

1. 序

加速器は、電場によって荷電粒子の加速を行なう。低エネルギー加速器では、静電場によるものが多いが、数10MeV以上に加速するためには、絶縁破壊等の問題から、交流電場を用いる装置が使われる。粒子の通る時刻と加速電場のできる時刻を一致させることができれば、その加速電場を通るたびに加速されるから、1回のエネルギー増分が小さくても、最終的に高エネルギーを得ることが可能である。

1928年に、図1.1に示された Wideröe 型線型加速器が考案され、1931年には、Sloan Lawrence により Hg⁺イオンが $\beta \sim 0.004$ まで加速された。この場合、交流周波数 f は10MHzで電極間距離 L は数cmで済むが、より高エネルギーまで加速しようとすると、例えば $\beta = 1$ なら $L \sim \beta c / f \sim 30\text{m}$ となり、現実的ではない。これを克服するには、周波数 f を上げるか、図1.2に一例を示したような円型加速器として、実効的に電極間距離を増す必要がある。

前者の方法は、Alvarez 型や Disk loaded 型の線型加速器などに実現されている。周波数は数100MHz～数GHzあたりで、波長は10cm～1mとなり、電極等のサイズと同程度になる。そのため、加速電極の設計には、集中定数回路は不十分で、電磁場の計算が必要となる。電磁輻射によるエネルギーの散逸を防ぐため、加速電場を形成する場所は金属でおおわれており、高周波空胴 (Cavity) と呼ばれる。この中の電磁場分布が解析的に解ける場合はまれで、通常数値計算に頼っている。

一方、後者の方法は、サイクロトロンやシンクロトロンに実現されており、高エネルギーフロンティ

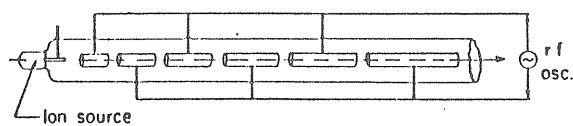


図 1. 1

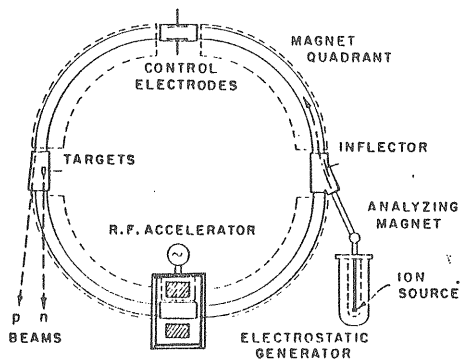


図 1. 2

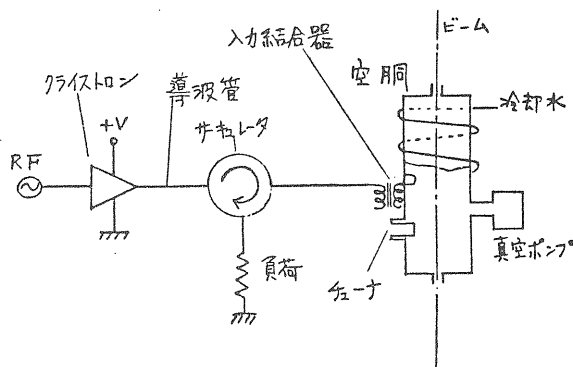


図 1. 3 高周波加速システム例

アを開拓してきた。但し、電子加速器では、シンクロトロン放射によるエネルギーロスを常に補償してやらねばならず、また陽子等の重い粒子の加速では、空胴の周波数を可変にしておくことなど、線型加速器と異なる。さて、空胴の構造が相似であれば、周波数の高い方が加速効率が上がるが、シンクロトロンでは、ビームは何回も同じ空胴を通過せねばならず、ビームの通る穴 (ビームホール) を大きくとる必要があって、そのため周波数をむやみに高くはできない。現在ある電子リング加速器で用いられている空胴の周波数は、これらを考みて500MHz近傍が多い。この場合、波長は1m程度で、空胴の寸法と同程度なので、ここでも電磁場の解析が必要となり、数値計算が威力を発揮するところである。

空胴本体の話に深入したが、ここで高周波加速システム全体を見渡しておこう。あるシステムのブロック図を図1.3に示した。ビームに同期した高周波シグナルを、クライストロンで増巾し、導波管を通じてその電力を空胴に導く。途中のサーキュレータは、空胴から反射される電力からクライストロン動作を自由にするために必要である。空胴まで送られた電力は、カプラと呼ばれる一種のトランスで、空胴内の加速モードにマッチした電磁場の形に変換されて供給される。このとき、供給周波数と空胴の共振周波数がずれていると、カプラ部で反射され電力を入力できないので、チューナと呼ばれるもので空胴の形を少し変形させ、周波数を合わせるようにする。供給されたエネルギーは、空胴内で加速モードとして蓄積され、ビームへのエネルギー供給に使われる他、空胴壁に熱損失される。この熱は、水冷などでとり去られるが、熱歪による空胴の変型は避けられず、空胴周波数に影響を与える。

さて、空胴設計の概略を述べてみよう。加速器からの要請として、周波数 f 、加速電圧 V 及びビームホール径の最小値などが与えられる。使用可能電力を P_0 とすると、

$$\eta P_0 = P_{\text{loss}} + P_{\text{refl}} + P_{\text{cav}} + P_{\text{beam}} \quad (1.1)$$

但し η = 高周波増巾器の直流→交流変換効率

P_{loss} = 伝送線路でのロス

P_{refl} = 空洞からの反射電力

P_{cav} = 空洞壁でジュール熱損失する電力

$$= \frac{V^2}{R_{sh}}$$

P_{beam} = ビームに付加される電力

が成り立つ。 R_{sh} は空洞のシャントインピーダンスであり、上式から必要な値が決まる。この R_{sh} 値を実現できる空洞を設計するには、加速モードの電磁場分布を知る必要があり、多くの場合数値計算に頼っている。実際には、第2章で述べるように、 R_{sh} 以外の量も考慮して設計する。

空洞の電磁場解析に必要な電磁気学の基礎を第3章に示した。円筒空洞のモードは、解析的にも解け、多くの実用空洞の基礎となっているので、第4章に扱った。第5章には、空洞モードに対する数値計算プログラムを紹介した。第6章は、ビームと空洞の相互作用を時間的に追うプログラムを示した。第7

章に、実際の空洞設計例をいくつか紹介した。図1.4に、加速空洞に関連したプログラム開発の経過を示した。

2. 高周波空洞に関する諸量

2.1 周波数 f

ビームの通過するタイミングに加速電場が同期する必要があるため、空洞の共振周波数はビームの通過する周波数の整数倍でなくてはならない。これは、LRC 集中定数共振回路における

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.1)$$

で計算される共振周波数に対応する。しかし、高周波空洞では、空洞と電磁波の波長が同程度なので、共振周波数は、電磁場を Maxwell 方程式から解くときの固有値として求められるべきものである。

2.2 Q値

共振回路のQ値は

	TM ₀	HEM _n	3次元	時間領域
1960	61 MESSYMESH			
	66 LALA			
1970	72 KN7C			
	76 SUPERFISH		74 Albani	
1980	81 LANS	80 TRANSVRS		80 BCI
	82 LALAGE	81 ULTRAFISH		82 TBCI
		82 URMEL	82 CAV3D	83 WELL
		PRUD	83 原	84 TBCI3D, FCI
		85 PICES	84 URMEL3D	

図1.4 高周波空洞プログラム開発

$$Q \equiv \frac{2\pi \times \text{周波数} \times \text{蓄積エネルギー}}{\text{一周あたりのエネルギー損失}} = \frac{\omega W}{P} \quad (2.2)$$

で定義される。故に、空胴を励振するときや、空胴内の電磁場が自由減衰するときの時定数 τ と

$$\tau = \frac{Q}{\omega} \quad (2.3)$$

なる関係にある。これは、 Q が高いと空胴の電磁場の大きさがゆっくり変化することを意味する。ちなみに、 $f = 500\text{MHz}$ 、 $Q = 10^4$ の空胴では、励振、減衰に $3 \mu\text{s}$ かかる。

2.3 シャントインピーダンス R_{sh}

加速器では、 R_{sh} は

$$R_{sh} \equiv \frac{(\text{加速電圧})^2}{\text{空胴に消費される電力}} = \frac{V^2}{P} \quad (2.4)$$

$$V = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E_z dz \quad (2.5)$$

で定義され、入射電力に対する加速効率を表わす。これは、空胴を図2.1の並列共振回路で表現したときのシャント抵抗 R と次のような関係にあることに注意しよう。

$e^{j\omega t}$ で変動する励起電流 I に対し

$$V = ZI$$

$$Z = \frac{R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (2.6)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

とかけ、加速器における定義(2.4)式に従えば、 $\omega = \omega_0$ で

$$R_{sh} = \frac{V^2}{\left(\frac{V^2}{2R} \right)} = 2R \quad (2.7)$$

である。

さて、実際の空胴には図2.2のように有限のギャップがあるから、ビームが通過するのに時間がかか

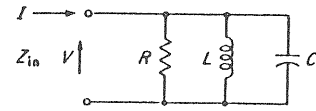


図2.1

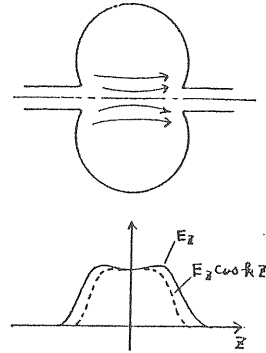


図2.2

り、有効な加速電場は $e^{j\omega t}$ 依存性をうけて、点線のようにになる。故に、実効シャントインピーダンス R_{sh}^{eff} は

$$R_{sh}^{eff} = \frac{V_{eff}^2}{P} \equiv R_{sh} \cdot T^2 \quad (2.8)$$

$$V_{eff} \equiv \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} E_z(z) \cos \frac{\omega z}{c} dz \equiv VT$$

で定義する。空胴のモードとビームの結合を決めるのは R_{sh}^{eff} であるから、今後これを R_{sh} とかく。

2.4 R_{sh}/Q

R_{sh} は、電磁場の蓄積エネルギーを W とすれば、

$$R_{sh} = \left(\frac{R_{sh}}{Q} \right) \times Q \quad (2.9)$$

$$\frac{R_{sh}}{Q} = \frac{V^2}{\omega W}$$

のように、空胴の構造のみによって決まる R_{sh}/Q と、空胴内表面の材質にも関係する Q に分離して考えることができる。特に、空胴の共鳴モードが成長する時間より十分短い時間内の現象に対しては、2.8節で述べるように、 R_{sh}/Q が重要となる。

2.5 E_p/E_{acc} , H_p/E_{acc}

パルス運転の空胴では、短い時間内ではあるが、CW (Continuous Wave) の空胴に比べて非常に高い加速電界を発生させるため、空胴壁の電界の強い所では放電を起こす可能性がある。これをおさえるためには、加速電場 E_{acc} に対する表面電場の最大値

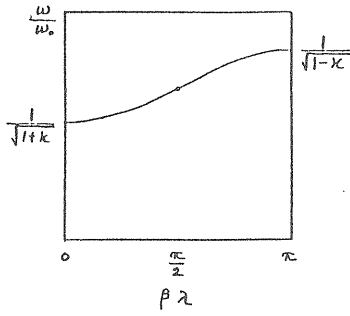


図 2. 3

E_p の比 E_p/E_{acc} を小さくすることが重要となる。CWの空胴でも、超伝導空胴になると、この量が超伝導状態の破壊につながる重要なパラメータとなる。更に、超伝導空胴では、表面磁場が臨界磁場以上に強くなると、やはり超伝導状態が破れるので、その最大値 H_p の E_{acc} との比 H_p/E_{acc} も重要なパラメータとなる。

2. 6 結合度 κ

線型加速器や高エネルギー電子シンクロトロンでは、電力入力結合器の数を減らし、また空胴同志の結合には要するが、加速には寄与しないスペースをなるべく短かくして、実効的なシャントインピーダンスを上げるため、加速セルと呼ばれる空胴ユニットを多数連結して1つの空胴として用いることが多い。このとき、各セルの共振周波数 f_0 が同じでも、相互に κ の結合があると、多連結空胴の共振周波数 f は図 2. 3に示したように $f_0/\sqrt{1-\kappa}$ から $f_0/\sqrt{1+\kappa}$ にわたる分散特性を示す。群速度 $v_g = \partial\omega/\partial\beta$ はエネルギーの移動速度を表わし、 κ が大きい程 v_g が大きくなって、多連結空胴の電磁場は安定になる。 κ は、セル間の位相差が 0 と π のモードの周波数から求めることができ、セル数の決定に重要な役割を演ずる。

2. 7 横方向結合インピーダンス R_t

ビームを横方向にキックする空胴の偏向モード a とビームとの結合を表わすパラメータである。ビームが軸から Δ ずれた所を走るときに感ずる横方向のキックは

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} j \frac{\int (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_t e^{jk_z z} dz}{I \Delta} = \frac{R_t \frac{\omega_a}{\omega}}{1 + jQ_a \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$$

$$\text{但し } R_t = \frac{Q_a c |v_{\perp}|^2}{\epsilon \omega_a^2} \quad (\Omega/m) \quad (2.10)$$

$$v_{\perp} = -\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_z) e^{jk_z z} dz \quad (2.11)$$

$$\int e^2 dv = 1$$

とかける。この R_t を横方向結合インピーダンスと呼び、横方向ビーム不安定性の評価に重要となる。数値的には (2.11) 式の v を (2.10) 式に代入して得られる。

2. 8 ウェークポテンシャルとロスパラメータ

バンチしたビームから距離 s だけ後方にある、単位荷電をもったテスト粒子を考える。これは、先行するビームにより空胴内に励起された電磁場 (ウェーク)によりキックをうける。テスト粒子が進行方向のキックによりうけるエネルギー増分を $W_{\parallel}(s)$ 、横方向のキックによりうける横方向運動量の増分を $W_{\perp}(s)$ とし、各々縦方向、横方向のウェークポテンシャルと呼ぶ。バンチが長いと、自分がつくったウェークを自分自身が感じてキックをうけるが、この量をロスパラメータと呼んで

$$k_{\parallel} = \int \rho(s) W_{\parallel}(s) ds / \left(\int \rho(s) ds \right)^2 \quad (2.12)$$

$$k_{\perp} = \int \rho(s) W_{\perp}(s) ds / \left(\int \rho(s) ds \right)^2 \quad (2.13)$$

とかける。但し $\rho(s)$ はビームの荷電分布である。高いシャントインピーダンスを有する空胴は普通 k_{\parallel} や k_{\perp} が高いので、バンチしたビームの不安定性の原因となり、高電流ビームを目標とするときは注目すべき量である。

k_{\parallel} のうち加速モード以外にロスされるエネルギーを高調波モードロス k_{para} と呼び、加速モードのロスパラメータを k_0 とすれば

$$k_{para} = k_{\parallel} - k_0 \quad (2.14)$$

とかける。これは (1.1) 式の P_{beam} に含まれ、 $P_{beam} = (\text{エネルギー増分}) + (\text{シンクロトロン放射}) + (\text{高調波モードロス})$ であり、エネルギー収支上考慮せねばならない項である。

さて、点電荷 q が空胴を通過したときに、空胴内に残される加速モードのエネルギー W と電圧 V_0 は

$$W = kq^2 = \alpha V_0^2$$

とかけるが、因果律からビームローディングの基本

定理として

$$\frac{\alpha V_b}{q} = \frac{1}{2}$$

が得られるから

$$k_\nu = \frac{V^2}{4W} = \frac{\omega}{4} \cdot \frac{R_{sh}}{Q} \quad (2.15)$$

とかけ、加速モードのパラメータと関連がつく。一般に、ロスパラメータは空洞のモード a で展開でき

$$k = \sum_a k_a = \sum_a \frac{\omega_a}{4} \cdot \frac{R_a}{Q_a} \quad (2.16)$$

と表わせる。

3. 電磁気学

3.1 Maxwell 方程式

高周波空洞の電磁気学的な性質は、すべて Maxwell 方程式により解析される。空洞が誘電率 ϵ 、透磁率 μ 、電気伝導率 σ の媒質で満たされているとき、基本方程式は微分形で

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.4)$$

と表わされる。ここで \vec{E} (V/m)、 \vec{H} (A/m) は電場、磁場ベクトル、また \vec{J} 、 ρ はビームなどによる電流と荷電分布である。電荷の連続方程式

$$\nabla \cdot (\vec{J} + \sigma \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

を考慮すると、(3.1)、(3.2)式の発散をとることにより(3.3)、(3.4)式が導かれるから、(3.1)、(3.2)を出発点に話をすすめ、適宜(3.3)～(3.5)を参照すればよい。(3.1)～(3.5)は、空間のあらゆる場所で成り立つが、実際に数値計算に用いられる場合は、メッシュによって分割された線上、面上又は体積についての積分の形で用いられることが多い。そのため、(3.1)、(3.2)を積分形にかき直すと、

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int (\vec{J} + \sigma \vec{E}) \cdot d\vec{S} \\ &+ \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる。

第6章で扱うような、空洞内にビーム、即ち励起電流 J があり、電磁場 E や H が単純な時間依存性 $e^{j\omega t}$ をもたない場合の解析には、(3.1)、(3.2)又は(3.6)、(3.7)を直接解くことが必要である。一方、第5章で扱うように、空洞の固有モードに着目するときは、電磁場の時間依存性を $e^{j\omega t}$ とかくことができ、(3.1)などを考慮すれば、

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{j\omega t + \frac{\pi}{2}}$$

と表現できる。 E_0 、 H_0 は空間座標のみによるベクトルである。励起電流 $J = 0$ だから、(3.1)、(3.2)より

$$\nabla \times \vec{E}_0 = -j\omega\mu \vec{H}_0 \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \vec{H}_0 = (\sigma + j\omega\epsilon) \vec{E}_0 \quad (3.9)$$

となる。更に、波数 k と波動インピーダンス Z_0

$$k = \frac{\omega}{c} (\text{m}^{-1}), \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\Omega) \quad (3.10)$$

を用いると、空洞内で $\sigma = 0$ だから(3.8)、(3.9)は

$$\nabla \times \vec{E}_0 = kZ_0 \vec{H}_0 \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \vec{H}_0 = kZ_0^{-1} \vec{E}_0 \quad (3.12)$$

となる。この二式より、ヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{H}_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

が得られる。ここで

$$\vec{E} = Z_0^{-1/2} \vec{E}_0, \quad \vec{H} = Z_0^{1/2} \vec{H}_0 \quad \left(\frac{\sqrt{VA}}{\text{m}} \right)$$

と再定義すると、(3.11)～(3.13)は

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

とかける。これが固有モードに対する数値計算の出発点となる。また、(3.14)の積分形は

$$\oint \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \cdot d\vec{l} = k \int \begin{pmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \end{pmatrix} \cdot d\vec{S} \quad (3.16)$$

で表わされる。

3.2 境界条件

高周波空洞は、ビーム加速に有効な電場を効率よく生成させるため、電気伝導度の高い金属で電磁波を閉じこめている。内部は、周波数を大きく変えることのない場合は、普通真空にしてある。このため、空洞内の電磁場を計算することは、前節で述べた方程式を、金属表面での境界条件をみたく解くことと等価である。

まず、空洞壁が完全導体の場合を考えよう。電磁場は有限でなくてはならないから、(3.8), (3.9)より、導体内では $\vec{E} = \vec{H} = 0$ でなくてはならない。また、境界面で電場の接線成分及び磁場の法線成分が連続であることから、空洞内部で導体表面近傍の電磁場は、図3.1に示したように、

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0, \quad \vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.17)$$

をみだし、導体表面にはその \vec{E} , \vec{H} を生ぜしめる表面電荷密度 σ_s と表面電流密度 \vec{K} が存在し

$$\vec{E} = \frac{\sigma_s}{\epsilon} \vec{n} \quad (\text{V/m}) \quad (3.18)$$

$$\vec{K} = \vec{n} \times \vec{H} \quad (\text{A/m}) \quad (3.19)$$

と表わせる。但し、 \vec{n} は金属表面から空洞内部への法線ベクトルである。

現実の金属は σ が有限だが、その場合の考え方を示そう。現在よく用いられる周波数として500MHz, 空洞内表面の材質として銅を考えると、

$$\omega \sim 3 \times 10^9 \quad (\text{s}^{-1}) \quad (3.20)$$

$$\sigma \sim 6 \times 10^7 \quad (\Omega^{-1}\text{m}^{-1})$$

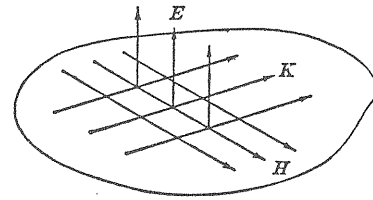


図3.1

だから

$$\frac{\sigma}{|j\omega\epsilon|} \sim 2 \times 10^9 \gg 1$$

となる。(3.8), (3.9)にて $j\omega\epsilon$ を無視すると

$$(\nabla^2 - j\omega\mu\sigma) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.21)$$

が得られる。ここで、導体表面付近で、図3.2の座標系を考える。(3.20)の条件下では

$$\omega\mu\sigma \sim 2 \times 10^{11} \quad (\text{m}^{-2})$$

であり、しかも(3.21)の $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は、波数を k (m^{-1})として、 k^2 より何桁も大きくならないから、 $k^2 \sim 10^2 (\text{m}^{-2})$ を考慮して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ll |j\omega\mu\sigma| \quad (3.22)$$

なる近似ができ、(3.21)は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - j\omega\mu\sigma \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.23)$$

とかける。これから \vec{E} , \vec{H} は z 方向に対して

$$e^{-\gamma z} \quad \text{但し} \quad \gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma} \\ = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1+j}{\delta} \quad (3.24)$$

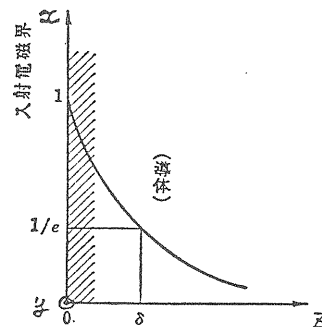


図3.2

の依存性をもつことが判る。これから、電磁波は、導体内部へ表皮厚さ δ だけ入ると $1/e$ に減少することがわかる。導体内に浸みこんだ電場は、有限の σ をもつ金属内の微小体積 $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ で、ジュール熱損失 ΔP を生ずる

$$\Delta P = (\text{電流密度}) \times (\text{面積}) \times (\text{電圧}) \\ = (\sigma E_x) \times (\Delta y \cdot \Delta z) \times (E_x \cdot \Delta x) \quad (3.25)$$

但し、 $E_y = 0$ となる座標系を考えている。金属の単位表面積を通してジュール熱損失となる電力 P は、(3.24)、(3.25) より

$$P = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} \int \Delta P = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} E_x^2 \quad (3.26)$$

但し、 $E_{x0} = E_x (z=0)$ とかける。(3.22) と同様の近似を用いると、(3.8) より

$$-j\omega\mu H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \sim -\gamma E_x \\ \therefore \frac{E_x}{H_y} \sim \frac{j\omega\mu}{\gamma} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (3.27)$$

である。故に (3.26)、(3.27) より

$$P = \frac{1}{2} R_s H_y^2 \quad (\text{Watt}/\text{m}^2) \quad (3.28)$$

となる。但し、 R_s は表面抵抗と呼ばれ

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma\delta} \quad (\Omega) \quad (3.29)$$

である。また、 $1/2$ は時間平均の因子である。これで、表面磁場 H_{y0} がわかれば、ジュール熱損失が計算できる。

さて、図 3.3 のように、導体に添って x 方向に進む波を考えよう。空洞内の真空の場所では、

$$\left| \frac{E_z}{H_y} \right| = Z_0 = 377 \quad (\Omega)$$

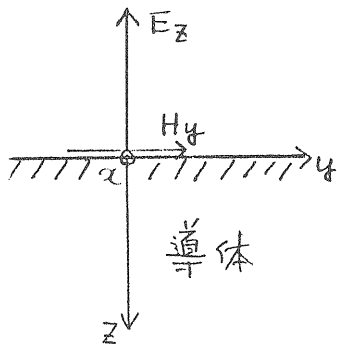


図 3.3

だが、(3.20) の条件下で、導体表面では (3.27) より

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| \sim 10^{-2} \quad (\Omega)$$

となり、 $|E_z| \gg |E_x|$ が成り立つ。それ故、普通、加速空洞の数値計算においては、(3.20) のように、 σ が十分大きく、 μ や ω が十分小さいという条件が満たされるので、完全導体の境界条件、即ち E_x を無視して E が境界に垂直であるとして解く。但し、鉄のように μ の大きな物質を使ったり、 σ の小さい物質が使われていると、この近似が用いられないことに注意しよう。求められた電磁場に対して、(3.28) を適用してジュール損失は計算されるが、これは (3.19) より、表面電流を用いて

$$P = \frac{1}{2} R_s K^2 \quad (\text{Watt}/\text{m}^2)$$

ともかける。

4. 円筒空洞のモード

4.1 基礎方程式

現在使われている殆どどの空洞は、図 4.1 に示されるような、円筒空洞の TM_{010} モードと呼ばれる電磁場を加速に用いている。円筒空洞のモードは解析的に解けるから、現実の空洞設計に入る前に、円筒空洞でおおまかな特徴をつかんでおくことは有意義である。

図 4.2 のように座標系をとろう。 z 軸に平行な成分と垂直な成分に分解すると

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z, \quad \vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_z \\ \nabla = \nabla_t + \nabla_z \\ \nabla_t = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \nabla_z = \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

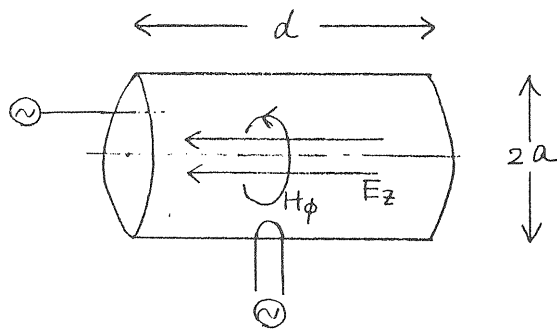


図 4.1

となる。これより (3.8), (3.9) は, $\sigma=0$ のとき

$$\begin{aligned}(\nabla_t + \nabla_z) \times (\vec{E}_t + \vec{E}_z) &= -j\omega\mu (\vec{H}_t + \vec{H}_z) \\ (\nabla_t + \nabla_z) \times (\vec{H}_t + \vec{H}_z) &= j\omega\varepsilon (\vec{E}_t + \vec{E}_z)\end{aligned}$$

となる。右辺の H_t, E_t をとり出せば

$$\begin{aligned}\nabla_t \times \vec{E}_z + \nabla_z \times \vec{E}_t &= -j\omega\mu \vec{H}_t \\ \nabla_t \times \vec{H}_z + \nabla_z \times \vec{H}_t &= j\omega\varepsilon \vec{E}_t\end{aligned}$$

とかけるが, z 方向に $e^{ik_z z}$ の依存性を仮定すれば,

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \frac{1}{k^2 - k_z^2} \left(-j\omega\mu \nabla_t \times \vec{H}_z + \nabla_t \cdot \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} \right) \\ \vec{H}_t &= \frac{1}{k^2 - k_z^2} \left(j\omega\varepsilon \nabla_t \times \vec{E}_z + \nabla_t \cdot \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (4.1)$$

となり, E_z, H_z により円筒空洞のすべての電磁場が記述される。 $H_z=0$ のモードを TM モード, $E_z=0$ のモードを TE モードと称する。

さて, (3.15) を円筒座標で表わすと,

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \\ = k^2 \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.2)$$

となる。 \vec{H} 又は \vec{E} の一成分を ψ とおき, 変数分離して

$$\psi = R(r)\Phi(\phi)Z(z)\quad (4.3)$$

とおくと, (4.2) 式は

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + k^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R(r) = 0\quad (4.4)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\phi^2} + m^2 \right] \Phi(\phi) = 0\quad (4.5)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2 \right] Z(z) = 0\quad (4.6)$$

とかける。 m はモードのもつ回転対称性を表わし, k や k_z は, 円筒の側面や底面での境界条件によって決まる。

4. 2 TM モード

(4.3) ~ (4.6) にて $\psi = E_z$ において解けば,

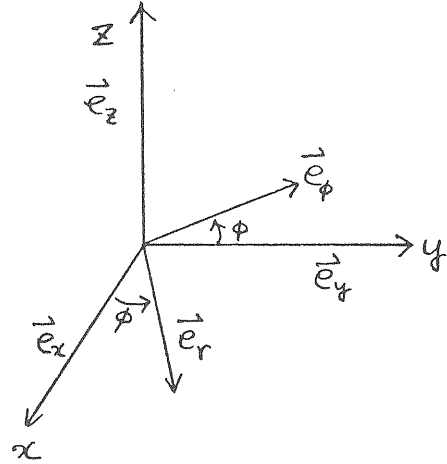


図 4. 2

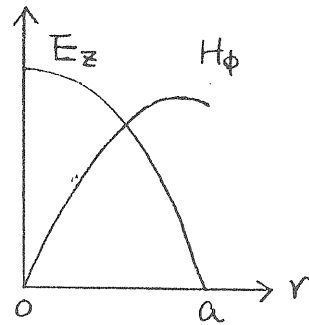


図 4. 3

$$E_z = EJ_m(k_c r) \cos m\phi \cos k_z z\quad (4.7)$$

但し $J_m(k_c r)$ は m 次の Bessel 関数であり, その第 n 番目の零点を ρ_{mn} とすれば

$$k_c = \frac{\rho_{mn}}{a}, \quad k_z = \frac{l\pi}{d}, \quad k^2 = k_c^2 + k_z^2\quad (4.8)$$

である。(4.1) 式を用いれば, 他の成分が

$$E_r = -\frac{l\pi}{k_c d} EJ_m'(k_c r) \cos m\phi \sin k_z z$$

$$E_\phi = \frac{m/l\pi}{k_c^2 r d} EJ_m(k_c r) \sin m\phi \sin k_z z$$

$$H_r = -\frac{j\omega\varepsilon m}{k_c^2 r} EJ_m(k_c r) \sin m\phi \cos k_z z$$

$$H_\phi = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c} EJ_m'(k_c r) \cos m\phi \cos k_z z$$

$$J_m'(k_c r) = \frac{d}{d(k_c r)} J_m(k_c r)$$

のように求まる。 ρ_{mn} のいくつかを表 4.1 に掲げた。

最も周波数の低いモードは $(m, n, l) = (0, 1, 0)$ で TM_{010} モードと呼ばれ, 図 4.1 のように, E_z と H_ϕ のみが存在し, 図 4.3 の分布をもつ。電場は軸上が一番強く, 加速に用いられる。磁場は,

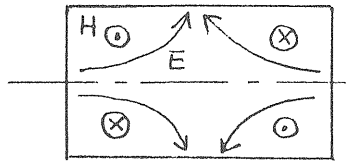


図 4. 4

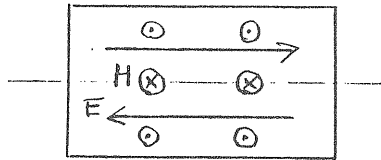


図 4. 5

空洞壁表面近くで最大になるから、図 4. 1 のように側面からループでこのモードを励振することができる。また底面（端板）からアンテナで、 E_z を通じて励振することもできる。

TM_{010} モード以外で、加速空洞でよく問題になるモードは、 TM_{011} や TM_{110} などである。前者は図 4. 4 に示される電磁場分布をもち、ビームを軸方向に加速、減速する。また、後者は偏向モードと呼ばれ、図 4. 5 の電磁場分布をもつ。これは軸上磁場があって、ビームを横方向にキックする。加速モード以外のモードを、高調波モードとか寄生モードとか呼ぶが、これらのモードとビームとの相互作用も考慮に入れて空洞を設計せねばならない。

4. 3 TE モード

(4. 3) ~ (4. 6) において、 $\psi = H_z$ とおいて解けば

$$H_z = H J_m(k_c r) \cos m\phi \sin k_z z \quad (4.9)$$

但し $\frac{d}{dx} J_m(x) = 0$ となる第 n 番目の点を ρ_{mn}' とおけば

$$k_c = \frac{\rho_{mn}'}{a}, \quad k_z = \frac{l\pi}{d}, \quad k^2 = k_c^2 + k_z^2 \quad (4.10)$$

となり、他の成分は TM モードと同様 (4. 1) 式によって計算できる。 ρ_{mn}' のいくつかを表 4. 1 に掲げた。

最も周波数の低いモードは、 TE_{111} モードで、図 4. 6 のような電磁場分布をもつ。この例からもわかるように、TE モードは電場の向きがビーム軸に対して垂直だから、ビームとモード間にエネルギーのやりとりがない。故に、加速空洞設計上、TE 型のモードはあまり考えなくても良い。

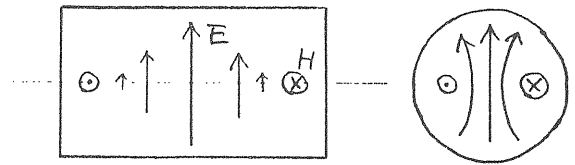


図 4. 6

表 4. 1

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	0	1	2
1	2,405	3,832	5,136
2	5,520	7,016	8,417
3	8,654	10,173	11,620

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	0	1	2
1	3,832	1,841	3,054
2	7,016	5,331	6,706
3	10,173	8,536	9,969

4. 4 周波数, Q 値, シャントインピーダンス

TM モード：周波数は (4. 8) 式

$$\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = \left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 \quad (4.11)$$

より求まる。また Q 値は、蓄積エネルギー W

$$W = \frac{1}{2} \mu \int_{\text{全体積}} (H_r^2 + H_\phi^2) dv \quad (\text{Joule})$$

及び、空洞壁で消費される電力 P

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} R_s \int_{\text{全表面}} K^2 dS \\ &= \frac{1}{2} R_s \int_{\text{端板}} (H_r^2 + H_\phi^2) dS \\ &\quad + \frac{1}{2} R_s \int_{\text{側面}} H_\phi^2 dS \quad (\text{Watt}) \end{aligned}$$

より

$$Q = \frac{\omega W}{P} = \frac{a}{\delta} \frac{1}{1 + \frac{a}{Ad}} \quad (4.12)$$

$$A = \begin{cases} 1 & (l=0) \\ \frac{1}{2} & (l \neq 0) \end{cases}$$

但し、

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}} \quad (\text{表皮厚さ})$$

とかける。また、 TM_{010} モードのシャントインピーダンスを評価してみよう。実効加速電圧は

$$VT = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} E_z \cos kz dz = 2E \frac{\sin \frac{kd}{2}}{k}$$

とかけ、ロス

$$P = E^2 \pi a d c^2 \epsilon^2 R_s J_1^2(\rho_{01}) \left(1 + \frac{a}{d}\right)$$

となるから、

$$R_{sh} = \frac{(VT)^2}{P} = \frac{4 \sin^2 \frac{kd}{2}}{\pi a d \omega^2 \epsilon^2 R_s J_1^2(\rho_{01}) \left(1 + \frac{a}{d}\right)} \quad (4.13)$$

となる。

TEモード：周波数は(4.10)より

$$\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = \left(\frac{\rho_{mn}'}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{d}\right)^2 \quad (4.14)$$

で求まる。Q値もTEモードと同様に求まり

$$Q = \frac{a}{\delta} \times \frac{\left(1 - \frac{m}{\rho_{mn}'}\right)^2 \left\{ \rho_{mn}'^2 + \left(\frac{l\pi a}{d}\right)^2 \right\}}{\rho_{mn}'^2 + 2 \left(\frac{a}{d}\right)^3 (l\pi)^2 + \left(1 - \frac{2a}{d}\right) \left(\frac{m l \pi a}{\rho_{mn}' d}\right)^2}$$

である。

4.5 508MHzの空洞例

KEK トリスタンに用いるAPS型空洞の、円筒空洞近似による評価をしてみよう。 TM_{010} モードを加速に用いるので、508MHzの周波数を得るには、半径 $a = 22.6\text{cm}$ とすればよい。 $\beta = 1$ の粒子加速を考えると、508MHzの半周期1nsで空洞を通過してしまえばよいから、 $d < 30\text{cm}$ が必要であり、トリスタンに用いた加速セルの寸法をとると $d = 22.5\text{cm}$ である。この円筒空洞のいくつかのモードを計算した結果を表4.2に示す。同表に、計算コードURMELに

表4.2

モード	周波数 (MHz)		Q ($\times 10^4$)	
	円筒空洞	URMEL	円筒空洞	URMEL
TM010	(508)	(508)	3.8	4.1
TE111	772	762	4.4	4.7
TM110	810	791	4.9	5.0
TM011	838	866	3.3	3.7
TM111	1049	1041	3.7	3.8
TM020	1166	1164	5.8	6.6

よる実際の空洞に対する数値計算結果も示したが、両者がよく一致していることが判り、円筒空洞計算の有効性が現われている。

4.6 実際の空洞との違い

加速に用いる空洞には、端面にビームの通る穴があり、ビームパイプに連なっている。このため、ビームパイプが円形導波管となり、その遮断周波数 f_c 以上の周波数をもつ空洞のモードは、それを通して電磁波が散逸してしまい、共鳴しなくなる。 $m = 0$ のモードに対しては TM_{01} が、 $m \neq 0$ のモードに対しては TE_{11} が遮断周波数を決め、

$$\frac{2\pi f_c}{c} = \frac{\rho_{01}}{a} \quad (m = 0), \quad \frac{\rho_{11}'}{a} \quad (m \neq 0)$$

と表わされる。ちなみに、 $\phi 100$ のビームパイプでは、 f_c は $m = 0$ で2.3GHz、 $m \neq 0$ で1.8GHzとなる。

また、実際の空洞ではQ値や R_{sh} を上げるため、球形に近い形をとる傾向にある。これは蓄積エネルギーを保ったまま、表面積を減らしてジュール損失を小さくすることに対応している。しかし、ビームパイプがあるため軸上電界の集中が円筒空洞より悪くなる。例えば、前節の508MHz円筒空洞は(4.13)より、 $R_{sh} = 8.6\text{M}\Omega$ であるが、実際の空洞に対するURMELの計算結果は $R_{sh} = 7.5\text{M}\Omega$ である。実際の空洞の方がQ値は高いが、それ以上に R_{sh}/Q がおちて、 R_{sh} が下がるためである。

また、空洞には、軸対称性をくずす構造がもちこまれるので、円筒空洞のモードは混合されて固有モードをつくる。軸対称性を破る摂動はなるべく小さくするのが普通で、混合の考え方が有効である。

5. 周波数領域での計算プログラム

5.1 SUPERFISH

- 1) 最も一般に使われている
- 2) 軸対称空洞, 軸対称電磁場
- 3) 変数: H_ϕ をメッシュの交点で定義する
- 4) スムーズな三角形メッシュ
- 5) 励起電流必要
- 6) 非斉次方程式の直接解法
- 7) ある周波数範囲のモードに限定可
- 8) 精度が良い

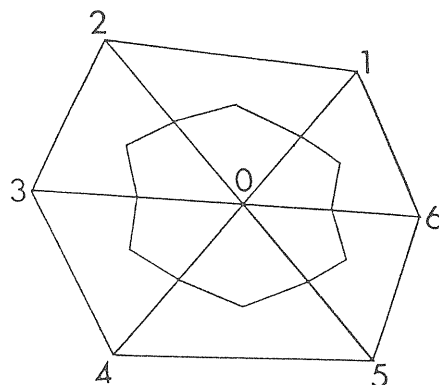


図 5. 1

5.1.1 方程式

軸対称電磁場を考えているので, 場の変数は

$$(E_\phi, H_r, H_z) \text{ 又は } (H_\phi, E_r, E_z)$$

の2つの場合があるが, 加速器で興味のある後者をとりあげる。(3.14)より

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = k^2 \vec{H}$$

$$\therefore \oint \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{l} = k^2 \int \vec{H} \cdot d\vec{S} \quad (5.1)$$

である。(r, z) 平面上の, 図 5.1 に示される三角形メッシュの頂点で H_ϕ が定義され, それが三角形内で (r, z) 座標に対して一次の変化をすると仮定する。頂点 n における H_ϕ を H_n , また関係する頂点の座標により決まる定数 V_n, W_n を用いると,

(5.1) 式の積分を図の12角形に対して行なった結果は

$$\sum_0^6 H_n (V_n + k^2 W_n) = 0 \quad (5.2)$$

とまとめられる。これが基礎方程式となる。

5.1.2 メッシュ

(r, z) 平面上での空洞の形状とメッシュ分割数を入力すると, 空洞壁座標 (r, z) と論理メッシュ (K, L) との対応がつくられる。空洞内部のメッシュは, 逐次近似法により, Laplace 方程式を解いて, その等ポテンシャル線に従って決められる。こうして得られた角付近のメッシュ例を図 5.2 に示した。

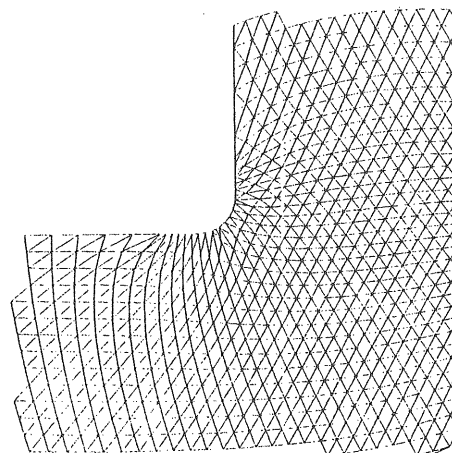


図 5. 2

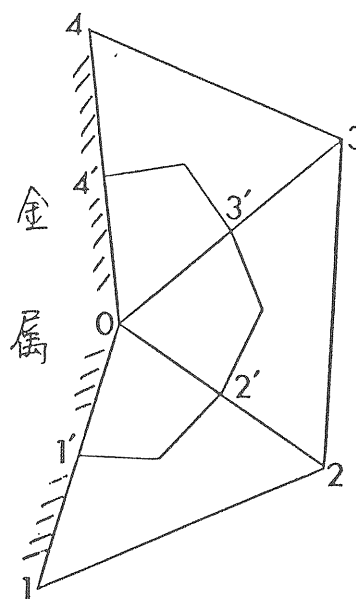


図 5. 3

面がからむと, E は境界に垂直であることから, 図 5.3 において

5.1.3 境界条件

軸上では $H_\phi = 0$, また境界に対して H が反対称であればその境界上でも $H_\phi = 0$ とおける。金属表

$$k \int_{4'-0-1'} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{4'-0-1'} \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

だから、(5.1)式の積分を

$$\int_{1'-2'-3'-4'} \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{l} = k^2 \int_{\text{内部の三角形}} \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

として(5.2)式の係数を決めればよい。

5.1.4 解法

(5.2)式をすべてのメッシュ点に対してかき下し、右辺に非斉次の項(励起電流)が存在するお

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & & & & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} \\ 0 & & & & & & & & a_{LL-1} & a_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \\ \\ H_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \\ \\ G_L \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

が得られる。但し H_i , G_i は、図5.4に示した線に添った H_ϕ と励起電流であり、 a_{ij} は $K \times K$ の行列である。(5.3)に Gauss の消去法を用いると

$$\begin{pmatrix} u & & & & & & \\ & u & & & & & * \\ & & u & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ 0 & & & & & \cdot & \\ & & & & & & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1' \\ H_2' \\ \\ \\ H_L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1' \\ G_2' \\ \\ \\ G_L' \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

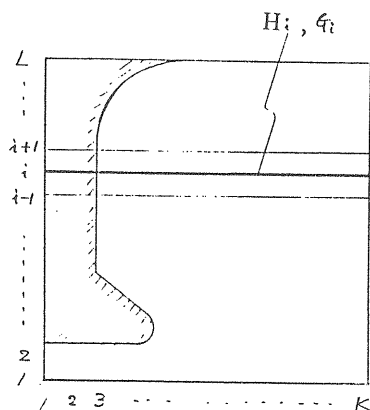


図5.4

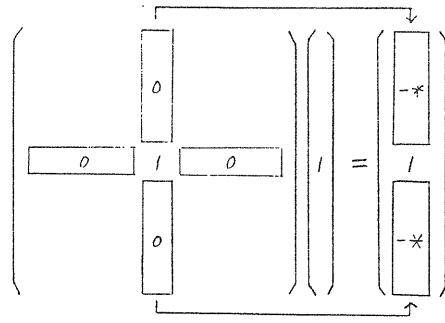


図5.5

と変形できる。但し、 u は $K \times K$ の単位行列である。

この式から

$$H_L' = G_L'$$

が得られ、この H_L' から出発して、(5.4)より H_{L-1}' , H_{L-2}' , \dots , H_1' の順にすべての H' が求まる。最後に、(5.3) \rightarrow (5.4)の逆変換を H' に施してやれば、(5.3)をみたす H を求めることができる。

5.1.5 励起電流と共振周波数

斉次方程式(5.2)から、共振点でも左辺の行列が特異にならない非斉次方程式(5.3)をつくるには、あるメッシュ点 n を選んで、(5.2)の行列の n 行及び n 列の成分を、対角成分を1にする以外はすべて0とし、 n 列の符号を変えたものを右辺に移す。これを図5.5に示す。こうすると、メッシュ n に関係しない部分は(5.2)式と同じである。この特別なメッシュ点 n を、励起点 (driving point) と呼び、普通大きな磁場の存在する点に選ぶ。

さて、(5.3)式を解いて得られた解を用いて、励起点以外の場所の H_ϕ から励起点の H_ϕ を計算できる。この値と始めに設定した値1との差は、その場所に1の磁場をつくるのに必要な励起電流(磁場)である。この差が0となる時が共振点であり、プログラムでは、サーチすべき周波数内で k を変化させ、(5.3)式を解き、差が0となる k を探す。 k がみつかり、その k で解いた解が即ち求める共振時の電磁場分布である。

5.1.6 諸量の計算

電場は

$$k\vec{E} = \nabla \times \vec{H} = -\vec{e}_r \frac{\partial H_\phi}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi) \quad (5.5)$$

より計算できる。またその強さは、

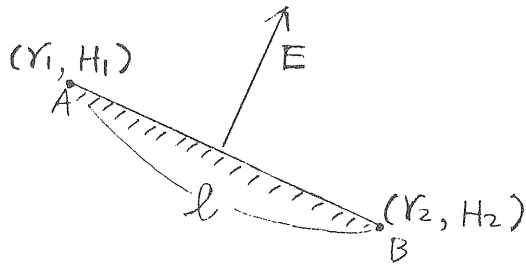


図 5. 6

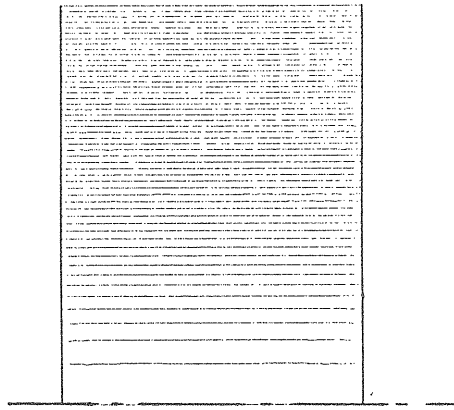


図 5. 7

$$k |\vec{E}| = \frac{1}{r} |\nabla \cdot r H_\phi| \quad (5.6)$$

とかけるから、図 5. 6 のような、金属表面に垂直な電界の強さ E_s は

$$E_s \sim \frac{1}{kr} \frac{\Delta(rH_\phi)}{l} = \frac{r_2 H_2 - r_1 H_1}{k \frac{r_1 + r_2}{2} l}$$

より求める。また、その边上でのジュール熱損失 $P_{A \rightarrow B}$ は边上で H_ϕ が線型に変化するものとして

$$P_{A \rightarrow B} = \int_0^l \frac{R_s}{2} \cdot \left\{ H_1 + \left(1 - \frac{x}{l} \right) H_2 \right\}^2 \cdot 2\pi \left\{ r_1 + \left(1 - \frac{x}{l} \right) r_2 \right\} dx$$

より計算する。

5.1.7 図形出力

(5.5) 式より

$$(\nabla \cdot (r H_\phi) \cdot k \vec{E}) = 0$$

故に $r H_\phi$ の等高線で電場の方向を示すことができる。円筒空洞の TM_{010} モードの例を図 5.7 に示す。但し、(5.6) 式より明らかなように、等高線の密度は $|rE|$ に比例していることに注意しよう。

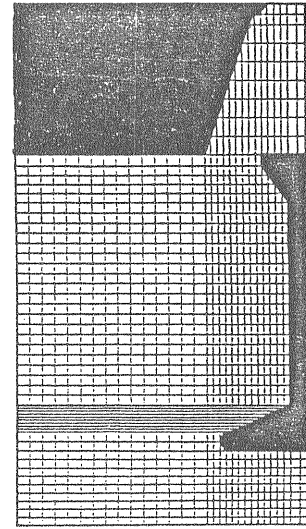


図 5. 8

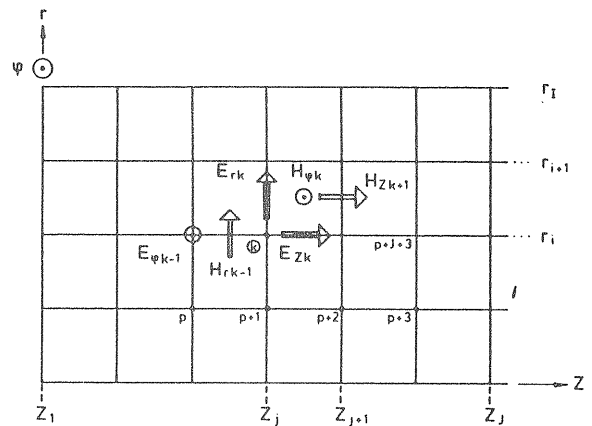


図 5. 9

5.2 URMEL

- 1) 軸対称空洞
- 2) 電磁場の ϕ 分布 $\cos m\phi$ ($m=0, 1, \dots$)
- 3) 長方形とその対角線で空洞形状を近似
- 4) \vec{E} と \vec{H} を、各々半メッシュずれた座標系の格子点で定義する
- 5) 変数: E_r, E_z
- 6) 逐次近似により、斉次方程式を解く
- 7) 周波数の低いモードから順に求める

5.2.1 メッシュと変数

図 5.8 に示されるように、 (r, z) 平面上で入力された空洞形状は、 $r = \text{const}$, $z = \text{const}$ の直線群とその対角線を用いて近似される。場の回転対称性 $m=0$ のモードに対しては、変数は H_ϕ がとられ、SUPERFISH と同様の取扱いなので、ここでは $m \geq 1$ に限る。このとき、変数は 2 ヶ必要で、 (E_r, E_z) をとる。また、図 5.9 に示したように、 E は各边上に、 H は各面上で定義されているとする。

5.2.2 基礎式

回転対称性がmのモードは $\cos m\phi$ 又は $\sin m\phi$ の依存性をもつから、(3.14)を円筒座標系で表わした

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi}\right) \vec{e}_z = k\vec{H}$$

の ϕ 依存性に注意すれば、

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_r E_r \cos m\phi + \vec{e}_\phi E_\phi \sin m\phi \\ &\quad + \vec{e}_z E_z \cos m\phi \\ \vec{H} &= \vec{e}_r H_r \sin m\phi + \vec{e}_\phi H_\phi \cos m\phi \\ &\quad + \vec{e}_z H_z \sin m\phi \end{aligned} \quad (5.7)$$

とかける。さて、(3.16)式

$$k \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

を図5.10に適用すると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= k \int_{r_{i-1,i}}^{r_{i,i+1}} \int_0^\psi (E_{z,k} \cos m\phi) \cdot r dr d\phi \\ &= k E_{z,k} r_i \Delta r_i \frac{\sin m\psi}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_0^\psi H_{\phi,k} \cos m\phi r_{i,i+1} d\phi \\ &\quad - \int_0^\psi H_{\phi,k-j} \cos m\phi r_{i-1,i} d\phi \\ &\quad - \int_{r_{i-1,i}}^{r_{i,i+1}} H_{r,k} \sin m\psi dr \end{aligned}$$

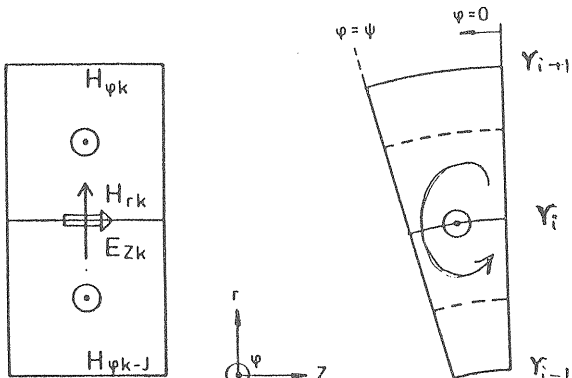


図5.10

$$= (H_{\phi,k} r_{i,i+1} - H_{\phi,k-j} r_{i-1,i} - m H_{r,k} \Delta r_i) \frac{\sin m\psi}{m}$$

$$\text{但し } r_{i,i+1} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}, \quad \Delta r_i = \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2}$$

となる。故に座標のみに依存するパラメータ a_i を用いて

$$k E_{z,k} = a_1 H_{\phi,k} + a_2 H_{\phi,k-j} + m a_3 H_{r,k} \quad (5.8)$$

とかける。 $H_{\phi k}$, $H_{\phi k-j}$ 及び $H_{r k}$ に対して (3.16) 式の積分を同様に行なうと、それらがすべて E_r , E_ϕ , E_z で表わせる。更に $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ より、 E_ϕ を E_r , E_z で表わすことができ、これらを上式に代入すれば

$$k^2 E_{z,k} = \sum_n a_n E_n$$

とかける。但し、和は、図5.11に示した、自分自身と周りの8ヶのベクトルに及ぶ。 E_{rk} についても同様の式が得られるから、

$$A \vec{e} = k^2 \vec{e} \quad (5.9)$$

$$\vec{e} = (E_{r_1} E_{r_2} \dots E_{r_N} E_{z_1} \dots E_{z_N})^T$$

とかける。但しAは $2N \times 2N$ の実行列である。

以上は自由空間内の点に対する方程式であるが、図5.12に斜線で示すような、金属境界が関係する場合でも、(5.9)の行列Aの係数を決めるとき、

- 1) 境界に平行な E_r , $E_z = 0$
- 2) 境界に垂直な H_r , $H_z = 0$

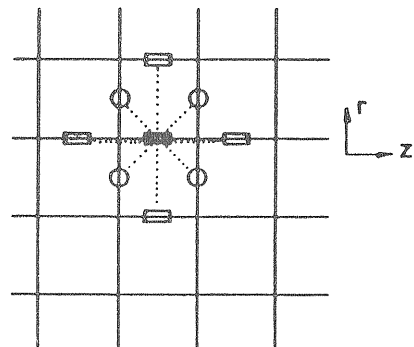


図5.11

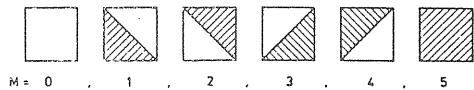


図5.12

3) 図 5.12 の $M=1, 2, 3, 4$ の場合、面積分は $1/2$ 倍することを考慮して決めれば、(5.9) の形は変わらない。

5.2.3 解法

(5.9) の固有ベクトル q_i を用いると、あるベクトル $v^{(0)}$

$$v^{(0)} = \sum_i \alpha_i q_i$$

$$A q_i = \lambda_i q_i$$

とかける。故に

$$v^{(n)} = A^n v^{(0)} = \lambda_1^n \sum_i \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^n q_i \quad (5.10)$$

となり、 n を充分大きくとると、 $i=2$ 以降は無視できて、最大固有値 λ_1 をもつベクトル q_1 が求まる。もし A が対称行列なら q_i は相互に直交するなら、 q_1, \dots, q_{i-1} と直交する条件で (5.10) の逐次近似を行えば q_i が求まる。こうして固有値の大きいものから順に求めることができる。普通行列 A は対称でないから、直交化に少々複雑な手続きが必要であるが、本質的には (5.10) 式によっている。また、加速空洞では周波数の低い方に興味があるので、

$$B = A - \mu I \quad (I = \text{単位行列})$$

とする。 $\mu \sim 0.6 \lambda_{max}$ 程度を用いると、 A の最小固有値が B の最大固有値となり、 B の固有値問題

$$B \vec{q}_i = \lambda_B \vec{q}_i$$

を (5.10) の方法で解くことにより

$$A \vec{q}_i = (\lambda_B + \mu) \vec{q}_i$$

となるから、(5.9) の、周波数の低いモードから求めることができる。

5.2.4 R_t

URMEL により得られる重要な情報に、横方向結合インピーダンスがある。軸から Δr 離れたメッシュ線に添って積分

$$V = \int E_z \cos k z dz$$

を行ない、 $W = \frac{\epsilon}{2} \int E^2 d v$ を考慮して (2.10), (2.11) より

$$|v_{..}|^2 \cong \left(\frac{1}{\Delta r} \sqrt{\frac{\epsilon}{2W}} V \right)^2$$

$$\therefore \frac{R_t}{Q} = \left(\frac{R}{Q} \right)^w \frac{1}{k \Delta r^2} \quad (\Omega / m) \quad (5.11)$$

とかける。但し、このとき、シャントピーダンスが

$$R^w = \frac{V^2}{2P}$$

と定義されていることに注意しておく。また URMEL の出力には

$$(5.11) \div k = \left(\frac{R}{Q} \right)^w \frac{1}{(k \cdot \Delta r)^2} \quad (\Omega) \quad (5.12)$$

がリストされている。

5.2.5 図形出力

求めた (E_r, E_z) を、 (r, z) 平面の各メッシュ点で矢印によるベクトル表示すれば、 $\phi=0$ の面での電場分布がわかる。これと、 $\phi=\pi/2$ m の面で、 $\nabla \times E$ のより求めた H_r, H_z のベクトル表示をあわせて、3次元分布を頭の中で構成できる。図 5.13 に例を示した。

5.2.6

最近、SUPERFISH と同様の、三角メッシュを用いたプログラムも開発された。

5.3 LALA

- 1) 軸対称空洞、軸対称電磁場 (TM₀₁₀ タイプのみ)
- 2) 長方形メッシュ
- 3) 変数 rH_ϕ

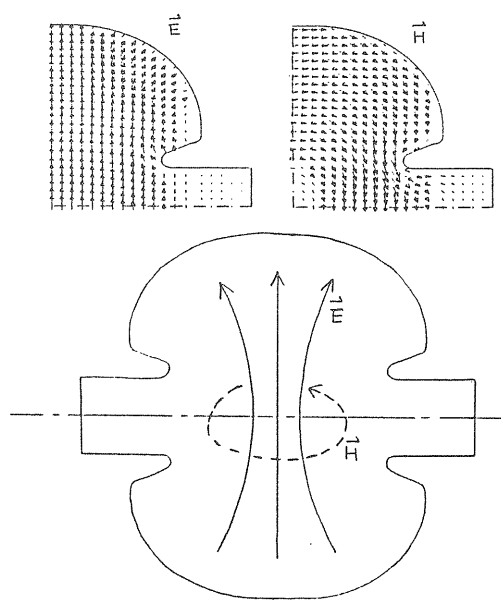


図 5.13

- 4) ヘルムホルツ方程式の逐次近似解法
- 5) CPU 時間短かい (初期値が良いと非常に早い)
- 6) 周波数等の諸量は, 現実の空洞壁で計算される
- 7) メモリ容量が小さい
- 8) 多連結セルの TM_{01} 型のすべてのモードを計算できるよう改良した (LALAGE)

5.4 LANS

- 1) 軸対称空洞, 軸対称電磁場
- 2) SUPERFISH と同じメッシュ及び変数
- 3) 周波数が接近したモードの分離に有効

解法: SUPERFISH と同様に

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0$$

が解くべき方程式である。その固有ベクトルを H_n とする。k の値がその固有値のどれとも一致しなければ,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} - k^2 \vec{H} = \vec{J} \quad (5.13)$$

は SUPERFISH と同じ解法で解ける。試行関数として

$$\begin{aligned} \vec{J} &= k_{no}^2 \vec{H}^{(0)} \\ k_{no} &\neq k_1, k_2, \dots \end{aligned}$$

をとり, (5.13) 式に代入して

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}^{(1)} - k^2 \vec{H}^{(1)} = k_{no}^2 \vec{H}^{(0)}$$

より $H^{(1)}$ を求める。m 回目は

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}^{(m+1)} - k^2 \vec{H}^{(m+1)} = k_{no}^2 \vec{H}^{(m)} \quad (5.14)$$

が得られるが, 真の固有ベクトル H_i にて

$$\vec{H}_n = \sum A_i^{(m)} \vec{H}_i$$

と展開すると, (5.14) より

$$A_i^{(m+1)} = \frac{k_{no}^2}{k_i^2 - k_{no}^2} A_i^{(m)} = \gamma A_i^{(m)} \quad (5.15)$$

が得られる。故に, (5.14) をくり返すことにより, k_{no} に最も近い固有値 k_n をもつ固有ベクトル H_n が

生きのこり, 固有値は (5.15) より

$$k_n = k_{no} \sqrt{1 + \frac{1}{\gamma}}$$

と求まる。このように, $k_{no} = k_n + \epsilon$ に選ぶと, モード n を選び出すことができる。

5.5 ULTRAFISH

- 1) 軸対称空洞
- 2) 電磁場分布 $\cos m\phi$
- 3) メッシュ, 方程式の解法は SUPERFISH と同じ
- 4) 変数 (rE_ϕ, rH_ϕ)

E_r, E_z, H_r, H_z は $f = rE_\phi$ と $q = rH_\phi$ で表わせるが, 例えば

$$E_r = \frac{k_0 \mu r \frac{\partial g}{\partial r} + m \frac{\partial f}{\partial z}}{k_0^2 r^2 \epsilon \mu - m^2}$$

のように,

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{m^2}{k_0^2 \epsilon \mu}}$$

のところにメッシュがあると, 場が発散してしまう。これはメッシュのきり方に重大な制約を与え, 解が見付からない事が多く, まだ一般的には使われていない。

5.6 KN7C と TRANSVRS

周波数の高いモードまで計算して, ビームとの相互作用を計算するために開発されたプログラムである。Disk loaded 型空洞を念頭において, 円筒空洞がビームパイプで周期的に連なった構造に対し, 円形導波管のモードで展開を行って近似する。縦方向モードに対しては KN7C が, 横方向モードに対して TRANSVRS を用いる。各々数百ヶのモードを計算できる。

5.7 3次元モード計算

M. Albani et al. (1974), W. Wilhelm (1982) 及び原ら (1983) により, 開発されてきた。しかし, 解の中に静電場が含まれてしまうので, その解が振動解であるか否かの検証が必要となる。図 5.14 に, 円筒空洞モードに対する原らの計算を示す。周波数が, ペナルティパラメータ s に依存しないことが真の解の条件となっており, いくつかの s の値に対して計算することが必要である。T. Weiland は, URMEL と同じ手

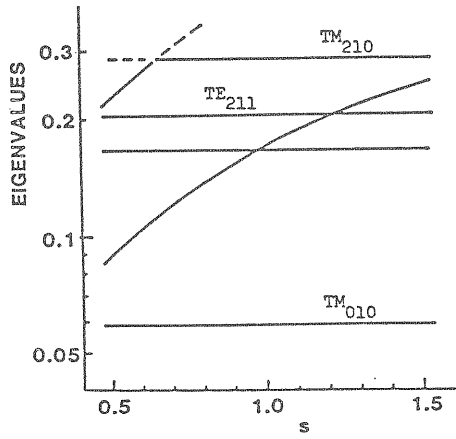


図 5. 14

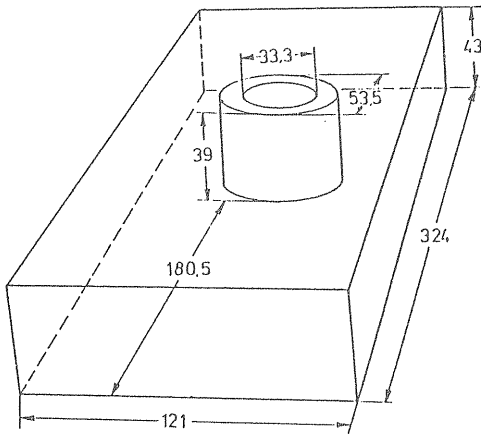


図 5. 15

法を3次元に拡張し、真の振動解のみを得るプログラムを開発し、URMEL-3Dとして発表した(1984)。これによると、図5.15に示した、直方体空胴に誘電体のシリンダーを入れた構造に対し、メッシュ数3185で $\Delta f < 0.2\%$ の精度が得られた。また、IBM3081では、メッシュ点数 $N = 2 \times 10^4$ の場合、CPU時間約30分で10ヶのモードを計算できている。更に、CPU時間が、 $N^{1.5}$ 依存性をもつことも判っている。

6. 時間領域での計算プログラム

6.1 TBCI

軸対称空胴をバンチしたビームが通過したときの電磁場計算をするプログラムである。(3.6), (3.7)式が出発点となる。空胴内では $\sigma = 0$ だから

$$\begin{aligned} \int (\epsilon \vec{E} + \vec{J}) \cdot d\vec{S} &= \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \\ \int -\mu \vec{H} \cdot d\vec{S} &= \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここで

$$\begin{aligned} e &= (E_{r1} E_{r2} \dots E_{rN} E_{\phi 1} \dots E_{\phi N} E_{z1} \dots E_{zN})^T \\ h &= (H_{r1} H_{r2} \dots H_{rN} H_{\phi 1} \dots H_{\phi N} H_{z1} \dots H_{zN})^T \end{aligned}$$

とおけば、(6.1)は

$$\begin{aligned} D_e (\epsilon \dot{e} + j) &= R_e h \\ D_h (-\mu \dot{h}) &= R_h e \end{aligned} \quad (6.2)$$

とかける。但し URMEL と同様のメッシュを用いるので、ビームや電磁波の出入りする空胴の入口、出口を除いて行列 D_e, D_h, R_e, R_h は URMEL の基本式をつくる過程で(5.8)式を導いたと同様の手続で求まる。異なるのは時間微分が陽に入っていることだが、これは、時間きざみを Δt とし、 $t = n \cdot \Delta t$ の時刻を n で表わして

$$\dot{e}^n = (e^{n+\frac{1}{2}} - e^{n-\frac{1}{2}}) \div \Delta t \quad (6.3)$$

$$\dot{h}^{n+\frac{1}{2}} = (h^{n+1} - h^n) \div \Delta t$$

と表現する。(6.2)を(6.3)式に代入して

$$\begin{aligned} e^{n+\frac{3}{2}} &= e^{n+\frac{1}{2}} + \frac{Z_0}{M\beta} A_e h^{n+1} + j^{n+1} \\ h^{n+1} &= h^n + \frac{Y_0}{M\beta} A_h e^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\text{但し } Z_0 = Y_0^{-1} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad M = \frac{\Delta z}{\beta c \Delta t}$$

が得られる。 $h^0 = e^{\frac{1}{2}} = j^0 = 0$ から出発して、 j^n に各時刻における励起電流(ビーム)を入れれば、(6.4)式から次々と各時刻における電磁場が計算できる。空胴の入口・出口では、開放境界条件と呼ぶ特別な条件を仮定している。ビームパイプを光速のビームが移動していると、電場は E_r 成分のみで、それはビームとともに移動する。故に電磁場 f は

$$f(z_0, t_0) = f(z_0 - c\Delta t, t_0 - \Delta t)$$

なる関係をもつ。即ち図6.1の右端(出口)の境界上にある \vec{E} を決める積分を実行するとき、外側の磁場 H_2 は

$$H_2(t) = H_1(t - \Delta t) \quad (6.5)$$

のように、内側の磁場 H_1 で代用する。また、左端(入

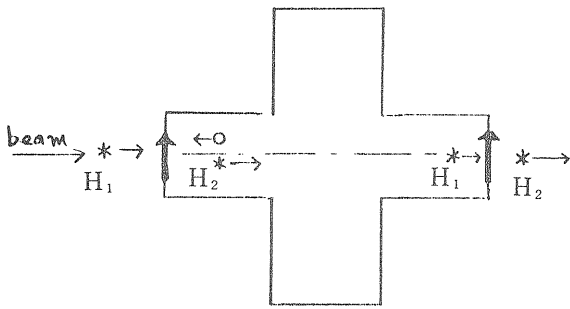


図 6. 1

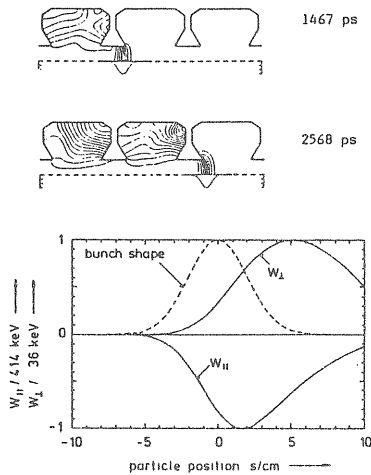


図 6. 2

口) の境界では同様に、外側の磁場 H_1 は

$$\begin{aligned}
 H_1(t) &= \dot{H}_2(t - \Delta t) + \dot{H}_1^*(t) \\
 &= H_2(t - \Delta t) - \dot{H}_2^*(t - \Delta t) + \dot{H}_2^*(t + \Delta t)
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

とかける。但し \dot{H}_2 は散乱されて上流に進む波、 \dot{H}_1^* はビームによりつくられる磁場である。(6.5), (6.6) にて境界外の磁場が境界内の磁場でおきかえられ、(6.4) 式は、空洞内部の変数だけで閉じ、計算可能となる。

図 6.2 に、PETRA の空洞をガウス型分布のバンチが通過したときのウェーク場の様子とウェークポテンシャルの計算結果を示した。 $W_{//} < 0$ は減速を意味し、 $W_{\perp} > 0$ は、軸からバンチのいる方向へのキックであることを意味する。

6.2 その他のプログラム

陳は、TBCI の手法を 3 次元電磁場計算に適用し、断面が楕円の筒内のウェークを計算するプログラム (WELL) を開発した。また、新竹は、静電場の存在するときの、ビーム空洞相互作用を、ベクトルポテンシャルを変数として解くプログラム (FCI) を開発した。また、クライストロン設計には、MASK と

呼ばれるコードが用いられている。

7. 熱歪の計算

CW の高電力運転をする空洞では、空洞壁でのジュール熱損失による空洞壁の温度上昇で、表面抵抗が変わり、 Q 値や R_{sh} が下がる。また、温度分布が生ずるので、熱歪による構造の微小変化があり、電磁場が少し変わって、周波数等に影響がでる。

7.1 PANT

SUPERFISH の後処理プログラムである。SUPERFISH などの結果を使うと、あるモードに対する、空洞壁温一定のときの表面電力損失がわかる。これを入力として、空洞本体の定常状態に対する熱伝導方程式

$$K \nabla^2 u + q = 0 \tag{7.1}$$

を解く。但し、 u は温度分布、 K は熱伝導率、 q は発生熱分布である。これから、空洞表面温度が決まり、初期設定温度と異なるときは、その温度での q を与え、再び (7.1) を解く。この手順を、温度が収束するまで続ける。こうして得られた温度分布から、 Q 値、 R_{sh} 等を計算できる。図 7.1 に、矢印の面で冷却を行なうときの、等温線の例を示した。

7.2 汎用構造解析プログラム

熱伝導や熱歪を数値計算できる汎用プログラム (例えば ISAS と呼ばれているコード) は一般に存在する。電磁場の計算結果から発熱分布を入力し、温度分布と熱歪による構造変化が計算できる。これは、第 8.6 節に例をあげた。本当は得られた構造変化から電磁場を再計算し、得られた温度分布から新たに発熱量を計算して、熱伝導、熱歪解析を行なう手続きを、収束するまでやる必要がある。この処理を統一的にやるプログラムは存在していないので、適宜マニュアルで結合し、解析する必要がある。

また、加速等で、電力の昇降が大きい空洞では

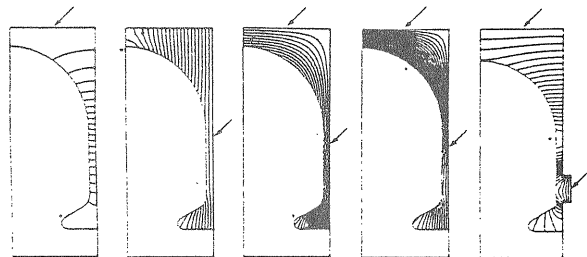


図 7. 1

$$K\nabla^2 u + q = \mu \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\mu: \text{熱容量})$$

を解いて時間変化を解析する必要も生ずるが、ISAS等ではこの計算も可能である。

8. 設計例

8. 1 Disk Loaded Cavity

図8.1にKEK陽電子線型加速器の構造を示す。図8.2に示したいくつかのモードのうち、 $2\pi/3$ モードを加速に用いている。モードの計算には、図中ABで区切られた部分を取り出して行なえばよい。

8. 2 Alvarez Linac Cavity

図8.3に、KEK陽子線型加速器のアルバレ型空洞の一部を示した。この空洞では、円筒空洞の中に TM_{010} モードがたっており、 E_z が減速方向を向くとき、ビームがそれを感じない様に、ドリフトチューブが並べてある。

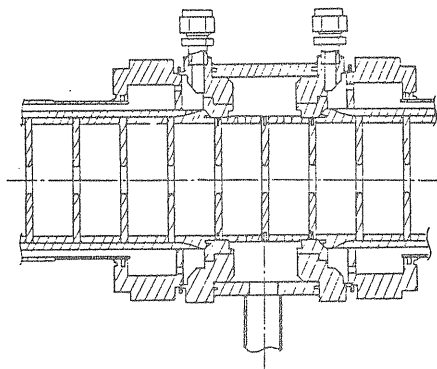


図8.1

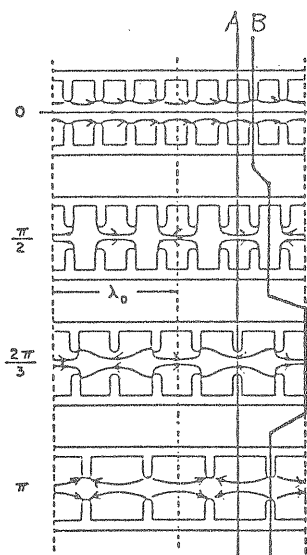


図8.2

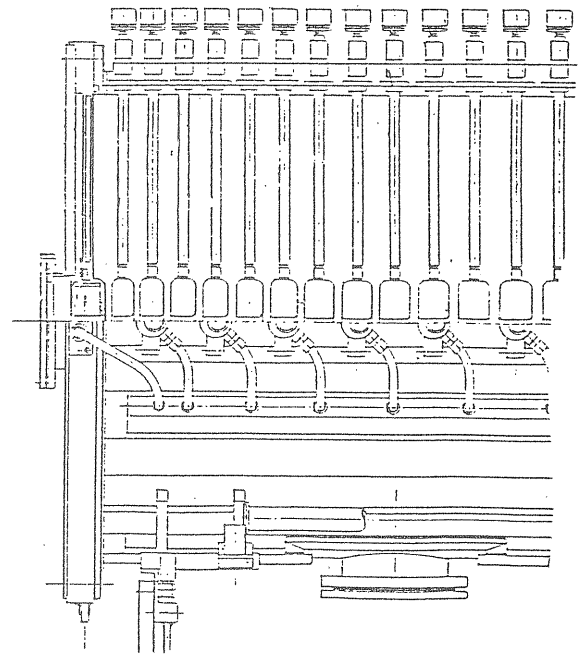


図8.3

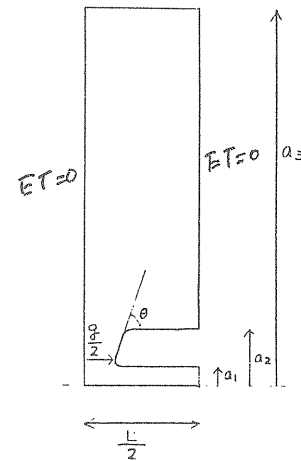


図8.4

空洞設計には、1空洞中の平均エネルギー付近の、あるセルを取り出して、8.4図の境界条件のもとに、周波数を合わせ、同時にインピーダンスが最大となるように、 a_3 、 g 、 θ などを捜す。但し、 E_p/E_{acc} が大きくなりすぎない様注意が必要である。また、 a_1 、 a_2 の最小値は、ビームサイズと収束電磁石から決まってしまうが、これが小さい方が R_{sh} は上がるので、最小値に固定する。実際の空洞には、図8.3に見られるように、ドリフトチューブを支えるステムが存在するが、これは TM_{010} モードの電場に垂直に入り、電磁界をあまり乱さないので、おおまかな設計には考えなくて良い。次に他のエネルギー、即ち他の β 、あるいはセル長 L に対しても、周波数が合うような g や T を求めておく。平均加速電界 E が与えられると、エネルギー増分は

$$\Delta E = eE_0 L T \cos \phi_s \quad (\phi_s: \text{同期位相})$$

となる。しかもこの加速ギャップで

$$L = \frac{v_i + v_f}{2} \times \frac{T_0}{2}$$

v_i, v_f : 初期, 最終速度
 T_0 : 周期

がみたされなくてはならないから、この2式が自己無撞着になる様なLの値を見つける。入射側から順次この操作を行って、得られたセルを連結したものが全空洞となる。

8.3 Shaped Nose Cone Cavity

KEK放射光光源用加速空洞を図8.5に示す。電子リングによく用いられる形で、 TM_{010} モードを用いるが、Q値を上げるため、外胴を球形に近づけている。また、Tをかせぐため、ノーズコーンがついてある。設計計算には、図の右半分を用いればよい。図5.13にURMELの計算例がある。

8.4 Super Conducting Cavity

図8.6は、KEKトリスタンに用いられる超伝導加速空洞である。基本設計では、加速モードの E_p/E_{acc} や H_p/E_{acc} をなるべく小さくする構造を捜す。これは、空洞表面をなめらかにする方向にあって、空洞の形成や表面処理にも有利となる。更に、多連

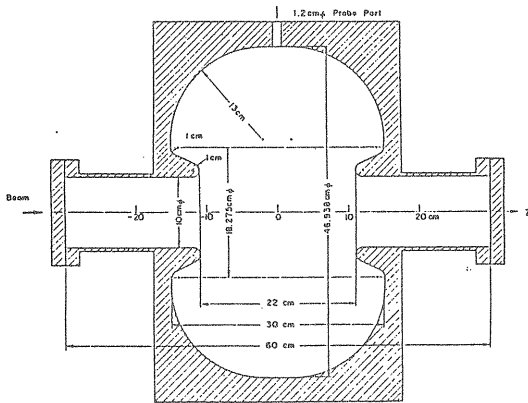


図8.5

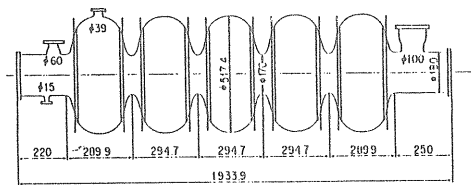


図8.6

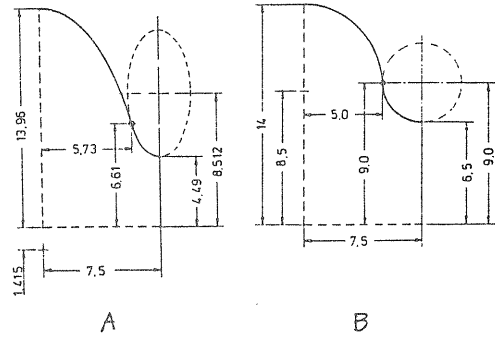


図8.7

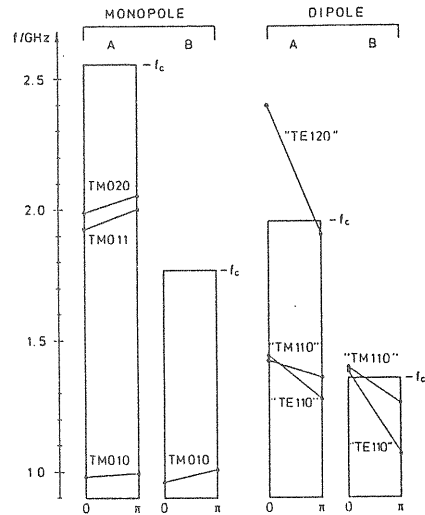


図8.8

結空洞として用いるときは、加速モードが π モードで κ が小さいことを補償すべく、ビームホールをなるべく大きくとってある。

8.5 Single Mode Cavity

図8.7にWeilandの提唱した、単一モード空洞(B)を、前節で述べた通常の空洞(A)とともに示した。この空洞に対するURMELの計算結果を図8.8に示す。この分散特性からわかるように、加速モード以外の $m=0$ のモードの周波数が、ビームパイプの遮断周波数より高いので、ビームによってこれらのモードが励起されても、すぐに空洞から散逸してしまう。そのため、そのモードをアンテナ等で減衰させてやる必要もなく、ビームがそのモードにより不安定になることもない。一方、偏向モードの結合インピーダンスも低くなるので、横方向の不安定性もおこしにくい。

8.6 Alternating Periodic Structure Cavity (APS)

KEKトリスタン入射蓄積リングに用いられているAPS空洞を図8.9に示す。この空洞は、本質的

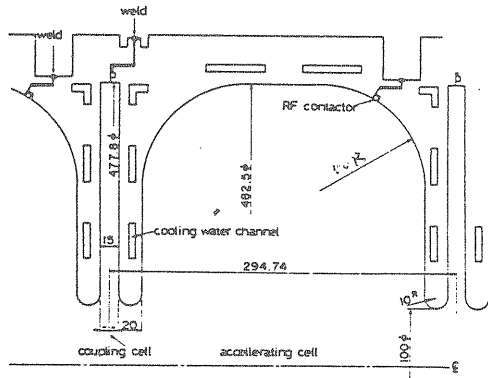


図 8. 9

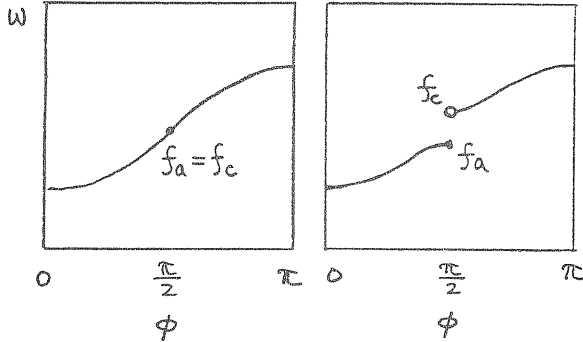


図 8. 10

には 8. 1 節で述べた disk loaded 空胴を $\pi/2$ モードで使用することに対応するが、定在波を用い、励起されない空胴を短かくして加速効率を上げたところが異なる。 $v_g \neq 0$ の状態で運転するためには、図 8. 10 に示されるように、加速セルの周波数と結合セルの周波数を合わせてやる必要がある。空胴は基本的に図 8. 11 の構造を半セルとするユニットセルを連結させた周期構造と考えられるから、(b) 加速モード、(c) 結合モードの各周波数を計算し、両者が一致するよう設計する。この目的のためには SUPERFISH が精度が高いのでよく用いられる。数値計算上、空胴断面は折れ線で近似されるので、その折れ線が実際の空胴表面からとび出している場合、

$$\frac{2 \Delta \omega}{\omega} = \int_{\text{とび出し部分}} (H^2 - E^2) dv \quad (8.1)$$

$$\text{但し } \int_{\text{全空胴}} E^2 dv = \int_{\text{全空胴}} H^2 dv = 1$$

なる周波数のずれがあるから、図 8. 12 に示す A, B 両方の場合について計算し、その平均をとるとよい。

次に、加速モード R_{sh} を上げることを考えよう。ビームホールは小さい方が R_{sh} は高いが、これは加速器側から決められてしまう。外胴とディスクの

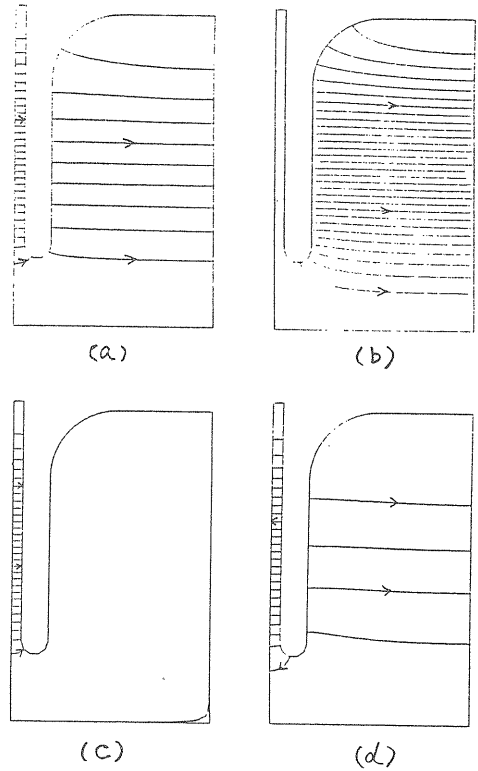


図 8. 11

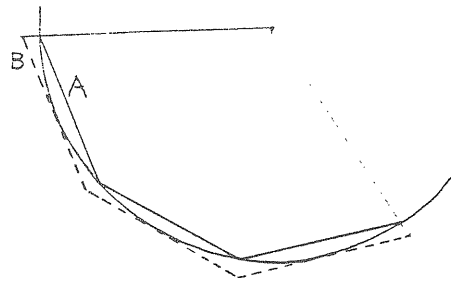


図 8. 12

つけ根には、なるべく大きな R をとって Q 値をかきいれている。ノーズコーンをつけても R_{sh} をあげることができるが、セル間の結合度 κ をおとすので、この例では採用していない。但し、 κ は、図 8. 11 の (a), (d) の周波数差から計算できる。セル数に比べて κ が小さいときは、ビームホールを大きくするか、ディスク面に穴をあけて磁場の結合をさせるかして κ を上げることを要するが、前者は既に述べたように決まっており、後者ではパラメータを実験的に決める必要がある上、 Q 値が下がったり軸対称性を破るので詳しい計算ができない等、単純には設計できない。

さて、この空胴は、電子シンクロトロンに用いられるので、電子エネルギーにより加速電圧が大きく変動する。そのため、空胴壁での熱損失は、結構大きな熱歪の原因となる。定性的には図 8. 13 (b) に示した応力によりディスクが傾いて、結合モードの

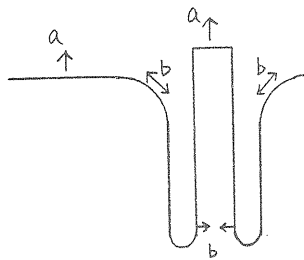


図 8.13

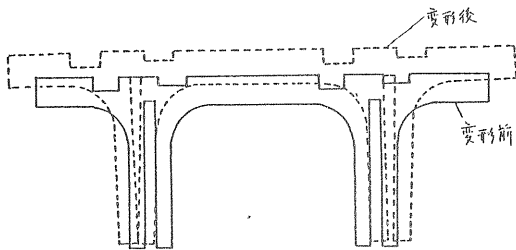


図 8.14

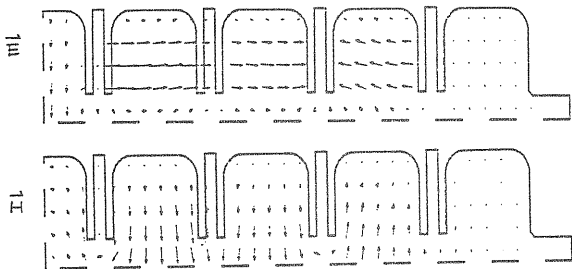


図 8.15

周波数 f_c が下がり、加速モードのそれ f_a は少し上がる。また、全体の温度上昇による熱膨脹 (a) により、 f_a 及び f_c が下がる。温度分布の非一様性からくる (b) のような熱歪は、電磁場計算から得られる表面熱損失を与えて、水冷チャネル等の構造も含めた熱伝導熱歪解析を行なうことにより、始めて定量化できる。図 8.14 にその一例を示した。得られた

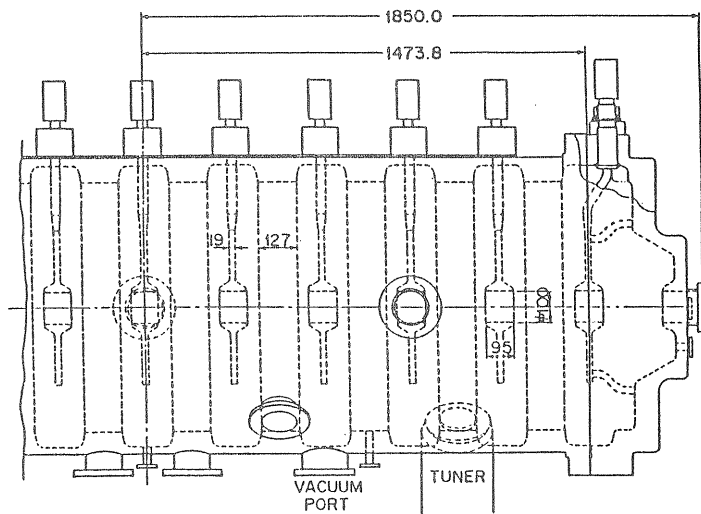
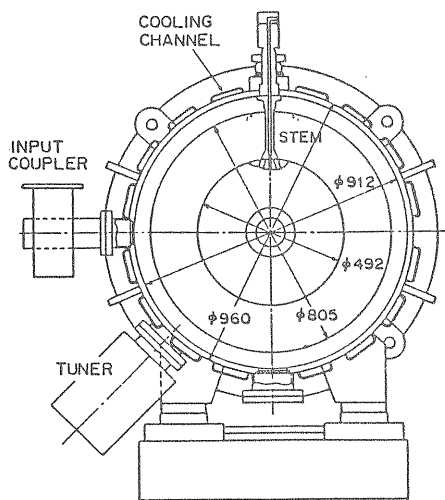


図 8.17

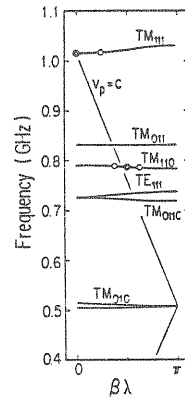


図 8.16

空胴構造の微小変化に対し、電磁場モードはあまり変化しないので、(8.1)より周波数変化を評価できる。ところで、同じ熱損失分布を仮定しても、冷却水の通路や流速によって、生じる構造変化が大きくかわるので、冷却構造はおろそかにできない設計要素であることに注意したい。

APS 空胴の基本的特性は、以上述べてきたように、無限周期構造で考えればよいが、実際の空胴は、端セルで構造が異なり、周期性が破れる。このため、現実の空胴に対する定量的な評価をするためには、図 8.15 のように全空胴に対する解析を行なう必要がある。現在の大型計算機では、9セル程度の空胴に対するおおまかな計算が可能である。この例は、 TM_{110} 型モードに対する UREML の計算結果であり、矢印は、 E_r 、 E_z 又は H_r 、 H_z の最も強い面での各ベクトルを表わしている。このように、実際の 9セル空胴の $m=0$ と $m=1$ のモードを計算した分散特性を図 8.16 に示す。このデータから、ビームの位相と波の位相が合って R_s が大きく、注意すべきモードが、図中◎印で示される所に存在することが判る。

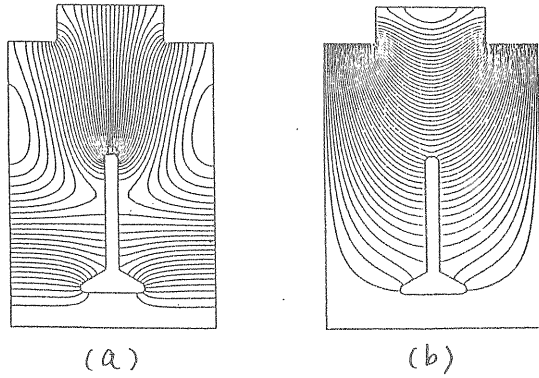


図 8.18

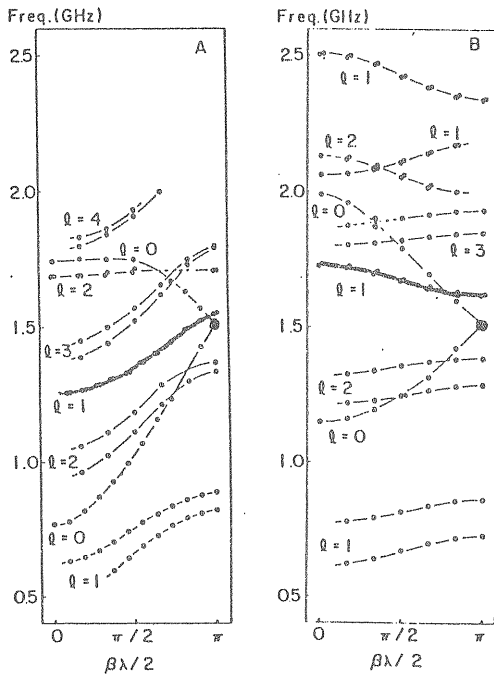
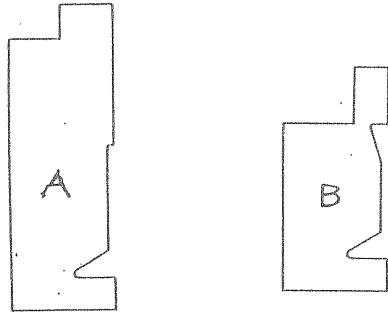


図 8.19

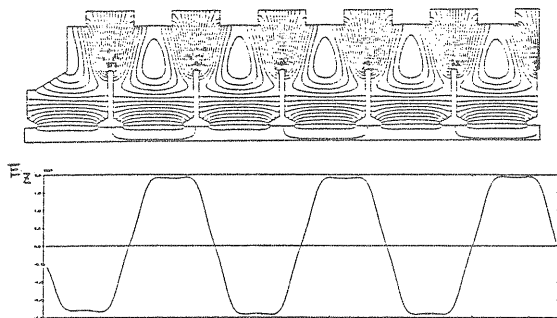


図 8.20

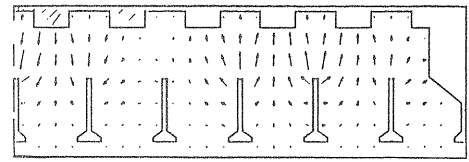


図 8.21

8.7 Disk and Washer Cavity (DAW)

図 8.17に KEK トリスタン入射蓄積リングで用いられている12セル DAW 空洞を示した。今まで述べてきた空洞が TM_{010} モードを加速に用いてきたのに対し、DAW は図 8.18(a)に示すように、これとかなり異なったモードを加速に用いる。このため周波数やQ値などについては、円筒空洞から推定しにくく、数値計算に頼らねばならない。DAW も APS と同様の理由で、加速モードと結合モードの周波数を合わせる必要がある。図 8.18に SUPERFISH で計算した両モードの電磁場分布を示した。

DAW は R_{sh} が高いことが大きなメリットである。 R_{sh} に関して最適化した構造とその分散特性を図 8.19 (A) に示したが、 TM_{11} 型パスバンドが加速周波数をよぎるので特に多セル空洞では好ましくない。外筒の半径やワシヤの径などを変えて、このパスバンドを加速周波数より上又は下にもっていくことができ、図 8.19 (B) にその一例を示した。但し、DAW 空洞には、ワシヤを吊すシステムが必要で、これと電界の向きが垂直なモードの周波数は計算値とよく合うが平行のモードは電磁場がステムによって大きく乱され、周波数も計算値から大きくずれることに注意しよう。

以上、基本構造で特性を考えてきたが、実際の空洞では、端セルの構造が異なり、加速モードの一様性や R_{sh} , Q , R_c の計算には、全空洞に対する計算が必要である。図 8.20に加速モードに対する SUPERFISH の計算例、また図 8.21に TE_{11} タイプの偏向モードに対する URMEL の計算例を電場分

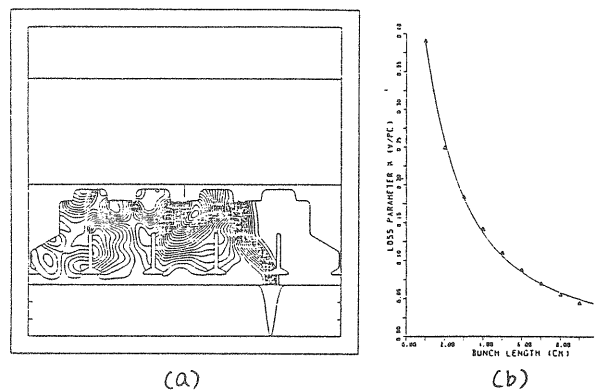


図 8.22

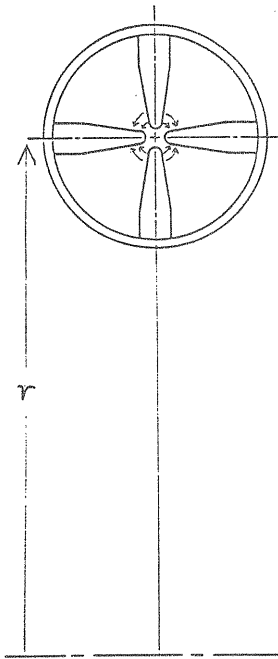


図 8. 23

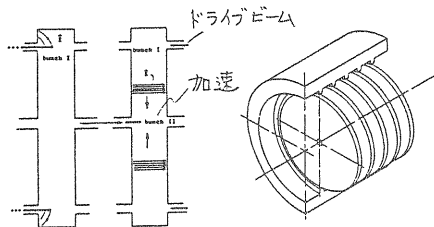


図 8. 24

布で示した。

高調波モードロスの評価例を以下に示す。BCI の計算から、ガウス型のバンチが図 8.22 (a) のように空腔を通過するとき、ある時刻には図のような電磁場が励起されていることが判る。自分自身との相互作用から、(2.12) 式より k_{\parallel} が計算でき、バンチの長さに対する k_{\parallel} の計算結果を同図 (b) に示した。

8.8 Radio Frequency Quadrupole

ビーム軸と平行に 4 枚の翼をつけ、中心軸上に TE_{21} 型の電磁場をつくり、収束作用をもたせた空腔である。実際には、翼には軸方向に波がつけられて加速電場を発生させているが、空腔の周波数や Q 値など、大局的な性質を評価するには、軸方向に一様であるとし、図 8.23 に示される断面をもつドーナツ型の空腔で計算すればよい。半径 r を充分大きくする必要があり、電磁場の存在しない所のメッシュは粗くして計算する。

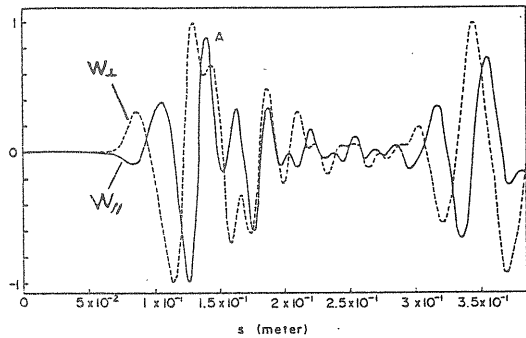
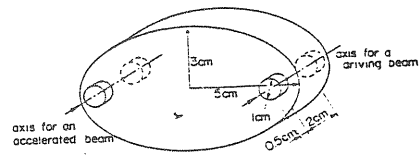


図 8. 25

8.9 Wake Field Accelerator

バンチが空腔を通過したあと電磁場が残されるが、そのエネルギーを局所に集中して大きな加速電場をつくれば、他のバンチを加速することが可能となる。この評価には、ビーム通過後短時間内の電磁場計算が必要となる。図 8.24 に、軸対称空腔と円環電流による、電磁場が軸上へ集中する例を示したが、これは BCI によって計算できる。図 8.25 は、楕円の片方の焦点から発生した電磁場をもう一方の焦点に集中させる例で、WELL を用いた加速位置でのウェークの計算も示した。

9. 今後の発展

軸対称空腔の基本モードや高調波モードの計算には多くの計算コードがあり、現在の汎用大型計算機で数分の CPU 時間があればよく、充分設計に使える。あとは、より精度を上げた計算を更に早く行なことが残っている。

空腔を通過するバンチが引きおこす電磁場の時間領域の解析も TBCI 等で可能となった。

今後の大きな進展としては、DAW 空腔のステム、RFQ の端板付近、入力結合器、チューナ等、軸対称性の破れた空腔に対する、三次元の計算が、計算機の発展とともに実用化されていくだろう。

参考文献

各プログラムについて詳しく知りたければ、次に掲げる論文が参考になる。

1. MESSYMESH ; T. Edwards, MURA rep.

- 622 (1961)
2. LALA ; H. C. Hoyt et al., RSI **37** (1966) 755
 3. KN7C ; E. Keil, NIM**100** (1972) 419
 4. SUPERFISH ; K. Halbach et al., Part. Accel. **7** (1976) 213
 5. LANS ; B. M. Fomel et al., Part. Accel. **11** (1981) 173
 6. LALAGE ; P. Fernandes et al., Part. Accel. **12** (1982) 131
 7. TRANSVERS ; K. Bane, XIth Int. Conf. High Energy Accel. Geneva, (1980) 581
 8. ULTRAFISH ; R. L. Gluckstern et al., 1981 Linear Accel., Conf., Stanta Fe, p. 102
 9. PRUD ; A. G. Daikovskii et al., Part. Accel. **12** (1982) 59
 10. PICES ; Y. Iwashita, Proc. Part. Accel. Conf., Vancouver, (1985)
 11. CAV3D ; W. Wilhelm, Part. Accel. **12** (1982)
 12. 原 ; M. Hara et al., IEEE-NS **30** (1983) 3639
 13. URMEL3D ; T. Weiland, DESY 84-111
 14. TBCI ; T. Weiland, DESY 82-015
 15. WELL ; Y. Chin, KEK 83-19
 16. TBCI-3D ; T. Weiland, Proc. Part. Accel. Conf., Vancouver, (1985)
 17. FCI ; T. Shintake, KEK Preprint 84-15
 18. PANT ; S. O. Schriver et al., IEEE-NS **30** (1983) 3545