

1. 磁場中荷電粒子の運動

この章の目的は、磁場中の荷電粒子が行なう運動を記述する運動方程式を導くことである。

1.1 運動を記述する座標系を扱い、座標系の微分関係を与えるフルネ・セレの公式を導く。

1.2 座標原点としての平衡軌道の存在がどの位確実なものであるかを考察する。

1.3 一般の粒子の運動を厳密な運動方程式に表す。

1.4 厳密な運動方程式に近似を導入し、次の節の磁場展開の導入に備える。

1.5 面対称性のある磁場の展開形を与え、運動方程式に代入。ベータトロン振動の方程式を導く。

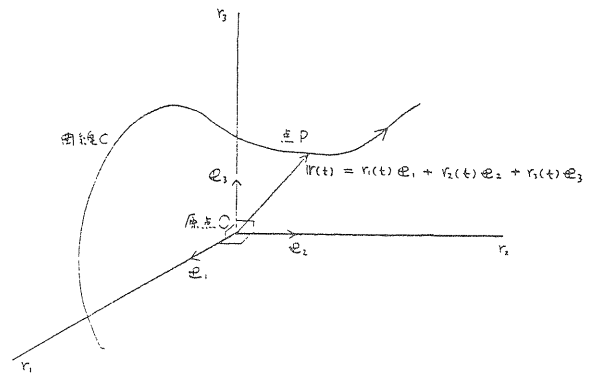


図1 曲線のパラメタ表示の例 (直角座標と時間パラメター t による表示)

1.1 曲線の幾何学—フルネ・セレの公式—

加速器内の荷電粒子に限らず、三次元空間の中で動き回る点Pの軌跡は曲線を描く。このような曲線Cを表わす便利なやり方は、図1に示すように、動き回る点の位置をパラメタ (たとえば時間 t) と座標 (たとえば直角座標) を使って表示するものである。これを曲線のパラメタ表示と言う。

$$\text{曲線C: } \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = r_1(t)\mathbf{e}_1 + r_2(t)\mathbf{e}_2 + r_3(t)\mathbf{e}_3 \quad (1.1)$$

以下の議論ではこの曲線が適当になめらか (適当に微分可能) であるとしよう。パラメタ区間 a から t に対応する曲線の弧長 s(t) は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)} dt \\ &= \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr_3}{dt}\right)^2} dt \end{aligned} \quad (1.2)$$

ここで上付ドット・は時間パラメタ t による微分を示す。

さてここで曲線を表示するパラメタを時間 t から曲線の弧長 s に置換えてみよう。(1.2)式を逆に解けば弧長 s の関数として時間 t(s) が表わせる。そこで $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$ によってパラメタが置換されたことになる。この s による微分をダッシュ' で現わすことにすれば、

$$\mathbf{r}' = \dot{\mathbf{r}} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}} \quad (\text{中付ドット・は内積を示す。}) \quad (1.3)$$

したがって

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}} \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}}} = 1 \quad (1.4)$$

この \mathbf{r}' は単位接線ベクトルと呼ばれ以下では \mathbf{e}_s で表わすことにする。

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{r}' \quad (1.5)$$

さらに (1.4) 式を s で微分すれば

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 0 \quad (1.6)$$

よって $\mathbf{r}'' = 0$ を仮定すれば*)、 \mathbf{r}'' は接線ベクトル \mathbf{e}_s に垂直なベクトルであることを知る。

*脚注

この仮定 $\mathbf{r}'' = 0$ は、現実の円形加速器における粒子軌道を考える時、常に成立している訳ではない。いわゆる直線部と呼ばれる偏向磁場の無い領域では、全区間にわたって $\mathbf{r}'' \neq 0$ である。このような場合は単位主法線ベクトル \mathbf{e}_x さらに \mathbf{e}_x を用いて定義される単位従法線ベクトル \mathbf{e}_y の方向に任意性が生じる。この \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y の方向に生じる任意性を別の表現で与えれば、振率 τ の任意性とも言うことができる。一般的にこの任意性を解消する処方せんを筆者は寡聞にして知らない。しかし軌道が常に一平面上に存在する時 (例外もあるが多くの円形加速器のデザイン軌道はこうなっている。) には、主法線ベクトル \mathbf{e}_x の向きは接線ベクトル \mathbf{e}_s に直交しかつこの軌道平面に乘るものと定義するのが適切である。従ってこの軌道の振率 τ は至る所でゼロである。

閉曲線の中で最大磁束を開いた逆に周長が等しい閉曲線の中で最大磁束を囲うものは特定の運動量を持った荷電粒子の平衡軌道であることを示そう。閉曲線 C_1 と等周な閉曲線を C_2 で表わし、両者が囲う磁束の差 $\Delta\Phi$ を計算する。図3のように、 C_2 上の点 \mathbf{r}_2 を C_1 上の点 \mathbf{r}_1 のフルネ標構を使って表現しよう。

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s) + \delta(s) = \mathbf{r}_1(s) + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (1.33)$$

ここで変分 δ は、 C_2 の周長が C_1 の周長と等しくなるようにとらなければならない。まずこの等周条件を数式で表現しておく。 C_1 、 C_2 の周長を各々 c_1 、 c_2 と書けば、(1.2) 式を参照するまでもなく

$$c_1 = c_2 = \int_0^{c_1} \sqrt{\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_2'} ds \quad (1.34)$$

ここで被積分関数に含まれる \mathbf{r}_2' を、フルネ・セレの公式 (1.21) を使って展開する。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2' &= \mathbf{r}_1' + (x\mathbf{e}_x)' + (y\mathbf{e}_y)' \\ &= (x' + \kappa y)\mathbf{e}_x + (-\tau x + y')\mathbf{e}_y + (1 + \kappa x)\mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (1.35)$$

この展開形を (1.34) 式に代入し、 x 、 y の二次以上を落す。

$$c_1 = \int_0^{c_1} (1 + \kappa x) ds = c_1 + \int_0^{c_1} \delta \cdot \mathbf{e}_x \kappa ds \quad (1.36)$$

これが閉曲線 C_1 に対する変分閉曲線 C_2 の等周条件である。

さて閉曲線 C_1 と C_2 によって囲まれる磁束は、 C_1 と C_2 によって囲まれる面積素片が $(\mathbf{e}_s \times \delta) ds$ と書けることを使い次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \int_0^{c_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{e}_s \times \delta) ds \\ &= \int_0^{c_1} \delta \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_s) ds \end{aligned} \quad (1.37)$$

この式の変形中よく知られたベクトル解析の公式を使った。

最大磁束囲い込み条件は (1.37) 式を使って $\Delta\Phi = 0$ と表現できる。

さて等周条件 (1.36) 式と最大磁束条件 (1.37) 式の被積分関数に注目すれば、両者とも任意の変分値と特定の関数、すなわち $\mathbf{e}_x \kappa$ または $(\mathbf{B} \times \mathbf{e}_s)$ 、との内積である。

そこで等周と最大磁束の2条件が同時に成り立つには、二つの関数の間に次の線型関係が成立していることが必要かつ充分な条件である。

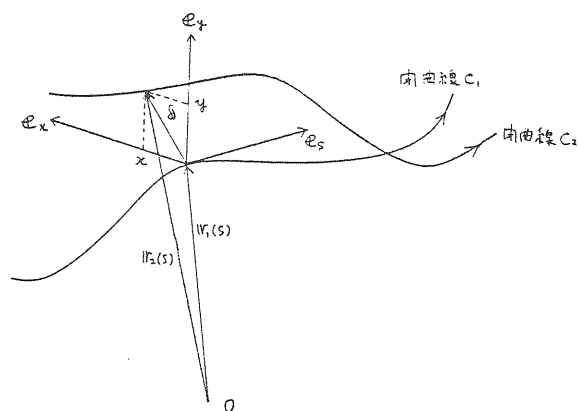


図3 曲線 C_1 上のフルネ標構を使った曲線 C_2 の表現

$$\kappa \mathbf{e}_x = \mu (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_s) \quad (1.38)^*$$

ここで定数 μ を e/p と置換えれば、(1.38) 式は粒子軌道の式 (1.32) と同じである。これによって等周閉曲線の中で磁束を最大に囲う閉曲線は、特定運動粒子の平衡軌道であることが示された。磁束を最大に囲う閉曲線の存在は、磁場が局在さえしていれば、明らかであるから平衡軌道の存在もまたその範囲で保証される。もちろん無限に広がる一様匀配の磁場などでは、磁束を最大に囲う閉曲線は存在しないので、平衡軌道も存在しない。

*脚注

これはいわゆる変分法における等周問題の解法を使用してより簡潔に導くことができる。

すなわち磁束を与える積分

$$\Phi = \int_0^{c_2} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{e}_s \times \mathbf{r}_2) ds = \int_0^{c_2} \mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_s) ds \quad (1.39)$$

を極大にする $\mathbf{r}_2(s)$ を次の等周条件下で求める。

$$c_1 = \int_0^{c_2} \sqrt{\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_2'} ds \quad (1.40)$$

ここではフルネ標構 \mathbf{e}_s や弧長パラメータ s は曲線 $\mathbf{r}_2(s)$ に属するものである。

一般的な処方に従って、次のように関数 f を作り

$$f(\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2', \mu) = \mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_s) - \frac{1}{\mu} \sqrt{\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_2'} \quad (1.41)$$

に関するオイラー方程式

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_2} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_2'} \right) = 0 \quad (1.42)$$

を解けば,条件を満たす $\mathbf{r}_2(s)$ が決まる。

すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_2} = \mathbf{B} \times \mathbf{e}_s \quad (1.43)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_2'} \right) = - \frac{1}{\mu} \mathbf{r}_2'' = \frac{1}{\mu} \kappa \mathbf{e}_x \quad (1.44)$$

(1.43), (1.44) を (1.42) 式に代入すれば再び (1.38) 式を得る。

現実の加速器では当然磁場は局在しており,平衡軌道は,必ず存在している。しかもこれは全ての運動量の粒子について言えることであり,運動量に応じて無数の平衡軌道が存在する。だがこれに安心して,加速器を下手くそに製作してもかまわないと言う訳ではない。平衡軌道は存在するが,粒子がそこを通る時に,真空容器や磁石が行く手をはばんでいては困るからである。

1.3 平衡軌道からはずれた粒子の運動

さて平衡軌道の存在は保証されたが,現実の円型加速器の中を回るビームには色々な原因によって生じた広がりが有り,厳密に平衡軌道上を運行する粒子は1つも無いと言っても過言ではない。ビームに広がりをもたらす原因として,陽子ビームでは,そもその出発点イオン源におけるプラズマの体積,空間電荷効果による反発力,途中のビーム輸送系における各種誤差また円型加速器中での残留ガスとの散乱等が考えられる。電子・陽電子貯蔵型加速器では,シンクロトロン放射とよぶ光量子放出過程ともなう減速と,高周波加速空洞による再加速のプロセスの中で固有のビームの広がりが生じる仕組がある。

平衡軌道からはずれた粒子の運動を記述するには,平衡軌道上のフルネ標構を用いるのが便利である。ここでは平衡軌道が一平面上にとどまる場合に限定して考えよう。もちろん平衡をはずれた粒子の運動はこの平面にとどまる必要はない。

振率 κ がゼロのフルネ・セレの公式を書いておこう。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_s = \mathbf{r}_1' & (1.45 a) \\ \mathbf{e}'_x = \kappa \mathbf{e}_s & (1.45 b) \\ \mathbf{e}'_y = 0 & (1.45 c) \\ \mathbf{e}'_s = -\kappa \mathbf{e}_x & (1.45 d) \end{cases}$$

運動方程式は (1.23) から出発する。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (1.46)$$

運動する粒子の位置 \mathbf{r} から平衡軌道へ下した垂直の足を \mathbf{r}_1 で表し, \mathbf{r}_1 上のフルネ標構で \mathbf{r} を表現する。(図4)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \delta = \mathbf{r}_1 + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (1.47)$$

運動方程式 (1.46) の独立変数を時間 t から平衡軌道に沿った距離 s に変換し,フルネ・セレの公式 (1.45) を使えば

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' \frac{ds}{dt} = \{ \mathbf{r}_1' + (x\mathbf{e}_x)' + (y\mathbf{e}_y)' \} \dot{s} \\ &= \{ x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + (1 + \kappa x)\mathbf{e}_s \} \dot{s} \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$= [(x'\mathbf{e}_x)'' + (y'\mathbf{e}_y)'' + \{ (1 + \kappa x)\mathbf{e}_s \}'] \dot{s}^2$$

$$+ \{ x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + (1 + \kappa x)\mathbf{e}_s \} \ddot{s}$$

$$= [\{ x'' - \kappa(1 + \kappa x) \} \dot{s}^2 + x'\ddot{s}] \mathbf{e}_x$$

$$+ [y'' \dot{s}^2 + y'\ddot{s}] \mathbf{e}_y$$

$$+ [(2\kappa x' + \kappa'x) \dot{s}^2 + (1 + \kappa x)\ddot{s}] \mathbf{e}_s \quad (1.49)$$

ここで

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}, \quad \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (1.50)$$

磁場 \mathbf{B} も成分に分解して表現し

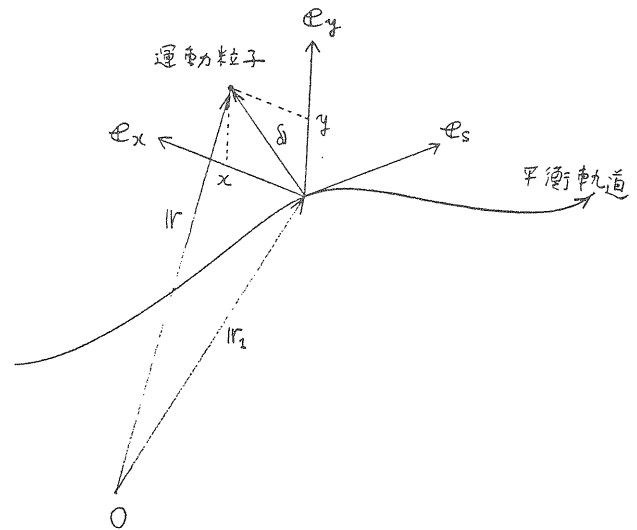


図4 平衡軌道上のフルネ標構による粒子位置の記述

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_s \mathbf{e}_s \quad (1.51)$$

(1.48) 式に与えられた $\dot{\mathbf{r}}$ と外積をとる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} &= \{x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y + (1 + \kappa x) \mathbf{e}_s\} \dot{s} \\ &\quad \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_s \mathbf{e}_s) \\ &= \{y' B_s - (1 + \kappa x) B_y\} \dot{s} \mathbf{e}_x \\ &\quad + \{(1 + \kappa x) B_x - x' B_s\} \dot{s} \mathbf{e}_y \\ &\quad + \{x' B_y - y' B_x\} \dot{s} \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (1.52)$$

(1.49) 式と (1.52) 式を運動方程式 (1.46) に代入すれば成分毎の運動方程式を得る。

$$\begin{aligned} x'' + \frac{\dot{s}}{s^2} x' - \kappa (1 + \kappa x) \\ = \frac{e}{m \dot{s}} \{y' B_s - (1 + \kappa x) B_y\} \end{aligned} \quad (1.53 a)$$

$$\begin{aligned} y'' + \frac{\dot{s}}{s^2} y' \\ = \frac{e}{m \dot{s}} \{(1 + \kappa x) B_x - x' B_s\} \end{aligned} \quad (1.53 b)$$

$$\begin{aligned} 2 \kappa x' + \kappa' x + \frac{\dot{s}}{s^2} (1 + \kappa x) \\ = \frac{e}{m \dot{s}} \{x' B_y - y' B_x\} \end{aligned} \quad (1.53 c)$$

この運動方程式の独立変数は平衡軌道に沿った距離 s であり、従属変数は平衡軌道から運動粒子までの距離 x , y および時間 t である。運動する粒子の速さは磁場中なので一定だが、粒子から平衡軌道へ下した垂直の足の速さ \dot{s} は平衡軌道の形や粒子の運動状態によって変化する量であり、時間 t と距離 s の関係は一様ではない。

実際 (1.53 a) 式に x' を掛け、(1.53 b) 式に y' を掛けて和をとり B_s を消去すれば、

$$\begin{aligned} x' x'' + y' y'' + \frac{\dot{s}}{s^2} (x'^2 + y'^2) - \kappa (1 + \kappa x) x' \\ = \frac{e}{m \dot{s}} (y' B_x - x' B_y) (1 + \kappa x) \end{aligned} \quad (1.54)$$

(1.54) 式と (1.53 c) 式の右辺を見比べると B_x , B_y が消去できることが判り

$$-\frac{\dot{s}}{s^2} = \frac{x' x'' + y' y'' + (1 + \kappa x) (\kappa x' + \kappa' x)}{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \quad (1.55)$$

これが時間 t と距離 s の関係を決める微分方程式である。ここで (1.55) 式を解いて \dot{s} を求めてみよう。

(1.55) 式の右辺の分母を g と置けば (1.55) 式は次のように書ける。

$$-\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{g'}{2g} = \frac{dg}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{g}}{2g \dot{s}} \quad (1.56)$$

ここでドットは t による微分、ダッシュは s による微分である。(1.56) 式を通分して書けば

$$2g \dot{s} \ddot{s} + \dot{g} \dot{s}^2 = \frac{d}{dt} (g \dot{s}^2) = 0 \quad (1.57)$$

即ち

$$\begin{aligned} \dot{s}^2 &= v^2 / g \\ &= v^2 / \{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2\} \end{aligned} \quad (1.58)$$

ここで v は (1.57) 式の積分に際して生じた任意の積分定数である。

実はこの (1.58) 式はもっと簡単に得ることができる。つまり (1.48) 式で表現された運動粒子の速度が、磁場内運動であるため一定の速さ v であるとおけば、(1.58) 式をたちどころに得る。またこの \dot{s} を時間微分すれば加速度 \ddot{s} を与えると考えられる (1.55) 式が求められる。

このように (1.58) 式は運動粒子本来の速さ v が平衡軌道上へ射影されると、平衡軌道の曲がりや粒子の横方向の変位および運動によってどのように影響を受けるかを表現している。ビームの進行方向の速さが横方向の運動によって変調され得るということは、シンクロン振動（進行方向の振動）とベータトロロン振動（横方向の振動）の結合したいわゆるシンクロベータ共鳴の存在を示唆している。

さて運動方程式 (1.53) はその導出の過程が示すように、いささかの近似も使われておらず厳密に成立するものである。運動粒子から平衡軌道へ下す垂線さえ一義的に決められれば、すなわち曲率半径 $\rho = 1 / \kappa$ より小さな変位であれば、平衡軌道からの変位 x , y はどんな値でもよい。さらに運動粒子の運動量 $m v$ が、平衡軌道上を動く理想的な粒子の運動量と異なってもこの運動方程式 (1.53) は成立することを指摘しておこう。

平衡軌道が一平面にとどまらない一般の場合の運動方程式も、振率を含んだ一般のフルネ・セレの公式 (1.21) を使い、全く同様なやり方で計算することができる。

ここではその結果のみ記しておこう。

$$x'' + \frac{\dot{s}}{s^2} (x' + \tau y) - \kappa (1 + \kappa x) + \tau' y + \tau y'$$

$$+ \tau(y' - \tau x) = \frac{e}{m \dot{s}} \{ (y' - \tau x) B_s - (1 + \kappa x) B_y \} \quad (1.59)$$

$$y'' + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} (y' - \tau x) - \tau' y - \tau y' - \tau (x' + \tau y) = \frac{e}{m \dot{s}} \{ (1 + \kappa x) B_x - (x' + \tau y) B_s \} \quad (1.60)$$

$$\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} (1 + \kappa x) + \kappa' x + \kappa x' + \kappa (x' + \tau y) = \frac{e}{m \dot{s}} \{ (x' + \tau y) B_y - (y' - \tau x) B_x \} \quad (1.61)$$

また \dot{s} , \ddot{s} に関する, (1.55) および (1.58) 式に対応する式も記しておく。

$$-\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{(x' + \tau y) \{ x'' + (\tau y)' \} + (y' - \tau x) \{ y'' - (\tau x)' \} + (1 + \kappa x) (\kappa x)'}{(x' + \tau y)^2 + (y' - \tau x)^2 + (1 + \kappa x)^2} \quad (1.62)$$

$$\dot{s}^2 = v^2 / \{ (x' + \tau y)^2 + (y' - \tau x)^2 + (1 + \kappa x)^2 \} \quad (1.63)$$

1.4 運動方程式の展開形

当面の我々の興味は横方向の運動, すなわち平衡軌道からの変位 x , y の変化を調べることである。まず運動方程式 (1.53 a) および (1.53 b) から, 平衡軌道上の射影の速さ \dot{s} や加速度 \ddot{s} を消去する。

(1.55) および (1.58) 式を使い, 1.3 節と同じく定義した g

$$g = g(x, x', y', s) = x'^2 + y'^2 + \{ 1 + \kappa(s)x \}^2 \quad (1.64)$$

を用いれば, 横方向運動の方程式が次のように表わされる。

$$x'' - \frac{g'}{2g} x' - \kappa (1 + \kappa x) = \frac{e}{mv} g^{\frac{1}{2}} \{ y' B_s - (1 + \kappa x) B_y \} \quad (1.65 a)$$

$$y'' - \frac{g'}{2g} y' = \frac{e}{mv} g^{\frac{1}{2}} \{ (1 + \kappa x) B_x - x' B_s \} \quad (1.65 b)$$

この運動方程式もまた厳密なものであるが, まだ x , y の運動を調べる上で都合な姿であるとは言

い難い。以後順次近似や仮定を施して, 運動方程式を扱い易い形にもっていくことになる。

手始めに (1.64) 式で定義された関数 g を考えてみよう。まず構成する各項の大小関係を検討する。平衡軌道の曲率 κ は偏向磁石の曲率半径の逆数であり, 加速器全体の半径とオーダー的に等しい。一方平衡軌道からの変位 x は, 安定に回る粒子を扱う限り, たかだか真空容器の半径である。そこで κx 項は微小量ということになる。例えば TRISTAN・MR では曲率半径約 250m 真空容器の大きさ約 0.1m なので κx 項は 4×10^{-4} と小さな量である。小さな加速器では事情が若干異なり, 例えば世界初の電子陽電子貯蔵リング ADA (これは現在実物が筑波科学博の EC イタリア館に展示中である。) では曲率半径約 0.6m, 真空容器の大きさは, 加速器全体の大きさにはほとんど依らず, 0.1m 位なので κx 項は 0.17 となり充分小さいとは言いきれない。次に x' , y' 項については, x' の符号が変る (粒子が運動の向きを変える) までに走る距離と真空容器の大きさの比が x' の上限を与えると考えられる。 x' が符号を反転するまでの距離としては例えば収束方向磁石の間隔としてもよいし, より正確には, 話の先取りになってしまうが, ベータatron 振動の振幅関数いわゆるベータ関数の値とするのがよいであろう。再び TRISTAN・MR に例をとれば, 収束磁石間隔は 16m, ベータ関数なら最小値 10m を使っても x' の値はたかだか 6 ないし 10×10^{-3} である。

また ADA の場合にはベータ関数が約 1m と思われるので, x' の上限値は 0.1 となり再び余り小さいとは言えない。このように今後微量として近似の対象となる量が, 小型の加速器において充分微小ではないという事実は, 粒子運動の解析的取扱いの有効性が小型加速器において, 大型加速器におけるものより劣ることを予想させる。いずれにせよここでは, x と x' は同じオーダーの微量として扱う。これに従えば g の 1 次までの近似式は

$$g \approx 1 + 2 \kappa x \quad (1.66)$$

さらにこれを微分することにより g' の近似式

$$g' \approx 2 (\kappa' x + \kappa x') \quad (1.67)$$

を得る。

(1.66) および (1.67) 式を使い運動方程式 (1.65) の左辺を微量の 2 次項まで含む式で近似しよう。

$$x'' - (\kappa' x + \kappa x') x' - \kappa (1 + \kappa x) = \frac{e}{p} g^{\frac{1}{2}} \{ y' B_s - (1 + \kappa x) B_y \} \quad (1.68 a)$$

$$y'' - (\kappa'x + \kappa x')y' = \frac{e}{p} g^{\frac{1}{2}} \{ (1 + \kappa x) B_x - x' B_s \} \quad (1.68 b)$$

ここで粒子の運動量 $p = m v$ を使った。

この運動方程式は、独立変数が s 、求められるべき未知関数が x および y である。平衡軌道を決めることで、 κ や κ' は独立変数 s のみの関数として与えられる。しかし磁場成分 B_x 、 B_y 、 B_s は x 、 y および s の関数として与えられており、その中に未知関数を含んでいる。運動方程式 (1.68) を解くには x および y に関して、磁場を展開して表わすことが必要であり、次の節で行なうことにする。

1.5 平衡軌道周辺磁場の展開表現

運動する粒子の感じる磁場を、平衡軌道からの変位 x 、 y を用いて展開表現する。ここで我々は扱う磁場を次の条件を満たす平面对称性のあるものに限る。

$$B_x(x, y, s) = -B_x(x, -y, s) \quad (1.69 a)$$

$$B_y(x, y, s) = B_y(x, -y, s) \quad (1.69 b)$$

$$B_s(x, y, s) = -B_s(x, -y, s) \quad (1.69 c)$$

この磁場の様子を図5に示す。対称平面に磁束が垂直である事を考慮すれば、平衡軌道がこの平面内に存在する事は明白であろう。実際の加速器では、この対称条件を破る磁石が使用されることもある。その代表例はソレノイド磁石（衝突型加速器の衝突点周辺に、素粒子反応を解析する測定器の一部として持ち込まれる。）および歪四極磁石（通常四極磁石を平衡軌道を軸として45°回転させたもの。水平・垂直方向の運動の結合状態を制御する働きを持ち、前記ソレノイド磁石の影響を除去するためにも使用される。）であり、それぞれ対称平面上でゼロでない B 。

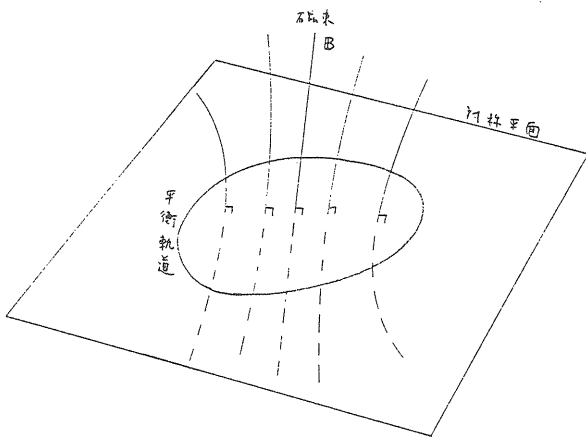


図5 平面对称性のある磁場と平衡軌道

成分および B_x 成分を持つ。

静磁場はスカラーポテンシャル ϕ を使って書ける。

$$\mathbf{B} = \text{grad} \phi \quad (1.70)$$

(1.69) 式の面对称性をポテンシャルで表わせれば

$$\phi(x, y, s) = -\phi(x, -y, s) \quad (1.71)$$

すなわち ϕ の展開項の中には、 y に関する偶数次の項が存在せず展開は次のように行われる。

$$\phi(x, y, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2m+1,n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad (1.72)$$

ここで磁気ポテンシャル ϕ の展開係数 $A_{2m+1,n}$ は s の関数である。また異なる m 、 n に属する係数間の関係は独立ではない。磁場がマクスウェル方程式を満たすという条件から与えられる係数間関係式を順次解いて、 $A_{1,n}$ のみを使って全ての展開係数 $A_{2m+1,n}$ が表わされる。以下にその手順を述べよう。

真空中静磁場では、マクスウェル方程式は次のとおり。

$$\text{rot} \mathbf{B} = 0 \quad (1.73 a)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.73 b)$$

(1.73 a) 式は磁気ポテンシャル ϕ を使い (1.70) 式で \mathbf{B} を与えれば自動的に満足される。結局 (1.73 b) 式に (1.70) 式を代入することで、次のラプラス方程式を得る。

$$\text{div grad} \phi \equiv \Delta \phi = 0 \quad (1.74)$$

フルネ標構上のラプラシアン Δ を求めるために、この座標による線素 dr の成分表示を求める。(1.35) 式で振率 τ をゼロと置き、両辺に ds を掛けて内積をとれば

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + (1 + \kappa x)^2 (ds)^2 \quad (1.75)$$

これを使い、ラプラシアン の表現を求め、(1.74) 式を書き下す。

$$\Delta \phi = \frac{1}{1 + \kappa x} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \kappa x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{1 + \kappa x} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1 + \kappa x} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \right\} = 0 \quad (1.76)$$

ここで (1.72) 式で与えられた、 $\phi(x, y, s)$ の展開形を代入して、 x 、 y に関する同次項の係数が全てゼロとなるようにおけば、長ったらしくはあるが単純な計算によって次の展開係数間関係式を得る。

$$\begin{aligned}
& -A_{2m+3,n} = A''_{2m+1,n} + n\kappa A''_{2m+1,n-1} \\
& -n\kappa' A'_{2m+1,n-1} + A_{2m+1,n+2} \\
& + (3n+1)\kappa A_{2m+1,n+1} + n(3n-1)\kappa^2 A_{2m+1,n} \\
& + n(n-1)^2 \kappa^3 A_{2m+1,n-1} \\
& + 3n\kappa A_{2m+3,n-1} + 3n(n-1)\kappa^2 A_{2m+3,n-2} \\
& + n(n-1)(n-2)\kappa^3 A_{2m+3,n-3} \quad (1.77)
\end{aligned}
+ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \Big|_{x=y=0} x^2 + \dots \quad (1.81)$$

ここでダッシュは s に関する微分を示し、添字がどちらかでも負となる展開係数の値はゼロである。

(1.77) 式を用いれば全ての展開係数を $A_{1,n}$ のみを使って順次表わすことができる。

$$-A_{3,0} = A''_{1,0} + A_{1,2} + \kappa A_{1,1} \quad (1.78 a)$$

$$-A_{3,1} = A''_{1,1} - 2\kappa A''_{1,0} - \kappa' A'_{1,0} + A_{1,3} + \kappa A_{1,2} - \kappa^2 A_{1,1} \quad (1.78 b)$$

以下どこまでも求められるが、式はどんどん込み入ってくる。ここでは磁場の 2 次項まで求めるために、ポテンシャルの 3 次項まで求めておく。

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, s) &= A_{1,0}y + A_{1,1}xy \\
& + \frac{1}{2!} A_{1,2}x^2y + \frac{1}{3!} A_{3,0}y^3 \\
& = A_{1,0}y + A_{1,1}xy \\
& + \frac{1}{2!} A_{1,2}x^2y + \frac{1}{3!} (-A''_{1,0} - A_{1,2} - \kappa A_{1,1})y^3 \quad (1.79)
\end{aligned}$$

実際これより $\mathbf{B} = \text{grad}\phi$ を計算すれば

$$B_x(x, y, s) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A_{1,1}y + A_{1,2}xy \quad (1.80 a)$$

$$\begin{aligned}
B_y(x, y, s) &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
&= A_{1,0} + A_{1,1}x + \frac{1}{2} \{ A_{1,2}x^2 - (A''_{1,0} + A_{1,2} + \kappa A_{1,1})y^2 \} \quad (1.80 b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_s(x, y, s) &= \frac{1}{1 + \kappa x} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= \frac{1}{1 + \kappa x} (A'_{1,0}y + A'_{1,1}xy) \quad (1.80 c)
\end{aligned}$$

さてここで $A_{1,n}$ の意味を考える。(1.70) および (1.72) 式から

$$\begin{aligned}
B_y(x, 0, s) &= A_{1,0} + A_{1,1}x + \frac{1}{2!} A_{1,2}x^2 + \dots \\
&= B_y(0, 0, s) + \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0} x
\end{aligned}$$

と書かれ、順に 2 極、4 極、6 極成分の係数であることが示される。まとめて言えば、 $A_{1,n}$ は対称平面に垂直な磁場の x に関する $2(n+1)$ 極成分の係数である。

ここで展開係数 $A_{1,n}$ を平衡軌道を走る粒子の運動量 p_0 を使って正規化した記法を導入する。すなわち (1.81) 式に対応する次の式により新しい係数を定義する。

$$\frac{e}{p_0} B_y(x, 0, s) = b_0(s) + b_1(s)x + \frac{1}{2!} b_2(s)x^2 + \dots \quad (1.82)$$

すなわち

$$b_n(s) = \frac{e}{p_0} A_{1,n} = \frac{e}{p_0} \frac{\partial^n B_y(x, 0, s)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} \quad (1.83)$$

特に、(1.32) 式による平衡軌道曲率と磁場との関係によって

$$b_0(s) = \kappa(s) \quad (1.84)$$

これらを用いて (1.80) 式の磁場を書き直せば

$$\frac{e}{p_0} B_x(x, y, s) = b_1y + b_2xy \quad (1.85 a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{e}{p_0} B_y(x, y, s) &= \kappa + b_1x + \frac{1}{2} b_2x^2 - \frac{1}{2} (\kappa'' + b_2 + \kappa b_1)y^2 \quad (1.85 b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{e}{p_0} B_s(x, y, s) &= \frac{1}{1 + \kappa x} (\kappa'y + b_1'xy) \\
&\approx \kappa'y + (b_1' - \kappa\kappa')xy \quad (1.85 c)
\end{aligned}$$

(1.85) 式を運動方程式 (1.68) に代入し、右辺も左辺に合わせて微量の 2 次までとれば、

$$\begin{aligned}
& x'' - (\kappa'x + \kappa x')x' - \kappa(1 + \kappa x) \\
&= \frac{p_0}{p} g^{\frac{1}{2}} \left\{ -\kappa - (b_1 + \kappa^2)x - (\kappa b_1 + \frac{1}{2} b_2)x^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (\kappa'' + b_2 + \kappa b_1)y^2 + \kappa'yy' \right\} \quad (1.86 a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y'' - (\kappa'x + \kappa x')y' \\
&= \frac{p_0}{p} g^{\frac{1}{2}} \{ b_1y + (b_1\kappa + b_2)xy - \kappa'x'y \} \quad (1.86 b)
\end{aligned}$$

ここでさらに 8 項を 2 次までの近似式で与える。

$$g^{\frac{1}{2}} = 1 + \kappa x + \frac{1}{2} \{ (\kappa x)^2 + x'^2 + y'^2 \} \quad (1.87)$$

(1.87) 式を (1.86) 式に代入し 2 次項まで求めれば。

$$\begin{aligned} x'' - (\kappa' x + \kappa x') x' - \kappa (1 + \kappa x) \\ = \frac{p_0}{p} \left\{ -\kappa - (b_1 + 2 \kappa^2) x \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (b_2 + 4 \kappa b_1 + 3 \kappa^3) x^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (b_2 + \kappa b_1 + \kappa'') y^2 \right. \\ \left. + \kappa' y y' + \frac{1}{2} \kappa (x'^2 + y'^2) \right\} \quad (1.88 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - (\kappa' x + \kappa x') y' \\ = \frac{p_0}{p} \{ b_1 y + (b_2 + 2 \kappa b_1) x y - \kappa' x' y \} \quad (1.88 b) \end{aligned}$$

さてここで平衡軌道の運動量 p と等しい運動量粒子を扱うならば運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} x'' + (b_1 + \kappa^2) x \\ = -\frac{1}{2} (b_2 + 4 \kappa b_1 + 3 \kappa^3) x^2 \\ + \frac{1}{2} (b_2 + \kappa b_1 + \kappa'') y^2 \\ + \kappa' (x x' + y y') + \frac{1}{2} \kappa (x'^2 - y'^2) \quad (1.89 a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' - b_1 y \\ = (b_2 + 2 \kappa b_1) x y + \kappa' (x y' - x' y) + \kappa x' y' \quad (1.89 b) \end{aligned}$$

また運動粒子の運動量が平衡粒子と異なるときは

$$\frac{p_0}{p} = \frac{p - (p - p_0)}{p} = 1 - \frac{\Delta p}{p} = 1 - \delta \quad (1.90)$$

と展開して (1.88) 式に代入すればよく、この場合の運動方程式は (1.89) 式の右辺に各々次のクロマティック項 (色収差項) を加えたものとなる。

$$\begin{aligned} \xi_x(\delta) = -\delta \{ -\kappa - (b_1 + 2 \kappa^2) x \\ - \frac{1}{2} (b_2 + 4 \kappa b_1 + 3 \kappa^3) x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{2} (b_2 + \kappa b_1 + \kappa'') y^2 + \kappa' y y' \\ + \frac{1}{2} \kappa (x'^2 + y'^2) \} \quad (1.9a) \end{aligned}$$

$$\xi_y(\delta) = -\delta \{ b_1 y + (b_2 + 2 \kappa b_1) x y - \kappa' x' y \} \quad (1.91 b)$$

運動量 p の展開を (1.90) 式とは逆に行ない

$$\frac{p_0}{p} = \frac{p_0}{p_0 + \Delta p} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)} = \frac{1}{1 + \Delta} \quad (1.92 a)$$

(1.90) 式の σ を次のように Δ で置換えた表現がとられることもある。

$$\delta = \Delta - \Delta^2 + \Delta^3 - \dots \quad (1.92 b)$$

運動量誤差ゼロの (1.89) 式から線型項のみを取出せば

$$x'' + (b_1 + \kappa^2) x = 0 \quad (1.93 a)$$

$$y'' - b_1 y = 0 \quad (1.93 b)$$

以後水平・垂直方向の運動に共通した議論を行なうために (1.93) 式をまとめて次の形で書いておこう。

$$z'' + K(s) z = 0 \quad (1.94)$$

ここで z が水平方向 x を代表するときは

$$K(s) = b_1 + \kappa^2 \quad (1.95 a)$$

であり、垂直方向 y を意味するときは

$$K(s) = -b_1 \quad (1.95 b)$$

である。

2. 理想的ベータトロン振動

第 1 章において得られた運動方程式を理想的な条件のもとで解く。

2.1 ベータトロン振動の方程式をトランスファ行列の方法で解き、加速器に特有なツイスタパラメタやエミッタンスの楕円を紹介する。

2.2 加速器で使われる磁場のトランスファ行列を計算する。

2.1 ベータトロン振動

第 1 章で導びいたように、理想的な場合における

ベータatron振動（ビームの進行方向に垂直な面における振動）の運動方程式は

$$z'' + K(s)z = 0 \quad (2.1)$$

ここで z は垂直方向ないし水平方向の平衡軌道からの変位である。加速器を一周する平衡軌道の周長を c とすれば次の周期性が存在する。

$$K(s) = K(s+c) \quad (2.2)$$

このような条件を持った微分方程式をヒルの方程式と呼ぶ、この命名は、19世紀後半 G.W.Hill が月の軌道運動を調べるためにこの型の方程式を研究した事に因む。

一般のヒル方程式を解く前に $K(s)$ が定数の場合を調べてみよう。この時 (2.1) 式は調和振動子の方程式となり

$$z'' + K_0 z = 0 \quad (2.3)$$

この解は、 $K_0 > 0$ のとき安定な振動を与え

$$z = A \cos(\omega_0 s + \phi), \quad \omega_0 = \pm \sqrt{K_0} \quad (2.4 a)$$

また、 $K_0 < 0$ のときには s と共に発散する解を与える。

$$z = A \cosh(\omega_0 s + \phi), \quad \omega_0 = \pm \sqrt{-K_0} \quad (2.4 b)$$

ここで、 A および ϕ は積分の際に生じる任意定数で、運動の初期値に対応する量である。一般に運動方程式は2階の微分方程式なので、運動の一自由度当り2つの任意定数により初期値が完全に決する。このように運動の初期値を完全に決定する量で張られた空間は位相空間と呼ばれ、力学系の振舞を調べる時に重要な役割を果たしている。(2.4) 式では位相空間は A および ϕ により表現されているが、今後は z と z' で表わされた位相空間をしばしば用いる予定である。

さて (2.1) 式を解く際に、(2.3) 式の解では定数であった A と ω_0 を変数として、定数変化法を使用してみよう。我々は安定振動に興味があるので (2.4 a) 式を使い、 A を $A w(s)$ また $\omega_0 s$ を $\Psi(s)$ とおき換え、 $w(s)$ は周期的とする。

$$w(s) = w(s+c) \quad (2.5)$$

すなわち (2.1) 式の解の形として次のものを仮定する。*)

$$z = A w(s) \cos(\psi(s) + \phi) \quad (2.6)$$

$$z' = A \{ w' \cos(\psi + \phi) - w \psi' \sin(\psi + \phi) \} \quad (2.7)$$

$$z'' = A \{ (w'' - w \psi'^2) \cos(\psi + \phi) - (2 w' \psi' + w \psi'') \sin(\psi + \phi) \} \quad (2.8)$$

(2.6) および (2.8) 式を (2.1) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} & \{ w'' - w \psi'^2 + K(s) w \} \cos(\psi + \phi) \\ & = \{ 2 w' \psi' + w \psi'' \} \sin(\psi + \phi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.9) 式が任意定数 ϕ によらず成立するには、 \cos 項および \sin 項各々の係数がゼロでなければならない。

$$w'' - w \psi'^2 + K(s) w = 0 \quad (2.10 a)$$

$$2 w' \psi' + w \psi'' = 0 \quad (2.10 b)$$

*脚注

ヒル方程式の解がこの形で書かれるという事はフロッケの定理によって保証されている。

(2.10 b) 式を $w \psi'$ で除せば

$$2 \frac{w'}{w} + \frac{\psi''}{\psi'} = 0 \quad (2.11)$$

これを s で積分すれば

$$2 \log w + \log \psi' = \text{任意定数} \quad (2.12)$$

任意定数をゼロと置けば

$$w^2 \psi' = 1 \quad (2.13)$$

結局

$$\psi = \int_0^s \frac{ds}{w(s)^2} \quad (2.14)$$

と書ける。また (2.13) を (2.10 a) に代入して ψ' を消去すれば

$$w'' - \frac{1}{w^3} + K(s) w = 0 \quad (2.15)$$

(2.15) 式を満し、周期 c を持った $w(s)$ が見つければ、(2.14) 式を通じて Ψ が決まる。したがって (2.6) 式を用いれば、任意の初期値に対して運動が完全に決定する。

(2.15) 式を解析的に解くのは困難なので、数値的に扱うのが一般的である。以下に述べる行列を利用したやり方は殆んど全ての加速器設計用計算機プログラムに用いられている。

(2.15) 式の解 $w(s)$ が求まったとして、微分方程

式 (2.1) 式の 2 つの独立解を次のように選ぶ。

$$A_I = A_{II} = 1 \quad (2.16 \text{ a})$$

$$\phi_I = -\int_0^{s_1} \frac{ds}{w^2}, \quad \phi_{II} = \phi_I + \frac{\pi}{2} \quad (2.16 \text{ b})$$

独立解 z_I, z_{II} およびその微分 z'_I, z'_{II} をあらわに書く。

$$z_I(s) = w(s) \cos(\psi(s) + \phi_I) \quad (2.17)$$

$$z'_I(s) = w'(s) \cos(\psi(s) + \phi_I) - \frac{1}{w(s)} \sin(\psi(s) + \phi_I) \quad (2.18)$$

$$z_{II}(s) = -w(s) \sin(\psi(s) + \phi_I) \quad (2.19)$$

$$z'_{II}(s) = -w'(s) \sin(\psi(s) + \phi_I) - \frac{1}{w(s)} \cos(\psi(s) + \phi_I) \quad (2.20)$$

$s = s_1$ から $s = s_2$ までの間に、位相空間の点 (z_I, z'_I) および (z_{II}, z'_{II}) がどのように位相空間内を移動するか考えてみよう。

$s = s_1$ では各々

$$z_I(s_1) = w_1, \quad z'_I(s_1) = w'_1 \quad (2.21 \text{ a})$$

$$z_{II}(s_1) = 0, \quad z'_{II}(s_1) = -\frac{1}{w_1} \quad (2.21 \text{ b})$$

に存在した 2 点が $s = s_2$ ではそれぞれ次の点に移動する。

$$\begin{cases} z_I(s_2) = w_2 \cos \psi_{12} \\ z'_I(s_2) = w'_2 \cos \psi_{12} - \frac{1}{w_2} \sin \psi_{12} \end{cases} \quad (2.22 \text{ a})$$

$$\begin{cases} z_{II}(s_2) = -w_2 \sin \psi_{12} \\ z'_{II}(s_2) = -w'_2 \sin \psi_{12} - \frac{1}{w_2} \cos \psi_{12} \end{cases} \quad (2.22 \text{ b})$$

$$\psi_{12} = \psi(s_2) - \psi(s_1) \quad (2.23)$$

一般に線型微分方程式に従う位相空間内の点の移動は、トランスファ行列によって表現できる。 s_1 と s_2 を結ぶトランスファ行列を $M(s_2 | s_1)$ とすれば一般の位相空間点 (z, z') の移動は次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

ここで $M(s_2 | s_1)$ の行列要素は、既知解 (z_I, z'_I) および (z_{II}, z'_{II}) の $s = s_1$ から $s = s_2$ への移動を表現するものとして求めることができる。

$$\begin{pmatrix} z_I(s_2) & z_{II}(s_2) \\ z'_I(s_2) & z'_{II}(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_I(s_1) & z_{II}(s_1) \\ z'_I(s_1) & z'_{II}(s_1) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

両辺に右側から逆行列を掛けて (2.21) および (2.22) 式を代入すれば

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{I2} & z_{II2} \\ z'_{I2} & z'_{II2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{z_{I1} \cdot z'_{II1} - z_{II1} \cdot z'_{I1}} \begin{pmatrix} z'_{II1} & -z_{II1} \\ -z'_{I1} & z_{I1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w_2}{w_1} (\cos \psi_{12} - w_1 w'_1 \sin \psi_{12}), \\ -\left\{ \frac{(1 + w_1 w'_1 w_2 w'_2) \sin \psi_{12} + (w_1 w'_1 - w_2 w'_2) \cos \psi_{12}}{w_1 w_2} \right\}, \\ w_1 w_2 \sin \psi_{12} \\ \frac{w_1}{w_2} (\cos \psi_{12} + w_2 w'_2 \sin \psi_{12}) \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

ここで $M(s_2 | s_1)$ の行列式を計算してみよう。

$$\det M(s_2 | s_1) = m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12} = 1 \quad (2.27)$$

これは位相空間の面積がこの変換によって不変であることを示しており、リウヴィルの定理と呼ばれる所の無散逸力学系 (摩擦力の働かない系) 特有な性質を示す。

この行列の対角和も求めておく。

$$\begin{aligned} \text{Tr } M(s_2 | s_1) &= m_{11} + m_{22} \\ &= \left(\frac{w_2}{w_1} + \frac{w_1}{w_2} \right) \cos \psi_2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここまでにおいて、 $w(s)$ が決まればトランスファ行列が決まることを示した。では逆に、トランスファ行列が知られているときに（現実にはこちらの場合が起る。） $w(s)$ や $\Psi(s)$ を決めることを考えよう。

まず円型加速器を一周するトランスファ行列

$$M(s_1+c | s_1) = \begin{pmatrix} r_{11}(s_1) & r_{12}(s_1) \\ r_{21}(s_1) & r_{22}(s_1) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

これを微分方程式の解を使って表現する。(2.26)式において $w(s)$ の周期性を適用すれば

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi_c - w_1 w_1' \sin \psi_c & w_1^2 \sin \psi_c \\ -\frac{1}{w_1^2} \{1 + (w_1 w_1')^2\} \sin \psi_c & \cos \psi_c + w_1 w_1' \sin \psi_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

ここで表示の簡素化のため、次に定義されるトゥイス (Twiss) パラメタを導入する。**)

$$\beta(s) = w^2(s) \quad (2.31a)$$

$$\alpha(s) = -w(s)w'(s) \quad (2.31b)$$

$$\gamma(s) = \frac{1}{w(s)^2} [1 + \{w(s)w'(s)\}^2] \quad (2.31c)$$

明らかに α , β , γ は独立でなく

$$1 + \alpha^2 = \beta\gamma \quad (2.32)$$

また定義より直ちに

$$\beta > 0, \gamma > 0 \quad (2.33)$$

が知られる。

**)脚注

このトゥイスパラメタは円型加速器の軌道理論において最も頻繁に使用される量の一つである。加速器設計の要諦は如何にこのトゥイスパラメタを決めるかに有るといっても過言ではない。トゥイスパラメタの名は20世紀中葉の加速

器勃興期に活躍した Twiss という人物に因むということである。しかし同時代より加速器の世界で仕事をしてきた K.Johnsen 氏 (CERN, 欧州共同原子核研究所) によれば、この命名は適切とは言えずむしろ強収束原理発見者の一人 E.D.Courant 氏 (BNL, ブルックヘヴン国立研究所) の名を採用すべきであったとのことである。

トゥイスパラメタで一周のトランスファ行列 (2.27) 式を書けば

$$\begin{aligned} M(s_1+c | s_1) &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi_c + \alpha_1 \sin \psi_c & \beta_1 \sin \psi_c \\ -\gamma_1 \sin \psi_c & \cos \psi_c - \alpha_1 \sin \psi_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

ここでは行列要素が既知であり、これを使ってトゥイスパラメタを求めてみよう。

まず対角和を比べれば

$$\cos \psi_c = \frac{1}{2} (r_{11} + r_{22}) \quad (2.35)$$

(2.35) 式は安定解に対応する ψ_c が存在するための条件を与えている。

$$-1 \leq \frac{1}{2} \text{Tr} M(s_1+c | s_1) \leq 1 \quad (2.36)$$

β は常に正であることを利用して

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{r_{12}}{\sin \psi_c} = \frac{|r_{12}|}{|\sin \psi_c|} = \frac{|r_{12}|}{\sqrt{1 - \cos^2 \psi_c}} \\ &= |r_{12}| \left\{ 1 - \frac{1}{4} (r_{11} + r_{22})^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\sin \psi_c = \text{sign}(\sin \psi_c) \cdot |\sin \psi_c|$$

$$= \frac{r_{12}}{|r_{12}|} \left\{ 1 - \frac{1}{4} (r_{11} + r_{22})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (r_{11} - r_{22}) \cdot \frac{1}{\sin \psi_c}$$

$$= \frac{1}{2} (r_{11} - r_{22}) \cdot \frac{r_{12}}{|r_{12}|} \left\{ 1 - \frac{1}{4} (r_{11} + r_{22})^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

$$\gamma_1 = -\frac{r_{21}}{\sin \psi_c}$$

$$= -r_{21} \cdot \frac{r_{12}}{|r_{12}|} \left\{ 1 - \frac{1}{4} (r_{11} + r_{22})^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

(2.32) 式により $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$ が成立しているはずであるが、実際に (2.37), (2.39) および (2.40) 式を使って計算してみると

$$\begin{aligned} & \beta\gamma - \alpha^2 \\ &= \frac{4 \cdot \det M(s_1 + c | s_1) - (r_{11} + r_{22})^2}{4 - (r_{11} + r_{22})^2} = 1 \quad (2.41) \end{aligned}$$

つまり, $\det M(s_1 + c | s_1) = 1$ と $1 + \alpha^2 = \beta\gamma$ とは, それぞれに行列要素および微分方程式の解を言葉として同じ事 (リウヴィルの定理) を表現しているのである。

さてこれまでに得た ψ_c についての知識は, (2.35) および (2.38) 式であり, 2π の整数倍の任意性が残っている。この任意性は以下の作業の中で解消される。

周回のトランスファ行列を使えば出発点におけるトウイスパラメタが決められる。周回行列に加え, 出発点 $s = s_1$ から $s = s_2$ までのトランスファ行列を使えば $s = s_2$ におけるトウイスパラメタが決められる。 s_1 から s_2 へのトランスファ行列は

$$M(s_2 | s_1) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

これを使って $s = s_2$ を出発点とする周回行列を次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} M(s_2 + c | s_2) &= M(s_2 | s_1) M(s_1 + c | s_1) M(s_1 | s_2) \\ &= M(s_2 | s_1) M(s_1 + c | s_1) M^{-1}(s_2 | s_1) \quad (2.43) \end{aligned}$$

ここで M^{-1} は M の逆行列である。(2.43) 式に (2.34) 式を代入する前に (2.34) 式をすこし書換えておく。

$$\begin{aligned} M(s_1 + c | s_1) &= \begin{pmatrix} \cos\psi_c + \alpha_1 \sin\psi_c & \beta_1 \sin\psi_c \\ -\gamma_1 \sin\psi_c & \cos\psi_c - \alpha_1 \sin\psi_c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\psi_c + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \sin\psi_c \\ &\equiv \text{Icos}\psi_c + \text{J}(s_1) \sin\psi_c \quad (2.44) \end{aligned}$$

ここで次式が成立している。

$$\begin{aligned} \text{J}^2(s_1) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1^2 - \beta_1 \gamma_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 - \beta_1 \gamma_1 \end{pmatrix} = -\text{I} \quad (2.45) \end{aligned}$$

(2.44) 式を (2.43) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} M(s_2 + c | s_2) &= \\ M(s_2 | s_1) (\text{Icos}\psi_c + \text{J}(s_1) \sin\psi_c) M^{-1}(s_2 | s_1) & \\ = \text{Icos}\psi_c + M(s_2 | s_1) \text{J}(s_1) M^{-1}(s_2 | s_1) \sin\psi_c & \quad (2.46) \end{aligned}$$

$s = s_2$ における未知のトウイスパラメタ $\beta_2, \alpha_2, \gamma_2$ および位相 ψ_c を使って同じ周回行列を表現すると,

$$M(s_2 + c | s_2) = \text{Icos}\psi_c + \text{J}(s_2) \sin\psi_c \quad (2.47)$$

(2.46) 式と (2.47) 式は同じ周回行列を表わしているのだから両者の対角和は等しく

$$\cos\psi_c = \cos\psi_c \quad (2.48)$$

また全体としても等しいのだから

$$\text{J}(s_2) \sin\psi_c = M(s_2 | s_1) \text{J}(s_1) M^{-1}(s_2 | s_1) \sin\psi_c \quad (2.49)$$

(2.49) 式の両辺の (1, 2) 成分をあらわに計算すれば

$$\begin{aligned} \beta_2 \sin\psi_c &= (m_{11}^2 \beta_1 - 2 m_{11} m_{12} \alpha_1 + m_{12}^2 \gamma_1) \sin\psi_c \\ &= \frac{1}{\beta_1} \left\{ (m_{11} \beta_1 - m_{12} \alpha_1)^2 + m_{12}^2 (\beta_1 \gamma_1 - \alpha_1^2) \right\} \sin\psi_c \\ &= \frac{1}{\beta_1} \left\{ (m_{11} \beta_1 - m_{12} \alpha_1)^2 + m_{12}^2 \right\} \sin\psi_c \quad (2.50) \end{aligned}$$

これより両辺の符号は \sin 項によって決まること が示され, 両 \sin 項は同符号である。さらに (2.48) 式を考慮すれば, $\sin\psi_c = \sin\psi_c$ が判り (2.49) 式は次のようになる。

$$\text{J}(s_2) = M(s_2 | s_1) \text{J}(s_1) M^{-1}(s_2 | s_1) \quad (2.51)$$

これはトウイスパラメタのトランスファ行列による変換式である。成分をあらわに書けば

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \quad (2.52) \end{aligned}$$

すなわち

$$\beta_2 = m_{11}^2 \beta_1 - 2 m_{11} m_{12} \alpha_1 + m_{12}^2 \gamma_1 \quad (2.53 a)$$

$$\alpha_2 = -m_{21} m_{11} \beta_1 + (1 + 2 m_{12} m_{21}) \alpha_1 - m_{12} m_{22} \gamma_1 \quad (2.53 b)$$

$$\gamma_2 = m_{21}^2 \beta_1 - 2 m_{22} m_{21} \alpha_1 + m_{22}^2 \gamma_1 \quad (2.53 c)$$

今までに得たことをまとめてみよう。s=s₁から出発する周回トランスファ行列を使って出発点におけるトウイスパラメタを知り、周回位相 ψ_c を2 π の整数倍の不定性を残しながらも知った。またs=s₁からs=s₂へのトランスファ行列を使ってトウイスパラメタの変換則を書くことができた。ではs₁からs₂への変換によって位相 $\psi(s)$ はどう変化しているのだろうか？この目的には(2.26)式が有効である。トランスファ行列の要素がs=s₁およびs=s₂におけるw(s)およびw'(s)、さらに位相変化 $\Delta\psi$ を使って表現されている。(2.26)をトウイスパラメタにより記述すれば

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos\psi_{12} + \alpha_1 \sin\psi_{12}) \\ - \left[\frac{(1 + \alpha_1 \alpha_2) \sin\psi_{12} + (\alpha_2 - \alpha_1) \cos\psi_{12}}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \right] \\ \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin\psi_{12} \\ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos\psi_{12} - \alpha_2 \sin\psi_{12}) \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

(2.54)式において、行列要素m_{ij}は与えられており、s₁のトウイスパラメタは(2.37)、(2.39)および(2.40)式、s₂は(2.53)式によって求められている。残る未知量は ψ_{12} であるが、

(1, 2)成分から

$$\begin{aligned} \sin\psi_{12} &= \frac{m_{12}}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \\ &= \frac{m_{12}}{\sqrt{(m_{11} \beta_1 - m_{12} \alpha_1)^2 + m_{12}^2}} \end{aligned} \quad (2.55 a)$$

(1, 1)成分から

$$\begin{aligned} \cos\psi_{12} &= m_{11} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} - m_{12} \frac{\alpha_1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \\ &= \frac{m_{11} \beta_1 - m_{12} \alpha_1}{\sqrt{(m_{11} \beta_1 - m_{12} \alpha_1)^2 + m_{12}^2}} \end{aligned} \quad (2.55 b)$$

(2.55)式によってs₁、s₂間の位相の進み ψ_{12} が2 π の整数倍の不定性を残して決まった。この不定性はs₁とs₂の間隔を充分短くにとって、位相進行が2 π 以内におさまるようにすれば解消される。このやり方を順次適用し、全周cの加速器をs₁=0、s₂、s₃、……s_{k-1}、s_{k}=cと充分細く分割したトランスファ行列を使い、各地点でのトウイスパラメタおよび各区间での位相進行 ψ_{12} 、 ψ_{23} 、…… ψ_{k-1k} を求めることができる。こうすれば周回の位相 ψ_c を}

$$\psi_c = \psi_{12} + \psi_{23} + \dots + \psi_{k-1k} \quad (2.56)$$

として2 π 整数倍の不定性を解消した形で決められる。いわゆる ν 値は

$$\nu = \frac{\psi_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_1}^{s_1+c} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.57)$$

であり、一周の間に行なうベータatron振動の数を示している。

既に数値的解法の示されたヒル方程式(2.1)の解をトウイスパラメタを使って書いてみよう。

$$z(s) = A \sqrt{\beta(s)} \cos(\psi(s) + \phi) \quad (2.58 a)$$

$$\begin{aligned} z'(s) &= A \frac{-1}{\sqrt{\beta(s)}} \left\{ \alpha(s) \cos(\psi(s) + \phi) + \sin(\psi(s) + \phi) \right\} \\ &= A \sqrt{\gamma(s)} \sin(\psi(s) + \delta) \end{aligned} \quad (2.58 b)$$

ここで δ は次により与えられる。

$$\sin(\delta - \phi) = -\alpha(s) / \sqrt{1 + \alpha(s)^2} \quad (2.59 a)$$

$$\cos(\delta - \phi) = -1 / \sqrt{1 + \alpha(s)^2} \quad (2.59 b)$$

(2.58 b)の第一式に(2.58 a)を代入して

$\sin(\psi(s) + \phi)$ を求め

$$\begin{aligned} \sin(\psi(s) + \phi) &= -\frac{1}{A} \left\{ z' \sqrt{\beta(s)} + z \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \right\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

cos項との2乗和をとれば

$$\begin{aligned} W \equiv A^2 = \gamma(s) z(s)^2 \\ + 2 \alpha(s) z(s) z'(s) + \beta(s) z'(s)^2 \end{aligned} \quad (2.60)$$

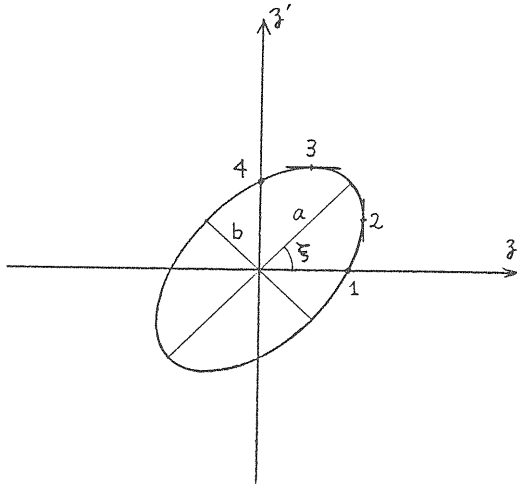


図6 位相空間内の楕円

(2.61) 式によって定義される不変量 W をクーラン・シュナイダー不変量と呼ぶ。エミッタンスと呼ばれるビームの拡がりを示す量は正にクーラン・シュナイダー不変量に他ならない。また (2.61) 式は同じエミッタンスを持った粒子が位相空間に描く楕円の形を与えている。実際図6に示す各点の座標をエミッタンス W とツイスパラメタ α, β, γ を使って与えておく。

$$z_1 = \sqrt{W/\gamma} \quad (2.62 a)$$

$$z_2 = \sqrt{W\beta}, \quad z'_2 = -\alpha\sqrt{W/\beta} \quad (2.62 b)$$

$$z_3 = -\alpha\sqrt{W/\gamma}, \quad z'_3 = \sqrt{W\gamma} \quad (2.62 c)$$

$$z_4 = \sqrt{W/\beta} \quad (2.62 d)$$

楕円の長・短軸の長さ a, b とその比は

$$a = \sqrt{W/2} (\sqrt{H+1} + \sqrt{H-1}) \quad (2.63 a)$$

$$b = \sqrt{W/2} (\sqrt{H+1} - \sqrt{H-1}) \quad (2.63 b)$$

$$a/b = H + \sqrt{H^2 - 1} \quad (2.63 c)$$

ここで H は次に定義される。

$$H = \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \quad (2.64)$$

楕円の傾き ξ は

$$\sin 2\xi = -\alpha/\sqrt{H^2 - 1} \quad (2.65 a)$$

$$\cos 2\xi = (\beta - \gamma)/2\sqrt{H^2 - 1} \quad (2.65 b)$$

$$\tan 2\xi = -2\alpha/(\beta - \gamma) \quad (2.65 c)$$

2.2 トランスファ行列

円形加速器(シンクロトロン)を機成する磁石や自由空間の配置と各々のトランスファ行列を知れば、前節で導いた手法でベータatron振動の方程式

(2.1)が数値的に解ける。ここでは各要素のトランスファ行列を求めておこう。

$$z'' + K(s)z = 0 \quad (2.66)$$

ベータatron振動(2.66)式の2個の独立解から前節と同じ方法でトランスファ行列を計算する。今我々は各々の要素(偏向磁石や4極磁石)内では $K(s)$ が一定な場合を扱い、シンクロトロン全周を、その中では $K(s)$ が変らない区間に分割することができるものとしよう。このような各区間(個々の偏向磁石や4極磁石そしてこれらの間に存在する磁場の無い自由空間)毎の解は既に得られており、簡単にトランスファ行列が計算される。

まず $K(s) = K_0 > 0$ における一般解は $\omega_0 = \pm\sqrt{K_0}$ として

$$z = A \cos(\omega_0 s + \phi) \quad (2.67 a)$$

$$z' = -\omega_0 A \sin(\omega_0 s + \phi) \quad (2.67 b)$$

ここで $A = 1, \phi = 0$ および $\phi = \frac{\pi}{2}$ によって2個の独立解を決める。区間長を L とし、トランスファ行列 M_f を使えば入口と出口における独立解は次の関係を持つ。

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_0 L & -\sin \omega_0 L \\ -\omega_0 \sin \omega_0 L & -\omega_0 \cos \omega_0 L \end{pmatrix} = M_f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

これを解き、 $\omega_0 = \pm\sqrt{K_0}$ を代入

$$M_f = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K_0} L) & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin(\sqrt{K_0} L) \\ -\sqrt{K_0} \sin(\sqrt{K_0} L) & \cos(\sqrt{K_0} L) \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

次に $K(s) = K_0 < 0$ における一般解は

$$\omega_0 = \pm\sqrt{-K_0} \text{ として}$$

$$z = A \cosh(\omega_0 s + \phi) \quad (2.70 a)$$

$$z' = \omega_0 A \sinh(\omega_0 s + \phi) \quad (2.70 b)$$

ここで $A = 1, \phi = 0$ および $\phi = -\frac{\omega_0 L}{2}$ により2個の独立解を与えれば、トランスファ行列 M_d を使った独立解間の関係式は

$$\begin{pmatrix} \cosh \omega_0 L & \cosh \frac{\omega_0 L}{2} \\ \omega_0 \sinh \omega_0 L & \omega_0 \sinh \frac{\omega_0 L}{2} \end{pmatrix} \\
= M_d \begin{pmatrix} 1 & \cosh \frac{\omega_0 L}{2} \\ 0 & -\omega_0 \sinh \frac{\omega_0 L}{2} \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

これを解いて M_d を求め、双曲線関数の公式を使って整理する。さらに $\omega_0 = \pm \sqrt{-K_0}$ を代入すれば

$$M_d = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{-K_0} L) & \frac{1}{\sqrt{-K_0}} \sinh(\sqrt{-K_0} L) \\ \sqrt{-K_0} \sinh(\sqrt{-K_0} L) & \cosh(\sqrt{-K_0} L) \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

(2.69) および (2.72) 式における K_0 は、(1.95) より与えられている。

$$K_0 = b_1 + \kappa^2 \quad (\text{水平方向}) \quad (2.73 \text{ a})$$

$$K_0 = -b_1 \quad (\text{垂直方向}) \quad (2.73 \text{ b})$$

また (1.83), (1.84) 式により

$$\kappa = b_0 = \frac{e}{p_0} B_y(0, 0) \quad (\text{偏向磁場}) \quad (2.74 \text{ a})$$

$$b_1 = \frac{e}{p_0} \left. \frac{\partial B_y(x, 0)}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (4 \text{ 極磁場}) \quad (2.74 \text{ b})$$

今日、稼働中、建設中、計画中の多くのシンクロトロンは、機能分離型であり、4極磁場と偏向磁場の重ね合せが無い。このような4極磁石では(2.73)式の κ はゼロで、 K_0 は水平・垂直両方向でちょうど符号を反転した関係になっている。従ってトランスファ行列も M_r と M_d 異なった型を使って、水平・垂直方向の運動が記述される。

また (2.73 a) 式から明らかなように、純粋な偏向磁場によっても水平方向には収束力 $K_0 > 0$ が生じている。これは、図7に示すように外側を通る粒

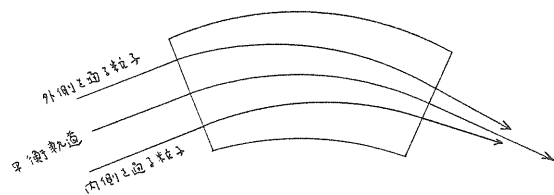


図7 扇形偏向磁石による水平方向収束作用

子は長く磁場中を走りより強く内側に曲げられることを考えれば理解できるであろう。偏向磁石のトランスファ行列を偏向角 θ , 曲率半径 $\rho = \kappa^{-1}$ を使って書こう。水平方向については (2.69) 式から直接に、また垂直方向については (2.69) 式で K_0 をゼロに近づけた極限をとることで

$$M_B^H = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.75 \text{ a})$$

$$M_B^V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.75 \text{ b})$$

(2.75 b) 式で $\rho \theta = L$ とおけば長さ L の自由空間のトランスファ行列である。

さてこのように求めた偏向磁石のトランスファ行列 (2.75) 式は、図7に示したような扇形 (セクタータイプ) 磁石に対応するものである。ここでは平衡軌道が磁石に垂直に入り出てゆく。一般の入射角を持つ磁石では事情が異なりトランスファ行列 (2.75) 式にも修正を要する。

この効果を計算するために、図8に示すごとく、一般の入射角を持つ磁石を扇形磁石と楔形 (くさびがた) 磁石の重ね合せで表現する。扇形磁石については既に知っているので、単独の楔形偏向磁石の効果を調べよう。図9に示すように、水平方向の変位 x を持って入射した粒子は楔形磁場の中を、軌道の曲りから生じる2次以上の補正項を無視すれば、長さ $x \tan \varepsilon$ 走る*)。これによって生じる偏向角 α は

$$\alpha = \frac{x}{\rho} \tan \varepsilon \quad (2.76)$$

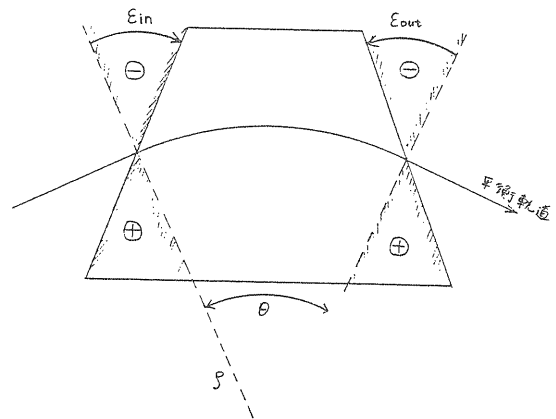


図8 扇形磁石と楔形磁石の重ね合せによる一般の入射角を持つ磁石の表現

*脚注

この磁石は楔形なので、磁石中を走る距離が変位 x に比例している。2次曲線で表わされる端部形状の磁石を作ればこの距離は x の2乗に比例し、6極磁石と等価となる。3次や4次の曲線で端部を作れば、それぞれに応じた多極磁石に等価である。KEKのブースターシンクロトロンやSLAC(スタンフォード大学線型加速器センター)のSLC計画の一部である減衰リング(旧型の方、新型では永久磁石を使っている。)では6極磁場を得るために偏向磁石の端部にこのような工作が行なわれている。

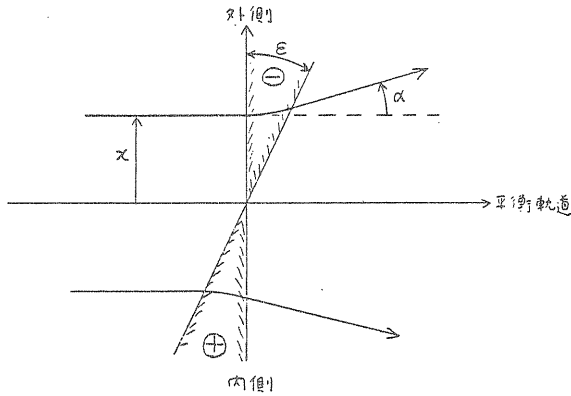


図9 楔形偏向磁石による水平方向発散作用

すなわちこの楔形磁場は、水平方向に関して、次のトランスファ行列で表わされる長さゼロの4極磁石と考えることができる。

$$M_E^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \tan \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

一方垂直方向についてはどうなっているのか。図10(a)に示すように、現実の磁石には必ずしもフリッジ場とよばれる磁場のはみだしがある。磁石が扇形で平衡軌道が垂直に入射する場合、フリッジ磁場の水平面内成分 B_h は平衡軌道の向きなので粒子の垂直運動に作用しない。しかし図10(b)に見るように、入射角が垂直でない場合には B_h から平衡軌道に垂直な成分 B_x が生じ、垂直方向の変位を持って入射する粒子を垂直方向に曲げる作用をする。 B_h の平衡軌道方向成分 B_s とそれに垂直な成分 B_x は、図8に定義した入射角 ε_{in} を ε と書けば次のように表わせる。

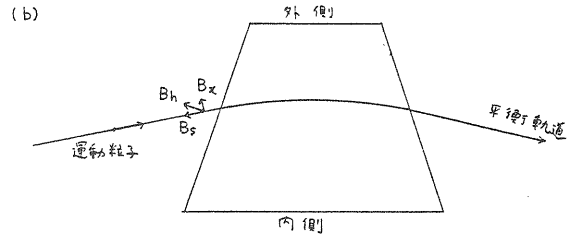
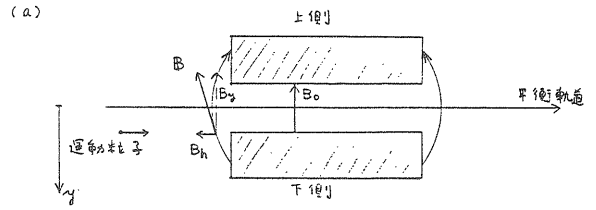


図10 フリッジ磁場による垂直方向収束作用

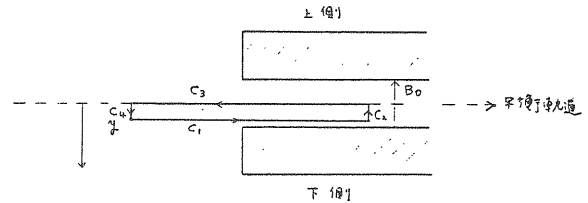


図11 フリッジ磁場の積分路

$$B_s = B_h \cos \varepsilon \quad (2.78 a)$$

$$B_x = B_h \sin \varepsilon \quad (2.78 b)$$

垂直変位 y で入射した粒子の曲げ角は B_x をフリッジ磁場内で積分すればよい。直接 B_x の積分をせずに B_s の積分を通じ求める。線積分路を図11に示す C_1, C_2, C_3 および C_4 に決める。全体の積分はマックスウェル方程式 (1.73 a) $\text{rot} B = 0$ によりゼロになる。

$$\oint B ds = \int_{C_1} B_s ds + \int_{C_2} B_0 dy = 0 \quad (2.79)$$

ここで C_4 は充分磁石から遠く、また C_2 は充分磁石の内部にとる。また C_3 は対称平面上なので平行な磁場成分はゼロである。(2.79) および (2.78 a) 式より

$$\cos \varepsilon \int_{C_1} B_h ds = -y B_0 \quad (2.80)$$

積分経路 C_1 は垂直変位 y で入射した粒子の軌道を近似しているから、この粒子の曲げ角 α は

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{B_{y0} \rho} \int_{C_1} B_x ds = \frac{1}{B_{y0} \rho} \sin \varepsilon \int_{C_1} B_h ds \\ &= -\frac{y}{\rho} \tan \varepsilon \end{aligned} \quad (2.81)$$

すなわち垂直方向の端部効果は、(2.77)式で表わされた水平方向とは逆符号の4極磁石に等価であった。

$$M_E^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \tan \epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

このように得られた、端部効果を表わすトランスファ行列 (2.77) および (2.82) 式を扇形磁石のトランスファ行列 (2.75) 式に、入口と出口に対応させて、両側から掛けてやれば一般の入射、出射角を持つ磁石のトランスファ行列を得る。

3. 摂動のかかったベータatron振動

第2章で扱ったベータatron振動は理想的なものであった。現実のベータatron振動には種々の原因から生じる摂動が働いている。ここではその摂動をベータatron振動の方程式 (2.1) の右辺に現われる関数 f として表わし、 f のタイプに応じて調べる。

$$z'' + K(s)z = f \quad (3.1)$$

以下の節で取扱う f のタイプは次の5種類である。

3.1 偏向磁場の誤差

$$f = \frac{e}{p_0} \Delta B_y(0, 0, s) = F(s)$$

3.2 磁場勾配の誤差

$$f = -\Delta K(s)z = k(s)z$$

3.3 運動量のずれ

$$f \propto \frac{\Delta p}{p}$$

3.4 水平・垂直結合

f が他の座標 (水平方向なら y を垂直方向なら x) を含む。

3.5 非線型項

$$f = \sum_{m,n} c_{mn} x^m y^n, \quad m+n \geq 2$$

3.1 偏向磁場の誤差

偏向磁場の誤差によって生じるベータatron振動の摂動は

$$z'' + K(s)z = F(s) \quad (3.2)$$

ここで

$$F(s) = \frac{e}{p_0} \Delta B_z(0, 0, s) \quad (3.3)$$

であり、 ΔB_z は水平ないし垂直方向の誤差磁場を示す*。

*脚注

第1章で求めた磁場展開は磁場の面対称性に基づいたものであった。 $\Delta B_x(0, 0, s) \neq 0$ の存在はこの条件を破っている。また変位 z の原点は平衡軌道上であることを仮定してきたが、 $F(s) \neq 0$ の導入によって、もはや $z=0$ の軌道は平衡軌道ではなくなる。

誤差磁場の発生源は、偏向磁石の製作上生じる磁場強度ないし磁石有効長の誤差、据え付けの際生じる平衡軌道を軸とした回転誤差、また4極磁石の据え付け位置のずれなどが主なものである。もちろん加速器内に持ち込まれたさまざまな機器、たとえば入射や取り出し用の磁石類が思いがけない誤差磁場を発生することもある。さらに時間的に変化したり、一時的なものとしては、磁石の履歴現象 (ヒステリシス)、磁場の時間変化にともなう真空容器 (ダクト) 壁の渦電流による磁場もある。

(3.2)式を解くためにグリーン関数による方法をとろう。

周期 c を持つデルタ関数 $\delta_p(s-s_1)$ を使って、グリーン関数 $G(s, s_1)$ は次式を満足する周期 c の関数と定義する。

$$G''(s, s_1) + K(s)G(s, s_1) = \delta_p(s-s_1) \quad (3.4)$$

$G(s, s_1)$ が見つければ一般の $F(s)$ に対する (3.2) 式の周期解は

$$z(s) = \int_s^{s+c} G(s, s_1) F(s_1) ds_1 \quad (3.5)$$

となる。これは (3.2) 式の線型性から直ちに解ることである。

(3.4)式を満たす $G(s, s_1)$ をトランスファ行列を用いて探そう。

(3.4)式右辺のデルタ関数は s_1 点で単位キックを与える。これで生じた z_1' はベータatron振動をしながら加速器リングを一周し s_1 点に戻ったときは z_1' となっている。ここで再び単位キックが与えられるが、(3.4)式の周期解となるには、図12に見るように、次の関係が成立しなければならない。

$$z_1' + 1 = z_1' \quad (3.6)$$

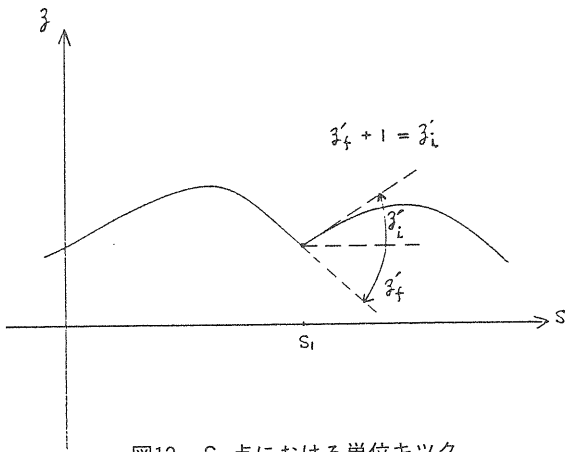


図12 s_1 点における単位キック

図13に示したように、単位キックで生じたベータトロン振動をトランスファ行列で追跡してみよう。

$$\begin{pmatrix} z_f \\ z'_f \end{pmatrix} = M(s_1 + c | s_1) \begin{pmatrix} z_i \\ z'_i \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

周期解は (3.6) および (3.7) 式さらに $z_f = z_i$ を連立させて求めることができる。

$$\begin{pmatrix} z_i \\ z'_i - 1 \end{pmatrix} = M(s_1 + c | s_1) \begin{pmatrix} z_i \\ z'_i \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{pmatrix} z_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \{M(s_1 + c | s_1) - I\}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

行列要素を (2.34) 式で与えれば

$$\begin{pmatrix} z_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1 - \cos \psi_c)}$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos \psi_c - \alpha_1 \sin \psi_c - 1 & -\beta_1 \sin \psi_c \\ \gamma_1 \sin \psi_c & \cos \psi_c + \alpha_1 \sin \psi_c - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_1 \cot \frac{\psi_c}{2} \\ 1 - \alpha_1 \cot \frac{\psi_c}{2} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

これが単位キックを与えた場所における、平衡軌道の変位とその傾き（キック直後の）である。観測点 s_2 における値は s_1, s_2 間のトランスファ行列を使って次式を計算すればよい。

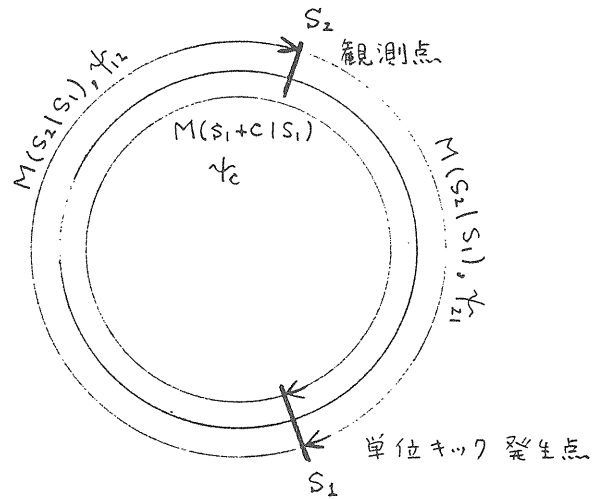


図13 トランスファ行列によるベータトロン振動の追跡

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} z_i \\ z'_i \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

ここで用いるべきトランスファ行列は (2.54) 式に与えられており代入すれば

$$z_0 = \frac{1}{2 \sin \frac{\psi_c}{2}} \sqrt{\beta_1 \beta_2} \cos \left(\frac{\psi_c}{2} - \psi_{12} \right) \quad (3.12)$$

これが正にグリーン関数であるが、 s_1 に関する積分の範囲 (3.5) 式を参照して、位相が増加関数になるよう ψ_{12} を ψ_{21} を使って表わしておく。また $\psi_c = 2\pi\nu$ とおけば

$$G(s, s_1) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_1)}}{2 \sin \pi\nu} \cos[\pi\nu + \psi(s) - \psi(s_1)] \quad (3.13)$$

結局 (3.2) 式の周期解すなわち平衡軌道の歪み（しばしば C. O. D., closed orbit distortion と言う。）は

$$z(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi\nu} \int_s^{s+c} \sqrt{\beta(s_1)} F(s_1) \cos[\pi\nu + \psi(s) - \psi(s_1)] ds_1 \quad (3.14)$$

これを見れば明らかに、 ν 値が整数のとき解が発散する。これがいわゆる整数共鳴 (Integer Resonance) である。これは非常に強い共鳴であり、 ν 値を整数に近付ければ、ビームはたちどころに失われる。

さて一方どんな誤差磁場が特にいけないのだろうか、これを調べるために (3.2) 式を異なった方法で

解いてみよう。はじめに独立変数 s を次に定義する ϕ に変換する**。

**脚注

この変換をクーラン・シュナイダー変換とよぶ。この変換によりヒル方程式が調和振動の方程式に書換えられる。ヒル方程式の摂動（ベータatron振動に対する摂動）を調べる時、非常に有効な手法である。

$$\phi = \frac{1}{\nu} \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)} \quad (3.15)$$

また $z(s)$ を次式で与える $\eta(\phi)$ で表わす。

$$\eta(\phi) = \frac{z(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \quad (3.16)$$

(3.15), (3.16) 式を (3.2) 式に代入すれば

$$\frac{d^2 \eta(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2 \eta(\phi) = \nu^2 \{\beta(s)\}^{\frac{3}{2}} F(s) \equiv \nu^2 f(\phi) \quad (3.17)$$

ここで周期解を求めるために $f(\phi)$ と $\eta(\phi)$ をフーリエ級数で展開する。

$$f(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\phi} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^c \sqrt{\beta(s)} F(s) e^{-ik\phi} ds \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\eta(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k e^{ik\phi} \quad (3.20)$$

(3.18) および (3.20) 式を (3.17) 式に代入して η_k を求めることにより次式を得る。

$$\eta(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^2 f_k}{\nu^2 - k^2} e^{ik\phi} \quad (3.21)$$

これは (3.14) 式と同じ内容を持っている。これを見れば、たとえ ν が同じでも誤差磁場が ν に近い整数のフーリエ成分を持つとき C. O. D. が大きくなることを知る。

ランダムに分布した誤差磁場によって生じる C. O. D. の大きさを推定してみよう。非斉次ベータatron振動方程式 (3.17) 式の右辺をゼロとおき斉次化すれば、その解 $\eta(\phi)$ は次のようになる。

$$\eta(\phi) = A \cos(\nu\phi + \delta) = \beta^{-\frac{1}{2}} z \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(\phi)}{d\phi} &= -\nu A \sin(\nu\phi + \delta) \\ &= \nu \beta^{-\frac{1}{2}} (\alpha z + \beta z') \end{aligned} \quad (3.23)$$

これを使ってエミッタンス W (クーラン・シュナイダー不変量) を表わせば

$$\begin{aligned} W &= \gamma(s) z(s)^2 + 2\alpha(s) z(s) z'(s) + \beta(s) z'(s)^2 \\ &= \frac{1}{\beta(s)^2} [z(s)^2 + \{\alpha(s) z(s) + \beta(s) z'(s)\}^2] \\ &= \eta(\phi)^2 + \frac{1}{\nu^2} \left\{ \frac{d\eta(\phi)}{d\phi} \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

本来の非斉次方程式 (3.17) 式の周期解すなわち C. O. D. そのものは (3.14) 式と同様に求められて

$$\eta(\phi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\phi_1) \cos \nu(\pi + \phi - \phi_1) d\phi_1 \quad (3.25)$$

ϕ で微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{d\eta(\phi)}{d\phi} &= \frac{-\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\phi_1) \sin \nu(\pi + \phi - \phi_1) d\phi_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

この (3.25), (3.26) を (3.24) 式に代入して得る C. O. D. のエミッタンス W はもはや不変量ではなく $W(\phi)$ と書かねばならない。この事情を図14に示す。 ϕ の変化にともなって、実際にエミッタンスが誤差磁場により生じるキックのために保存していないのである。別の言葉を使えば、(3.22) 式で表わされた

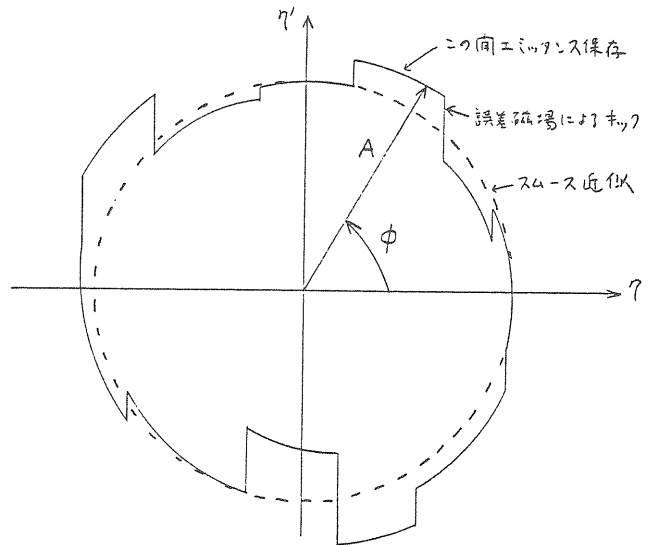


図14 C. O. D. のベータatron振動

斉次ベータロン振動の解に含まれる定数Aおよび δ (運動の初期条件で決まる。)は、 ϕ の進行につれ、誤差磁場の有る場所で急に变化しているのである。ここで、個々の誤差磁場によるキックを単なるゆらぎと考え ϕ について平均化されたエミッタンスでC. O. D. を記述するやり方がスムーズ近似である。

さて $W(\phi)$ は次のように与えられる。証明はおまかせしよう。

$$W(\phi) = \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi-2\pi} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\phi_1) f(\phi_2) \cos \nu(\phi_1 - \phi_2) d\phi_1 d\phi_2 \quad (3.27)$$

ここで誤差磁場の源が4極磁石の据え付け誤差から生じているとしよう。そして(3.27)式の積分を総和で置き換えて書こう。

$$W(\phi) = \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \sum_j (\Delta z_i K_i \beta_i^{1/2} L_i) (\Delta z_j K_j \beta_j^{1/2} L_j) \times \cos \nu(\phi_i - \phi_j) \quad (3.28)$$

ここで Δz_i はi番目の4極磁石の据え付け誤差、 $\Delta z_i K_i$ が誤差磁場で、 K_i は4極磁場の強さ、 L_i は磁石長そして β_i はこの磁石中のベータ関数である。

(3.28)式を色々な据え付け誤差の組合せについて平均すれば(アンサンブル平均)、異なった磁石の据え付け誤差間に相関が無いと考えられるので、

$$\langle W \rangle = \frac{\langle (\Delta z)^2 \rangle}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \beta_i (K_i L_i)^2 \quad (3.29)$$

(3.29)式により、据え付け誤差の2乗平均値 $\langle (\Delta z)^2 \rangle$ が解ればそれによって生じるC. O. D.の期待値が計算できる。

3.2 磁場勾配の誤差

磁場勾配に誤差のあるベータロン振動を表わす方程式は

$$z'' + K(s)z = -k(s)z \quad (3.30)$$

ここで

$$k(s) = +\Delta K(s) = \pm \Delta b_1(s) = \pm \frac{e}{p_0} \Delta \left\{ \frac{\partial B_y(x, 0, s)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right\} \quad (3.31)$$

複号は各々水平および垂直振動に対応する。

(3.30)式の右辺がゼロの解は既に知っているの

で、摂動の影響をトランスファ行列を使って調べてみる。摂動項 $k(s)$ が弱く、さらに共鳴条件から遠い場合には、1次近似による摂動のトランスファ行列が有効である。

加速器リングの s_1 点に長さ ds_1 の誤差勾配 $k(s_1)$ があるとき、 s 点から出発する周回トランスファ行列 $N(s, s_1, ds_1)$ は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} N(s, s_1, ds_1) &= M(s+c | s_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1) ds_1 & 1 \end{pmatrix} M(s_1 | s) \\ &= M(s+c | s) - \begin{pmatrix} m_{12}(s+c | s_1) \cdot m_{11}(s_1 | s) \\ m_{22}(s+c | s_1) \cdot m_{11}(s_1 | s) \end{pmatrix} k(s_1) ds_1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

この行列要素 m_{ij} は(2.54)式に与えられている。誤差勾配が加速器一周に分布しているから、一次近似計算では(3.32)式を s_1 について積分すればよい。

摂動後の周回位相 ψ_c を求めるには対角和をとって

$$\text{Tr} N = 2 \cos \psi_{oc} - (\beta_1 \sin \psi_{oc}) k(s_1) ds_1 \quad (3.33)$$

リング全周の寄与を積分すればよい。

$$\cos \psi_c = \frac{1}{2} \int_0^c \text{Tr} N ds_1 \quad (3.34)$$

ベータロン振動数のずれ、いわゆるチューンシフト、として求めれば

$$\begin{aligned} \Delta \nu &= \frac{1}{2\pi} (\psi_c - \psi_{oc}) \approx -\frac{\cos \psi_c - \cos \psi_{oc}}{2\pi \sin \psi_{oc}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^c \beta(s_1) k(s_1) ds_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

を得る。

またベータ関数の変化を調べるには(3.32)式で(1, 2)成分を計算し

$$\begin{aligned} N(1, 2) &= \beta_0(s) \sin \psi_{oc} \\ &- \beta_0(s) \beta_0(s_1) \sin[\psi_0(s+c) - \psi_0(s_1)] \sin[\psi_0(s_1) - \psi_0(s)] k(s_1) ds_1 \end{aligned} \quad (3.36)$$

これを全周で積分することで、周回トランスファ行列の(1, 2)成分の変化 Δm_{12} を求める。

$$\Delta m_{12}(s+c | s)$$

$$= -\beta_0(s) \int_s^{s+c} \beta_0(s_1) k(s_1) \sin[\psi_{0c} + \psi_0(s) - \psi_0(s_1)]$$

$$\sin[\psi_0(s_1) - \psi_0(s)] ds_1 \quad (3.37)$$

行列の(1, 2)成分の変化とベータ関数の変化との関係は

$$\begin{aligned} \Delta m_{12} &= \beta \sin \psi_c - \beta_0 \sin \psi_{0c} \\ &\approx \Delta \beta \cdot \sin \psi_{0c} + \beta_0 \cos \psi_{0c} \cdot 2\pi \Delta \nu \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.37)式と(3.38)の右辺を等しいと置き、 $\Delta \nu$ を(3.35)式によって与えれば

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \beta(s)}{\beta_0(s)} &= \frac{-1}{2 \sin \psi_{0c}} \int_s^{s+c} k(s_1) \beta_0(s_1) [\cos \psi_{0c} \\ &+ 2 \sin\{\psi_{0c} + \psi_0(s) - \psi_0(s_1)\} \sin\{\psi_0(s_1) - \psi_0(s)\}] ds_1 \\ &= \frac{-1}{2 \sin \psi_{0c}} \int_s^{s+c} k(s_1) \beta_0(s_1) \cos[\psi_{0c} \\ &- 2\{\psi_0(s_1) - \psi_0(s)\}] ds_1 \end{aligned} \quad (3.39)^*$$

を得る。

*) 脚注

(3.39)式の両辺をsで微分する。まず左辺を微分することで

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\Delta \beta(s)}{\beta_0(s)} \right) \\ = \frac{-2}{\beta_0(s)} \left\{ \Delta \alpha(s) - \alpha_0(s) \frac{\Delta \beta(s)}{\beta_0(s)} \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

次に右辺を微分して左辺の微分と等置すれば

$$\begin{aligned} \left(\Delta \alpha - \alpha_0 \frac{\Delta \beta}{\beta_0} \right) &= \frac{-1}{2 \sin \psi_{0c}} \\ &\int_s^{s+c} k(s_1) \beta_0(s_1) \sin[\psi_{0c} - 2\{\psi_0(s_1) - \psi_0(s)\}] ds_1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

を得る。すなわち(3.39)式と(3.41)式を見れば明らかのようにトウイスパラメタ全体の変動は次式でまとめて表わすことができる。

$$\begin{aligned} T(s) &\equiv \frac{\Delta \beta(s)}{\beta_0(s)} + i \left\{ \Delta \alpha(s) - \alpha_0(s) \frac{\Delta \beta(s)}{\beta_0(s)} \right\} \\ &= \frac{-1}{2 \sin \psi_{0c}} \int_s^{s+c} k(s_1) \beta_0(s_1) \\ &\exp i[\psi_{0c} - 2\{\psi_0(s_1) - \psi_0(s)\}] ds_1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

このT(s)はs点におけるトウイスパラメタ全体としてのずれを示す量である。

(3.39)式の見れば、ベータatron振動数が整数ないし半整数のとき、ベータ関数の変動が発散することが理解できる。これを半整数共鳴と呼び、加速器のベータatron振動数はこの付近を避けなければならない**。

** 脚注

これは加速器の中でビームを安定に回しておきたい時の話である。反対にこの半整数共鳴を積極的に起こすようにし、加速器からビームを少しずつ取り出す技術も確立している。KEKの12GeV陽子シンクロトロンでは、この半整数共鳴取り出し法を利用して、高エネルギー物理実験のためにビームを供給してきている。

また(3.39)式の被積分関数を見れば、ベータ関数の変動を起こす磁場勾配誤差のフーリエ成分はベータatron振動数の2倍に近いものであることを知る。

さて今までの議論は誤差勾配k(s)の1次摂動(3.32)式に基づいたものであった。さらにチューンの半整数値付近の様子を見るため、近似を2次にまで進めてみよう。

2次近似のトランスファ行列N₂は

$$\begin{aligned} N_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1) ds_1 & 1 \end{pmatrix} M(s_1+c | s_2) \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_2) ds_2 & 1 \end{pmatrix} M(s_2 | s_1) \end{aligned} \quad (3.43)$$

(2.54)式により無摂動行列要素を与え対角和をとる。

少し込み入った計算の後

$$\begin{aligned} \text{Tr} N_2 &= 2 \cos \psi_{0c} - \{k(s_1) \beta(s_1) ds_1 \\ &+ k(s_2) \beta(s_2) ds_2\} \sin \psi_{0c} \\ &+ k(s_1) \beta(s_1) k(s_2) \beta(s_2) ds_1 ds_2 \\ &\times \sin\{\psi_0(s_2) \\ &- \psi_0(s_1)\} \sin\{\psi_0(s_1+c) - \psi_0(s_2)\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

これを s_1 および s_2 について積分をすれば、摂動後の周回位相 ψ_c が求まる。

$$\begin{aligned} \cos \psi_c - \cos \psi_{0c} &= -\frac{\sin \psi_{0c}}{2} \int_0^c k(s) \beta(s) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^c ds_1 \int_{s_1}^c ds_2 k(s_1) k(s_2) \beta(s_1) \beta(s_2) \\ &\sin\{\psi_0(s_2) - \psi_0(s_1)\} \sin[\psi_{0c} - \{\psi_0(s_2) - \psi_0(s_1)\}] \end{aligned} \quad (3.45)$$

ベータatron振動の安定条件は、(2.36) 式に示したように $|\cos \psi_c| \leq 1$ となる実数 ψ_c の存在である。(3.45) 式を解いて $|\cos \psi_c| > 1$ となる場合、ベータatron振動は不安定で、これに対応する ψ_{0c} の領域を禁止帯(ストップバンド)と称する。共鳴条件(ベータatron振動数が整数ないし半整数)の付近で(3.45)式を計算し、このストップバンドの中を求めてみよう。

まず半整数のときを考える。 q を整数、 ε を微小量として

$$\nu_0 = \frac{\psi_{0c}}{2\pi} = \frac{1}{2}(2q+1) + \varepsilon \quad (3.46)$$

とおく、 ε について2次の展開により

$$\cos \psi_{0c} = -1 + 2\pi^2 \varepsilon^2, \quad \sin \psi_{0c} = -2\pi \varepsilon \quad (3.47)$$

この展開を(3.45)式に代入し、 $k(s)$ と ε の3次以上の項を無視すれば

$$\cos \psi_c + 1 = 2\pi^2 \varepsilon^2 + \pi \varepsilon J_0 + I_2 \quad (3.48)$$

I_2 で表わした2重積分は、位相項を展開し s_1 と s_2 を分離し s_2 に関する積分範囲を0から c までに置き換えることにより次のように計算される。

$$I_2 = \frac{1}{8} (J_0^2 - |J_{2q+1}|^2) \quad (3.49)$$

ここで

$$J_n = \int_0^c k(s) \beta(s) e^{-in\phi(s)} ds \quad (3.50)$$

であり、位相 $\phi(s)$ は次の定義による。

$$\phi(s) = 2\pi \frac{\psi_0(s)}{\psi_{0c}} \quad (3.51)$$

ストップバンド巾 $\delta\nu$ は、図15に示したように、(3.48)式の右辺をゼロとおいてできる ε に関する2次方程式

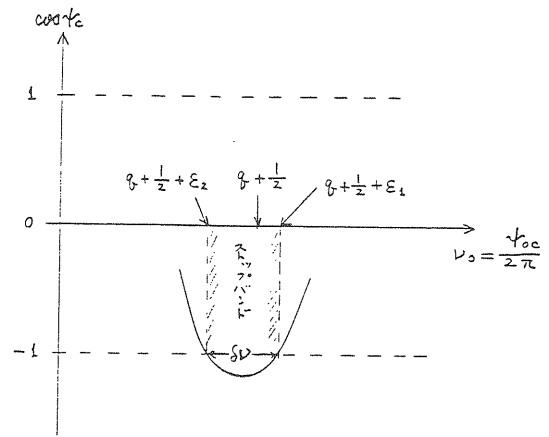


図15 半整数値近くのストップバンド

$$2\pi^2 \varepsilon^2 + \pi \varepsilon J_0 + \frac{1}{8} (J_0^2 - |J_{2q+1}|^2) = 0 \quad (3.52)$$

これを解いて2つの根 ε_1 と ε_2

$$\varepsilon_1 = \frac{-J_0 + |J_{2q+1}|}{4\pi}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-J_0 - |J_{2q+1}|}{4\pi} \quad (3.53)$$

によってはさまれた領域として求めることができる。

$$\delta\nu = \frac{|J_{2q+1}|}{2\pi} \quad (3.54)^*$$

*) 脚注

1次近似ではストップバンドは現われず、チューンシフトのみ生じていた。しかしこれは一ヶ所に局在した磁場勾配誤差で、ストップバンドが生じないということではない。実際薄レンズ近似で局在した勾配誤差を表わして計算すれば、

$$\cos \psi_c = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta K & 1 \end{bmatrix} M(s+c|s) \right\} \quad (3.55)$$

これより

$$\cos \psi_c - \cos \psi_{0c} = -\frac{1}{2} \Delta K \beta \sin \psi_{0c} \quad (3.56)$$

ここで $\frac{\psi_{0c}}{2\pi}$ が半整数値に近いとして(3.46)式の展開を行ない(3.47)式を(3.56)に代入すれば再び ε に関する2次方程式から

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\Delta K \beta}{2\pi} \quad (3.57)$$

すなわちチューンシフト $\Delta\nu$ とストップバンド巾

$\delta\nu$ は

$$\Delta\nu = -\frac{\Delta K\beta}{4\pi}, \quad \delta\nu = \frac{|\Delta K|\beta}{2\pi} \quad (3.58)$$

となる。この結果と (3.35) 式および (3.54) 式を見較べれば磁場勾配誤差のフーリエ成分について次の関係が有ることに気付く

$$|J_0| = |J_{2q+1}| \quad (3.59)$$

この関係の成立は薄レンズ一枚の作る誤差はデルタ関数の性質を持つことから理解できる。

ここまでの議論は半整数値付近を考えてきたが、整数値付近でも同様なことが言えて、ストップバンド中 $\delta\nu$ は

$$\delta\nu = \frac{|J_{2q}|}{2\pi} \quad (3.60)$$

となる。

3. 3 運動量のずれ

運動量が平衡粒子と異なる粒子の従う運動方程式は、(1.91) 式に導いたクロマティック項から高次項を落せば、水平方向の運動について次のように書ける。

$$x'' + K(s)(1 - \delta)x = \kappa(s)\delta \quad (3.61)$$

ただしここで $K(s)$ に含まれる偏向磁場による収束力 κ^2 項は無視した。

また $\delta = \frac{\Delta p}{p}$ は (1.90) 式で定義した運動量のずれを示す量である。垂直方向の運動は、(3.61) 式の右辺をゼロとすればよい。(1.92b) により δ を $\Delta = \frac{\Delta p}{p_0}$ で展開して、 x と Δ に関して 2 次の項を無視すれば

$$x'' + K(s)x = \kappa(s)\Delta \quad (3.62)$$

(3.62) 式は偏向磁場誤差を考えたときの (3.2) 式と同じ形であり、3. 1 節の議論が使える。すなわち、右辺を誤差磁場と考えて、生じる C. O. D. (この C. O. D. は運動量のずれに比例している。) を (3.14) 式あるいは (3.21) 式を計算して求められる。

しかしここでは計算機プログラムで使用することを念頭において、2. 2 節で扱ったトランスファ行列を用いる計算法を使用してみよう。新たにトランスファ行列の対象となるベクトルは、粒子の変位と

傾きを示す 2 元ベクトルに運動量のずれを加えた 3 元ベクトルであり、トランスファ行列も 3 行 3 列となる。扇形偏向磁石におけるこのトランスファ行列を求めてみよう。この行列の斉次方程式に対応する部分は既に (2.75 a) 式に求めている。また (3, 1) 成分 (3, 2) 成分および (3, 3) 成分は運動量ずれが保存することから決まり、行列は次の形である。

$$M_B^H(3) = \begin{pmatrix} M_B^H(2) & e \\ f & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta & e \\ -\sin\theta/\rho & \cos\theta & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

e および f を決めるには、(3.62) 式 of の非斉次解を使えばよい。実際に図 16 で示す条件で磁石に入射した運動量のずれ δ の粒子軌道を追跡すれば、出口における変位と傾き x_e および x'_e は次の関係を持つ

$$(\rho + x_e)\cos\theta = \rho(1 + \delta)\cos(\theta - x'_e) - \rho\delta \quad (3.64 a)$$

$$(\rho + x_e)\sin\theta = \rho(1 + \delta)\sin(\theta - x'_e) \quad (3.64 b)$$

これを Δ , x_e および x'_e について 1 次近似で解けば

$$x_e = \Delta \cdot \rho(1 - \cos\theta) \quad (3.65 a)$$

$$x'_e = \Delta \cdot \sin\theta \quad (3.65 b)$$

この x_e および x'_e が各々 (3.63) 式 of の e および f に Δ を掛けたものになっていることは明らかである。

$$M_B^H(3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta & \rho(1 - \cos\theta) \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

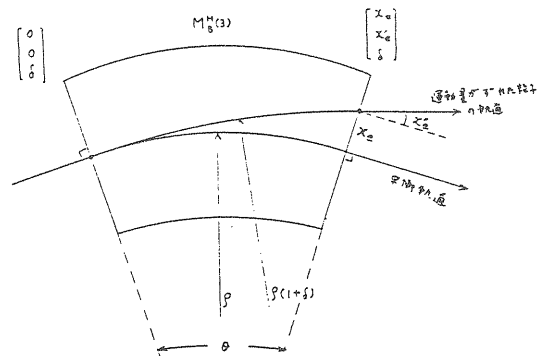


図 16 扇形偏向磁石における運動量ずれの影響

4極磁石中では(3.62)式の右辺で $x=0$ だから(3.63)式のeおよびf項はゼロである。このように求めた 3×3 トランスファ行列を使って、運動量のずれから生じる平衡軌道の変位を加速器全周について知ることができる。リング中場所毎の変位を運動量誤差で正規化した量(s の関数である。)が運動量分散関数(ディスペーション関数)であり、加速器設計における重要なパラメータとなっている。 s 点における 3×3 周回トランスファ行列 $M(3)$ から、この場所のディスペーション関数を求めてみよう。

$$\begin{pmatrix} X_p \\ X_p' \\ 1 \end{pmatrix} = M(3) \begin{pmatrix} X_p \\ X_p' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

X_p と X_p' はディスペーションとその s による微分(傾き)である。 $M(3)$ の行列要素を m_{ij} で表わし、斉次解に対応する 2×2 周回行列を $M(2)$ で表わせば(3.67)式は次のようになる。

$$\{M(2) - I\} \begin{pmatrix} X_p \\ X_p' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

これを解いてディスペーションとその微分が求まる。

$$\begin{pmatrix} X_p \\ X_p' \end{pmatrix} = \frac{1}{2 - m_{11} - m_{22}} \begin{pmatrix} 1 - m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & 1 + m_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

リング全周について求めたディスペーション $X_p(s)$ を使って、シンクロトロン振動に関連した重要な量モメンタムコンパクション(運動量圧縮率とも訳せるだろうか。)を計算することができる。これは運動量のずれによって生じる軌道長の変化率と言える。モメンタムコンパクションを α 、軌道長を c で表わせば次式によって定義され計算される。

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\Delta c}{c}\right)}{\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)} = \frac{1}{c} \int_0^c \frac{X_p(s)}{\rho(s)} ds \quad (3.70)$$

運動量誤差を持った粒子の軌道を、ディスペーション関数で計算される新しい平衡軌道を原点として記述すれば、非斉次方程式(3.61)は斉次化されて次の形となる。(垂直方向の運動については始めからこの形である。)

$$z'' + K(s)z = \Delta K(s)z \quad (3.71)$$

この右辺は正に磁場勾配誤差であり、3.2節の議論がそのまま適用される。すなわち前の節で扱った摂動項 $k(s)$ を

$$k(s) = -\Delta K(s) \quad (3.72)$$

とおき換えれば全ての結果が使える。

まず運動量のずれによって生じるチューンシフトを(3.35)式を使って求め、運動量誤差 Δ で正規化すれば

$$\xi = \frac{\Delta \nu}{(\Delta p/p_0)} = \frac{\Delta \nu}{\Delta} = \frac{-1}{4\pi} \int_0^c \beta(s) K(s) ds \quad (3.73)$$

この ξ を線型クロマチシティあるいは単にクロマチシティとよび、しばしば補正の対象として重要である。

(3.73)式の被積分関数 βK は、(2.15)および(2.31)式を使って K を消去すれば、トウイスパラメタだけで書くことができる。

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^c \{\alpha'(s) + \gamma(s)\} ds \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^c \gamma(s) ds \end{aligned} \quad (3.74)$$

ここで $\alpha(s)$ が周期性をもつことを使った。

さてベータ関数の変動も求めてみよう、(3.39)式を使えば

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\Delta \beta(s)}{\beta(s)}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right) \\ &= \frac{1}{2 \sin \psi_c} \\ &\int_s^{s+c} K(s) \beta(s) \cos[\psi_c - 2\{\psi(s_1) - \psi(s)\}] ds_1 \end{aligned} \quad (3.75)$$

この量もまた補正の対象となることがある。特にビーム衝突型加速器における低ベータインサクションでは衝突点近くの強い4極磁石内でベータ関数が大きく大きな変動がベータ関数に生じる。そこでトリスタンMRやCERNのLEPリングでは(3.75)式によって生じるベータ関数変動を補正することが予定されている。

運動量のずれた粒子にとっては、ストップバンドもまた存在している。(3.54)および(3.60)式さらに J_n の定義(3.50)式を使えば $\nu = n/2$ (n は整数)の付近にできるストップバンド巾 $\delta \nu$ は

$$\frac{\delta\nu}{(\Delta p/p_0)} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^c K(s)\beta(s)e^{-in\phi} ds \right| \quad (3.76)$$

となる。

3.4 水平・垂直運動の結合

磁場に面对称性のある限り、(1.89)式にみるように、線型近似の範囲で水平・垂直結合は生じなかった。しかしソレノイド場や歪4極磁場(スキュー磁場、平衡軌道を軸とした回転で生じる。)の存在は平衡軌道のある平面上で B_s 成分や B_x 成分を作り、線型近似でも水平垂直結合を起こす。ここでは歪4極磁場を扱ってみる

平衡軌道を軸として、通常の4極磁石が回転をしている時、運動方程式はどうなるであろうか。平衡軌道自身は変わらず一平面にある場合で考えてみる。図17に示すように、磁石に固定した座標系 (X, Y) と粒子運動を記述する座標系 (x, y) によって同じ位置ベクトル \mathbf{r} を表わしたとき、その座標値の間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (3.77)$$

ここで M は回転角度 θ に対応する変換行列である。

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

近似は $\theta \ll 1$ で成り立つ。

磁石に固定した座標系を使えば、磁場成分は再び(1.85)式で与えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{e}{p_0} \begin{pmatrix} B_x(X, Y, S) \\ B_y(X, Y, S) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 Y \\ x + b_1 X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.79)$$

ここには線型項まで示しておいた。

磁場成分も座標値と同じ変換行列で変換される。

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = M_\theta \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

(3.80)式に(3.79)式さらに(3.77)式を用いれば

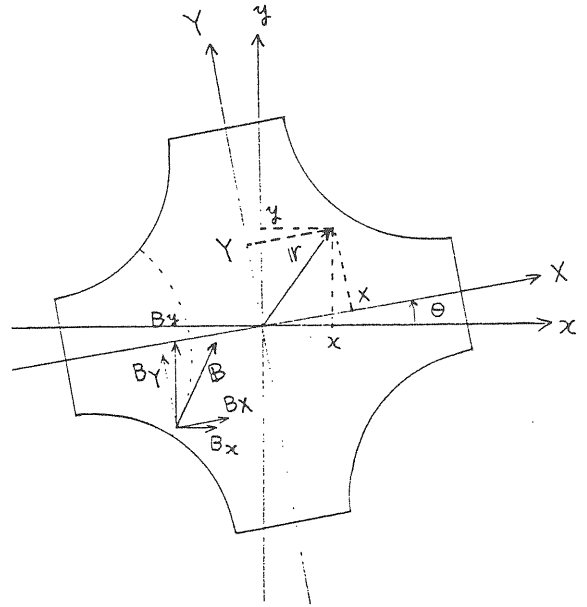


図17 回転誤差のある4極磁石

$$\begin{aligned} \frac{e}{p_0} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} &= M_\theta \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} M_{-\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 & -\theta \\ \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -2\theta & 1 \\ 1 & 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.81)$$

上式では θ に関する2次項を無視している。

(3.81)式で回転磁石の磁場を粒子運動を記述する座標系において表現することができた。この磁場を運動方程式に代入すればよい。運動方程式(1.68)を磁場項以外について線型化すれば

$$\begin{aligned} x'' - \kappa(1 + \kappa x) & \\ &= y' \frac{e}{p_0} B_s \\ &- (1 + 2\kappa x) \frac{e}{p_0} B_y \end{aligned} \quad (3.82a)$$

$$y'' = (1 + 2\kappa x) \frac{e}{p_0} B_x - x' \frac{e}{p_0} B_s \quad (3.82b)$$

ここでソレノイド磁場成分 B_s をゼロとおき、(3.81)式で得た B_x 、 B_y を代入する。さらに x 、 y について線型化すれば次の運動方程式を得る。

$$x'' + (b_1 + \kappa^2)x = -2\theta b_1 y \quad (3.83 a)$$

$$y'' - b_1 y = -\theta x - 2\theta b_1 x \quad (3.83 b)$$

(3.83) 式における θ は個々の磁石の回転角を示すもので s の関数である。偏向磁石の回転が無い場合を扱うこととし $\theta x = 0$ とおくと (3.83) 式は齊次化される。

$$x'' + K_x(s)x = -2\theta(s)b_1(s)y \quad (3.84 a)$$

$$y'' + K_y(s)y = -2\theta(s)b_1(s)x \quad (3.84 b)$$

ここで $K_x(s)$ と $K_y(s)$ は次のとおり

$$K_x(s) = b_1(s) + \kappa^2 \quad (3.85 a)$$

$$K_y(s) = -b_1(s) \quad (3.85 b)$$

(3.84) の両式に (3.15) および (3.16) 式で定義したクーラン・シュナイダー変換を施す、すなわち

$$\phi_x = \frac{1}{\nu_x} \int_0^s \frac{ds}{\beta_x(s)}, \quad \eta_x = \frac{x}{\sqrt{\beta_x}} \quad (3.86 a)$$

$$\phi_y = \frac{1}{\nu_y} \int_0^s \frac{ds}{\beta_y(s)}, \quad \eta_y = \frac{y}{\sqrt{\beta_y}} \quad (3.86 b)$$

によって新しい変数を定義すれば、運動方程式 (3.84) は次のようになる。

$$\frac{d^2 \eta_x}{d\phi_x^2} + \nu_x^2 \eta_x = [\nu_x^2 \beta_x^{\frac{3}{2}} \beta_y^{\frac{1}{2}} \{-2\theta b_1(s)\}] \eta_y \quad (3.87 a)$$

$$\frac{d^2 \eta_y}{d\phi_y^2} + \nu_y^2 \eta_y = [\nu_y^2 \beta_y^{\frac{3}{2}} \beta_x^{\frac{1}{2}} \{-2\theta b_1(s)\}] \eta_x \quad (3.87 b)$$

(3.87) 式右辺の角カッコ内は加速器一周を周期に持つから級数による展開ができる。この展開の k 次項に注目する。複素共役量を \dagger で示せば、

$$\frac{d^2 \eta_x}{d\phi_x^2} + \nu_x^2 \eta_x = (\epsilon_k^x e^{ik\phi_x} + \epsilon_k^{x\dagger} e^{-ik\phi_x}) \eta_y \quad (3.88 a)$$

$$\frac{d^2 \eta_y}{d\phi_y^2} + \nu_y^2 \eta_y = (\epsilon_k^y e^{ik\phi_y} + \epsilon_k^{y\dagger} e^{-ik\phi_y}) \eta_x \quad (3.88 b)$$

ここで $\epsilon_k^{x\dagger} = \epsilon_{-k}^x$ および $\epsilon_k^{y\dagger} = \epsilon_{-k}^y$ であることは次により明白である。

$$\epsilon_k^x = \frac{\nu_x^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_x^{\frac{3}{2}} \beta_y^{\frac{1}{2}} \{-2\theta b_1\} e^{-ik\phi_x} d\phi_x \quad (3.89 a)$$

$$\epsilon_k^y = \frac{\nu_y^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_y^{\frac{3}{2}} \beta_x^{\frac{1}{2}} \{-2\theta b_1\} e^{-ik\phi_y} d\phi_y \quad (3.89 b)$$

(3.89) 式の積分を ϕ から s に戻せば $ds = \nu\beta d\phi$ により

$$\epsilon_k^x = \frac{\nu_x}{2\pi} \int_0^c (\beta_x \beta_y)^{\frac{1}{2}} \{-2\theta b_1\} e^{-ik\phi} ds \quad (3.90 a)$$

$$\epsilon_k^y = \frac{\nu_y}{2\pi} \int_0^c (\beta_y \beta_x)^{\frac{1}{2}} \{-2\theta b_1\} e^{-ik\phi} ds \quad (3.90 b)$$

(3.90) 式から、もし位相 ϕ_x と ϕ_y を等しいと置ければ

$$\frac{\epsilon_k^x}{\nu_x} = \frac{\epsilon_k^y}{\nu_y} \equiv \epsilon_k \quad (3.91)$$

という関係がある事を指適しておこう。

さて運動方程式 (3.88) に戻ろう、この2式の独立変数 ϕ_x と ϕ_y は共にリング一周の間に 2π 単調に増加する、途中の多少のこぼこを無視して $\phi_x = \phi_y = \phi$ とおいてみよう。また結合項 ϵ_k^x 、 ϵ_k^y が小さいとすれば右辺の η_x や η_y に自由振動の解を代入しても様子を知る役に立つであろう。ここでは今一步踏み込んで、定数変化法を用いて振巾の変動を調べてみる。

(3.88) 式の自由振動解を次のように書く。

$$\eta_x = a_x e^{i\nu_x \phi} + (\text{複素共役}) \quad (3.92 a)$$

$$\eta_y = a_y e^{i\nu_y \phi} + (\text{複素共役}) \quad (3.92 b)$$

自由振動では a_x 、 a_y は定数だが、結合による影響を調べるために、 ϕ の関数としよう。

すると

$$\frac{d^2 \eta_x}{d\phi^2} = (a_x'' + 2i\nu_x a_x' - \nu_x^2 a_x) e^{i\nu_x \phi} + (\text{複素共役}) \quad (3.93 a)$$

$$\frac{d^2 \eta_y}{d\phi^2} = (a_y'' + 2i\nu_y a_y' - \nu_y^2 a_y) e^{i\nu_y \phi} + (\text{複素共役}) \quad (3.93 b)$$

ダッシュは ϕ による微分を示す。

ここで a_x 、 a_y は ϕ によってゆっくり変化する関数と期待して、実際結合が弱ければ位相 ϕ の変化より充分なだから関数と思われるので、2回微分をゼロとおく。この (3.93) 式を運動方程式 (3.88) に代入すれば、

$$\begin{aligned} & 2i\nu_x (a_x' e^{i\nu_x \phi} + a_x^{\dagger} e^{-i\nu_x \phi}) \\ & = (\epsilon_k^x e^{ik\phi} + \epsilon_k^{x\dagger} e^{-ik\phi}) (a_y e^{i\nu_y \phi} + a_y^{\dagger} e^{-i\nu_y \phi}) \end{aligned} \quad (3.94 a)$$

$$2i\nu_y (a_x' e^{i\nu_x\phi} + a_x'^{\dagger} e^{-i\nu_x\phi}) \\ = (\epsilon_k e^{ik\phi} + \epsilon_k^{\dagger} e^{-ik\phi}) (a_x e^{i\nu_x\phi} + a_x^{\dagger} e^{-i\nu_x\phi}) \quad (3.94b)$$

これは振巾 a_x 、 a_y の変化を表わす方程式である。ここで (3.91) 式の関数を使って (3.94) 式を書き直しておく。

$$a_x' e^{i\nu_x\phi} + a_x'^{\dagger} e^{-i\nu_x\phi} \\ = \frac{1}{2i} (\epsilon_k e^{ik\phi} + \epsilon_k^{\dagger} e^{-ik\phi}) (a_x e^{i\nu_x\phi} + a_x^{\dagger} e^{-i\nu_x\phi}) \quad (3.95a)$$

$$a_y' e^{i\nu_y\phi} + a_y'^{\dagger} e^{-i\nu_y\phi} \\ = \frac{1}{2i} (\epsilon_k e^{ik\phi} + \epsilon_k^{\dagger} e^{-ik\phi}) (a_x e^{i\nu_x\phi} + a_x^{\dagger} e^{-i\nu_x\phi}) \quad (3.95b)$$

この (3.95) 式を使って共鳴条件における振巾の変化を調べてみよう、まず和共鳴 (sum resonance) の条件が成立しているときを扱う。

$$\nu_x + \nu_y + k = \delta \ll 1 \quad (3.96)$$

このとき (3.95a) の両辺に $\exp(i\nu_x\phi)$ を掛けて、位相の回転が早い項は平均的な影響が小さいと考えて両辺から除く。また (3.95b) 式の両辺には $\exp(i\nu_y\phi)$ を掛けて同じ操作を施す。すると、

$$a_x'^{\dagger} = \frac{\epsilon_k}{2i} a_y e^{i\phi\delta} \quad (3.97a)$$

$$a_y'^{\dagger} = \frac{\epsilon_k}{2i} a_x e^{i\phi\delta} \quad (3.97b)$$

これが和共鳴条件における振巾変化を表わしている。和共鳴の性質を調べるために次の量の時間変化を見よう。

$$D(\phi) = |a_x|^2 - |a_y|^2 \quad (3.98)$$

これを ϕ で微分し、そこに (3.97) 式およびその複素共役を代入する。

$$\frac{dD(\phi)}{d\phi} = a_x' a_x^{\dagger} + a_x a_x'^{\dagger} - (a_y' a_y^{\dagger} + a_y a_y'^{\dagger}) = 0 \quad (3.99)$$

すなわち $D(\phi)$ は保存量であり、水平垂直結合によって片方の振巾が増大すれば他方も増えるという事を示している。すなわち和共鳴は危険な共鳴であり、安定にビームを保持したいならば (3.96) 式の

条件を避けなければならない。

さて次に差共鳴 (difference resonance) の場合を調べてみよう。

$$\nu_x - \nu_y + k = \delta \ll 1 \quad (3.100)$$

という条件を使って、先程と同様な手続きにより、(3.95) 式からゆっくり変化する項を選び出す。

$$a_x'^{\dagger} = \frac{\epsilon_k}{2i} a_y^{\dagger} e^{i\phi\delta} \quad (3.101a)$$

$$a_y' = \frac{\epsilon_k}{2i} a_x e^{i\phi\delta} \quad (3.101b)$$

差共鳴では次の量の時間変化をみると、

$$S(\phi) = |a_x|^2 + |a_y|^2 \quad (3.102)$$

(3.101) 式とその複素共役を使って保存している事を知る。つまり差共鳴では片方の振巾が増加すれば他方は減少し全体としての振巾が保存している。これで差共鳴が和共鳴に比較して安全な共鳴であるといえよう。

和共鳴および差共鳴の条件をそれぞれまとめて書いておこう。k を非負整数として

$$\nu_x + \nu_y = k \quad (\text{和共鳴}) \quad (3.103)$$

$$|\nu_x - \nu_y| = k \quad (\text{差共鳴}) \quad (3.104)$$

であり、加速器の設計上 (3.103) 式は避けねばならず、(3.104) 式は水平垂直結合比を制御するために利用することもある。

3.5 非線形項の影響

近似を施す前のベータatron振動方程式(1.65)式は、磁場の展開形を与える前から、非線形であったまた磁場の展開もおびただしい非線形項を含んでいた。今までの取り扱いではこれらの非線形項を、方程式を解く都合上、高次の微量と称して切り捨ててきた。これで果して安心していられるのであろうか。明らかに答は否である。実際、非線形項の中でも有力な3次の共鳴などは加速器を運転すれば日常のお目にかかるものであり、加速器屋達は既にある程度これを飼い慣らし積極的に利用することまで行なっている(3次共鳴取り出し)。しかし非線形項はさらに高次の項が無限に続いており、これらの効果を完全に定量的に扱える手法は未だ存在しない。非線形項の問題は、まだこれからずっと先まで、加速器屋を悩ませまた楽しませてくれるはずである。

ここでは与えられた単一の非線形項によってどのような種類の共鳴が生じ得るかということ調べる

にとどめよう。

ここでは簡単化のために、クーラン・シュナイダ一変換を施した後から出発し、変換後の座標も x , y と書くことにしよう。ここで扱う非線形項は次の形で与えられるものとする。

$$x'' + \nu_x^2 x = f(\phi) x^m y^n \quad (3.105)$$

ここでダッシュは ϕ (正規化されたベータトロンの位相, リング一周で 2π 進む。) による微分を示す。非線形項の係数 $f(\phi)$ は小なくとも周期 2π を持つので (加速器を一周すればまた同じ所に来るから。) これをフーリエ級数で書くことができる。この k 次項を f_k とすれば

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \quad (3.106)$$

となる。

ここでもし $f(\phi)$ に 2π より短い周期があれば、つまり加速器全体がいくつかの全く同じ構造の繰り返しで作られていたら (この繰り返しの数をスーパーピリオドと呼び、 N_s で表わすことにしよう。), (3.106) 式の積分は k が N_s の整数倍の時だけゼロにならない。つまり考える必要のある k としては次の条件を満たすものだけである。

$$k = N_s \cdot l \quad (l \text{ は任意整数}) \quad (3.107)$$

ただし繰り返しが完全でない時は全ての整数値 k を考えなければならない。

フーリエ級数の k 次項の寄与は次のように書ける。

$$x'' + \nu_x^2 x = (f_k e^{ik\phi} + f_{-k} e^{-ik\phi}) x^m y^n \quad (3.108)$$

ここで x , y に前節(3.92)式による表示を用いる。

$$x = a_x e^{i\nu_x \phi} + c.c. \quad (3.109a)$$

$$y = a_y e^{i\nu_y \phi} + c.c. \quad (3.109b)$$

c. c. は前項の複素共役を示す。

3. 4 節と同様 a_x の 2 回微分をゼロとして(3.108)式に代入すると

$$\begin{aligned} & 2i\nu_x a'_x e^{i\nu_x \phi} + c.c. \\ &= (f_k e^{ik\phi} + c.c.) (a_x e^{i\nu_x \phi} + c.c.)^m (a_y e^{i\nu_y \phi} + c.c.)^n \\ &= (f_k e^{ik\phi} + c.c.) \left\{ \sum_{p=0}^m {}_m C_p a_x^{(m-p)} (a_x^\dagger)^p \exp[i\phi(m-2p)\nu_x] \right\} \\ & \times \left\{ \sum_{q=0}^n {}_n C_q a_y^{(n-q)} (a_y^\dagger)^q \exp[i\phi(n-2q)\nu_y] \right\} \end{aligned} \quad (3.110)$$

ここで ${}_m C_p$ は 2 項係数である。

さて(3.110)式は x の振巾 a_x の変動を記述する式である。

位相がゆっくり回る項によって a_x が影響を受けると考えられるので、共鳴条件を見つけるには(3.110)式の位相だけを考慮すればよい。

すなわち(3.110)式において生じ得る共鳴の条件は、

$$\pm \nu_x \pm k + (m-2p)\nu_x + (n-2q)\nu_y = 0 \quad (3.111)$$

ここで p はゼロから m , q はゼロから n まで変るから、非線形項 $x^m y^n$ から生じ得る共鳴は次のようにまとめられる。

$$\lambda_x \nu_x + \lambda_y \nu_y = k \quad (3.112a)$$

$$\lambda_x = -(m+1), \dots, +(m+1) \quad (3.112b)$$

$$\lambda_y = -n, \dots, +n \quad (3.112c)$$

ここで k は非線形項の係数 $f(\phi)$ の k 次のフーリエ成分という物理的意味を持っており、 $f_k = 0$ となる k については共鳴は起らない。特に完全なスーパーピリオド N_s が存在するとき N_s の整数倍の k のみにおいて共鳴が起こり得る*)。また前の節で示した和共鳴と差共鳴の性質の違いに対応するように、 λ_x と λ_y が同符号のときに一般的な和共鳴として水平・垂直振動の振巾の 2 乗 (いわゆるエミッタンス) の差が保存し、また λ_x と λ_y が逆符号では一般的差共鳴として両者のエミッタンスの和が保存する。

共鳴の次数 R を次式で定義すると、

$$R = |\lambda_x| + |\lambda_y| \quad (3.113)$$

*脚注

N_s の整数倍によって励起される共鳴を構造共鳴と呼ぶ。これは磁石の中に系統的な誤差として生じた非線形項や意図的に導入された 6 極磁石などの非線形磁場によって発生するもので一般に強い共鳴となる。一方 N_s の整数倍ではない k によって励起される共鳴は非構造共鳴とよばれ、磁石毎にランダムに生じる誤差やビームの平衡軌道のずれが本来規則的配列の非線形磁場の対称性を崩すことなどによって生まれるものである。一般にこれらの共鳴項は弱いのであるが、計算機シミュレーションで調べる時に手間が掛りまた確立されたプログラムも無い。特に意図的に強い非線形磁場を使用するとき (クロマティシティ補正) 充分注意する必要がある。

非線形力学系の共鳴現象を取り扱う一般的理論によって、共鳴の振舞は $R=4$ を境界として異なる事が知られている。すなわち R が4より小さいとき生じる共鳴では大きなエミッタンス変動が起こり得るのに対し、 R が4より大きければエミッタンス変動は小さく限定されるのである。このことは加速器を動かす時のチューンをどこに選べばよいかを考える手掛りとなる。図18に示すのは4次までの共鳴条件を描いたチューン図（チューンダイアグラム）であるが、これらの共鳴線から離れた所に加速器の動作点（ワーキングポイント）を決めれば、今までに扱った範囲の共鳴からは、安全であると言える。

ここまで非線形項を共鳴現象を起こす源と考えその影響を調べて来た。しかし非線形項の起こす現象を全て共鳴現象の枠内でとらえることができないという事も知られている。実際にカオスの挙動が計算機を使ったシュミレーションなどによって発見されており、このような非共鳴非線形現象の加速器における役割がどのようなものであるのかという問は、加速器屋にとって最も興味深い今日の課題の一つである。この話題に関しては、さらに平田光司氏の講義の中でも触れられるであろう。

4. ラティス設計

ラティスを構成するセル構造とインサージョンという概念を紹介し、トリスタンMRに例をとってラティス設計の方法を示す。

4. 1 繰返し構造の基本単位のセルと、複雑なバリエーションを示すインサージョンの関係を説明する。

4. 2 計算機プログラム「MAGIC」の入力例、出力例を示しながら、トリスタンMRのラティス構造を示す。

4. 1 セル構造とインサージョン

加速器（シンクロトロン）全体をできるだけ同じ構造を繰返し使用して構成するという事は、加速器の製作という見地からもまた完成した加速器を操作するという立場からも、非常に望ましい事である。実際、初期のシンクロトロンや現在においても早い繰返しで運転される比較的小型のシンクロトロンでは、セル構造と呼ばれる単位収束系の繰返しによって全周が構成されている。必要な他の機器のための空間は、通常のセル構造（しばしばノーマルセルとよぶ。）から偏向磁石の一部を取除いて作ったセルを、加速器全体の対称性を出来るだけ保ちつつ、ノーマルセルの間に配置して得られる。あるいはノー

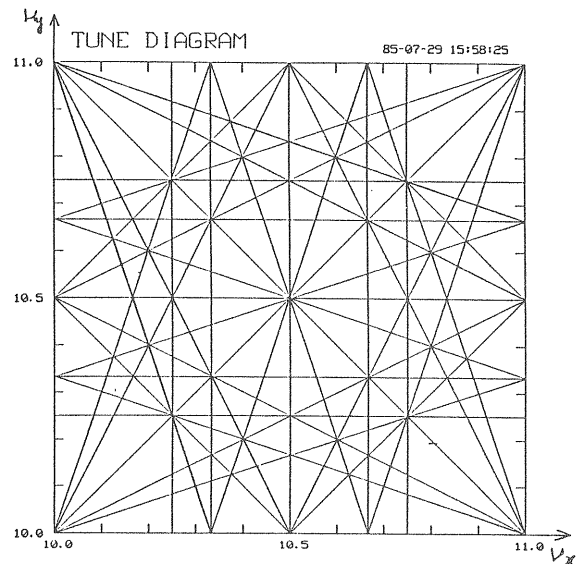


図18 チューン図（中島一久氏提供）

マルセルの中に必要なスペースを確保しておくこともある。このようにして製作された加速器は一般にスーパーピリオド数が大きく、またノーマルセルやそこから偏向磁石を除いたセルの繰返し数自身もスーパーピリオド数に準ずる意味を持ち、第3章5節に述べたように、非線形および線形の共鳴を励起する誤差磁場のフーリエ成分の次数が限定される。すなわち系統的誤差磁場同士の相殺効果が大きく期待できる。このようなタイプの加速器におけるビームの利用方法の殆んどは、加速器の外へビームを取り出し、次の段階の加速器へ転送したり、あるいは直接利用するにしてもビームチャンネルと呼ばれる場所で二次的な加工（加速器から取出した1次粒子ビームを標的に当てて、発生した2次粒子ビームを種別し運動量をそろえたりする。）を加える事を前提としている。つまりこの場合の加速器（シンクロトロン）に求められる役割は、ひとえにビームの安定な加速と取り出しに有る。

しかしながら近年盛んに建設されている粒子貯蔵型シンクロトロン（ストレージング）では若干事情が異なる。ストレージングでは、軌道放射光（シンクロトロン光）の利用を目的とするものもまたビーム衝突型（コライディングマシン）のものでも、加速器の中が言わばビームの最終目的地でありビームの利用目的に応じた加工もこのリングの中で行わなければならない。

このようにストレージング中のビームを「加工」するための「道具」は目的によって様々なものがある。たとえば、シンクロトロン光を利用する場合には、干渉型ないし非干渉型のウィグラー磁石が使用される。これらのウィグラー磁石はそれぞれ特定波

長のシンクロトロン光を増加させたり通常の偏向磁場から得られるものより更に短波長領域の光を発生させたりする役割を果たす。またビーム衝突型加速器では、衝突点におけるベータ関数を小さくしぼり、単位散乱断面積当りの素粒子反応が起こる頻度（ルミノシティ）を大きくする努力がなされている。

上に述べたような各種の「道具」を設置する場所は、セル構造とは大きく異なった性格を持つ特別なインサージョン（挿入部）に置かれることが多い。つまり現在の多くのストレージリングは規則的なセル構造とそこに設けられたインサージョンの組み合わせで構成されていると言うことができる。

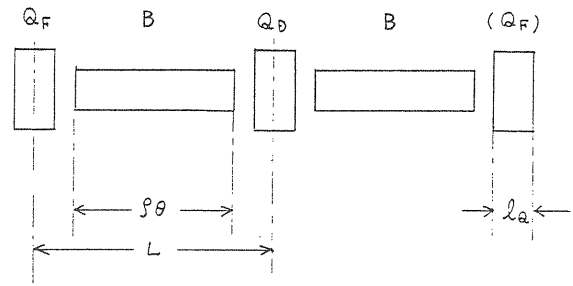
シンクロトロンを構成する偏向磁場や収束用4極磁場の組み合わせのことをラティスと称するが、現代のストレージリングの中には、ラティスという言葉の持つ何か規則的で単純な繰返しというイメージとは、かなり異なる構造のラティスを持つものも存在する訳である。このようなラティスを現実設計に際して使用される計算機および計算機プログラムの進歩がある。また実際の操作運転時においても、多種類の磁石を同時に制御できるコントロール用計算機およびそのプログラムシステムの発達が重要な役割を担っている。もちろんこの点についてはストレージリングにおける磁場の変化が通常のシンクロトロンに比較してゆっくりしたものであるという点も助けになっている。ちなみに KEK において稼働中のシンクロトロンの周期（入射から次の入射までの間隔）を比較してみると、最も速い500MeV 陽子ブースターシンクロトロンが周期50msec、最も遅い放射光施設2.5GeV 電子ストレージリングではおよそ半日でありこの両者の周期の比は百万倍に近い。

以下において、セルやインサージョンの設計の大筋を説明してみよう。

セル構造

簡単なしかし最もよく使用されるセル構造の例として図19に示す FODO タイプを取り上げてみよう。このセルの Q_F 中心間のトランスファ行列を薄レンズ近似で計算すれば水平方向運動について次の通り。

$$M_{FH}^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k_r}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_d & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-k_r}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1 a)$$



B 曲率半径 ρ , 曲率角 θ

$Q_F \quad K_x = -K_y = K_f > 0$

$Q_D \quad K_x = -K_y = -K_d < 0$

図19 FODO ノーマルセル

$$k_r = K_f l_Q > 0, \quad k_d = K_d l_Q > 0 \quad (4.1 b)$$

垂直方向運動は k_r および k_d の符号を反転させたものである。また水平方向運動の Q_D 中心間のトランスファ行列は (4.1) 式で $-k_r$ と k_d を入れ換えたものであり、垂直方向の Q_D 中心間のトランスファ行列はさらにその符号を入れ換えることによって得ることができる。

(4.1 a) 式で行列の掛算を行なうと各成分は

$$M_{FH}^r(1, 1) = M_{FH}^r(2, 2) = 1 + (k_d - k_r)L - \frac{1}{2}k_d k_r L^2 \quad (4.2 a)$$

$$M_{FH}^r(1, 2) = 2L + k_d L^2 \quad (4.2 b)$$

$$M_{FH}^r(2, 1) = k_d - k_r + \frac{1}{2}k_r(k_r - 2k_d)L + \frac{1}{4}k_d k_r^2 L^2 \quad (4.2 c)$$

と求められる。この行列要素を (2.34) 式のツイスパラメータ表示の行列要素と等置する。(2.35) 式と同じく

$$\cos \mu_H = 1 + (k_d - k_r)L - \frac{1}{2}k_d k_r L^2 \quad (4.3)$$

これより水平ベータトロン振動の安定条件が求まる。

$$-1 \leq 1 + (k_d - k_r)L - \frac{1}{2}k_d k_r L^2 \leq 1 \quad (4.4)$$

また (4.2b) 式が常に正であることにより μ_H について

$$0 \leq \mu_H \leq \pi \quad (4.5)$$

を知る。すなわち単一のFODOセルで得る最大位相進行は π である。また Q_r の中心における水平方向トランスバースパラメータは

$$\frac{\beta_H^r}{L} = \frac{1 + \frac{1}{2}k_d L}{\sin \frac{\mu_H}{2} \cos \frac{\mu_H}{2}} \quad (4.6a)$$

$$\alpha_H^r = 0 \quad (4.6b)$$

$$\gamma_H^r = \frac{1}{\beta_H^r} \quad (4.6c)$$

(4.6a)式から Q_H の中心における水平ベータ関数も求められる。

$$\frac{\beta_H^d}{L} = \frac{1 - \frac{1}{2}k_r L}{\sin \frac{\mu_H}{2} \cos \frac{\mu_H}{2}} \quad (4.7)$$

垂直方向についても先に述べた操作により

$$\cos \mu_v = 1 - (k_d - k_r)L - \frac{1}{2}k_d k_r L^2 \quad (4.8)$$

$$\frac{\beta_v^r}{L} = \frac{1 - \frac{1}{2}k_d L}{\sin \frac{\mu_v}{2} \cos \frac{\mu_v}{2}} \quad (4.9)$$

$$\frac{\beta_v^d}{L} = \frac{1 + \frac{1}{2}k_r L}{\sin \frac{\mu_v}{2} \cos \frac{\mu_v}{2}} \quad (4.10)$$

と求められる。

運動量分散関数(ディスパージョン関数)は、(4.1a)式の中にある長さ L のドリフトスペース(磁場の無い区間)の中心で強さ θ のキックを受けるとした場合の周期解である。

$$\begin{pmatrix} X_p^r \\ X_p^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k_r}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \right\} + M_H^r \begin{pmatrix} X_p^r \\ X_p^d \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$X_p^d = 0$ はあらかじめ対称性から明らかで(4.11)式を解けば、

$$\frac{X_p^r}{L\theta} = \frac{1 + \frac{1}{4}k_d L}{\sin^2 \frac{\mu_H}{2}} \quad (4.12)$$

Q_d の中心におけるディスパージョンは

$$\frac{X_p^d}{L\theta} = \frac{1 - \frac{1}{4}k_r L}{\sin^2 \frac{\mu_H}{2}} \quad (4.13)$$

さて水平・垂直の両ベータatron振動が安定である条件を k_d , k_r で表わしてみよう。水平方向については(4.4)式でまた垂直方向については(4.4)式で k_d と k_r の符号を入れ換えて、安定条件を満足する k_d , k_r の範囲を図20に示す。この図は安定領域の形からネクタイ図と呼ばれている。

ノーマルセル内で位相の進みをどう選ぶかという問題は加速器設計の最初の段階で当面するものであるが、一般的な答が有る訳ではない。ここではノーマルセルの位相によってベータ関数やディスパージョンがどのように変化をするか調べておこう。まず簡単化のために水平・垂直の位相進み μ_H と μ_v が等しいとしよう。

$$\mu_H = \mu_v = \mu_c \quad (4.14)$$

このときセル当りの位相進み μ_c をパラメータとして4極磁石の強さ、最大および最小ベータ関数値、そして最大および最小ディスパージョン関数値を図21, 図22, 図23に示す。この計算は(4.3)式および(4.6)~(4.10)式および(4.12), (4.13)式で μ_H と μ_v を等置して得た以下の式によって行なわれた

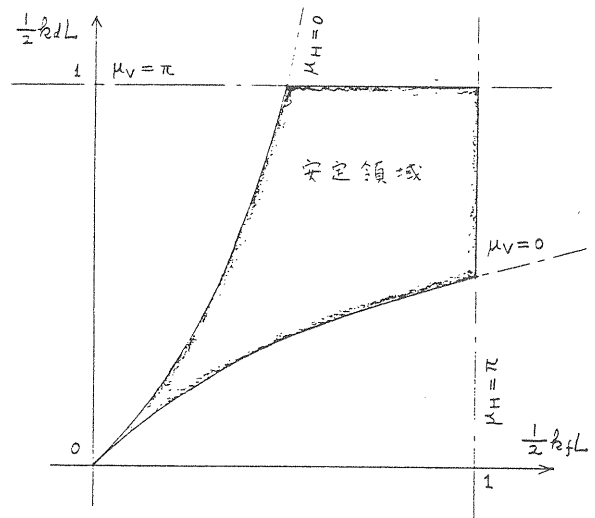


図20 FODO ノーマルセルのネクタイ図

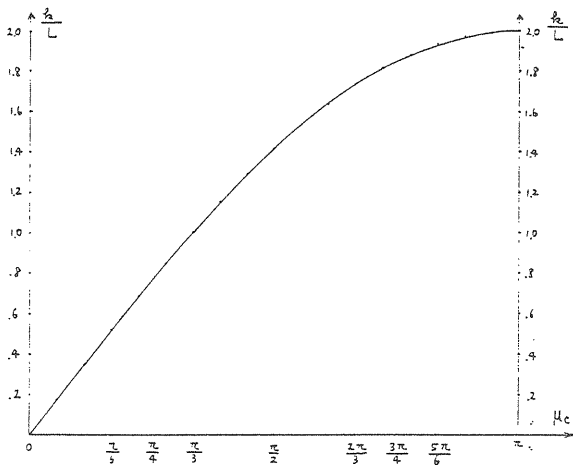


図21 セル当り位相と4極磁石の強さ

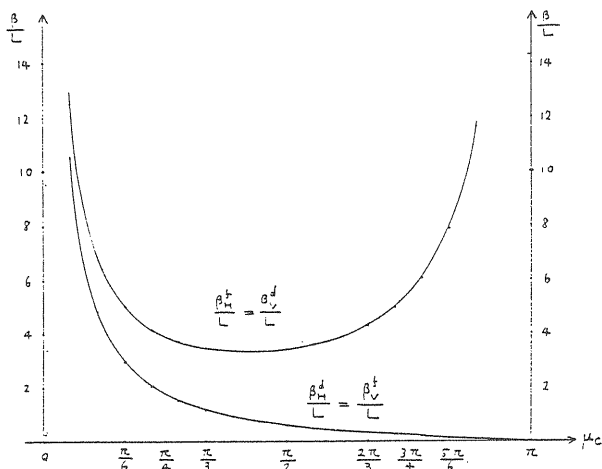


図22 セル当り位相とベータ関数の極大・極小値

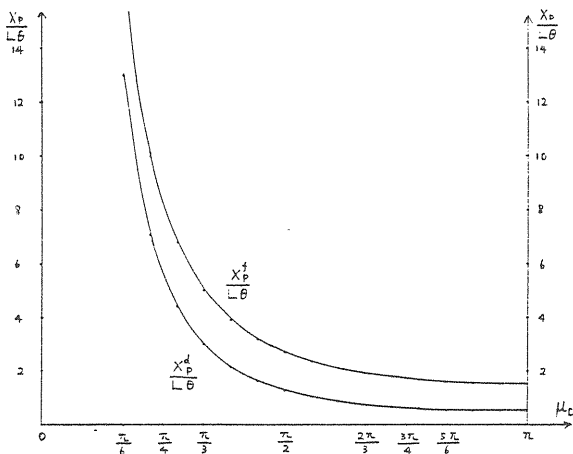


図23 セル当り位相とディスペーション関数の極大・極小値

$$\frac{k_f}{L} = \frac{k_d}{L} = 2 \sin \frac{\mu_c}{2} \quad (4.15)$$

$$\frac{\beta_{H}^r}{L} = \frac{\beta_{V}^d}{L} = \frac{1}{\cos \frac{\mu_c}{2}} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\mu_c}{2}} + 1 \right\} \quad (4.16 a)$$

$$\frac{\beta_{H}^d}{L} = \frac{\beta_{V}^r}{L} = \frac{1}{\cos \frac{\mu_c}{2}} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\mu_c}{2}} - 1 \right\} \quad (4.16 b)$$

$$\frac{X_p^r}{L\theta} = \frac{1}{\sin \frac{\mu_c}{2}} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\mu_c}{2}} + \frac{1}{2} \right\} \quad (4.17 a)$$

$$\frac{X_p^d}{L\theta} = \frac{1}{\sin \frac{\mu_c}{2}} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\mu_c}{2}} - \frac{1}{2} \right\} \quad (4.17 b)$$

挿入部 (インサージョン)

セル構造の間にインサージョンを置くと、一般にはセル構造内におけるトゥイスパラメタやディスペーションまで影響を受けて、セル構造毎の周期性が失われてしまう。このような望ましくない効果を打消すには、インサージョンの整合化(マッチング)を行なう必要がある。マッチングの対象となるのは、水平・垂直トゥイスパラメタ(独立な量としては各々2個故、計4個の条件。)およびディスペーション関数とその微分である。さらにインサージョン中の位相の進みもマッチングの対象となる。

インサージョンのマッチング条件は、どのようなセルの間に置かれるかという事に依り、一般には変化する。しかし最も単純なインサージョンである、 π セクションあるいは 2π セクションというインサージョンではセル構造の詳細に依らず常に整合化できる。これはトゥイスパラメタの変換則 (2.52) 式において、インサージョン部をあらわすトランスファ行列が次の形をしていれば、インサージョン部入口と出口のトゥイスパラメタが常に等しいという原理に基づいている。

$$M_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.18 a)$$

$$M_{2\pi} = M_{\pi} M_{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.18 b)$$

まず (4.18 a) 式にある π セクションを作ってみよう。始めに図24のような4極磁石の対を考える Q_r と Q_d は強さが等しく符号が逆である。このトランスファ行列は水平・垂直方向がそれぞれ薄レンズ近似により次のようになる。

$$\begin{aligned}
M^x &= \begin{pmatrix} 1 & cL \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & cL \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \lambda - c\lambda^2 & L(1 + 2c - c^2\lambda^2) \\ -\lambda^2/L & 1 + \lambda - c\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (4.19a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^y &= \begin{pmatrix} 1 & cL \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & cL \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \lambda - c\lambda^2 & L(1 + 2c - c^2\lambda^2) \\ -\lambda^2/L & 1 - \lambda - c\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (4.19b)
\end{aligned}$$

ここで

$$\lambda = kL \quad (4.20)$$

とおいた。さてここで、一般に行列が次の形ならば

$$A = \begin{pmatrix} \pm a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \mp a_{11} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

この2乗は π セクションの行列 M_π となる。

すなわち

$$\begin{aligned}
AA &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \\
&= -\det A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_\pi \quad (4.22)
\end{aligned}$$

(4.19) 式の M^x および M^y が (4.21) 式の A の形に書けるための条件は、対角成分が互いに逆符号で等しいという事であり

$$1 - \lambda - c\lambda^2 = -(1 + \lambda - c\lambda^2) \quad (4.23)$$

これを解けば π セクションを作る 4 極磁石の強さが決る。

$$k = \frac{1}{\sqrt{c} s} \quad (4.24)$$

すなわち図24に示した構造を、4 極磁石の強さを (4.24) 式で与えて、2 つ繰返せば π セクション、4

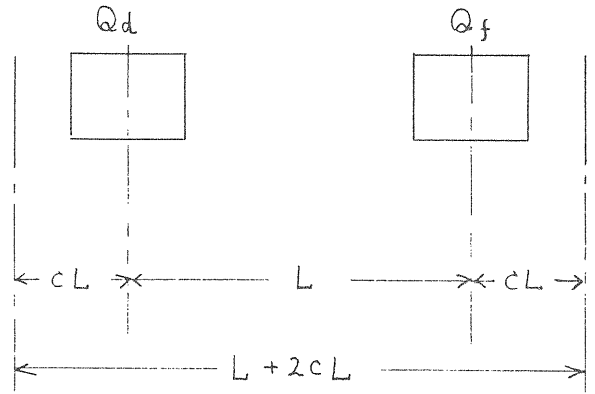


図24 π セクションの半分

つ繰返せば 2π セクションが作られる。共に入口出口でトウイスパラメタが等しい。ディスパージョン関数については 2π セクションのとき入口出口で不変となる。4 極磁石を等間隔で配置したければ、任意パラメタ c を 0.5 に選べばよい。また位相進行は各々その名の通り π および 2π である。これは実に便利なインサージョンでセル構造のパラメタを変えても整合性が自動的に保たれている。

実際のストレージリングに使用されるインサージョンはもう少し複雑で、目的に応じてトウイスパラメタやディスパージョンを制御し望ましい値を得る事が行なわれている。

4.2 プログラム「MAGIC」を使ったラティス設計

計算機コード「MAGIC」の原形は1973年フェルミ加速器研究所夏の研究会においてラティスのインサージョン計算のために作られた。その後スタンフォード線形加速器センター (SLAC) において、15GeV 電子陽電子ストレージリング PEP のラティス設計用として精力的な改良が施された。KEK における利用は1976年このプログラムの製作者 M.J.Lee 氏の来所と共に本格化し、その後建設された放射光施設 2.5GeV ストレージリングやトリスタン AR および MR のラティス計算は主としてこの MAGIC を使用して行なわれた。このプログラムの特徴は、複雑なインサージョンの計算に使えるように解を発見する能力が強化されていること (非線型最適化プログラム Variable Metric Minimization 法を備えている)、入力のフォーマットが簡素である事、既に得た解を出発点として段階的に新しい解に到達する機能を持つ事 (ステップ化) などの点にあらう。当初の MAGIC は解を捜す時、まず薄レンズ近似を使って計算を行ない、次に薄レンズ近似の結果を出発点として厚レンズの場合の解を捜すというやり方を

使っている。これは計算時間を少なくすることを目的としたものであるが、現在の KEK 計算機 (M280 H) の能力ならば特にこの機能を必要としない。また現在 KEK で使用されている MAGIC は横谷馨氏により大巾な改良が加えられており、実際の使用に当っては元々のマニュアル (SLAC Report No.183 1975) 以外に KEK バージョンのマニュアルが必要である。

トリスタン MR

来年秋からの運転を目指して、現在建設作業が追い込みに入っているトリスタン MR は、目標エネルギー 30 GeV の電子陽電子衝突型ストレージリングである。全長約 3 km の真空容器の中には、トリスタン AR (入射蓄積リング) から送られてくる 8 GeV の電子および陽電子のビームが各々 2 つずつのバンチ (加速高周波の安定位相周辺に集まった粒子群) となって貯められる。30 GeV に加速された電子と陽電子のバンチは互いに反対方向にリング内を回り、円周上 4 ヶ所に設けられた衝突点で毎秒 20 万回の衝突を行なう。この時に起こる素粒子反応から生じた様々な素粒子を衝突点を囲うように作られた各種測定器で検出し、それを解析することで物質存在の根源を探るとというのがトリスタン計画の目的である。

トリスタン MR のラティスは 4 つのスーパーピリオドから作られており、各スーパーピリオドは折り返し対称な 2 部分から成立している。すなわちトリスタン MR は全周の 8 分の 1 を知れば全体を知ることになる。

図 25 にトリスタン MR ラティスを全周の 8 分の 1 について示した。この 8 分の 1 ラティスはさらに性格を異にする 5 部分に分類することができる。すなわち図の左側から低ベータインサクション、高周波空洞用セル、ディスパーション消去セル、ノーマルセルおよびウィグラーインサクションである。

低ベータインサクション部は、図 26 に拡大して示したが、ビーム衝突点におけるベータ値 β_x^* 、 β_y^* を (特に β_y^* を) 小さく絞ることが役割である。素粒子反応の起る頻度は β_y^* に反比例するので、小さく絞ることが必要である。図 26 で最も左側の磁石 QCS は起伝導であるがここに示したオブティクス (ラティスをレンズ系と考え、レンズ系のパラメーター揃いをオブティクスと称する。) では使用していない。8 GeV のビーム入射時には低ベータにする必要もなくまた有害でもあるので、3 倍位ベータを大きくした入射オブティクスが使用される。入射オブティクスから低ベータオブティクスへの移行は、ビームを保持しながら行なわれるので加速器全体のチューン

(ν 値) は一定でなければならない。さもないと共鳴線の通過によってビーム損失が起きる (図 18 のチューン図参照)。トリスタン MR の低ベータインサクションでは、衝突点周辺の 6 個の 4 極磁石 (ここでは QC 1 から QC 6 まで) の強さを変化させて、インサクション部の位相進行不変のまま、入射オブティクスから低ベータオブティクスに移ることができる。

高周波空洞用セルは名前の通り加速高周波空洞を設置する場所であり、また一部はビーム入射用機器の設置場所でもある。

ディスパーション消去セルは、ノーマルセルで特有な値をとるディスパーションを、衝突点や加速空洞設置場所でもゼロにする役割を持っている。ここでは QS 1 から QS 7 まで 7 個の 4 極磁石の強さが可変パラメタであり、ディスパーションを消去すると同時にノーマルセルと高周波セルのトゥイスパラメタのマッチングを行なっている。最も衝突点に近い偏向磁石の強さは、通常のもの約 4 % しかない、これは強いシンクロトロン光による測定装置への影響を和らげるためである。

ノーマルセルは FODO タイプで、1 セル当りの位相の進みは水平・垂直両方向共に 60° 、長さは約 16 m である。

ウィグラーインサクションは、ビームエミッタンスを制御する 2 極ウィグラーあるいは進行方向の粒子分布を制御する非線型ウィグラーの設置場所である。ここでは QW 1 から QW 4 の強さを調整して対称点における対称性が確保されている。

実際のラティス設計においては、上に述べた各部分毎にマッチングの手続きが行なわれた。しかしもちろん各部分を完全に独立に扱える訳ではない。まず最初に決まるのはノーマルセルである。セルの長さや数は、リング全体の形状や必要とされる直線部の長さ、さらにビームのエミッタンスに直結する曲線部における位相の進み等を考慮して与える。セル当りの位相進みはクロマチシティ補正方法との関連によりむしろあらかじめ 60° となった。

ノーマルセルが決まればウィグラーインサクションのマッチング計算が始められる。ノーマルセルから出発して対称点においてベータ関数の微分 (α_x および α_y) とディスパーションの傾きがゼロになればよい。

高周波空洞セルは比較的独立に決められる。そしてノーマルセルとこれが与えられて始めて、ディスパーション消去セルのマッチングが行なわれる。低ベータインサクションは、高周波セルが与えられれば、計算が始められる。そして全体をつなぎ合わ

TRISTAN V-11 BACKUP OPTICS FOR 30-GEV BEAM

NUX=32.75 NUY=38.60

$$\beta_x^* = 1.6 \text{ m} \quad \beta_y^* = 0.1 \text{ m}$$

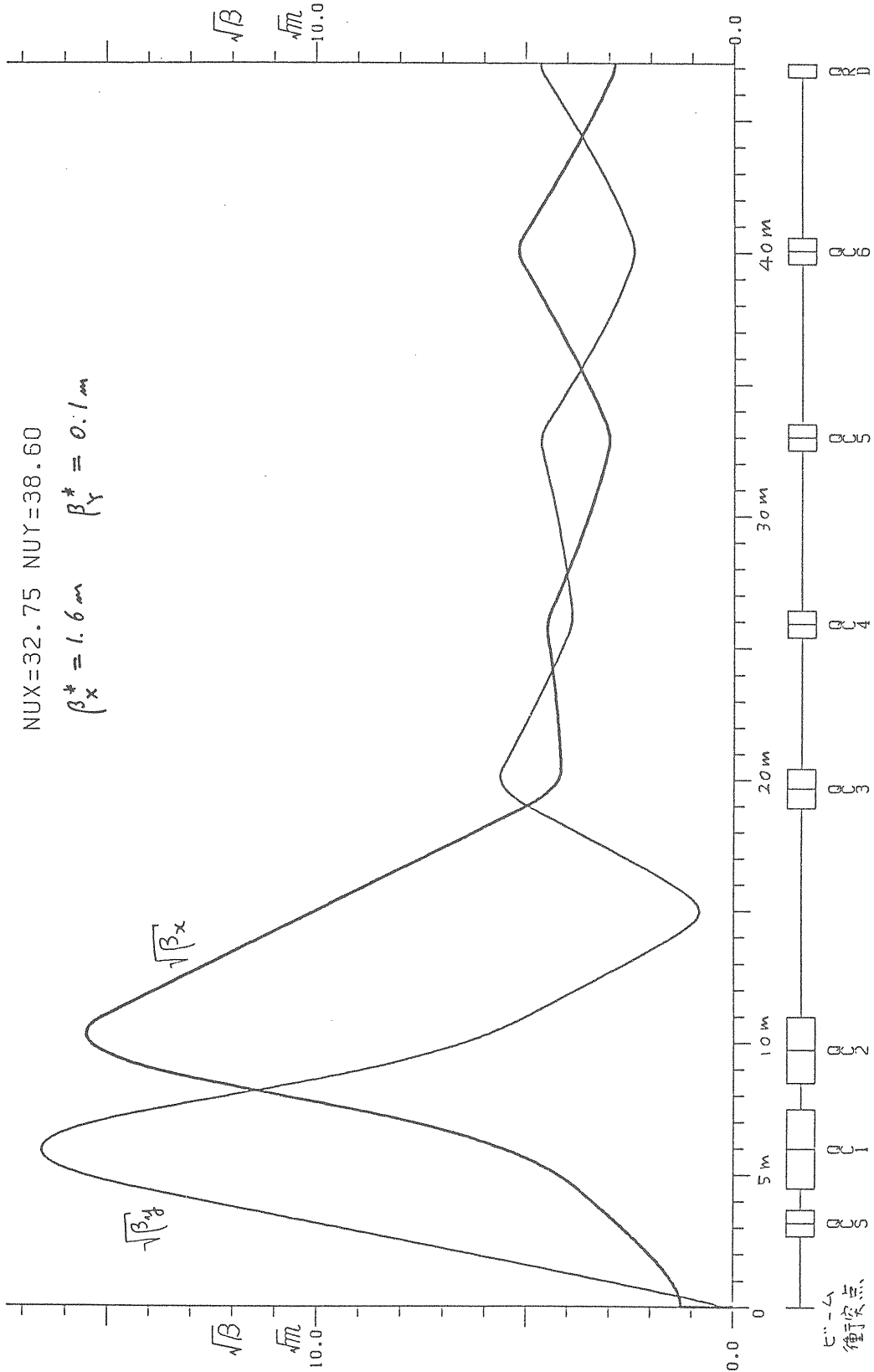


図26 トリスタン MR 低ベータインサージョン

せれば完成するがチューン値が望ましい値になるとは限らない，そこで再び適当な所まで戻ってやり直す。ある程度の繰返しは避けられない。

表1にトリスタンMRの8分の1のラティス計

算に使用されたMAGICの入力例を示す。またこの入力によって計算された8分の1周ラティスの出力例を表2にまたこのとき同時に計算される全体的なパラメタのリストを表3に示す。

表1 MAGIC 入力例

		MAGIC(HRAE) (MAGNET INSERTION CODE)	SK01 85-05-22(18:34)												
		INPUT:	TRISTAN E-E RING ONE OCTANT FOR 'LUH' RUN-----												
①	タイトル	→	FLG	LB	LQ	TK02	ALL								
②	フラック	→	NUM	STP	ESP	FCN									
③	最適化条件	→	FIT	FIT1	FIT2										
④	マッチング行 の番号	→	INT	QUA	%	QC1	QC2	QC3	QC4						
⑤	ビーム衝突点 の番号	→	X			-0.018	0.018	-0.1180304	0.06						
⑥	4極磁石	→	X			0.15	0.125	0.75	0.50						
			X			QC5	QC6								
			X			-0.0892053	0.0772024								
			X			QC8									
			X			-0.0									
			X			0.5									
			X			-0.0892053	0.0772024								
			X			0.5									
			X			QRD	QRF								
			X			-0.0641335	0.0641810								
			X			0.4									
			X			QS1	QS2	QS3	QS4						
			X			-0.0827879	0.09	-0.0827971	0.0887012						
			X			0.5	0.5	0.5	0.5						
			X			QS5	QS6	QS7							
			X			-0.0784791	0.0703760	-0.0713511							
			X			0.5	0.4	0.4							
			X			QH1	QH2	QH3	QH4						
			X			-0.0509762	0.072	-0.0524904	0.0544785						
			X			0.4	0.4	0.4	0.4						
			X			BX	BXH								
			X			1.3619001	0.0572957								
			X			5.86	5.86								
			X			LBD	LFB								
			X			0.55	0.85								
			X			LDB	LBF								
			X			1.10	0.3								
			X			LFS	LSFB								
			X			0.425	0.425								
			X			LDS	LSDB								
			X			0.55	0.55								
			X			LRF	LRF								
			X			6.0736219									
			X			LC0									
			X			2.7									
			X			LC1	LC2	LC3	LC4						
			X			0.8	1.	7.9366136	5.0						
			X			1.0	L.43								
			X			LM1	LM2								
			X			4.5	1.647043								
			X			SF1	SF2	SF3	SD1	SD2	SD3				
			X			***									
			X			LC0	QCS	QCS							
			X			LC1									
			X			QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	
			X			QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	QC1	
			X			LC2									
			X			QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	
			X			QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	QC2	
			X			LC3	QC3	QC3	LC4	QC4					
			X			LRF	QC5	QC5	LRF	QC6	QC6				
			X			LRF	QRD	QRD	LRF	QRF					
			X			LRF	LRF	QRD							
			X			QRD	LRF	QRF	QRD	LRF	QRF				
			X			QRF	LRF	QRD	LRF	QRF					
			X			QRF	LBF	BXH	LBD	QS1					
			X			QS1	LBF	BX	LBD	QS2					
			X			QS2	LBF	BX	LBD	QS3					
			X			QS3	LBF	BX	LBD	QS4					
			X			QS4	LBF	BX	LBD	QS5					
			X			QS5	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QS6			
			X			QS6	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QS7			
			X			QS7	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF3	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD1	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF1	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD2	LSDB	BX	LBF	QF			
			X			QF	LFS	SF2	LSFB	BX	LBD	QD			
			X			QD	LDS	SD3	LSDB	BX	LBF	QF			

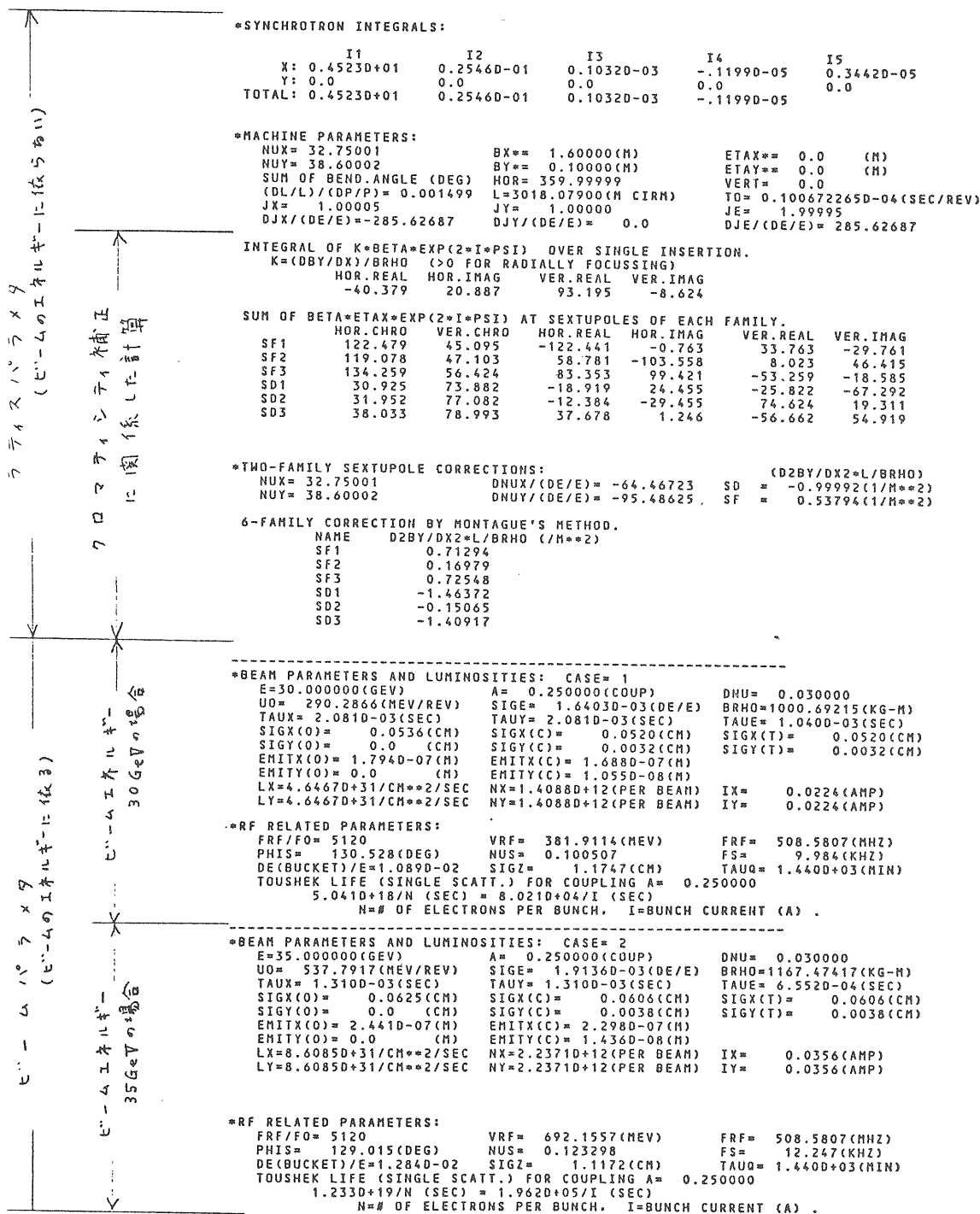
表2 MAGIC 出力例(1)

ラティス構成 要素名	要素の値	トランスパラメタ				ディスパージョン		ディスパージョンの仮定		位相進行 と 2πで割ったもの		ラティス先端 からの 距離(m)
		$\beta_x(m)$	$\beta_y(m)$	α_x	α_y	$X_p(m)$	$Y_p(m)$	X_p'	Y_p'	ν_x	ν_y	
ELEMENT	VALUE	BX	BY	AX	AY	EX	EY	EXP	EYP	NUX	NUY	LENGTH
***	0.0	1.6000	0.1000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
LCO	2.7000000	6.1562	73.0000	-1.68750	-27.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.164859	0.244108	2.7000
QCS	0.0	8.0000	102.5000	-2.00000	-32.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.176208	0.245028	3.2000
QCS	0.0	10.1562	137.0000	-2.31250	-37.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.185091	0.245028	3.7000
LC1	0.8000000	14.2562	202.6000	-2.81250	-45.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.195630	0.246464	4.5000
QC1	-0.0209636	15.1607	215.6601	-3.22364	-41.97582	0.0	0.0	0.0	0.0	0.197255	0.246578	4.6500
QC1	-0.0209636	16.1945	227.7327	-3.67537	-38.42422	0.0	0.0	0.0	0.0	0.198779	0.246686	4.8000
QC1	-0.0209636	17.3706	238.6663	-4.17338	-34.38982	0.0	0.0	0.0	0.0	0.200204	0.246788	4.9500
QC1	-0.0209636	18.7038	248.3234	-4.72394	-29.92331	0.0	0.0	0.0	0.0	0.201529	0.246886	5.1000
QC1	-0.0209636	20.2109	256.5827	-5.33398	-25.08001	0.0	0.0	0.0	0.0	0.202757	0.246981	5.2500
QC1	-0.0209636	21.9109	263.3404	-6.01118	-19.92318	0.0	0.0	0.0	0.0	0.203892	0.247072	5.4000
QC1	-0.0209636	23.8252	268.5115	-6.76407	-14.51521	0.0	0.0	0.0	0.0	0.204938	0.247162	5.5500
QC1	-0.0209636	25.9778	272.0312	-7.60213	-8.92486	0.0	0.0	0.0	0.0	0.205898	0.247250	5.7000
QC1	-0.0209636	28.3960	273.8552	-8.53591	-3.22237	0.0	0.0	0.0	0.0	0.206777	0.247338	5.8500
QC1	-0.0209636	31.1101	273.9606	-9.57717	2.52062	0.0	0.0	0.0	0.0	0.207581	0.247425	6.0000
QC1	-0.0209636	34.1544	272.3460	-10.73902	8.23192	0.0	0.0	0.0	0.0	0.208314	0.247512	6.1500
QC1	-0.0209636	37.5671	269.0318	-12.03609	13.83980	0.0	0.0	0.0	0.0	0.208980	0.247600	6.3000
QC1	-0.0209636	41.3912	264.0595	-13.48470	19.27378	0.0	0.0	0.0	0.0	0.209586	0.247690	6.4500
QC1	-0.0209636	45.6748	257.4918	-15.10311	24.64558	0.0	0.0	0.0	0.0	0.210136	0.247781	6.6000
QC1	-0.0209636	50.4720	249.4109	-16.91169	29.34998	0.0	0.0	0.0	0.0	0.210633	0.247876	6.7500
QC1	-0.0209636	55.8431	239.9187	-18.93320	33.86559	0.0	0.0	0.0	0.0	0.211083	0.247973	6.9000
QC1	-0.0209636	61.8558	229.1342	-21.19311	37.95859	0.0	0.0	0.0	0.0	0.211489	0.248075	7.0500
QC1	-0.0209636	68.5857	217.1930	-23.71987	41.56887	0.0	0.0	0.0	0.0	0.211856	0.248182	7.2000
QC1	-0.0209636	76.1176	204.2451	-26.54530	44.65974	0.0	0.0	0.0	0.0	0.212187	0.248295	7.3500
QC1	-0.0209636	84.5463	190.4533	-29.70497	47.18946	0.0	0.0	0.0	0.0	0.212484	0.248416	7.5000
LC2	1.0000000	154.4047	107.7719	-40.15350	35.49186	0.0	0.0	0.0	0.0	0.213877	0.249527	8.5000
QC2	0.0153106	164.2982	99.2769	-38.94329	32.51158	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214002	0.249719	8.6500
QC2	0.0153106	173.8516	91.4954	-37.43515	29.78033	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214120	0.249928	8.7500
QC2	0.0153106	182.9919	84.3677	-35.64061	27.27721	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214231	0.250155	8.8500
QC2	0.0153106	191.6491	77.8394	-33.57341	24.98304	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214338	0.250400	9.0000
QC2	0.0153106	199.7572	71.8603	-31.24936	22.88024	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214439	0.250666	9.1250
QC2	0.0153106	207.2539	66.3847	-28.68623	20.95271	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214537	0.250954	9.2500
QC2	0.0153106	214.0820	61.3706	-25.90365	19.18568	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214631	0.251266	9.3750
QC2	0.0153106	220.1892	56.7796	-22.92289	17.56562	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214725	0.251603	9.5000
QC2	0.0153106	225.5288	52.5765	-19.76676	16.00263	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214812	0.251968	9.6250
QC2	0.0153106	230.0600	48.7293	-16.45940	14.71778	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214900	0.252361	9.7500
QC2	0.0153106	233.7480	45.2083	-13.02613	13.46819	0.0	0.0	0.0	0.0	0.214985	0.252785	9.8750
QC2	0.0153106	236.5647	41.9866	-9.49319	12.32177	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215070	0.253242	10.0000
QC2	0.0153106	238.4886	39.0395	-5.88764	11.26974	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215154	0.253733	10.1250
QC2	0.0153106	239.5048	36.3445	-2.23704	10.30404	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215237	0.254261	10.2500
QC2	0.0153106	239.6056	33.8809	1.43068	9.41726	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215320	0.254829	10.3750
QC2	0.0153106	238.7904	31.6299	5.08745	8.60263	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215403	0.255436	10.5000
QC2	0.0153106	237.0652	29.5741	8.70530	7.85389	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215487	0.256087	10.6250
QC2	0.0153106	234.4433	27.6979	12.25655	7.16532	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215571	0.256782	10.7500
QC2	0.0153106	230.9447	25.9869	15.71403	6.53163	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215656	0.257524	10.8750
QC2	0.0153106	226.5963	24.4279	19.05129	5.94797	0.0	0.0	0.0	0.0	0.215743	0.258314	11.0000
LC3	7.9366136	25.3631	23.8197	6.30376	-5.87134	0.0	0.0	0.0	0.0	0.232436	0.704955	18.9366
QC3	-0.1426732	18.9666	30.3608	2.52686	-2.53678	0.0	0.0	0.0	0.0	0.237977	0.709315	19.6866
QC3	-0.1426732	17.2300	30.8987	-0.12935	1.84539	0.0	0.0	0.0	0.0	0.244701	0.713144	20.4366
LC4	5.0000000	19.9987	16.0092	-0.42440	1.13250	0.0	0.0	0.0	0.0	0.288106	0.749232	25.4366
QC4	0.0432109	20.0027	15.2446	0.41650	0.60769	0.0	0.0	0.0	0.0	0.292071	0.754345	25.9366
QC4	0.0432109	19.1777	15.1821	1.22166	-0.28163	0.0	0.0	0.0	0.0	0.296120	0.759595	26.4366
LRF	6.0736219	9.1322	21.2256	0.43229	-0.71342	0.0	0.0	0.0	0.0	0.372006	0.814528	32.5102
QC5	-0.0614812	9.0075	21.2963	-0.18022	0.57357	0.0	0.0	0.0	0.0	0.380830	0.818252	33.0102
QC5	-0.0614812	9.5001	20.1019	-0.81511	1.79075	0.0	0.0	0.0	0.0	0.389480	0.822079	33.5102
LRF	6.0736219	25.8643	6.0690	-1.87921	0.51970	0.0	0.0	0.0	0.0	0.452805	0.914743	39.5839
QC6	0.0748479	26.7843	5.8192	0.06223	-0.01385	0.0	0.0	0.0	0.0	0.455810	0.928233	40.0839
QC6	0.0748479	25.7430	6.0974	1.99446	-0.54950	0.0	0.0	0.0	0.0	0.458822	0.941692	40.5839
LRF	-0.0892053	8.6489	21.5862	-0.00000	1.84638	0.0	0.0	0.0	0.0	0.492071	1.025216	46.8783
QRD	-0.0892053	8.2449	21.5863	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.535041	1.036464	47.1575
QRD	-0.0892053	8.6489	20.6491	-0.82002	1.84637	0.0	0.0	0.0	0.0	0.544540	1.040206	47.6575
LRF	6.0736219	25.7431	6.0974	-1.99447	0.54950	0.0	0.0	0.0	0.0	0.611260	1.131236	53.7311
QRF	0.0772024	26.7534	5.8261	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.614273	1.144690	54.2311
QRF	0.0772024	26.7534	5.8261	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.614273	1.144690	54.2311
QRF	0.0772024	25.7431	6.0974	1.99447	-0.54950	0.0	0.0	0.0	0.0	0.617286	1.158143	54.7311
LRF	-0.0892053	8.6489	21.5862	-0.00000	1.84638	0.0	0.0	0.0	0.0	0.682468	1.264526	64.9520
QRD	-0.0892053	8.2449	21.5863	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.693504	1.252916	61.3047
QRD	-0.0892053	8.6489	20.6490	-0.82002	1.84637	0.0	0.0	0.0	0.0	0.693504	1.252916	61.3047
LRF	6.0736219	25.7430	6.0974	-1.99446	0.54951	0.0	0.0	0.0	0.0	0.703004	1.256658	61.8047
QRF	0.0772024	26.7532	5.8261	0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.769723	1.347688	67.8783
QRF	0.0772024	26.7534	5.8261	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.772736	1.361142	68.3783
QRF	0.0772024	25.7431	6.0974	1.99447	-0.54951	0.0	0.0	0.0	0.0	0.775749	1.374595	68.8783
LRF	-0.0892053	8.6489	20.6491	0.82002	-1.84638	0.0	0.0	0.0	0.0	0.842468	1.465626	74.9520
QRD	-0.0892053	8.2449	21.5863	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.851968	1.469368	75.4520
QRD	-0.0892053	8.6489	20.6491	-0.82001	1.84638	0.0	0.0	0.0	0.0	0.861467	1.473109	75.9520
LRF	6.0736219	25.7430	6.0974	-1.99446	0.54951	0.0	0.0	0.0	0.0	0.928187	1.564140	82.0256
QRF	0.0772024	26.7532	5.8261	0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.931200	1.577593	82.5256
QRF	0.0772024	25.7430	6.0974	1.99446	-0.54950	0.0	0.0	0.0	0.0	0.934213	1.591047	83.0256
LRF	6.0736219	8.6489	20.6490	0.82001	-1.84637	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000932	1.682078	89.0992
QRD	-0.0892053	8.2449	21.5862	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	1.010432	1.685819	89.5992
QRD	-0.0892053	8.6489	20.6490	-0.82002	1.84637	0.0	0.0	0.0	0.0	1.018251	1.696518	104.3828
LRF	6.0736219	25.7431	6.0974	1.99447	-0.54950	0.0	0.0	0.0	0.0	1.193201	1.909856	104.8828
LRF	6.0736219	26.7533	5.8261	-0.00000	0.00000	0.0	0.0	0.0	0.0	1.199260	1.911961	105.1828
LC5												

LBD	0.5500000	7.9180	22.3767	0.58439	-1.79038	0.55810	0.0	-0.03595	0.0	1.650162	2.294706	134.7228	LBD
Q55	-0.0784791	7.6759	23.3004	-0.09387	-0.03271	0.55099	0.0	0.07473	0.0	1.660643	2.298168	135.2228	Q55
Q55	-0.0784791	8.1107	22.4404	-0.78706	1.73003	0.56557	0.0	0.05110	0.0	1.670662	2.301626	135.7228	Q55
LDS	0.5500000	9.0369	20.5912	-0.89688	1.63216	0.59568	0.0	0.05110	0.0	1.680834	2.305699	136.2728	LDS
S01	0.0	9.0369	20.5912	-0.89688	1.63216	0.59568	0.0	0.05110	0.0	1.690008	2.310142	136.8228	S01
LSDB	0.5500000	10.0838	18.8497	-1.00670	1.53430	0.62178	0.0	0.05110	0.0	1.745936	2.395534	142.8228	LSDB
BX	1.3619001	28.7565	6.9724	-2.17666	0.49196	0.99084	0.0	0.07487	0.0	1.747560	2.402525	142.9828	BX
LBF	0.3000000	30.0605	26.6666	0.43852	1.01530	0.0	0.0	0.00284	0.0	1.749636	2.412187	143.3828	LBF
Q56	0.0703760	31.0097	6.5548	-0.11414	-0.08910	1.02897	0.0	0.00627	0.0	1.751709	2.421746	143.7828	Q56
Q56	0.0703760	20.2397	6.8385	2.02102	-0.62684	1.01556	0.0	-0.06927	0.0	1.754007	2.431255	144.2078	Q56
LFS	0.4250000	28.5522	7.4081	1.94956	-0.71340	0.98612	0.0	-0.06927	0.0	1.754007	2.431255	144.2078	LFS
SF1	0.0	28.5522	7.4081	1.94956	-0.71340	0.98612	0.0	-0.06927	0.0	1.754007	2.431255	144.2078	SF1
LSFB	0.4250000	26.9255	8.0513	1.87810	-0.79997	0.95668	0.0	-0.06927	0.0	1.756446	2.440018	144.6328	LSFB
BX	1.3619001	10.6890	24.4143	0.89289	-1.99156	0.62045	0.0	-0.04550	0.0	1.812573	2.508647	150.4928	BX
LBD	0.5500000	9.7577	26.6666	0.80041	-2.10344	0.59543	0.0	-0.04550	0.0	1.821148	2.512077	151.0428	LBD
Q57	-0.0713511	9.4134	27.5959	0.06845	-0.19765	0.58566	0.0	-0.00346	0.0	1.827824	2.514433	151.4428	Q57
Q57	-0.0713511	9.6461	26.9768	-0.65562	1.73050	0.59264	0.0	0.03848	0.0	1.834539	2.516735	151.8428	Q57
LDS	0.5500000	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61381	0.0	0.03848	0.0	1.843278	2.520098	152.3928	LDS
S02	0.0	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61381	0.0	0.03848	0.0	1.851563	2.523713	152.9428	S02
LSDB	0.5500000	11.2678	23.3489	-0.81868	1.56761	0.63497	0.0	0.03848	0.0	1.907206	2.586178	158.8028	LSDB
BX	1.3619001	25.9510	10.0533	-1.68723	0.70061	0.93005	0.0	0.06225	0.0	1.908831	2.591028	159.1028	BX
LBF	0.3000000	26.9767	9.6463	-1.73170	0.65612	0.94873	0.0	0.00082	0.0	1.911151	2.597749	159.5028	LBF
QF	0.0641810	27.6753	9.3861	0.00009	0.00000	0.96137	0.0	-0.06063	0.0	1.913471	2.604470	159.9028	QF
QF	0.0641810	26.9765	9.6463	1.73186	-0.71914	0.94926	0.0	-0.06063	0.0	1.916049	2.611281	160.3278	QF
LFS	0.4250000	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92361	0.0	-0.06063	0.0	1.918773	2.617697	160.7528	LFS
SF2	0.0	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92361	0.0	-0.06063	0.0	1.927029	2.625397	161.1628	SF2
LSFB	0.4250000	24.1395	10.8689	1.60584	-0.78217	0.89784	0.0	-0.06063	0.0	1.979029	2.675397	167.1628	LSFB
BX	1.3619001	10.4107	25.1195	0.73717	-1.64900	0.61223	0.0	-0.03686	0.0	1.987769	2.678760	167.1628	BX
LBD	0.5500000	9.6447	26.9782	0.65563	-1.73043	0.59196	0.0	-0.00079	0.0	1.994491	2.681080	167.5628	LBD
QD	-0.0641335	9.3846	27.6763	0.00005	0.00015	0.58476	0.0	0.03847	0.0	2.001213	2.683400	167.9628	QD
QD	-0.0641335	26.9765	9.6463	-0.65552	1.73071	0.59260	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QD
LDS	0.5500000	10.4105	25.1190	-0.73705	1.64926	0.61375	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LDS
S03	0.0	10.4105	25.1190	-0.73705	1.64926	0.61375	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	S03
LSDB	0.5500000	11.2661	23.3496	-0.81858	1.56780	0.63491	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LSDB
BX	1.3619001	25.9484	10.0525	-1.68717	0.70068	0.92995	0.0	0.06224	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	BX
LBF	0.3000000	26.9741	9.6455	-1.73164	0.65618	0.94863	0.0	0.00082	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LBF
QF	0.0641810	27.6727	9.3852	-0.00003	0.00011	0.94926	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QF
QF	0.0641810	26.9741	9.6455	1.73158	-0.65595	0.94926	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QF
LFS	0.4250000	25.5296	10.2296	1.66858	-0.71897	0.92351	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LFS
SF3	0.0	25.5296	10.2296	1.66858	-0.71897	0.92351	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	SF3
LSFB	0.4250000	24.1375	10.8675	1.60559	-0.78199	0.89775	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LSFB
BX	1.3619001	10.4110	25.1159	0.73704	-1.64877	0.61217	0.0	-0.03685	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	BX
LBD	0.5500000	9.6451	26.9743	0.65551	-1.73020	0.59190	0.0	-0.03685	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LBD
QD	-0.0641335	9.3852	27.6723	-0.00009	0.00012	0.58470	0.0	0.00080	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QD
QD	-0.0641335	26.9741	9.6455	-0.65569	1.73043	0.59254	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QD
LDS	0.5500000	10.4114	25.1154	-0.73723	1.64898	0.61369	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LDS
S01	0.0	10.4114	25.1154	-0.73723	1.64898	0.61369	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	S01
LSDB	0.5500000	11.2672	23.3463	-0.81877	1.56754	0.63485	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LSDB
BX	1.3619001	25.9522	10.0519	-1.68745	0.70050	0.92988	0.0	0.06224	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	BX
LBF	0.3000000	26.9781	9.6449	-1.73193	0.65601	0.94855	0.0	0.00082	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LBF
QF	0.0641810	27.6768	9.3847	-0.00005	0.00003	0.94919	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QF
QF	0.0641810	26.9781	9.6450	1.73182	-0.65607	0.94920	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QF
LFS	0.4250000	25.5329	10.2294	1.66882	-0.71910	0.92344	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LFS
SF1	0.0	25.5329	10.2294	1.66882	-0.71910	0.92344	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	SF1
LSFB	0.4250000	24.1411	10.8674	1.60582	-0.78213	0.89768	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LSFB
BX	1.3619001	10.4122	25.1181	0.73722	-1.64904	0.61214	0.0	-0.03685	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	BX
LBD	0.5500000	9.6461	26.9768	0.65569	-1.73048	0.59188	0.0	-0.03685	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LBD
QD	-0.0641335	9.3860	27.6750	0.00003	0.00001	0.58469	0.0	0.00080	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QD
QD	-0.0641335	26.9768	9.6461	-0.65562	1.73050	0.59252	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QD
LDS	0.5500000	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61368	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LDS
S02	0.0	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61368	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	S02
LSDB	0.5500000	11.2678	23.3489	-0.81868	1.56761	0.63484	0.0	0.03847	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LSDB
BX	1.3619001	25.9510	10.0533	-1.68723	0.70061	0.92991	0.0	0.06224	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	BX
LBF	0.3000000	26.9767	9.6463	-1.73170	0.65612	0.94858	0.0	0.00082	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LBF
QF	0.0641810	27.6753	9.3861	0.00009	0.00000	0.96122	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QF
QF	0.0641810	26.9765	9.6463	1.73186	-0.65612	0.94926	0.0	-0.06062	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QF
LFS	0.4250000	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92347	0.0	-0.06061	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LFS
SF2	0.0	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92347	0.0	-0.06061	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	SF2
LSFB	0.4250000	24.1395	10.8689	1.60584	-0.78217	0.89771	0.0	-0.06061	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LSFB
BX	1.3619001	10.4107	25.1195	0.73717	-1.64900	0.61219	0.0	-0.03684	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	BX
LBD	0.5500000	9.6447	26.9782	0.65563	-1.73043	0.59192	0.0	-0.03684	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LBD
QD	-0.0641335	9.3846	27.6763	0.00005	0.00015	0.58473	0.0	0.00081	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QD
QD	-0.0641335	26.9765	9.6463	-0.65552	1.73071	0.59257	0.0	0.03848	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	QD
LDS	0.5500000	10.4105	25.1190	-0.73705	1.64926	0.61373	0.0	0.03848	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LDS
S03	0.0	10.4105	25.1190	-0.73705	1.64926	0.61373	0.0	0.03848	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	S03
LSDB	0.5500000	11.2661	23.3496	-0.81858	1.56780	0.63490	0.0	0.03848	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LSDB
BX	1.3619001	25.9484	10.0525	-1.68717	0.70068	0.93001	0.0	0.06225	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	BX
LBF	0.3000000	26.9741	9.6455	-1.73164	0.65618	0.94868	0.0	0.00082	0.0	2.009954	2.686762	168.5128	LBF
QF	0.0641810	27.6											

QF	0.0641810	27.6727	9.3852	-0.00003	0.00011	0.96126	0.0	0.00082	0.0	3.077887	3.764468	272.3428	3F
QF	0.0641810	26.9741	9.6453	1.73158	-0.65595	0.94928	0.0	-0.06062	0.0	3.080207	3.771190	272.7428	3F
LFS	0.4250000	25.5290	10.2296	1.66858	-0.71897	0.92351	0.0	-0.06062	0.0	3.082785	3.778001	273.1678	LFS
SF3	0.4250000	25.5290	10.2296	1.66858	-0.71897	0.92351	0.0	-0.06062	0.0	3.082785	3.778001	273.1678	SF3
LSFB	0.4250000	24.1375	10.8675	1.60559	-0.78199	0.89775	0.0	-0.06062	0.0	3.085510	3.784418	273.5928	LSFB
BX	1.3619001	10.4110	25.1159	0.73704	-1.64877	0.61217	0.0	-0.03685	0.0	3.145677	3.842126	279.4528	BX
LBD	0.5500000	9.6451	26.9743	0.65551	-1.73020	0.59190	0.0	-0.03685	0.0	3.154507	3.845490	280.0028	LBD
QD	-0.0641335	9.3852	27.6723	-0.00009	0.00012	0.58470	0.0	0.00080	0.0	3.161229	3.847810	280.4028	QD
QD	-0.0641335	9.6453	26.9741	-0.65569	1.73043	0.59254	0.0	0.03847	0.0	3.167951	3.850130	280.8028	QD
LDS	0.5500000	10.4114	25.1154	-0.73723	1.64898	0.61369	0.0	0.03847	0.0	3.176691	3.853494	281.3528	LDS
S01	0.0	10.4114	25.1154	-0.73723	1.64898	0.61369	0.0	0.03847	0.0	3.176691	3.853494	281.3528	S01
LSDB	0.5500000	11.2672	23.3463	-0.81877	1.56754	0.63485	0.0	0.03847	0.0	3.184776	3.857109	281.9028	LSDB
BX	1.3619001	25.9522	10.0519	-1.68745	0.70050	0.92988	0.0	0.06224	0.0	3.240440	3.919582	287.7628	BX
LBF	0.3000000	26.9781	9.6449	-1.73193	0.65601	0.94855	0.0	0.06224	0.0	3.242244	3.924432	288.0628	LBF
QF	0.0641810	27.6768	9.3847	-0.00005	-0.00003	0.96119	0.0	0.00082	0.0	3.244564	3.931154	288.4628	QF
QF	0.0641810	26.9781	9.6450	1.73182	-0.65607	0.94920	0.0	-0.06062	0.0	3.246884	3.937876	288.8628	QF
LFS	0.4250000	25.5329	10.2294	1.66882	-0.71910	0.92344	0.0	-0.06062	0.0	3.249461	3.944688	289.2878	LFS
SF1	0.0	25.5329	10.2294	1.66882	-0.71910	0.92344	0.0	-0.06062	0.0	3.249461	3.944688	289.2878	SF1
LSFB	0.4250000	24.1411	10.8674	1.60582	-0.78213	0.89768	0.0	-0.06062	0.0	3.252186	3.951105	289.7128	LSFB
LBD	0.5500000	9.6461	26.9768	0.65549	-1.73048	0.59188	0.0	-0.03685	0.0	3.312435	4.008811	295.5728	LBD
QD	-0.0641335	9.3860	27.6750	0.00003	0.00001	0.58469	0.0	0.00080	0.0	3.321174	4.012174	296.1228	QD
QD	-0.0641335	9.6461	26.9768	-0.65562	1.73050	0.59252	0.0	0.03847	0.0	3.327895	4.014494	296.5228	QD
LDS	0.5500000	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61368	0.0	0.03847	0.0	3.334616	4.016814	296.9228	LDS
S02	0.0	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61368	0.0	0.03847	0.0	3.334616	4.016814	296.9228	S02
LSDB	0.5500000	11.2678	23.3489	-0.81868	1.56761	0.63484	0.0	0.03847	0.0	3.343355	4.020177	297.4728	LSDB
BX	1.3619001	25.9510	10.0533	-1.68723	0.70061	0.92991	0.0	0.06224	0.0	3.351440	4.023792	298.0228	BX
LBF	0.3000000	26.9767	9.6483	-0.00005	-0.00012	0.96132	0.0	0.00082	0.0	3.407104	4.082657	303.8828	LBF
QF	0.0641810	27.6753	9.3861	0.00009	0.00000	0.96122	0.0	0.00082	0.0	3.408908	4.091106	304.1828	QF
QF	0.0641810	26.9765	9.6463	1.73186	-0.65612	0.94924	0.0	-0.06062	0.0	3.411228	4.097827	304.5828	QF
LFS	0.4250000	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92347	0.0	-0.06061	0.0	3.413548	4.104548	304.9828	LFS
SF2	0.0	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92347	0.0	-0.06061	0.0	3.413548	4.104548	304.9828	SF2
LSFB	0.4250000	24.1395	10.8689	1.60584	-0.78217	0.89771	0.0	-0.06061	0.0	3.416126	4.111359	305.4078	LSFB
BX	1.3619001	10.4107	25.1195	0.73717	-1.64900	0.61219	0.0	-0.03684	0.0	3.416126	4.111359	305.4078	BX
LBD	0.5500000	9.6444	26.9780	0.65552	-1.73071	0.59257	0.0	-0.03684	0.0	3.418851	4.117776	305.8328	LBD
QD	-0.0641335	9.3846	27.6763	0.00005	0.00015	0.58473	0.0	0.00081	0.0	3.479106	4.175476	311.6928	QD
QD	-0.0641335	9.6446	26.9780	-0.65552	1.73071	0.59257	0.0	0.03848	0.0	3.487846	4.178838	312.2428	QD
LDS	0.5500000	10.4105	25.1190	-0.73705	1.64926	0.61373	0.0	0.03848	0.0	3.494569	4.181158	312.6428	LDS
S03	0.0	10.4105	25.1190	-0.73705	1.64926	0.61373	0.0	0.03848	0.0	3.501291	4.183478	313.0428	S03
LSDB	0.5500000	11.2661	23.3496	-0.81858	1.56780	0.63490	0.0	0.03848	0.0	3.510031	4.186841	313.5928	LSDB
BX	1.3619001	25.9484	10.0525	-1.68717	0.70068	0.93001	0.0	0.06225	0.0	3.518117	4.190456	314.1428	BX
LBF	0.3000000	26.9741	9.6455	-1.73164	0.65618	0.94868	0.0	0.06225	0.0	3.573788	4.252923	320.0028	LBF
QF	0.0641810	27.6727	9.3852	-0.00005	0.00012	0.96132	0.0	0.00083	0.0	3.575533	4.257772	320.3028	QF
QF	0.0641810	26.9741	9.6453	1.73158	-0.65595	0.94934	0.0	-0.06062	0.0	3.577913	4.264494	320.7028	QF
LFS	0.4250000	25.5290	10.2296	1.66858	-0.71897	0.92357	0.0	-0.06062	0.0	3.580233	4.271216	321.1028	LFS
SF3	0.0	25.5290	10.2296	1.66858	-0.71897	0.92357	0.0	-0.06062	0.0	3.582811	4.278027	321.5278	SF3
LSFB	0.4250000	24.1375	10.8675	1.60559	-0.78199	0.89775	0.0	-0.06062	0.0	3.582811	4.278027	321.5278	LSFB
BX	1.3619001	10.4110	25.1159	0.73704	-1.64877	0.61225	0.0	-0.03685	0.0	3.585336	4.284444	321.9528	BX
LBD	0.5500000	9.6451	26.9743	0.65551	-1.73020	0.59190	0.0	-0.03685	0.0	3.645793	4.342153	327.8128	LBD
QD	-0.0641335	9.3852	27.6723	-0.00009	0.00012	0.58479	0.0	0.00081	0.0	3.654533	4.345516	328.3628	QD
QD	-0.0641335	9.6453	26.9741	-0.65569	1.73043	0.59263	0.0	0.03848	0.0	3.657525	4.347836	328.7628	QD
LDS	0.5500000	10.4114	25.1154	-0.73723	1.64898	0.61380	0.0	0.03848	0.0	3.661255	4.349181	329.2028	LDS
S01	0.0	10.4114	25.1154	-0.73723	1.64898	0.61380	0.0	0.03848	0.0	3.667616	4.353520	329.7128	S01
LSDB	0.5500000	11.2672	23.3463	-0.81877	1.56754	0.63496	0.0	0.03848	0.0	3.676716	4.353520	329.7128	LSDB
BX	1.3619001	25.9522	10.0519	-1.68745	0.70050	0.93008	0.0	0.06225	0.0	3.684802	4.357135	330.2628	BX
LBF	0.3000000	26.9781	9.6449	-1.73193	0.65601	0.94875	0.0	0.06225	0.0	3.740466	4.419608	336.1228	LBF
QF	0.0641810	27.6768	9.3847	-0.00005	-0.00003	0.96140	0.0	0.00082	0.0	3.742270	4.424458	336.4228	QF
QF	0.0641810	26.9781	9.6450	1.73182	-0.65607	0.94941	0.0	-0.06063	0.0	3.745930	4.431181	336.8228	QF
LFS	0.4250000	25.5329	10.2294	1.66882	-0.71910	0.92364	0.0	-0.06063	0.0	3.749487	4.444714	337.6478	LFS
SF1	0.0	25.5329	10.2294	1.66882	-0.71910	0.92364	0.0	-0.06063	0.0	3.749487	4.444714	337.6478	SF1
LSFB	0.4250000	24.1411	10.8674	1.60582	-0.78213	0.89788	0.0	-0.06063	0.0	3.752212	4.451132	338.0728	LSFB
BX	1.3619001	10.4122	25.1181	0.73722	-1.64904	0.61227	0.0	-0.03686	0.0	3.812461	4.508837	343.3328	BX
LBD	0.5500000	9.6461	26.9768	0.65569	-1.73048	0.59200	0.0	-0.03686	0.0	3.821200	4.512200	344.4828	LBD
QD	-0.0641335	9.3860	27.6750	0.00003	0.00001	0.58481	0.0	0.00080	0.0	3.827921	4.514520	344.8828	QD
QD	-0.0641335	9.6461	26.9768	-0.65562	1.73050	0.59264	0.0	0.03848	0.0	3.834642	4.516840	345.2828	QD
LDS	0.5500000	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61381	0.0	0.03848	0.0	3.834642	4.516840	345.2828	LDS
S02	0.0	10.4121	25.1181	-0.73715	1.64906	0.61381	0.0	0.03848	0.0	3.834642	4.516840	345.2828	S02
LSDB	0.5500000	11.2678	23.3489	-0.81868	1.56761	0.63497	0.0	0.03848	0.0	3.843381	4.520203	345.8328	LSDB
BX	1.3619001	25.9510	10.0533	-1.68723	0.70061	0.93005	0.0	0.06225	0.0	3.851466	4.523818	346.3828	BX
LBF	0.3000000	26.9767	9.6463	-0.00005	-0.00012	0.96173	0.0	0.06225	0.0	3.907129	4.586283	352.2428	LBF
QF	0.0641810	27.6753	9.3861	0.00009	0.00000	0.96160	0.0	0.06225	0.0	3.908934	4.591132	352.5428	QF
QF	0.0641810	26.9781	9.6453	1.73186	-0.65612	0.94934	0.0	-0.06063	0.0	3.911251	4.597862	352.9428	QF
LFS	0.4250000	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92364	0.0	-0.06063	0.0	3.913550	4.604645	353.3428	LFS
SF2	0.0	25.5312	10.2308	1.66885	-0.71914	0.92364	0.0	-0.06063	0.0	3.913550	4.604645	353.3428	SF2
LSFB	0.4250000	24.1395	10.8689	1.60584	-0.78217	0.89771	0.0	-0.06063	0.0	3.916067	4.611617	353.7428	LSFB
BX	1.3619001	10.4107	25.1195	0.73717	-1.64900	0.61219	0.0	-0.03684	0.0	3.918881	4.618286	354.1928	BX
LBD	0.5500000	9.6444	26.9780	0.65552	-1.73071	0.59257	0.0	-0.03684	0.0	3.967045	4.682446	360.0528	LBD
QD	-0.0641335	9.3846	27.6763	0.00005	0.00015	0.58479	0.0	0.00081	0.0	3.972970	4.683384	360.4028	QD
QD	-0.0641335	9.6446	26.9780	-0.65552	1.73071	0.59257	0.0	0.03847	0.0	3.977409	4.689106	361.0028	QD
LDS	0.5500000												

表3 MAGIC 出力例(2)



5. クロマティシティ補正

クロマティシティ補正は、低ベータインサクションや低エミッタンス用セルを持つストレージングでは、特に重要な問題である。補正方法や限界について実例を示しつつ説明する。

5.1 何を補正するのか、また何が問題を起こすのか。

5.2 クロマティシティ補正の実例をプログラム PATRICIA の出力例と共に示す。

5.1 補正の方法と限界

運動量のずれによって生じるベータatron振動数の変化を線型クロマティシティとよび (3.73) ないし (3.74) 式を用いて計算できる。(3.74) 式から明

らかなように無補正のクロマティシティは負の値であり、またベータ関数が小さい時その絶対値は大きくなる。つまり低ベータインサージョンを持つラティスでは補正前クロマティシティの絶対値が大きい事になる。実際低ベータインサージョンのベータ値の下限はそれともなうクロマティシティ補正の限界によって定まる。クロマティシティが補正されなければならない第1の理由は、ビーム内の運動量巾に対応するチューンの広がり、危険な共鳴線を横切ることであり、また第2には、負のクロマティシティのためにヘッドテイル不安定現象の基本モードが励起されることである。線型クロマティシティは通常若干正の値に補正される。

クロマティシティの補正には6極磁石が使用される。6極磁場が存在するときの運動方程式は、(1.88)式から6極磁場 b_2 を係数に持つ微量は2次項まで残り他は1次項しか残さないという近似によって次のように求められる。

$$x'' - \kappa(1 + \kappa x) = \frac{p_0}{p} \left\{ -\kappa - (b_1 + 2\kappa^2)x - \frac{1}{2}b_2(x^2 - y^2) \right\} \quad (5.1a)$$

$$y'' = \frac{p_0}{p} \{b_1 y + b_2 xy\} \quad (5.1b)$$

ここで運動量のずれを次のように展開する。

$$\frac{p_0}{p} = 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \dots \quad (5.2a)$$

$$\Delta = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (5.2b)$$

(5.1)式に(5.2a)式を代入し、 Δ を含めて微量の2次まで計算すれば、

$$x'' + (b_1 + \kappa^2)x = \kappa(\Delta - \Delta^2) + \Delta(b_1 + 2\kappa^2)x - \frac{1}{2}b_2(x^2 - y^2) \quad (5.3a)$$

$$y'' - b_1 y = -\Delta b_1 y + b_2 xy \quad (5.36b)$$

(3.69)式で求めたディスパージョン関数を使って x を次のように、平衡軌道のずれとその回りでのベータatron振動とに分けて書こう。

$$x = x_\beta + X_p \cdot \Delta \quad (5.4)$$

これを(5.3a)式に代入すれば X_p は Δ および x に関して1次までの特殊解だから、 x に関する次式を得る。

$$\begin{aligned} x_\beta'' + (b_1 + \kappa^2)x_\beta &= -\kappa\Delta^2 + \Delta(b_1 + 2\kappa^2)(x_\beta + X_p \cdot \Delta) \\ &\quad - \frac{1}{2}b_2\{(x_\beta + X_p \cdot \Delta)^2 - y^2\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで Δ に関して2次の項を落せば

$$\begin{aligned} x_\beta'' + (b_1 + \kappa^2)x_\beta &= (b_1 + 2\kappa^2 - b_2 X_p) \cdot \Delta \cdot x_\beta - \frac{1}{2}b_2(x_\beta^2 - y^2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

垂直方向に関しては(5.3b)式に(5.4)式を代入すればよく、水平・垂直両方向のベータatron振動の方程式は、 x_β を再び x と書いてやれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} x'' + (b_1 + \kappa^2)x &= (b_1 + 2\kappa^2 - b_2 X_p) \cdot \Delta \cdot x - \frac{1}{2}b_2(x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (5.7a)$$

$$\begin{aligned} y'' - b_1 y &= (-b_1 + b_2 X_p) \cdot \Delta \cdot y + b_2 xy \end{aligned} \quad (5.7b)$$

ここで(5.7a)式の κ^2 項はしばしば無視される事がある。

この両式の右辺第一項の係数(カッコ内の関数)が常にゼロにできれば、(3.73)式で計算される線型クロマティシティがゼロにできるだけでなく、さらに(3.75)式で計算されるベータ関数の変動もまた至る所でゼロになる。しかしこれは(5.7a)式の2 κ^2 項を無視したとしても満足させるのが厳しい条件であり、ディスパージョン X_p がゼロの場所に4極磁場 b_1 があれば完全に不可能な注文である。そこでこの条件を緩めて、線型クロマティシティの補正と加速器リング内のいくつかの場所においてツイスパラメータの変動を抑えるということを行なうのが一般的やり方である。

6極磁場による補正を含んだ線型クロマティシティは

$$\xi_x = \frac{\Delta \nu_x}{\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)} = \frac{-1}{4\pi} \int_0^c \beta_x(s) (b_1 + 2\kappa^2 - b_2 X_p) ds \quad (5.8a)$$

$$\xi_y = \frac{\Delta \nu_y}{\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)} = \frac{-1}{4\pi} \int_0^c \beta_y(s) (-b_1 + b_2 X_p) ds \quad (5.8b)$$

と書ける。与えられたラティスで(5.8)の両式をゼロにするように6極磁場 b_2 を励起すればよく、2つの条件を満たすのだから最低限2つの独立パラメタが存在すれば実現可能である。実際トリスタンARでは2種の6極磁石、SFおよびSDを用いて線型クロマティシティを補正している。

トゥイスパラメタの変動は(3.39)式およびその脚注(3.42)により求めることができる。すなわち加速器リング内の場所 s における β および α の運動量誤差による変動は次式によって与えられる。

$$T(s) = \left[\frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} + j \left\{ \Delta\alpha(s) - \alpha(s) \frac{\Delta\beta(s)}{\beta(s)} \right\} \right] / \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)$$

$$= \frac{+1}{2 \sin 2\pi\nu} \int_s^{s+c} k(s_1) \beta(s_1) \times \exp i[2\pi\nu - 2\{\psi(s_1) - \psi(s)\}] ds_1 \quad (5.9)$$

ここで $k(s_1)$ は水平・垂直各々の方向に対応して

$$k(s_1) = \begin{cases} + (b_1 + 2\kappa^2 - b_2 X_p) & \text{水平方向} \\ + (-b_1 + b_2 X_p) & \text{垂直方向} \end{cases} \quad (5.10)$$

である。(5.9)式によれば、リング内の任意の場所一ヶ所でトゥイスパラメタの運動量誤差による変動を抑制するために水平・垂直の各方向で各々2つの条件、計4つの条件を満たさなければならない。しかしながら、変動を無くす場所がリングの折り返し対称点(トリスタンMRの場合ビーム衝突点および曲線部中央の対称点)である場合には、被積分関数

の対称性から(5.9)式の積分は必ず実数となり条件の数は半分になる。また6極磁場 b_2 の分布に、線型ラティスと同じスーパーヒリオドによる周期性を与えれば、トゥイスパラメタの変動にもスーパーヒリオド毎の周期性が生じる。具体例としてトリスタンMRを考えれば、全てのビーム衝突点と対称点におけるトゥイスパラメタ変動を抑制するために計4つの独立パラメタが必要であり、さらに線型クロマティシティ補正用に2つの独立パラメタを要する。実際トリスタンMRにおける6極磁石の種類は6種でそれぞれ独立な電源によって給電される。

6極磁石はディスパージョンのゼロでない場所に置く必要があり、通常はノーマルセル中に規則的に配置される。このためノーマルセル当りのベータatron位相進行によっては、6極磁石の種類を増しても、(5.9)式の位相項の回転状態に応じて独立なパラメタが増えないことがある。図27および図28にこの間の事情を示す。

これらの図にはノーマルセル中に2個ずつ規則正しく配置された4ないし6種の6極磁石から生じる(5.9)式の $T(s)$ に対する寄与が模式的に示されている。ここで大小の同心円の半径は個々の6極磁石の置かれた場所におけるディスパージョンとベータ関数の積の比を表わしている。図27は60°ノーマルセルの場合を示し、6種の6極磁石の強さをうまく選べば、 T_x および T_y 複素平面の任意の点(補正されるべき量即ち(5.9)式の積分で6極磁場以外からの寄与に相当する。)へ到達可能で、同時に線型クロマティシティ補正も行なえることが理解できるであろう。一方図28は90°ノーマルセルの場合を示してお

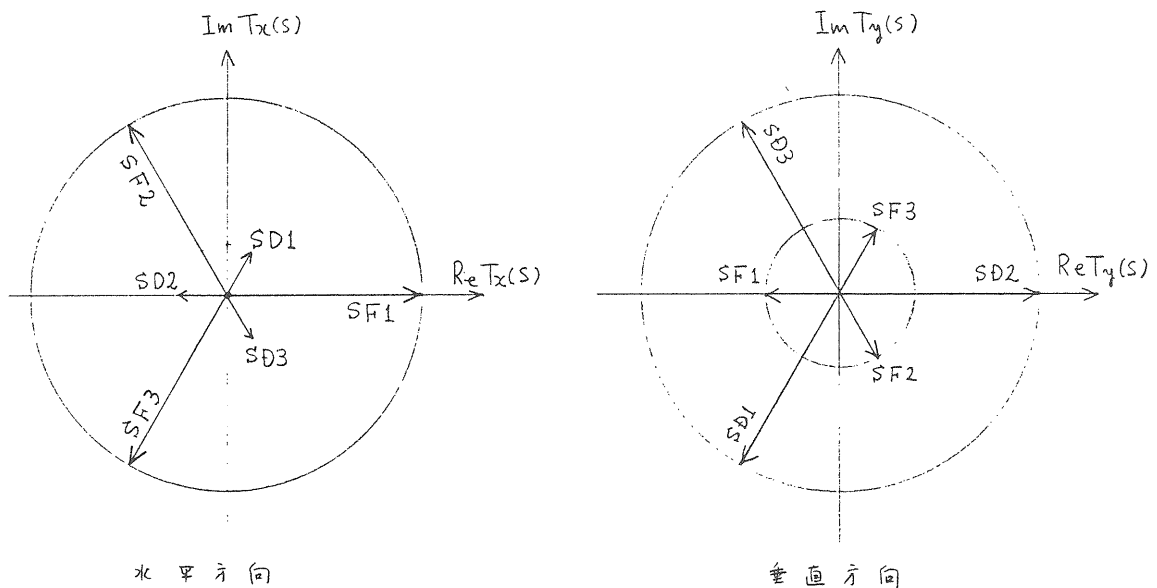


図27 6極磁石の作る補正への寄与(60°セルの場合)

り、意味のある独立な6極磁石の種数が4個に過ぎないことが理解できる。これはノーマルセル2つ進むと(5.9)式の被積分関数の位相項が 360° 回転し元に戻ってしまうからである。もちろんこの事情は、ノーマルセル内に2個ずつ6極磁石を置くという前提を変えて、セル内にもっと多くの6極磁石を置けば改善される可能性がある。

さてこのように行なわれたクロマティシティ補正は常にうまく働くのであろうか。残念ながら事態は簡単ではない。(5.8)式による線型クロマティシティ補正は文字通り線型項の補正で、運動量のずれが大きくなれば Δ の2乗や3乗項からの寄与が無視できなくなる。一応(5.9)式の積分がリング内のどこかでゼロになるよう補正すれば、 Δ^2 項への寄与が大きい $k(s_1)$ のフーリエ成分は消えるのであるが、しかしさらに Δ^3 項が控えているのでとても安心はできない。さらに(5.7)式に立ち戻ってみれば、右辺第2項の存在に気付く。この項の存在は今まで無視してきたのだが、クロマティシティ補正にともなう重大な副作用を起こす項なのである。すなわち3次の非線形共鳴およびベータロン振動の振巾(エミッタンスと言ってもよい)に依存したチューン変化などである。3次非線形共鳴の存在によって、通常クロマティシティ補正を前提としたラティスではノーマルセルの位相進行を 120° 近辺に選べない。それはこのときノーマルセルごとの3次共鳴励起項への寄与が、直線項となり強い共鳴項を作るからである。この事情は(3.105)、(3.106)および(3.112)式を参照すれば理解されるであろう。

またエミッタンス依存性のチューン変化の具体例を図29に示そう。これは欧州共同原子核研究所(CERN)で現在建設中の全周27kmを有する電子陽電子衝突型加速器LEPのラティスにおける計算例である。エミッタンスがゼロの極限におけるチューン、 $\nu_x=70.3158$ および $\nu_y=74.5443$ 、が振巾の増加につれて変化している様子が示されている。図中丸印で囲んだ数字は、それぞれ水平および垂直方向の振動の初期値を $\sigma_x=0.38273\text{mm}$ および $\sigma_y=0.06718\text{mm}$ を単位として表示したものである。実線および鎖線はそれぞれ水平および垂直方向の振動初期値が等しいものを結んである。このチューンシフトの計算は、プログラムPATRICIAを使って計算機で粒子の運動を追跡して行なわれたもので、実線と鎖線の交点はLEPリングを800回安定に通過した粒子の運動初期値に対応している。大きな初期値で運動を開始した粒子のベータロン振動数はひどく本来の値からずれており、最終的には800回を回り切らぬ内に振巾が増大しリングから失われてしまう。この極限の初期値をダイナミックアパチャー(動的口径)とよび、強いクロマティシティを補正するために強い6極磁場を導入するとこのダイナミックアパチャーが小さくなり、ビームが安定に運動できる領域が実質的に狭められてしまうのである。

5.2 PATRICIAを使った補正の評価

計算機プログラムPATRICIA (Particle Tracking in Circular Accelerators) はビームトラッキング機能を中心とした、ラティスの非線形項の影響

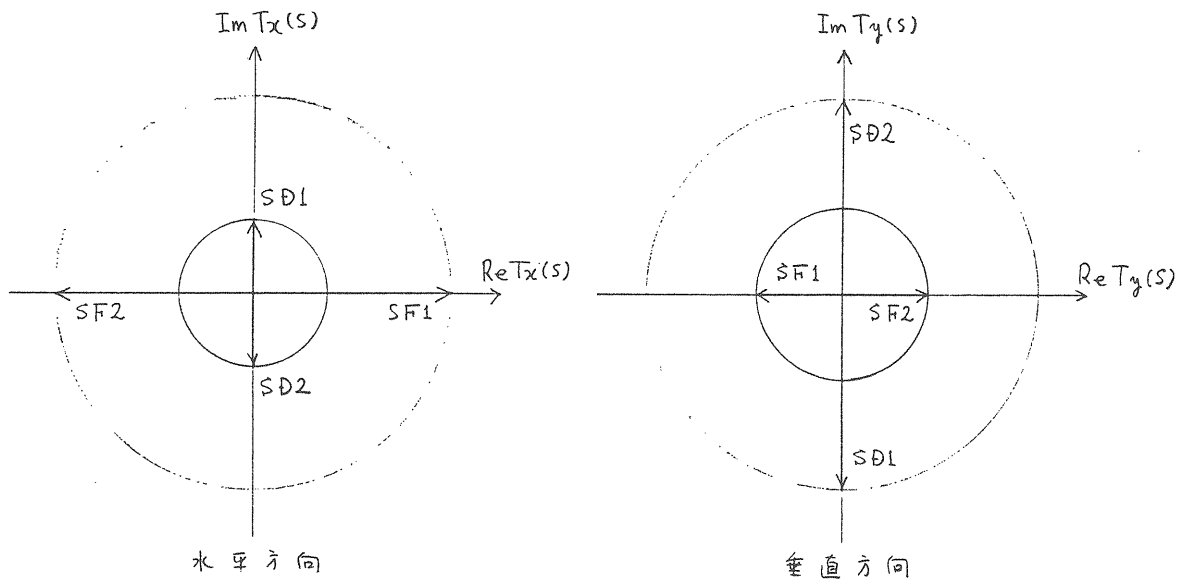


図28 6極磁石の作る補正への寄与(90°セルの場合)

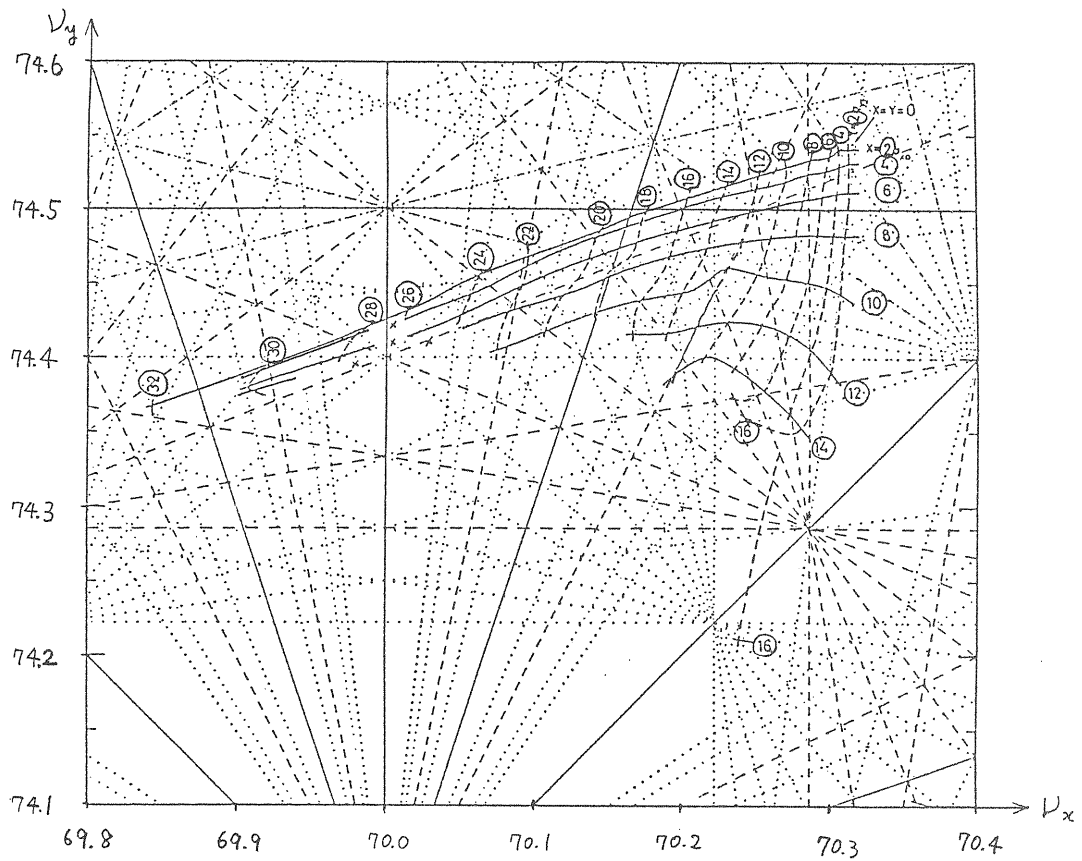


図29 チェーンのエミッタンス依存性

を調べる総合的プログラムである。このプログラムはスタンフォード線型加速器センター (SLAC) の PEP 計画におけるクロマティシティ補正の効果を研究するために、H.Wiedemann によって作成された (PEP-220, 1976)。このプログラムのマニュアルとしては上記レポートの他に S.Kheifets によるもの (SLAC - PUB - 2922, 1982) が役に立つであろう。

先程第 4 章で扱ったトリスタン MR ラティスにおけるクロマティシティ補正の効果を調べてみよう。トリスタン MR の 6 極磁石は 6 種であり、ビーム衝突点と曲線部中央の対称点とで (5.9) 式の積分をゼロとしかつ線型クロマティシティをゼロにするという条件から全ての 6 極磁石の強さが与えられる。この値は表 3 の MAGIC 出力例 (2) に計算されている。表 4 にこのトリスタン MR のクロマティシティ補正を調べる PATRICIA の入力例 (1) が示しており、表 5 の入力例 (2) は前者に引続いてラティスの配列を与えているものである。表 6 の PATRICIA 出力例 (1) には非線形要素以前の基本的なラティスのパラメタが計算されている。また表 7 にはラティス内に導入された非線形要素のリストが与えられ、線型クロマティシティも計算されている。

図30には運動量によるチェーン変化つまりクロマティシティの非線形な変化までが示されている。これはプログラム内で、運動量のずれた粒子の平衡軌道を粒子軌道を反復計算することによって求め、求めた平衡軌道周辺の磁場を線型化してトランスファ行列を作り、周回行列の対角和から計算したものである。同じ周回トランスファ行列を使えば運動量のずれた粒子のトゥイスハラメタも計算することが出来て、図31にはビーム衝突点におけるベータ関数の運動量誤差による変化が示されている。図30のチェーン変化や図31のベータ関数の変化が中央部で平らなのは、線型クロマティシティ補正およびトゥイスハラメタ補正がうまく機能しているからである。図32および図33に示すのがベータatron振動のビームトラッキングの結果である。トラッキングの初期値として $x=3.2108\text{mm}$, $y=0.5676\text{mm}$ の変位を与えられた粒子がリングを800回通過した際の位相空間における位置がプロットされている。このプログラムには800回分の位相空間の点の位置が記憶されており、トラッキング終了後そのフーリエスペクトラムが出力される(図34)。これを見ればどのような共鳴が励起されているか知ることができる。

さてトラッキングの結果が満足できないものであ

表6 PATRICIA 出力例(1)

H I T T E L W E R T E

KW(2) = 1

DEFINITION: <FUNCT> = INTEGRAL OF FUNCT ALONG NSUP SUPRPERIODS DIVIDED BY TOTAL INTEGRATION LENGTH

CHROMATIC TERMS (SEE H.WIEDEMANN DESY H5/71-10)

<KXBETAX>= -0.26833D+00 <-KXBETAY>= 0.39760D+00

ELECTRON STORAGE RING PARAMETERS

CIRCUMFERENCE (M) 3018.07900
 REVOLUTIONFREQUENCY (KC) 99.33222
 RF-FREQUENCY (MC) 508.58099
 HARMONIC NUMBER 5120
 MOMENTUM COMP (TOTAL) 0.0014987
 NAT.EMITTANCE(HORIZ)(MMHRAD) 0.0001989*ENERGY(GEV)**2
 ENERGYSPREAD PERCENT 0.0054611*ENERGY(GEV)
 TRANSITION ENERGY 25.83073

RADIATION AND OTHER INTEGRALS (SEE R.H.HELM ET AL. SLAC-PUB-1193 AND H.WIEDEMANN PEP-NOTE 39 ;)

<DX/R> = 0.14987D-02
 <2*KK*DX/R> = 0.0
 <1/R**2> = 0.84342D-05
 <(GAMMA*DX**2+BETAX*DPX**2+2*HALPHAX*DPX*DX)/R**3> = 0.11405D-08
 <1/R**3> = 0.34210D-07
 <2*KK**2*DX**2>/<1/R**2> = 0.28596D+03
 <2*KK*DY/R> = 0.0

MOMENTUM (GEV/C)	30.000	8.000	11.000	14.000	17.000	20.000	23.000	26.000	29.000
ENERGYLOSS/TURN (MEV)	290.287	1.468	5.247	13.767	29.932	57.341	100.299	163.770	253.474
RF-PHASE (DGREE)	49.050	34.964	38.454	41.107	43.120	44.847	46.352	47.608	48.704
RF-VOLTAGE (MVOLT)	384.339	2.562	8.437	20.940	43.791	81.309	138.599	221.745	337.374
SYNCHRO-FREQUENCY (KC)	10.059	1.778	2.690	3.685	4.760	5.893	7.080	8.324	9.619
QUANTUMLIFETIME (HOURS)	50.565	53.880	53.480	50.446	54.856	54.257	52.253	52.999	50.875
SYNCH-DAMP-TIME (MSEC)	1.040	54.865	21.105	10.237	5.718	3.511	2.309	1.598	1.152
BET-DAMP-TIME-HOR (MSEC)	2.081	109.731	42.210	20.475	11.435	7.023	4.618	3.197	2.304
BET-DAMP-TIME-VER (MSEC)	2.081	109.731	42.210	20.475	11.435	7.023	4.618	3.197	2.304
NAT.EMITTANCE (MRADMM)	0.179	0.013	0.024	0.039	0.057	0.080	0.105	0.134	0.167
BUCHLENGTH (CM)	1.165	1.757	1.597	1.484	1.395	1.325	1.269	1.220	1.177
ENERGYSPREAD (PERCENT)	0.164	0.044	0.060	0.076	0.093	0.109	0.126	0.142	0.158

表7 PATRICIA 出力例(2)

TRISTAN VII 4.5M-FREE SPACE BXX=1.6 BYY=0.10
 ***** MULTIPOLE-STRUCTURE III ONE HALF-SUPERPERIOD *****

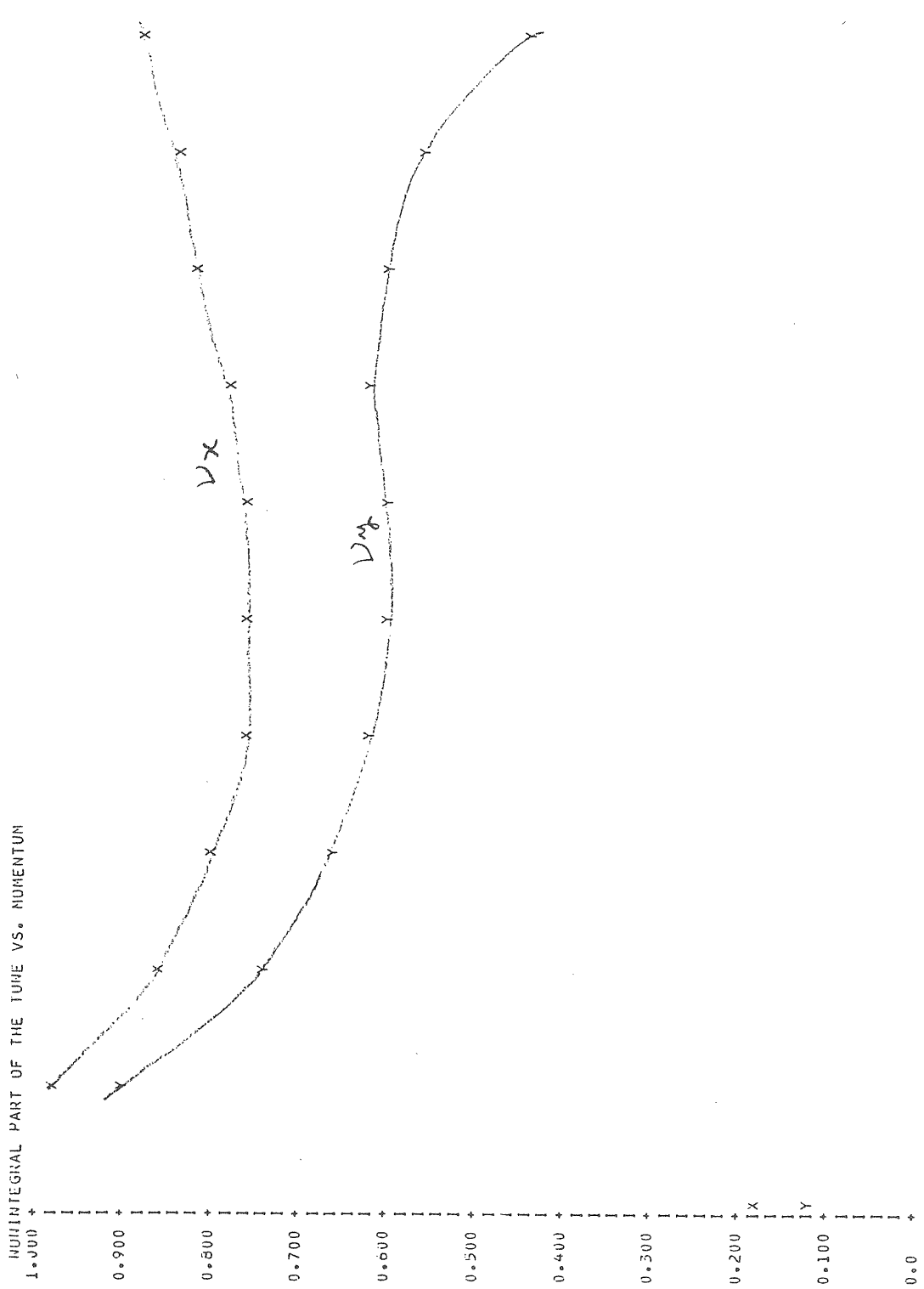
	J	MULTIPOLE	BETX(M)	BETY(M)	PHIX	PHIY	ETAX(M)	SM(1/M**2)
1.	J = 73	S01	9.037	20.591	1.681	2.306	0.594	1.46350
2.	J = 80	SF1	28.552	7.408	1.754	2.431	0.986	-0.71288
3.	J = 87	S02	10.412	25.118	1.843	2.520	0.614	0.15035
4.	J = 94	SF2	25.531	10.231	1.916	2.611	0.924	-0.16970
5.	J = 101	S03	10.411	25.119	2.010	2.587	0.614	1.40988
6.	J = 108	SF3	25.529	10.230	2.083	2.778	0.924	-0.72542
7.	J = 115	S01	10.411	25.115	2.177	2.853	0.614	1.46350
8.	J = 122	SF1	25.533	10.229	2.249	2.945	0.923	-0.71288
9.	J = 129	S02	10.412	25.118	2.343	3.020	0.614	0.15035
10.	J = 136	SF2	25.531	10.231	2.416	3.111	0.923	-0.16970
11.	J = 143	S03	10.411	25.119	2.510	3.187	0.614	1.40888
12.	J = 150	SF3	25.529	10.230	2.583	3.278	0.924	-0.72542
13.	J = 157	S01	10.411	25.115	2.677	3.353	0.614	1.46350
14.	J = 164	SF1	25.533	10.229	2.749	3.445	0.924	-0.71288
15.	J = 171	S02	10.412	25.118	2.843	3.520	0.614	0.15035
16.	J = 178	SF2	25.531	10.231	2.915	3.611	0.924	-0.16970
17.	J = 185	S03	10.411	25.119	3.010	3.687	0.614	1.40888
18.	J = 192	SF3	25.529	10.230	3.083	3.778	0.924	-0.72542
19.	J = 199	S01	10.411	25.115	3.177	3.853	0.614	1.46350
20.	J = 206	SF1	25.533	10.229	3.249	3.945	0.923	-0.71288
21.	J = 213	S02	10.412	25.118	3.343	4.020	0.614	0.15035
22.	J = 220	SF2	25.531	10.231	3.416	4.111	0.923	-0.16970
23.	J = 227	S03	10.411	25.119	3.510	4.187	0.614	1.40888
24.	J = 234	SF3	25.529	10.230	3.583	4.278	0.924	-0.72542
25.	J = 241	S01	10.411	25.115	3.677	4.354	0.614	1.46350
26.	J = 248	SF1	25.533	10.229	3.749	4.445	0.924	-0.71288
27.	J = 255	S02	10.412	25.118	3.843	4.520	0.614	0.15035
28.	J = 262	SF2	26.376	9.916	3.915	4.612	0.939	-0.16970
29.	J = 269	S03	15.987	22.202	3.987	4.696	0.780	1.40888
30.	J = 276	SF3	33.245	15.506	4.037	4.774	1.202	-0.72542

TOTAL NUMBER OF MULTIPOLES IN STORAGE RING: 240

	WITHOUT SEXTUPOLES	WITH SPEC.SEXTUPOLES	WITH ALL SEXTUPOLES	CHROMATICITY WANTED
CHROMATICITY IN X =	-64.444	0.025	0.025	0.0
CHROMATICITY IN Y =	-95.491	-0.039	-0.039	0.0

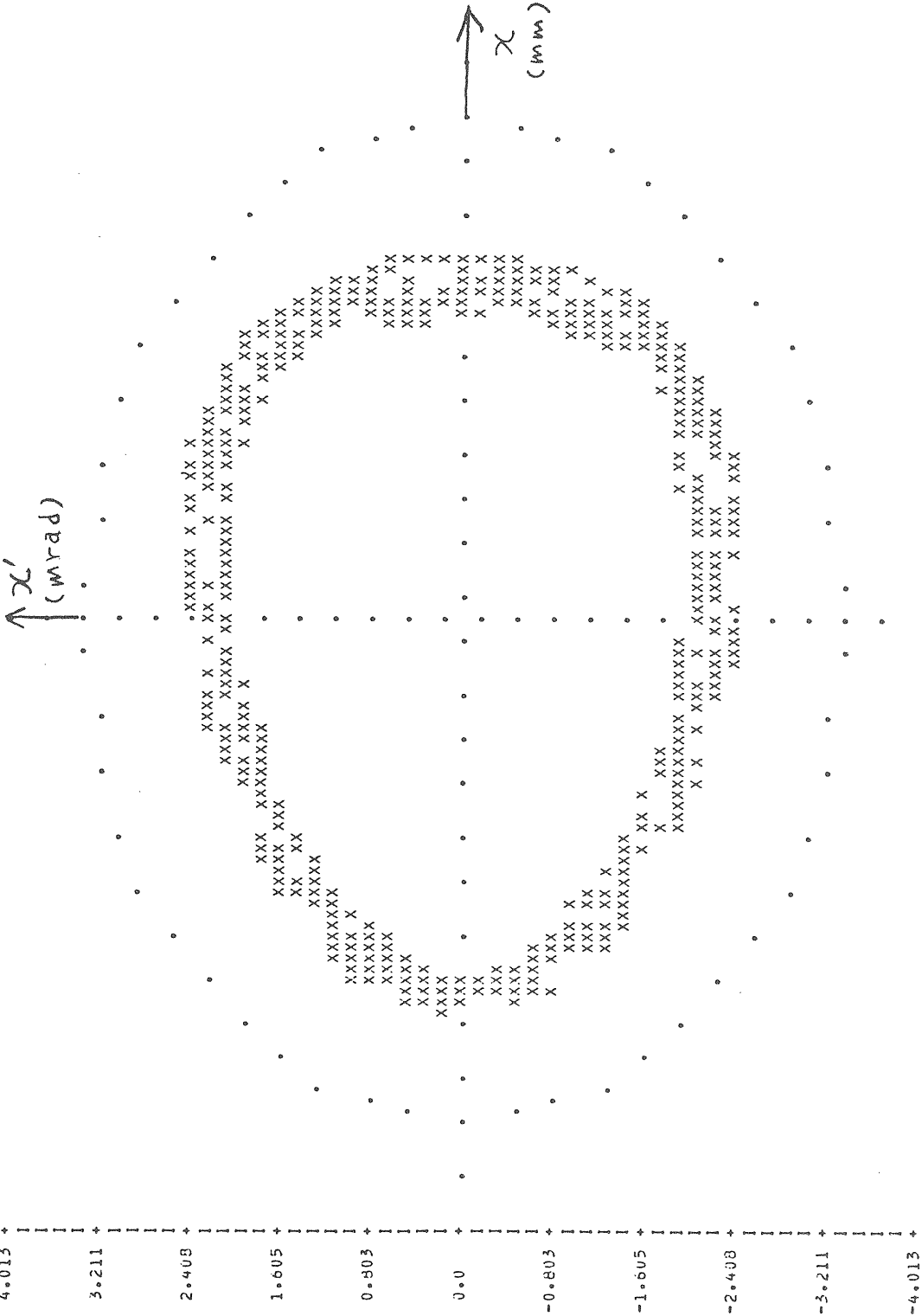
CPU-TIME SO FAR = 746.458 MSEC

図30 運動量ずれによる子エーンの変化



	-2.000	-1.200	-0.400	0.400	1.200	DP/P IN PERCENT 2.000
NUEX	0.1747	0.9785	0.7937	0.7599	0.7811	0.8137
MUEY	0.1208	0.8938	0.7470	0.6123	0.6066	0.6070
						0.8493
						0.5578
						0.4311
						2997.082 MSEC

INITIAL PARAMETERS OF PARTICLE #3 : XA= 3.2108MM XPA= 0.0 MRAD YA= 0.5676MM YPA= 0.0 MRAD
 UR : BETATRON AMPLITUDES = IN X : 6.00 SIGMA IN Y : 6.00 SIGMA ENERGY DEVIATION = 0.0 SIGMA AT 30.00 GEV
 PHASE SPACE PLOT FOR 800 REVOLUTIONS :



0
-6.422
-3.853
-1.284
1.284
3.853
6.422
POINTS OUTSIDE DIAGRAM

図32 水平方向トラッキング結果

INITIAL PARAMETERS OF PARTICLE #3 : XA= 3.2108MM XPA= 0.0 MRAD YA= 0.5676MM YPA= 0.0 MRAD
 UR : RETATRON AMPLITUDES = IN X : 6.00 SIGMA IN Y : 6.00 SIGMA ENERGY DEVIATION = 0.0 SIGMA AT 30.00 GEV
 PHASE SPACE PLOT FOR 800 REVOLUTIONS :

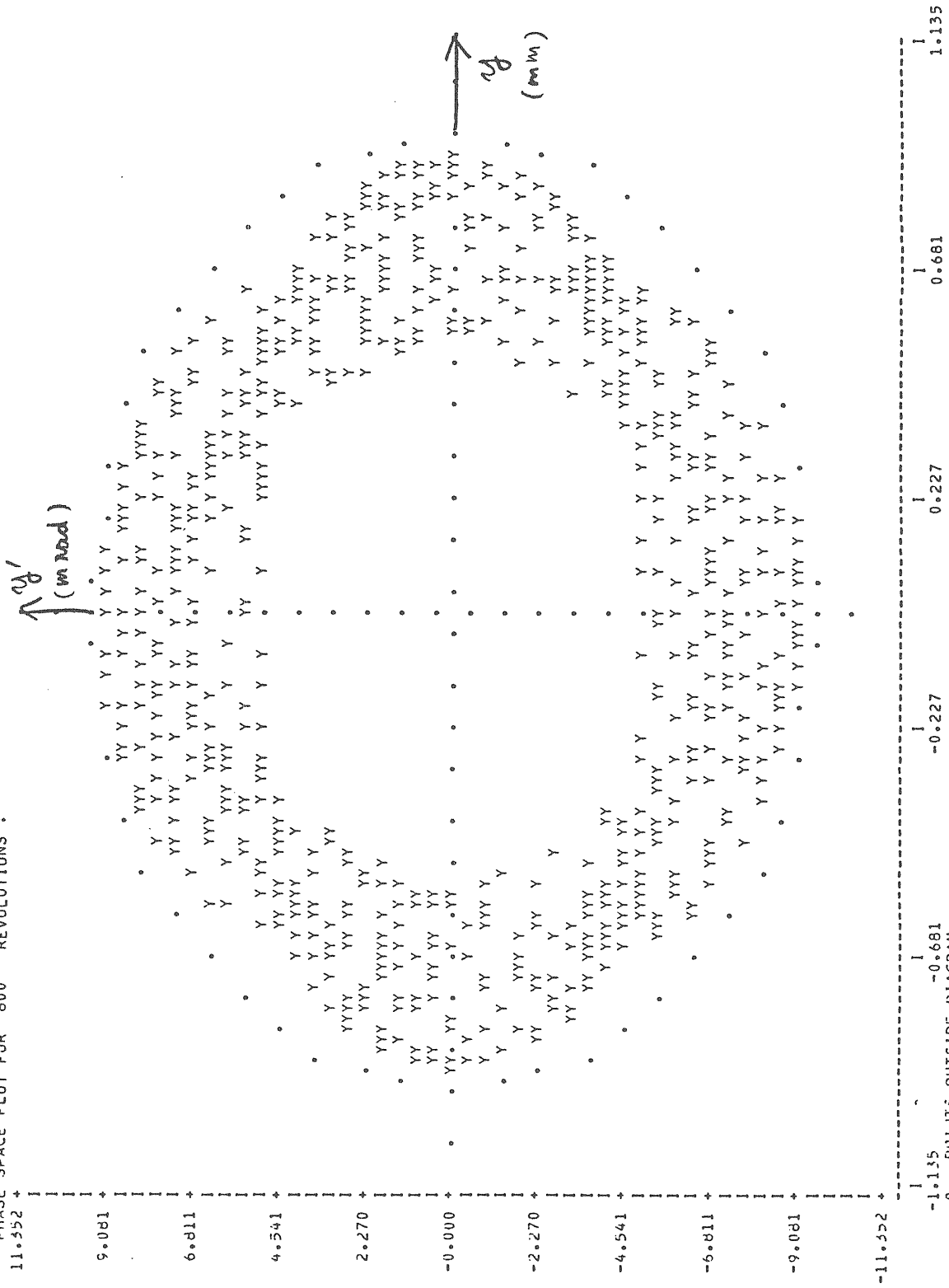


図33 垂直方向トラッキング結果

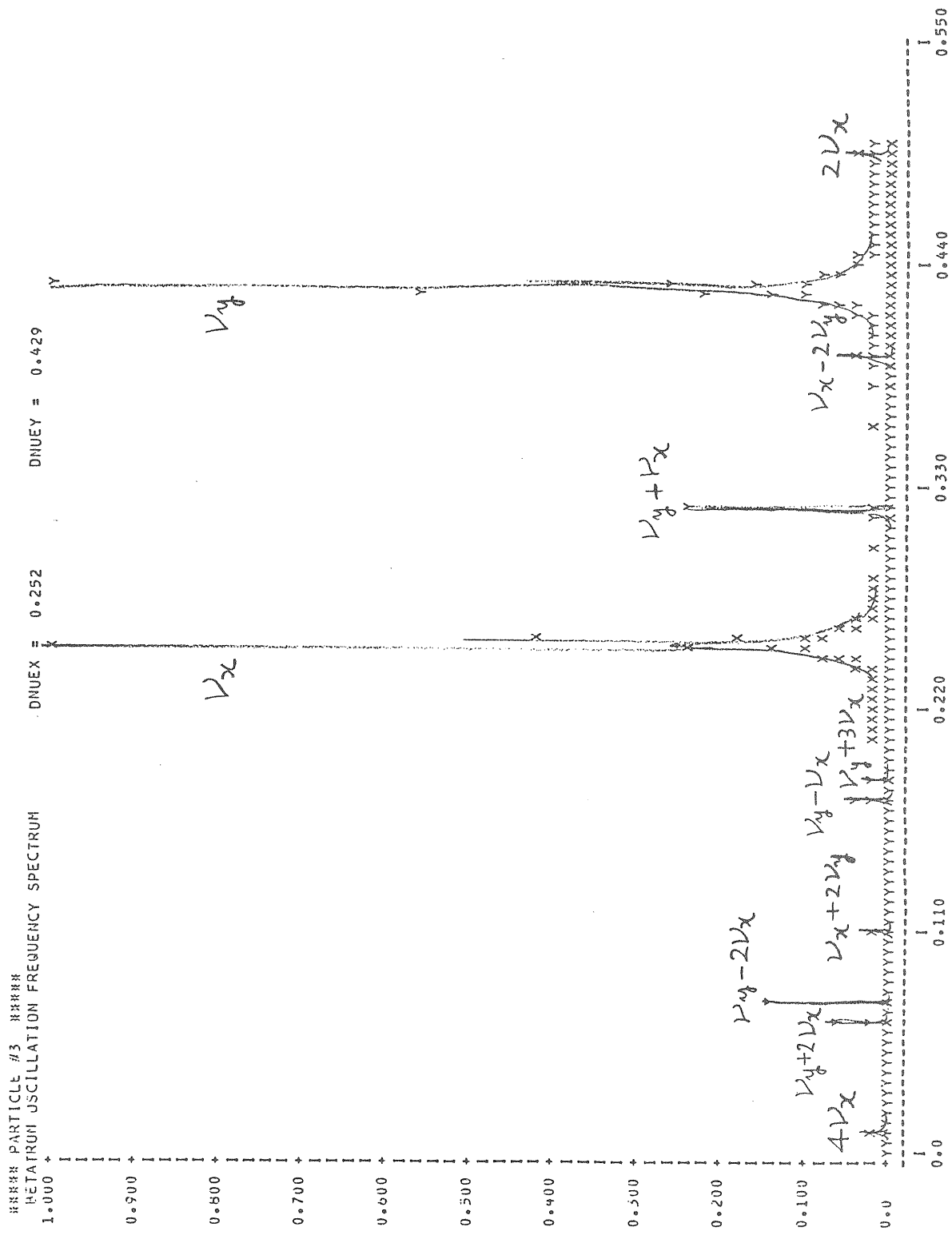


図34 トラッキング結果のフーリエ成分