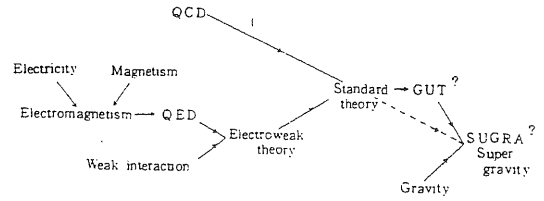


我々の世界は、本来多次元であったのであるが、それが4次元と余分の次元とに分れたとすることによって、重力と他の力との統一理論をつくることできるという相当に浮世離れた考え方も、実際の素粒子現象に根拠をおく理論の上に立脚していることを説明し、この統一理論に関する最近の発展について解説する。



1. 素粒子論の現状

1-1. Quantum chromodynamics (QCD)と Electroweak theory の確立

Support for QCD

- Deep inelastic lepton-nucleon scatterings
Bjorken scaling and its violation
Needs for asymptotically free theory
- e^+e^- annihilations
 $2 \text{ jets} \rightarrow q \bar{q}$
 $3 \text{ jets} \rightarrow q \bar{q} G$
- Mass spectrum of hadrons in lattics QCD
- Confinement mechanism

Support for electroweak theory

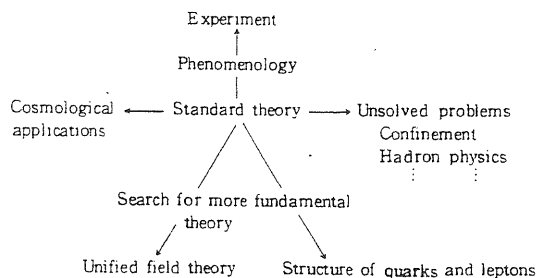
- Neutral current processes
 $\nu e \rightarrow \nu e, \nu N \rightarrow \nu X$
polarized $eN \rightarrow eX$
 $e^+e^- \rightarrow \ell^+\ell^-, e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$
- Observation of W and Z

1-2. Status of standard theory

Standard theory in the present energy region.

QCD \oplus Electroweak theory

$$= SU(3) \times SU(2) \times U(1) \text{ gauge theory}$$



1-3. Trends in unification

Standard theory の確立は、諸力の統一への気運をうながし、弱、電磁、強、重力の四つの相互作用を一つの原理から導くという希望を多くの人々が抱いている。

$N = 8, D = 4$ SUGRA required

May be obtained from $N = 1, D = 11$ SUGRA by dimensional reduction.

N : No. of super charges

D : Space-time dimension

$$(D = 11) \rightarrow (D = 4) \oplus (D = 7)$$

Extra dimensions

responsible for symmetries

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

高次元理論から出発することによって、4次元のあらゆる理論が得られると期待される。

$N = 1, D = 11$ SUGRA は、統一理論の要件を備えているが、これを現実の素粒子論とするには、フェルミ粒子の扱いに関していくつかの難点がある。

しかし、高次元理論から出発して、重力理論と標準理論を統一しようという考えは魅力的であり、この方向での研究が近年比較的活発に進められている。

2. Kaluza-Klein theory

重力場と電磁場の統一理論をつくらうという考えは、1918年の Weyl の理論までさかのぼると思われるが、この直後の1921年に Kaluza は5次元時空を考えることによってこの二つを統一できる論文を発表している。この考えは、1926年 Klein によって変分原理を用いて、より美しい形で定式化された。

電磁場理論

Maxwell 理論によると電場と磁場は不可分のものであって、その振舞いは Maxwell eq. によって支配される。

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{E} = F^{i0} = -\nabla V - \dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{H} = \epsilon_{ijk} F^{jk} = \nabla \times \mathbf{A} \end{array} \right)$$

これは、重力のない flat space での式で、重力がある場合は、微分 ∂^μ を covariant derivative ∇^μ で置きかえる必要がある。

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu$$

Maxwell eq. は gauge 不変性を持つ。即ち、gauge

変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

の下で不変である。

重力理論

重力の存在は時空の性質に影響を与える。従って、重力の理論は時空の幾何学と考えることができる。時空の幾何学をきめるのは metric である。時空の 2 点間の微小距離は、metric tensor $g_{\mu\nu}$ によって

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と表すことができる。直交座標系では、重力がなければ $g_{\mu\nu}$ は定数であり、重力があると $g_{\mu\nu}$ は x^μ に依存する。従って $g_{\mu\nu}(x)$ は重力の影響を表す量であり、重力ポテンシャルとも呼ばれる。 $g_{\mu\nu}$ は index μ, ν について対称であり、独立成分は 10 個である。

$$(g_{\mu\nu}) = \left(\begin{array}{c|c} \text{10} & \\ \hline & \text{6} \end{array} \right)$$

重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ は、Einstein eq. によって支配される。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

$R_{\mu\nu}$ = Ricci tensor ($g_{\mu\nu}$ から一定の規則でつくられる)

$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ = matter 電磁場の

energy - mom. tensor

電磁場と重力場を統一するには、次の諸要求を満す必要がある。

1. $g_{\mu\nu}$ と A_μ をまとめて、ひとつのものとして扱う。
2. Maxwell eq. と Einstein eq. をまとめて、ひとつの式として表す。
3. Maxwell eq. の gauge 不変性を統一の見地から見直す。

これを達成する一つの方法として Kaluza が提案したのは、時空の次元を一つ増して 5 次元とすることである。即ち、5 次元世界の重力ポテンシャル \bar{g}_{MN} ($M, N = 1, 2, 3, 4, 5$) を考え、これが $g_{\mu\nu}$, A_μ を含むとし、 \bar{g}_{MN} に対する 5 次元の Einstein eq. が 4 次元で Maxwell eq. と Einstein eq. になるとするのである。

\bar{g}_{MN} も M, N について対称だから、独立成分の数は 15 個である。

$$(\bar{g}_{MN}) = \left(\begin{array}{c|c} \text{10} & \text{4} \\ \hline & \text{1} \end{array} \right)$$

この 15 成分のうち $\bar{g}_{55} = 1$ ときめると、あと 14 成分のみが独立である。この 14 成分が、 $g_{\mu\nu}$ と A_μ に対応させられるのではなからうか。

\bar{g}_{MN} から 5 次元の Ricci tensor \bar{R}_{MN} をつくって、5 次元の Einstein eq. を書き下すことができる。

$$\bar{R}_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} \bar{R} = \bar{\kappa} \bar{T}_{MN}$$

これを、4 次元部分とその他の部分に分解するとうまく Maxwell eq. と Einstein eq. が得られるのではないだろうか、

それには、次の関係を仮定すれば良いことが知られている。

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu \\ \bar{g}_{\mu 5} &= A_\mu \end{aligned} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

但し、 \bar{g}_{MN} は x^μ のみに依存し、 x^5 に依存しないと仮定する必要がある。このとき

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \quad (j_\nu = \bar{\kappa} \bar{T}_{\nu 5})$$

が得られる。

Maxwell eq. の gauge 不変性は、5 次元の一般座標変換に対する 5 次元 Einstein eq. の不変性に対応している。一般座標変換のうち、第 5 番目の次元のみ変換させる微小変換を考えてみよう。

$$x^M \rightarrow x'^M \quad \begin{cases} x^\mu = x'^\mu \\ x^5 = x'^5 + \chi(x') \end{cases}$$

これに対して、metric tensor は

$$\bar{g}'_{\mu 5} = \bar{g}_{MN} \frac{\partial x^M}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^N}{\partial x'^5} = \bar{g}_{\mu 5} + \bar{g}_{55} \partial_\mu \chi$$

$$\therefore A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi$$

これは gauge 変換であり、この下での Maxwell eq. の不変性は 5 次元 Einstein eq. の一般座標変換の下での不変性により保証されている。

3. Recent developments

Kaluza - Klein 理論により、重力場と電磁場は、5 次元世界で形式的に美しく統一されていることがわかった。これをより現実的な理論として受入れるには次のような疑問に答えねばならないだろう。

- a. 5 次元目が我々に知覚されないのはなぜか。

- b. $\bar{g}_{55} = 1$ という仮定は必要か。
- c. \bar{g}_{MN} が x^5 によらないという仮定は必要か。
- d. この理論は量子化できるか。
- e. 物質場 (fermion) はどうやって導入するのか。
- f. 電磁場だけでなく, standard theory に出てくる全ての gauge 場を重力場と統一するにはどうしたらよいか。

最近10年の間に, これらの問題への理解はより深まってきた。以下の項目でその説明をするが, 内容の詳細は, talk の際に述べることにする。

3.1 Nonabelian gauge fields への拡張

問 f. への解答は, すでに1975年頃に見出されていて, 統一する次元を5次元でなく多次元にすれば良いことがわかっている。このとき, 次元数とgauge 場の成分の数とは一定の関係がある。

3.2 Spontaneous compactification

問 a. への一つの解答を与えるのが spontaneous compactification のアイデアである。

多次元世界が, dynamical な原因で自発的に4次元と余分の次元に分れ, 余分な方の空間は compact (閉領域) になるとする。余分な空間が知覚できないのは, その空間が微小なせいだと考える。実際, 理論に現れる定数は重力定数のみだからその空間の半径 r は, $r \sim \sqrt{\kappa} = 1.6 \times 10^{-33} \text{cm}$ (Planck length) となり小さい。

3.3 Excited modes

問 b. の仮定は必ずしも必要ではない。 $g_{55} = \phi$ なる余分な scalar 場があってもよい。これは Higgs 場と考えることができる。

問 c. の仮定もなくても良い。spontaneous compactification によって余分の空間が compact になると, その中での場の spectrum は discrete となり, その空間の対称性に応じて mode 展開ができる。これによって無数の excited modes が得られる。しかし, その mass は,

$$M \sim 1/r = 1/\sqrt{\kappa} = 1.2 \times 10^{19} \text{GeV} (2 \times 10^{-5} \text{gr})$$

(Planck mass)

となり, 我々の観測にはかからない。

3.4 Matter fields

Kaluza-Klein 理論は, gauge 場と重力場の統一の原理を与えてくれるが, matter fields については何も principle を与えてくれない。

Supersymmetry に従えば boson に伴われて fermi-

on が導入されるので, matter field が gauge 場のお伴として自然に入ってくる。この点で SUGRA は魅力的であるが, 今のところ chiral fermion (右巻きと左巻きが別々に導入されねばならない) がうまくつくれないという難点がある。

Kaluza-Klein 理論では, fermion を導入すると一般にはその mass が Planck mass のオーダーになるという困難がありこれを除くのが難しい。

4. Kaluza-Klein 理論の検証

Kaluza-Klein 理論は, 高次元時空での Planck mass 程度 (10^{19}GeV) のエネルギースケールでの統一理論である。従って, 10^{19}GeV 程度のエネルギーの実験をしないと検証できないだろう。実際 excited mode を発生するのは良い検証であるが, それには 10^{19}GeV 程度のエネルギーが必要である。従って, TRI STAN や Phase II とは無縁の話である。

10^{19}GeV のエネルギーを出せる加速器として, この世の中で知られているものは, 今のところ early universe しかない, 多分 early universe で多次元であった頃の残存物を何か観測する方法を見出すことができれば, Kaluza-Klein 理論をテストすることができるかも知れない。