石の回りの磁性体の有無によって、もれ磁場の量が大きくなることも心に明記しておく必要がある。

### 5-3. 直流電磁石と交流電磁石

#### 直流電磁石

この電磁石は、ある一定の強場の強さのみで使用し、  
その途中の過程は利用しない。従って、この電磁石に  
要求される磁気性能は、長時間の安定性である。この  
安定性をみだす原因となるものには、鉄心材の磁気  
余効(これは、磁場の強さが、電流一定のもとでも時  
間と  
ともに  
変化  
する  
現象である)と、励磁コイルの温  
度  
上  
昇  
による磁極間隙寸法の変化、および鉄心材の透  
磁  
率  
の  
温  
度  
依  
存  
性  
と  
が  
あ  
る。

直流用電磁石では、鉄心およびコイルの製造方法に  
は、特に制限はない。これらの電磁石には、荷電粒子  
分析用電磁石、およびサイクロトロン用電磁石、KEK  
では放射光の電磁石、ビームトランスポート系の電  
磁  
石  
が  
あ  
る。これらの鉄心は、大きな鉄の板から切り出  
さ  
れ  
る  
か、又は、これらを重ねて作られている。

#### 交流電磁石

この電磁石には、磁場を時間とともに連続的に変化  
させ、その途中の磁場を利用するものと、磁場をパ  
ル  
ス  
的  
( $\sim 10 \mu$ 秒 $\sim$ 数  $10 \mu$ 秒)に変化させ、その一部を利  
用  
す  
る  
も  
の  
が  
あ  
る。

これら電磁石に要求される磁気性能は、直流使用  
時と同じ磁場分布が交流使用時にも得られること、お  
よ  
び  
磁  
場  
の  
追  
従  
性  
と  
応  
答  
特  
性  
が  
失  
な  
わ  
れ  
な  
い  
こ  
と  
で  
あ  
る。これらの性能は、使用する磁性体とコイル内での  
う  
ず  
電  
流  
効  
果、磁性体の透磁率の周波数特性とヒステ  
リ  
シ  
ス  
損、および鉄心とコイルの製作方法によって決  
ま  
る。

このような理由から交流電磁石の鉄心は、表面を絶  
縁した薄い(厚さ 0.1 $\sim$ 1 mm)鋼板を積層して作るか、  
フェライトと呼ばれる酸化鉄の粉末を成形して作る。  
前者の方法は、比較的低周波用電磁石(繰り返し数 10  
Hz 以下)に、後者は非常に早い応答特性(数  $10 \mu$  秒 $\sim$   
数  $10 \mu$  秒)を必要とする電磁石に用いる。

積層型電磁石には、ブースター電磁石、陽子シン  
クロトロン、およびトリスタン用偏向、四極電磁石がある。  
又、フェライトを使用した電磁石にはキッカー電磁石  
がある。

#### 〈渦電流による影響〉

##### (a) 渦電流と鉄心

一般に、電磁石は、直流・交流用をとわず、一度は  
磁場の時間変化と言う環境にさらされる。この時、程  
度  
の  
差  
は  
あ  
れ、鉄心材に誘導電圧が生じ、これによ  
っ  
て  
鋼  
板  
に  
う  
ず  
電  
流  
が  
流  
れ  
る。この渦電流が電磁石本体  
に  
悪  
影  
響  
を  
及  
ぼ  
す  
事  
は  
ほ  
と  
ん  
ど  
な  
い。しかしこの電  
流  
が  
作  
る  
磁  
場  
に  
よ  
っ  
て、間隙内の磁束密度とその分布が  
変  
化  
す  
る  
と  
も  
に、残留磁場にも影響が生じる。これ



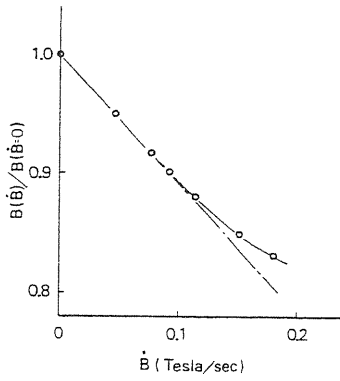


図 21-a

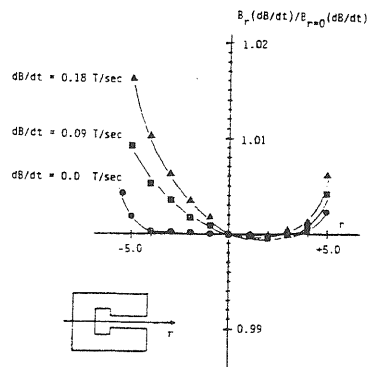


図 21-b

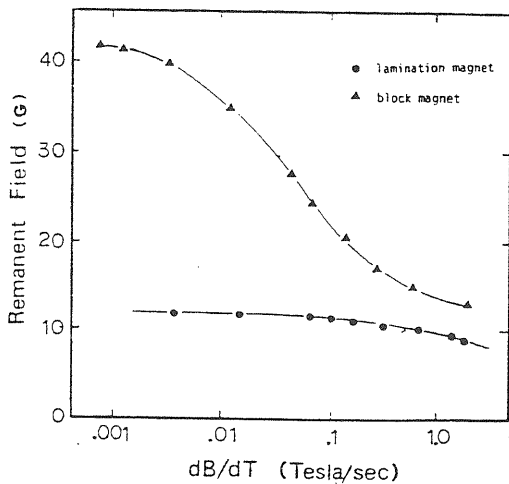


図 22.

らの影響について調べた結果を図21, 図22に示す。

図21(a),(b)は、ブロックタイプ(大きな鉄のかたまりから作ったもの)の直流電磁石を、いくつかの磁場の時間変化率で立上げ、 $B$ とその分布を測定したものである。間隙内の $B$ は磁場の時間変化率 $\dot{B}$ が大きくなるに従ってほぼこれに比例して減少して行く。又、 $B$ の分布は、この電磁石がC型電磁であることを反映して左右非対称となる。

図22は、ブロックタイプの電磁石と積層型電磁石で磁場の立下げ時の $\dot{B}$ を変えて残留磁場を測定したものである。これより、ブロックタイプの電磁石では $\dot{B}$ の違いによって残留磁場が準静的におろした場合の数分の1に減少することが分る。このことは、直流電磁石では、電磁石の電源を切る方法に注意をはらう必要があることを意味する。これに対して積層型電磁石では、この $\dot{B}$ による残留磁場への影響はブロックタイプに比べて非常に小さい。

これらのことから、加速器内に使用する電磁石は、直流・交流とにかかわりなく、ある一定のパターンで運転することが望ましい、仮りに何か異常な運転をしたときには、電磁石の初期化(常に一定のパターンで電磁石を運転する)と言う過程を行うべきである。

#### (b) 渦電流と真空チェンバー

交流磁場内に置かれた、金属製の真空チェンバー内には渦電流が流れる。この渦電流によって作られる磁場の強さは、うず電流に対して対策が取られている交流電磁石では、鉄心およびコイルによるものよりはるかに大きくなることがある。この渦電流の大きさは、交流磁場の周波数にまず比例し、そして真空チェンバーの材質および形状に強く依存する。

これらの影響の一例として蓄積リング内のアルミチェンバーについて測定した結果を図23に示す。この図中には、真空チェンバーの形状をもとに算出した電流分布を用いて、"LINDA"で磁場計算を行った結果も合わせて図示してある。

この測定から、このうず電流の作る磁場は、導体の形状が決まればかなりの精度(～数%程度)で計算することができる。

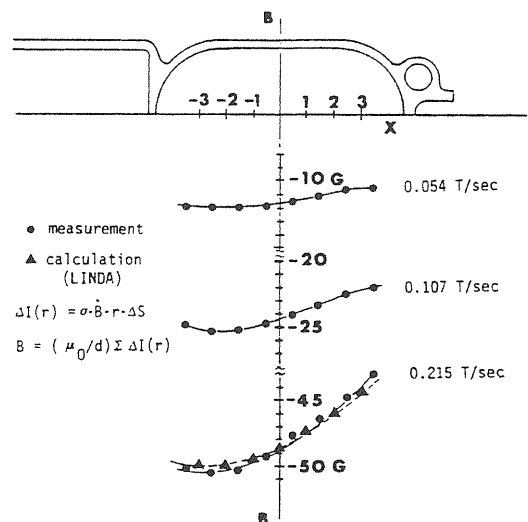


図 23.

#### 5-4. 鉄心材

加速器に用いる電磁石は、前で述べたように、その運転方法と使用する磁場の強さが多岐に及んでいる。そのため目的に合った鉄心材を選択する事が、性能のきめ手となる。その基準は、次のようなものである。

- 直流電磁石 …… 磁気余効の小さいもの
- 交流電磁石 …… わず電流損およびヒステリシス損の小さいもの
- パルス電磁石 ……  $\mu$ の高周波特性が良いもの

低磁場用電磁石 …… 低磁場で $\mu$ が大きく、 $H_c$ の小さいもの

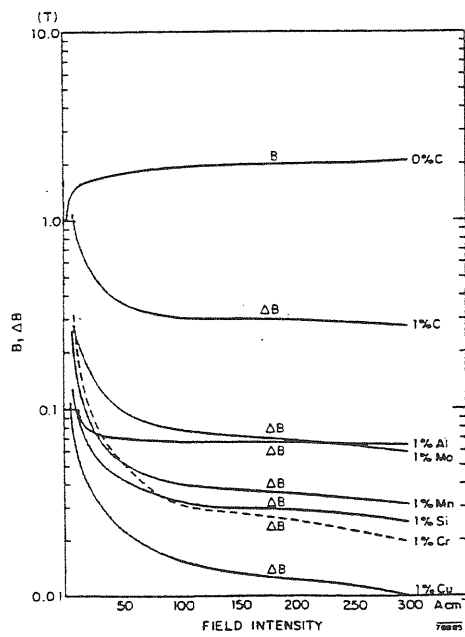
高磁場用 “ …… 高磁場で $\mu$ が大きいもの、この場合には $H_c$ の大きさはそれほど問題ではない。

このような鉄心材には純鉄、低炭素鋼、ケイ素鋼板およびフェライトがある。次にこれらの磁気特性について簡単に述べておく。

##### 〈純鉄〉

純鉄は、飽和磁束密度が2.15 Teslaと高く、また素材の抵抗率が低いと言う特長を持っている。代表的なB-H曲線を図24に示す。

この鉄は、一般に厚さの制限(数cm)があるため、使用するときには適当な厚さの板を重ねて使用するか、薄板に圧延して用いる。この板を交流電磁石に用いる場合には、表面を絶縁処理する必要がある。



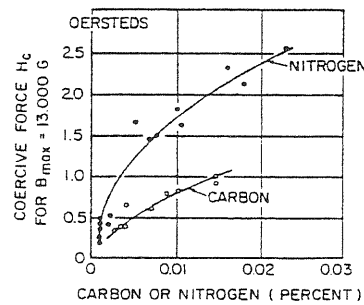
B-H curves of pure soft magnetic iron and influence of impurities on steel flux densities

図 24.

##### 〈低炭素鋼〉

一般に炭素含有量が0.02%~0.1%程度の鉄を言う。図24に炭素含有量をパラメータとしたB-H曲線を、図25に炭素、および窒素含有量と $H_c$ との関係を示す。

この低炭素鋼は、比較的大きな形状のものが得られるために、主に直流電磁石用鉄心材に用いられている。なお使用に当たってはB-H特性、および $H_c$ を確認した上で使用することが望ましい。



Effect of carbon and nitrogen on the coercive force of 3% Si steels (Stanley, ASM)

図 25.

##### 〈ケイ素鋼板〉

鉄とケイ素の合金である。ケイ素の含有率によって飽和磁束密度と保磁力が変化する。この関係を図26に示す。一般に加速器では、低磁場および繰り返しの早い電磁石には、ケイ素含有量の大きい材質を、高磁場特性を問題にする電磁石では、ケイ素含有量の少ない材質を使用する。

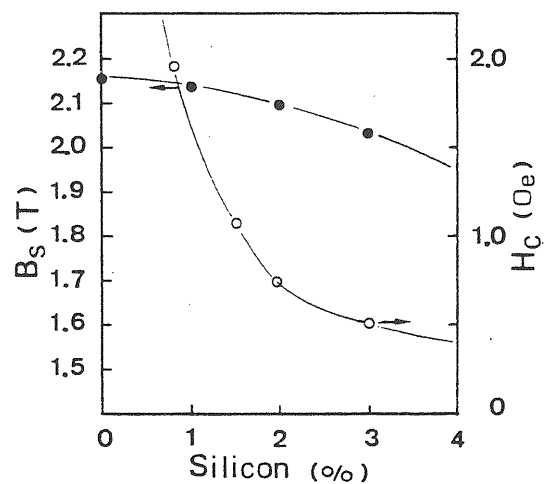


図 26.

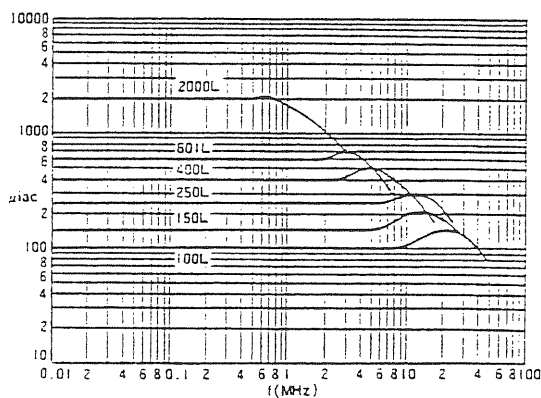
この鋼板のもう1つの特長は、前の2つの材料に比べて磁気特性の比較的均一のものを得る事が出来ることである。たとえば磁界の強さが5000 A/mのときのBの値( $B_{50}$ )のバラツキを $\Delta B/B \leq 2\%$ にする事は比較的容易である。又、この鋼板は一般に圧延方向に

透磁率が高い傾向を持つ。

〈フェライト〉

フェライトとは $Fe_2O_3$ を主成分とする粉末の磁性酸化物である。従って材料自体の抵抗率が高く電流損失が無視出来るため、図27に示すように高い周波数まで高透磁率を利用出来る。しかし透磁率の温度依存性が図28に示すように大きいため使用には注意を要する。

またこのフェライトは、飽和磁束密度が前の3つの材質に比べて低く、0.4~0.5テスラ程度である。従って電磁石に使用する場合、電磁石の形状とコイルの位置には特に注意し、局部的に飽和しないように設計しなければならない。



フェライト磁性材の周波数特性例

図 27.

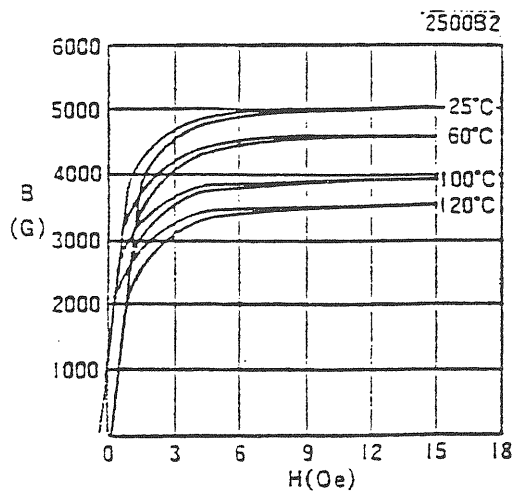


図 28.

〈残留磁場〉

電磁石では、使用する磁性体の保磁力 $H_c$ によって間隙内に残留磁場が生じる。この残留磁場の大きさは到達した最大磁場が大きい程大きい。

今磁性体の保磁力を $H_c$ とすると残留磁場の大きさ $B_r$ は次の式によって得られる。

$$B_r = \mu_0 H_c \ell / d \quad (5.12)$$

ここで $\ell$ は磁性体の平均磁路長、 $d$ は間隙長である。従ってこの $B_r$ が問題となるような電磁石の使用(たとえば低磁場用電磁石)に対しては、次のような対策を取る必要がある。

- 1)  $H_c$ の小さな材料、たとえば純鉄、ケイ素含有量の多いケイ素鋼板。
- 2) 鉄心内の磁束密度を出来る限り小さくする。
- 3) 占積率を小さくして磁性体の磁気特性が最も良い所で使用すること。
- 4) (5.12)式の $\frac{\ell}{d}$ を出来るだけ小さくする形状にすること。

問：図15に示すようなC型およびH型電磁石では、 $H_c$ によって間隙内にどのような磁場が発生するか考えよ。ただし鉄心内では $H_c$ は一樣とする。

〈ヒステリシス現象〉

電磁石特有の現象にヒステリシス現象がある。これは、図10に示す磁化曲線で、同じ電流値でも低い電流値から合せた場合と高い電流値から合せたときで磁束密度 $B$ が異なる現象である。この現象によって電磁石では、同じ電流値でもその履歴によって間隙内の磁束密度とその分布が変化する。実際に電磁石で測定した結果を図29に示す。

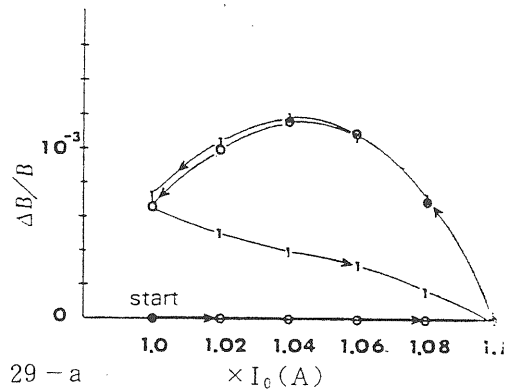


図 29-a

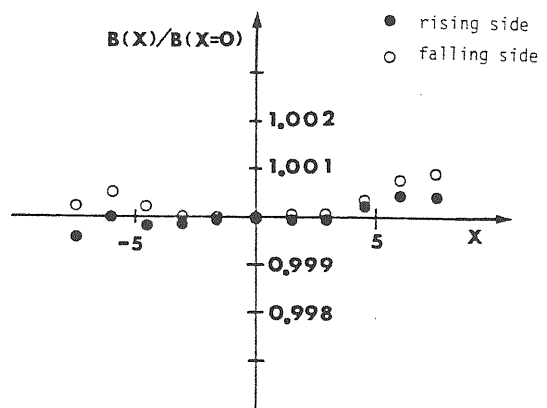


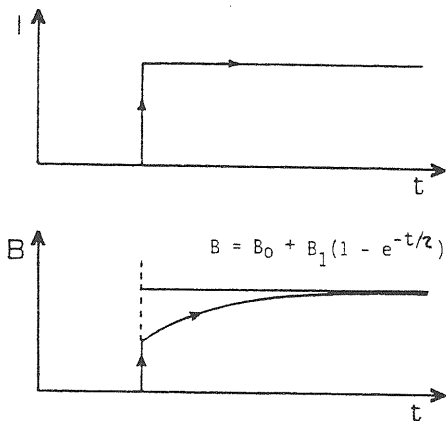
図 29-b

このヒステリシス効果は、B-H曲線の形状を反映するので低い磁場ほど顕著になる。

一般に加速器では、ビームの調整と言う名目でいろいろな電磁石を調整する。このとき電流値を元にもどしたからと言って、ビームへの効果も元にもどったと考えることは避けなければならない。もし元の状態にもどしたければ、初期化と言う過程を行わなければならない。これは、一度使用最大磁場まで上げ電流値を0にした後、必要な電流値にセットし直す過程である。

#### 〈磁気余効〉

電磁石において、図30に示すように励磁電流が一定になった後も、間隙内の磁束密度が時間とともに変化する。この現象を磁気余効と言う。この余効の大きさは磁性体の種類によって大きく異なる。一般にケイ素鋼板で小さく、低炭素鋼では炭素の量が少ないほど小さい。又、同じ材質でも磁束密度によって異なる。一般的傾向として、透磁率が大きい所で磁気余効も大きくなる。トリスタン蓄積および電子リングでケイ素鋼板として、JIS規格で言うS-23を選んだ理由の1つは、この磁気余効が小さいためである。



Material	Relaxation time(sec)		
	B <sub>0</sub> =1kG	3kG	8kG
Silicon-steel			
RM-10,-23	≤ 1		
RM-40,-60	60		
Low-carbon steel			
#1	20		
#2	59	48	
#3	30	71	17

図 30.

### 5-5. コイルの冷却方法

導体には銅又はアルミニウムが一般的に用いられる。これらに電流を流すとその抵抗によってジュール熱を

発生する。この熱を何らかの方法で取ってやらなければ、導体の温度が上りつuitには絶縁材を破壊し、コイルとしての機能が失われてしまう。

コイルの冷却方法には、水冷および空冷方式がある。どちらを使うかは、許されるコイル空間内で導体の温度が何度になるかによって決めればよい。

空冷方式の利点は、水を利用しないために維持の簡単さがある。しかし、冷却としてはコイル表面からの熱拡散にたよっているために、導体の電流密度を上げるとコイルの形状が大きくなる。

これに対して水冷方式は、メンテナンス上の問題はあるが、導体の電流密度を数10A/mm<sup>2</sup>に上げる事も可能であるため、コイルの形状を任意に決める事が出来ると言う利点がある。

#### 〈空冷コイルの設計〉

空冷コイルの設計に当っては、コイル表面の許容温度を決めた上で、コイルで発生する熱量とコイル表面から発散する熱量が平衡状態になるようにコイルの形状を決定すればよい。

コイルの発熱量は次式によって与えられる。

$$W_1 = 1.78 \times 10^{-8} (1 + 4.3 \times 10^{-3} (\theta_f + T_{\text{室温}} - 20)) \times NI \times j \times \ell \quad (5.13)$$

ここで

$\theta_f$  ; 表面温度上昇

$T_{\text{室温}}$  ; 室温

$NI$  ; コイルの巻数と電流の積

$j$  ; 電流密度 (A/mm<sup>2</sup>)

$\ell$  ; コイルの1ターン当りの平均長 (m)

である。これに対してコイル表面から発散する熱量  $W_2$  は次の式によって与えられる。

$$W_2 = \lambda \cdot \theta_f \cdot S \quad (5.14)$$

ここで

$\lambda$  ; コイル表面の熱拡散係数

測定から  $\lambda$  は 14W/(m<sup>2</sup>・°C) 程度の値が得られている。

$\theta_f$  ; コイル表面の温度上昇

$S$  ; コイルの表面積 m<sup>2</sup>

従って  $W_1 = W_2$  になるように電流密度およびコイルの形状を決めればよい。

#### 〈水冷コイルの設計〉

水冷コイルの(一般的な形状は)導体に水を流す冷却孔を有するものである。この水冷コイルの設計は、この冷却孔の大きさと導体内の電流密度を決めることである。

今コイルの発熱量が(5.13)式によって与えられたとする。この発熱によるコイルの温度上昇を  $\Delta t$  にするための冷却水量は次の式によって与えられる。

$$G_w (\ell/\text{sec}) \approx W / (4.2 \cdot \Delta t) \quad (5.15)$$

ここで、 $W$ がコイルの全発熱量(Kワット)である。  
この流量と冷却孔の大きさおよび冷却孔の入口と出口の圧損差  $\Delta P_w$  との間には、次の半経験公式がある。

$$G_w = 1.25 \times 10^{-3} (1 + 0.009t_w) \cdot \frac{\pi}{4} d_h^{2.71} (\Delta P_w / N \cdot \ell)^{0.57} \quad (5.16)$$

ここで

$$t_w \approx 30$$

$d_h$  ; 冷却孔の半径 (mm)

$\Delta P_w$ ; 必要な圧損 (kg/cm<sup>2</sup>)

$N\ell$  ; コイルの全長 (m) である。

この式の精度は、実測値との比較から10~20%程度である。

(5.15), (5.16)式から必要な冷却孔の大きさを決めればよい。

この場合、 $\Delta P_w$  は一般に 5 kg/cm<sup>2</sup> の値を使う。

次に、コイルの寿命を決定する絶縁材について簡単にふれておく。

加速器に使用される絶縁材は、一般に非常に高い放射線の中で使用される。従って耐放射線性が10<sup>8</sup>ラドから10<sup>9</sup>ラドある事が望ましい。この絶縁材には図31に示すようなものがある。これらの中から用途に応じて使用すればよい。

各種高分子材料の相対的耐放射線性

物 質	照 射 線 量 (rad)				劣 化 の 状 態 ①
	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>9</sup>	
フイオレ	ポリエチレン				黄色に変色
	架橋ポリエチレン				・
	エチレン酢ビ共重合体				・
	ポリプロピレン				・
フッ素系	テフロンTFE				黄褐色に変色
	テフロンFEP				もろくなり、高線量では粉体状になる
	フッ化ビニリデン				程度は小さいがTFEと同様な傾向になる
	テフゼルETFE				・ 黄褐色に変色
塩ビ	硬質塩ビ				・ 茶褐色に変色
	軟質塩ビ				・
アクリル樹脂 (PMMA)	アクリル樹脂 (PMMA)				強度低下が大きく、長時間放置後亀裂が入る
	ポリエチレンテレフタレート				高線量で若干黄色くなる
	ポリアミド (ナイロン)				
	A B S 樹脂				
	ポリカーボネート				黄褐色に変色
	ポリスチレン				
天然ゴム	天然ゴム				若干軟くなっていく傾向にある
	EPゴム				
	SBR				酸化していく傾向にある
	ブチルゴム				酸化してべとべとになってくる
ワレタンゴム	ワレタンゴム				
	ニトリルゴム				
	塩素化PE				
	ハイパロン				
	クロロブレン				
	シリコーンゴム				
フッ素ゴム	フッ素ゴム				
	エポキシ				
	ポリイミド				ほとんど変化なし (最も耐放射線性に優れている)
	セルロース				黄褐色に着色

損傷の程度 損傷は無またはわずか (使用上問題なし)  
 中程度の損傷 (大体の用途に使用可)  
 相当ひどい損傷 (使用が限定される)

① 状態変化について特に記していないものは酸化していく傾向にある。

② ゴム材料は黒色配合なので変色は不明。

本表は多くの公表文献および当社のデータをもとに作成したものである。

実際にはベースポリマーの種類、配合剤によって上表の傾向は大分異なる可能性がある。

### 5-6. 空心型電磁石

この電磁石は、間隙内の  $B$  と、その分布を電流の作る磁場の重ね合せで作る。そのため、本質的に、空間内の磁束密度と励磁電流との間には直流から高周波まで線型関係が保たれる。そのため、この空心型電磁石は、正確な磁場の強さの発生、および応答の速さを問題にする用途に用いられる。しかし電流の作る磁界のみで磁束密度を作ることから、常伝導コイルを用いて高い磁場を発生させることは、特殊な用途以外には行われていない。最近では、超伝導技術の進歩によって、磁性体の使用では不可能な 4~5 テスラの磁束密度とその一様分布および磁場勾配が加速器で利用されている。ただし、加速器に利用されるものは、特殊な場合を除き、必要な起磁力を出来るだけ小さくするため、磁束密度とその分布が回りの磁性体の有無によって影響されないように鉄心をリターンヨークとして使用する。

ここでは、超伝導 2 極および 4 極電磁石に話を限ることにしよう。

#### <超伝導電磁石の特長>

ここでは、超伝導電磁石を加速器に用いる利点および欠点について簡単に述べておく。

利点には次のようなものが考えられる。

- 1) 高磁界(5 テスラ程度)が利用出来るため、加速器を小型にすることができる。
- 2) 励磁のための電力消費が小さい。ただし、4.2°K において 1 ワットの冷却量を得るのに 0.5~1KW の電力を必要とすることは心に明記すること。

欠点としては次のようなものがある。

コイルを超低温に保持する必要があるため、冷凍機の運転と維持に問題がある。

#### <コイルの形状>

超伝導電磁石においては、コイル形状で間隙内に必要な  $B$  とその分布を作る。そこでまず、図32に示すような平行導体に互いに反対向きに電流を流した場合を考えよう。今、軸上の任意の点  $P$  の磁場  $B_y(x)$  を求めて見よう。コイルの中心からコイルまでの距離を  $a$  とする。

それぞれの電流にアンペールの定理を用いると、

$$B_y^1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)} \quad (5.17)$$

$$B_y^2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} \quad (5.18)$$

となる。これより  $P$  点での磁場  $B_y$  は次のようになる。

$$B_y = B_y^1 + B_y^2 = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}$$

$\frac{x}{a} < 1$  として展開すると、

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \sum_n (-1)^n \left(\frac{x}{a}\right)^{2n} \quad (5.19)$$

従って中心近傍 ( $\frac{x}{a} \ll 1$ ) では、この  $B_y$  は一定となる。これが 2 極磁場を作る空心型コイルの基本である。

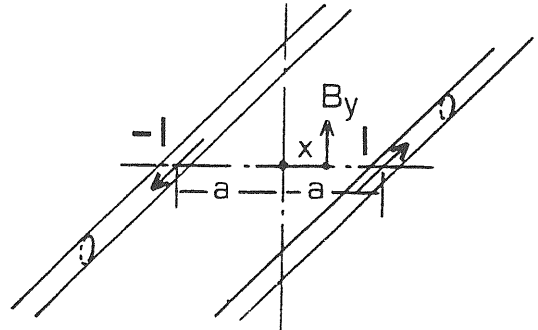


図 32.

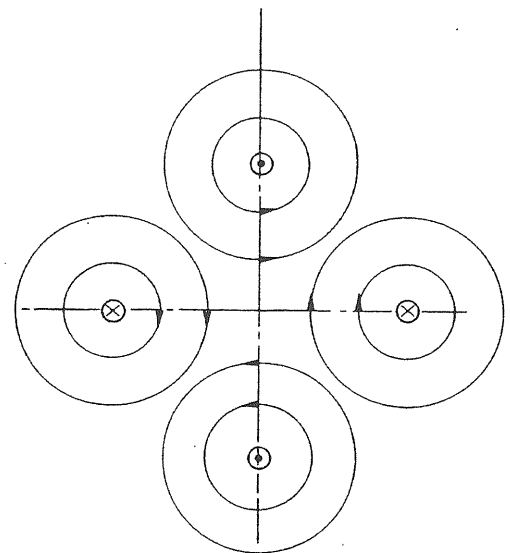


図 33.

問題：図33に示すように 4 本の導体に電流が流れている場合、中心に作る磁場の型を求めよ。

実際の電磁石では、磁場の有効径を出来るだけ大きくかつコイル形状を出来るだけ小さくするために円筒表面に電流分布を作ってこれらの磁場を発生させる。このコイルの巻き方に“cos  $\theta$  winding” という巻き方がある。

2 極電磁石に対するコイルの巻き方の最も基本的なものを図34に示す。今、コイルの電流密度を  $j$ 、そしてコイルの内側と外側の半径を  $R_1 R_2$  とすると、 $x$  平面内の磁場  $B_y$  は次の式によって与えられる。

$$B_y(x) = -\frac{2\mu_0 j}{\pi} \left\{ (R_2 - R_1) \cos \theta - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\theta}{(2k+1)(2k-1)} x \left[ \left(\frac{x}{R_2}\right)^{2k-1} - \left(\frac{x}{R_1}\right)^{2k-1} \right] \right\} \quad (5.20)$$

ここで第1項が基本項、第2項が誤差項を表わす。今、6極成分を0としたければ

$$\cos 3\theta = 0 \quad (5.21)$$

すなわち、 $\theta = \frac{\pi}{6}$  とすればよいことがわかる。このとき同時に  $\cos 3(2k+1)\theta$  の項も0となる。

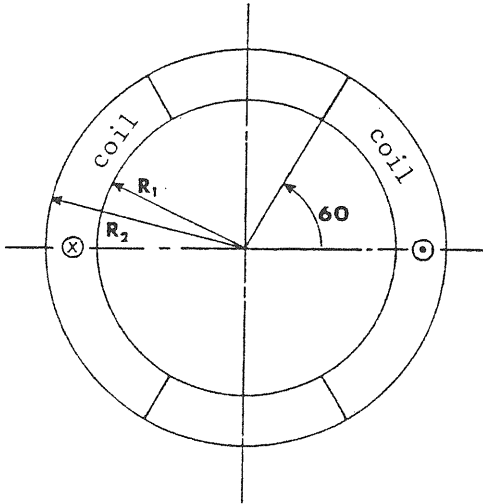


図 34.

ここで2極および四極電磁石の図35に示す一般的コイル形状とそのとき得られる磁場分布の一般公式を次に与えておく。詳しくは文献を参照されたい。

#### 2極電磁石

$$\frac{B_y}{B_0} = D_1(K, C_1) \cos \theta + \sum_{n=2}^{\infty} D_n(K, n, C_1) \left(\frac{x}{a_1}\right)^{2n-2} \cos(2n-1)\theta \quad (5.22)$$

$$B_0 = 0.4 \pi a_1 \left(\frac{b_1}{a_1} - 1\right) j_1 \quad (5.23)$$

$$D_n(K, n, C_1) = \frac{1}{(2n-1)(3-2n)(C_1-1)} \sum_{k=1}^K \left[ \left(\frac{b_k}{a_1}\right)^{3-2n} - \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^{3-2n} \right] \left\{ \sin(2n-1)\alpha_k - \sin(2n-1)\alpha_{k-1} \right\} \quad (5.24)$$

ここで  $C_1 = b_1/a_1$ ,  $K$ は図35に示されている電流ブロックの数、単位は、 $a_1, b_1$ がcm,  $j_1$ はA/cm<sup>2</sup>である。

#### 4極電磁石

$$G_y = \frac{B_0}{a_1} \left[ Q_1(K, C_1) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} Q_n(K, n, C_1) (4n-3) \left(\frac{x}{a_1}\right)^{4n-4} \right] \quad (5.25)$$

$$Q_1(K, C_1) = \frac{2}{(C_1-1)} \frac{1}{j_1} \sum_{k=1}^K \ln(b_k/a_k) (\sin 2\alpha_k - \sin 2\alpha_{k-1}) \quad (5.26)$$

$$Q_{n>1}(K, n, C_1) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n-2)} \frac{1}{j_1} \sum_{k=1}^K \left[ \left(\frac{b_k}{a_1}\right)^{4-4n} - \left(\frac{b_k}{a_1}\right)^{4-4n} \right] (\sin(4n-2)\alpha_k - \sin(4n-2)\alpha_{k-1}) \quad (5.27)$$

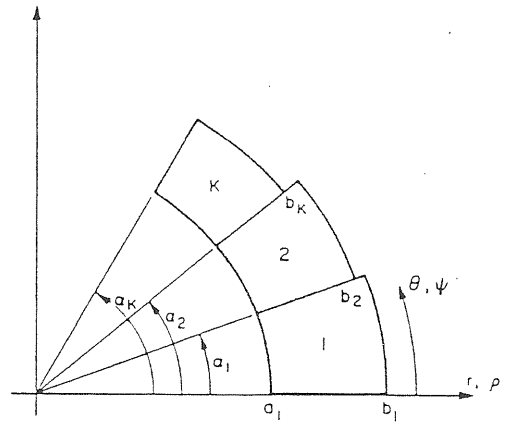


図 35 - a

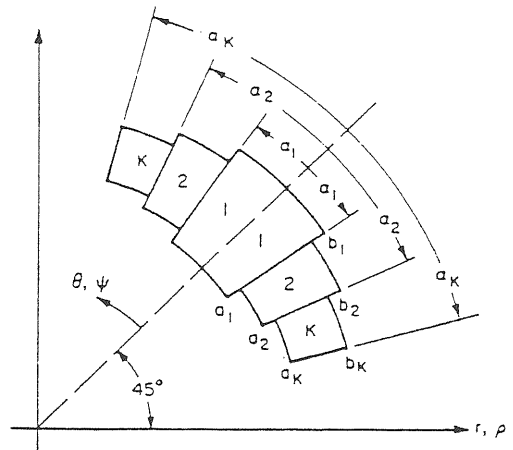


図 35 - b

#### <超伝導線>

超伝導電磁石において超伝導線の占める役割りは非常に大きい。従って使用方法と目的に合った線材を選択することが性能そのものを決めると言って過言ではない。

この超伝導線の特性を決める要素に臨界磁場( $H_c$ ), 臨界電流密度( $J_c$ ), 臨界温度( $T_c$ )がある。ここで, 臨界温度  $T_c$  とは, 通常状態から超伝導状態に移る温度である。臨界磁場  $H_c$  は,  $T_c$  以下の超伝導状態で外部磁界をしだいに強くするとある  $H$  の所で超伝導が破れる。この磁界のことを臨界磁場と呼ぶ。臨界電流密度とは,  $T_c$  および  $H_c$  以下の状態で電流を流して行くと, ある電流値の所で超伝導状態が破れる。この電流密度のことを臨界電流密度  $J_c$  とする。

ここで,  $T_c$  と  $H_c$  は, 物質固有の量であり,  $J_c$  は製造方法等によって著しく変化する量である。この3要素どれ1つ満足しなくても超伝導の特性は持ち得ない。又, これらの3つの要素には互いに関連があり,  $H_c$ ,  $J_c$ ,  $T_c$  を3次元座標として各超伝導線で図を書くと図36のようになる。ここでこれら3つの量で囲まれた空間が広いもの程, 超伝導線としての利用がしやすい事になる。

現在, よく使用されている線材には次のようなものがある。

線材	$T_c$	$H_c$ (4.2°K)	線材の特長
Nb-Ti	~9°K	12 テスラ	加工が容易
Nb <sub>3</sub> Sn	18.2°K	24 テスラ	もろく加工しにくい

これらの線材は, 超伝導効果の安定化のため, 直径 10  $\mu$ m 程度の細い線(これをフィラメント)を数 1,000

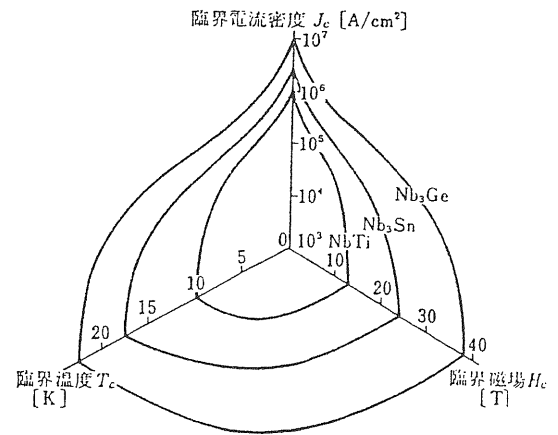


図 36.

本から 10,000 本程度を銅などの熱伝導の良い金属に埋め込んだ極細多心線として使用される。これらの線は, 磁場の時間変化によって誘導電流がフィラメント間に流れないようにより線処理を行う。この線材の特性を決める重要な量に銅と超伝導材の比がある。これを一般に銅比という。この銅比が小さければ小さい程, 実効的電流密度を上げることが出来るが, その代り超伝導性の安定性に問題が生じることになる。

現在, KEK で製作している空心型超伝導四極電磁石に使用する超伝導線では, この銅比は 1.2 である。その線材のパラメータを表 4 に示す。

表 4 Parameters of superconducting cable  
Rutherford type Nb-Ti cable

strand

diameter	0.680 + 0.005 mm
filament diameter	$\leq 9 \mu$ m
twist pitch	12.5 + 2.5 mm
copper/super ratio	1.2 + 0.1

cable

width	9.09 + 0.1 mm
thickness	1.19 + 0.04 mm
	1.35 + 0.04 mm
number of strand	27
cable twist pitch	70 + 5 mm

critical current

at 6 T and 4.2 °K	$\geq 6500$ A
at 7 T and 4.2 °K	$\geq 4700$ A

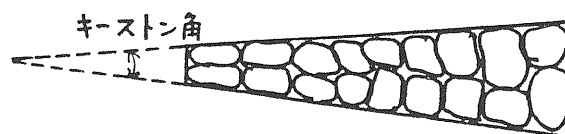


図 37



これらの線材は、前に述べたように円筒上に正確に、かつ線材間を密着させて巻く必要性から、図37に示すように線材の厚さを変えることが行われる。この形状を“Keystone”と呼び、その扇角をキーストン角と呼ぶ。

我々が、この線材を用いて電磁石を製作する場合、いろいろな問題が生じる。ここでは、これらについて簡単に説明し詳細は文献にゆずることとする。

#### (1) 残留磁場

コイルを励磁した後、励磁電流を0にしてもある一定の磁場が生じる。

これはフィラメント間にうず電流がトラップされるために生じると考えられる。

#### (2) 劣化現象

一般に超伝導線では、短い資料で得られた性能が、実際のコイルで得られないという現象が生じる。

この原因としては、コイルに巻くとき、線材にひずみが残ること、又、大きな電磁力(磁場と電流および電流と電流による)によってコイルに大きな力が加わり、この力によってコイルが変形するときの摩擦熱等がある。

この劣化現象をいかに押えるかが超伝導コイルの製作の基本であると言える。

#### (3) トレーニング現象

上記(2)と密接に関連する現象である。クエンチの回数とともに、最大磁場が次第に増加して行く現象である。

ここでクエンチとは、励磁電流を上げていく時、途中で超伝導状態が破れることを言う。

これは、クエンチすることによって、線材のストレスおよび線材の位置等が、より安定な状態に移るものと考えればよい。

トレーニング現象のない超伝導電磁石を作ることが我々の最終目標である。

#### (4) クエンチに対するプロテクション

超伝導状態にあるコイルが、何らかの原因によって破れたとき、コイルの層間に高電圧が発生するとともに、コイルに蓄えられていたエネルギーがジュール熱として発生する。

この高圧とジュール熱からコイルを守る対策のことをプロテクションと言う。

一般的に用いられるプロテクションは、クエンチが生じたとき、コイルに蓄えられているエネルギーを出来るだけ早く外部抵抗に吸収させる方法である。

### 5-7. 均一な磁気特性を持った電磁石

高エネルギー加速器に使用する電磁石は、前にも述べたように複数台(たとえば、数100台)が1台の電源で励磁されるため、全て同一の磁気特性を持つことが望ましい。

そこで偏向電磁石を例にとって、均一な磁気特性を持つ電磁石を作るとき、注意しなければならないことについて考えて見よう。偏向電磁石で、この均一性を要求される量は、磁場の強さBと磁場の長手方向の長さℓとを掛けた(Bℓ)と呼ばれる量である。

この(Bℓ)は、電磁石にアンペールの定理を適用すると次の式で与えられる。

$$(B\ell) = \ell \left( \frac{\mu_0 NI}{d} \right) \left( 1 - \frac{\bar{B} \cdot L}{\mu_0 \mu_r NI} + \frac{H_c L}{NI} \right) \quad (5.28)$$

ここで

d	間隙長
NI	コイルのアンペーターターン
$\bar{B}$	鉄心内の平均磁束密度
L	鉄心内の平均磁路長
$\mu_r$	鉄心内の透磁率
$H_c$	鉄心内の保磁力

である。又、ℓは磁石長に比例する。

(5.28)式から、各電磁石毎に、d, ℓ,  $\mu_r$ ,  $H_c$  に統計的なバラツキが存在すると、(Bℓ)のバラツキ<math>\Delta B\ell / B\ell</math>は次の式によって与えられる。

$$\frac{\Delta B\ell}{B\ell} \approx \sqrt{\left( \frac{\Delta d}{d} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)^2 + \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{L \bar{B}}{d} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \mu_r}{\mu_r} \right)^2 + \left( \frac{H_c L}{NI} \right)^2 \left( \frac{\Delta H_c}{H_c} \right)^2} \quad (5.29)$$

ここで、右辺第3項の $\left( \frac{1}{\mu_r} \frac{L \bar{B}}{d} \right)$ は鉄心内の飽和特性を表わす量(鉄心が飽和すると1より大きくなることもある)で、この値は“LINDA”の計算で得られるアンペアー係数(定義は $(NI)_\mu / (NI)_{\mu=\infty}$ である)から1を引いたものである。

(5.29)式からわかるように、電磁石毎のBℓのバラツキを小さくするためには、間隙長、鉄心長、鉄心の磁気特性(透磁率と保磁力)のバラツキを小さくするとともに、鉄心が飽和しないように電磁石を設計することが必要である。

(5.29)式より、使用する鉄心は、低磁場用電磁石では、保磁力のバラツキを高磁場用電磁石では、JIS規格で言うHが5,000 A/mでの磁束密度 $B_{50}$ の値のバラツキの小さいものを使用すればこの $\frac{\Delta B\ell}{B\ell}$ を小さくすることが出来る。

表5  $\left\langle \frac{\Delta B l}{B l} \right\rangle$  の計算値と実測値との比較

パラメータ	磁場の強さ	
	$B_0 \approx 0.97 \text{ KG}$	$B_0 \approx 5.7 \text{ KG}$
$(\Delta d/d)^2 \approx (0.025/70)^2$	$1.28 \times 10^{-7}$	$1.28 \times 10^{-7}$
$(\Delta \ell/\ell)^2 \approx (1/5860)^2$	$2.91 \times 10^{-8}$	$2.91 \times 10^{-8}$
$\left( \frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{B}{B} \right)^2 \left( \frac{\Delta \mu_r}{\mu_r} \right)^2$	$1 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-6}$
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{B}{B} \\ \Delta \mu_r / \mu_r \text{ (} B_{50} \text{ での実測値)} \end{array} \right.$	$\sim 0.01$ $\leq 0.01$	$\sim 0.1$ $\leq 0.01$
$\left( \frac{H_c \cdot L}{N I} \right) \left( \frac{\Delta H_c}{H_c} \right)$	$2.18 \times 10^{-7}$	$8.71 \times 10^{-9}$
$\left\{ \begin{array}{l} (H_c \cdot L / N I) \\ \Delta H_c / H_c \text{ (} H_{15} \text{ での実測値)} \end{array} \right.$	56 20×300 $\leq 0.05$	56 20×1500 $\leq 0.05$
$\left\langle \frac{\Delta B l}{B l} \right\rangle$ 計算値	$6.2 \times 10^{-4}$	$1.08 \times 10^{-3}$
$\left\langle \frac{\Delta B l}{B l} \right\rangle$ 実測値	$3.4 \times 10^{-4}$	$9.8 \times 10^{-4}$

例として、積層型電磁石の電子リング偏向電磁石の場合について、間隙内磁束密度  $B_0$  が 0.97 KG と 5.7 KG の 2 つの磁場での  $\frac{\Delta B l}{B l}$  を (5.29) 式を用いて計算し、それを磁場測定の結果と比較する。表 5 にその比較を示す。

ただし、 $B_0 \approx 5.7 \text{ KG}$  のとき鉄心内では 1.6 ~ 1.7 テスラ程度になっている。

計算値は、実測値をよく再現している。

これより  $\Delta B l / B l$  を小さくするためには、低い磁場では鉄心の保磁力  $H_c$  を、高い磁場では透磁率  $\Delta \mu_r / \mu_r$  を出来るだけ小さくするとともに、鉄心の飽和を避けるように設計すれば良いことが分る。

又、鉄心寸法から生じる誤差は、この電磁石のように鉄心長も間隙長も大きい場合には、上記 2 つの原因に比べれば  $\Delta B l / B l$  への寄与は小さい。しかし、これら 2 つが短い場合には、これらのバラツキが  $\Delta B l / B l$  に大きな影響を与える。

又、加速器では、この  $\Delta B l / B l$  の分布が、励磁電流によって著しく変化しないようにすることが望ましい。そのためには、 $\Delta H_c / H_c$  および  $\Delta \mu_r / \mu_r$  が、共にバラツキが小さい材質を選択しなければならない。問題：四極電磁石について、この均一性の問題を考えよ。

## 第 6 章 磁 場 測 定

電磁石を製作した後、我々は、その電磁石の性能を確認する目的と、ビームに対して必要な物理量を得るために磁場測定を行う。又、高エネルギー加速器のように、同一形状同一性能の電磁石を多量に作る必要性がある場合には、製作の途中でこれらの性能がずれないようにチェックする目的で用いられる。

これらの測定量には次のようなものがある。

1. 励磁電流と間隙内の磁場の強さとの関係  
加速器ではこれを励磁曲線と呼んでいる。
2. 磁極の加工精度の良し悪しを見るために、使用する間隙内を 1 cm 間隔程度の格子にわけ、各点での磁場を測定して、 $B$  の強さの地図を作る。これを、“Mapping” と言う。
3. ビームの制御に対して必要な次の量の測定

$$(B \cdot \ell) \equiv \int B \cdot d\ell \quad (G \cdot \ell) = \int G \cdot d\ell \quad \dots\dots$$

4. (3) の量の電磁石毎のバラツキ  
この測定をもとにして、第 3 章で述べた COD、ストップバンドの幅、 $\Delta \beta / \beta$  を出来るだけ小さくするように据え付ける。

### 6-1. 測定方法

現在、磁場測定に用いる検出方法にはファラデーの電磁誘導を利用するもの、ホール効果を利用するもの、核磁気共鳴(一般にはこれを NMR と呼ぶ)を利用

表6 測定原理の比較

測定原理 特長	ファラデー の電磁誘導	ホール効果	NMR
利用する検出器	コイル	ホール素子	H, Li
温度依存性	$10^{-4} \sim 10^{-5} / ^\circ\text{C}$	$10^{-3} / ^\circ\text{C}$	なし
出力のBに対する関係	線型 (一点で較正する必要がある)	非線型 (較正曲線を必要とする)	線型
Bに時間変化がある場合	測定可能	測定可能	不可能
勾配のある磁場の測定	測定可能	測定可能	不可能
使用目的	精度 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ の測定に使用する	$10^{-3} \sim 10^{-4}$ の精度の測定に使用する	標準測定用および他の磁場測定装置の絶対値較正用

するものがある。

これらの特徴を表6に示す。

ここでは現在我々が使用しているコイルを用いた磁場測定装置について説明する。

測定原理は、ファラデーの電磁誘導の法則である。

これは、磁場の中にコイルを置いたとき、コイルをつらぬく磁束  $\Phi(t)$  が時間的に変化するとコイル両端に電圧  $V$  が生じる。

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.28)$$

ここで磁束  $\Phi(t)$  は  $B$  とコイルの断面積  $S$  の積で書ける。従って測定方法には、次の2つの方法がある。

1. コイルの回転、及び平行移動による、コイル断面積の時間変化を利用する方法

$$V = - B_0 \frac{dS(t)}{dt}$$

2. Bの時間的な変化を利用する方法

$$V = - S_0 \frac{dB(t)}{dt}$$

次に、我々が現在トリストラン電子リングで使用している磁場測定方法について説明する。

#### <偏向電磁石>

$(B \cdot \ell)$  は、電磁石長より十分長いコイルを、間隙内で  $180^\circ$  回転させ、コイルに誘導される電圧  $V$  を電氣的に積分して求める。この積分値は、間隙内の磁束密度を  $B$ 、コイルの断面積を  $S_0$  とすると、次のように書ける。

$$\left( \int_0^t V dt \right)_{\text{測定値}} \equiv \int_0^\pi B \cdot S_0 \sin \theta d\theta \quad (5.29)$$

この式で重要なことは、左辺の測定値が、その途中の過程によらないことである。

ここで、コイルの幅  $w$  が磁場が存在する範囲内で一定であるように作ると(5.29)式から  $(B \cdot \ell)$  は次のように書ける。

$$(B \cdot \ell) = \left( \int_0^t V dt \right)_{\text{測定値}} / 2 \cdot w \quad (5.30)$$

又、 $B$  の値は、(5.29)式より次のように書ける。

$$B = \left( \int_0^t V dt \right)_{\text{測定値}} / 2 \cdot S_0 \quad (5.31)$$

いずれの場合にも、コイルの幅と断面積を別の方法で正確に測定する必要がある。この較正には、一般にNMRが用いられる。

現在、我々が  $(B \cdot \ell)$  の測定に用いているコイルのパラメータは長さ6.5メートル、真直度0.2mm以下、コイルの幅20mm、コイルの巻き数2ターンである。

又、積分器の回路図を図38に示す。この回路の性能は、演算増幅器の安定度と、入力抵抗と積分コンデンサーの温度依存性およびリセット用リレーの低熱起電力特性によって決まる。

#### <四極電磁石>

$(G \cdot \ell)$  の測定に  $10^{-4}$  程度の高精度を要求する場合には、偏向電磁石のように各点で  $(B \cdot \ell)$  を測定し、それから磁場勾配を計算することは、位置の測定誤差が大きいために行うことが出来ない。そこで、この位置の誤差を取り除くために“Twin coil”と呼ぶコイル

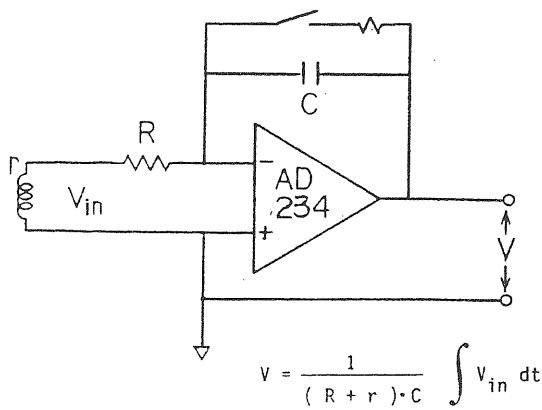


図 38.

を用いる。これは、2個のコイルをある間隔xで平行に並べた構造をしたものである。

このコイルを用いた磁場勾配の測定方法について説明する。今、図39に示すように、A点、B点にコイル1、コイル2があったとしよう。このとき、2個のコイルを貫く磁束が、

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \int_0^{B_1} S_1 dB - \int_0^{B_2} S_2 dB \\ &= B_1 S_1 - B_2 S_2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

となるように2つのコイルを接続しておく。ここでA点、B点での磁束密度をそれぞれ $B_1$ 、 $B_2$ とする。

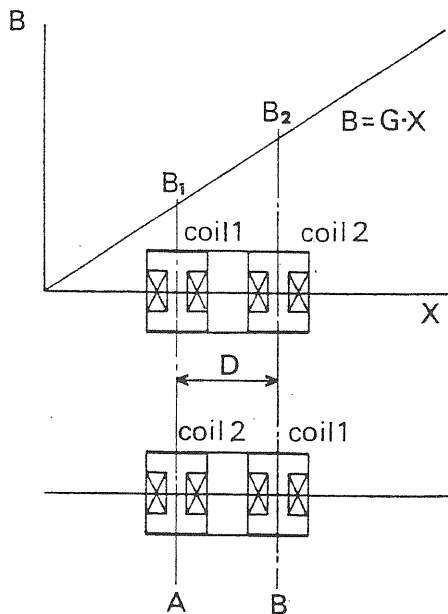


図 39.

次に、コイル1、2を180°ひっくり返し、A点にコイル2が、B点にコイル1がくるように置く。このときコイルを貫く磁束は次のようになる。

$$\Phi_2 = B_1 S_2 - B_2 S_1$$

ここで、各コイルの幅をそれぞれ $W_1$ 、 $W_2$ として $\Phi_1$ と $\Phi_2$ の和を取る。

$$\Phi_1 + \Phi_2 = (B_1 l - B_2 l)(W_1 + W_2)$$

これより、磁場勾配 $G \cdot l$ は、コイル1、2の中心間距離をDとすると次のようになる。

$$(G \cdot l) \equiv \frac{B_1 l - B_2 l}{D} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{W_1 + W_2} \quad (5.33)$$

すなわち $(G \cdot l)$ は測定した $\Phi_1$ と $\Phi_2$ の和に比例する。現在、我々はこの $(G \cdot l)$ の測定に、図40に示したようにBの時間変化を利用して行っている。

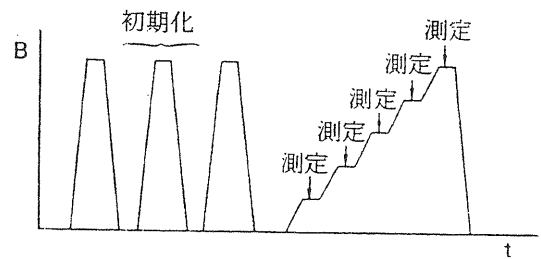


図 40.

#### <多極成分の磁場測定>

この測定には、一般にハーモニクコイルを用いる場合が多い。ただし、精度を問題にしなければ、この方法は四極電磁石にも適用できる。

これは、図41に示すようなコイルを中心軸を正確に磁場中心に合せて回転させると、コイル端に誘導される電圧Vは、次のように書ける。

$$V = n \cdot \omega \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \ell \cdot R^n \sin(n\omega t) \quad (5.34)$$

ここで、Rはコイルの幅(中心軸からの長さ)、 $\omega$ はコイルの回転の角速度、 $B_n$ は磁場の多極成分を表わす量で次の式によって与えられる。

$$B_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} B_\theta}{\partial r^{n-1}} \quad (5.35)$$

(5.34)式で、右辺の振幅成分から $\omega$ 依存性を取り除くために、時間で積分すると次のようになる。

$$\int_0^t V dt = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \ell \cdot R^n \cos(n\omega t) \quad (5.36)$$

この右辺の測定値をフーリエ展開し、そのハーモニク成分から各磁場成分を求めることができる。

この方法は、一般に磁場中心と回転中心を正確に合すこと( $\sim \mu m$ )が難しい。そのため回転の中心が磁場の中心からずれたために生ずる見かけ上の成分が基本波以下の周波数に発生する。従って磁場の中で、基本波以外の成分が大きい電磁石では、この中心軸のずれによって、基本波成分が影響を受けることになる。

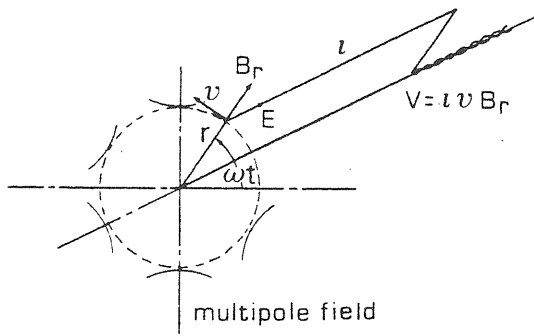


図 41

6-2. 電子リング偏向電磁石および四極電磁石  
磁場測定結果

本文を書くに当って次の文献を参考にさせていただいた。

鉄心材 電気工学 ハンドブック(電気学会)

H. Brechna, Proceedings International  
Conference on Magnet Technology  
(1967) p. 305

超伝導コイル 超電導入門 増田正美

A. V. Tollestrnp, Superconducting  
Magnets, AIP Conference Proceedings  
No 85 (1981) p. 699

Y. Iwasa and R. J. Weggel, Proceedings  
International Conference on Magnet  
Technology (1972) p. 607