

1. 序

加速器はその名の通り荷電粒子を加速するための装置であり、ストレージ・リングは荷電粒子を蓄積するための装置である。円形加速器に於ては、直流電場では原理的に加速できないことはよく知られている。

例を放射光光源リングにとって見ると、リングの周長は 187m である。これを光速の粒子が一周する時間は $c \cong 3 \times 10^8 \text{ m}$ として $0.62 \mu\text{s}$ かかる。交流電場は、半周期毎にその方向を逆転する。従って、粒子を加速できるためには、粒子が加速装置に来る時刻に電場が加速する方向を向いている必要があり、そのためには周期が $0.62 \mu\text{s}$ を整数で割った値でなければならない。即ち、周波数が 1.6 MHz の整数倍でなければならない。

実際には 1.6 MHz の 312 倍である 500 MHz の高周波電場を使用して加速している。これが 1.6 MHz でない理由はむしろこの講義の過程で明らかになってくるので、ここでは立ち入らない。

光源リングでは 2.5 GeV の電子がリングを一周する間に主にシンクロトロン放射によって $V_a = 0.4 \text{ MeV}$ のエネルギーを失う。今、ビームの平均電流を $i_0 = 0.2 \text{ A}$ とすると、ビームに対して、

$$P_b = i_0 V_a \cong 80 \text{ kW} \quad (1.1)$$

のエネルギーを供給してやらねばならない。

一方、加速装置で電子を長時間蓄積しておくためには、 V_a よりも大きい電圧 $|V_c|$ をかけておかねばならない。これはシンクロトロン放射が量子過程であるため、電子がある確率でシンクロトロン振動の安定領域からこぼれていくから、電子の寿命を長くするには十分大きな安定領域をとってやる必要があるからである。寿命を 2 日にするには、

$$|V_c| = 1.7 \text{ MV} \quad (1.2)$$

の電圧を加速装置にかけてやらねばならない。

以上が、光源リング高周波加速装置の必要性能である。

これがトリスタン主リングになると、ビームエネルギー $E = 30 \text{ GeV}$, $i_0 = 10 \text{ mA}$ に対し、 $P_b = 2.9 \text{ MW}$, $|V_c| = 380 \text{ MV}$ となる。

この講義では常に光源リングの高周波加速装置を例にとることとする。単なる一般論では具体的にイメージが湧きにくいからである。トリスタン主リングはそれをスケール・アップしたものであると思えばよい。表 1.1 に光源リングとトリスタン主リングの高周波パラメータを示す。ここで、周波数、エネルギー E , $|V_c|$, V_a 以外のパラメータはこの講義の過程で理解されていくであろう。

図 1.1 に光源リング高周波加速装置の系統図を示す。リングにとりつけた加速空洞に高周波電圧 V_c を作り、

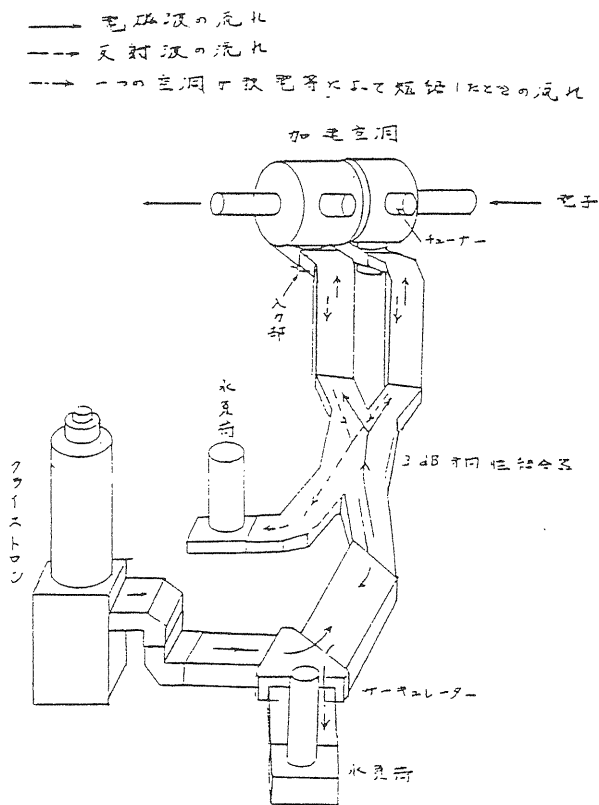


図 1.1 高周波加速システムの一例

電子を加速している。そのために、まず直流高压電源から高压 40 kV をクライストロンにかけ、直流電子を加速する。クライストロンは、この直流電子のエネルギーを高周波電磁場のエネルギーに変換する。この電磁波は導波管を伝わって搬走され、サーキュレーターを通り、3 dB 万向性結合器によって 2 つに分けられ 2 個の単胞空洞 (single cell cavity) に入る。この空洞内でビームに対し強い電場ができるように電磁場が変換される。空洞からの反射波を吸収するために、万向性結合器とサーキュレーターの残りの開口部に水負荷がついている。サーキュレーターはクライストロンを保護し、かつ系を安定に動かすためのものである。

この装置全体を理解するには、まず電磁気学 of 理解が必要である。逆にいうと、電磁気学が完全に分っていれば高周波加速装置の半分は理解できたといってもよい。そこで、まず高周波加速の理解に最低限必要な電磁気学を次節 2. で復習しておく。次に 3. では完全導体近似での導波管を 4. では空洞について議論する。5. で熱損失および電流があるときの空洞について学ぶ。

ここで電磁気物理の学習は終り、その概念を使用しながら、6. では受動高周波装置の実際例を、7. では加速空洞やクライストロンのような能動高周波装置の原理を学ぶことにする。8. は加速空洞の実際例、9. ではクライストロンの実際例を学ぶことになる。最後に 10. では最近の技術の成果である超伝導加速空洞につ

表 1.1 電子（-陽電子）蓄積（加速）リングの高周波パラメーターの例

		放射光光源リング	トリスタン主リング
ビーム・エネルギー	E	2.5 GeV	30.0 GeV
リング周長	L_r	187.032 m	3018.079 m
回転時間	$T_0 = L_r / c$	623.869 ns	10.0672 μ s
回転周波数	$f_0 = 1/T_0$	1.60290 MHz	99.3322 kHz
倍数	h	312	5120
高周波周波数	$f_{RF} = hf_0$	500.105 MHz	508.581 MHz
シンクトロン放射損失	V_s	0.40 MV	290 MV
ビーム電流	i_0	200 mA ^{a)}	10 mA
加速電圧	$V_a = V_s$	0.40 MV	290 MV ^{b)}
ビーム負荷	$P_b = i_0 V_a$	80 kW	2.9 MW
量子寿命	τ_q	2 日	10 時間
空洞電圧	$ V_c $	1.7 MV	380 MV
シャント抵抗	R_{sh}	33 M Ω	7.5 G Ω
空洞長	L_c	1.2 m	318 m
単位長さあたりのシャント抵抗	R_{sh} / L_c	28 M Ω / m	24 M Ω / m
単位長さあたりの空洞電圧	V_c / L_c	1.4 MV / m	1.2 MV / m
空洞壁損失	P_c	88 kW	19 MW
結合定数最適値	β_a^{opt}	1.9	1.2
クライストロン電力（全）	P_g^{in}	168 kW	22 MW
クライストロン数		2	30
クライストロン電力（1本）		84 kW ^{c)}	0.73 MW ^{c)}
クライストロン電圧（1本）		40 kV	90 kV
クライストロン電流（1本）		7 A	20 A
クライストロン・入力電力（1本）		280 kW	1.8 MW
クライストロン・入力電力（全）		560 kW	54 MW

注意 a) 設計値でなく、この計算のために標準的な値をとった。

b) 加速電圧は、 V_s ばかりでなく、高次モード損失 V_h があり、 $V_a = V_s + V_h$ である。ここでは、大体の数値を知るために $V_h = 0$ とした。

c) 最大出力ではなく、上の条件を満たすために必要な出力である。

いて述べる。

ところで、一般の加速器は粒子のエネルギーを高くするための装置であり、放射光光源リングは電子のシンクロトン放射による放射光を利用するための装置である。前者は高エネルギーの素粒子、後者はスペクトラムの広い強い光を作るのが目的である。そのために、もとは交流 50 Hz, 200 V の電気エネルギーから出発して最後のエネルギーの形に変換していく。エネルギーを便利な形に変換するには、常にいくらかの損失を伴う訳で、この変換効率をいかに安いコストで上げていくかが、科学技術の目的の一つである。エネルギーは宇宙に無尽蔵に存在する。有用な形のエネルギーが少なくなってきた、又は、有用な形のエネルギーのコストが高くなってきたのがエネルギー危機なのであって、エネルギーそのものが減ってきた訳ではない(エネルギー保存の法則)。この講義は、その変換効率に主眼を置きながら進めていき、最後の11ではその観点からどのような開発がなされているかに言及して終ることにする。

この講義ではベクトル解析初歩及び高校までの物理と数学以外の予備知識は必要ないようにしてある。使用されるベクトル解析の公式は附録に記しておいた。

2. 電磁気学の復習

2.1. マクスウェルの方程式

空間に電荷があり、その電荷密度を $\rho(x, y, z)$ としよう。そして、 (x, y, z) にある電荷が速度 \vec{v} で動いているとし、電流密度 $\vec{j}(x, y, z)$ を $\rho\vec{v}$ によって定義しよう。我々の経験又は実験によれば、電荷はなくなったり増えたりしない。即ち、電荷保存の法則がなりたつ。すると、ある空間 V を囲む閉曲面 S を考えると、その空間内にある全電荷量の時間変化(増分)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv$$

は、面 S を通って V に入ってくる総電流量

$$-\int_S \vec{j} \cdot d\vec{f}$$

に等しい。ここに、 $dv, d\vec{f}$ はそれぞれ体積要素、面要素である。このことを微分形で表わすならば、

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

となる。

電荷があるとそのまわりに図 2.1 のように電場 \vec{E} を生じることが、クーロンの法則として知られている。

その電場の大きさは、

$$\epsilon \int_S \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V \rho dv \quad (2.2)$$

又はその微分形

$$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon \quad (2.2')$$

によって与えられる。これは又、電力線の湧き出し口や吸入口には必ず電荷がなければならないことを意味している。

次に、電流があると図 2.2 a) のようにそのまわりに磁場を作る。その磁場の大きさは、

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{f}$$

のように、磁場の線積分をとったとき、その閉曲線が作る面 S を流れる電流に等しくなる。この微分形は

$$\text{curl } \vec{H} = \vec{j}$$

となり、ビオ・サバールの法則又はアンペールの法則と呼ばれる。ところがこの式の div をとってみると、 $\text{div } \text{curl} = 0$ であるから $\text{div } \vec{j} = 0$ となり、(2.1) から $\partial \rho / \partial t = 0$ なる結果をえる。即ち、空間のあらゆる所で電荷密度は時間的に一定でなければならぬことになり、電流は常に定常電流しか存在しないことになってしまう。これは事実と矛盾する。

そこで、(2.2') を (2.1) に代入すると

$$\text{div} \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.3)$$

を得るから

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{f} \quad (2.4)$$

$$\text{curl } \vec{H} = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4')$$

のように $\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$ も磁場を作るとするとこの問題は解決する。磁場が電流によって誘起されるという直観性に固執するならば、 $\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$ も電流の一種と考えられ、実際それは変位電流と呼ばれる。電流と変位電流は (2.3) によれば図 2.2 b) のように閉曲線をなさねばならない。ここで電荷保存の法則 (2.1) も (2.3) も、(2.2') と (2.4') から導かれることに注意したい。

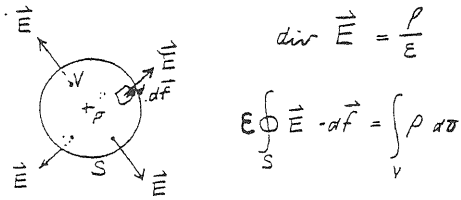
電場は (2.2) のように電荷によって誘起されるばかりでなく、磁場が変化しても誘起されることは、電磁誘導の法則として知られている(図 2.3)。即ち、

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{f} \quad (2.5)$$

$$\text{curl } \vec{E} = - \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.5')$$

のように、電場の線積分は、その閉曲線が作る面 S を通る磁束の変化に等しい。

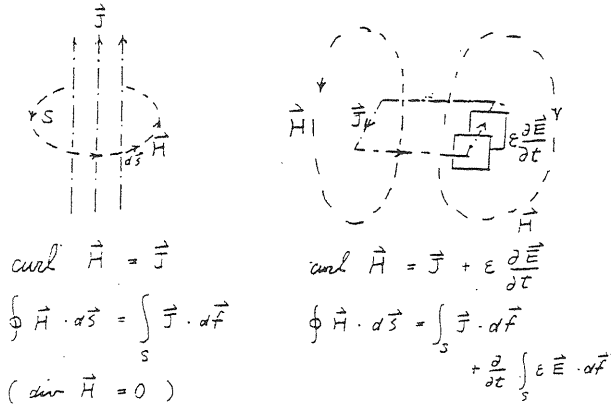
(2.4'), (2.5') が対称でないのは、 N や S のような磁荷が単独で存在せず、従って電流に相当する磁荷流のようなものが存在しないためである。それは又、磁場に関しては (2.2) や (2.2') の右辺が零、即ち



$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V \rho \, dV$$

図 2.1 クーロンの法則

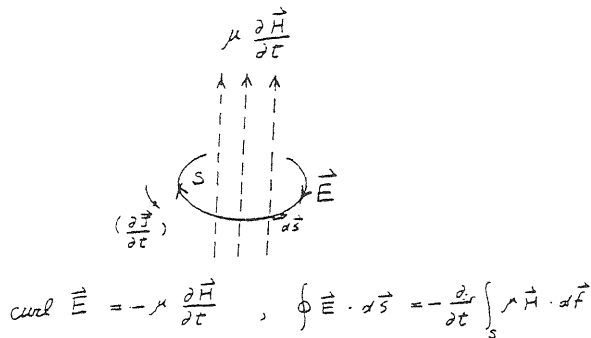


a) $\text{curl } \vec{H} = \vec{J}$
 $\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{f}$
 ($\text{div } \vec{H} = 0$)

b) $\text{curl } \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{f}$

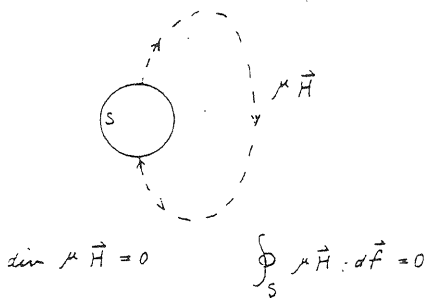
図 2.2

a) ビオ・サバルの法則 b) その変形



$$\text{curl } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{f}$$

図 2.3 電磁誘導の法則



$$\text{div } \mu \vec{H} = 0, \quad \oint_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{f} = 0$$

図 2.4

$$\mu \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{f} = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{div } \mu \vec{H} = 0 \quad (2.6')$$

として表わされる。これはある体積をとったとき、その体積に入った磁力線は必ず外に出ていかなければな

らないこと、即ち磁力線の湧き出し口や吸入口が空間にあってはならないことを意味する。従って、磁力線は図 2.4 のように閉曲線をなしていなければならない。

(2.2), (2.4) - (2.6) 又は (2.2'), (2.4') - (2.6') はまとめてマクスウェルの方程式と呼ばれる。

2.2. 完全導体と境界条件

大電力高周波電磁場は、ふつう導体によって閉じてめて使用する。理由は簡単で、導体で閉じておかないと、電磁波のエネルギーが自由空間に逃げて行き、最も効率よく粒子を加速するという我々の目的が達せられないからである。

導体内部に流れる電流密度を \vec{J}_e とし、真空中を走る電荷によって生じる電流密度を \vec{J}' として

$$\vec{J} = \vec{J}' + \vec{J}_e \quad (2.7)$$

のように分けて考えよう。導体内部に電場 \vec{E} があると、オームの法則により

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \quad (2.8)$$

なる電流が流れ、この式が導電率 σ を定義する。導体は勿論有限の σ をもっているが、それは非常に大きいので、まず 0 近似として $\sigma = \infty$ の完全導体を考えよう。 σ が有限である効果は後に補正として考えることにする。

完全導体の内部では、電流 J_e が有限であることから $\vec{E} = 0$ でなければならない。又、真空側に電場があるとき、それが導体表面に平行であると、再び無限の表面電流を流すので、電場は導体面に垂直でなければならない。従って、 \vec{n} を導体表面に垂直な、導体側に向いた単位ベクトルとすると、

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (2.9)$$

なる境界条件を得る。

磁場はもちろん導体内部に存在しうが、変化する磁場は電磁誘導の法則によって電場を作ってしまうので、導体内部に変化する磁場はない。(我々に興味があるのは変化する磁場なので、今後磁場というとき、特に断わらない限り、変化する磁場を意味することにする。) 又、導体面に垂直な磁場成分があると、導体面に平行な電場を誘起して(2.9)をみたさなくなるので、磁場は導体面に平行、即ち

$$\vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.10)$$

でなければならない。

2.3. 表面電荷と表面電流

完全導体によって囲まれた空洞を考え、空洞内部(導体の表面を含まない)には電流も電荷もないとしよう。 $\vec{J} = 0, \rho = 0$ だから $\text{div } \epsilon \vec{E} = 0, \text{div } \mu \vec{H} = 0$

であり、(2.5') の curl をとってそれに (2.4') を代入することにより、

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.11)$$

を、(2.4') の curl をとってそれに (2.5') を代入することにより

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.12)$$

を得る。従って、問題は (2.11), (2.12) をそれぞれ境界条件 (2.9), (2.10) で解く境界値問題となる。

こうして空洞内部で有限の電場 \vec{E} , 磁場 \vec{H} が得られたとする。一方、導体内部 (即ち、空洞外部) では $\vec{E} = \vec{H} = 0$ である。即ち、図 2.5 a) のように xy 面に導体面があると、電場は空洞内部 ($z > 0$) では導体面に直角に (即ち、 z 方向) 有限の値 E をとり、空洞外部 (導体内部 $z < 0$) では 0 だから、 E_z は図 2.5 b) のように導体表面で不連続となる。このような階段関数の微分は δ -関数となり $\partial E_z / \partial z = E \delta(z)$ で表わされる。すると $\text{div } \epsilon \vec{E} = \rho$ 即ち $\epsilon \partial E_z / \partial z = \rho$ を満たすためには

$$\rho(x, y, z) = \epsilon E \delta(z) \quad (2.13)$$

なる電荷密度が図 2.5 c) のように導体表面に存在しなければならない。

ここで、表面電荷密度

$$\sigma_s = \epsilon E \quad (2.14)$$

を定義する。 δ -関数を使わないで図 2.5 a) のような体積分で (2.2) を考えても同じ結果を得る。

(2.11) と (2.12) は導体表面を含まない空間での式であることに注意しよう。導体表面を含めると (2.14) の表面電荷を考慮に入れなければならない。この状態は空洞内にある電場が、導体表面の電荷によって遮蔽され、その結果導体内部 (空洞外部) に電場がなくなるとも考えられる。即ち、誘導電場が、表面電荷が作るクーロン電場によって導体側では相殺され、空洞側では足しあわさっている訳である。

次に、磁場について考え、図 2.6 a), b) のように磁場の方向を y 軸にとると、 H_y は図 2.6 c) のように導体表面でやはり不連続である。従って、 $\partial H_y / \partial z = H \delta(z)$ となり、 $\text{curl } \vec{H} = \vec{j}$ をみたすためには、

$$j_x = -H \delta(z) \quad (2.15)$$

なる電流密度が導体表面に存在しなければならない。ここで表面電流

$$i_s = H \quad (2.16)$$

を定義する。以上のことは、微分形 (2.4') でなく積分形 (2.4) に於て図 2.6 a) のような線積分をとっても同じ結果を得る。表面電荷が電場を遮蔽したように、表面電流が磁場を遮蔽して導体側に磁場がなくなるよ

うになっている。

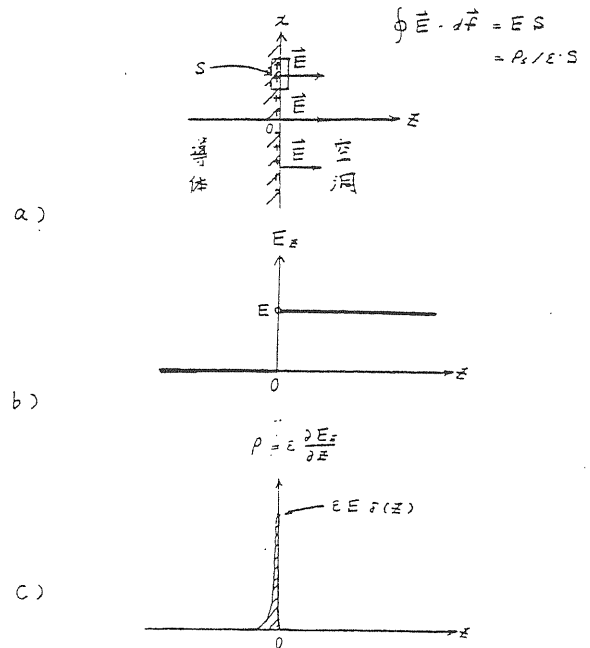


図 2.5 表面電荷

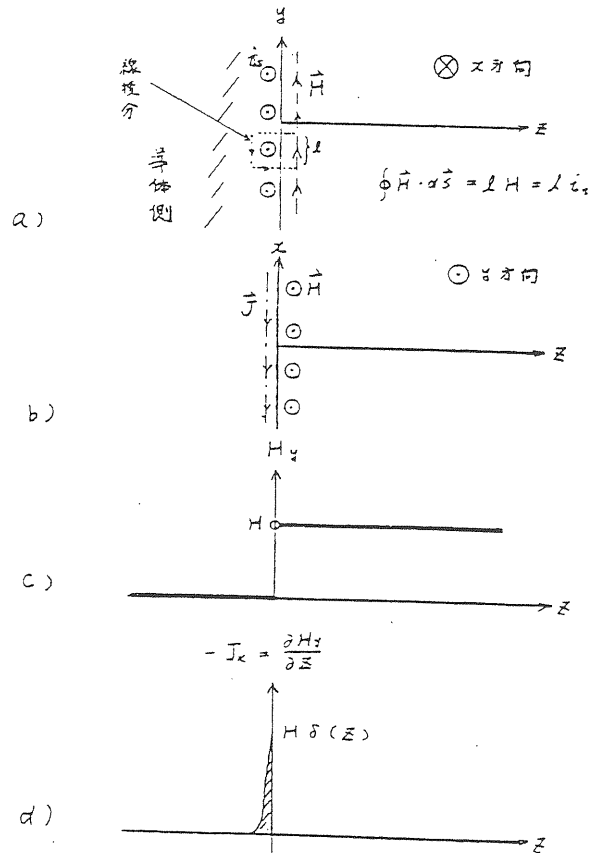


図 2.6 表面電流

2.4. 集中回路定数

前節で表面電荷、表面電流が導体表面に存在することが分った。そこで、面積 A_c の導体面が距離 d_c の間をおいて向いあっており、この A_c が波長に比べて十分小さいとしよう。面間の電圧 V は $V = d_c E$ であり、電荷の総量は $Q = \sigma_s A_c$ で与えられるから

$$V = Q / C \quad (2.17)$$

によって電気容量 C を定義すると、(2.14) を使って

$$C = \epsilon A_c / d_c \quad (2.18)$$

を得る。電気容量 C は名前の通り一定の電圧に対し貯めこむことができる電荷の量を表わしている。面積 A_c が大きい程一定の電場に対し多くの電荷を貯めることができるし、距離 d_c が短ければ一定の電荷 Q に対し電圧 V は低くなって、電気容量 C が大きくなる。

今、インピーダンス Z を電圧、電流の比

$$Z = V / I \quad (2.19)$$

で定義する。一方、電荷 Q は電流 I が容量 C に流れこんで来た積算値だから

$$Q = \int I dt, \text{ 又は, } I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.20)$$

である。今、 I が $e^{j\omega t}$ のように振動していると

$$Z = \frac{1}{j\omega C} \quad (2.21)$$

が得られる。

容量 C が大きければ、電流がいくら流れこんで電荷が増えても、電圧は余り上らないので、インピーダンスは小さい。又、電圧は電荷に比例し、電荷は電流の積分なので、電流 I の変化が速いと、電流量が大きくても電荷量は増えず、従って電圧は余り増えない。(2.21) が ω に反比例するのはそのためである。さらに積分であるため、電流が変化しても電荷、従って電圧はすぐに変化せず、従って応答が遅れる。 $1/j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ であるから、(2.21) の分母に j があるのは、位相の遅れを表わしており、これが応答の遅れを意味している。

次に、表面電流 i_s は (2.3) で示したように変位電流を含めて閉曲線をなし、それが磁束 Φ を作る。その磁束 Φ は電流 I に比例しているので、

$$\Phi = L I \quad (2.22)$$

によって、インダクタンス L を定義できる。この磁束 Φ が変化すると電磁誘導の法則によって誘導電場を作る。その誘導電場は距離 d_c だけ離れた導体間に (2.5) によって

$$V = -\int_0^{d_c} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = L \frac{dI}{dt} \quad (2.23)$$

なる電圧を作る。すると、インピーダンスは、 I が $e^{j\omega t}$ のように変化するとき、

$$Z = j\omega L \quad (2.24)$$

で与えられる。

L は電流 I が流れたとき磁束 Φ がいかに大きいかを表わしているから、 L が大きいと、同じ電流に対して磁束が大きくなり、その結果誘起される電圧も大きくなる。 Z が L に比例するのはこのためである。又、電磁誘導の法則で分る通り、磁束、従って電流の変化が速いと、電圧が大きくなるので、(2.24) のように ω に比例する。さらに I の変化量に比例するということは、 I が変化を始めたとき、直ちに V が大きくなり、 I が最大値に行く前に V が最大値をとることになる。それが位相を速める効果として (2.24) で j に比例することになる。

2.5. ポインティング・ベクトルと電磁場のエネルギー

電磁場のエネルギーを考えると、

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.25)$$

で定義されるポインティング・ベクトルを使うと便利である。これの div をとり、(2.4') と (2.5') を使うと、

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= \vec{H} \cdot \text{curl} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{curl} \vec{H} \\ &= -\mu \vec{H} \cdot \partial \vec{H} / \partial t - \vec{E} \cdot (\epsilon \partial \vec{E} / \partial t + \vec{J}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

となり、

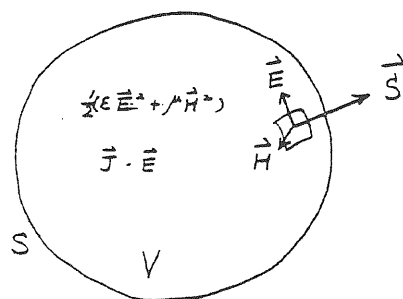
$$\text{div} \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) - \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (2.27)$$

これの体積積分をとると、

$$\begin{aligned} \oint \vec{S} \cdot d\vec{f} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) dv \\ &\quad - \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dv \end{aligned} \quad (2.28)$$

を得る。すると、図 2.7 のようにベクトル \vec{S} は電磁エ

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$



$$\oint \vec{S} \cdot d\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{1}{2} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) + \vec{J} \cdot \vec{E} \right]$$

図 2.7 ポインティング・ベクトル

エネルギーの流れの密度と考えられ、(2.28)の左辺はある体積Vからのエネルギーの流れとなる。一方、

$$\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \quad (2.29)$$

は電磁場のエネルギーの密度と考えられ、(2.28)の右辺第1項は体積V中のエネルギーの減少を表わしている。右辺第2項は、(2.8)のオームの法則に従う電流の場合には熱損失を表わす。空間電流の場合には、電荷の運動の方向が電場の方向と一致していると、電荷は加速され、電磁場は電荷に対して仕事をする事によって $\vec{j} \cdot \vec{E}$ だけエネルギーを失う。電荷が電場と逆向きに運動していると、電荷は電場に抗って動き、減速され、電磁場に対して仕事をする事になる。このとき $\vec{j} \cdot \vec{E}$ は負で(2.28)の右辺第2項は正となり、体積V中の電磁場のエネルギーは増えることになる。

次に、 \vec{E} と \vec{H} が

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (2.30)$$

のように振動しているとき、 \vec{S} の時間平均 $\langle \vec{S} \rangle$ を考えてみよう。

それは

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \cos \omega t \cos(\omega t + \phi) \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \\ &= \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos \phi \end{aligned} \quad (2.31)$$

で与えられる。 \vec{E} と \vec{H} が複素数と考え

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{j(\omega t + \phi)} \quad (2.32)$$

と書き、実際の \vec{E}, \vec{H} はこれの実部であるとする、(2.31)は、

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad (2.33)$$

となる。

同様にして、

$$\left\langle \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \quad (2.34)$$

$$\left\langle \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^*$$

$$\left\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \vec{j} \cdot \vec{E}^* \quad (2.35)$$

も得る。又、(2.26)に於て左辺の \vec{H} を \vec{H}^* にしたものと、 \vec{E} を \vec{E}^* にしたものを加えて2で割ると、

$$\begin{aligned} \text{div} \langle \vec{S} \rangle &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\left\langle \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right\rangle \right) \\ &\quad - \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

が得られて時間平均に対しても(2.27)が成り立つことが分る。

3. 進行波と導波管

3.1. TEM波, 同軸ケーブル

電磁波はよくTEM波, TE波, TM波と分けて考えられる。ここでTEM波は電磁場ともに波の進行方向に垂直な電磁波である。

同様にTE波は電場が進行方向に垂直, TM波は磁場が進行方向に垂直な波である。

TEM波の例として、まず最も簡単な平面波を考えてみよう。波の進行方向をz-軸とし、電場の方向をx-軸とすると、進行波は、

$$E_x = E_{x0} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.1)$$

と表わされる。というのは、 $\omega t = \beta z$ のとき $E_x = E_{x0}$ であり、常に電場が最大であり、この状態が、

$$v_p = z/t = \omega/\beta \quad (3.2)$$

の速度で進んでいくからである。これは、位相が同じ状態が進んでいるので位相速度と呼ばれる。t=0の電場の状態を図3.1 a)に示す。波はz-方向に進むか

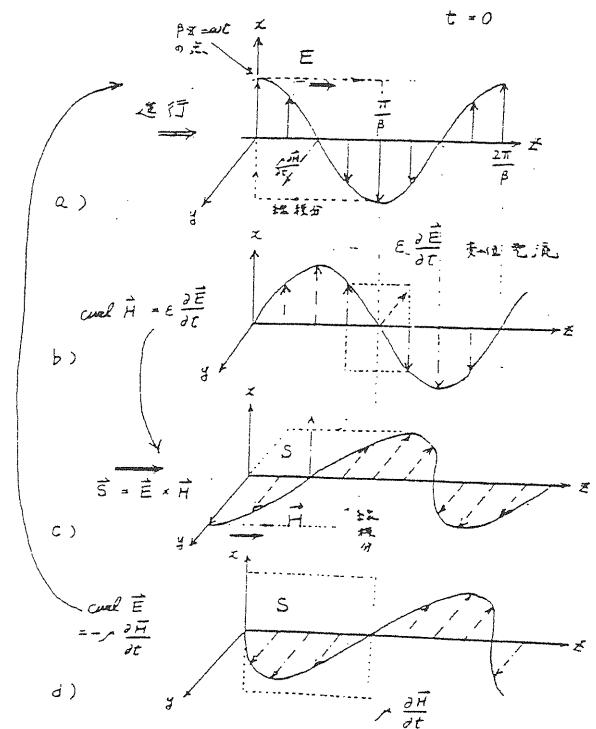


図3.1 平面波

ら、電場の微分は図3.1 b)に示すように $z = \pi/2\beta$ の場所で最も大きい。するとこの変位電流 $\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$ によって(2.4)から図3.1 c)に示すような磁場が誘起される。その磁場の変化は図3.1 d)のようであり、誘導電場は図3.1 a)となる。又、磁場は電場に垂直であるということは、(2.4)に於てx-z面内の磁場の閉線積分が面に垂直な電場がないのでいたる所ゼロとなることから分る。

以上のことは、(3.1)を(2.4)に代入すると、

$H_z = 0$ を使って

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_{x0} e^{j(\omega t - \beta z)}$$

となり、これを z で積分して、

$$H_y = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_{x0} e^{j(\omega t - \beta z)} = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_x \quad (3.3)$$

を得る。この (3.3) と (3.1) を (2.5) に入れると $H_y = (\beta/\omega\mu) E_x$ となるので、これと (3.3) を比べて β は、

$$\beta_0 = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \quad (3.4)$$

に等しくなる。従って、真空中では $\epsilon = \epsilon_0$ 、 $\mu = \mu_0$ なので 平面波の位相速度 v_p は光速

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad (3.5)$$

となる。このとき、電場と磁場の比 E_x/H_y は $\sqrt{\mu/\epsilon}$ となり、TEM波の特性インピーダンス

$$Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = c\mu \quad (3.6)$$

を定義する。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 、 $c = 2.997929 \times 10^8$ m/s を使って、 $Z_0 = 377 \Omega$ となる。

波の波長は図 3.1 a) に示すように

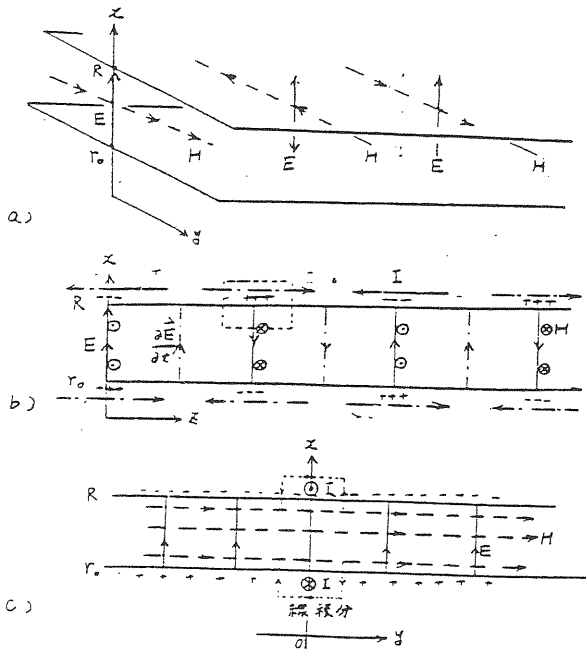


図 3.2 平行平板のあるときの TEM 波

$$\lambda = 2\pi/\beta \quad (3.7)$$

で表わされる。平面波の場合は勿論 $\lambda_0 = 2\pi/\beta_0$ に等しく、周波数 $f = 500$ MHz のとき $\lambda_0 \cong 60$ cm である。

ここで電磁エネルギーの流れ、即ちポインティング・ベクトルを考えてみよう。

$$S_z = E_x \cdot H_y$$

だから、(3.3) を使って

$$S_z = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_x^2 = c\epsilon E_x^2 = c\left(\frac{1}{2}\epsilon E_x^2 + \frac{1}{2}\mu H_y^2\right)$$

となる。右辺は電磁エネルギーに光速 c をかけたものであり、従って、電磁エネルギーが z 方向に向って流速 c で流れていっていることを表わしている。

今、このように平面波があるとき、2枚の(無限に薄い)導体平板を、図 3.2 a) のように $x=r_0$ および $x=R_0$ の位置においてみよう。すると、電場 E は導体面に垂直であり、磁場はその面に平行であるから、平面波と同じ電磁場が境界条件 (2.9), (2.10) を満足する。平面波とのちがいは、導体内部では電磁場が存在しないことである。すると、図 3.2 b) ($y=0$ の位置で $x-z$ 面を見たもの) のように $\epsilon\vec{E}$ の面積分をとると導体内部に電場がないため (2.2) の左辺は 0 でなくなる。その結果、導体に表面電荷が現われてきて、(2.2) が満たされるようになる。磁場についてはどうか。これは、 $z=0$ の位置で、 $x-y$ 面を見た図 3.2 c) で線積分をとると、再び導体内部に変動磁場はないので、(2.4) の左辺は 0 でなくなる。一方 (2.4) 右辺の第 2 項は、面 S に垂直な(導体面に平行な) $\epsilon\partial E/\partial t$ がないので 0 となる。従って、(2.4) 右辺第 1 項が有限でなければならず導体に表面電流が生ずる。以上をまとめて図 3.2 b) に示す。電流 I と変位電流 $\epsilon\partial\vec{E}/\partial t$ とが閉曲線をなしていることが分かる。又、表面電荷が作るクーロン電場は、導体内部では、変動磁場による誘動電場によって相殺されている。

次にこの平行平板を z 軸のまわりに丸めてみよう。即ち、図 3.2 a) を z 軸のまわりに回転する訳である。すると、図 3.2 b) はそのまま、図 3.2 a) が図 3.3 のようになる。これが同軸ケーブルと呼ばれるもので、TEM 波を搬送することができる。

3.2. TE 波、矩形導波管

今度は図 3.2 a) の 2 枚の平行平板に図 3.4 のように導体で側壁を設けてみよう。ここでは $x = \pm a/2$ の位置に平行平板を、 $y = \pm b/2$ の位置に側壁を置いてある。すると、図 3.2 a) の電磁場は側壁の所でもはや境界条件を満たさなくなる。まず電場は側壁 $y = \pm b/2$ で平行成分をもてないからなくなってしまい、おそらく、

$$E_x \propto \cos \frac{\pi y}{b} \quad (3.8)$$

のように y の関数になるであろう。一方、磁場は、側壁に垂直になってはいけなから側壁をよけて通り、しかも閉曲線をなさねばならないから、 $z = \pi/\beta$ の所にある磁場に結がるであろう。その結果図 3.4 のよ

うな電磁力線となる。ここで注意したいのは、磁場が

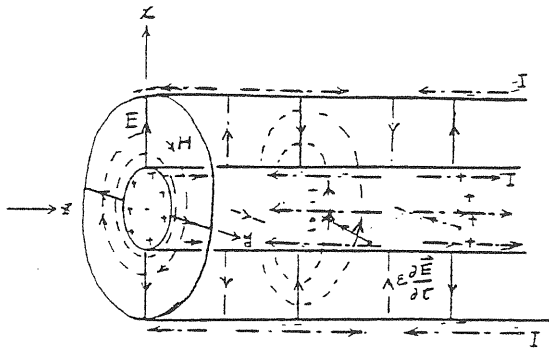


図 3.3 同軸ケーブル

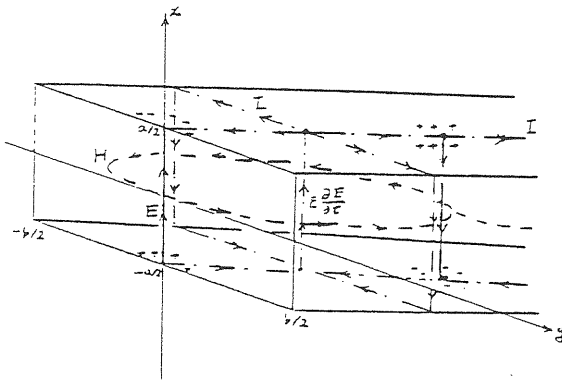


図 3.4 矩形導波管の TE 01 波

側壁をよけた為に磁場に進行方向成分を生じたことである。従って、進行方向に常に垂直なのは電場だけとなり、TE波と呼ばれる。

電磁力線は $x-z$ 面を $y=0$ の位置で見る限り図 3.2 b) と同じである。一方、磁場に進行方向成分ができたために、(2.4) によって側壁に新たに表面電流が生じる。こうして図 3.4 の電磁力線はマクスウェルの方程式と境界条件をみたすようにすることができる。

図 3.4 のような構造は上述したように電磁波を通すので矩形導波管と呼ばれ、図 3.4 のようなモードを TE 01 モードという。TE 波又は次節ででてくる TM 波が TEM 波と大きく異なる点は、周波数 f に遮断周波数 f_c と呼ばれるある閾値があり、それより低い周波数の波は通さないということである。今、(2.11) に (3.1) を代入すると

$$\nabla^2 \vec{E}_x + \beta_0^2 \vec{E}_x = 0 \quad (3.9)$$

が得られる。これは波動を表わす式として同じみのものである。

平面波の場合、(3.1) の E_{x0} は定数なので (3.9) で $\partial^2 E_x / \partial x^2$, $\partial^2 E_x / \partial y^2$ とともに 0 となってしまう、 $\partial^2 E_x / \partial z^2$ のみが残る、 $\beta = \beta_0$ が得られる。ところ

が矩形導波管の TE 01 モードの場合 (3.8) のように E_x は y 方向にも波打っているので、 $\partial^2 E_x / \partial y^2$ が有限となりその結果

$$\beta^2 = \beta_0^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \quad (3.10)$$

が得られる。もし周波数が低く β_0 が π/b より小さくなると、 β^2 が負となり、 β は虚数となる。それを (3.1) に入れると、それは減衰する波を表わすことになる。従って、TE 01 モードの波が矩形導波管を通過していく為の条件は、

$$\beta_c \equiv \pi/b \quad (3.11)$$

として

$$\beta^2 = \beta_0^2 - \beta_c^2 > 0 \quad (3.12)$$

でなければならない。(3.10) は、遮断波長 λ_c を

$$\lambda_c \equiv 2b \quad (3.13)$$

と定義すると

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (3.14)$$

となる。遮断波長とは即ち、 y 方向に (3.8) のように波打っているその波長のことであり、(3.14) は、導波管の寸法の $1/2$ より大きい波長の波が入りけないことを表わしている。しかも周波数の一部が y 方向に波打つために使用され、管内波長 λ を λ_0 より長くしてしまう。

β が β_0 より小さくなると位相速度 v_p は (3.2) で分るように光速より速くなってしまふ。その様子を図 3.5 で見てみよう。今、左から平面波が導波管に向って進むと、導波管にぶつかって図 3.5 b) のように曲る。 $\lambda_0/2c$ の時間の後には、逆むきの磁場が導波管にぶつかり、それが先に導波管に入った磁力線と図 3.5 c) のように閉曲線を作ることになる。ところが、管内波長 λ は λ_0 より長いし、周波数は一定だから、波の先頭は、光速より速く進まないとうまく条件をみたせない。

それでは、電磁場は導波管内では光速より速く進むのであろうか。答は勿論否である。今、図 3.5 のような波を考えると、それは一定の ω を使って (3.1) のように表わせない。(3.1) は無限に z 方向に続いている波であって、図 3.5 のような先頭があるパルス状の波ではない。このときには、実は ω にある分布を生じている。その例として、

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \exp[j(\omega + \Delta\omega)t - j(\beta + \Delta\beta)z] \\ E_2 &= E_0 \exp[j(\omega - \Delta\omega)t - j(\beta - \Delta\beta)z] \end{aligned} \quad (3.15)$$

の 2 つの波が重なっている場合を考えると、

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = 2 E_0 \exp[j(\omega t - \beta z)] \cdot \\ &\quad \cos(\Delta\beta z - \Delta\omega t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

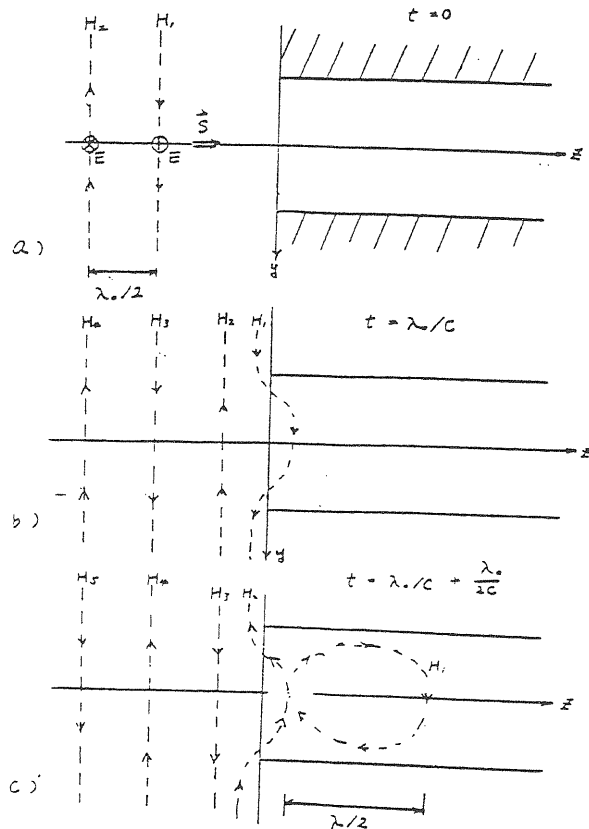


図3.5 平面波の導波管への侵入

となり、これは $\Delta \beta z - \Delta \omega t = 2n\pi$ で最大の振幅をもつビートである。第1因子はふつうの振動でその位相速度は(3.2)で進む。しかし、波動の振幅、即ち波動のエネルギーは

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta \beta} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (3.17)$$

で進む。これは(3.4)、(3.12)を使って実際に微分してみると、

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_c^2}} = c \frac{\lambda_0}{\lambda} = c \frac{\beta}{\beta_0} < c \quad (3.18)$$

となり、波長が長くなって遮断波長に近づく程どんどん遅くなる。

このことは図3.5でいえば、位相速度でみると、図のようになっているが、右の方へいくと磁場がどんどん小さくなっていき、ついには消えてしまう。従って、波頭が何度もおしよせてから、管内に十分大きな磁場が入っていくことになる。即ち、実際の電磁波は(3.18)の速度で進む訳である。(3.17)で定義された量は群速度と呼ばれる。

最後に $x=y=0$ での電場と磁場の比 E_x/H_y を考えてみよう。 E_x はTEM波と同じようになっていて管内波長が伸びた分位相速度 v_p が速くなっているから、変位電流 $\epsilon \partial E_x / \partial t |_{y=0}$ は同じである。ところが、磁力線のループの長さが長くなっていて、かつ E_x が(3.

8)のように $y \neq 0$ で小さくなっているから(2.4)の積分を行うと H_y はTEM波に比べて小さくなる。これは β/β_0 の程度であり、実際特性インピーダンス $Z_n^0 = E_x/H_y$ は

$$Z_n^0 = Z_0 \beta_0 / \beta \quad (3.19)$$

になることが分っている。

周波数500MHzの場合、遮断周波数 $f_c = c\beta_c/2\pi$ がそれより小さくなくてはならない。遮断周波数500MHzの導波管でもすでに $b = 30\text{ cm}$ となりかなり大きいものとなる。実際には v_g を稼がないと電磁場のエネルギーが速く伝わっていかないので、我々は $b = 38\text{ cm}$ を使っている。これは遮断波長 $\lambda_c = 76\text{ cm}$ 、周波数 $f_c = 390\text{ MHz}$ であり、管内波長 $\lambda = 98\text{ cm}$ 、群速度 $v_g = 0.6c$ である。

3.3. TM波, 円形導波管

図3.2b)、図3.3の同軸ケーブルに於て、内導体を抜いて見るとどうなるであろうか。内導体がなくなると同時に表面電荷と電流が消滅する。すると(2.2)によって原点から電場を生ずることができない。その結果 $z=0$ の電力線と $z=\pi/2\beta$ の電力線が z 軸上でつながり図3.6のようになる。(2.4)の表面電流が消滅したかわりに新たに z 軸上に変位電流 $\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$ が現われて(2.4)がみたされることになる。

こうして電場が進行方向成分をもつことになり、進行方向に常に垂直なのは磁場だけとなって、TM波と呼ばれる。

E_z は導体と平行であるから、外部導体面では0にならねばならない。 E_z の動径方向の変化は(3.8)のように三角関数で表わせず、円筒型の導体のため円筒関数を使って、

$$E_z \propto J_0(\beta_c r) \quad (3.20)$$

のように表わされる。これが $r=R_0$ の所で0にならねばならぬから、 $\beta_c R_0$ が円筒関数 J_0 の零点2.4となり

$$\beta_c = 2.4 / R_0 \quad (3.21)$$

を得る。管内波数 β 、波長 λ 等は(3.11)のかわりに(3.21)を使うことによって(3.12)、(3.14)で与えられる。遮断周波数が500MHzでは $R_0 = 23\text{ cm}$ となり、やはりかなりの大きさとなる。

TE波と異なるのは E_x/H_y の比即ち特性インピーダンスである。このとき z 軸上では $E_x = 0$ であるので、 $r=R_0$ での E_r/H_ϕ として考えてみよう。TE波と異なりTM波では電場の線積分のループが延びる。従って $Z_m^0 = E_r/H_\phi$ は今度は E_r の方が小さくなり、

$$Z_m^0 = Z_0 \beta / \beta_0 \quad (3.22)$$

のように特性インピーダンス Z_m^0 は Z_0 より小さくなってしまふ。

図 3.6 のようなモードを TM₀₁ モードと呼ぶが、TE モードと異なり z 軸上に z 軸方向に電場をもっている。これは直ちに粒子の加速に最適でないかと思うであろう。ここで問題になるのは位相速度が光速よりも速いということである。粒子が最初加速されていても、図 3.7 のように位相が粒子を追い越してしまい、そのうちに減速が始まる。従って単に TM₀₁ モードの導波管に電磁波を通しただけでは粒子は加速されない。そこで位相速度を遅くする何らかの方法が必要である。この点については、線型加速器のところで述べてあるので、ここでは繰り返さない。

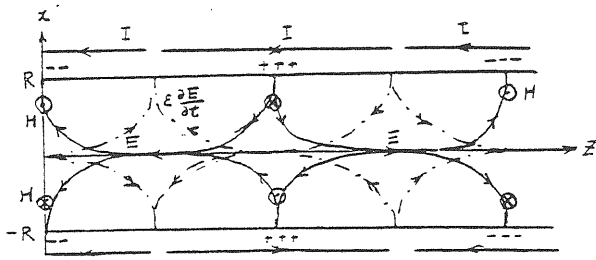


図 3.6 円型導波管の TM₀₁ 波

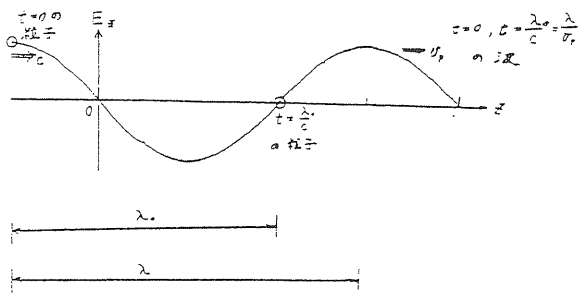


図 3.7 円形導波管と光速荷電粒子

3.4. 分布定数回路

ここ迄は同軸ケーブルや導波管内部での電磁場を考えてきたが、そのとき生じた導体の表面電流と表面電荷によって等価回路を作ってみよう。ここでは、2.4 のような L, C と異り単位長さあたりのインダクタンス L, 電気容量 C として考える。

同軸ケーブルを表わす図 3.3 も TE₀₁ モードを表わす図 3.4 も共に図 3.2 b) で表わされるから図 3.8 a) のようにしてみよう。電流 I(z) が流れていると、(2.4) によって磁束を誘起し、それが誘導電場となって z と z + Δz の間に電圧降下を起こす。その効果は 2.4 で述べたようにインダクタンスの概念で表わすことができ

$$V(z + \Delta z) - V(z) = -j\omega L \Delta z I$$

となる。即ち、

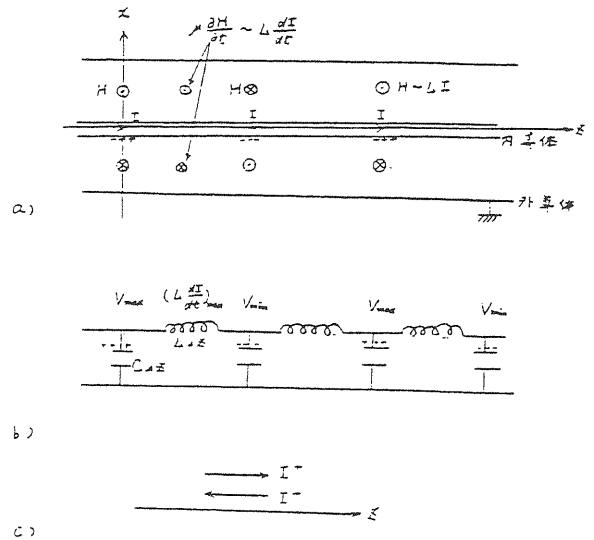


図 3.8 分布定数回路

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -j\omega L I \quad (3.23)$$

これは図 3.8 b) のように L を入れたことに相当する。

一方、z と z + Δz の間にある表面電荷 Q(z) Δz は、電気容量 C Δz によって電圧 V(z) と

$$Q(z) \Delta z = C \Delta z \cdot V(z)$$

の関係がある。これも図 3.8 b) のように C を入れたことに相当する。Q(z) Δz の時間微分は z と z + Δz の間に流れてむ電流 I(z) - I(z + Δz) に等しいから

$$\begin{aligned} I(z) - I(z + \Delta z) &= \frac{\partial}{\partial t} Q(z) \Delta z \\ &= j\omega C \cdot \Delta z V \end{aligned}$$

即ち、

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -j\omega C V \quad (3.24)$$

を得る。

ここで、-∂/∂z を別とすれば、(3.23), (3.24) は集中定数回路の場合 (2.19), (2.21), (2.24) と同じ形になっている。今、z 方向に進む波として、

$$V = V^+ e^{-j\beta z}, \quad I = I^+ e^{-j\beta z} \quad (3.25)$$

をとると、(3.23), (3.24) から

$$\beta^2 = \omega^2 L C \quad (3.26)$$

$$Z^0 \equiv \frac{V^+}{I^+} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.27)$$

を得る。同様に z 方向と逆向きに進む波も存在するので、一般に

$$V = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \quad (3.28)$$

$$I = I^+ e^{-j\beta z} - I^- e^{j\beta z} \quad (3.29)$$

が解となりうる。ここで、

$$\frac{V^-}{I} = Z^0 \quad (3.30)$$

である。逆方向に進む波については図 3.8c) のように $-z$ 方向の電流が正となるように定義してある。

3.5. 導波管, 同軸管の一般論

導波管や同軸ケーブルの中には, 今迄例として述べた TE 01 モードや TM 01 モード以外にも多くのモードが存在する。例えば, TE 01 モードを表わす図 3.4 に於て, 電磁場を反対方向にしたものを, $y = b/2$ から $3/2b$ に置いてみると, 図 3.9 のようになり, これも導波管を伝わっていくことができる。このようなモードは TE 02 モードと呼ばれる。

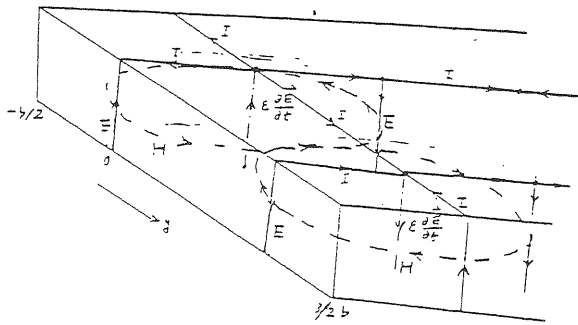


図 3.9 矩形導波管の TE 02 モード

今, 一般的な切口形状をした管が $z = -\infty$ から $z = \infty$ まで続いているとしよう。 z 方向については $e^{i\beta z}$ のように変化しているとしていいから, これは 2次元の境界値問題になる。その固有値を β_{cn} とし, 電磁場の横方向成分を $\vec{E}_{tn}, \vec{H}_{tn}$ で表わそう。すると (3.12), (3.19), (3.22) と同様に

$$\beta_n^2 = \beta_0^2 - \beta_{cn}^2 \quad (3.31)$$

$$Z_n^0 = Z_0 \beta_0 / \beta_n \quad (\text{TE モード}) \quad (3.32)$$

$$Z_n^0 = Z_0 \beta_n / \beta_0 \quad (\text{TM モード}) \quad (3.33)$$

となる。一方, $\vec{E}_{tn}, \vec{H}_{tn}$ は固有函数系で完全直交系をなしているので, 規格化条件

$$\int_A \vec{E}_{tn} \cdot \vec{E}_{tn} da = \delta_{mn},$$

$$\int_A (Z_n^0 \vec{H}) \cdot (Z_n^0 \vec{H}_{tn}) da = \delta_{mn} \quad (3.34)$$

を課す。すると, すべての横電磁場 \vec{E}_t, \vec{H}_t は

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(z) &= \sum_n V_n(z) \vec{E}_{tn}, \\ \vec{H}_t(z) &= \sum_n i_n(z) Z_n^0 \vec{H}_{tn} \end{aligned} \quad (3.35)$$

によって表わされる。ここに,

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \int_A \vec{E}_t(z) \cdot \vec{E}_{tn} da, \\ i_n(z) &= \int_A \vec{H}_t(z) \cdot \vec{H}_{tn} da \end{aligned} \quad (3.36)$$

であり, 積分は導波管や同軸管の切口 A について行うものとする。

このように定義された電圧 $V_n(z)$, 電流 $i_n(z)$ についても分布定数回路と同じように, (3.28), (3.29) が成り立ち,

$$V_n(z) = V_n^+ e^{-j\beta_n z} + V_n^- e^{j\beta_n z} \quad (3.37)$$

$$i_n(z) = i_n^+ e^{-j\beta_n z} - i_n^- e^{j\beta_n z} \quad (3.38)$$

と表わされる。又, (3.27), (3.30) も成り立ち

$$\frac{V_n^\pm}{i_n^\pm} = Z_n^0 \quad (3.39)$$

である。

ところで, z 方向を単位ベクトル \hat{k} で表わすと,

$$\hat{k} \times \vec{E}_{tn} = Z_n^0 \vec{H}_{tn} \quad (3.40)$$

だから, ポインティング・ベクトルの z 方向成分を A 全体について積分したものを P_z とすると,

$$\begin{aligned} P_z &\equiv \int_A \langle S_z \rangle da \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \int_A \hat{k} \cdot (\vec{E}_t \times \vec{H}_t^*) da \end{aligned} \quad (3.41)$$

である。これに (3.35) と (3.40) を代入すると,

$$P_z = \frac{1}{2} \text{Re} \sum_n i_n V_n^* \quad (3.42)$$

を得る。これは, ふつうの回路での電流, 電圧から電力を出すのと同じ式である。

3.6. 反射係数とインピーダンス整合

反射波の進行波に対する比を反射係数 $r_n(z)$ とすると, それは $z = 0$ での反射係数 R_n によって,

$$r_n(z) \equiv \frac{V_n^- e^{j\beta_n z}}{V_n^+ e^{-j\beta_n z}} = R_n e^{2j\beta_n z} \quad (3.43)$$

のように表わされる。ここで,

$$R_n \equiv r_n(0) = \frac{V_n^-}{V_n^+} = \frac{i_n^-}{i_n^+} \quad (3.44)$$

である。次に z の位置でのインピーダンスを

$$Z_n(z) = \frac{V_n(z)}{i_n(z)} \quad (3.45)$$

によって定義しよう。(3.37), (3.38) を (3.45) に入れ (3.43) と (3.44) を使うと

$$Z_n(z) = Z_n^0 \frac{1 + r_n(z)}{1 - r_n(z)} \quad (3.46)$$

を得る。逆に, これから $r_n(z)$ を求めると,

$$r_n(z) = \frac{Z_n(z)/Z_n^0 - 1}{Z_n(z)/Z_n^0 + 1} \quad (3.47)$$

となり, その特別な場合, $z = 0$ に於ては,

$$R_n = \frac{Z_n(0)/Z_n^0 - 1}{Z_n(0)/Z_n^0 + 1} \quad (3.48)$$

である。

電圧定在波比 (VSWR) は,

$$\text{VSWR} = \frac{1 + |r_n(z)|}{1 - |r_n(z)|} = \frac{1 + |R_n|}{1 - |R_n|} \quad (3.49)$$

によって定義され、反射の大きさを表わす量として広く使われている。その意味を考えてみよう。進行波のみのとき、電圧の絶対値 $|V_n(z)|$ は $|V_n^+|$ によって表わされ z によらず一定である。ところが、反射波があるとそれは $|V_n^+| \cdot |1+r_n(z)|$ で表わされ、最も電圧が高い所では $|V_n^+| \cdot (1+|R_n|)$ 、最も低い所では $|V_n^+| \cdot (1-|R_n|)$ となる。従って、VSWR は最大電圧と最低電圧の比である。

今、ある導波管があって $z=0$ の位置に $Z_n(0)=Z_n^0$ になる装置が装備されていたとしよう。すると、(3.47) から、 $z < 0$ のどの位置でも反射波はなくなって進行波だけになる。いいかえると、どこかが Z_n^0 に等しいインピーダンスのもので終端されていると、もはや導波管の存在を考える必要がなくなり、どの位置にでも Z_n^0 があると考えてよい。このようなとき、インピーダンス整合 しているという。

4. 定在波と空洞

4.1. TMO 1ℓ 空洞

図 3.6 に示したような円筒型導波管に於て、両端を図 4.1 のように、 $z=0, d_c$ の位置で導体でフタを試みよう。すると電場の動径方向成分 E_r はこのフタ

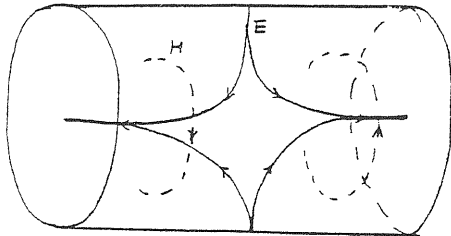


図 4.1 円型導波管にフタをする。TM 011 モード

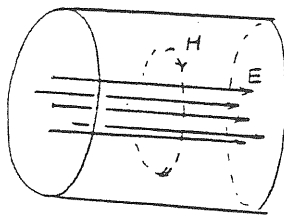


図 4.2 TM 010 モード

の位置で消滅し、 z 方向成分だけが残って電場は新たに追加したフタに直角に入らねばならない。この新たな境界条件は、進行波に於て自由パラメータであった β に対し制限を設けることになる。実際、 E_r の z に対する変化は、 $z=0, d_c$ で 0 になるために、

$$E_r \propto \sin \frac{\pi \ell}{d_c} z \quad (\ell \text{ は整数}) \quad (4.1)$$

のような形をしていなければならないが、これは β が、

$$\beta = \beta_1 \quad (4.2)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi \ell}{d_c} \quad (4.3)$$

を満たさなければならないことを意味する。従って (3.12) から

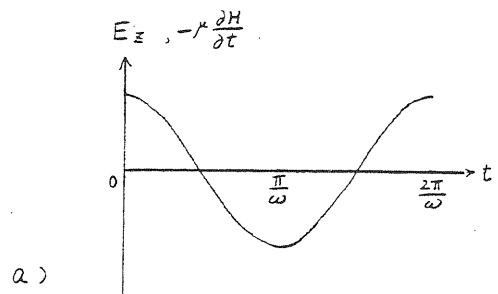
$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 &= \beta_0^2 = \beta_1^2 + \beta_c^2 \\ &= \left(\frac{\pi \ell}{d_c}\right)^2 + \left(\frac{2.4}{R}\right)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

となり、これで与えられる周波数の電磁場しか空洞内には存在しないことになる。これを空洞の共振周波数と呼ぶ。(4.1) - (4.3) は分布定数回路の式 (3.28) に於て $z=0, d_c$ で $V=0$ の条件を課すことによっても得られる。

図 4.1 の電磁場分布は $\ell=1$ の場合であるが、 $\ell=0$ の場合も許されることが (4.1) や図 4.2 から分る。このようなモードは TM 010 モードと呼ばれ、 z 軸上で電場の z 方向成分が最も強くなるので、定在波による加速空洞としてよく使われる。

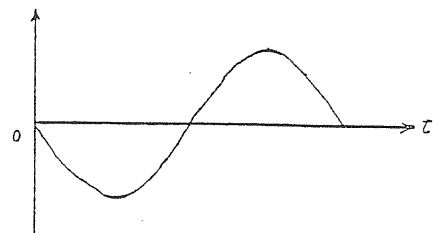
$z=0, d_c$ での新たな境界条件は又、 H_ϕ の最大になる所が $z=0, d_c$ であり、そこでは E_r が最小になっているという条件である。進行波ではある時刻に於て $z=0$ で H_ϕ が最大であると E_r も最大であった。この点で、定在波は進行波と異なる。

さらに、 E_r と E_z が $t=0$ で最大であって (これは $\ell \neq 0$ の場合であり $\ell=0$ の場合には E_z のみを考えればよい)、図 4.3 a) のような時間変化を示すと、変



a)

$$H_\phi, \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}$$



b)

図 4.3 電磁場の時間変化

位電流 $|\epsilon \partial E_r / \partial t|, |\epsilon \partial E_z / \partial t|$ は $t=0$ で 0 で $t=\pi/2\omega$ で最大となり、 H_ϕ はこの変位電流によって誘起されるから、やはり $t=\pi/2\omega$ に於て最大となり、図 4.3b) のように振るまう。TM₀₁₀モードにおける電磁場および電荷、電流の時間変化を図 4.4 に示す。(ここで、表面電流 I と変位電流 $\epsilon \partial \vec{E}_z / \partial t$ とでループをなしていることが分る) 進行波の場合にはある一点 $z=0$ で H_ϕ が最大になる時刻は E_r が最大になる時刻と一致していた。これも、定在波と進行波が異なる点である。又、粒子が加速される様子も図 4.4 に示した。

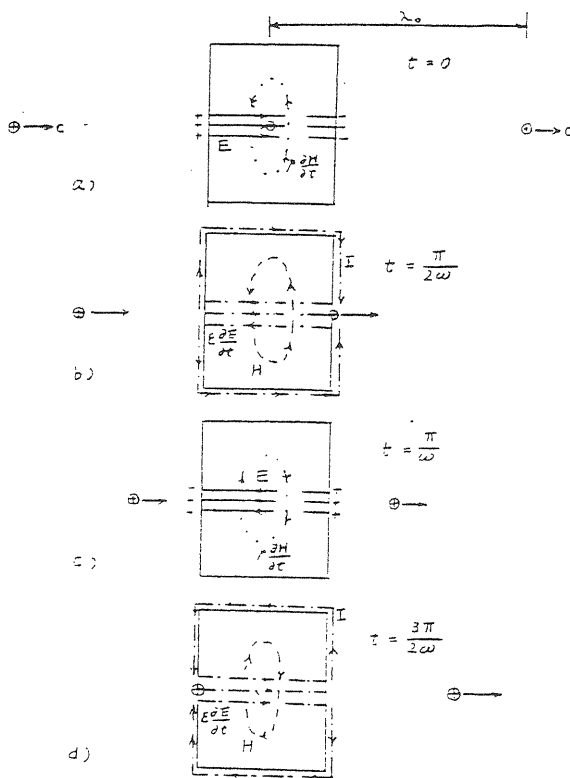


図 4.4 電荷、電流と電磁場の時間変化

4.2. 半共軸型空洞と空洞の等価回路

図 4.5 a) のような回路は共振回路としてよく知られている。今、このコイル部分を引きのばして図 4.5 b) のようにし、次に z 軸のまわりに回転すると図 4.5 c) のようになる。そこで、空洞内部に突き出た部分を引っ込めると図 4.5 d) 即ち、4.1 で調べた円筒型空洞になる。図 4.5 c) のような空洞は半共軸型空洞と呼ばれる。

図 4.5 で分る通り、中心軸 z に近い部分は電場が強く電荷がよくたまるので電気容量 C があり、筒に近い部分は磁場が強く磁束がよくたまるのでインダクタンス L がある。今電圧を、

$$V = -\int_0^d E_z dz \quad (4.5)$$

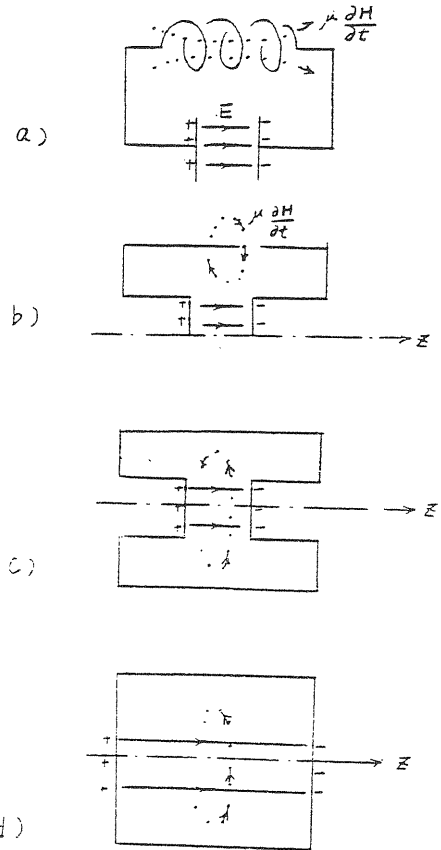


図 4.5 空洞の等価回路と半共軸型空洞

とし、表面電流を I とすると、等価回路図 4.5 a) に於て

$$V = j\omega LI, \quad V = \frac{-1}{j\omega C} I \quad (4.6)$$

となる。これが成り立つのは $\omega = 1/\sqrt{LC}$ の場合だけであり共振周波数

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.7)$$

を得る。 V, I の時間変化はそれぞれ E_z, H_ϕ の時間変化図 4.3 a), b) と同じである。

磁場が強くインダクタンスがある外筒部分を小さくすると、同じ電流に対し磁束が少くなるのでインダクタンス L が減る。その結果共振周波数 (4.7) は高くなる。又、電場が強く電気容量がある内筒を突っ込むと距り d_c が小さくなり (2.18) で分る通り電気容量 C が増え、その結果共振周波数 (4.7) が低くなる。これをまとめると

$$\begin{cases} \text{磁場の強い所をせまくする} \rightarrow L \downarrow \rightarrow \omega_a \uparrow \\ \text{電場の強い所をせまくする} \rightarrow C \uparrow \rightarrow \omega_a \downarrow \end{cases} \quad (4.8)$$

この性質は空洞の共振周波数を微調したり、空洞内の電磁場を測定するのに使用される。

5. 熱損失とビーム負荷

ここ迄は導体を完全導体と考え、電磁波の通る空間にもエネルギー損失がないものとしてきた。又、空間電流も存在しない場合しか考えなかった。しかし、粒子の加速に於ては現実に電荷の流れが空間にあり、このビーム電流に対してエネルギーを供給している。一方、クライストロンの出力空洞に於ては、電子ビームが減速され、エネルギーを失い、それが高周波電磁場のエネルギーとなって導波管から出て行く。又、空洞や導波管の導体表面にも電流が流れ、有限の導電率をもつために、熱損失となってエネルギーを失う。このように、すべての能動的な高周波装置は、電流が重要な役目を荷っている。

5.1. 電流がある場合の波動方程式

空間に高周波電流があると、それがビオ・サバールの法則(2.4')によって磁場を誘起し、この磁場が電磁誘導(2.5')によって電場を作る。従って、その電場の大きさは、(2.5')の curl をとり(2.4')をそれに代入することによって、

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (5.1)$$

で求められる。今

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (5.2)$$

とし、 \vec{E} も \vec{J} も $\sim e^{i\omega t}$ のように時間変化するとする、

$$-k^2 \vec{E} + \omega^2 \epsilon\mu \vec{E} = j\omega\mu \vec{J} \quad (5.3)$$

を得る。これに E^* をかけて全空間で積分すると、

$$(-k^2 + \omega^2 \epsilon\mu) \int |\vec{E}|^2 dv = j\omega\mu \int \vec{J} \cdot \vec{E}^* dv \quad (5.4)$$

が得られる。ここで、左辺は電磁場のエネルギー $\frac{1}{2}\epsilon \int |\vec{E}|^2 dv$ に比例している。一方、右辺は電流の方向が電場と同じであると、電荷は加速されエネルギーを電磁場からもらうことを表わしている。その特殊な場合はオームの法則(2.8)が成り立つときで、熱損失となる。もし、電流の方向が電場と逆向きであると、電荷は減速され、電磁場に対して仕事をしてエネルギーを与えることになる。その特殊な場合は、空洞に電力を供給する場合で、電流が逆起電力に抗して流れ、仕事をするようになる。

ここで、電流密度を

$$\vec{J} = \vec{J}_0 + \sum \vec{J}_i \quad (5.5)$$

のように分け、 \vec{J}_0 はオームの法則(2.8)に従う電流、 \vec{J}_i を空間に流れる電流又は同軸に流れる電流で空洞に対して仕事をするものとする。次節で \vec{J}_0 について議論し、その後 \vec{J}_i を考える。

5.2. 導体内部に流れる電流と誘電損失

今までは完全導体しか扱わなかったが、ここでは有限の σ をもつものとしよう。 $\vec{J}_0 = \sigma \vec{E}$ であるとまず気がつくことは、(5.1)において \vec{E} の時間の一回微分 $\partial/\partial t$ が現われることとなり、それは振動を表わす方程式の中でマサツによる減衰を意味することになる。

今、平面波を考えると(5.2)の k はそのまま(3.1)の β となり、(5.3)から、

$$-\beta^2 + \omega^2 \epsilon\mu = j\omega\sigma\mu \quad (5.6)$$

を得る。そこで、

$$\sigma \gg \omega\epsilon \quad (5.7)$$

の場合を考えると、(5.6)の左辺第2項はないものとして、

$$\beta = + \frac{1}{\delta} (1 - j) \quad (5.8)$$

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}} \quad (5.9)$$

となる。 β に虚数成分が生じたことは、3.2.で遮断周波数を議論したときと同様に、電磁波が導体内で減衰していくことを表わし、この現象は表皮効果と呼ばれている。

そして、(5.9)で定義された δ は、電磁波が導体内部に入りこめる深さを表わしていて、表皮深度 (skin depth) と呼ばれる。この表皮深度が、4.まで考えた完全導体がどの程度現実に近いかの目安を与える。周波数 $\omega/2\pi$ 、導電率 σ が大きい程 δ は小さい。

銅の場合には $1/\sigma = 1.72 \times 10^{-8} \Omega m$ だから、周波数 500 MHz の場合には $\delta = 2.98 \mu m$ となる。このとき、自由空間での波長は約 60 cm だから、一波長と比べ 10^5 程度小さい。逆にいうと、もし 10^5 程度の精度で問題を議論する場合には、 σ が有限である効果を考えに入れねはならないことになる。又、空洞が δ より十分大きい、例えば $10\delta \cong 30 \mu m$ 程度の銅でおおわれていれば、500 MHz の電磁波を閉じこめることができる。

完全導体の場合、(2.15)で表わしたように無限小の表皮深度を電流が流れるとしたが、もしそれが(5.9)のように有限であると、表皮深度 δ の所に電流が流れることになる。すると、この電流によって失われるエネルギー $\int \vec{J} \cdot \vec{E}^* dv$ に於て体積積分 dv は面積分 da に δ をかけたもの δda となる。一方、導体壁を流れる電流密度 \vec{J}_{wai} は磁場 \vec{H} があるときの表面電流密度(2.16) $|\vec{H}|$ を δ で割ったものとなり、又 $\vec{E}^* = \vec{J}_{wai}^* / \sigma$ だから、

$$\int \vec{J}_{wai} \cdot \vec{E}^* dv = \frac{\beta_0}{Z_0} \cdot \frac{1}{2} \delta \int |Z_0 \vec{H}|^2 da \quad (5.10)$$

のように損失エネルギーが与えられる。ここで β_0, Z_0

を定義する式(3.4), (3.6)を使った。 δ が無限小の場合には損失は0となるが、銅の場合に電磁場エネルギーの 10^{-6} 程度の損失を議論する場合には重要になってくる。

次に、

$$\sigma \ll \omega \epsilon \quad (5.11)$$

の場合を考えると、(5.6)の左辺第2項が右辺よりうんと大きくなり、電磁波は波長程度進む間には余り減衰しないことになる。それでも β に小さな虚数成分があり、そのことによって失われるエネルギーは、流れる電流を \vec{j}_{die1} として、 $\vec{j}_{\text{die1}} = \sigma \vec{E}$ だから、

$$\int \vec{j}_{\text{die1}} \cdot \vec{E}^* dv = \sigma \int |\vec{E}|^2 dv = \frac{\beta_0}{Z_0} \cdot \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \int |\vec{E}|^2 dv \quad (5.12)$$

となる。

最後に、誘電体があって、それに誘電体損失がある場合を考えてみよう。このときには、誘電率 ϵ に、

$$\epsilon = \epsilon_1 - j\epsilon_2 = \epsilon_1 (1 - j \tan \delta_d) \quad (5.13)$$

のように虚数成分があることと等価である。

今(5.6)を見てみると、

$$\epsilon \rightarrow \epsilon_1$$

とし、

$$\frac{\sigma}{\epsilon \omega} = \tan \delta_d \quad (5.14)$$

とすると、(5.13)の効果を考慮に入れたことになる。(5.12)に於て \vec{j}_{die1} としたのは、高周波技術ではセラミックのような誘電体がよく使われるので、(5.11)の場合はむしろ誘電体損失を考慮することが多いからである。(5.11)の条件はこのとき、

$$\tan \delta_d \ll 1 \quad (5.11')$$

であり、(5.12)は

$$\int \vec{j}_{\text{die1}} \cdot \vec{E}^* dv = \frac{\beta_0}{Z_0} \cdot \tan \delta_d \int |\vec{E}|^2 dv \quad (5.12')$$

となる。

高周波で使われる $\tan \delta_d$ の非常に小さいセラミックでも $\tan \delta_d \sim 10^{-4}$ である。ここで(5.12')と(5.10)を比べると、(5.12')は体積分であり、(5.10)は面積分である。 $|\vec{E}|$ と $|Z_0 \vec{H}|$ とは同程度だから、(5.10)と(5.12')が同じためには、 $\delta \sim 10^{-6} \text{m}$ として、 $10^{-6} \times \text{面積} = 10^{-4} \times \text{体積}$ となり長さのスケールとして $\sim 10^{-2} \text{m} = 1 \text{cm}$ となる。これは500 MHzの標準的なスケール(波長)60 cmと比して非常に小さい。いいかえると壁損失(5.10)は誘電損失(5.12')と比べ非常に小さいことが分る。

5.3. 空洞内の空間電流

ふつう導波管や同軸ケーブルは電磁波の搬走に使い、

その中に空間電流はない。空間電流が問題になるのは加速空洞やクライストロン内の空洞に於てである。空洞内に於ては \vec{E} は(5.2)に於て固有値問題(Sは導体面)

$$\nabla^2 \vec{E}_a + k_a^2 \vec{E}_a = 0 \quad (5.15)$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_a = 0 \quad \text{at } S \quad (5.16)$$

の解 \vec{E}_a である。空洞に電磁エネルギーを供給するには、どこかで導波管や同軸管と結がなければならない。そのための開口部を図5.1のように S_1' と表わし、導体面Sの境界条件(5.16)に加えて、

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_a = 0, \quad \text{at } S_1' \quad (5.17)$$

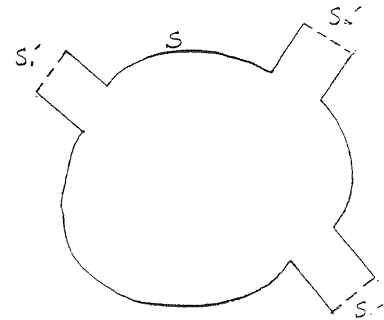


図5.1 開口部のある空洞

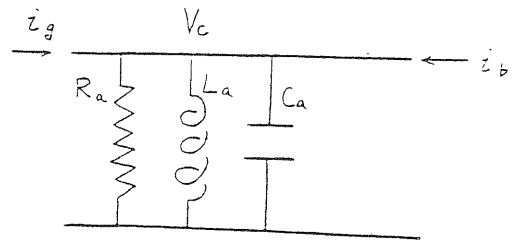


図5.2 空間電流、損失、入力がある場合の空洞の等価回路

の境界条件で \vec{E}_a は解いてあるものとする。ここで(5.16), (5.17)はそれぞれ矩形境界条件、開放境界条件と呼ばれる。

(5.15-17)の解 \vec{E}_a はその絶対値に関して何の制限もない。そこで規格化条件

$$\int \vec{E}_a^2 dv = 1 \quad (5.18)$$

を課し、

$$\vec{E} = u_a \vec{E}_a \quad (5.19)$$

として u_a によって電場の大きさを表わすことにする。

これは、空洞内の蓄積エネルギー

$$U \equiv \frac{1}{2} \epsilon \int |\vec{E}|^2 dv \quad (5.20)$$

と

$$U = \frac{1}{2} \epsilon |u_a|^2 \quad (5.21)$$

なる関係がある。今

$$\omega_a \sqrt{\epsilon \mu} = k_a \quad (5.22)$$

によって共振角周波数を定義し、(5.19)を(5.4)に代入して(5.18)を使い、 $-j\omega\mu$ で両辺を割ると、

$$j \frac{k_a}{Z_0} \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) |u_a|^2 = -\int \vec{J} \cdot \vec{E}^* dv \quad (5.23)$$

が得られる。電流を、

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{wall}} + \vec{J}_{\text{diel}} + \sum_{\nu} \vec{J}_{\nu} \quad (5.24)$$

とすると、(5.23)の右辺は、壁損失(5.10)、誘電損失(5.12')が、その他の開口部および空洞内に流れる電流 \vec{J}_{ν} によるエネルギー利得又は損失とバランスをとっていることになる。高周波電流は電荷の進行として進行波で表わされるから、

$$\vec{J}_{\nu} = i_{\nu 0} e^{j(\omega t - k_{\nu} s_{\nu})} d\vec{s} = i_{\nu} e^{-jk_{\nu} s_{\nu}} d\vec{s}_{\nu} \quad (5.25)$$

と書くことができる。ここで k_{ν} は、

$$k_{\nu} = \frac{\omega}{v_{\nu}} \quad (5.26)$$

で、 v_{ν} は電荷の速度である。 ν 番目の電流の場所での電圧 $V_{a\nu}$ は、

$$V_{a\nu} = -\int \vec{E} \cdot e^{jk_{\nu} s_{\nu}} d\vec{s}_{\nu} = u_a v_{a\nu} \quad (5.27)$$

$$v_{a\nu} = -\int \vec{E}_a \cdot e^{jk_{\nu} s_{\nu}} d\vec{s}_{\nu} \quad (5.28)$$

で与えられる。ここで v_{an} は規格化された電圧 \vec{E}_a が空洞にあるとき \vec{J}_{ν} にかかる電圧であり、それは電場が \vec{E} のときには u_a 倍になる訳である。すると、(5.23)の右辺の \vec{J}_{ν} による部分は(5.25)、(5.27)を使って、

$$-\int \vec{J}_{\nu} \cdot \vec{E} dv = i_{\nu} V_{a\nu}^* = i_{\nu} v_{a\nu}^* u_a^* \quad (5.29)$$

で与えられる。(これは単に電流をかける電圧である)

3.4.で導波管や同軸ケーブルについて、2通りの電圧、電流の定義があることを述べた。 i 番目の開口部 S_i' の n 番目のモードの電圧 $V_{an}^{(i)}$ を

$$\vec{E} = V_{an}^{(i)} \vec{E}_{tn}^{(i)} \quad \text{at } S_i'$$

と定義した場合には

$$V_{an}^{(i)} = \int_{S_i'} \vec{E} \cdot \vec{E}_{tn}^{(i)} da = u_a \int_{S_i'} \vec{E}_a \cdot \vec{E}_{tn}^{(i)} da$$

となるから、

$$v_{an}^{(i)} = \int \vec{E}_a \cdot \vec{E}_{tn}^{(i)} da \quad (5.28')$$

で $v_{an}^{(i)}$ を定義すればよい。添字 ν は空間電流又は一つの開口部 S_i' のモード n をまとめて表わすものとする。

(5.28)に於て $e^{jk_{\nu} s_{\nu}}$ がかかっているのは、電荷の速度が有限で電荷がある距離を走るのに有限の時間がかかり、その途中で電場の位相が変化するためである。 $e^{jk_{\nu} s_{\nu}}$ を入れて積分したものを、 $e^{jk_{\nu} s_{\nu}}$ なしで積分したもので割り、こうして得られた量を通過時間因子(transit time factor)と呼ぶことができる。

壁損失については、規格化された磁場

$$\nabla^2 \vec{H}_a + k_a^2 \vec{H} = 0 \quad (5.30)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{H}_a = 0 \quad \text{at } S \quad (5.31)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_a = 0 \quad \text{at } S' \quad (5.32)$$

$$\int_V \vec{H}_a^2 dv = 1 \quad (5.33)$$

を使う。(5.15)と(5.30)は $\text{curl } \vec{E}_a = k_a \vec{H}_a$, $\text{curl } \vec{H}_a = k_a \vec{E}_a$ と同等であり、 $\text{curl } \vec{E}_a = k_a \vec{H}_a$ と(2.5')を使って、

$$-j Z_0 \vec{H} = u_a \vec{H}_a \quad (5.34)$$

を得る。(5.34)を(5.10)に入れて、

$$-\int \vec{J}_{\text{wall}} \cdot \vec{E}^* dv = -\frac{\beta_0}{Z_0} \frac{1}{Q_{\text{wall}}^a} |u_a|^2 \quad (5.35)$$

$$\frac{1}{Q_{\text{wall}}^a} = \frac{1}{2} \delta \int_S H_a^2 da \quad (5.36)$$

となる。又、誘電損失は、(5.19)を(5.12')に入れて

$$-\int \vec{J}_{\text{diel}} \cdot \vec{E}^* dv = -\frac{\beta_0}{Z_0} \frac{1}{Q_{\text{diel}}^a} |u_a|^2 \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{Q_{\text{diel}}^a} \equiv \tan \delta_a \quad (5.38)$$

で与えられる。

$\omega \cong \omega_a$ のときは $k_a \cong \beta_0$ だから、(5.29)、(5.35)、(5.37)を(5.23)に代入して、

$$\frac{k_a}{Z_0} \left[j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_{\text{wall}}^a} + \frac{1}{Q_{\text{diel}}^a} \right] |u_a|^2$$

$$= \sum_{\nu} i_{\nu} V_{a\nu}^*$$

をえる。両辺に $v_{a\nu}$ をかけ、 $u_a^* k_a / Z_0$ で割ると、

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_{\text{wall}}^a} + \frac{1}{Q_{\text{diel}}^a} \right] V_{a\nu} = \sum_{\nu} \left(\frac{Z_0 v_{a\nu} v_{a\nu}^*}{k_a} \right) i_{\nu} \quad (5.39)$$

となる。これは又、

$$V_{a\nu} = \sum_{\nu} Z_{\mu\nu}^a i_{\nu} \quad (5.40)$$

$$Z_{\mu\nu}^a \equiv \frac{Z_{\mu}^0 / Q_{\text{ext},\mu\nu}^a}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c^a}} \quad (5.41)$$

$$\frac{1}{Q_{\text{ext},\mu\nu}^a} \equiv \frac{Z_0}{Z_{\mu}^0} \frac{v_{a\mu} v_{a\nu}^*}{k_a} \quad (5.42)$$

$$\frac{1}{Q_c^a} \equiv \frac{1}{Q_{\text{diel}}^a} + \frac{1}{Q_{\text{wall}}^a} \quad (5.43)$$

のようにも表わされる。

ここ迄は、(5.19)で見られるように1つの共鳴モード a のみを考えた。もっと一般的には、電場は種々のモードの重ねあわせと考えることができ、(5.19)は a についての無限個の和となる。すると(5.27)も a について和をとることになり、 ν 番目の電圧は、

$$V_{\nu} \equiv \sum_a V_{a\nu} \quad (5.44)$$

で与えられる。すると、

$$Z_{\mu\nu} \equiv \sum_a Z_{\mu\nu}^a \quad (5.45)$$

として、再び、

$$V_\mu = \sum_\nu Z_{\mu\nu} i_\nu \quad (5.46)$$

を得る。すると導波管の一般論 3.5 と (5.46) を使うことによって、すべての問題は回路論によって原理的にはとけることになる。

5.4. 等価回路

空洞の外から供給される電流を i_g 、空洞内の空間電流（ビーム電流）を i_b とし、図 5.2 のような回路を考えよう。すると、

$$j\omega C_a V_c + \frac{V_c}{j\omega L_a} + \frac{V_c}{R_a} = i_b + i_g \quad (5.47)$$

これは直ちに (5.39) と同じ形をしていることが分る。今、

$$\omega_a \equiv 1/\sqrt{L_a C_a} \quad (5.48)$$

とし、 $\omega_a C_a = 1/\omega_a L_a$ で両辺を割ると、

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) + \frac{1}{R_a \omega_a C_a} \right] V_c = \omega_a L_a (i_b + i_g) \quad (5.49)$$

となる。右辺の $\omega_a L_a$ は電流が作る磁場の電磁誘導によって電圧を作っていることに相当する。ここで、電圧 V_c をビームにかかる電圧とし、 $\mu = b$ について添字 $\mu = b$ をとると、

$$\omega_a L_a = \frac{1}{\omega_a C_a} = \frac{Z_0}{k_a} |v_a|^2 = \frac{|v_a|^2}{\epsilon \omega_a} \quad (5.50)$$

即ち、

$$C_a = \epsilon / |v_a|^2 \quad (5.51)$$

となる。空洞の蓄積エネルギーは (5.21) と (5.27) から、

$$U = \frac{1}{2} \epsilon |u_a|^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{|V_c|^2}{|v_a|^2}$$

となり (5.51) を使うと、

$$U = \frac{1}{2} C_a |V_c|^2 \quad (5.52)$$

となる。次に、損失エネルギー P_c は (5.35) と (5.37) の時間平均だから (5.35) と (5.37) の $1/2$ となり、それに (5.21) を代入して、

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{2} \int (\vec{J}_{\text{waa}} + \vec{J}_{\text{die1}}) \cdot \vec{E}^* dV \\ &= \frac{\omega U}{Q_c^a} \end{aligned} \quad (5.53)$$

となる。

さらに R_a は (5.49) の左辺第2項と (5.39) のそれとを比べて、

$$R_a = \frac{Q_c^a}{\omega_a C_a} = \frac{|v_a|^2}{\epsilon \omega_a} Q_c^a$$

$$= \frac{Z_0}{k_a} |v_a|^2 Q_c^a \quad (5.54)$$

を得る。これは又 (5.52) と (5.53) を使って ($\omega \equiv \omega_a$)

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{1}{\omega_a C_a} \cdot \frac{\omega U}{P_c} \\ &= \frac{1}{2} \frac{|V_c|^2}{P_c} \end{aligned} \quad (5.55)$$

すると (5.47) は、(5.49) に (5.50)、(5.54) を使って

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c^a} \right] V_c = \frac{R_a}{Q_c} (i_b + i_g) \quad (5.56)$$

となる。

v_a は (5.28) で表わされるように、空洞の形に特有なパラメーターであり、(5.48)、(5.51) で与えられる L_a と C_a はこの v_a によって表わされる。ところが R_a は (5.54) のように空洞壁等による損失に関係した Q -値に比例している。 R_a は図 5.2 のように電流を分流（シャント）しているので、 R_a の2倍によって定義した

$$R_{\text{sh}} = \frac{|V_c|^2}{P_c} \quad (5.57)$$

をシャント抵抗と呼ぶ。これはビームに作る電圧 V_c の自乗に対する損失 P_c の比であり、勿論 V_c はなるべく大きく、 P_c はなるべく小さい方がいいから、加速空洞の性能は R_{sh} が大きい程よいことになる。それを達成するためには、なるべく強い電場がビームの通る所にできるように空洞の形を設計し、かつ壁損失をなるべく小さくすることが重要である。

(5.39) と (5.47) が完全に同じ形になるためには、

$$V_{\text{ab}} = V_{\text{ag}} \quad (5.58)$$

が必要である。これは、 V_g と i_g の定義を適当に変えることによって可能である。このとき (5.56) と (5.42) から

$$\frac{1}{Q_{\text{ext}}} = \frac{1}{Z^0} \frac{R_a}{Q_c^a} \quad (5.59)$$

を得る。ここで結合定数

$$\beta_a = \frac{Q_c^a}{Q_{\text{ext}}} \quad (5.60)$$

を定義すると、

$$\beta_a = \frac{R_a}{Z^0} \quad (5.61)$$

となる。今 $i_b = 0$ のときのインピーダンスは (5.56) で $i_b = 0$ とすると、

$$\frac{V_c}{i_g} = \frac{\beta_a Z^0}{1 + j Q_c^a \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)} \quad (5.62)$$

で与えられ、 $\omega = \omega_a$ のときのインピーダンスは $\beta_a Z^0$ と

なる。従って、 $\beta_a = 1$ のときインピーダンスが Z^0 に整合する。 $\beta_a > 1$ を強結合 $\beta_a < 1$ を弱結合と呼ぶ。 β_a は無負荷 Q - 値 Q_a^0 に比例することに注意しよう。

5.5. Q 値とシャント抵抗の評価

ここで半径 R 長さ L の円筒型空洞の Q - 値やシャント・インピーダンスがどの程度になるか評価してみよう。大体の評価だから (5.33) で H_a は一定としよう。空洞の体積を V とすると (5.33) から $H_a \sim 1/\sqrt{V}$ となる。すると (5.36) から Q - 値は簡単に、

$$\frac{1}{Q_{\text{wall}}^a} \sim \frac{1}{2} \delta \frac{S}{V} = \delta \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R} \right)$$

となる (S は空洞の表面積)。即ち、体積が大きい程体積/面積比率が大きくなるから Q は高くなる。500 MHz を考え、3.3 の $R = 23 \text{ cm}$ を使うことにする。加速空洞の長さは $L = 30 \text{ cm}$ を選ぶ。(もし、 $L > 30 \text{ cm}$ だと、 $L > \lambda/2$ となり、荷電粒子が空洞を通る間に電場が逆転してしまう。) 5.2 の $\delta = 3 \mu\text{m}$ を使うと、

$$Q_{\text{wall}}^a \sim 44,000$$

となる。

次にシャント抵抗を評価してみよう。(5.54) に於てまず $Z_0 = 377 \Omega$ ((3.6)), $k_a = 2\pi/\lambda_a = 2\pi/0.6 \text{ m}$ である。 v_a を評価するには、 E_a が空洞内で一定だとすると (5.18) から $E_a \sim 1/\sqrt{V}$ である。しかし、 z 軸上 (ビーム軸上) に E_a は集中しているから、

$$E_a \sim \frac{2}{\sqrt{V}}$$

としてみよう。ついで粒子が光速、従って (5.26) から再び $k_v = k_a$ とすると (5.28) から ($k_a L = \pi$)

$$v_a \sim -\frac{2}{\sqrt{V}} \int_{-L/2}^{L/2} \cos k_a s \, ds = -\frac{4}{\sqrt{V}} \frac{1}{k_a}$$

となり、

$$R_{\text{sh}} \sim 32 Z_0 / V k_a^3 \cdot Q \sim 9 \text{ M}\Omega$$

を得る。今、 $P_c = 20 \text{ kW}$ の電力を供給すると、(5.57) から

$$|V_c| \sim 0.4 \text{ MV}$$

となる。これは 1. で述べた必要な電圧の 1/4 である。

5.6. 進行波の減衰

進行波の場合には、(5.4) に於て体積積分のかわりに、面積分を使い空洞の場合と同様に、

$$\beta^2 \rightarrow \beta^2 + \frac{j}{Q_n} \beta_0^2 \quad (5.58)$$

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_{n, \text{wall}}} + \frac{1}{Q_{d, n}} \quad (5.59)$$

$$\frac{1}{Q_{d, n}} = \frac{\sigma}{\epsilon \omega} = \tan \delta_d \quad (5.60)$$

$$\frac{1}{Q_{\text{wall}}} = \frac{\delta}{2} \frac{\int [|\vec{H}_{1n}|^2 + |\vec{H}_{2n}|^2] ds}{\int [|\vec{H}_{1n}|^2 + |\vec{H}_{2n}|^2] ds} \quad (5.61)$$

を得る。 β に虚数成分が生じて減衰を表わす訳である。

6. 受動高周波装置の実例

6.1. 伝送線

大電力高周波の伝送に於ては、同軸管よりも導波管がよく使用される。長い距離を電磁波を搬送する場合 (例えば、クライストロンから加速空洞へ) には、その間の損失をなるべく小さくしたい。その損失は (5.61) から分る通り、伝送線切口の導体境界の長さ ℓ を切口面積 A で割ったものに比例する。同軸の場合には 2 つの導体があるので、この比 ℓ/A が大きくなり、損失が増える。そればかりでなく、内軸導体を中空に浮かせておかねばならず、そのためには何か誘電体で支えなければならない。誘電体があると、 ϵ が大きいので特性インピーダンス Z_0 が小さくなり、同軸のインピーダンスが変わってしまう。それを補正することも必要となり構造が複雑化する。又、この誘電体は誘電体損失を引き起こし、5.2 で述べたように誘電体損失は壁損失よりも大きいので、ますますエネルギー効率上不利となる。更にいえば、誘電体に吸収された熱は、一般に誘電体の熱伝達が悪いので冷却が難しく、大電力の場合には熱歪による誘電体の破壊を引き起こす場合もある。以上のどの点をとっても大電力の場合には導波管の方が有利である。

低電力高周波回路の場合には、損失を余り考慮する必要がない。すると、同軸の内部には一定の誘電率をもった誘電体を入れておけるので、構造上も問題がなくなる。その結果、同軸の TEM モードに遮断周波数がないという性質のため、小さな同軸ケーブルを使用することができるので、同軸ケーブルの方が有利となる (500 MHz の場合、導波管がいかに大きくなるかは 3.2 で述べた)。

そこで大電力高周波に対して導波管を使用するとし、その壁損失をなるべく小さくするためには ℓ/A をなるべく小さくした方がよい。しかし、これはまず大きな導波管を使用することになり、値段の上でも構造上もあまり有利なことではない。その上に、余り大きな導波管を使用すると、たとえば、3.2 に於て $b > 60 \text{ cm}$ とすると、TE 0 2 モードの遮断周波数が 500 MHz よりも低くなる。このとき、500 MHz に対し、TE 0 1 モードだけでなく TE 0 2 モードも伝わっていくことになる。すると、2 つのモードをともにうまく加速空洞まで運ばねばならず、それは殆ど不可能に近い (一般には (5.28) の v_{an} はモード n によって異

り, (5.41), (5.42) から分る通り, それぞれインピーダンスが異なることになる)。従って, 高次モードの遮断周波数を 500 MHz より高くなるように設計し, 基本モードしか伝わらないようにすることが必要である。例としてとった $b = 38 \text{ cm}$ はこの点を考慮して選んだものである。

6.2. 変換部のインピーダンス整合

導波管等がそのまま真直に延びていれば, クライストロンから加速空洞に行くまで何の反射もないが, 実際には導波管を曲げたり, 同軸に変換したりする必要がある。それはもはや 3.5 で扱ったような 2次元問題ではないから, 5.3 で扱ったように空洞と考えねばならない。

変換部と導波管の結合を考えると, 変換部から十分遠い所, 実際には基本モード以外の高次モードが十分減衰している所に 5.3 で定義した S_i' をおくことにする。開口部は S_1' と S_2' の 2ヶ所で, 基本波モードのみだからその電流を図 6.1 のように i_1, i_2 とする。特

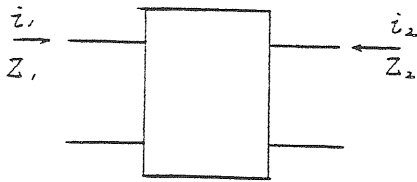


図 6.1 変換部

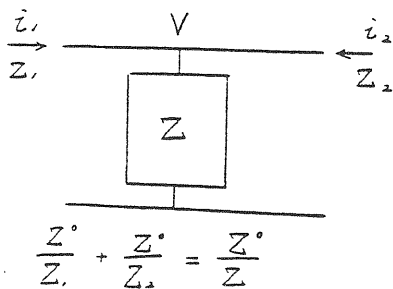


図 6.2 変換部の等価回路

性インピーダンスを同じ $Z_1^0 = Z_2^0$ とし, それを Z^0 と書く。又, 変換部との結合が同じで $v_{a1} = v_{a2}$ の場合を考えると, $V_1 = V_2$ だから, それを V とする。このとき $Z_{11}^0 = Z_{12}^0 = Z_{21}^0 = Z_{22}^0$ となるから Z で代表することにする。すると (5.40) は,

$$V = Z (i_1 + i_2) \quad (6.1)$$

となる。ここで, S_i' 側から見たインピーダンスを Z_i とすると ($i = 1, 2$), (6.1) は

$$\frac{Z^0}{Z_1} + \frac{Z^0}{Z_2} = \left(\frac{i_1}{V} + \frac{i_2}{V} \right) Z^0 = \frac{Z^0}{Z} \quad (6.2)$$

となり, (5.41) から,

$$\frac{Z^0}{Z_1} + \frac{Z^0}{Z_2} = \frac{Q_{\text{ext}}}{Q_c} + j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) Q_{\text{ext}} \quad (6.3)$$

を得る。(6.2) は Z が図 6.2 のように並列に入っていることを表わしている。

今, 開口部 S_2' が遠くで無反射終端に結がっているとしよう。 i_2 の方向が逆向きだから,

$$Z_2 = -Z^0 \quad (6.4)$$

となり, (6.2) は

$$\frac{Z^0}{Z_1} = 1 + \frac{Z^0}{Z} \quad (6.5)$$

となる。 Z が十分大きければ $Z^0/Z \sim 0$ であり, $Z_1 \approx Z_0$ となってこの変換部による反射は小さいことになる。実際, 図 6.2 の等価回路に於て $Z = \infty$ ならば, 何の効果も与えない。

Z が大きいためには, Q_{ext} が小さいこと ($1/Q_{\text{ext}}$ が大きいこと), 即ち, v_{a1}, v_{a2} が大きいことが重要である。このときは ω が ω_a と異っていても, Q_c が小さくとも, (6.3) の右辺は小さくなる。 v_{a1}, v_{a2} が大きいということは, 空洞内の電磁場が導波管のそれと似ていることであり, いいかえると, 変換部に於て, 電磁場分布が余り変らないことに相当する。実際, 電磁力線が変換部に於てもスムーズに書けていくというのは, 進行波が邪魔されずに進んでいけることであり, 従って反射が余り起こらないだろうことは直観的にも理解できるであろう。従って, 変換部はなるべく波を邪魔しないように設計する必要がある。

しかしながら, 変換部では波の形が変わるのだから, $Q_{\text{ext}} = 0$ ($1/Q_{\text{ext}} = \infty$) とすることは原理的に不可能である。 $\omega \neq \omega_a$ の場合には (6.3) の第 2 項は有限の値をもつ。 $\omega \gg \omega_a$ の場合には $Z^0/Z \sim j\omega$ となり, 変換部は電気容量的になる。実際 ω が大きいと電気容量は短絡されてしまう。 $\omega \ll \omega_a$ のときには, 逆にインダクタンス的になる。そのようなときには, $\omega = \omega_a$ の条件に ω_a をもっていく必要がある。いいかえると, 容量的な場合にはインダクタンスを, インダクタンス的な場合には容量をそう入することによって整合をとるようにする。変換部にはポストやアイリス様のものが種々そう入されているのを見かけるのはそのためである。電場の大きい所に導体をそう入すると電気容量を増やし, 磁場の大きい所だとインダクタンスを減らす。反射係数を測定して, インダクタンス的か容量的かを判断し, それに応じてどのようなそう入物をどこに入れるかを決めて整合をとっていく訳である。

その場合でも Q_{ext} はどれだけ広い ω の範囲 (帯域)

で(6.3)の右辺が小さいかを決める。結合が大きい程(Q_{ext} が小さい程) ω の広い範囲で(6.3)の右辺が小さく、より広帯域になる。逆に、 Q_{ext} を小さくして $\omega \cong \omega_a$ でない(6.3)の右辺が小さくないようにすれば、 $\omega \cong \omega_a$ の波しか通さないから、それはろ波器(フィルター)として使えることになる。

次に結合が小さい(Q_{ext} が大きい)ときには、(6.3)に於て実部も問題になってくる。 Q_{ext} が大きくても Q_{ext}/Q_c が小さいためには、 Q_c が大きいくこと、即ち、変換部での損失が少ないことが必要である。変換部に於て複雑な波が立つと、 Q_c をおとしてしまい、整合がとれなくなる。しかも、変換部でエネルギーを失うから、変換部を通る間にエネルギーを失ってしまう。これをそう入損失と呼ぶ。これはエネルギー効率の上から好ましくないことは勿論であるが、大電力の場合には変換部が発熱しその冷却迄が問題になってくる。

6.3. 無反射終端(負荷)

前節に於て既に無反射終端(6.4)を考えたが、実際にはそれは次のようにして可能である。今、空洞に於て一つの開口部のみを考えよう。それは6.2で $Z_2 = \infty$ に相当するから、(6.3)は、

$$\frac{Z^0}{Z_1} = \frac{Q_{ext}}{Q_c} + j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) Q_{ext} \quad (6.6)$$

となる。無反射にするには $Z^0/Z_1 = 1$ 即ち、

$$\frac{Q_{ext}}{Q_c} = 1 \quad (6.7)$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) Q_{ext} = 0 \quad (6.8)$$

が必要である。

もし $\omega = \omega_a$ の場合には、(6.8)は成り立っているから、 $Q_{ext} = Q_c$ であればこれは実現される。しかし、ふつうの導体の空洞の場合、 Q_c が大きく($10^3 \sim 10^4$)その結果(6.8)を近似的にみたすためには $|\omega - \omega_a| \ll \omega_a \cdot 10^{-3}$ となってしまう非常にせまい帯域になってしまう。1%以上の広帯域を実現するためには、 Q_{ext} がもう一桁以上小さくしなければならず、 Q_c も < 100 が必要になる。それを実現するには $\tan \delta_a$ の大きい誘電体を空洞内にみたくしておけばよい。

大電力の場合には、空洞内の物質がエネルギーを吸収するのだから、発熱をとまなう。そこで誘電体として $\tan \delta_a \approx 10^{-1}$ である水を使い、この水を流すことによって自分自身冷却水となる方法が広く使われている。これを水負荷(water Load)と呼んでいる。

6.4. 方向性結合器

今、図3.4で示したようなTE₀₁モードの導波管

が2個、図6.3のように小さな2つの開口部(アイリス)で結合している場合を考えよう。しかもこの2つの開口部間の距離を $\lambda/4$ としよう。今、①の導波管で z 方向に波が進んでいるとする。開口部から少し磁場が泌み出すので、②の導波管に波が入って行き、それは z 方向にも逆方向にも進む。

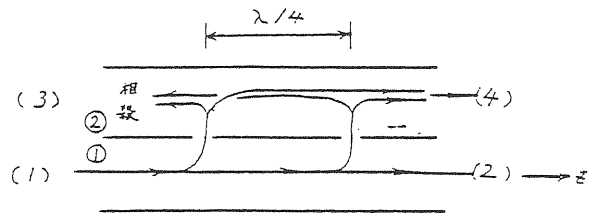


図6.3 方向性結合器

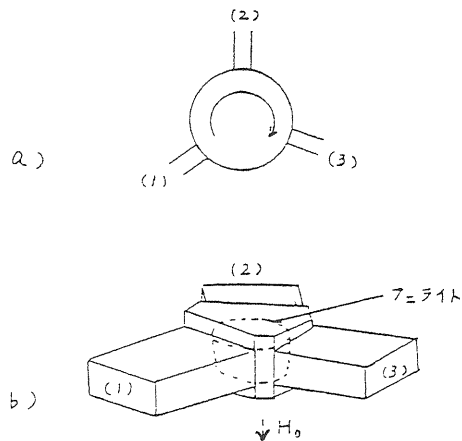


図6.4 サーキュレーター

ところで、②に於て z 方向に進む2つの開口部に発した波は全く同じ距離を走るから、位相が同じで、足しあわさって(4)から出ていく。ところが、第2開口部から出て $-z$ 方向に進む波は、第1開口部のそれよりも $\lambda/2$ だけ長く進んで、 $\lambda/2$ だけ位相が異なり、相殺しあって、(3)からは波は出てこない。

①で $-z$ 方向に進む波に対しては同様の議論で(3)から出て行き(4)からは出てこない。このようにして、進行波と反射波をそれぞれ(4)と(3)とで独立に測定することができる。

6.5. サーキュレーター

サーキュレーターとは図6.4a)のような記号で示され、(1)から入った電磁波は(2)へ、(2)は(3)へ、(3)は(1)へとサークルしていく装置である。ふつうクライストロンからの入力を(1)へ入れ、(2)の側に加速空洞をおき、加速空洞からの反射を(3)へ導いて、(3)に水負荷をつける。こうしておく、クライストロンへの反射がなく、

クライストロンから見たインピーダンスはいつも整合している。同様に空洞側から見ても整合していて、系は安定に動く。そればかりでなく、放電による反射等からクライストロンを保護する目的にも使われる。

(1)から入った波が(3)に行かず、(2)に行くためには、波がその方向へ曲って行けばよい。図 3.4 のような TE₀₁ 波の場合を考えてみよう。上の条件をみたすには、 $y > 0$ の方で位相速度、群速度が速くなり、 $y < 0$ の方で遅いと実現される。それには $y > 0$ で μ が小さく、 $y < 0$ で μ が大きければよい。

このような条件をみたすものとして、磁性体がある。しかし、鉄のような強磁性体はふつう導体であるから、電磁波が中に入っていない。従って、導電率の低いフェライトがよく使われる。図 6.4b) にサーキュレーターの模式図を示す。

今、TE₀₁ 波が図 6.5a) のように z 方向に進んでいると、 $z=0$ での磁場の方向の変化は、図 6.5b) のようになる。即ち、図 6.5c) のように $y = -b/4$ では x に向かって右回りであり、 $y = b/4$ では左回りである。

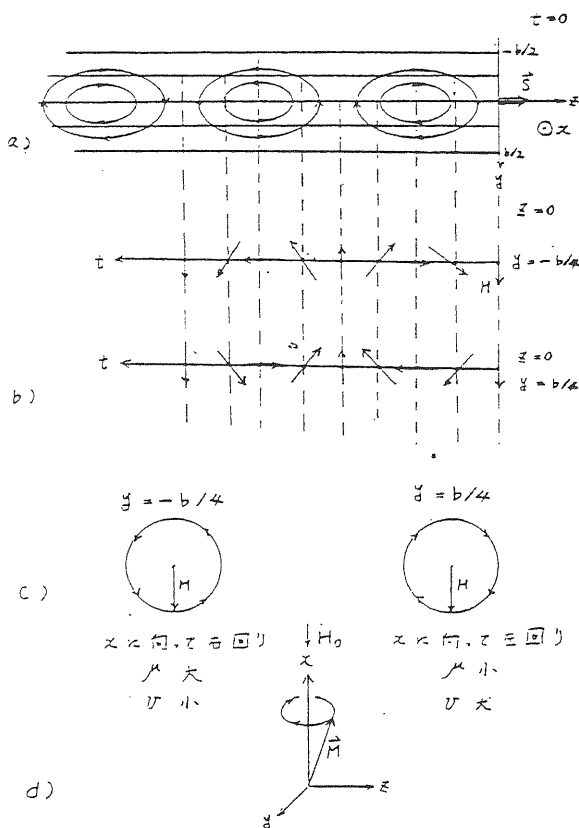


図 6.5 サーキュレーターの原理

一方、磁性体に $-x$ 方向に静磁場 H_0 をかけておくと、磁気モーメントは x 軸のまわりに図 6.5d) のような歳差運動を行う。その方向は x に向かって左方向であり、それは $y = -b/4$ での磁場の回転方向と逆となって、

そこでの μ を大きくする。その結果、波の速度が遅くなる。一方、 $y = b/4$ ではそれは速くなるから、 $-y$ の方向に波は曲って行く訳である。

7. 加速空洞とクライストロンの原理

7.1. 電流のバンチとその周波数成分

加速器やストレージ・リングに於て荷電粒子に高周波電圧をかけておくと、荷電粒子がバンチしてくることは、シンクロトロン、ストレージ・リングの所で教わったであろう。実際、図 7.1a) のように加速電圧が

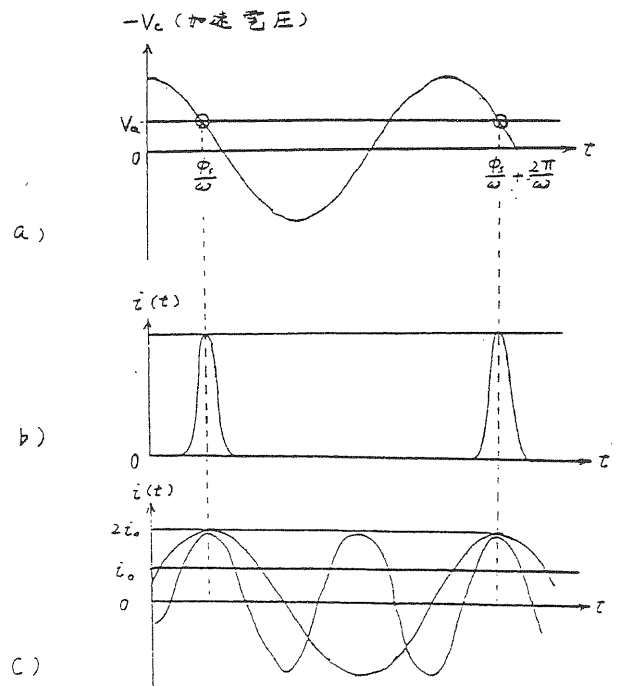


図 7.1 加速される粒子のフーリエ展開

かかっていると、荷電粒子が一周あたりに必要なエネルギーを eV_a として、

$$V_a = |V_c| \cos \phi_s$$

で与えられる位相 ϕ_s のまわりに集まってくる。

バンチとバンチの間の時間を T_b とすると、電流 $i(t)$ は周期 T_b の周期関数であるから、一般に三角関数の重ねあわせとして表現できる。実際、図 7.1b) のような関数は、図 7.1c) のような成分をもっている。すると $i(t)$ は、

$$i(t) = i_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i_b(\omega_n) \cos \omega_n t \quad (7.1)$$

$$\omega_n T_b = 2\pi n \quad (7.2)$$

となる。ガウス分布をしたバンチの場合には、バンチの長さを σ_t として、

$$i_b(\omega_n) = 2i_0 e^{-\omega_n^2 \sigma_t^2 / 2} \quad (7.3)$$

となる。図 7.1 a) のように加速電圧がかかっていると ωT_b は 2π の整数倍であり、

$$i_b(\omega) = 2i_0 e^{-\omega^2 \pi^2 / 2} \quad (7.4)$$

である。バンチが非常にせまく $\omega \sigma_t \ll 1$ (電子ストレージングではそうである) のときには、

$$i_b(\omega) \cong 2i_0 \quad (7.5)$$

であり、後の節で加速空洞について議論する場合にはこれを使うこととする。

クライストロンの場合には直流電流 i_0 を入力空洞に通す。この入力空洞に微小な高周波電場をかけておく。すると最初直流電圧 V_0 によって一定の初速度をもっていた電子は、図 7.2 a) のような電圧を受けると、図

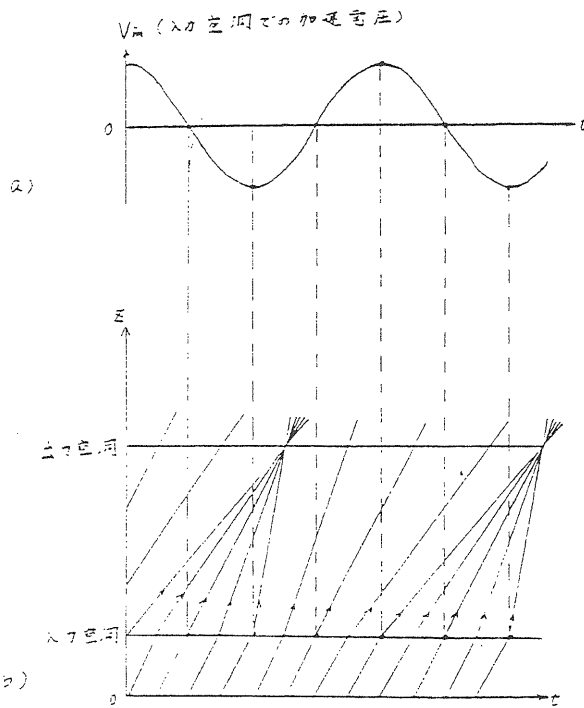


図 7.2 クライストロンでのバンチング

7.2 b) のように入力空洞へ入る時刻に応じて速度を変える。そうした電子をある距離走らせると図のようにバンチしてくる。この最もバンチした所に出力空洞をおいておき、高周波をとり出す訳である。

7.2. 加速空洞とクライストロンの出力空洞

空洞内に周波数 ω 成分が i_b で与えられる電流が流れ、一方で開口部から i_g なる電流が供給されているときの等価回路及び式は 5.4 で議論した。それは、

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_c^a} \right] V_c = \frac{R_a}{Q_c^a} (i_b + i_g) \quad (7.6)$$

で与えられた。今、両辺に $\frac{1}{2} V_c^*$ をかけ、その実部をとり、 R_a / Q_c^a で割ると、

$$\frac{1}{2} \frac{|V_c|^2}{R_a} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i_b V_c^*) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i_g V_c^*) \quad (7.7)$$

左辺は (5.55) によれば空洞損失 P_c に他ならない。右辺第 1 項は、ビームが空洞に与える電力 P_b であり、

$$P_b^{\text{in}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i_b V_c^*) \quad (7.8)$$

一方、第 2 項は、空洞に外から入ってくる電力 P_g で、

$$P_g^{\text{in}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i_g V_c^*) \quad (7.9)$$

すると (7.7) は、

$$P_c = P_b^{\text{in}} + P_g^{\text{in}} \quad (7.10)$$

と書かれ、これは単にエネルギーのバランスを表わしている。

次に、

$$Z = \frac{V_c}{i_g} \quad (7.11)$$

とし、(7.7) の両辺を $P_c = |V_c|^2 / 2R_a$ で割ると、

$$1 = \frac{P_b^{\text{in}}}{P_c} + \operatorname{Re} \left(\frac{R_a}{Z} \right) \quad (7.12)$$

を得る。又、(7.6) を $R_a / Q_c^a V_c$ で割り、その虚部をとると、

$$\frac{Q_c^a}{R_a} \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{i_b}{V_c} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{1}{Z} \right) \quad (7.13)$$

を得る。

まず、加速空洞を考えてみよう。電流は加速されているから、電流と電場の方向は同じである。電圧は、(5.27) のように定義されているから、図 7.3 で分る通り $\operatorname{Re}(i_b V_c^*) < 0$ のとき加速となる。今、電流と逆方向を図 7.4 のように実軸とすると、

$$i_b = -2i_0 \quad (7.14)$$

$$V_c = |V_c| e^{j\phi_s} \quad (7.15)$$

となる。すると (7.8) は、

$$P_b^{\text{in}} = -P_b^{\text{out}} \quad (7.16)$$

$$P_b^{\text{out}} = i_0 |V_c| \cos \phi_s = i_0 V_a \quad (7.17)$$

となり、 P_b^{out} はビームに与える電力を表わす。

Z が実数であるためには、(7.13) に (7.15) を入れ

$$\frac{Q_c^a}{R_a} \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) = \frac{2i_0}{|V_c|} \sin \phi_s \quad (7.18)$$

とならなければならない。図 7.1 a) で分る通りビームは入力から見てリアクティブな成分をもっているのだから、入力側から見たインピーダンスが実数 (抵抗的) であるためには、空洞の ω_a をずらすことによってビームのリアクティブな成分を相殺せねばならない。 $0 < \phi_s < \pi$ だから、 $\sin \phi_s > 0$ であり、従って $\omega / \omega_a > 1$ 即ち角周波数 ω_a を入力周波数より低くする必要がある。しかもこのずらす量は電流 i_0 が大きい程大きくなるので、ビーム電流の変化に従って ω_a を調整しなければ

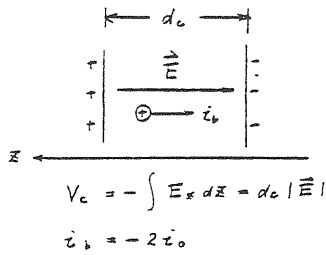


図 7.3 加速しているときの電場と電流

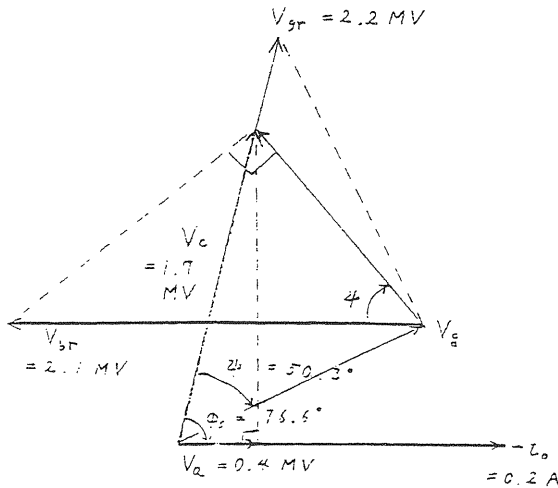


図 7.4 ビーム負荷のあるときの空洞内電圧

ならない。表 1.1 から $\omega = 2\pi \times 500.105 \text{ MHz}$, $Q_c^a = 40,000$, $2R_a = 33 \text{ M}\Omega$, $|V_c| = 1.7 \text{ MV}$, $V_a = 0.4 \text{ MV}$ を使うと、この調整量は $i_0 = 200 \text{ mA}$ に対し 40 kHz となる。

次に、この周波数の調整によって入力インピーダンスが実数になったとする。(5.61) によって入力側の結合定数が与えられているから、(7.12) は (7.16) を使って、

$$\frac{Z}{Z^0} = \frac{\beta_a}{1 + P_b^{\text{out}}/P_c} = \beta_a \frac{P_c}{P_c + P_b^{\text{out}}} \quad (7.19)$$

となる。結合定数は (5.60) で分る通り Q_c^a に比例するから、 P_c に反比例する。今、ビーム電力 P_b^{out} を与えると、ビームがないときに比べ空洞内での消費電力が $(P_c + P_b^{\text{out}})/P_c$ 倍だけ増えることになるから、その分だけ実質的な結合定数 Z/Z_0 が β_a に比べて減ることになる。ビームがあるときにインピーダンス整合がとれるためには、 β_a を 1 でなく、

$$\beta_a^{\text{opt}} = 1 + \frac{P_b^{\text{out}}}{P_c} \quad (7.20)$$

にしておく必要がある。表 1.1 の例では $i_0 = 200 \text{ mA}$ のとき $\beta_a^{\text{opt}} = 1.9$ が必要である。

ところで、 β_a^{opt} は電流が大きくなると上ってくる。

ふつう β_a を速く変化させるのは難かしいので、必要な最大電流に対し最も効率がよくするような β_a に固定しておく。すると、その電流以外の所ではインピーダンス整合がとれなくなり反射を生ずる。それは (7.19) と (7.20) を使って、(3.48) から、

$$P_r = \left| \frac{\beta_a / \beta_a^{\text{opt}} - 1}{\beta_a / \beta_a^{\text{opt}} + 1} \right|^2 P_g \quad (7.21)$$

と表わされる。

次にクライストロンを考えよう。今度はビームが空洞に対して仕事をするから、 P_b^{in} はそのままであるが、 i_g は空洞に入るのではなく空洞から出ていく。そこで、入力インピーダンス Z_{in} よりも出力インピーダンス Z_{out} を使った方が便利である。すると、

$$Z_{\text{out}} = -Z_{\text{in}} \quad (7.22)$$

は、 Z^0 に等しいとき加速空洞に最も効率よく電力がいく。

従って、最も効率のよい結合定数は (7.12), (7.22) から、

$$\beta_a^{\text{opt}} = \frac{P_b^{\text{in}}}{P_c} - 1 \quad (7.23)$$

となる。ふつう、ビームがもちこむ電力 P_b^{in} は空洞損失 P_c よりうんと大きいから $\beta_a^{\text{opt}} \gg 1$ にしておく必要がある。 β_a^{opt} は勿論 P_b^{in} を通してビーム電流に依存する。この場合も最大出力の条件に β_a を固定しておくのがふつうである。

出力 P_g^{out} は、

$$P_g^{\text{out}} = -P_g^{\text{in}} \quad (7.24)$$

だから (7.10) は、

$$P_g^{\text{out}} = P_b^{\text{in}} - P_c \quad (7.25)$$

となる。直流電力は $i_0 V_0$ であるから $i_b // V_c$, $\omega = \omega_a$ のときの効率は、

$$S = \frac{P_g^{\text{out}}}{i_0 V_0} = \left(\frac{|i_b|}{i_0} \right) \left(\frac{|V_c|}{V_0} \right) - \frac{P_c}{i_0 V_0} \quad (7.26)$$

で与えられる。

第 1 項第 1 因子は、どれだけビームがバンチングしているかを表わしており、出力空洞に入るビームのバンチがよい程効率がよいことを表わしている。 $|i_b|$ の最大値は (7.5) で与えられるように $2i_0$ であり、このとき第 1 因子は 1 となる。一方、 $|V_c|/V_0$ についても最大値は 1 である。これは完全にバンチされたビームが出力空洞の出口でとまってしまうという条件である。

実際のクライストロンでは $V_0 \approx 40 \sim 100 \text{ kV}$ であり、電子は非相対論的で、バンチがせまくなり電荷密度が増すと空間電荷のクーロン力によって互に反発し、ある程度以上電流が高くバンチがせまいという条件が作れなくなる。又、出力空洞の中で電子がエネルギー

を失うと、それは直ちに速度の減少をとまなうので、やはり i_b が $2i_0$ に比べ小さくなる。従って、ふつうのクライストロンでは65%の効率がほぼ最大値であるといわれている。

8. 加速空洞の具体例

放射光光源リングの高周波加速空洞は図8.1に示す

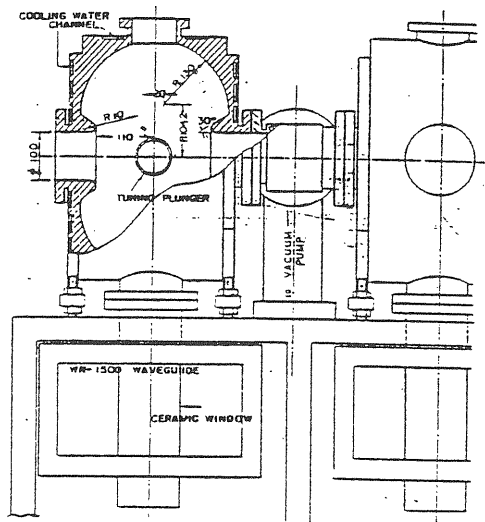


図8.1 放射光光源リング用高周波加速空洞

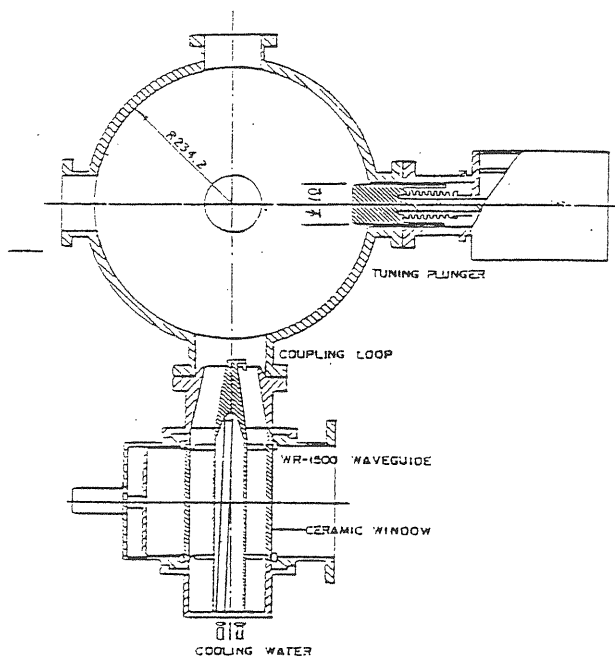


図8.2 加速空洞をビーム方向から見た図

ように、半共軸型の内部構造をもっている単胞（シングル・セル）空洞であり、リングに4個とりつけてある。半共軸型にしたのは、電場が強くなり、かつ5.3で述べた（(5.27)）ビームの通過時間因子の効果を少

くすることによって R_{sh}/Q を大きくすることができるからである。しかし、それにも限界がある。同軸部を余り突っ込むと電気容量が大きくなり、それを相殺して500 MHzの共振周波数を保つためにはインダクタンスを小さくしなければならない（(4.7)）。それは空洞の半径を小さくすることになり、5.4で述べたように体積の面積に対する比が小さくなってQ-値を落とすことになる。すると、 R_{sh} については最適な共軸部分の長さがあり、計算機プログラム SUPERFISH を使って最適値を求めている。

空洞には、ビーム・ラインの2個の開口部以外に、高周波入力用に1個、チューナー用に1個開口部がある。残りの2個は高次モード減衰器用に開けたもので、現在は単にフタをしてある。

チューナーは図にあるように直径7 cmの筒状のもので、空洞内にそう入るとインダクタンスが小さくなり、その結果共振周波数を上げることになる。5 cm 中に入れると1.8 MHz 周波数が上る。この効果は単にチューナーの体積を空洞の体積で割って1/2した0.4 MHzと比べるとずっと大きい。さらに、磁場が外周に集中しているとして評価した値1 MHzより2倍程度大きい。これは、磁束が少なくなっただけでなく、チューナーの為に磁束が乱れてより大きな効果が起きていると思われる。

チューナーには3つの目的がある。1つは製作公差による共振周波数の設計値からのずれの補正。1つは、高周波を入力したとき、内壁の熱損失のため温度が上り、空洞が膨張して周波数が下るのを補正するため。最後に、ビーム負荷のリアクタンス成分を相殺（(7.13)）するために使用される。いずれにしても、 $Z=V_c/i_g$ が実数であるという条件が達成されていればよい訳で、空洞内の電場 V_c と入力 i_g との位相差を検出し、それが0となるようチューナーを動かしている。これは自動帰還回路によって行っている。

チューナーは同軸構造をもっているので、空洞内の電磁波を引きずりこんできて、ベローズ部に電圧を生じる。これはピン・ホールの原因となりうる。これを防止するため、接触部にグラファイトを使った遮蔽を施してある。

高周波入力部は、同軸導波管変換部と結合ループとからなり、円筒型セラミックによって真空封じをしてある。セラミックは5 mm厚の円筒型であり、その両端にメタルを焼結時に拡散してある。そのメタライズした所にキュープロ・ニッケル（非磁性金属）を銀ろうづけした。同軸側および導波管側の短絡の位置は、低電力の測定によって反射が最小になるようにしてある。結合ループの位置も必要な結合定数 $\beta_a=2$ が得ら

れるようにモデル空洞を使った測定で決定した。この結合定数も単に電磁誘導の効果で静的に評価した値よりも約2倍程度大きかった。又、この開口部によってインダクタンスが増え、約1MHz程度共鳴周波数が減るが、それもモデル空洞で測定し、空洞の寸法を補正した。

空洞本体は、無酸素銅（99.5%）を使用し、中央部と2個の側板から成り立っている。各部分はまず内面を旋盤で粗加工し、次に外周にフライス盤で3mm×32mm又は3mm×50mmの溝を切削した。その後、内面の仕上げ加工をダイヤモンド・バイトを用いたNC旋盤で行った。洗浄脱脂の後、820°Cの水素炉で銀ろうづけをした。真空フランジ取り付け部には、ニッケル・メッキをしたステンレス円筒を、この段階で空洞本体に銀ろうづけをした。一方、水冷用溝は3mm厚の銅板を外周部に銀ろうづけをしてフタをした。銀ろうづけの後真空フランジをフランジ取り付け部にアーク溶接し、最後にリーク・テストを行った。

大電力連続波（CW）を使用するので、水冷には特に意を用いた。80ℓ/minの水を流し、0.2°C/kWの水温上昇にしてある。これを空洞全外面に作った3mm厚の薄い溝に流すことによって、水流の速度を上げ空洞の温度上昇を0.5°C/kWに設計した。

実際に作られた空洞の共鳴周波数は設計値と0.4MHzの精度で一致した。設計値との差は銀ろう工程中の熱変形が主たる原因と思われる。一方、Q値は計算値44,000に対し37,000～40,000が得られた。このうち10%程度のQ値の劣化は、開口部、入力用結合ループ、チューナー等によって電磁場が歪んだためと思われる。このようにして、計算値 $R_{sh} = 9.9 M\Omega$ に対し、 $R_{sh} = 8.3 \sim 8.8 M\Omega$ が実際に得られた。

4個の空洞を使うと、4個で $R_{sh} = 33 M\Omega$ であり、(1.2)の $|V_c| = 1.7 MV$ のためには、空洞損失(5.57) $P_c = 88 kW$ となる。即ち、空洞あたり $P_c = 22 kW$ となる。

実際には空洞あたり $P_c = 60 kW$ に耐えうることが確かめられており、空洞あたり $|V_c| = 0.7 MV$ 即ち、2.4MV/mを達成している。 $(R_{sh} = 29 M\Omega/m)$

実際にこれだけの高周波電圧を得るためにはエージングと呼ばれる過程が必要である。まだ、電力を入れてない場合には、100Wの入力でも反射が起こって電力が空洞に入らなくなる。同時に真空度が 10^{-5} Torr程度にまで悪化する。これはおそらくマイクロに見ると突起があり、電場がそこに集中して、電子が銅の表面から電場放射（field emission）されて、それが放電を誘発する。この放電によって空洞の内面が滑らかになり、かつ表面が真真空的に清浄になっていくと考えられ

ている。実際、大電力を長時間入れておくと、電場放射された後加速され、銅に衝突して出すと考えられている制動放射の量がどんどん減ってくる。

真空度は150°C、2日間のベーキングによって、入力のない状態で 1×10^{-9} Torrの真空度が得られている。ここで、各空洞に130ℓ/sのスプッター・イオン・ポンプを使用している。一方、空洞のエージングは、100kW、100μsパルス幅、1msの周期のパルスで行い、2日後にはCW30kWに対し、 $\sim 2 \times 10^{-9}$ Torrの真空度が得られている。

9. クライストロンの具体例

クライストロンは東芝製E 3774、180kW CWウクライストロンについて述べる。クライストロンは図9.1に示すように、まずカソードをフィラメントで1,000

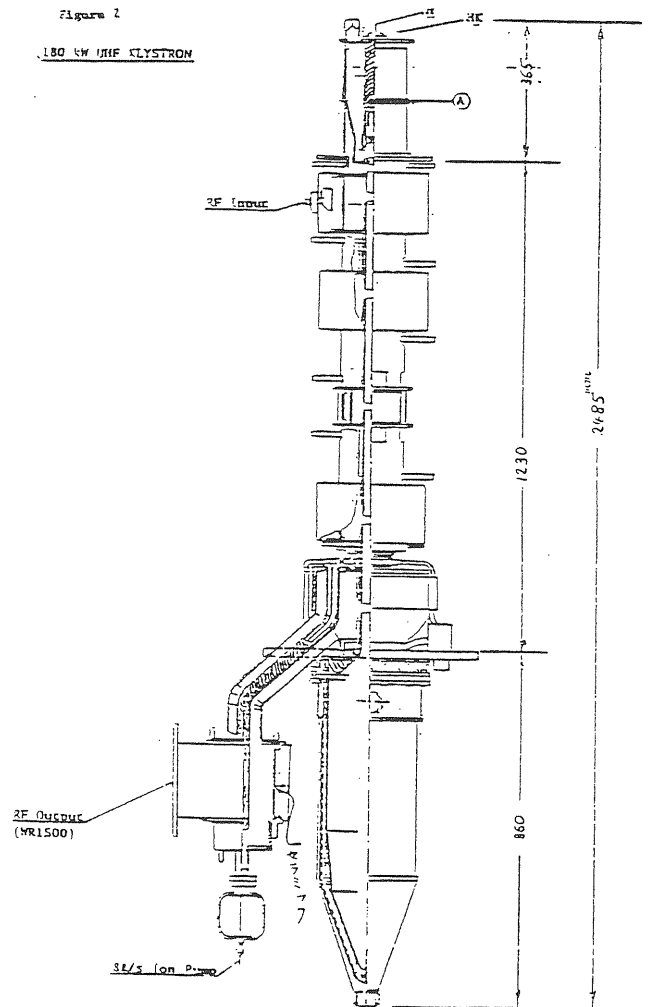


図9.1 クライストロン

°程度に加熱する。カソードには $V_0 = -40 \sim -45 kV$ の直流負電圧がかかっている。加熱されたカソードから出てきた電子は $-10 kV$ がかかっているアノードによって加速され、途中ではソレノイド・コイルによる

進行方向の磁場によって集束されながらコレクターまで達する。コレクターは接地されている。このとき直流電流 I_0 は $I_0 \approx 6.5 \text{ A}$ である。

出力を出していない状態では $I_0 V_0 = 290 \text{ kW}$ がそのままコレクターに飛びこむから、コレクターの水冷はこれを十分冷却しうるようにしてある。

このクライストロンは合計5個の空洞からなり、第1空洞が入力空洞、第5空洞が出力空洞となっている。空洞が3個多いのは、途中の空洞で自分自身が空洞に作る電場によってよりよいバンチを作るためである。特に、第3空洞は2倍高調波の1,000MHzに共鳴があり、バンチにとって重要な2倍高調波成分を増やす目的で使われている。その結果60%程度の効率が得られている。このようなタイプのクライストロンでは効率65%程度が限界だといわれている。

クライストロン本体はほぼ加速空洞と同じように無酸素銅で作られている。出力空洞からはループ結合で電力をとり出し、同軸から導波管の変換部もほとんど加速空洞と同じである。第1空洞から第4空洞までは、空洞は外ついで円筒型セラミックによって真空と隔ててある。エージングについてもほぼ加速空洞と同じと考えてよい。

異なるのは、電子銃を超高真空中に内蔵している点である。カソードの近辺の図を図9.2に示す。カソ-

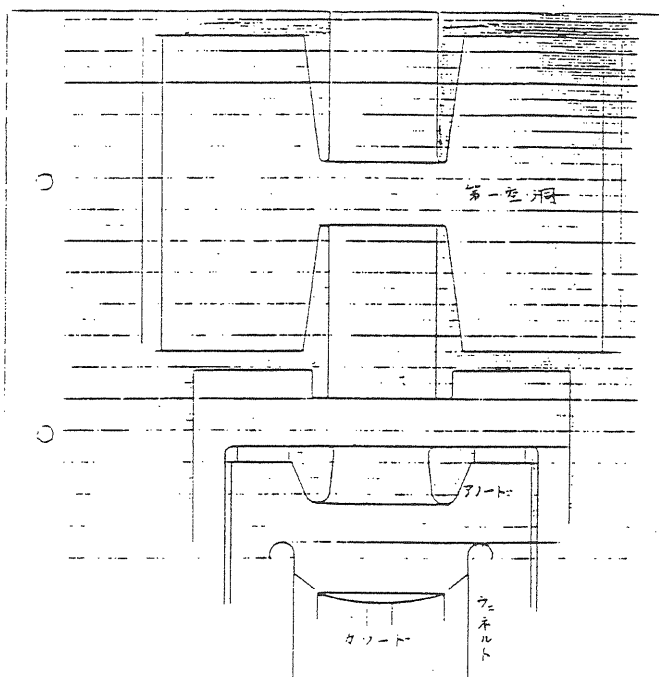


図9.2 カソード付近

ドは多孔質タングステン中にバリウム系複合酸化物を含浸したもので、この含浸物の働きで電子放出を増加させている。カソード・アノード間の電圧を V_{anode}

(V)と書き、

$$I_0 \text{ (A)} = P V_{\text{anode}} \text{ (V)}^{3/2} \times 10^{-6}$$

でパービアンス P を定義するが、ほぼ $P = 1$ の所で使用している。

カソードは1,000°C近くに温度を上げるので、ガス放出をしやすい。従って、特に高い温度でベーキングをしてガス放出が殆どない状態しておく必要がある。ウェネルトはカソードから放射された電子がうまく集束されるよう直流電場の形を整えるのに使用している。ウェネルトの温度が近くにカソードがあるために上昇すると、電子の熱放出を起こす。ウェネルトから電子が出ると、これはうまく集束されないで、アノードや空洞に衝突し、放電の原因になったり、第1空洞のセラミックに銅等をスパッターするような障害が起こる。従って、ウェネルトとカソードの間の熱遮蔽については特に意を用いる必要がある。

10. 超伝導加速空洞

エネルギー効率を上げようとするとき、まず考えられるのは、空洞の壁損失 P_c を少なくすることであり、その点で有望なのは超伝導体である。超伝導加速空洞については、高工研のグループが最高水準にあるので、その仕事を紹介することにする。その前に超伝導体の性質の中で加速空洞の理解に最低限必要な知識をまとめておく。

10.1. 超伝導体の性質の簡単なまとめ

- [1] 超伝導材料にはある臨界温度 T_c があり、温度 T が T_c より低いと超伝導状態となり、高いと常伝導状態となる。Nb に対しては $T_c \approx 9.2 \text{ K}$ である。
- [2] $T < T_c$ に於ても磁場 H がある臨界磁場 $H_c(T)$ より大きいと超伝導状態が崩れ常伝導状態になってしまう。しかも H_c には温度依存性があり、それはほぼ、

$$H_c(T) \approx H_c \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (10.1)$$

で与えられる。ここに、 H_c は $T = 0 \text{ K}$ における臨界磁場であり、Nb の場合、 $H_c = 1980 \text{ Gauss}$ である。超伝導及び常伝導状態の臨界は図10.1のように、 T, H 平面で描かれる。

- [3] 超伝導状態では定常電流（直流電流）は超伝導体の中で何の抵抗も受けない。しかし、これはオームの法則(2.8)に於て伝導率 σ を無限にしたものとは異なる電流である。電場に対してはむしろ空間電流と同じように加速されるがそれとも完全に同一ではない。まず第一に、電流はビオ・サバルの法則によって磁場を誘起するが、それは[2]

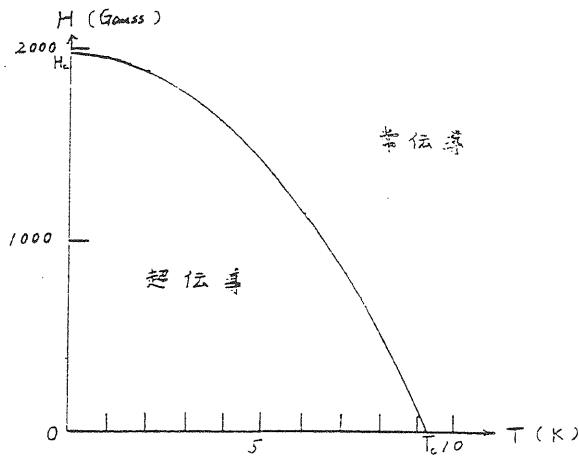


図 10.1 Nbの臨界温度と臨界磁場

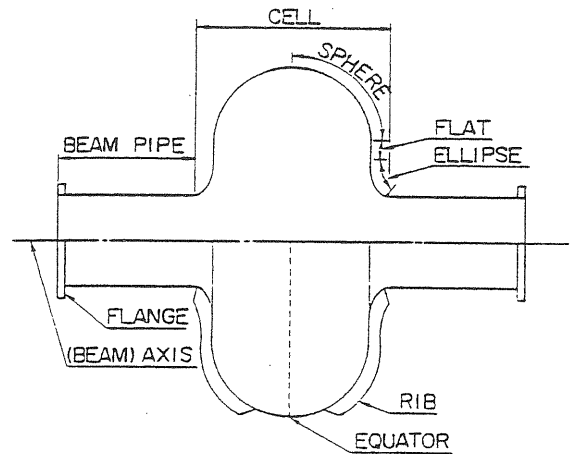


図 10.2 試験用超伝導空洞

によってある最大値 H_c があり、従って流れうる電流の最大値がある。又、磁場は超伝導体の中に入ることができず、その侵入度 λ_L (入りうる深さ penetration depth) は $10^{-2} \mu\text{m}$ の程度である (マイスナー効果)。

- [4] $T > 0$ の状態では、一部の電子は常伝導状態に励起して、超伝導状態でもオームの法則に従う常伝導電流が存在する。直流の場合には、磁場と電流だけでマクスウェルの方程式をみたしうるので、この常伝導電流は何の効果もない。しかし、高周波の場合には磁場の変化が電場を誘起するので、常伝導電流が (5.10) の壁損失を引き起こし、 Q -値は無限とならず有限となる。しかし、電磁場の侵入度は常温の銅の表皮深度と比べ2桁も小さく、かつ常伝導電子の数は圧倒的に小さいので、 Q -値は常伝導体と比べ圧倒的に大きくなる。又、常伝導電子の数も侵入度も温度が上ると増えるので、 Q -値は温度が上る程低くなる。

なお、ここに例に上げた Nb は、純粋元素の中で臨界温度 T_c 、臨界磁場 H_c とともに最も大きい超伝導体である。

10.2. 超伝導加速空洞の具体例

図 10.2 に単胞試験空洞を、図 10.3 に実際に入射蓄積リングで加速に使用した三連空洞を示す。常伝導空洞との比較に於ては 8.でのパラメータ及び表 1.1 を参照すればよい。ただし、実際に加速に使用される電場 E_{acc} は、通過時間因子を含んだものであり、最も電場の強い所の電場 E_p 、最も磁場の強い所の磁場 H_p とはほぼ次の関係がある。

$$\begin{aligned} E_p / E_{acc} &= 1.8 \\ H_p / E_{acc} &= 34 \text{ Gauss} / (\text{MV/m}) \end{aligned} \quad (10.2)$$

超伝導材料としては Nb を使い、その 2.5 mm の厚

さのシートを、絞り加工によって空洞を半割りの形にしたものを 2 個作る。(三連空洞では、入力用開口部の工作のため三つ割りにしている。) 表面処理は電解研磨法 (メッキの逆過程) によって $80 \mu\text{m}$ 程度 Nb の表面を取り去る。その後、2 個の半割りを電子ビーム溶接によって溶接する。溶接後、 900°C 10^{-5} Torr で焼鈍して溶接歪を逃がし、再び電解研磨法によって $30 \mu\text{m}$ 表面を取り去る。最後に、薄い酸化膜を作りフッ酸でそれを取り去る。以上の過程のノウ・ハウが超伝導加速空洞の性能を決定する。

こうしてできた空洞をクライオスタットの中に入れヘリウム温度 4.2 K まで冷却する。試験用としてデータをとった 1.8 K はヘリウムを真空ポンプで引くことによって得られる。入力部等は熱伝導率の低い薄いステンレスに銅メッキをしたもので外界と結がるようにしてある。

図 10.2 に示した単胞試験空洞の場合 1.8 K で $Q_c \cong Q_0 = 4.8 \times 10^{10}$ 、4.2 K で $Q_0 = 4.1 \times 10^9$ が得られている。4.2 K での値でも既に常伝導空洞 (8.を参照) と比べ 10^5 倍であり、高周波的には 5.や 7.の議論に於て $P_c \cong 0$ としてよい。冷凍機にとってはこの P_c は重要で少くとも $Q_c > 1 \times 10^9$ が必要である。

ここで示したように 10.1.[4] の効果によって Q -値は T に依存する。又、電場を上げていっても Q -値は下る。4.2 K では $E_{acc} = 4 \text{ MV/m}$ に対し 10 ~ 20 % 程度 Q -値が下る。その下り方 $\Delta(1/Q_0)$ はほぼ E_p^2 に比例する。

E_p がある値、例えば $E_p \cong 9 \text{ MV/m}$ ($E_{acc} \cong 5.2 \text{ MV/m}$) になると、電場によって放出された電子が増え始め、ビーム負荷 P_b に相当するものが現われてきて、それが見かけ上 Q 値を劣化させる。そのとき $\Delta(1/Q_0)$ は E_p の指数関数となる。これが主に効いてき始める電場をビーム負荷閾値という。

さらに E_{acc} を上げていくと、急に空洞に入力できなくなる。自励振（空洞に電力を入れ、それを空洞の他の開口部からとり出して、正帰還回路を作る）の場合には周波数もずれる。このようなことが起こるのは、局所的に不純物や溶接箇所等、磁場の集中する所ができ、局所的に温度が上昇して、臨界磁場を超えてしまうためであると考えられている。局所的にでも常伝導状態になってしまうと、一気に Q 値が下り、温度上昇を起こしてもはや超伝導状態ではなくなってしまう。上記の例では 4.2 K の場合 $E_{acc} = 6.5 \text{ MV/m}$ が、1.8 K の場合 $E_{acc} = 7 \text{ MV/m}$ がこの意味での最大値であった。 $E_{acc} = 7 \text{ MV/m}$ でも $H = 238 \text{ Gauss}$ であり、ふつうの意味での臨界磁場（図 10.1）よりかなり小さい。

以上の例は世界最高水準の例であり、表面処理や加工工程、設計等が拙いと、ビーム負荷閾値がうんと低くなる。さらに、放出された電子が 2 次電子を放出し、それが又、高周波電場によって加速され、カタストロフ的に放電を引き起こすマルチパッキング (multipacting) という現象がある。これが、 E_{acc} の最大値を決めてしまう場合も多い。

実際のビームの加速に於ては、 $P_c \cong 0$ 、 $Q_c^a \cong \infty$ の効果を特に留意せねばならない。まず (7.18) については R_a / Q_c^a が (5.54) のように Q_c^a によらず空洞の形状にのみ依存する量だから、空洞の共振周波数の調整は常伝導空洞と同程度である。その調整は、空洞が 2.5 mm 程度の薄さなので、空洞の弾性変形を利用して行っている。

次に、結合定数について考えよう。 β_a は (5.60) で分る通り Q_c^a に依存するので、ここの議論で使うのには適切な量ではない。 Q_{ext} の方が、(5.42) で分る通り空洞及び結合部の構造にのみ依存するので便利である。さらに、ビーム負荷 Q 値として、

$$Q_b = \frac{\omega U}{P_b^{out}} \quad (10.3)$$

を定義すると、(7.20) は、(5.53)、(5.60) を使って、

$$\frac{Q_c^a}{Q_{ext}^{opt}} = 1 + \frac{Q_c^a}{Q_b} \quad (10.4)$$

と表わされる。ここに、 Q_{ext}^{opt} はインピーダンス整合のとれる Q_{ext} である。 $Q_c^a \gg Q_b$ だから、

$$Q_{ext}^{opt} = Q_b \quad (10.5)$$

であればよい。ビーム負荷 P_b^{out} は常伝導空洞の P_c と同程度だから、 Q_b もその Q 値と同程度であり、従って、 Q_{ext}^{opt} も $\sim 10^5$ 程度となる。ただし、ビームのない状態では $\beta_a = Q^a / Q_{ext}^{opt} = 10^9 / 10^5 = 10^4$ だから殆ど全反射である。

入射蓄積リングに使用されている超伝導加速空洞

(図 10.3) では、ビームのない状態で少くとも $E_{acc} =$

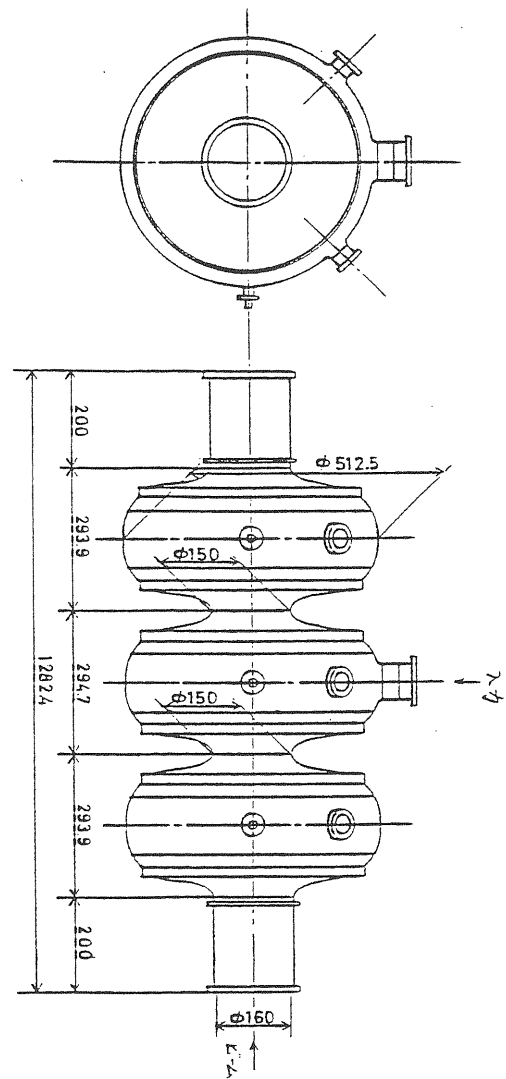


図 10.3 超伝導加速空洞

5.5 MV/m が得られている。ビームのある状態で $E_{acc} = 4.3 \text{ MV/m}$ が得られ、常伝導加速空洞と併用して 0.4 mA のビームを 6.5 GeV に迄加速することに成功した。ビームのある状態での今迄の世界記録 $E_{acc} \cong 2.9 \text{ MV/m}$ に比べると格段の性能である。

11. 結 語

ここで述べた以外にも種々の加速方法があり、この講義ではその一端に触れたに過ぎない。最後に、近い将来かなりの可能性をもって実現性のある高周波加速装置について簡単に触れて終ることにしたい。

クライストロンの所で、パンチが短くなる程、効率が上がるということを述べた。それを入力空洞やその他の空洞で行うのには限界があることも述べた。更に、

