

1 序

加速器のスケールが大きくなると、新しい困難が出てくるのが普通である。

1970年代後半から、この様な問題を computer simulation で研究しようとする動きが活発になって来た。これ等の中で特に tracking method (粒子追跡法) と呼ばれる方法がめざましい進歩をとげている。tracking によって調べられる主な問題には

1. chromaticity correction等の為に設置された6極以上の磁石などによる1粒子の非線型振動,
2. beam同志の衝突によるbeam-beam interaction
3. beamと環境との相互作用から生ずるbeamの集団運動

等がある。

tracking とは、加速器内の1つ又は多数の粒子が ring を回る時受ける様々な力を、できるだけ忠実に、かつ特定の理論的モデル (= 偏見) にとらわれずに、時間的に順を追って再現する方法である。上記の3つのテーマは共通して

- i) 本質的に非線型効果である
- ii) 理論的予測が大変難かしい
- iii) 現象を担う個々の過程は比較的単純でよく知られている (と思われている)

という特徴があり、tracking が向いていると共に、必要とされる分野である。tracking ではクソ真面目に粒子の行動を追うだけで、頭は使わない。「もう少し頭を使ったら、有効な方法が見つかるのではないか」という疑問が出るだろうが「そういう方法はない」と答えるのが本講義の目的の1つである。

この講義では上記1) ~ 3) の3つのテーマについて

- a) それぞれの問題を解説し
- b) tracking の目的, 手段, 必要性を論じ
- c) ついでに理論的なバックグラウンドを与えることを目的としている。

第2章では極度に単純化した加速器のモデルを使って、1粒子の非線型振動について学ぶ。様々な力学理論も最終的には tracking に替わることが出来ないことを見るであろう。この章はまた加速器を用いた力学演習という面も持っており、力学理論の compact かつ完備な解説となっている。tracking と力学理論は切っても切れない関係があるのでこののはやむを得ない。

第3章、第4章は beam-beam, beam-environment の問題に対する tracking と理論的背景の解

説だが、2章と違って若干難かしい。特に加速器の線型理論についての知識を必要とする。また、すべての式を証明してはいないので、この稿だけで閉じていない。それでも、これらの複雑な現象の解説としては簡潔で読みやすくした積りである。

第5章では、加速器の中で tracking が必要とされてきた歴史を眺めながら、tracking の本質にセマル。

Appendix は筆者の偏見で気まぐれにつけた。

2章 加速器と非線型力学

[この章の内容] 加速器は大変複雑な非線型の力学系である。この力学系は積分不能系であり、運動方程式を解析的に解くことはできなくて、粒子の長時間にわたる行動を調べるには tracking によるしかない。円形加速器での tracking を computer code 化したものが PATRICIA, RACETRACK 等である。

積分不能系を近似的な積分可能系におきかえる組織的な方法が正準摂動論である。摂動論を用いて beam dynamics の大まかな予測をする為の code に HARMON がある。

PATRICIA 等の tracking には大変時間がかかるが、力学系の symplectic 構造を保った近似で tracking を簡単化する方法が Lie algebra の方法として開発され MARYLIE の code 名で作られつつある。この方法の有効性についても議論する。

2.1 toy model と tracking

現実の加速器は大変複雑な系であるが、tracking の手法に焦点をあてるため、しばらくの間、加速器を極端に簡単化して取り扱う。

まず synchrotron 振動は無視する。betatron 振動も horizontal 方向のみ考える。

最初に normal cell しかない加速器を考える。ring の1ヶ所に観測者がいて、粒子が通過するたびに x と x' を測定しているとする。変数を適当に normalize すれば n turn めと $n-1$ turn めの間に

$$\begin{pmatrix} X_n \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n-1} \\ P_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

の関係が成りたっているはずである。また同じことであるが、0 turn めに (X_0, P_0) であった粒子は、 n turn めには

*) ring 上の位置をまず、 s で示す。理想的な beta tron 振動 (鎌田氏の稿参照) では

$$x(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \sin\phi(s)$$

$$\alpha(s)x(s) + \beta(s)x'(s) = \sqrt{2J\beta(s)} \cos\phi(s)$$

$$\phi(s) = \int^s \frac{ds'}{\beta(s')}$$

となる。 $\alpha(s)$, $\beta(s)$ は twiss parameter, J は horizontal Courant-Snyder invariant (わる2)。観測者の居る所を s_0 とし

$$\mu = \oint \frac{ds'}{\beta(s')}$$

とおく。

$$X(s_0) = \frac{x(s_0)}{\sqrt{\beta(s_0)}}$$

$$P(s_0) = \frac{\alpha(s_0)x(s_0) + \beta(s_0)x'(s_0)}{\sqrt{\beta(s_0)}}$$

とおくと (2・1・1) が導かれる。

なお Appendix-1 を参照せよ。

$$\begin{pmatrix} X_n \\ P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\mu & \sin n\mu \\ -\sin n\mu & \cos n\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ P_0 \end{pmatrix} \quad (2\cdot1\cdot2)$$

に来るはずである。

(問2-イ)

$$\begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\mu & \sin n\mu \\ -\sin n\mu & \cos n\mu \end{pmatrix}$$

を示せ

ヒント

$$\begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix} = e^{iJ\mu} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

[RESONANCE]

(2・1・2) で、各 turn ごとの (X, P) を X - P 平面 (phase space) 上に plot すると図 2-1-a の様になる。

もし tune $\nu \equiv \mu / 2\pi$ が l/m (l と m は通約不可) という有理数であれば、phase space 上に m 個の点しか現われず、 m turn ごとに同じ点に戻る (その時、原点を l 回まわっているが、これはあまり重要な点ではない)。(図 2-1-b)。

もし ν が無理数であれば、phase space 上の点は、同じ点に戻ることなく半径一定の円周上を際限なく (稠密に) 埋めていく (Jacobi の定理)。 ν が有理数の場合の系のこの様な振る舞いを resonance と呼

ぶ。この場合実際の加速器のオペレーションでは、betatron 振動が magnet の error 等と本当に resonate して beam が失われるので m の小さい有理数 ($m \leq 5$) は避けることになっている。今の場合 magnet error 等は考えに入れていないので、resonance という語感からは遠いがそう呼ぶことにする。
[Hamiltonian]

さて、ring 上の位置を角度 θ で表わす。 $\theta = s/R$, (R は ring の mean radius) である (図 2-2 参照)。観測者は $\theta = 0$ の点にいるとする。

$\theta = 0$ にいる観測者にとって、粒子の運動は微分方程式

$$\frac{dX}{d\theta} = \nu P, \quad \frac{dP}{d\theta} = -\nu X, \quad (2\cdot1\cdot3)$$

で記述できる様に見える。実際 (2・1・3) を解けば

$$X(\theta) = X(0)\cos\nu\theta + P(0)\sin\nu\theta$$

$$P(\theta) = -X(0)\sin\nu\theta + P(0)\cos\nu\theta \quad (2\cdot1\cdot4)$$

が得られ、ここで $\theta = 2n\pi$ とすれば (2・1・2) を得る。(2・1・3) は調和振動子の微分方程式であり、Hamiltonian

$$H(P, X) = \frac{\nu}{2} (P^2 + X^2) \quad (2\cdot1\cdot5)$$

から、Hamilton 方程式

$$\frac{dX}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial P}, \quad \frac{dP}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad (2\cdot1\cdot6)$$

として得られる。*)

(問2-ロ) (2・1・6) が (2・1・3) になることを確かめよ。

*)ここでは θ を「時間」としている。本当の時間 t と 1 対 1 の関数関係がある量は時間の替わりに使うことができる。

これで、運動方程式 (2・1・3) は Hamiltonian (2・1・5) から得られるという非常に重要なことが判った。これが何故重要かと云うと次の Liouville の定理があるからである。

Liouville の定理

Hamiltonian から導かれる力学系 (Hamilton 系) では phase space の面積が保存する。

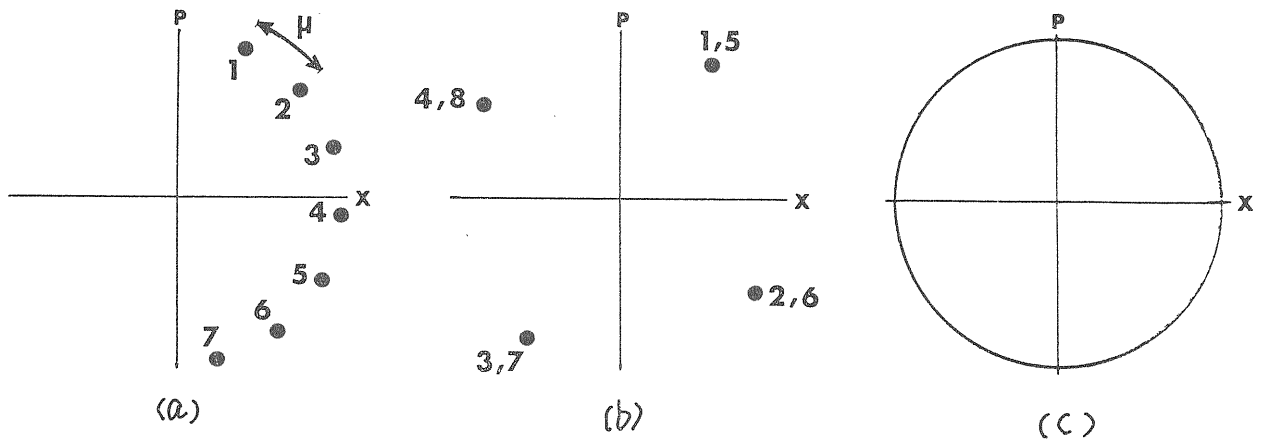


図 2-1 Betatron 振動 ($2 \cdot 1 \cdot 2$) の各 turn ごとの (X, P) 。(a) は初めの数 turn (b) は $\nu = 1/4$ (+整数) の場合, (c) は ν が無理数の場合に長時間 plot したもの

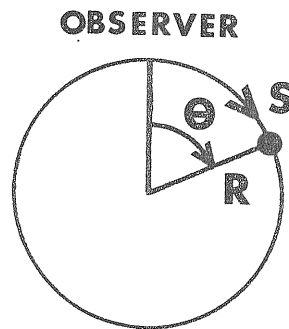


図 2-2 ring と θ の関係。 $s = R \theta$ である。観測者は $\theta = 0$ にいる。

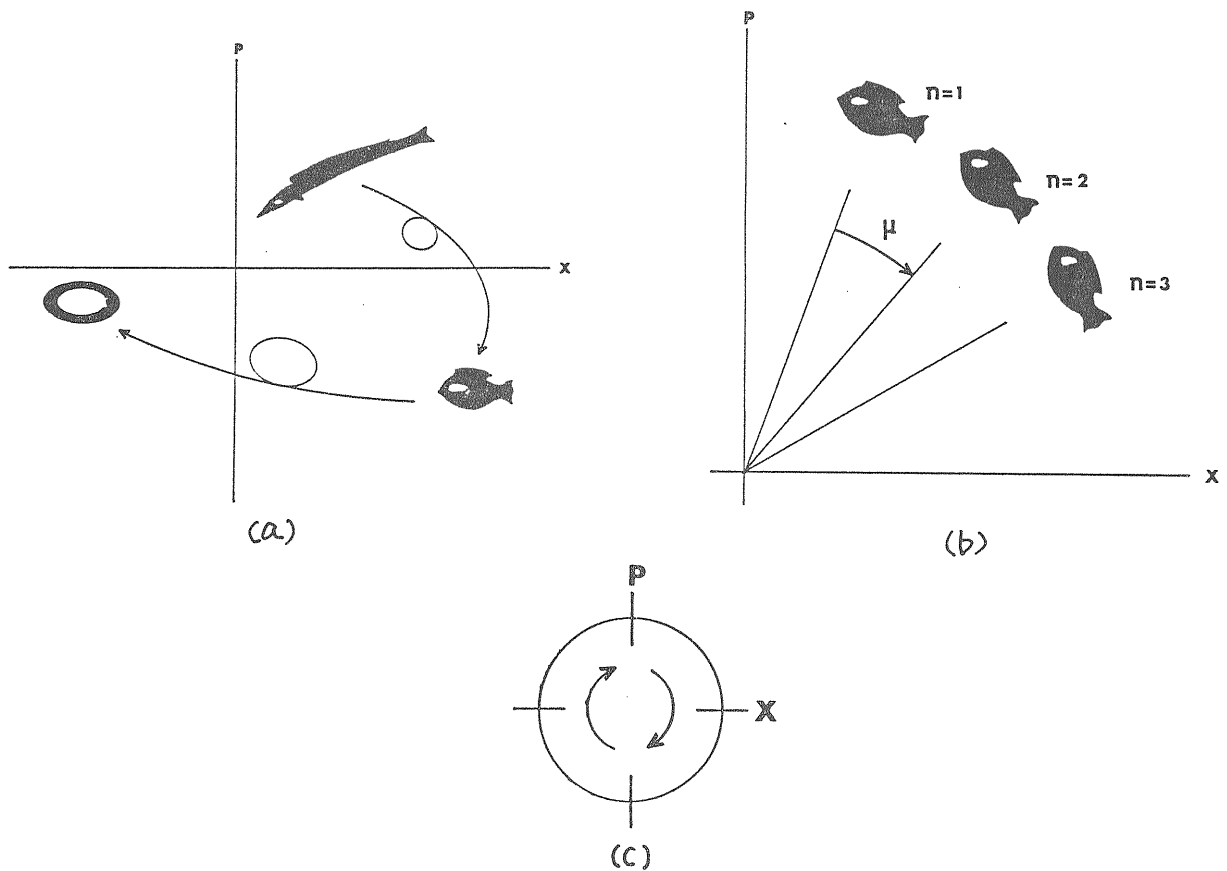


図 2-3 Liouville の定理。(a) は一般の運動の場合, (b) は ($2 \cdot 1 \cdot 2$) の運動の場合, (c) ($2 \cdot 1 \cdot 2$) の運動では円 \rightarrow 円になる。

これを、時間変化が無限小の場合に証明しておく。

(2・1・6)に従えば、時間が θ から $\theta + \Delta\theta$ に変わると

$$\begin{aligned} X \rightarrow X' &= X + \frac{\partial H}{\partial P} \Delta\theta \\ P \rightarrow P' &= P - \frac{\partial H}{\partial X} \Delta\theta \end{aligned} \quad (2\cdot1\cdot7)$$

となる。(2・1・7)を (X, P) から (X', P') への変数変換として見て 変換の Jacobian を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X', P')}{\partial(X, P)} &= \frac{\partial X'}{\partial X} \frac{\partial P'}{\partial P} - \frac{\partial X'}{\partial P} \frac{\partial P'}{\partial X} \\ &= \left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial P} \Delta\theta\right) \left(1 - \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial X} \Delta\theta\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial P} \frac{\partial^2 H}{\partial P \partial X} (\Delta\theta)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2\cdot1\cdot8)$$

であり、これが Liouville の定理を示している。

Liouville の定理によれば phase space 上の領域が時間変化して行く様子は図 2-3-a の様になる。(ついでに、 $X(0), P(0)$ から $X(\theta), P(\theta)$ への変換は、領域のトポジカルな性質を変えないことも示すことができる。) 今の例では、(2・1・2)の変換によって、phase space 上の領域は図 2-3-b の様に変化する。また、半径一定の円内の点はすべて円内に移り、円周上の点は円周上に移る。(図 2-3-c 参照)。

[tracking]

さて、微分方程式系(2・1・3)での粒子の振るまいを、tracking で追跡したいとする。(tracking をするまでもなく答えは(2・1・2)の様になるが、それはまだ知らないとする)。まず考えつくのは、(2・1・3)を素直に差分におきかえて

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \mu P_n \\ P_{n+1} &= P_n - \mu X_n \end{aligned} \quad (2\cdot1\cdot9)$$

とすることであろう。 $(\Delta\theta = 2\pi)$ である。しかし、この方法がまずいことはすぐにわかる。(2・1・9)では Liouville の定理の主張する性質が満たされないことは、(2・1・9)の Jacobian を計算して

```

READ (5, *) X, P
DO 100 I = 1, 10000
X = X + mu * P
P = P - mu * X
100 CONTINUE
WRITE (6, *) X, P
STOP
END

```

図 2-4 tracking のいんちき FORTRAN

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X_{n+1}, P_{n+1})}{\partial(X_n, P_n)} &= \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + \mu^2 \end{aligned} \quad (2\cdot1\cdot10)$$

となるのを見れば明らかであろう。

正しい tracking の式は

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \mu P_n \\ P_{n+1} &= P_n - \mu X_{n+1} \end{aligned} \quad (2\cdot1\cdot11)$$

である。(2・1・11)より

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \mu P_n \\ P_{n+1} &= (1 - \mu^2)P_n - \mu X_n \end{aligned} \quad (2\cdot1\cdot12)$$

となり、この場合変換の Jacobian は

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X_{n+1}, P_{n+1})}{\partial(X_n, P_n)} &= \begin{vmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1 - \mu^2 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned} \quad (2\cdot1\cdot13)$$

で、phase space の面積は不変に保たれる。

tracking をする場合、ここで述べた点を忘れてはならない。

(2・1・12)を計算機に入れて解く。図 2-4 に簡略化した program を示す。これが tracking の基本である。*)

*) (2・1・12) or (2・1・13) の階差方程式は、しかし、手で解くことができる。(2・1・12) の第 2 式より

$$X_n = \frac{1}{\mu} \{ (1 - \mu^2)P_n - P_{n+1} \} \quad (2\cdot1\cdot14)$$

これを第 1 式に入れて整理すれば

$$P_{n+2} + (\mu^2 - 2)P_{n+1} + P_n = 0 \quad (2\cdot1\cdot15)$$

$P_n = e^{inM}$ とおけば

$$2 \cos M = 2 \left(1 - \frac{\mu^2}{2} \right) \quad (2 \cdot 1 \cdot 16)$$

となりこれから

$$P_n = A e^{inM} + B e^{-inM} \quad (2 \cdot 1 \cdot 17)$$

と求まる。X_nについても同様であり、最後に X₀, P₀ を入れれば X_n, P_n が求められる。その結果は (2 · 1 · 2) で μ を M に変えたものが得られる。

(2 · 1 · 16) より、μ ≪ 1 なら μ = M とおけるが、一般的には

$$M = 2 \sin^{-1}(\mu/2) \\ \simeq \mu \left(1 - \frac{\mu^2}{24} + \dots \right) \quad (2 \cdot 1 \cdot 18)$$

又は tune で言えば M = 2 πν_{tr} と書いて

$$\nu_{tr} \simeq \nu \left(1 - \frac{\pi^2}{6} \nu^2 + \dots \right) \quad (2 \cdot 1 \cdot 19)$$

を得る。(2 · 1 · 12) の様な tracking では、この様に tune がずれる。これを避けなければ、(2 · 1 · 19) から判る様に (2 · 1 · 12) で用いる μ を大きくしておくか、θ で 2 π ずつ tracking せず 2 π / 1000 ずつにする等すればよいが、この様にあらかじめ判っている誤差はあまり気にすることはない。

(問 2 - ハ) (2 · 1 · 9) の様な tracking をすると、例えば (X₀, P₀) = (1, 0) から出発したとして、どういうことになるか考えよ。

[非線型 of 力]

これまでは要するに調和振動子を扱っていたので、問題は手計算で解けるものであった。今度は ring 上の一点 (θ = 0) に 8 極磁石を入れたとする。観測

者は 8 極磁石のすぐ後ろに居ることとする。8 極磁石を図 2 - 5 の様に入れると、磁石を通過する時、X 方向に X³ に比例した力がかかる。(磁石は無限に薄く、無限に強いとする → thin lens 近似)。この磁石を通過する際、粒子は

$$X \rightarrow X' = X$$

$$P \rightarrow P' = P - \frac{K}{\nu^2} X^3 \quad (2 \cdot 1 \cdot 20)$$

という変化を受ける。ここで K は磁石の強さで決まる定数であり、*分母の ν² は便宜上つけた。(2 · 1 · 20) の kick により、phase space での粒子の軌跡は図 2 - 5 - c の様になる。今度は、1 turn あたりの tracking に

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X'' \\ P'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X' \\ P' - \frac{K}{\nu^2} (X')^3 \end{pmatrix} \quad (2 \cdot 1 \cdot 21)$$

という様に 2 つの step を要する (まとめて 1 回にすることもできるが) 事になった。

(2 · 1 · 21) で記述される系に対して、Hamiltonian をどの様にとったらよいであろうか？

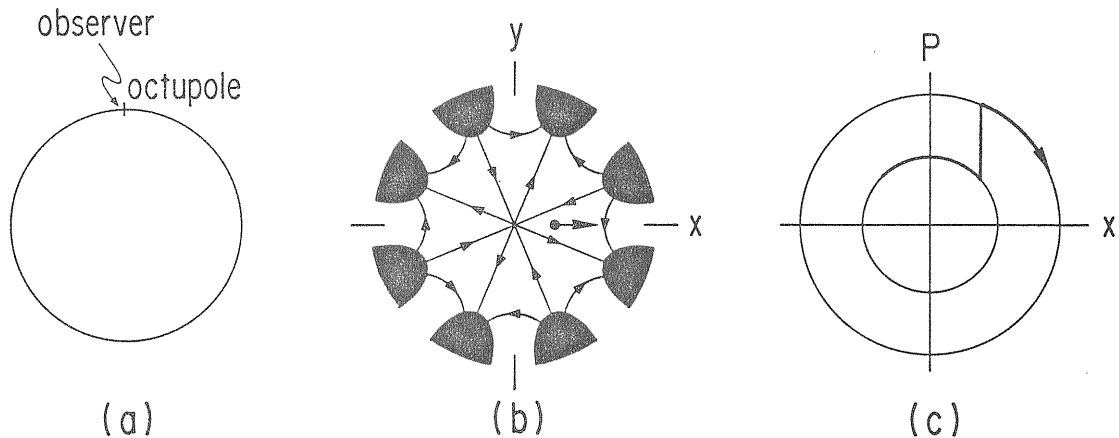


図 2 - 5 (a) θ = 0 に 8 極磁石 (octupole magnet) を入れる。(b) 8 極磁石の磁場と粒子に与える力。(c) 8 極磁石の通過による phase space) 上での jump

*) 8 極磁場が

$$B_x = \frac{E_0}{ec} k'' (3x^2y - y^3)$$

$$B_y = \frac{E_0}{ec} k'' (x^3 - 3xy^2)$$

で与えられるとする。(単位 Tesla)。ことわるまでもなく E_0 は電子の energy, e は素電荷 c は光速で, E_0/ec を magnetic rigidity とも言う。この時, (2・1・20) の K は

$$K = \nu^2 \beta_0^2 k'' l$$

で与えられる。ここで β_0 は 8 極磁石がある場所の β 関数, l は 8 極磁石の長さ (m) である。今, l は非常に小さく, k は非常に大きいとしている。(lk'' を一定にしたまま $l \rightarrow 0$ の極限をとる = thin lens 近似。thin lens 近似については 2.5 節に解説がある)

K のこの形は Appendix-1 の正準変換と smooth 近似より得られる。

答えは

$$H = \frac{\nu}{2} (P^2 + X^2) + \frac{K}{4\nu^2} \delta_p(\theta) X^4 \quad (2.1.22)$$

である。ここで $\delta_p(\theta)$ は周期 2π の periodic delta function である。(デルタ関数については公式 1 を見よ)。(2・1・22) から Hamilton eq. として

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= \nu P \\ \frac{dP}{d\theta} &= -\nu X - \frac{K}{\nu^2} \delta_p(\theta) X^3 \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

が得られる。(2・1・23) の第 2 式を θ で $-\varepsilon$ から $+\varepsilon$ まで積分し, その後で $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば

$$P(\theta = \varepsilon) = P(\theta = -\varepsilon) - \frac{K}{\nu^2} X^3 \quad (2.1.24)$$

となり, (2・1・20) の第 2 式と同じになる。

[time dependent Hamiltonian]

(2・1・20) は, δ function の他に, より本質的な点で (2・1・5) と異なる。Hamiltonian が explicit に (もろに) 時間 θ に依っているのである。これを time dependent Hamiltonian の系という。

(2・1・5) の様に θ に (もろには) よらない場

合は time-independent Hamiltonian の系とか autonomous 系などと呼ぶ。

time-dependent Hamiltonian の場合でも Hamiltonian eq. はもちろん, Liouville の定理も成り立つ。本質的な違いは time-dependent 系では Hamiltonian が保存しない ことにある。これが何をもたらすのかを見るのが, これから先しばらくの間, 興味を中心となる (はずである)。

[2, 1 のまとめ]

このセクションでは, これから用いる道具だが, 一度に出てきたので, 難しかったと思いますが, 要するに「図 2-5-a にある様な単純な加速器があって, その系の Hamiltonian は (2・1・22) で与えられる」ということなのです。

(問 2-ニ) (2・1・21) のそれぞれ, また 2 つを一緒にした変換は Liouville の定理と矛盾しないか確かめよ。

(問 2-ホ) (2・1・21) の 2 つの step で 1 turn として, $\theta = 0 (+\varepsilon)$ に居る観測者が各 turn ごとに観測する X と P を tracking で求めるための FORTRAN Program を作れ。(BASIC でも良い)。手持ちのプログラム電卓で実際に tracking をして, $X(1) = 0.5$, $P(1) = 0$, として $X(100)$, $P(100)$ を求めよ, 但し $\nu = 0.23$, $K/\nu^2 = 1$. とせよ。

(問 2-へ) Hamiltonian (2・1・22) の dimension は何か,

2.2 一周平均という「近似」

前節で導かれた自由度 1 の time dependent Hamiltonian

$$H = \frac{\nu}{2} (P^2 + X^2) + \frac{K}{4\nu^2} \delta_p(\theta) X^4 \quad (2.1.22)$$

に対して, tracking 以外にどのような攻め方があるだろうか。まず考えられるのは, (2・1・22) の θ -dependence を平均してしまうことであろう。 $\delta_p(\theta)$ の ring 1 周にわたる平均は

$$\frac{1}{2\pi} \oint \delta_p(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \quad (2.2.1)$$

公式 1 デルタ関数の性質

デルタ関数は P. A. M. Dirac によって発明された関数で $\delta(x)$ と書かれる。 $\delta(x)$ は $x=0$ 以外の点では 0, $x=0$ の点だけで ∞ になる関数で、絵を書くことはできないが無理して書けば右図の様になる。普通の関数 $f(x)$ があると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) = f(0)$$

となるが

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx f(x) \delta(x)$$

としても $f(0)$ になる。その他の主な性質を文末に示した。 $\delta(x)$ の不定積分

$$\Theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x') dx'$$

は step function と呼ばれる関数で右図の様になる。

δ function の Fourier 変換は

$$D(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ipx} \delta(x) = 1$$

となる。

periodic δ function $\delta_p(\theta)$ は周期を 2π として

$$\delta_p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2n\pi)$$

で定義される。 $\delta_p(\theta)$ は周期 2π の関数なので Fourier 級数で書けて

$$\delta_p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\theta$$

である。 δ function と periodic δ function を混同してはならない。上記 2つの式を足して得られる

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2n\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}$$

は Poisson sum rule と呼ばれるものの一つで加速器でよく使われる。

δ function の主な性質

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

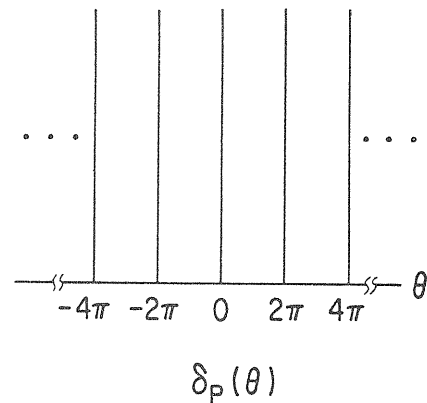
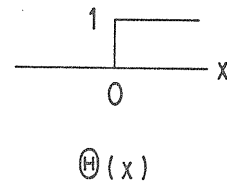
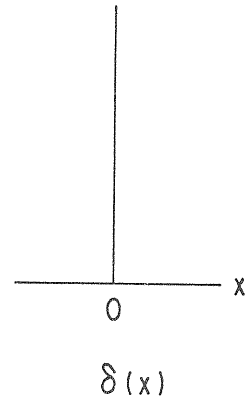
$$x\delta(x) = 0$$

$$\delta(ax) = \delta(x)/a, \quad a > 0$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{a} \{ \delta(x-a) + \delta(x+a) \}, \quad a > 0$$

$$\int \delta(a-x) dx \delta(x-b) = \delta(a-b)$$

$$f(x) \delta(a-x) = f(a) \delta(a-x)$$



である。そこで (2・1・22) を

$$H \rightarrow H_m = \frac{\nu}{2} (P^2 + X^2) + \frac{K}{8\pi\nu^2} X^4 \quad (2\cdot2\cdot2)$$

でおきかえて見よう。(synchrotron oscillation の取り扱いは、ring の数ヶ所に局在する rf の効果を ring 1 周で平均して扱かう。これと同様の近似法である)。

[求積法]

(2・2・2) の Hamiltonian H_m は H , (2・1・22) と異なり、autonomous である。自由度 1 の autonomous 系には、次の様な顕著な性質がある。「自由度 1 の autonomous 系、つまり Hamiltonian が (2・2・2) の様に 1 組の P と X で書かれている系では、運動方程式を求積法で解くことが必ずできる」つまり

自由度 1 の autonomous Hamilton 系は解析的に解ける

のである。証明は簡単：autonomous 系では Hamiltonian が保存するので、 H がある値 E をとるとする。すると P を E と X の関数で表わすことができ、(2・2・2) の Hamiltonian では

$$P = \pm \sqrt{\frac{2}{\nu} E - X^2 - \frac{K}{4\pi\nu^3} X^4} \quad (2\cdot2\cdot3)$$

となる。 X についての Hamilton eq. $\frac{dX}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial P}$ の右辺は、 X と P の関数であるが、この P に (2・2・3) を代入すれば X と E の関数になる。今の場合なら

$$\frac{dX}{d\theta} = \nu P = \pm \sqrt{2\nu E - \nu^2 X^2 - \frac{K}{4\pi\nu} X^4} \quad (2\cdot2\cdot4)$$

となる。これより、

$$d\theta = \frac{\pm dX}{\left(2\nu E - \nu^2 X^2 - \frac{K}{4\pi\nu} X^4\right)^{1/2}} \quad (2\cdot2\cdot5)$$

を積分することによって θ が X, E, X_0 の関数として求まり、逆に解けば

$$X = X(\theta, E, X_0) \quad (2\cdot2\cdot6)$$

の形の解が求まる。ここで X_0 は X の初期値。(2・2・5) の積分が実際できるか否かは重要な点ではない。

上記の様な力学系の解法を求積法*)という。

求積法が使えたのは、系が保存量 H を持っていたからであることに注意しよう。(2・1・22) の様な time-dependent Hamiltonian では H が保存せず、それに変わるべき保存量もない(ように見える)。もし、保存量があつて

*) 求積法とは 1) 既知関数の積分と 2) 逆関数の計算という 2 つの操作で解を作ることである。

$$f(P, X) = \text{const} \equiv \alpha \quad (2\cdot2\cdot7)$$

とおけるならば、今と同様の方法で f を H のかわりにして、解が求積法で求まるであろう。*) そうならば tracking の必要はない。

(2・2・7) の様な保存量が存在するか否かを決定する一般的方法は見つかっていない。

[separatrix と fixed point]

とりあえず、求積法で解くことができる H_m , (2・2・2), の性質を調べよう。粒子は Hamilton eq.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= \nu P \\ \frac{dP}{d\theta} &= -\nu X - \frac{K}{2\pi\nu^2} X^3 \end{aligned} \quad (2\cdot2\cdot8)$$

に従って、 (X, P) の phase space 上を移動して行く。この時、 $H_m = \text{const}$ の線上を移動して行くことは

*) 実は (2・2・7) より一般的な

$$g(P, X, \theta) = \text{const.}$$

が保存量であってもよい。 g を新しい運動量とする正準変換 (2.3 節) が存在し、系は求積法で解ける。 H (2・1・22) が θ について周期 2π の周期関数であることから g も θ について同じ周期の周期関数であることを示すこともできる。

$$\begin{aligned} \frac{dH_m}{d\theta} &= \frac{\partial H_m}{\partial X} \frac{dX}{d\theta} + \frac{\partial H_m}{\partial P} \frac{dP}{d\theta} \\ &= \frac{\partial H_m}{\partial X} \frac{\partial H_m}{\partial P} - \frac{\partial H_m}{\partial P} \frac{\partial H_m}{\partial X} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

より明らかである。そこで (X, P) 平面上に $H_m = \text{const} = E_m$ の線をいくつか描いてみると、図 2-6-a の様になる。なお、ここでは $K < 0$ とした。この線に沿って粒子が動いていくわけだが、各点でどの位速く動いているかを見るには、(2.2.8) の右辺にその点の (X, P) を代入してみればよい。これらの曲線のそれぞれを相流線 (phase flow curve) と呼ぶ。

さて、(2.2.8) を見ると、ある点では、

$$\frac{dX}{d\theta} = 0, \quad \frac{dP}{d\theta} = 0 \quad (2.2.10)$$

となることに気がつく、具体的には

$$\begin{aligned} A : (X, P) &= \left(-\sqrt{\frac{2\pi\nu^3}{-K}}, 0 \right) \\ B : (X, P) &= \left(\sqrt{\frac{2\pi\nu^3}{-K}}, 0 \right) \quad (2.2.11) \\ C : (X, P) &= (0, 0) \end{aligned}$$

の 3 点であり、図 2-6-b に示されている。この 3 点のどれかに粒子が居ると、未来永劫にわたって動かないので、これらの点是不動点 (fixed point) と呼ばれている。これら 3 点の中で A と B では、fixed point 付近の phase flow curve が双曲線になっているので双曲型不動点 (hyperbolic fixed point)、C では楕円 (この図では円) になっているので楕円型不動点 (elliptic fixed point) と呼ぶ。

双曲型不動点 A (B) から少しはなれた所にいる粒子は時間がたつと遠くに行ってしまうので、双曲型不動点は不安定な特異点であり、一方楕円型不動点は安定な不動点である。

2 つの双曲型不動点、A と B を結ぶ相流線は目立つ存在なので特に名前があって separatrix と呼ばれている。separatrix の内部をバケツと呼ぶ。

[tune spread]

粒子が separatrix 上の 1 点、例えば図 2-6-b の D 点にいるとすると、separatrix 上を B に向かっ

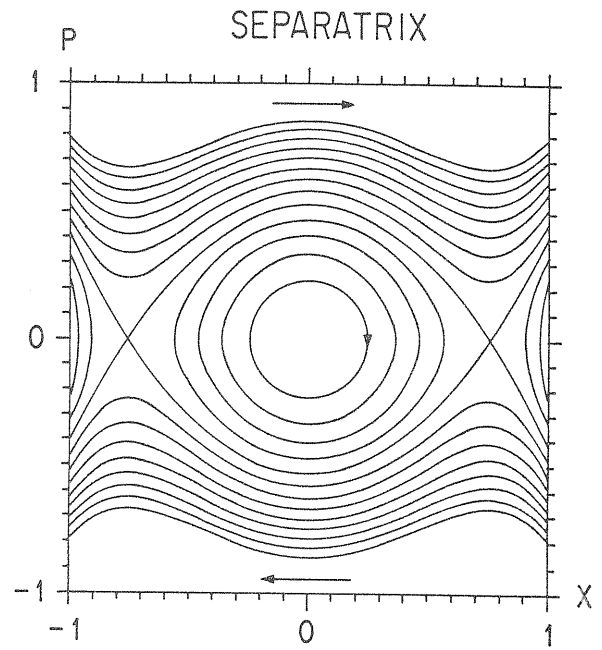
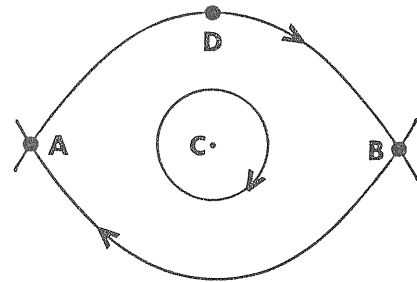


図 2-6 (a) $H(2.2.2)$ の phase flow curve



(b) fixed point と separatrix

て進んでいくが、絶対 B 点には到達しない。これを示そう。

separatrix では H は

$$H = E_{\text{sep}} = -\frac{\pi\nu^4}{2K} \quad (2.2.12)$$

の値をとる。

(問 2-ト) これを示せ。

(2.2.5) の E としてこの E_{sep} を代入すると D 点から B 点まで行くのにかかる時間 T は

$$T = \int_0^{X_B} \frac{dX}{\left(2\nu E_{\text{sep}} - \nu^2 X^2 - \frac{K}{4\pi\nu} X^4\right)^{1/2}} \quad (2.2.13)$$

となる、ここで X_B は B 点の X 座標

$$X_B = \sqrt{\frac{2\pi\nu^3}{-K}} \quad (2.2.14)$$

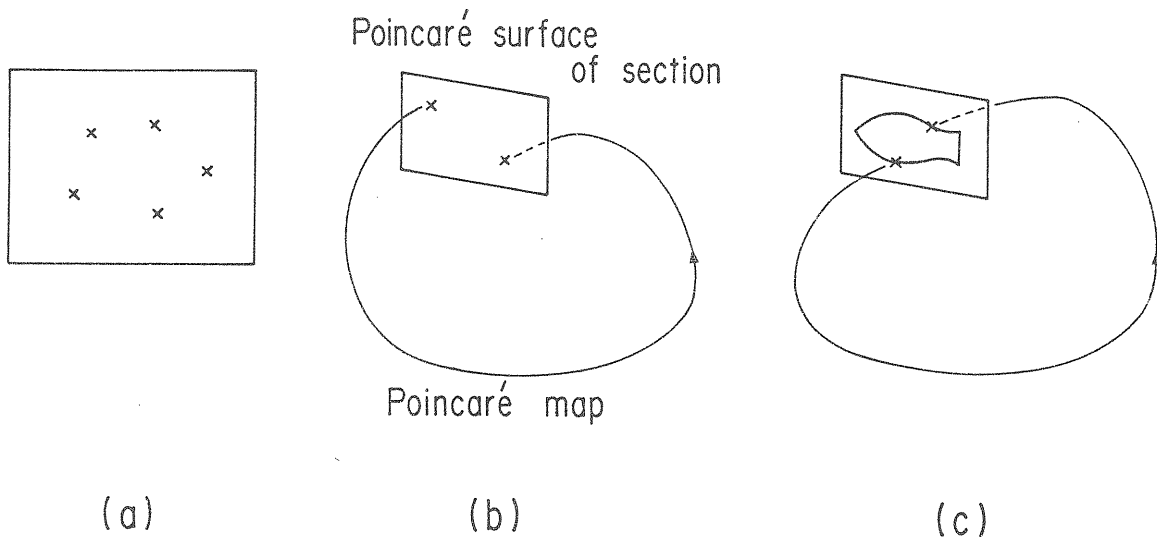


図 2-7 Poincaré map。(X, P)平面上の離散的な点集合, (b) Poincaréの切断面。(c) 保存量があると切断面上に連続曲線が書ける。

である。この積分が発散することを見るのはたやすい。

(問 2-1) これを示せ。

separatrix 内部の点が原点のまわりを一周するのに要する時間, 周期, は原点に近い所ほど少なく原点から離れるに従って, つまり振巾が大きくなるに従って大きくなり, separatrix 上で ∞ になる。振動数, tune, で云えば内側程大きく, separatrix 上で0になる。*)

この様に tune が振巾によるのは非線型振動の一般的な性質である。

今は1つの粒子に注目しているが, 多数の粒子が bunch して ring を回っている実際的な場合には, bunch 内の粒子は少しずつ異なる振巾を持っているので, tune も異なってくる。この様に tune に分布が現われることを tune spread と呼ぶ。

注*) $K > 0$ の場合, separatrix は存在せず, 又 tune は外側に行く程大きくなる。

[Poincaré map]

これから1周平均近似と tracking を比較する。tracking では $\theta = 2n\pi$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) の時の (X, P) を X-P 平面に plot していく。1周平均近似の Hamiltonian H_m に対しても同様に適当な

(X_0, P_0) から出発して, $\theta = 2n\pi$ ごとに (X, P) を plot してみると, 図 2-6-a の様な連続曲線は現われず, 図 2-7-a の様な離散的な点の集合が得られる。

この様に θ について連続的にではなく, 2π ごとに粒子を追っていく時, 1 turn ごとの (X_n, P_n) (X_{n+1}, P_{n+1}) の写像, 例えば, $(2 \cdot 1 \cdot 21)$, を Poincaré map, $\theta = 0$ の面を Poincaré の切断面 (surface of section) と呼ぶ。(図 2-7-b 参照)。力学系を調べるのに surface of section は非常に有効である。

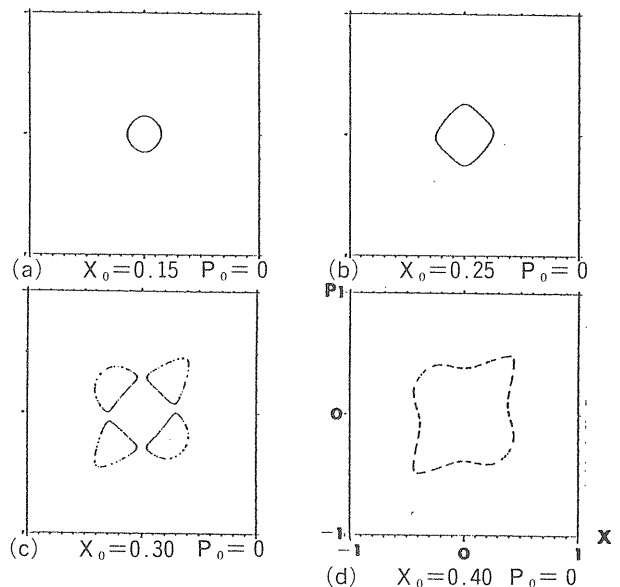


図 2-8 $H(2 \cdot 1 \cdot 22)$ による近似なしの Tracking. なお $\nu = 0.27$ $K = -0.2187$ である。

1 周平均近似の力学系を surface of section で調べると、1 つの (X_0, P_0) から出発した点集合はすべて 1 つの曲線の上に乗るはずである。この曲線は図 2-6-a の phase flow curve に他ならない。phase flow curve 上を粒子が働いていく時、時間 2π ごとに写真をとったと考えればよい。この曲線に対応する tune, ν , が有理数でなければ (tune は振巾によるので、有理数になる場合もある)、phase flow curve 上の離散的な点集合は n が 1, 2... と大きくなるに従ってこの曲線を稠密に埋めていくであろう (2.1 節の Jacobi の定理参照)。

phase flow curve は Hamiltonian 一定の曲線である。一般に、力学系に保存量 $f(X, P)$ があれば、surface of section 上の点集合は曲線、 $f = \text{const}$, の上に乗る。点の数が増えるに従って、点集合はこの (閉) 曲線を埋めつくしていく (ことが多い)。逆に tracking によって、 $X-P$ 平面上に曲線が現われれば何等かの保存量の存在が示唆される。(図 2-7-c 参照)

保存量 $f(X, P)$ の存在 = surface of section 上の曲線

[1 周平均近似と tracking との比較]

いよいよ tracking をしてみる。4 通りの (X_0, P_0) を適当にとって出発した surface of section を図 2-8-a ~ d に示した。(図 2-6-a を書くのに用いたのと同じパラメーター ($\nu=0.27$, $K=-0.2187$) を用いた。) 振巾が小さい場合には、(a), tracking と 1 周平均近似はよく合う。振巾がもう少し大きくなると、(b), 両者のずれが目立ちはじめ、(c) では決定的な違いが出てくる。(d) の閉曲線の少し外側では、粒子は不安定になり、無限のかなたへ飛び去る。1 周平均近似で separatrix の中にいても、実は tracking をしてみると不安定だったということもあり得る。

この様に ring 上の 1 点に局在する効果を 1 周平均でおきかえるのは、(場合によっては) 大変危険であり力学系の特徴をとらえそこなうことになりかねない。*)

図 2-8 を見ると、それぞれ単一の曲線に見えるので、我々の time dependent 系に保存量がある様にも思えるが、次節以降でこの点をもう少し詳しく調べよう。ここでは、図 2-8 の 4 枚の絵については、かなりよい近似で保存する量があることが見つかった、と考えておいてよいであろう。又、図 2-8-c の図形は (a), (b) と比べて非常に形が

違う (topological に違う) ことにも注意しておこう。

*) そうすると RF bucket という考え方は有効でないのか? という疑問が当然出てくると思う。通常の ring のオペレーションでは synchrotron tune は高々 0.1 と非常に小さい。 ν が小さい場合、特別の事情がないかぎり 1 周平均近似はかなり良く成り立つ。それでも separatrix 近傍での phase flow curve は多少乱れるはずである。

ここでは「一周平均近似は、無前提に正当化されるべきものではない」ことを強調する為に $\nu=0.27$ という tune を用いたので、この例の様に顕著な違いが出たのである。synchrotron 振動に対しては、一周平均近似は大体的場合に良く成り立つ (RF が localize していることが本質的にきく現象もあるが)、しかし、betatron 振動に対してはほとんど役に立たない。

[2.2 のまとめ]

2.1 で導入した time dependent Hamiltonian, (2.1.22), の系を 1 周平均近似で time independent にしてみたら、あまり良い近似ではなかった。surface of section 上の軌道は、振巾が大きくなると変な形になることも分かった。ここで学んだ separatrix, fixed point, tune spread 等の概念はこれから先も重要な役割を果たすことになっている。

2.3 摂動論の有効性

この節では正準摂動論を用いて、我々の Hamiltonian, (2.1.22) を調べ、tracking との比較を行なう。正準摂動論 (canonical perturbation theory) は、長い伝統を持つ、よく確立された理論であり、加速器理論でもよく用いられる。

まず (2.1.22) を 2 つに分ける。

$$H_0 = \frac{\nu}{2} (P^2 + X^2) \quad (2.3.1)$$

$$H_1 = \frac{K}{4\nu^2} \delta_p(\theta) X^4 \quad (2.3.2)$$

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.3.3)$$

H_0 を無摂動系の (unperturbed) Hamiltonian, H_1 を摂動 (perturbation) Hamiltonian と呼ぶ。 H を

total Hamiltonian と呼ぶこともある。

$$H'(X', P') = H(X(X', P'), P(X', P')) \quad (2.3.9)$$

[Poisson bracket と正準変換]

摂動論の最初の step は、これまで用いてきた正準変数の組 (X, P) を他のより便利な変数に変換することである。その為にまず正準変換 (canonical transformation) について学ぶ

X と P の任意の関数 $f(X, P)$ と $g(X, P)$ に対して、Poisson bracket $[f, g]$ を

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial P} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial X} \quad (2.3.4)$$

と定義する。

Poisson bracket を用いると Hamilton eq. は

$$\frac{dX}{d\theta} = [X, H], \quad \frac{dP}{d\theta} = [P, H] \quad (2.3.5)$$

と簡潔に書くことができる。更に一般に θ に「もろに」よる関数 $h(X, P, \theta)$ の時間変化も

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + [h, H] \quad (2.3.6)$$

と書き下せる。

(問 2-リ) (2.3.6) を示せ、

Poisson bracket の最も基本的な性質は

$$[X, P] = 1 \quad (2.3.7)$$

である。これは定義より明らかであるが、変数変換 $(X, P) \rightarrow (X', P')$ によって新たな変数の組に移った時、

$$[X', P'] = 1 \quad (2.3.8)$$

が成り立てば、 (X', P') 系も Hamilton 系であることが保証されるのである。(2.3.8) が成り立つ様な変換を正準変換と云う。

$$(X, P) \longleftrightarrow (X', P') \text{ が正準変換} \leftrightarrow [X', P'] = 1$$

より正確に云えば、

とおけば (H の中の X と P を X' と P' で表わしたもの)

$$\begin{aligned} \frac{dX'}{d\theta} &= \frac{\partial H'}{\partial P'}, \\ \frac{dP'}{d\theta} &= -\frac{\partial H'}{\partial X'} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

が成り立つ。証明： X' も X と P の関数であるから (2.3.6) より

$$\frac{dX'}{d\theta} = [X', H] \quad (2.3.11)$$

と書ける。 H と H' は同じものだから、一般に (2.3.4) が

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial X'} \frac{\partial g}{\partial P'} - \frac{\partial f}{\partial P'} \frac{\partial g}{\partial X'} \quad (2.3.12)$$

と書きかえられることを示せば (2.3.10) も証明される。

(2.3.12) の証明

$$\begin{aligned} [f, g] &= \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial P} - (X \leftrightarrow P) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial X'} \frac{\partial X'}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial P'} \frac{\partial P'}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial X'} \frac{\partial X'}{\partial P} + \frac{\partial g}{\partial P'} \frac{\partial P'}{\partial P} \right) \\ &\quad - (X \leftrightarrow P) \\ &= \frac{\partial f}{\partial X'} \frac{\partial g}{\partial P'} [X', P'] + \frac{\partial g}{\partial X'} \frac{\partial f}{\partial P'} [P', X'] \\ &= \frac{\partial f}{\partial X'} \frac{\partial g}{\partial P'} - \frac{\partial f}{\partial P'} \frac{\partial g}{\partial X'} \end{aligned}$$

こうして、①正準変換ならば Hamilton 系から Hamilton 系に移れる。②正準変換で結ばれている (X, P) と (X', P') のどちらを用いて Poisson bracket の計算をしてもよい。ということが判った。

ここで述べたことは N 自由度の系でも同様に成り立つ。

(問 2-ヌ) N 自由度の系について証明せよ、

Poisson bracket のその他の主な性質を公式 2 にあげておく。

[time-dependent な正準変換]

正準変換 $(X, P) \rightarrow (X', P')$ が θ による時、つ

まり

$$\begin{aligned} X' &= X'(X, P, \theta) \\ P' &= P'(X, P, \theta) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

となる時, time-dependent canonical transformation と云う。この時も $[X', P'] = 1$ が条件であるが, 新しい Hamiltonian $H'(X', P', \theta)$ は (2.3.9) では作れない。

こういう正準変換は time-dependent Hamiltonian を扱う時によく出てくる。そこでまず time-dependent Hamiltonian の系を autonomous な系に書きかえる方法を示そう。

我々の問題では, θ はもともと ring 上の位置であったので, θ を「時間」でなく「座標」と見なしても不自然でないだろう。この時, θ と組みになる (正準共役) 運動量 P_θ をかけて導入する。全系の Hamiltonian を \tilde{H} とすると

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{\nu}{2} (P^2 + X^2) \\ &+ \frac{K}{4\nu^2} \delta_p(\theta) X^4 + P_\theta \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

である。 P_θ が角運動量であることは, この際どうでもよい。 \tilde{H} は, X, P, θ, P_θ の関数であり, \tilde{H} の系は自由度 2 の autonomous 系である (θ は今回時間ではない)。 \tilde{H} から導かれる Hamilton eq. は

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \nu P, \\ \frac{dP}{dt} &= -\nu X - \frac{K}{\nu^2} \delta_p(\theta) X^3 \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= 1, \\ \frac{dP_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

となる。ここで t は新たに導入した時間パラメータ (これも本物の「時間」でなくても良い), H はもとの Hamiltonian, (2.3.3) である。(2.3.16) の第 1 式で $\theta = t$ とおけるので, (2.3.15) はもとの Hamilton eq. そのものである。 P_θ は実質上 $-H$ である。

\tilde{H} の系は本質的に H の系と同等であり

自由度 1 の time dependent 系 = 自由度 2 の autonomous 系

であることが判った。逆に自由度 2 の autonomous 系の座標の 1 つを時間と置いて, 自由度 1 の time-dependent 系にすることも許される。

次にこの自由度 2 の系における正準変換について考える。無限小正準変換

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X' = X + \varepsilon f(X, P, \theta) \\ P &\rightarrow P' = P + \varepsilon g(X, P, \theta) \\ \theta &\rightarrow \theta' = \theta \\ P_\theta &\rightarrow P'_\theta = P_\theta - \varepsilon h(X, P, \theta) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

を考える ($\varepsilon \ll 1$)。これが正準変換であるためには

$$\begin{aligned} [X', P'] &= 1 + O(\varepsilon^2) \\ [X', P'_\theta] &= O(\varepsilon^2) \\ [P', P'_\theta] &= O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

が成り立てばよい (この他の Poisson bracket に関する条件は自動的に成り立つ)。

それぞれ書き下して見れば ε の 1 次までとって

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial P} &= 0 \\ -\frac{\partial h}{\partial P} + \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

を得る。これより

$$f = \frac{\partial M}{\partial P}, \quad g = -\frac{\partial M}{\partial X}, \quad h = \frac{\partial M}{\partial \theta}, \quad (2.3.20)$$

となる関数 $M(X, P, \theta)$ が存在すれば (2.3.17) が正準変換であることの必要十分条件になる。関数 M を (無限小変換の) 母関数と呼ぶ。*)

再び自由度 1 の time-dependent 系に戻る。(2.3.17) の無限小正準変換は

$$X \rightarrow X' = X + \varepsilon \frac{\partial M}{\partial P} \quad (2.3.21)$$

$$P \rightarrow P' = P - \varepsilon \frac{\partial M}{\partial X}, \quad (2.3.22)$$

*) これは ε の 1 次まで正準変換であるが, ε の高次まで正準変換にする方法もある \rightarrow 2.4 節の Lie 変換

公式2 Poisson bracket の性質

正準変数を $X_1, X_2, \dots, X_N, P_1, P_2, \dots, P_N$ とすると

$$1, [f, g] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)$$

$$2, [f, f] = 0$$

$$3, [f, g] = - [g, f]$$

$$4, [af+bf', g] = a [f, g] + b [f', g] \quad (a, b, \text{は constants})$$

$$5, [f, gh] = [f, g] h + g [f, h]$$

$$6, \text{特に } [f, g^n] = ng^{n-1} [f, g]$$

$$7, [f[g, h] + [g[h, f]] + [h[f, g]]] = 0 \quad (\text{Jacobi 律})$$

これらは定義より直接証明できる。

$$H \rightarrow H' = H + \epsilon \frac{\partial M}{\partial \theta} \quad (2 \cdot 3 \cdot 23)$$

を意味している。X と P の正準変換が (2 · 3 · 21), (2 · 3 · 22) の時, Hamiltonian は (2 · 3 · 23) の様に変える必要があることが判った。

[action-angle variable]

正準変数 (X, P) から, より便利な正準変数 (φ , J) に正準変換で移ろう。H₀系における phase space 上の運動は 2 · 1 で見た様に原点のまわりの円運動である。(図 2-1 を見よ)。

そこで action variable を

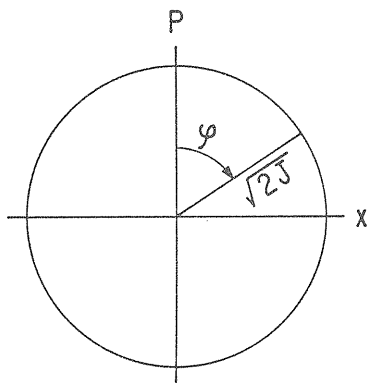
$$J = \frac{X^2}{2} + \frac{P^2}{2} \quad (2 \cdot 3 \cdot 24)$$

で定義する。 $\sqrt{2J}$ が上記の円運動の半径である。angle variable を

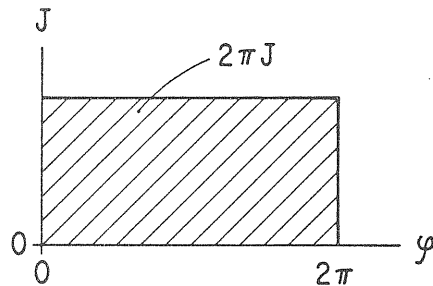
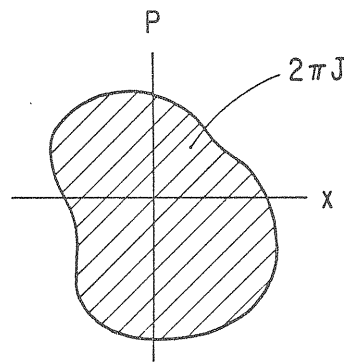
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X}{P} \quad (2 \cdot 3 \cdot 25)$$

で定義すると, (φ , J) が新しい正準変数になる。なぜならば

$$[\varphi, J] = \frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial J}{\partial P} - \frac{\partial \varphi}{\partial P} \frac{\partial J}{\partial X} = 1 \quad (2 \cdot 3 \cdot 26)$$



(a)



(b)

図 2-9 (a) Action J と angle φ
(b) φ が周期 2π を持つことの証明

だからである。

(問 2-ル) これを示せ,

この正準変換により

$$H_0 = \nu J \quad (2 \cdot 3 \cdot 27)$$

$$H_1 = \frac{K}{\nu^2} \delta_p(\theta) J^2 \sin^4 \varphi \quad (2 \cdot 3 \cdot 28)$$

となる。H₀が J のみの関数であることに注意せよ。なお

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{2J} \sin \varphi \\ P &= \sqrt{2J} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2 \cdot 3 \cdot 29)$$

である。図 2-9 参照。

Hamiltonian が H₀のみであれば, 上記の書きかえによって

$$H = H_0 = H_0(J)$$

となり, Hamilton eq. は

$$\frac{dJ}{d\theta} = 0 \quad \frac{d\varphi}{d\theta} = \nu \quad (2 \cdot 3 \cdot 30)$$

という大変簡単なものになる。(2・3・30)の解は

$$J = J_0, \quad \varphi = \nu\theta + \varphi_0$$

であり、これによって H_0 の系は解けたことになる。

H_0 が (2・3・1) の様に簡単なものでなくとも, autonomous で自由度 1 ならば (つまり保存量があれば), 例えば H_m , (2・2・2) の様なものならば, この保存量から同様にして

$$H = H(J)$$

となる様な J を作ることができる。より正確に云えば, 保存量があって, phase space 上の軌道が閉じている (又は何等かの周期性がある) ならば,

$$J = \frac{1}{2\pi} \times (\text{その閉曲線内の面積}) \quad (2 \cdot 3 \cdot 31)$$

とすることによって $H = H(J)$ とすることができる。この様にして

保存量の存在 $\leftrightarrow H = H(J) \leftrightarrow$ 解析的に解ける

ということが判った, 保存量があれば解析的に解けることは既に 2・2 で学んだ。

一般に, この場合 angle variable φ が $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi^*$ になるのに要する時間が, その運動の周期であり, 振動数 $\bar{\nu}$ は

$$\bar{\nu} = \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} \quad (2 \cdot 3 \cdot 32)$$

によって知ることができる。例えば

$$H = aJ^3$$

なら $\bar{\nu} = 3 aJ^2 = \bar{\nu}(J)$ であり, これが tune の振巾依存性の正確な表現である。

*) $(X, P) \rightarrow (\varphi, J)$ への変換が正準変換であることより $[\varphi, J] = 1$ であり, これは

$$\frac{\partial(\varphi, J)}{\partial(X, P)} = 1$$

とも書ける。図 2-9-b で斜線をひいた部分の面積が同じ $2\pi J$ になるためには φ が 2π

でもとに戻る変数でなければならない。(2・3・31)の J の定義は, こうなる事を見越していたのである。

[摂動論]

われわれの Hamiltonian に戻ろう。(2・3・27), (2・3・28) より

$$H = H_0(J) + KH_1(J, \varphi, \theta) \quad (2 \cdot 3 \cdot 33)$$

と書ける。ここで H_1 は H_1 から K を除いたものである。 $K \ll 1$ の場合を考える。もし, 新しい正準変数の組 $(\bar{\varphi}, \bar{J})$ が存在して, 正準変換の結果

$$H = H(\bar{J}) \quad (2 \cdot 3 \cdot 34)$$

と書けるなら, この系の力学は解析的に解けることになる。

一般には, この様な \bar{J} を見つけることができない (そもそも存在するかどうか判らない*)。しかし, これが存在するならば $\bar{\varphi}$ と \bar{J} は

*) 殆んどの場合, この様な $(\bar{\varphi}, \bar{J})$ の組は存在しないことを後で見る。

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi + K \frac{\partial M(\varphi, J)}{\partial J} \\ \bar{J} &= J - K \frac{\partial M(\varphi, J)}{\partial \varphi} \\ \bar{H} &= H + K \frac{\partial M(\varphi, J)}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2 \cdot 3 \cdot 35)$$

の様に (φ, J) と関係づけられるはずである (無限小正準変換)。 $K \ll 1$ であることを用いれば (2・3・35) は

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\varphi} - K \frac{\partial M(\bar{\varphi}, \bar{J})}{\partial \bar{J}} \\ J &= \bar{J} + K \frac{\partial M(\bar{\varphi}, \bar{J})}{\partial \bar{\varphi}} \\ \bar{H} &= H + K \frac{\partial M(\bar{\varphi}, \bar{J})}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2 \cdot 3 \cdot 36)$$

とも書ける。(2・3・33)の系に対して, この正準変換を行なえば

$$\begin{aligned}\bar{H} &= H + K \frac{\partial M}{\partial \theta} \\ &= K \frac{\partial M}{\partial \theta} + H_0(\bar{J}) + K \frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial M}{\partial \varphi} \\ &\quad + K H_1(J, \varphi, \theta) \\ &= H_0(\bar{J}) + K \left(\frac{\partial M}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial M}{\partial \varphi} + H_1 \right) \quad (2 \cdot 3 \cdot 37)\end{aligned}$$

を得る*)。 (2・3・37) の第2項が0であれば \bar{H} が \bar{J} のみの関数として求まる。

変換の母関数 $M(J, \varphi, \theta)$ は、 φ と θ について periodic でなければならない (そうでなければ変換 (2・3・35) が1対多の変換になってしまう。その為には、 H_1 が θ と φ について periodic なだけでなく、平均が0でなければならない**)。そこで

$$H_1(J, \varphi, \theta) = \bar{H}_1(J) + H_1 - \bar{H}_1(J) \quad (2 \cdot 3 \cdot 38)$$

$$\bar{H}_1(J) = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint d\theta \oint d\varphi H_1 \quad (2 \cdot 3 \cdot 39)$$

*) $H_0(\bar{J})$ は $H_0(J)$ の J を \bar{J} で置きかえたものである。

***) 例えば $df/d\theta = \sin\theta + 1$ の解 f は periodic にはなれない。1がなければ解は periodic

としてやると、 $H_1 - \bar{H}_1$ は平均0の関数である。(2・3・37) を

$$\begin{aligned}\bar{H} &= H_0(\bar{J}) + K\bar{H}_1(\bar{J}) \\ &\quad + K \left\{ \frac{\partial M}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial M}{\partial \varphi} + H_1 - \bar{H}_1 \right\} \quad (2 \cdot 3 \cdot 40)\end{aligned}$$

の様に分解し、 M として

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) M = \bar{H}_1 - H_1 \quad (2 \cdot 3 \cdot 41)$$

の解を採用すれば

$$\bar{H}(\bar{J}) = H_0(\bar{J}) + K\bar{H}_1(\bar{J}) \quad (2 \cdot 3 \cdot 42)$$

となり、Hamiltonian は \bar{J} だけの関数となる。

以上の計算では K^2 の項をすべて落としたことに注意してほしい。もし K の高次の項をとり入れれば

(2・3・42) でなく

$$\bar{H} = H_0(\bar{J}) + K\bar{H}_1(\bar{J}) + K^2 \cdot f(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) \quad (2 \cdot 3 \cdot 43)$$

の様におつりが出てくる。

結局 (2・3・33) から

$$\begin{array}{c} H_0(J) + KH_1(J, \varphi, \theta) \\ \downarrow \text{正準変換}(\varphi, J) \rightarrow M(\bar{\varphi}, \bar{J}) \\ H_0(\bar{J}) + K\bar{H}_1(\bar{J}) + K^2 f(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta) \end{array}$$

(2・3・44)

の様に Hamiltonian を分割し、 \bar{J} だけで書けない部分を K^2 の項におしこめたことになる。同様の方法で、おつりを K^3 の項、 K^4 の項という様に次々と高次の項におしこめることもできる。これを組織的にやる方法が正準摂動論である。

われわれは最低次の摂動で満足することにして、(2・3・41)、(2・3・42) を解こう。

[最低次の摂動]

(2・3・39) と (2・3・28) より

$$\begin{aligned}K\bar{H}_1 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{K}{\nu^2} J^2 \delta_{\nu}(\theta) \sin^4 \varphi \\ &= \frac{3}{16\pi} \frac{K}{\nu^2} J^2 \quad (2 \cdot 3 \cdot 45)\end{aligned}$$

よって、

$$\bar{H}(\bar{J}) = \nu \bar{J} + \frac{3K}{16\pi\nu^2} \bar{J}^2 \quad (2 \cdot 3 \cdot 46)$$

となる、これより

$$\bar{\nu} = \nu + \frac{3K}{8\pi\nu^2} \bar{J} \quad (2 \cdot 3 \cdot 47)$$

となり、tune spread の最低次の式が得られる。

(2・3・45) を (2・3・41) に代入して微分方程式を解けば

$$\begin{aligned}M(\theta, \varphi) &= -\frac{3}{8} \frac{KJ^2}{\nu^2} T(\theta) \\ &\quad - \frac{KJ^2}{16\nu^2} \left\{ \frac{e^{4i\varphi - \nu\theta}}{e^{8\pi i\nu} - 1} P(4\nu, \theta) \right. \\ &\quad + \frac{e^{-4i\varphi - \nu\theta}}{e^{-8\pi i\nu} - 1} P(-4\nu, \theta) - \frac{4e^{2i\varphi - \nu\theta}}{e^{4\pi i\nu} - 1} P(2\nu, \theta) \\ &\quad \left. - \frac{4e^{-2i\varphi - \nu\theta}}{e^{-4\pi i\nu} - 1} P(-2\nu, \theta) \right\} \quad (2 \cdot 3 \cdot 48)\end{aligned}$$

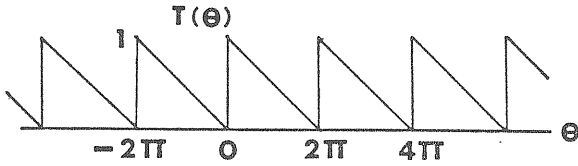


図 2-10 関数 $T(\theta)$

を得る*)。ここで

$$T(\theta) = \int_{-0}^{\theta} (\delta_P(\theta') - \frac{1}{2\pi}) d\theta' \quad (2.3.49)$$

であり、(図 2-10 参照), 又

$$\begin{aligned} P(n\nu, \theta) &= \int_{\theta}^{\theta+2\pi} d\theta' e^{in\nu\theta'} \delta_P(\theta') \\ &= \sum_m e^{2\pi im\nu} (e^{2\pi in\nu} - 1) \Theta(\theta - 2m\pi) \\ &= e^{2\pi i(m+1)\nu} \text{ for } 2m\pi < \theta < 2(m+1)\pi \quad (2.3.50) \end{aligned}$$

*) 計算の詳細は Appendix 2 を見よ

である。 $P(n\nu, \theta)$ は

$$\frac{dP(n\nu, \theta)}{d\theta} = e^{in\nu\theta} (e^{2\pi in\nu} - 1) \delta_P(\theta) \quad (2.3.51)$$

を満たす。(2.3.48) を (2.3.36) に代入すれば (φ, J) と $(\bar{\varphi}, \bar{J})$ の関係が得られるが, tracking と比較する為に

$$\theta = 2m\pi + 0 \quad (m \text{ は整数}) \quad (2.3.52)$$

ととることとする。この場合

$$T(\theta) = 1 \quad (2.3.53)$$

$$P(n\nu, \theta) = e^{2\pi i(m+1)\nu} \quad (2.3.54)$$

なので

$$\begin{aligned} M(\theta=2m\pi+0, \varphi) &= -\frac{3}{8} \frac{KJ^2}{\nu^2} - \frac{KJ^2}{16\nu^2} \left\{ \frac{\sin 4(\varphi+\pi\nu)}{\sin 4\pi\nu} \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{\sin 2(\varphi+\pi\nu)}{\sin 2\pi\nu} \right\} \quad (2.3.55) \end{aligned}$$

となり M は m (turn 数) によらない。

(2.3.55) を (2.3.36) に入れば

$$J = \bar{J} - \frac{K\bar{J}^2}{4\nu^2} \left\{ \frac{\cos 4(\bar{\varphi}+\pi\nu)}{\sin 4\pi\nu} - \frac{2 \cos 4(\bar{\varphi}+\pi\nu)}{\sin 2\pi\nu} \right\} \quad (2.3.56)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\varphi} + \frac{3K\bar{J}}{4\nu^2} \\ &+ \frac{K\bar{J}}{8\nu^2} \left\{ \frac{\sin 4(\bar{\varphi}+\pi\nu)}{\sin 4\pi\nu} - \frac{4 \cos 2(\bar{\varphi}+\pi\nu)}{\sin 2\pi\nu} \right\} \quad (2.3.57) \end{aligned}$$

が得られる。1 次の摂動では

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \text{const}, \\ \bar{\varphi} &= \bar{\nu}\theta + \bar{\varphi}_0 = 2m\pi\bar{\nu} + \bar{\varphi}_0 \quad (2.3.58) \end{aligned}$$

(ここで $\bar{\nu}$ は (2.3.47) で定義されたもの, $\bar{\varphi}_0$ は任意定数である) なので, $\bar{\varphi}_0$, \bar{J} と turn 数 m を決めれば (φ, J) が決まり, (2.3.29) より (X, P) が決まる。 $\bar{\varphi}_0$ と \bar{J} を fix して m を変えていき, (X, P) を plot すれば, Hamiltonian \bar{H} , (2.3.46) の系に対して tracking をするのと同じことになる。この時, (X, P) 平面上には

$$\bar{J}(X, P) = \text{const} \quad (2.3.59)$$

で決まる 1 つの (閉) 曲線が描かれるはずである*)。

*) 本来 $\bar{J} = \bar{J}(X, P, \theta)$ である (time dependent な正準変換で結びついているから)。しかし, \bar{J} は θ について periodic なので $\theta = 2m\pi + 0$ の所では $\bar{J} = \bar{J}(X, P)$ となる。

[tracking との比較]

図 2-11 に, いくつかの初期値に対して, tracking をしたものと, 摂動論で求めた閉曲線を並べた。パラメータはすべて $\nu=0.23$, $K=0.0529$ を用いている。振巾の小さい所 (即ち摂動の弱い所) では, 摂動論は tracking をよく再現するが, 図の (b) が限界で, (c), (d) では, 全く合わない。(c) では運動の軌跡が, それまでと topological に異なっている。正準摂動論は, 無限小正準変換であるから, この様に topological な変化には対応できない。 $K=0$ の場合に tracking をすれば, 原点のまわりの同心円が得られる (図 2-1 参照)。この同心円が多少変形したものが図 2-11 の (a) と (b) である。(c) で突然変形が大きくなったのは resonance の効果である。

ν は 0.23 であり, 有理数とは云え 23/100 であるか

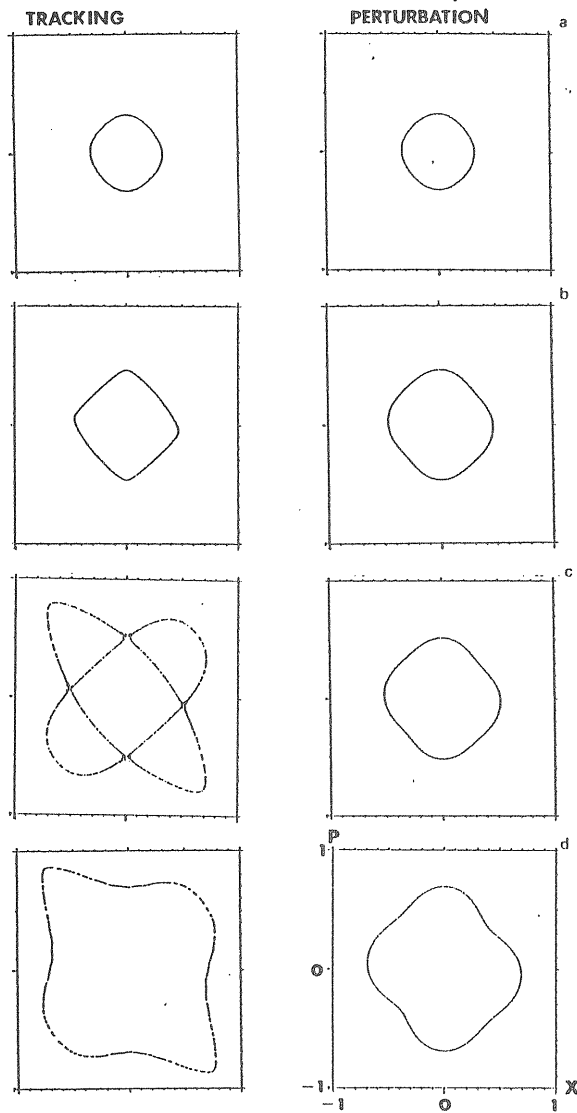


図 2-11 摂動論の予測 (右側) と tracking (左側) の比較。

- (a) $(X_0, P_0) = (10, 0.3243211)$, $J = 0.05$,
 - (b) $(X_0, P_0) = (0, 0.4698265)$, $J = 0.1$
 - (c) $(X_0, P_0) = (0, 0.5194816)$, $J = 0.12$
 - (d) $(X_0, P_0) = (0, 0.6949445)$, $J = 0.2$
- なお $\nu = 0.23$, $K = 0.0529$ である。

ら、殆んど無理数に近い ($K = 0$ の時得られる同心円は、実は100個の点からなる → 図 2-1-b 参照)。 $K \neq 0$ の時、振巾の大きい所では非線型効果による tune spread で、 $\bar{\nu}$ は \bar{J} によって変化するが、 $K > 0$ なら (2.3.47) より大きい方に shift する。そこで、ある \bar{J} の所で $\bar{\nu} = 1/4$ となることができる。今の場合 ring の 1ヶ所に異物があるので、本当に resonate しているのである。(と解釈できる)。 resonance の問題は重要なので、この後で又議論する。

図 2-11-d では、tracking のふるまいは、再び

同心円と (topological に) 同じになるが、もはや微小変形とは云えず、やはり摂動論では対応できない。

[resonance 近似]

$\bar{\nu} = 1/4$ の resonance が、どのような起こり方をするか、理論的に調べてみよう。(2.3.27) と (2.3.28) より

$$H = \nu J$$

$$+ \frac{KJ^2}{32\pi\nu^2} (6 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} - 4e^{2i\varphi} - 4e^{-2i\varphi}) \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{ip\theta} \quad (2.3.60)$$

である。ここで periodic δ function の Fourier 級数展開 (公式集 1) を使った。又、 $\sin^4 \varphi$ を $e^{i\varphi}$ を用いて書き直した。(2.3.60) は

$$H = \nu J$$

$$+ \frac{KJ^2}{32\pi\nu^2} \sum_p \{ 6e^{ip\theta} + e^{i(p-4\nu)\theta} + e^{i(p-4\nu)\theta} - 4e^{i(p-2\nu)\theta} - 4e^{-i(p-2\nu)\theta} \} \quad (2.3.61)$$

と書けるが、今 $\nu = 0.23 \approx 1/4$ であるので、 $p = \pm 1$ と 0 の項以外は、 θ の変化につれて速く振動する。速く振動する部分は平均して 0 になると考えて無視すると (2.3.61) は

$$H = \nu J + \frac{KJ^2}{16\pi\nu^2} \{ 3 + \cos(4\nu - 1)\theta \} \quad (2.3.62)$$

と書ける。

変換

$$\varphi \rightarrow \psi = \varphi - \frac{\theta}{4}$$

$$J \rightarrow J' = J \quad (2.3.63)$$

$$\theta \rightarrow \theta' = \theta$$

$$H \rightarrow H' = H - \frac{1}{4}J$$

は、 $[\psi, J'] = 1$, $[\psi, H'] = 0$, $[J', H'] = 0$, を満たすので正準変換である。(この Poisson bracket は自由度 2 の系のものである → (2.3.18) を見よ)。

(問 2-オ) (2.3.63) が正準変換であることを示せ。

この正準変換によって、新たに

$$H' = \Delta J + aJ^2(\cos 4\psi + 3)$$

$$\Delta = \nu - \frac{1}{4} = -0.02 \quad (2.3.64)$$

$$a = \frac{K}{16\pi\nu^2} = 0.01989$$

が得られた。(2.3.64)には θ は現われないことに注意しよう。(2.3.64)は自由度1の autonomous 系である。この系は解析的に解けて、phase space の様子は大体図2-12の様になる。図中に楕円型不動点、双曲型不動点が見える。双曲型不動点を結ぶ separatrix もあり、基本的構造は図2-6-a (1周平均近似)と同じである。

これ等の fixed point の位置は(2.3.64)から

$$\frac{\partial H'}{\partial J'} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial \psi} = 0 \quad (2.3.65)$$

により求められて

$$\psi = \frac{n}{4}\pi, \quad J' = \frac{-\Delta}{2a\{3 + (-1)^n\}} \quad (2.3.66)$$

である。ここで n は0から7の整数であり

$$\begin{aligned} n \text{ が偶数} &\rightarrow \text{双曲型} \\ n \text{ が奇数} &\rightarrow \text{楕円型} \end{aligned} \quad (2.3.67)$$

である。図2-11-cには双曲型不動点と separatrix だけが見えており、楕円型不動点は separatrix に囲まれた領域の1点に対応する。初期条件を変えて tracking すると図2-13の様な軌道も見える。

(2.3.63)より、 $\theta = 2n\pi$ では $\psi = \varphi$, $J' = J$ であり、 $2J = X^2 + P^2$ であることを考えれば図2-11-c, 図2-13と図2-12の対応関係は明らかであろう。

ここで用いた近似は resonance 近似*と呼ばれ、

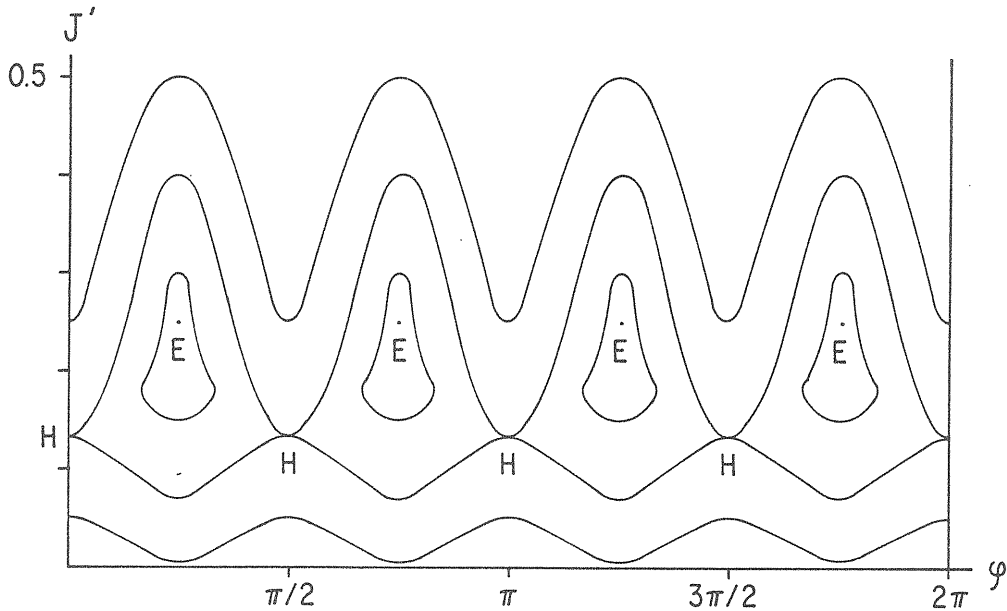


図2-12 resonance 近似での phase space。(ψ, J') 平面で書いてある。 ψ, J' は極座標の様なものだから、図2-11-cの状況を大体表わしている。

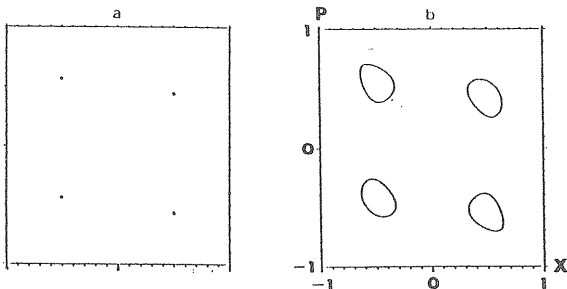


図2-13 (a), H (2.1.11)の楕円型不動点と(b)その付近の運動

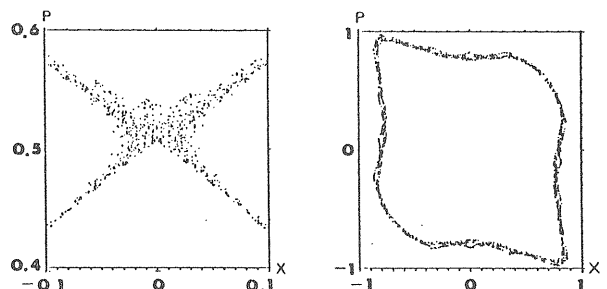


図2-14 (a) 図2-11-cの双曲型不動点付近を10倍に拡大したもの、(b)図2-11-dの更に外側、 $(X_0, P_0) = (0, 0.78)$

resonance の性質を調べるのに便利な方法としてよく用いられる。

*) 正確には isolated resonance 近似である。

(問 2-7) 図 2-11-c, 図 2-12-a から不動点の位置を読みとり, (2・3・66) が大体正しい位置を示していることを確かめよ。

[積分可能系と積分不能系]

今考えている自由度 1 の time-dependent Hamiltonian の系では, 保存する力学量 $f(X, P)$ があれば, 系は解析的に解けることを前に示した。一般に自由度 N の系で, N 個の保存量 $f_i(X, P)$ $i = 1, 2, \dots, N$ があれば, やはりその系は解析的に解ける*)。これ等の保存量は運動の積分とも呼ばれ, N 個の運動の積分がある系を積分可能系 (Integrable system) と呼んでいる。積分可能系では, 求積法その他の解法によって, 系の運動を完全に予測することができ, Poincaré map は 1 つの曲線を形作る。

*) これら N 個の保存量は $[f_i, f_j] = 0$ であり, かつ, 独立でなければならぬ。独立とは $2N$ 次元空間の中で $f_i = \text{const}$ が N 次元超平面を張ることである。

公式 3 に積分可能系の特徴をまとめた。

一方, 積分不能系とは積分可能系ではないものであり, 公式 3 の 6 つの項目をすべて否定形にすれば特徴がつかめよう。しかし, 積分不能系を一般的に特徴づける「肯定的な」性質は知られていない。

われわれが今考えている (2・1・22) の系は,

積分可能系であろうか?。図 2-11 を見る限り積分可能系の様にも見える。しかし, 図 2-14 の tracking の結果をみよ!。(a) は図 2-11-c の双曲型不動点の近くを拡大したものである。(b) は図 2-11 より少し外側から出発した tracking の結果である。(a) も (b) もきれいな曲線に乗っている様には見えない。

(もっとも, もっと長時間の tracking によって, その様な曲線が現われるかもしれないが, それは誰にも前もっては判らないことである)。

図 2-11 の左側の各軌道も, 拡大して見ればやはり同じ様なことになっているはずである。しかし例えば図 2-14-a の様な領域は phase space 上のある

限られた領域であることも殆ど確かであり, その意味では, ある程度の秩序が残っており, われわれの系はある程度, 積分可能系の性質を残していることになる。こういう系は near-integrable system と呼ばれ, いろいろと研究されている。図 2-14-a のような領域は, でたらめに点を打ったかのように見えるので stochastic region と呼ばれている。

加速器に関係ある力学系は, たいていはこの near-integrable system である。

[摂動論とは何か]

摂動論とは, 結局の所, 積分不能系を, それに近い積分可能系で近似するものである。*)それ故, 一般に必ずずりこぼしが生じる。この様なとりこぼしが無いのなら, もともと積分可能系だったのである。

この節では, 最低次の摂動しか行わなかったので,

図 2-11 の様なことになったが, さらに高次の摂動を行ない, また, 永年摂動法 (secular perturbation) と呼ばれる resonance を扱う方法を用いれば, 系のふるまいは, かなりよく近似できる。

それでは摂動を ∞ 次までやれば, とりこぼしはなくなるかと云えば, そうはいかない。摂動展開は漸近展開であり, やりすぎるとまずいという観測がある。摂動論には限界がある。また実際問題としても高次の摂動計算は大変な仕事であり, academic な興味しかない。

摂動論は大変強力な道具ではあるが, tracking に替わることはできない。

*) 積分可能系でも複雑な系の場合には摂動論が使われることもあるが, それは別の問題である

[参考文献について]

この節で用いた解法のテクニックはすべて文献 2-1 に出ている。日本語で書かれたものは, 文献 2-2, 2-3, の翻訳があるが, 2-2 は難かしすぎ, 2-3 は不十分である。

[2.3 のまとめ]

摂動論は積分不能系を近似的積分可能系におきかえるものであり, 具体的には, 正準変換によって Hamiltonian を $H = \bar{H}(\bar{J}) + \epsilon^n f(\bar{J}, \bar{\varphi}, \theta)$ に書きかえる方法である。振巾が小さい所では, 摂動論は

公式 3 積分可能系の特徴

N自由度の autonomous な力学系 (N-1 自由度の time dependent 系も含む) では

1. N個の独立な保存量を持つ (Hamiltonian 自身も含む)
2. Hamiltonian がN個の Action variable で書ける。
3. Poincaré map がきれいな曲線にのる。
4. 運動方程式が解析的に解ける。
5. 系のふるまいは秩序正しい
6. 様々な近似解法を安心して使える (よって tracking の必要はない)

なおN-1 自由度の Time-dependent 系では 2 は 2' Hamiltonian は N-1 個の Action variable で書ける, とする。

tracking をよく再現するが、振巾が大きくなって、stochastic region に近づくと全くだめになる。

2.4 Nonlinear transfer matrix と Symplecticity

Hamilton系には、非常に一般的な性質—symplecticity—があり、これまで述べてきたLiouvilleの定理、正準変換などもその現われである。力学系のいかなる近似も symplecticity を無視してはならない。逆に、この symplecticity を利用した近似法が開発されており将来 tracking の主流になる可能性もある。この節では、Hamilton 系の symplectic 構造を学び、これを利用した tracking 法について調べる。

[transfer matrix]

Normal cell のみの加速器では ring 1 周分の X と P の変化は 2.1 で見た様に

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

と transfer matrix で表現できた。 $X = Z_1$, $P = Z_2$ と書けば (2.4.1) は

$$Z_i' = \sum_{j=1}^2 M_{ij}^{(1)} Z_j \quad (2.4.2)$$

と書ける。ここで $M_{ij}^{(1)}$ は Z によらない matrix 成分で、 $M_{11}^{(1)} = M_{22}^{(1)} = \cos\mu$, $M_{12}^{(1)} = -M_{21}^{(1)} = \sin\mu$ である。

8 極磁石があると、1 turn あたりの Z の変化は (2.1.21) より

$$X' = \cos\mu X + \sin\mu P$$

$$P' = -\sin\mu X + \cos\mu P - \frac{K}{\nu^2} (\cos\mu X + \sin\mu P)^3 \quad (2.4.3)$$

となり、もはや transfer matrix では表現できない。しかし、(2.4.2) に似せて

$$\begin{aligned} Z_i' &= \sum_j M_{ij}^{(1)} Z_j + \sum_{j \neq k} M_{ij}^{(2)} Z_j Z_k \\ &+ \sum_{j \neq k \neq l} M_{ij}^{(3)} Z_j Z_k Z_l \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

と書くことはできる。ここで $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ の各成分は Z によらない定数である*)。 $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ は matrix ではない (足が3本, 4本だから) が、感じが似ているので例えば $M^{(2)}$ を second order transfer matrix 等と呼ぶ。

*) 各成分を具体的に示せば、 $M_{11}^{(1)} = M_{22}^{(1)} = \cos\mu$, $M_{12}^{(1)} = -M_{21}^{(1)} = \sin\mu$ $M_{ij}^{(2)}$ はすべて 0

$$M_{ijk1}^{(3)} = 0$$

$$M_{2111}^{(3)} = -\frac{K}{\nu^2} \cos^3\mu$$

$$M_{2112}^{(3)} = -3 \frac{K}{\nu^2} \cos^2\mu \sin\mu$$

$$M_{2122}^{(3)} = -3 \frac{K}{\nu^2} \cos\mu \sin^2\mu$$

$$M_{2222}^{(3)} = -\frac{K}{\nu^2} \sin^3\mu$$

1 turn 分の transfer matrix が $M^{(1)}$ だけならば、2 turn 分の transfer matrix は $(M^{(1)})^2$ であり

$$Z_i'' = \sum_j M_{ij}^{(1)} M_{jk}^{(1)} Z_k = \sum_k (M^{(1)})^2_{ik} Z_k \quad (2.4.5)$$

と簡単に求まる (行列のかけ算)。しかし、(2.4.4) を 2 turn 分やれば

$$\begin{aligned} Z_i'' &= \sum_j \tilde{M}_{ij}^{(1)} Z_j + \sum_{j \neq k} \tilde{M}_{ijk}^{(2)} Z_j Z_k + \sum_{j \neq k \neq l} \tilde{M}_{ijkl}^{(3)} Z_j Z_k Z_l \\ &+ \sum_{j \neq k \neq l \neq m} \tilde{M}_{ijklm}^{(4)} Z_j Z_k Z_l Z_m + \dots \\ &+ \sum_{j \neq k \neq l \neq m \neq n \neq o \neq p \neq q \neq r} \tilde{M}_{ijklmnopqr}^{(9)} \\ &Z_j Z_k Z_l Z_m Z_n Z_o Z_p Z_q Z_r \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

ということになる。これでは実用的でないというので、例えば $\tilde{M}^{(6)}$ までで止めたらどうなるか?。2.1 節で述べた Liouville の定理が課す条件を破ってしまう。つまり

$$\frac{\partial(Z_1'', Z_2'')}{\partial(Z_1, Z_2)} \neq 1 \quad (2.4.7)$$

となる。

もし、粒子が ring を 2 回しかまわらないのであればこの近似もそう悪くはないが、円形加速器には使えない。

ring に nonlinear element があると, transfer matrix というのは便利な道具ではなくなってしまふ。しかし, これに替わることができる方法が Lie algebra の方法として知られている。

[Lie operator]

2.3 節で Poisson bracket を定義した。Poisson bracket を用いると Hamilton eq. は

$$\frac{dX}{d\theta} = -[H, X], \quad \frac{dP}{d\theta} = -[H, P] \quad (2.4.8)$$

と書くことができた。 $\theta = 0$ で $X = X(0)$, $P = P(0)$ にあった粒子は (2.4.8) に従って変化して行き $X = X(\theta)$, $P = P(\theta)$ になる。 $X(\theta)$ を θ について展開すれば

$$X(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} X^{(n)}(0) \quad (2.4.9)$$

となる。一方 (2.4.8) より

$$X'(\theta) = -[H, X(\theta)] \quad (2.4.10)$$

$$X''(\theta) = [H, [H, X(\theta)]] \quad (2.4.11)$$

$$X^{(n)}(\theta) = (-1)^n \underbrace{[H[H[H \dots [H, X(\theta)]]] \dots]}_{n \text{ 個}} \quad (2.4.12)$$

である。(2.4.12) は見苦しいので

$$\hat{H}X(\theta) = [H, X(\theta)] \quad (2.4.13)$$

という記号を用いて

$$X^{(n)}(\theta) = (-\hat{H})^n X(\theta) \quad (2.4.14)$$

と書こう。(2.4.14) を (2.4.9) に入れてやれば

$$X(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\theta)^n}{n!} \hat{H}^n X(0) \quad (2.4.15)$$

これは形式的に

$$X(\theta) = e^{-\theta \hat{H}} X(0) \quad (2.4.16)$$

と書ける。ここで

$$\hat{H}^0 = 1 \quad (2.4.17)$$

と約束した。(2.4.16) を θ で微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{dX(\theta)}{d\theta} &= -\hat{H} e^{-\theta \hat{H}} X(0) \\ &= -\hat{H} X(\theta) \\ &= -[H, X(\theta)] \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

となり, Hamilton eq. を満たすことが判る, 全く同様に

$$P(\theta) = e^{-\theta \hat{H}} P(0) \quad (2.4.19)$$

を示すこともできる。

(問 2-カ) (2.4.19) をしめせ,

結局

$$\frac{dZ}{d\theta} = -[H, Z] \iff Z(\theta) = e^{-\theta \hat{H}} Z(0)$$

であることが判った。*)

本当かどうか, 実例を 1 つ見てみよう。 $H = H_0 = \nu/2 (P^2 + X^2)$ の場合

$$\begin{aligned} \hat{H}X &= \frac{\nu}{2} [P^2 + X^2, X] = \frac{\nu}{2} [P^2, X] \\ &= \nu P [P, X] = -\nu P \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

$$\hat{H}P = \frac{\nu}{2} [X^2, P] = \nu X \quad (2.4.21)$$

を得る。同様にして

$$\hat{H}^2 X = \hat{H}(\hat{H}X) = -\nu \hat{H}P = -\nu^2 X \quad (2.4.22)$$

$$\hat{H}^2 P = \hat{H}(\hat{H}P) = \nu \hat{H}X = -\nu^2 P \quad (2.4.23)$$

以後何べんも繰り返している内に

$$\begin{aligned} \hat{H}^{4n} X &= \nu^{4n} X \\ \hat{H}^{4n+1} X &= -\nu^{4n+1} P \\ \hat{H}^{4n+2} X &= -\nu^{4n+2} X \\ \hat{H}^{4n+3} X &= \nu^{4n+3} P \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

であることに気がつく。これより

*) Z は X or P を示す。

$$\begin{aligned}
e^{-\theta \hat{H}} X &= X - \theta \hat{H} X + \frac{1}{2} \theta^2 \hat{H}^2 X + \dots \\
&= \left\{ 1 - \frac{(\nu\theta)^2}{2} + \frac{(\nu\theta)^4}{4!} \dots \right\} X \\
&+ \left\{ \nu\theta - \frac{(\nu\theta)^3}{3!} + \dots \right\} P \\
&= \cos \nu\theta X + \sin \nu\theta P \quad (2.4.25)
\end{aligned}$$

であることが判った。これが Hamilton eq. の解であることは (2.1.4) から明らかであろう。

(問2-ヨ) $e^{-\theta \hat{H}} P$ を求めよ

(2.4.13) の様に $\hat{H}X = [H, X]$ とした時 H を Lie operator, (2.4.16) の様に $e^{-\theta \hat{H}}$ となった時, これを Lie 変換と呼ぶ。Hamilton eq. を解くことと, Lie 変換を計算することは同等である。

[time-dependent Hamiltonian と Lie 変換]

これまで H は θ に依らないとしてきた。われわれの例 (2.1.22), 更に一般の加速器では H が θ に依る。しかし, H は θ に依ったとしても piecewise θ dependent であるとすれば十分である。つまり

$$H(X, P, \theta) = \begin{cases} H_1(X, P), & 0 < \theta < \theta_1 \\ H_2(X, P), & \theta_1 < \theta < \theta_2 \\ \vdots \\ H_n(X, P), & \theta_{n-1} < \theta < 2\pi \end{cases} \quad (2.4.26)$$

と書ける場合である。この時 Hamilton eq.

$$\frac{dZ}{d\theta} = -\hat{H}Z \quad (2.4.27)$$

は $\theta_{k-1} < \theta < \theta_k$ の範囲でなら, θ -independent として積分できるので

$$\begin{aligned}
Z(2\pi) &= e^{-i2\pi - \theta_{n-1} \hat{H}_n} Z(\theta_{n-1}) \\
Z(\theta_{n-1}) &= e^{-i\theta_{n-1} - \theta_{n-2} \hat{H}_n} Z(\theta_{n-2}) \\
Z(\theta_1) &= e^{-i\theta_1 \hat{H}_1} Z(0) \quad (2.4.28)
\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
Z(2\pi) &= e^{-i2\pi - \theta_{n-1} \hat{H}_n} e^{-i\theta_{n-1} - \theta_{n-2} \hat{H}_n} \dots \\
&\dots e^{-i\theta_1 \hat{H}_1} Z(0) \quad (2.4.29)
\end{aligned}$$

である。ここで各 $\exp - (\theta_k - \theta_{k-1}) \hat{H}_k$ は決して transfer matrix ではない。例えば

$$H_k = X^3 \quad (2.4.30)$$

であれば θ_{k-1} を Δ とおいて

$$\begin{aligned}
X' &= e^{-\Delta \hat{H}_k} X = X \\
P' &= e^{-\Delta \hat{H}_k} P = P - \Delta [X^3, P] \\
&+ \frac{\Delta^2}{2} [X^3, [X^3, P]] + \dots \\
&= P - 3\Delta X^2 \quad (2.4.31)
\end{aligned}$$

であり $(X, P) \rightarrow (X', P')$ の変換は second order transfer matrix でしか書けない。(2.4.4) を見よ。

しかし (2.4.29) は, あたかも transfer matrix を次々にかけて行く linear optics の場合によく似ているので各

$$e^{-\Delta \hat{H}_k}$$

を nonlinear transfer matrix 呼ぶことにする*。

*) H が piecewise でなく θ dependent の場合は Appendix 3 に出ている。

[Lie 変換 と symplectic 変換]

Nonlinear transfer matrix (= Lie 変換) の積み重ねによって (X, P) が θ と共にどう変化するかを記述することができる。Lie 変換の最も重要な性質は

$Lie \text{変換} \leftrightarrow \text{symplectic 変換}$

ということである。1つの Lie 変換を $e^{\hat{H}}$ と書く。 H は X と P の任意関数である。

$$\begin{aligned}
X' &= e^{\hat{H}} X \\
P' &= e^{\hat{H}} P \quad (2.4.32)
\end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned}
[X', P'] &= [e^{\hat{H}} X, e^{\hat{H}} P] = e^{\hat{H}} [X, P] \\
&= e^{\hat{H}} 1 = 1 \quad (2.4.33)
\end{aligned}$$

であるので*) $(X, P) \rightarrow (X', P')$ は symplectic 変換である。という事は

*) これは直観的に明らかだが Lie 変換としての証明は Appendix 4 を見よ

Lie変換 ↔ 正準変換

ということでもある。nonlinear transfer matrix による時間発展は正準変換の一種である。

Lie operator と Lie 変換について注意すべき点を2つほどあげておこう。

$$1) \hat{H}_1 \hat{H}_2 \neq \hat{H}_2 \hat{H}_1 \quad (2.4.34)$$

例えば $H_1 = X$ $H_2 = P^2$ の場合

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 \hat{H}_2 X &= [X[P^2, X]] = [X, -2P] = -2 \\ \hat{H}_2 \hat{H}_1 X &= [P^2[X, X]] = [P^2, 0] = 0 \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

であって明らかに異なる。

$$2) e^{\hat{H}_1} e^{\hat{H}_2} \neq e^{\hat{H}_1 + \hat{H}_2} \quad (2.4.36)$$

両辺を展開すると

$$\begin{aligned} e^{\hat{H}_1} e^{\hat{H}_2} &= \left(1 + \hat{H}_1 + \frac{1}{2} \hat{H}_1^2 + \dots\right) \left(1 + \hat{H}_2 + \frac{1}{2} \hat{H}_2^2 + \dots\right) \\ &= 1 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_1 \hat{H}_2 + \frac{1}{2} \hat{H}_1^2 + \frac{1}{2} \hat{H}_2^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

$$\begin{aligned} e^{\hat{H}_1 + \hat{H}_2} &= 1 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \frac{1}{2} (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) + \dots \\ &= 1 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \frac{1}{2} (\hat{H}_1^2 + \hat{H}_1 \hat{H}_2 + \hat{H}_2 \hat{H}_1 + \hat{H}_2^2) + \dots \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

もし $\hat{H}_1 \hat{H}_2 = \hat{H}_2 \hat{H}_1$ ならば (2.4.36) の等号が成り立つが一般には成り立たない。

なお

$$(e^{\hat{H}})^n = e^{n\hat{H}} \quad (n \text{ は整数}) \quad (2.4.39)$$

が成り立つことは、ほぼ目明であろう。

[nonlinear transfer matrix と tracking]

Hamiltonian (2.1.22) に戻ろう。この Hamiltonian も piecewise θ -dependent であり、1 turn あたり

$$Z(2\pi) = e^{i_1} e^{i_2} Z(0) \quad (2.4.40)$$

$$f_4 = \alpha X^4 \quad (2.4.41)$$

$$f_2 = \beta (P^2 + X^2) \quad (2.4.42)$$

$$\alpha = -\frac{K}{4\nu^2} \quad (2.4.43)$$

$$\beta = -2\pi \frac{\nu}{2} \quad (2.4.44)$$

と書ける。*) ここで $\delta_p(\theta)$ は $0 - \varepsilon$ と $0 + \varepsilon$ という区間で constant $1/2\varepsilon$ であるとして (2.4.29) を用いた。nonlinear transfer matrix $e^{i_1} e^{i_2}$ によって (X, P) がどう変わるかは (2.4.3) で既に調べた。

*) f_4 は 4 次の多項式であり、 f_2 は 2 次の多項式である。

これでは少し単純すぎるので、われわれの ring を図 2-15 の様なものに拡大しよう。要するにこれまでの 2 turn で 1 turn と数えることになる。すると 1 turn あたりの nonlinear transfer matrix は

$$T = e^{i_1} e^{i_2} e^{i_1} e^{i_2} \quad (2.4.45)$$

である。これによる (X, P) の変換は (2.4.6) の様に 9-th order transfer matrix となる*)。

(2.4.45) を、そのまま計算していくのが tracking である (ちょうど、(2.4.28) の様な具合にやることになる)。この方法は nonlinear element が増えると極端に時間がかかる。そこで (2.4.45) を

$$T' = e^{i_1} e^{i_2} \quad (2.4.46)$$

の様な形に近似的に変形することを考える。ここで g_m は X と P の m 次の多項式である。

まず式を整理しておこう。

$$\begin{aligned} e^{i_2(X, P)} X &= X \cos \mu + P \sin \mu \\ e^{i_2(X, P)} P &= -X \sin \mu + P \cos \mu \end{aligned} \quad (2.4.47)$$

$$\begin{aligned} e^{i_1(X, P)} X &= X \\ e^{i_1(X, P)} P &= P + 4\alpha X^3 \end{aligned} \quad (2.4.48)$$

である。これ等は Lie 変換の定義から導くことができるが、そもそも (2.1.21), (2.1.22) と同じ式である。

$$\begin{aligned} \text{さて} \quad T &= e^{i_1} e^{i_2} e^{i_1} e^{i_2} \\ &= e^{i_1} e^{i_2} e^{i_1} e^{-i_2} e^{i_2} \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

*) 実際の ring では、1 turn の間に 8 極磁石の様な nonlinear element が数 100 ~ 数 1000 (数え方による) あり、1 turn あたり $e^{i_1} e^{i_2} e^{i_1} e^{i_2} e^{i_1} e^{i_2} \dots e^{i_1} e^{i_2}$ となっている。

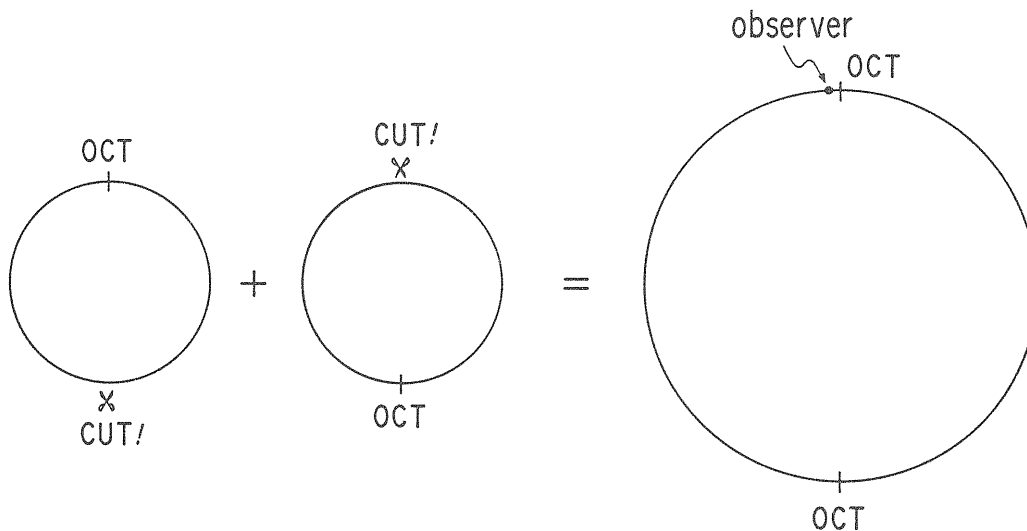


図 2-15 これまでの 2 turn を新たに 1 turn とするには 2 つの ring をくっつけばよい。

であるが、 $e^{\hat{f}_1} e^{\hat{f}_2} e^{-\hat{f}_2}$ は 1 つの Lie 変換にまとめることができる。実際

$$e^{\hat{f}_1(X, P)} = e^{\hat{f}_2(X, P)} e^{\hat{f}_1(X, P)} e^{-\hat{f}_2(X, P)} \quad (2.4.50)$$

と書くと F_4 は

$$F_4(X, P) = f_4(X \cos \mu + P \sin \mu, -X \sin \mu + P \cos \mu) \quad (2.4.51)$$

で与えられる。確かめてみよう。まず (2.4.48) より

$$e^{\hat{f}_1}(X \cos \mu + P \sin \mu) = X \cos \mu + P \sin \mu \quad (2.4.52)$$

$$\begin{aligned} e^{\hat{f}_1}(-X \sin \mu + P \cos \mu) \\ = -X \sin \mu + P \cos \mu + 4 \alpha (X \cos \mu + P \sin \mu)^3 \end{aligned} \quad (2.4.53)$$

となる。一方、 $X \cos \mu + P \sin \mu$ と $-X \sin \mu + P \cos \mu$ に (2.4.50) の右辺を続々に作用させれば

	$X \cos \mu + P \sin \mu$	$-X \sin \mu + P \cos \mu$
$e^{-\hat{f}_2}$	↓	↓
	X	P
$e^{\hat{f}_1}$	↓	↓
	X	$P + 4 \alpha X^3$
$e^{\hat{f}_2}$	↓	↓
	$X \cos \mu + P \sin \mu$	$-X \sin \mu + P \cos \mu + 4 \alpha (X \cos \mu + P \sin \mu)^3$

となる。つまり (2.4.52), (2.4.53) と同じ変換になるのである。 F_4 も 4 次の多項式である点に注意せよ。一般に f と g を任意の関数として

$$e^{\hat{f}} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{P} \end{pmatrix} \quad (2.4.54)$$

であれば

$$e^{\hat{f}} e^{\hat{g}} e^{-\hat{f}} = e^{\hat{G}} \quad (2.4.55)$$

$$G(X, P) = g(\tilde{X}, \tilde{P}) \quad (2.4.56)$$

であることを示すことができる*。

*) 上の例からはほぼ明らかだが、証明は Appendix 5 にある。

結局

$$T = e^{\hat{f}_1} e^{\hat{f}_2} e^{2\hat{f}_1} \quad (2.4.57)$$

となった。さて、(2.4.37) を見ると

$$\begin{aligned} e^{\hat{f}_1} e^{\hat{f}_2} &= 1 + \hat{f}_4 + \hat{F}_4 + \hat{f}_4 \hat{f}_4 + \frac{1}{2} \hat{f}_4^2 + \frac{1}{2} \hat{F}_4^2 + \dots \\ &= 1 + \hat{f}_4 + \hat{F}_4 + \frac{1}{2} \hat{f}_4 \hat{f}_4 + \frac{1}{2} \hat{F}_4 \hat{f}_4 + \frac{1}{2} \hat{f}_4^2 + \frac{1}{2} \hat{F}_4^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} (\hat{f}_4 \hat{F}_4 - \hat{F}_4 \hat{f}_4) + \dots \\ &= e^{\hat{f}_4 + \hat{F}_4 + \hat{f}_4 \hat{f}_4 - \hat{F}_4 \hat{f}_4 / 2 + \dots} \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

であることが判る。ところが

$$\hat{f}_4 \hat{F}_4 - \hat{F}_4 \hat{f}_4 = \hat{h} \quad (2.4.59)$$

と書くと、 h は 6 次の多項式であることが次の様にしてわかる。

$$\hat{f}_4 \hat{F}_4 X = \hat{f}_4 [F_4, X] = [f_4, F_4, X]$$

$[F_4, X]$ は、Poisson bracket の定義により、両者 1 回ずつ微分するので 3 次の多項式である。同様に f_4 と 3 次の多項式の Poisson bracket は 5 次の多項式となる。

$$\hat{F}_4 \hat{f}_4 X$$

についても同様に、結局 $\hat{h}x = [h, x]$ が 5 次の多項式であり、これは h が 6 次の多項式であることを示している*)。(2・4・58) の「…」は更に高い次数になる。

さて、ここまでは何の近似もしていない。

われわれは nonlinear transfer matrix として常に 4 次までの項をとることにする (computer code MARYLIE=後述=も 4 次までである)。

*) この証明では h が「高々」6 次ということしか示せないが、一般に h は 6 次の多項式又は 0 である。

ということは (2・4・58) で

$$e^{\hat{f}_4} e^{\hat{f}_4} \simeq e^{\hat{g}_4} \quad (2\cdot4\cdot60)$$

$$\begin{aligned} g_4 &= f_4 + F_4 \\ &= \alpha X^4 + \alpha (X \cos \mu + P \sin \mu)^4 \end{aligned} \quad (2\cdot4\cdot61)$$

とし

$$T \simeq T' = e^{\hat{g}_4} e^{\hat{g}_4} \quad (2\cdot4\cdot62)$$

$$g_2 = 2 f_2 \quad (2\cdot4\cdot63)$$

と近似したことになる。この T' を用いて tracking する。

つまり

$$Z \rightarrow Z' = e^{\hat{g}_2} Z \quad (2\cdot4\cdot64)$$

$$Z' \rightarrow Z'' = e^{\hat{g}_2} Z' \quad (2\cdot4\cdot65)$$

で 1 turn の tracking とする。この方法を Lie-tracking と呼ぼう*)。nonlinear element の数がいくら多くても T' は (2・4・64) の様な簡単な形であり**)複雑な加速器になればなる程、普通の tracking (Lie-tracking と区別する為に、これを True-tracking と呼ぶことにする) は実行困難になり、Lie-tracking の merit が増大するであろうと期待できる。

T' は近似をしているとは云え、あくまで Lie 変換であり、常に symplectic である。この点、例えば (2・4・6) の展開を途中で切ったのとは訳が違う。また摂動論の様に積分可能系で近似するのではないから、積分不能系の特徴—例えば stochastic re-

gion の存在—をも許容する。(もっとも stochastic region をどの程度正確に再現するかは今の所よく判っていない)

*) Lie を lie と書いてはならない。

**) 一般的には

$$T' = e^{\hat{f}_1} e^{\hat{f}_1} e^{\hat{f}_2} \text{となる}$$

[Lie tracking の実際]

(2・4・62) を実際に計算機にのせるにはもう少し考えるべきことがある。(2・4・62) の \hat{g}_2 による部分は linear な部分で、 $g_2 = 2 f_2$ 、と (2・4・47) より

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\mu & \sin 2\mu \\ -\sin 2\mu & \cos 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \quad (2\cdot4\cdot66)$$

となる*)。 \hat{g}_4 による部分は若干複雑である。 $e^{\hat{g}_4} Z$ を計算することは

$$H = g_4$$

である Hamilton 系 (積分可能系である) を exact に解くか、

$$e^{\hat{g}_4} Z = Z + [g_4, Z] + \frac{1}{2} [g_4, [g_4, Z]] + \dots \quad (2\cdot4\cdot67)$$

の展開を十分高次までやるかのどちらかしかないであろう。前者の方法は複雑な数値積分を必要とし、あまり実用的とは云えないので、後者の方法—(2・4・67) の展開—を採用ことにしよう。

*) 一般に 2 次の多項式の Lie 変換は、linear matrix に帰着する。

(2・4・61) は少々複雑なので

$$e^{\hat{g}_4} = e^{-\hat{g}_2} e^{\hat{g}_2} e^{\hat{g}_4} e^{-\hat{g}_2} e^{\hat{g}_2} \quad (2\cdot4\cdot68)$$

$$W_2 = -\frac{1}{2} \cot \mu X^2 \quad (2\cdot4\cdot69)$$

と書きかえることにする。(2・4・50) と同じテクニックである。

$$e^{\hat{\nu}_2} X = X \quad (2.4.70)$$

$$e^{\hat{\nu}_2} P = P - X \cot \mu \quad (2.4.71)$$

であることはすぐに分かる。これより

$$e^{\hat{\nu}_2} e^{\hat{\mu}_1} e^{-\hat{\nu}_2} = e^{\hat{\mu}_1}, \quad (2.4.72)$$

$$\begin{aligned} H_4(X, P) &= g_4(X, P - X \cot \mu) \\ &= \alpha X^4 + \alpha (X \cos \mu + P \sin \mu - \sin \mu \cot \mu X)^4 \\ &= \alpha (X^4 + P^4) \end{aligned} \quad (2.4.73)$$

と書ける*)。

(問 2-タ) (2.4.70), (2.4.71) を確かめよ。

*) $e^{\hat{\nu}_2}$ は正準変換として機能している。

結局 $e^{\hat{\mu}_1} Z$ を次の様に分解したことになる。

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \xrightarrow{e^{\hat{\nu}_2}} \begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ P - \cot \mu X \end{pmatrix} \quad (2.4.74)$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} \xrightarrow{e^{\hat{\mu}_1}} \begin{pmatrix} X'' \\ P'' \end{pmatrix} = e^{\hat{\mu}_1} \begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} \quad (2.4.75)$$

$$\begin{pmatrix} X'' \\ P'' \end{pmatrix} \xrightarrow{e^{-\hat{\nu}_2}} \begin{pmatrix} X''' \\ P''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'' \\ P'' + \cot \mu X'' \end{pmatrix} \quad (2.4.76)$$

残された問題は (2.4.75) を級数展開で解くことである。

$$\begin{aligned} \hat{H}_4 X &= -4 \alpha P^3 \\ \hat{H}_4 P &= 4 \alpha X^3 \end{aligned} \quad (2.4.77)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_4^2 X &= -4 \alpha [H_4, P^3] = -12 \alpha P^2 [H_4, P] \\ &= -48 \alpha^2 P^2 X^3 \\ \hat{H}_4^3 X &= 4 \alpha [H_4, X^3] = 12 \alpha X^2 [H_4, X] \\ &= -48 \alpha^2 X^2 P^3 \end{aligned} \quad (2.4.78)$$

等々と続けていくと一般に

$$\begin{aligned} e^{\hat{\mu}_1} X &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2k+1} A(k, m) X^m P^{2k+1-m} \\ e^{\hat{\mu}_1} P &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2k+1} B(k, m) X^m P^{2k+1-m} \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

の様に展開できることがわかる。展開の初項はそれぞれ X と P なので

$$A(0, 0) = 0, \quad A(0, 1) = 1$$

$$B(0, 0) = 1, \quad B(0, 1) = 0 \quad (2.4.80)$$

であり, k 次の項に \hat{H}_4 を作用させることによって $k+1$ 次の項が決まる。こうして計算した (2.4.79) の展開の始めの方の項 ($k \leq 10$) を表 2-1 に示した。($\nu=0.23$, $K=0.0529$ を用いている)。

(2.4.79) の展開は必ずどこかで打ち切らなければならない。ここに問題がある。

[級数展開の打ち切り誤差]

(2.4.79) の級数展開は, もともと指数関数の Taylor 展開の様なものなので, 収束は早いだろうと筆者は予想していた。ところがそうでもない様である。

$$\begin{aligned} e^{\hat{\mu}_1} X &= X' \\ e^{\hat{\mu}_1} P &= P' \end{aligned} \quad (2.4.81)$$

の級数展開を $k=k_{\max}$ で打ち切った時

$$\frac{\partial (X', P')}{\partial (X, P)} \equiv J(k_{\max}; X, P) \quad (2.4.82)$$

を計算してみると, 大体図 2-16 の様になる。つまり, k_{\max} を fix した時 $J(k_{\max}; X, P)$ は原点付近でもちろん 1。X, P の増大と共に大体同心円状に変化するが, ある点で急に立ちあがる。立ちあがりが始まるのは k_{\max} が大きいほど遅い。しかし立ちあがり始めると k_{\max} が大きい程早く大きくなる。例えば

$J(k_{\max}=5; X=0.5, P=0.5)=1.02$
$J(k_{\max}=5; X=1, P=1)=11.3$
$J(k_{\max}=10; X=0.7, P=0.7)=1.08$
$J(k_{\max}=10; X=1, P=1)=0.27 \times 10^5$
$J(k_{\max}=30; X=0.8, P=0.8)=3.16$
$J(k_{\max}=30; X=1, P=1)=0.88 \times 10^{12}$

という具合である。($\nu=0.23$, $K=0.0529$)

これを見ると展開には収束半径がある様である。 $J(k_{\max}; X, P)$ の値が $1+10^{-n}$ ならば 10^n turn ぐらいまでしか tracking の有効性はないであろう。いずれにせよ k_{\max} は意外に大きくとらなければならない様で計算時間の短縮につながるかどうか微妙な所である。

[Lie-tracking と True-tracking の比較]

図 2-17 に 2 通りの tracking の結果を示した。Lie-tracking は $k_{\max}=30$ としてある。phase space のもう少し内側では両者の一致はもっと良い。

表 2-1 (2・4・79) の展開のはじめの数項

X(NEW)=

0.100D+01	*X**	1	*P**	0	KDEG=	0
0.969D+00	*X**	0	*P**	3	KDEG=	1
-0.145D+01	*X**	3	*P**	2	KDEG=	2
-0.141D+01	*X**	2	*P**	5	KDEG=	3
0.969D+00	*X**	6	*P**	1	KDEG=	3
-0.682D+00	*X**	1	*P**	8	KDEG=	4
0.317D+01	*X**	5	*P**	4	KDEG=	4
-0.242D+00	*X**	9	*P**	0	KDEG=	4
-0.132D+00	*X**	0	*P**	11	KDEG=	5
0.416D+01	*X**	4	*P**	7	KDEG=	5
-0.296D+01	*X**	8	*P**	3	KDEG=	5
0.293D+01	*X**	3	*P**	10	KDEG=	6
-0.867D+01	*X**	7	*P**	6	KDEG=	6
0.148D+01	*X**	11	*P**	2	KDEG=	6
0.122D+01	*X**	2	*P**	13	KDEG=	7
-0.126D+02	*X**	6	*P**	9	KDEG=	7
0.968D+01	*X**	10	*P**	5	KDEG=	7
-0.422D+00	*X**	14	*P**	1	KDEG=	7
0.295D+00	*X**	1	*P**	16	KDEG=	8
-0.111D+02	*X**	5	*P**	12	KDEG=	8
0.259D+02	*X**	9	*P**	8	KDEG=	8
-0.677D+01	*X**	13	*P**	4	KDEG=	8
0.528D-01	*X**	17	*P**	0	KDEG=	8
0.317D-01	*X**	0	*P**	19	KDEG=	9
-0.651D+01	*X**	4	*P**	15	KDEG=	9
0.399D+02	*X**	8	*P**	11	KDEG=	9
-0.325D+02	*X**	12	*P**	7	KDEG=	9
0.311D+01	*X**	16	*P**	3	KDEG=	9
-0.258D+01	*X**	3	*P**	18	KDEG=	10
0.407D+02	*X**	7	*P**	14	KDEG=	10
-0.817D+02	*X**	11	*P**	10	KDEG=	10
0.276D+02	*X**	15	*P**	6	KDEG=	10
-0.932D+00	*X**	19	*P**	2	KDEG=	10

P(NEW)=

0.100D+01	*X**	0	*P**	1	KDEG=	0
-0.100D+01	*X**	3	*P**	0	KDEG=	1
-0.145D+01	*X**	2	*P**	3	KDEG=	2
-0.939D+00	*X**	1	*P**	6	KDEG=	3
0.145D+01	*X**	5	*P**	2	KDEG=	3
-0.227D+00	*X**	0	*P**	9	KDEG=	4
0.317D+01	*X**	4	*P**	5	KDEG=	4
-0.727D+00	*X**	8	*P**	1	KDEG=	4
0.286D+01	*X**	3	*P**	8	KDEG=	5
-0.429D+01	*X**	7	*P**	4	KDEG=	5
0.145D+00	*X**	11	*P**	0	KDEG=	5
0.139D+01	*X**	2	*P**	11	KDEG=	6
-0.867D+01	*X**	6	*P**	7	KDEG=	6
0.312D+01	*X**	10	*P**	3	KDEG=	6
0.384D+00	*X**	1	*P**	14	KDEG=	7
-0.938D+01	*X**	5	*P**	10	KDEG=	7
0.130D+02	*X**	9	*P**	6	KDEG=	7
-0.134D+01	*X**	13	*P**	2	KDEG=	7
0.465D-01	*X**	0	*P**	17	KDEG=	8
-0.635D+01	*X**	4	*P**	13	KDEG=	8
0.259D+02	*X**	8	*P**	9	KDEG=	8
-0.119D+02	*X**	12	*P**	5	KDEG=	8
0.334D+00	*X**	16	*P**	1	KDEG=	8
-0.282D+01	*X**	3	*P**	16	KDEG=	9
0.315D+02	*X**	7	*P**	12	KDEG=	9
-0.412D+02	*X**	11	*P**	8	KDEG=	9
0.716D+01	*X**	15	*P**	4	KDEG=	9
-0.372D-01	*X**	19	*P**	0	KDEG=	9
-0.821D+00	*X**	2	*P**	19	KDEG=	10
0.259D+02	*X**	6	*P**	15	KDEG=	10
-0.817D+02	*X**	10	*P**	11	KDEG=	10
0.434D+02	*X**	14	*P**	7	KDEG=	10
-0.293D+01	*X**	18	*P**	3	KDEG=	10

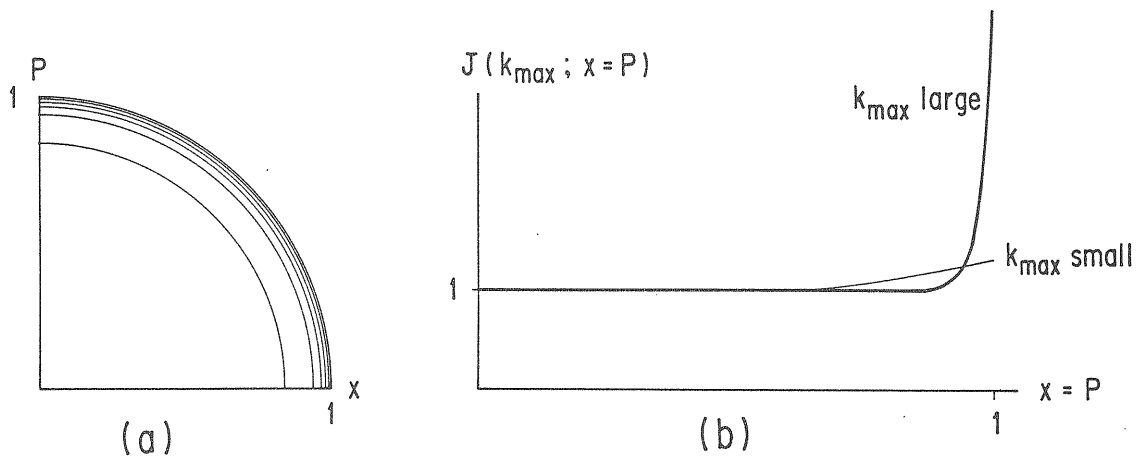


図 2-16 指数関数展開の打ちきり誤差 (a) は J の等高線。 (b) は $X=P$ とした時の $J = J(X)$

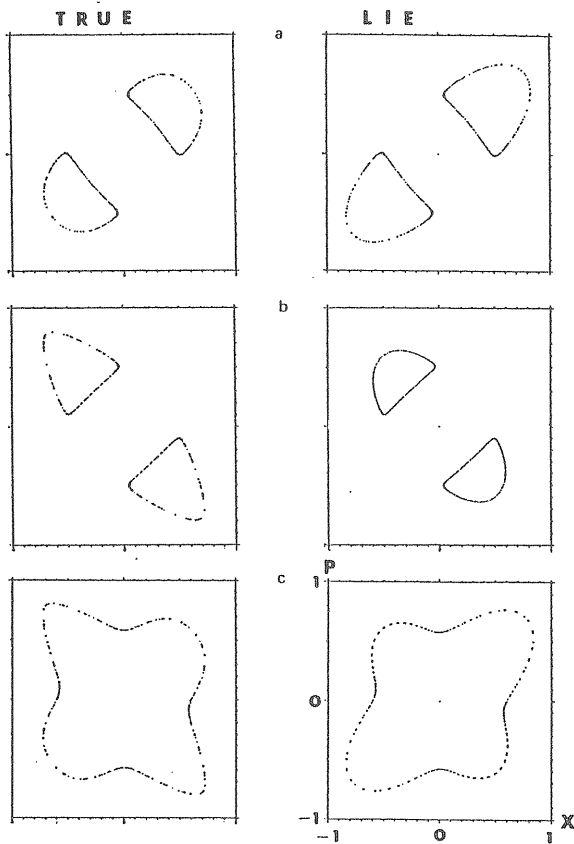


図 2-17 $H(2.1.22)$ による (True) tracking (左側) と Lie-tracking (右側)。
 (a) $(X_0, P_0) = (0.5, 0)$
 (b) $(X_0, P_0) = (0.5, -0.1)$
 (c) $(X_0, P_0) = (0.6, 0)$
 なお $\nu=0.23$, $K=0.0529$ である。
 Lie-tracking では $k_{\max}=30$ とした。

Lie-Tracking の true-tracking からのずれは

- 1) $T \rightarrow T'$ で 6 次以上の項を落とした。
- 2) 指数関数の級数展開を途中で打ち切ったことに原因がある。図 2-17 に現われている差は上の 1) によるものである。2) による違いを見るた

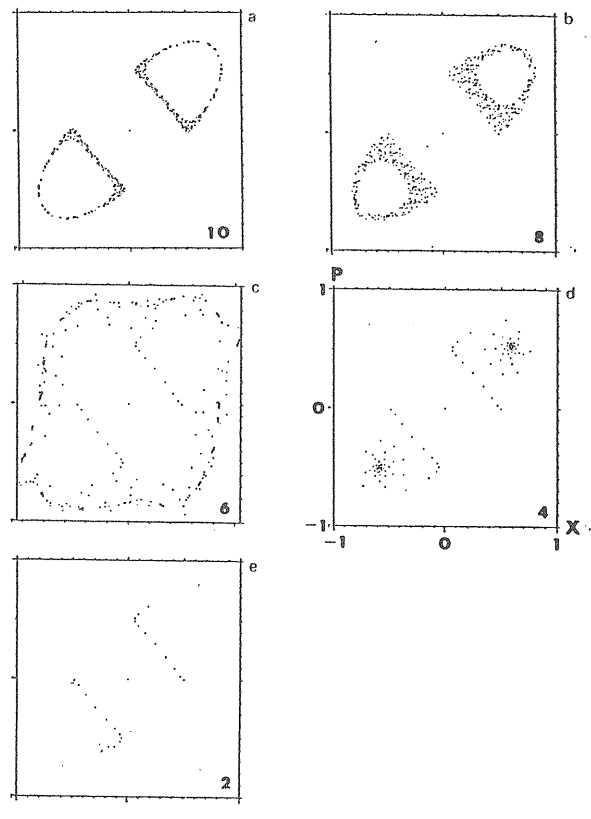


図 2-18 k_{\max} が小さい時の Lie tracking, k_{\max} は (a) 10, (b) 8, (c) 6, (d) 4, (e) 2, である。

めに k_{\max} を 2, 4, 6, 8, 10 と変えて同じ (X_0, P_0) から tracking してみたのが図 2-18 に出ている。stochastic region が見えているように感じるが、これは symplecticity のずれによるものである。

[Lie-tracking の問題点]

Lie 変換によって nonlinear transfer matrix を数項にまとめてしまうという Lie-tracking のテク

ニックは画期的なものであり、tracking の将来に与える影響は大きいであろう。しかし、これまで見た様に

1. $e^{\alpha}Z$ の計算方法 (級数展開を高次までやらなければならない)、にまず問題があり*)、更に
2. 4 次の多項式 g_4 までとり入れ、それ以上の項を落とすことによる誤差の評価が難かしい、

という問題もある。

*) この原稿執筆時の段階で、MARYLIE がどうやってこの計算をしているか知ることができなかった。もしかすると、ずっと収束の速い方法があるのかもしれない。

例えば、われわれは 2 turn を 1 まとめにして

$$T'_{2 \text{ turn}} = e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} \quad (2.4.83)$$

とした。10turn を unit にして

$$T'_{10 \text{ turn}} = e^{\alpha_1} e^{\alpha_2} \quad (2.4.84)$$

としたらどうであろうか。

$$(T'_{2 \text{ turn}})^5 \neq T'_{10 \text{ turn}} \quad (2.4.85)$$

であることは明きらかであり、上記の問題 2 が現われてくる。 $(T'_{2 \text{ turn}})^5$ は $T'_{10 \text{ turn}}$ より正確であるがより時間がかかる。 $T'_{10 \text{ turn}}$ がどの位 $T'_{2 \text{ turn}}$ より不正確かの評価も難かしい。

Lie-tracking の方法は、確立した方法というよりも、今後発展させるべき可能性と考えた方が良いのではないかと筆者は考える。

[2. 4 のまとめ]

Lie 変換によって、nonlinear element があっても transfer matrix 的な考え方が出来る様になった。Lie 変換を用いている限り、どんな近似をしても必ず symplectic であるので安心である。しかし実際の tracking に Lie 変換の方法を用いるのは、まだ慎重にしなければならない。

[参考文献について]

Lie 変換を用いる tracking の方法は殆んど、A. J. Dragt とその協力者が作りあげてきたものであり、文献 2-4 に詳しい解説がある。(少々詳しくすぎるが)。

2. 5 tracking と加速器

これまで toy model を用いて、様々な近似法と、tracking を比較してきたが tracking そのものについてはあまり議論しなかった。ここではまず長時間 (many turns) の tracking について議論し、更に実際の加速器における tracking および関連した computer program について論じる。

[Toy model の tracking の詳細-Chaos]

われわれの model の双曲型不動点付近の振るまいを 2. 3 節 (図 2-14a) で見た。stochastic region の様子を詳しく調べてみよう。(図 2-19-a) は図 2-14-a の 10 倍の turn 数 (50000 turn) tracking したものである (出発点が少々違うが、両者は本質的に同じ図である)。前の絵でははっきりしなかった細かい構造が見える。stochastic region の端の方にレースの縁取りの様なものが見える。これは高次の resonance が見えているのである。図 2-14-b は (a) 図の中心部 (交差点の少し上) を更に (a) の 10/3 倍 拡大し、10 倍 (50 万 turn) の tracking をしたものである。stochastic region の内側に、いろいろの構造が見えてきた。(b) 図を更に拡大したのが (c) 図 (b) の 3 倍) で 200 万 turn させている。(c) 図には図 2-11-c と同じ様な resonance が見える。(c) 図で白く残っている所は、このあと何 turn させても白ヌキ*)のまま残るであろう。また逆に白い領域から tracking を始めれば、何 turn しても、図 (c) の白い領域に留まるであろう。図 (d) には図 (a) の縁取り部分がはっきり出ている。(a) と (d) は出発点が若干異なるが十分な turn 数の内には同じ様な図になっていくはずである。

これらの「stochastic region + その中の白ヌキ」は、図 2-11-c の separatrix 全体に分布している。楕円型不動点の近傍 (図 2-13) での軌道は大変 regular であるが、separatrix 付近では stochastic になる。その stochastic region の内側にまた楕円型不動点が存在して、regular motion をしている。stochastic region の中の楕円型不動点 (のまわりの regular motion) の様子を図 2-19-e に示した。(e) は (b) と同じ scale。(b) の白ヌキ部分に (e) が収まることを見てとれるであろう。

(e) の様な楕円型不動点近傍の regular motion も、縁の方に行けば (b) の stochastic region にな

*) stochastic region の中の白ヌキを island とも云う。

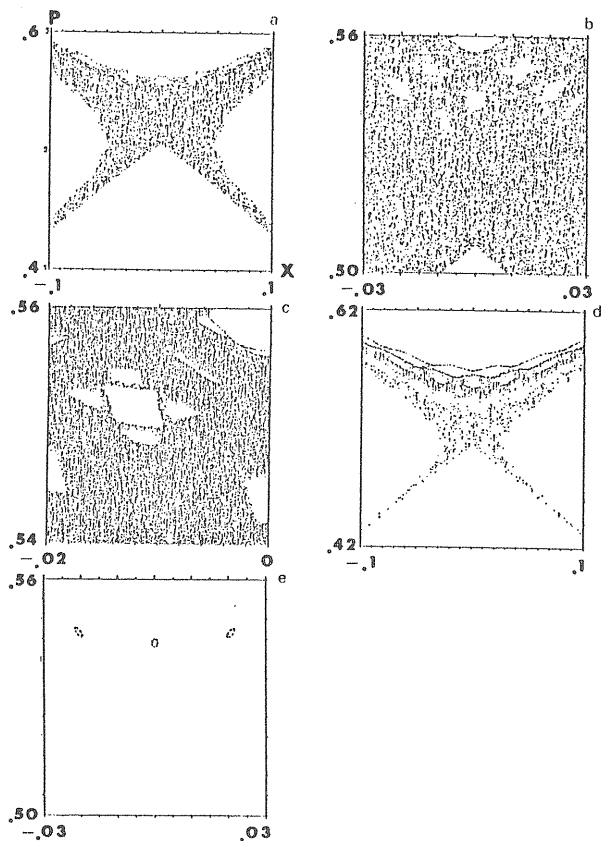


図 2-19 $H(2 \cdot 1 \cdot 22)$ の双曲型不動点付近の拡大
 (a)~(c)は $(X_0, P_0) = (0, 0.55)$ である。
 (a) 5万 turn, 図は $X = \pm 0.1, P = 0.5 \pm 0.1$
 (b) 50万 turn, $X = \pm 0.03, P = 0.53 \pm 0.03$
 (c) 200万 turn, $X = -0.01 \pm 0.01, P = 0.55 \pm 0.01$
 (d) は $(X_0, P_0) = (0, 0.57)$ で 5万 turn,
 図は $X = \pm 0.1, P = 0.52 \pm 0.1$, で(a)と
 同じ scale.
 (e) は $(X_0, P_0) = (0, 0.545)$ で 1万 turn,
 図は $X = \pm 0.03, P = 0.53 \pm 0.03$, で(b)
 と同じ scale

るが、そこをもっと拡大して見れば(その為には20億turn位必要であろう)またもや小さな白ヌキが見えてくると予想される。

結局 stochastic region と regular region は互いに入れこの関係になっている(図2-20にその様子を示した)

さて、今度はもう少し外側(図2-14b)を見てみると、やはり stochastic region の中に regular region がある(図2-21)。基本的な構造は図2-19と同じである。

図2-19と図2-21の2つの stochastic region の間には、図2-11-d の様なきれいな曲線がある。図2-11-d の附近は regular motion の領域であって、この曲線で2つの stochastic region は隔

てられている。こういう曲線を Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) curve と云う。KAM curve で囲まれていれば, stochastic region が外に出てくることはない。

さて、図2-21の stochastic region は、KAM curve で囲まれてはいない。図2-21-b のもう少し内側から出発する tracking はかえってわずか130 turn 程で overflow してしまう。

ある stochastic region が KAM curve で囲まれているか否かは、tracking によってしか知ることはできない。(もっとも半定量的な予想はできる場合がある*)。これについては3章で触れる)。

閉じた KAM curve \leftrightarrow stochastic region を閉じこめる。

*) KAM curve と stochastic region (Hamilton 系の chaos) については文献 2-1, 2-5, 2-6 等に詳しく書かれている。

[加速器の nonlinearity]

Toy model では, horizontal betatron oscillation しか考えなかったが、実際の加速器は

- horizontal (x, p_x)
- vertical (y, p_y)
- longitudinal (t, p_t)

の3自由度を持ちそのうえ θ -dependent な力学系である。完全に作られた4極磁石の Hamiltonian でさえも

$$H = H_2 + H_3 + \dots \quad (2 \cdot 5 \cdot 1)$$

$$H_2 = a p_t^2 + b(p_x^2 + p_y^2) + c(x^2 - y^2) \quad (2 \cdot 5 \cdot 2)$$

$$H_3 = d p_t^3 + e p_t(p_x^2 + p_y^2) \quad (2 \cdot 5 \cdot 3)$$

の様に higher order の項を含んでいる。nonlinear chromaticity(鎌田氏の稿参照)などは、この higher order 項の影響で出てくる非線型効果である。Toy model で見た様に、これ等の非線型効果は resonance, stochastic region 等々を作り出し、また同時に tune の振巾依存性を生みだす。chromaticity correction とは、(2 \cdot 5 \cdot 3) の p_t (longitudinal energy deviation) が生みだす ν の非線型性を6極磁石による非線型性で補正しようという大胆不敵な作業である。

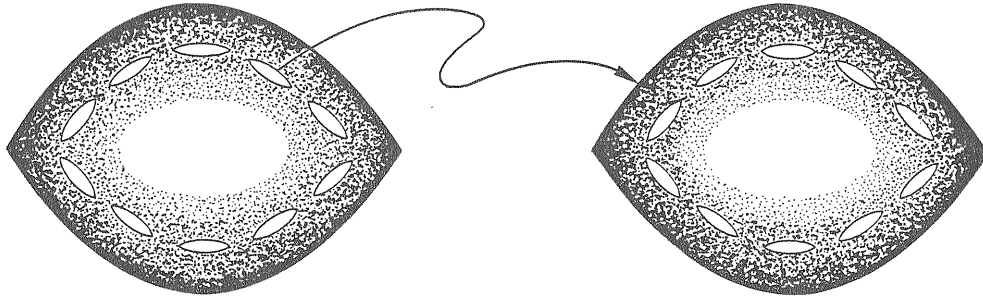


図 2-20 stochastic region と regular region の入れこ構造

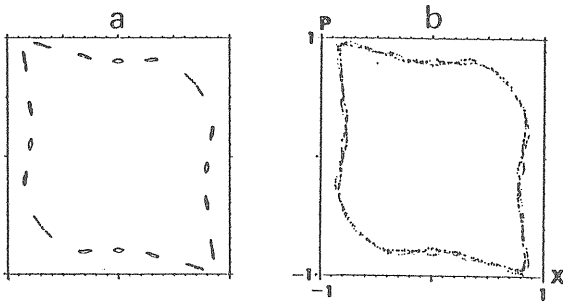


図 2-21 (a) 外側の regular region と (b) そのまわりの stochastic region
 (a) $(X_0, P_0) = (0, 0.82)$
 (b) $(X_0, P_0) = (0, 0.777)$

さて、電子 beam の寿命、陽子 beam の強度は aperture で決まる。aperture とは要するに x と y がどこまで大きくなれるかという limit であり、aperture が大きければ電子 beam なら寿命が伸び、陽子 beam なら強度が上がる。加速器の設計では

- [1] Linear optics を決める (鎌田氏の稿参照)
- [2] これによって beam size (x, y 方向でのふとり具合) が決まる。
- [3] beam の寿命が何時間あればいいか (強度がどれだけあればいいか) 偉い人から聞いてくる
- [4] 2, 3 によって beam の aperture (pipe の内径) が決まり physical aperture と呼ばれる。これが大きすぎると磁石が高かつくので [1] からやり直す

という手順を踏む。

さて、加速器が大きくなるとほぼ必然的に natural chromaticity も大きくなる (先述した P_1 の効果)。これを補正するために 6 極磁石をあちこちに入れる。(この入れ方についてもいろいろ頭を悩ます)。これによって、chromaticity を cancel することが出来たと思うと、更に高次の nonlinearity が出てくる。

先に述べた様に nonlinear な効果は phase space

上に stochastic region を作る。これが KAM curve で囲まれている限りそう重大なことにはならないが、無限遠点につながる stochastic region は重大問題である。つまり、先の physical aperture とは別に力学的 (dynamical) aperture が存在する。大体

dynamical aperture = 一番外側の KAM curve (の内径)

と云ってよい。Toy model の例では 図 2-11-d から $X \leq 0.7$ 位が安全な領域であろう*。

もし dynamical aperture > physical aperture

ならば、何も問題はないが、この逆だと、加速器の性能は設計値より大分落ちることになるだろう。

この dynamical aperture は 6 極磁石の強さや配置 (nonlinear lattice) を変えればかなり変化させることができる。chromaticity correction が同じ様にできる様々な nonlinear lattice の中で dynamical aperture が physical aperture より大きくなるものを捜すのが「chromaticity correction をやる」ということである**。

与えられた 1 つの nonlinear lattice から dynamical aperture を決めるには、tracking によるしか方法がないことは今や明らかであろう。

*) 実際には 図 2-11-c の様な resonance も避けたいので、図 2-11-b 位が limit となる。

**) もし見つからなければ [1] からやり直しになる。

[PATRICIA]

PATRICIA [Particle TRacking in Circular Accelerator] (文献 2-7) はまさに dynamical aperture 捜しのために作られた tracking code である。この code では (x, p_x, y, p_y) の自由度 2 の系の tracking を行なう (t, p_t は fix しておく)*。

*) Option として synchrotron oscillation も形だけ入れられるが少し問題がある。(symplectic でなくなる)。

tracking の実際的方法は、われわれの Toy model の tracking と全く同じ(はるかに複雑だが)である。特にすべての nonlinear element は thin-lens 近似で扱う。

thin lens で扱うというのは Hamiltonian の θ -依存性を $\delta_p(\theta)$ とおくことである。別の言い方をすれば、6 極(8 極...) 磁石を通過している間の betatron motion を無視することである。われわれの例でも、もし 8 極磁石を thin lens でなく thick lens で取り扱ったら、8 極の通過による Lie 変換は

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ P' \end{pmatrix} = e^{-\Delta\theta\Omega} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

$$\dot{H} = \frac{\nu}{2} (X^2 + P^2) + \frac{K}{4\nu^2} \frac{1}{\Delta\theta} X^4 \quad (2.5.6)$$

となり、またもや無限級数展開を余儀なくさせられたであろう。ここで $\Delta\theta$ は角度で見た磁石の長さ。 $\Delta\theta \rightarrow 0$ とするので H 中の $(X^2 + P^2)$ の項を落とせるのである。

thin lens 近似を使えば、磁石を通過する時の変換は、例えば (2.4.48) の様に simple であり且つ symplectic である。simple でなければ時間がかかり symplectic でなければ無意味である。図 2-18 を見よ。

PATRICIA と基本的には同等で、option 等の面でより進んだ program に RACETRACK があるが、KEK ではまだ実際に使われたことがない。PATRICIA を用いる chromaticity correction の具体的な面は鎌田氏の稿を参照されたい。

[HARMON]

PATRICIA で tracking をする前に、先に述べた様に nonlinear lattice の候補を用意しておかなければならない。その為に使われる code が HARMON (文献 2-8) である。HARMON は tracking program でなく摂動計算を高次までやる program

であり、同時に最適化 (optimization) も行う*)。我々の 8 極磁石の例で説明しよう。longitudinal momentum deviation P_t を導入すると Hamiltonian (2.1.22) で ν が

$$\nu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\delta}} \quad (2.5.7)$$

の様に変更される**)。ここで $\delta = P_t/P_0$ 、 P_0 は longitudinal 方向の nominal momentum である。この為 tune spread の式 (2.3.47) は

*) HARMON も x, y, p_x, p_y の 4 自由度の time-dependent 系を扱う。

**) 4 極、8 極の磁石によって受ける kick は (2.1.20) 又は (2.1.23) で与えられるが、 P は $d \times d\theta$ に比例し

$$\frac{dX}{d\theta} \propto \frac{v_x}{v_s}$$

である。(v_s, v_x は進行方向、transverse 方向の速さ)。 P_t が non-zero なら

$$v_s \rightarrow y_s \left(1 + \frac{P_t}{P_0} \right) = v_s (1 + \delta)$$

としなければならない。その為 kick も $1/(1+\delta)$ になる。これは (2.1.22) の Hamiltonian を

$$H = \frac{\nu}{2} \left(P^2 + \frac{X^2}{1+\delta} \right) + \frac{K}{4\nu^2} \frac{1}{1+\delta} \delta_p(\theta) X^4$$

とすることに相当する。正準変換 $X \rightarrow (1+\delta)^{1/2} X$, $P \rightarrow (1+\delta)^{-1/2} P$ によって

$$H = \frac{\nu}{2\sqrt{1+\delta}} (P^2 + X^2) + \frac{K}{4\nu^2} \delta_p(\theta) X^4$$

を得る。

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{J}, \delta) = \frac{\nu}{\sqrt{1+\delta}} + \frac{3K}{8\pi\nu^2} \bar{J} \quad (2.5.8)$$

となる。 \bar{v} の δ dependenceがchromaticityである。 \bar{v} の \bar{J} (振巾) dependenceも好ましくない。電子ringの場合 δ も \bar{J} も (Gauss分布で) 広がっているので、中心値 (ν) が resonance から遠くにいても、周辺の電子は resonance にひっかかるからである。

更に高次の摂動計算をすれば

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{J}, \delta) &= \bar{v}(0, 0) + \frac{\partial \bar{v}(0, 0)}{\partial \delta} \delta \\ &+ \frac{\partial \bar{v}(0, 0)}{\partial \bar{J}} \bar{J} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}(0, 0)}{\partial \delta^2} \delta^2 + \frac{\partial \nu^2(0, 0)}{\partial \delta \partial \bar{J}} \delta \bar{J} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}(0, 0)}{\partial \bar{J}^2} \bar{J}^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

を得るであろう。この中で

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \delta}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{J}}, \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \delta^2} \quad (2.5.10)$$

の3つは何としても0にしたいとする。それは一般には無理であるが

$$\left(a \frac{\partial \bar{v}}{\partial \delta}\right)^2 + \left(b \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{J}}\right)^2 + \left(c \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \delta^2}\right)^2 \quad (2.5.11)$$

を最小にする様にパラメーター ν と K を選ぶことはできる。ここで a, b, c は重みの変数で $a > b > c > 0$ とすれば $\partial \bar{v} / \partial \delta$ を最も重視していることになる。この様にして ν と K を決めるのが最適化である*)。

現実の加速器では変化させるパラメーターも多く \bar{v} も(2.5.8)の様には簡単ではない。さらにclosed orbitの δ -dependence (nonlinear dispersion)も出てくるし β functionも δ -dependentになる。これ等すべてに重みをつけて最適化をやるのである。

Toy modelでも明らかな様に、摂動計算で最適化したとしても、近似的な最適化であり、dynamical

*) われわれの例では $\nu = 0, K = 0$ が解となるのは明らかである (dispersion を考えていないので) が、それに気がつかなければ (2.5.11) の最適化をして気がつくであろう。

aperture=外側のKAM curveを決めることはできない。stochastic regionの位置や広がり摂動論では手が出ないのである。

[TRANSPORT]

PATRICIA, HARMONは円形加速器のためのprogramであるが、TRANSPORT (文献2-9)はBeam transport lineのためのprogramである。TRISTANでもPF-linacからARへ、ARからMRへとbeamを移す時にtransport lineを通す。transport lineは粒子が1回通過するだけなのでbeam dynamicsにあまり神経をつかわなくて良い。とはいうものの乱れたbeamを送りこんではならないので設計も慎重にしなければならない。

Toy modelで言えば $\theta = 0$ から $\theta = 2\pi$ まで行く間にnonlinear elementが沢山あることになる。nonlinear transfer matrixは

$$T = e^{f_1} e^{f_2} e^{f_3} e^{f_4} \dots e^{f_n} e^{f_{n+1}} e^{f_{n+2}} \quad (2.5.12)$$

となっている。(3次のHamiltonian-sextapoleまで考えれば十分である)。Lie変換でやった様に、 T は

$$T \approx e^{F_1} e^{F_2} \quad (2.5.13)$$

と表わすことができるだろう。具体的にはLie変換の公式を用いるよりも次の様にする。

$$\begin{aligned} e^{f_1} Z_i &= \sum_j M^{(1)}_{ij} Z_j + \sum_{jk} M^{(2)}_{ijk} Z_j Z_k \\ e^{f_2} Z_i &= \sum_j \tilde{M}^{(1)}_{ij} Z_j \\ e^{f_3} Z_i &= \sum_j \tilde{\tilde{M}}^{(1)}_{ij} Z_j + \sum_{jk} \tilde{\tilde{M}}^{(2)}_{ijk} Z_j Z_k \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

等々をまず計算し

$$\begin{aligned} e^{f_1} e^{f_2} e^{f_3} Z_i &= \sum_j \bar{M}^{(1)}_{ij} Z_j + \sum_{jk} \bar{M}^{(2)}_{ijk} Z_j Z_k \\ &+ (3 \text{ 次以上}) \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

となる所を、はじめの2項だけとる。こうして最後までsecond order transfer matrixまでの近似でおし進めれば最後に

$$TZ_i \approx \sum_j T^{(1)}_{ij} Z_j + \sum_{jk} T^{(2)}_{ijk} Z_j Z_k \quad (2.5.16)$$

を得るであろう。つまり(2.5.13)を級数展開で計算して2次までとったのと同じことである。

$T_{ij}^{(1)}$, $T_{ijk}^{(2)}$ は transport line の各エレメントの複雑な関数であるが $T_{ijk}^{(2)}$ をなるべく小さくする様に optimize するのが TRANSPORT の機能である。近似をせずにやると (2.5.16) のかわりに 3^{100} 次位までの higher order transfer matrix を得ることになる。

(2.5.16) の変換は当然 symplectic ではない。(2.5.13) は symplectic でも、展開して 2 次で止めれば symplectic ではなくなる。しかしこれは大した欠点ではない (transport line にしか使わないから)。Lie-tracking の例でも展開を 2 次で打ち切った tracking (図 2-18-e) は 20 turn 位は良い近似を保っていた。(直接比べられないが)。

TRANSPORT は tracking の program ではないが sense としては tracking に近い。

なお TRANSPORT は (X, P) ではなく (x, p_x, y, p_y, t, p_t) の自由度 3 の time dependent 系を扱っている。(2.5.14) ~ (2.5.16) の Σ も

$$\sum_{j=1}^6 \quad (2.5.17)$$

である。

[MARYLIE]

MARYLIE* の計算方法は 2.4 節で詳しくやった。MARYLIE はまだ完成した program ではなく (本原稿執筆時には)、各地の加速器屋が完成を待ち焦がれている。Preliminary report によれば 3 自由度の tracking をすること、thin lens 近似を用いないこともできること、TRANSPORT の様な fitting の機能をもつける予定であることなどが分かるにすぎない。2.4 節でも述べた様に、Lie-tracking の方法自体に更に研究すべき点が多い。

* Maryland 大学で作った Lie tracking の program なので MARYLIE である。(文献 2-10)

[2.5 のまとめ]

2 章のはじめにまとめた [この章の内容] が、そのまま 2.5 のまとめとなっている。

3章 Beam-Beam Interaction と tracking

[この章の内容] Beam-beam interaction は衝突型蓄積 ring の luminosity を強く制限する。この力の強さは beam-beam parameter ξ_x , ξ_y (特に ξ_y) で代表されるが、パラメータは他にもある。strong-weak 近似を用いると 1 自由度の力学系として取り扱えるが、理論と現実の gap が大きい。双方の bunch が変形を受けながら相手に beam-beam force をおよぼしていくと、multi particle tracking が必要になってくる。この tracking の結果は現実とよく合い、beam-beam interaction の問題は基本的には理解できる。

3.1 beam-beam problem

衝突型加速器は 2 種の (e^+e^- , $e-p$, $p-p$, $\bar{p}-p$ 等) 粒子を正面衝突させて高エネルギー実験を行なう為に作られる。

話を具体的ににする為に e^+e^- 型 (TRISTAN 等) だけを考えることにする。(陽)電子 beam には radiation damping が存在するが、(反)陽子 beam には普通はない (少しあるが完全に無視できる) という点に注意すれば、以下述べることは容易に (反)陽子 ring にも適用できる。

e^+ と e^- の bunch が衝突することによって、夫々の bunch の中にいる粒子は transverse kick を受ける。この力は非線型力であり、beam dynamics の観点から見れば新たな nonlinear element が導入された様なもので迷惑なことこの上ないが、いたしかたない。

この節では beam-beam collision がどの様な問題を生みだすか見ていこう。

[衝突型電子蓄積 ring]

衝突型加速器は図 3-1-a の様に作られている。図中黒丸が e^+ の bunch, 斜線の丸が e^- bunch である。2 つの bunch は ring 上の 2 ケ所 (図の * 印) - Interaction point (IP) - で衝突を繰り返しながら ring を何回もまわる。

一方の beam 中の電子から見ると IP 上に強力な nonlinear element がおいてある様に見える (図 3-1-b) だろう。これによって電子の軌道は変形を受け、電子の bunch は全体として変形していく。この話は陽電子の bunch についても同様で

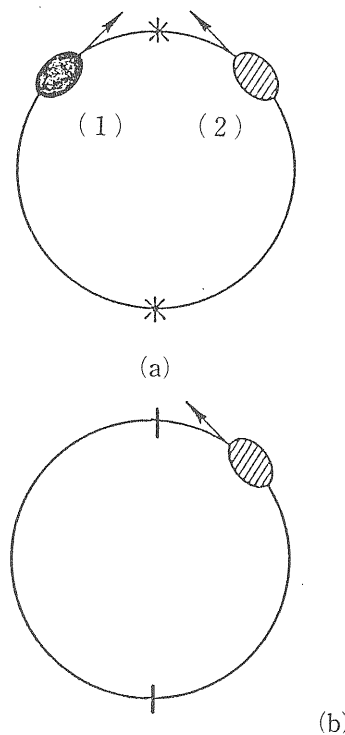


図 3-1 (a) 衝突型蓄積リング, (b) 相手の beam は IP 上の nonlinear element に見える。

あり、陽電子の bunch も変形していく。これは電子から見ると先の nonlinear element の強さ、形が時間と共に変形していくことでもある。つまり beam-beam interaction によって、bunch が変形し、この変形が beam-beam interaction の強さや形を決めるという「イタチごっこ」の構造がある。

これが beam-beam interaction の解析を難しくしている。

[luminosity]

luminosity は衝突型加速器にとって最も重要なパラメータである (最高エネルギーも重要だが、これは敷地面積と予算で大体決まってしまう、努力の余地があまりない)。その理由は

luminosity が大きい → 実験が能率よくできる

からである。luminosity は IP における 2 つの beam の重なり具合を測る数値である。つまり

luminosity は beam の性質だけできまる

ということをよく頭に入れておこう。

さて図 3-2-a の様に e^+ 1 つが e^- の集団と衝突

するとしよう。e⁻の集団は密度一様で、N個のe⁻から成るとする。この時e⁺がe⁻の1つと反応、例えば



をする確率は*)

$$\frac{N}{\Delta x \Delta y} \quad (3.1.2)$$

に比例する。この比例係数を(上記の反応の)断面積といいσ_{ti}等と書く。つまり

$$\text{反応が起きる確率} = \frac{N}{\Delta x \Delta y} \sigma_{ti} = \rho^- \Delta s \sigma_{ti} \quad (3.1.3)$$

である。ここでρ⁻はe⁻集団の数密度である。さてこのe⁻の集団がe⁻bunchを小さく角切りにしたものの1つだとすれば、e⁺1つがe⁻bunch全体と衝突した時には

$$\text{反応が起きる確率} = \sigma_{ti} \int ds' \rho^-(x, y, s') \quad (3.1.4)$$

である。ここでρ⁻(x,y,s)は電子bunchの数密度分布関数である。(図3-2-b参照)

*) t, \bar{t} はある素粒子

e⁺はe⁺bunchの中に多数入っており、分布ρ⁺(x,y,s)を持っているとすると、両bunchの一回の衝突によって(3.1.1)の反応が起こる回数は

$$\text{反応の回数} = \int dx dy ds \rho^+(x, y, s) \times (\text{反応が起きる確率}) \quad (3.1.5)$$

である。1つのIPにe⁺, e⁻はそれぞれ毎秒f₀回来る(f₀=revolution frequency)ので

$$\sigma_{ti} f_0 \int dx dy ds ds' \rho^+(x, y, s) \rho^-(x, y, s') \quad (3.1.6)$$

が毎秒の反応数になり、これをevent rate R_{ti}という。

$$R_{ti} = \sigma_{ti} \cdot L \quad (3.1.7)$$

によってluminosity Lが定義される。つまり

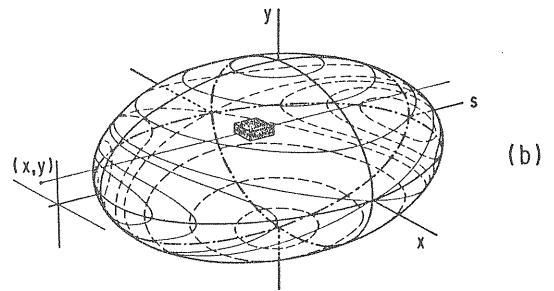
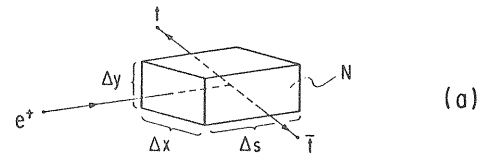


図3-2 (a) e⁺がe⁻の立方体の集団(密度一様)と衝突し、その中の1つのe⁻と反応してt \bar{t} が出来る所。(b) (a)の立方体はe⁻bunchの一部を角切りにしたものだ。

$$L = f_0 \int dx dy ds ds' \rho^+(x, y, s) \rho^-(x, y, s') \quad (3.1.8)$$

である。一般に反応αの断面積がσ_αなら同じLを用いて

$$R_\alpha = \sigma_\alpha L \quad (3.1.9)$$

と書ける。σ_αは自然法則によって天から与えられたものであるがR_αは加速器の性能、つまりLによって決まる数である。例えばA国、B国の加速器のluminosityがそれぞれL_A, L_BでL_A=L_B×10だとすると、同じ現象(3.1.1)を捜していてもA国では10 event見つかって論文を書き始める所にB国ではやっと1 event見つかるということになる。

luminosityはそれ程重要な量なのである。

e⁺bunchとe⁻bunchが同じ形のGauss分布を持つ場合、つまりρ⁺=ρ⁻で

$$\rho^0(x, y, s) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2} \sigma_x^* \sigma_y^* \sigma_s^*} \exp \left\{ -\left\{ \frac{x^2}{2(\sigma_x^*)^2} + \frac{y^2}{2(\sigma_y^*)^2} + \frac{s^2}{2(\sigma_s^*)^2} \right\} \right\} \quad (3.1.10)$$

である場合を考えよう。Nはbunch内の粒子数σ_x^{*}, σ_y^{*}, σ_s^{*}はIPにおけるbeamのhorizontal, vertical, longitudinal方向の拡がりの標準偏差で

ある。(陽)電子の beam は余計な nonlinear effect がなければ、必ずこの形になる。この場合 luminosity は

$$L = \frac{N^2}{4\pi\sigma_x^*\sigma_y^*} f_0 = \frac{1}{4\pi e^2 f_0} \frac{I^2}{\sigma_x^*\sigma_y^*} \quad (3.1.11)$$

である。ここで $I = Nef_0$ (beam 電流) を使った。(3.1.11) は 1 対の e^+ , e^- bunch が 1 つの IP で示す luminosity である。

(3.1.11) では beam の中心軸は $x=y=0$ であるとしたがこれがずれていて

$$\rho^+(x, y, s) = \rho^0(x-x^+, y-y^+, s) \quad (3.1.12)$$

$$\rho^-(x, y, s) = \rho^0(x-x^-, y-y^-, s) \quad (3.1.13)$$

となると、両 beam の重なり方が悪くなって

$$L = \frac{N^2 f_0}{4\pi\sigma_x^*\sigma_y^*} \exp - \frac{1}{2} \left[\frac{(x^+ - x^-)^2}{2(\sigma_x^*)^2} + \frac{(y^+ - y^-)^2}{2(\sigma_y^*)^2} \right] \quad (3.1.14)$$

となり luminosity は下がる。

(問 3-イ) 両 beam の separation が $x^+ - x^- = \sigma_x^*$, $y^+ - y^- = \sigma_y^*$ の時 luminosity はどの位落ちるか。

(3.1.11) を見ると luminosity を増すには (i) N を増やし、(ii) σ_x^* , σ_y^* を減らせばよさそうである。

しかし実際にこれをやると、ある所から先では luminosity が思う様に上がらなくなる。図 3-3 に

主な研究所での最大 luminosity と beam 電流 I ($=Nef_0$) の関係を示した。 I が少ない時には (3.1.11) に見られる様に

$$L \propto I^2 \quad (3.1.15)$$

で上がっていくが、ある所で

$$L \propto I \quad (3.1.16)$$

になってしまう。「何故そうなるのか」というのが beam-beam problem である。

[beam-beam parameter]

$$\xi_x = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \beta_x^* \frac{1}{\sigma_x^*(\sigma_x^* + \sigma_y^*)} \quad (3.1.17)$$

$$\xi_y = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \beta_y^* \frac{1}{\sigma_y^*(\sigma_x^* + \sigma_y^*)} \quad (3.1.18)$$

を beam-beam parameter と言う。ここで $\beta_{x,y}^*$ は IP における β function の値。 $\sigma_{x,y}^*$ は (3.1.10) で出てきたもの。 r_e は古典電子半径、 γ は E/mc^2 (Lorentz factor) である。*)

$$*) r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{ (m)},$$

$$\gamma = \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right\}^{1/2}}$$

beam-beam parameter は beam-beam interaction の強さを表わす (と思われている) パラメーターである (なぜそう思うかは次節で述べる)。同時に ξ_x , ξ_y は現象論的にも非常に重要な量である。

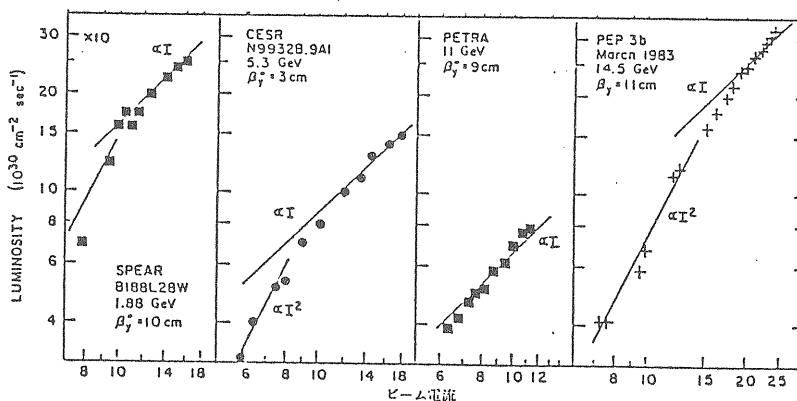


図 3-3 beam current I と luminosity の関係 [J. T. Seeman, Proc. of the 12-th Int. Conf. on High Energy Acc., 212(1983) より]

luminosity の定義式 (3・1・11) と ξ_x, ξ_y の式から σ_x^*, σ_y^* を消去してみよう。つまり, (3・1・17) と (3・1・18) から σ_x^*, σ_y^* を ξ_x, ξ_y で書いて (3・1・11) に代入する。すると

$$L = \frac{I\gamma}{2er_e} \left(\frac{\xi_x}{\beta_x^*} + \frac{\xi_y}{\beta_y^*} \right) \quad (3\cdot1\cdot19)$$

を得る。これにより, ξ_x, ξ_y をできるだけ大きくすることが望ましいことが判る。(ξ_x/β_x^* 等を大きくする)。 (3・1・15), (3・1・16) を見ると

$$\text{low current} \quad \frac{\xi_x}{\beta_x^*}, \frac{\xi_y}{\beta_y^*} \propto I \quad (3\cdot1\cdot20)$$

$$\text{high current} \quad \frac{\xi_x}{\beta_x^*}, \frac{\xi_y}{\beta_y^*} = \text{constant} \quad (3\cdot1\cdot21)$$

である。 ξ_x, ξ_y をあまり大きくはとれないらしいことがわかる。TRISTAN の design では, これらの経験から

$$\xi_x, \xi_y < \xi_{\text{limit}} = 0.03 \quad (3\cdot1\cdot22)$$

と予想して luminosity の design value としている。

なお

$$\sigma_{x,y}^* = \sqrt{\beta_{x,y}^* \varepsilon_{x,y}} \quad (3\cdot1\cdot23)$$

と書いて $\varepsilon_{x,y}$ は horizontal (vertical) emittance である。 ε_x と ε_y の比

$$\kappa = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \quad (3\cdot1\cdot24)$$

を coupling coefficient と呼んでいる。*) κ は人工的にある程度変えられる量である。(3・1・22) の範囲内で luminosity を最大にするには

$$\xi_x = \xi_y = \xi_{\text{limit}} \quad (3\cdot1\cdot25)$$

とすれば良いが, こうなる為には (3・1・17), (3・1・18) より

*) κ の理論のやさしい解説は文献 3-2 にある。

$$\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} = \frac{\beta_y^*}{\beta_x^*} \quad (3\cdot1\cdot26)$$

とすることが必要条件である。(3・1・26) より

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\beta_y^*}{\beta_x^*} = \frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} = \kappa \quad (3\cdot1\cdot27)$$

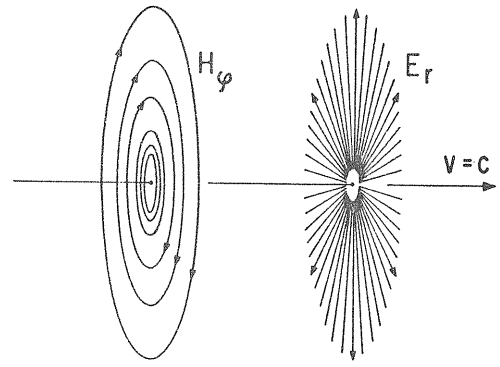


図3-4 光速近い速さで走る電荷の作る電場(右)と磁場(左)

が出てくる。 $\kappa = \beta_y^*/\beta_x^*$ を最適結合と呼ぶ。ただし最適結合で luminosity が本当に最大になるかどうかは保証の限りではない。

3.2 strong-weak 近似

前節の始めに述べた様に, beam bunch の変形と beam-beam interaction の間には「イタチごっこ」の構造があって, 解析を難しくしている。そこで一方の bunch は電荷 q 1 個のみからなり (weak beam), もう一方の bunch には e^+ が 10^{11} 個位つまっている (strong beam) と考えてみよう。strong beam は weak beam から影響を受けずに勝手に回っているが, weak beam の粒子は strong beam による beam-beam force に大きく影響を受ける。この近似を strong-weak 近似という。

strong beam は分布を変えないので, weak beam から見れば IP に何か不動の nonlinear element が存在することになる。この場合 weak beam の力学は Hamilton 系になり, 扱いやすくなる。

[beam-beam force]

まず 1 対の電荷の間に働く力を調べよう。光速近い速さで z 軸上を + の方向に走る電荷 q の作る電磁場は図 3-4 の様に z 軸に垂直な面上に乗ってしまう。これは太った人が速く走るとやせて見えるという Lorentz 収縮の原理による。電場も磁場も 2 次元的な面上に乗ったまま電荷と共に走って行くので, その様子を式に書けば

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}(x, y) \delta(z-ct) \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{H}}(x, y) \delta(z-ct) \end{aligned} \quad (3\cdot2\cdot1)$$

となる (δ 関数については公式 1 を見よ)。 $\tilde{\mathbf{E}}$ と $\tilde{\mathbf{H}}$ は 2 次元の Maxwell eq を満たす (公式 4 を見よ) が点電荷の作る $\tilde{\mathbf{E}}$ と $\tilde{\mathbf{H}}$ は Gauss の法則と Ampere

公式 4 2次元の電磁気学

Z軸上を+方向に光速で走る電荷 q は

$$\begin{aligned} \text{電荷密度 } \rho(x, y, z, t) &= q \delta(x) \delta(y) \delta(z-ct) \\ \text{電流密度 } \mathbf{i}(x, y, z, t) &= cq \mathbf{e}_z \delta(x) \delta(y) \\ &\quad \delta(z-ct) \end{aligned}$$

で表わされる。同一の xy 平面上にこのような粒子が分布している時は、

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z, t) &= \tilde{\rho}(x, y) \delta(z-ct) \\ \mathbf{i}(x, y, z, t) &= c\tilde{\rho}(x, y) \mathbf{e}_z \delta(z-ct) \end{aligned}$$

である。電磁場は $z=ct$ の平面上にしかないので

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}(x, y) \delta(z-ct) \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{H}}(x, y) \delta(z-ct) \end{aligned}$$

と書ける。但し $\tilde{E}_z = \tilde{H}_z = 0$ である。これを通常の Maxwell eq. に代入すれば

$$\tilde{E}_y = -c\mu\tilde{H}_x, \quad \tilde{E}_x = c\mu\tilde{H}_y$$

が導かれ、同時に

$$\partial_x \tilde{E}_x + \partial_y \tilde{E}_y = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon}, \quad \partial_x \tilde{E}_y - \partial_y \tilde{E}_x = 0$$

又は等価な

$$\partial_x \tilde{H}_y - \partial_y \tilde{H}_x = \tilde{\rho}c, \quad \partial_x \tilde{H}_x + \partial_y \tilde{H}_y = 0$$

を得る。これより potential

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x &= -\partial_x \tilde{\varphi}, \quad \tilde{E}_y = -\partial_y \tilde{\varphi}, \quad -\Delta_2 \tilde{\varphi} = \tilde{\rho}/\epsilon \\ \tilde{B}_x &= \partial_y \tilde{A}, \quad \tilde{B}_y = -\partial_x \tilde{A}, \quad -\Delta_2 \tilde{A} = c\mu\tilde{\rho} \end{aligned}$$

の存在が導かれる。また $\tilde{\mathbf{E}}$ と $\tilde{\mathbf{B}} = (\mu\tilde{\mathbf{H}})$ は常に直交する。この $\tilde{\varphi}$, \tilde{A} は細い電線に様に電荷がのっている時の φ , 電流が流れている時の A_ϕ と同じ方程式を満たしている (江川氏の稿参照)。

の定理からわかって

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r &= \frac{q}{2\pi\epsilon r}, & \tilde{E}_\phi &= 0 \\ \tilde{H}_r &= 0, & \tilde{H}_\phi &= \frac{cq}{2\pi r}\end{aligned}\quad (3\cdot2\cdot2)$$

である。(E_r, H_zは常に0である)。なお MKSA 単位系を用いている。

(問3-ロ) (3・2・2) を示せ

この電磁場中を反対側から走ってくる電荷 q' が通過すると F=q'(E(x,y,z,t)+V×B(x,y,z,t)) の Lorentz 力を受ける。q' は z 軸に平行に -z 方向に向かうとすると Lorentz 力は

$$\begin{aligned}F_x &= q'(E_x + c\mu H_y) = 2q'\tilde{E}_x\delta(z-ct) \\ F_y &= q'(E_y - c\mu H_x) = 2q'\tilde{E}_y\delta(z-ct)\end{aligned}\quad (3\cdot2\cdot3)$$

である。ここで E_x = cμH_y, E_y = -cμH_x を使った(公式4参照), また両電荷とも t=0 で z=0 の面を通過するとした。

この力によって q' が受ける kick は x' = dx/d(-z) = dx/ds として

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \frac{c}{E_0} \Delta P_x = \frac{c}{E_0} F_x \Delta t \\ &= \frac{c}{E_0} 2q'\tilde{E}_x(x,y)\delta(z-ct)\Delta t\end{aligned}\quad (3\cdot2\cdot4)$$

である。ここで注意。Δt は q' が q の作る電磁場を感じている時間であるが, cΔt = Δz ではなく cΔt = Δz/2 である。(2台の電車がすれちがう間に走る距離は電車の長さの半分である。*)ここに注意すれば

$$\Delta x' = \frac{q'}{E_0} \tilde{E}_x(x,y) \quad (3\cdot2\cdot5)$$

同様に

$$\Delta y' = \frac{q'}{E_0} \tilde{E}_y(x,y) \quad (3\cdot2\cdot6)$$

であることがわかる。kick が電場だけで書けることに注意しよう。

一般に2次元的な電場は2次元的なポテンシャル $\tilde{\phi}$ によって

$$\tilde{E}(x,y) = -\nabla_2 \tilde{\phi}(x,y) \quad (3\cdot2\cdot7)$$

と書ける(公式4参照)。1つの電子(weak beam)

*)qの静止系にもっていけば, q'は2cの速さで走るので2cΔt=Δzとなる(こちらの方がわかりやすいか?)

が e⁺ bunch (strong beam) 全体から受ける kick も

$$\begin{aligned}\Delta x' &= -\frac{(-e)}{E_0} \partial_x \tilde{\phi}(x,y) \\ \Delta y' &= -\frac{(-e)}{E_0} \partial_y \tilde{\phi}(x,y)\end{aligned}\quad (3\cdot2\cdot8)$$

と書ける。e⁺ bunch が Gauss 分布(3・1・10)の場合は

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x,y) &= \frac{Ne}{4\pi\epsilon} \\ &\int_0^\infty d\tau \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2+\tau} + \frac{y^2}{\sigma_y^2+\tau}\right)} - 1}{\sqrt{(\sigma_x^2+\tau)(\sigma_y^2+\tau)}}\end{aligned}\quad (3\cdot2\cdot9)$$

であることが知られている*)。

*簡単な証明は文献3-2を見よ。

問3-ハ) 点電荷 q の作る $\tilde{\phi}$ を求めよ

[round beam と Hamilton 系]

(3・2・9)は複雑なのでσ_x=σ_y=σ(round beam)を考えることにする。この時(3・2・9)は

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x,y) &= \tilde{\phi}(r) \\ &= \frac{Ne}{2\pi\epsilon} \int_0^r dr' \frac{1}{r'} \left[e^{-r'^2/2\sigma^2} - 1 \right] \\ &= \frac{Ne}{4\pi\epsilon} \left\{ \text{const} - \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{2\sigma^2} \right)^2 - \dots \right\}\end{aligned}\quad (3\cdot2\cdot10)$$

と書かれる。*)ここで r = √x²+y² である。(3・2・8)より

$$\begin{aligned}\Delta r' &= -\frac{(-e)}{E_0} \partial_r \tilde{\phi}(r) \\ &= \frac{Ne^2}{2\pi\epsilon E_0} \frac{1}{r} (e^{-r^2/2\sigma^2} - 1) \\ &= \frac{Nr_e}{\gamma} \left\{ -\frac{r}{\sigma^2} + \frac{r^3}{4\sigma^4} - \dots \right\}\end{aligned}\quad (3\cdot2\cdot11)$$

である。(3・2・11) は strong beam の作る beam-beam force によって weak beam が 受ける kick である。

*) (3・2・10) は初等関数では書けない。

さて, weak beam の電子は IP 以外では horizontal betatron 振動をしているとする。この時(3・2・10)により, IP でも horizontal kick しか受けない。2章で用いたのと同じ model を使おう。8 極磁石を beam-beam force に変えただけなので

$$H = \frac{\nu}{2} (X^2 + P^2) + \Phi(X) \delta_p(\theta) \quad (3 \cdot 2 \cdot 12)$$

$$\Phi(X) = \frac{Nr_e}{\gamma} \left\{ \frac{\beta^* X^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{16} \left(\frac{\beta^* X^2}{\sigma^2} \right)^2 + \dots \right\}$$

$$= - \frac{emc^2}{\gamma} \tilde{\varphi}(x, y) \quad (3 \cdot 2 \cdot 13)$$

という Hamiltonian を考えればよい*)。(3・2・13) は beam-beam-parameter ξ

$$\xi = \xi_x = \xi_y = \frac{Nr_e \beta^*}{4\pi\gamma\sigma^2} \quad (3 \cdot 2 \cdot 14)$$

によって

$$\Phi(X) = 2\pi \xi X^2 - \dots \quad (3 \cdot 2 \cdot 15)$$

*) 大体の手順を示す。p=dx/ds とする。

dx/ds=p, dp/ds=-k(s)x-dφ/dx δp(s) なので

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{k}{2} x^2 + \varphi(x) \delta_p(s)$$

$$\frac{x}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{2J} \sin\phi, \quad \frac{\alpha x + \beta p}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{2J} \cos\phi$$

の変換でHのはじめの2項は ν/RJ になる。∴

$$H = \frac{\nu}{R} J + \varphi(x = \sqrt{2J\beta} \sin\phi) \delta_p(s)$$

$$X \equiv x/\sqrt{\beta}, \quad P = (\alpha x + \beta p)/\sqrt{\beta} \text{ とおけば}$$

$$H = \frac{\nu}{2R} (X^2 + P^2) + \varphi(x = \sqrt{\beta} X) \delta_p(s)$$

時間を s から θ にして,

$$H = \frac{\nu}{2} (X^2 + P^2) + \varphi(x = \sqrt{\beta} X) \delta_p(\theta)$$

Appenaix I を参照せよ。

と書ける。振巾が小さくて Φ の中で X^4 の項を無視できるなら, パラメーターは ν と ξ しかない。 ξ が beam-beam interaction の強さを表すパラメーターであると考えるのはその為である。高次の項を入れると β^*/σ^2 がパラメーターに入ってくるが $\nu, \xi, \beta^*/\sigma^2 (= 1/\epsilon_x)$ の内の1つは Hamiltonian 全体のスケールに吸収されるので2つのパラメーター ν と ξ で H を特徴づけられる。*)

(3・2・12) は自由度1の time dependent Hamiltonian である。いろいろな近似法の空しさを2章で見てきたわれわれは, 即 tracking を採用しよう。図3-5に tracking の様子を示した。(a) は $\Phi(X)$ が無いもの, (b) は $\Phi(X)$ の第1項だけのもの, (c) は第1項と第2項 (X^2 の項と X^4 の項) (d) は $\Phi(X)$ の完全な形を入れたものである。 Φ の中で X^4 の項は8極磁石と同じ効果を与えることに注意せよ。(c) では stochastic region が見えているが, (d) では外側に KAM curve があることがわかる。振巾をどんどん大きくしていったら「 ∞ につながる

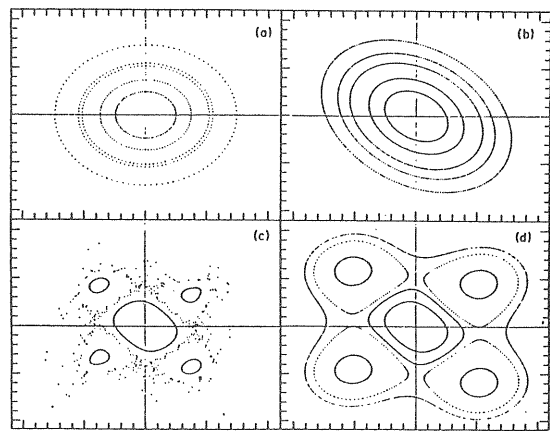


図3-5 H (3・2・12) による tracking (a) は $\Phi=0$, (b) は Φ の X^2 の term のみ, (c) は X^2 と X^4 の term のみ, (d) は Φ を全部入れたもの。[文献3-13より]

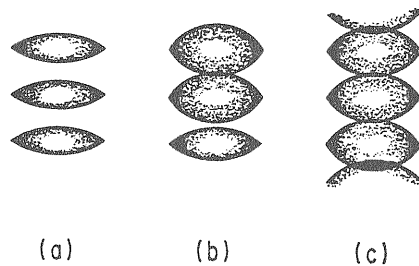


図3-6 各 resonance が太って行き overlapping resonance となる。

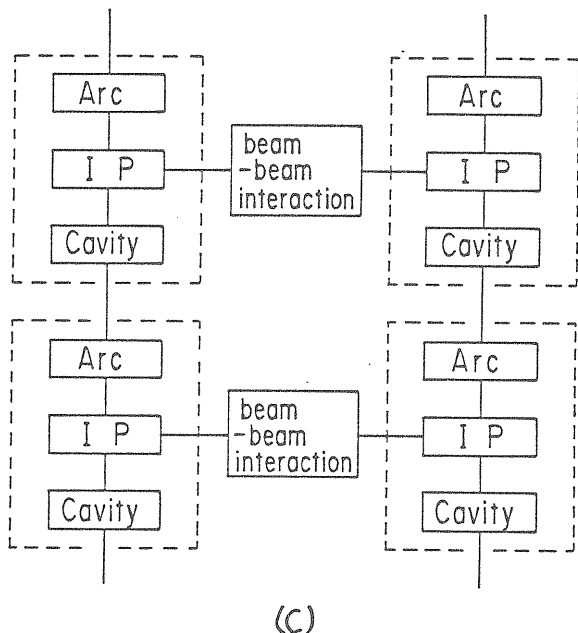
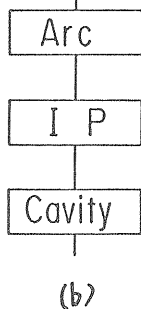
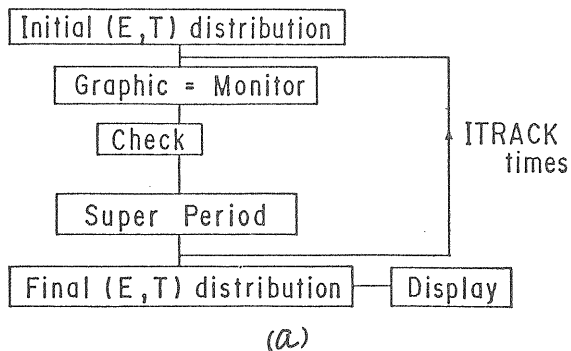


図 3-7 (a) tracking の基本的構成。(b) Super period の構成。(c) beam-beam interaction を入れた tracking

stochastic region] が出てくるであろうか。

実用的な面から云えば、あまり X の大きい所 (physical aperture の外側) に「∞につながる」stochastic region があっても関係ない。

*) これは自由度 1 に制限して単純化したためである。

問3-二) $\Phi(X)$ の第 1 項を摂動項として最近次の摂動で $\bar{v}(J)$ を求めよ。

[∞につながる stochastic region]

どうした場合に∞につながる stochastic region (∞ region) が出来るだろうか。1つの仮説的な理論 (というか考え方) がある。有名な Chirikov*) の overlapping resonance である。2.5で stochastic region の階層性 (入れこ構造) に触れた (図2-20)。図2-12の様に J-φ 平面での phase space をとって考えると、やはり separatrix 周辺に stochastic region が出てくる。(図3-6-a)。一般に摂動が強くなる (I が大きくなる) と各 stochastic region は太り始める (b)。横軸に I をとり、たて軸に J をとると、stochastic region は I が大きくなると拡って行きある所ですべての stochastic re-

*) 文献 3-5 又は 2-1, 2-5, 2-6

gion がつながる (c) であろう。resonance の巾と間隔は摂動論によってある程度わかるので、stochastic region がつながるぎりぎりの I_{max} を予測することができる。 I_{max} は (3・2・14) によって ξ の上限としても表わせる。いろいろの効果を取り入れて

$$\xi_{max} = \frac{I_{max}}{ef_0} \frac{r_e \beta^*}{4 \pi \gamma \sigma^2} \approx 0.04 \quad (3 \cdot 2 \cdot 16)$$

位の数が与えられている。*)

(3・1・22) と比べてみて、(3・2・16) は大変良く合っていると思うかもしれないが、そうではない。(3・1・22) は電子 ring での値である。overlapping resonance の話をしている時には radiation effect を考えていなかったはずである。radiation effect のない陽子 ring の場合 (3・1・22) は 1 ケタ小さくとらなければならないのが普通である。(電子の場合、radiation damping の効果で多少の外乱は打ち消してしまうが陽子ではそれが無いからである)。

overlapping resonance は academic な点では興味深い、beam-beam problem への武器となるには本質的に何か足りないのではないかと感じられる。

*) 文献 2-6, 又は 3-15

[strong-weak 近似で何が欠けているか]

明きらかに、一方の beam が不変不動であるという仮定が不満である。一方が他方に変化を与え、そ

れが自分にはねかえってくるという側面を考えるべきである。そうなるともはや自由度1ではすまない。自由度は 2×10^{11} 位になるであろう。つまり

1体問題 → 多体問題

へと発想を変えなければならない。tracking も1つの粒子を追うのではなく、多数の粒子を追う multi particle tracking が必要になる。

3.3 Multi particle tracking

3.2 で見た様に strong-weak 近似 (= 1 粒子の力学系) は、非摂動論的效果 (overlapping resonance) をとり入れても不満足なものであった。そこで simulation をするわけだが、1 particle tracking では話が済まないのは当然で、しかし 10^{11} 個の粒子を computer で追いかけるのは、現在 (かなり将来でも) の計算機の memory では足りない。仕方がないから 100 個 ~ 1000 個程の粒子を代表として用いる (super particle)。

beam-beam problem の様に何が主要な element であるか (β^* か ν か ξ か、もしかしたら真空度か、重力の影響はないか、等々) はっきりしない問題を扱うのであるから、できるだけ本物の加速器に似せた状況で tracking をするべきである。できれば一切の model (理論) から自由にやりたいが、それもまた不可能である。計算機の性能と予算の許す範囲で realistic にやるしかない。

[tracking の概要]

まず tracking program の全体像を考えよう。はじめに initial condition としてある分布を与えなければならない。理論的には

$$\rho(x, p_x, y, p_y, t, p_t) \quad (3.3.1)$$

と書くものを*

$$X(I), X'(I), Y(I), Y'(I), T(I), E(I), I=1, NP$$

の変数の値で表わす。NP は super particle の数である。

$$\beta = \sum_{I=1}^{NP} \delta(x-X(I)) \delta(p_x-X'(I)) \cdots \delta(p_t-E(I)) \quad (3.3.2)$$

と近似したことにもなっている。(NP = 10^{11} なら exact である。) その他に initial 分布を与える部分、計算結果を整理する部分などがあり、1つのbeam

*) t は cavity に到着する timing で測った時間
おくれ (reference particle と比較した時の)
 p_t は Energy の E_0 からのずれ。

に関する限り全体ととして、図 3-7-a のようになるであろう。「Graphic = Monitor」部分は各 turn ごとの bunch の形状等を計算、記憶する機構であり、「Check」は例えば rf の separatrix や physical aperture から出てしまった粒子をそれ以後 exclude する為のものである。「Display」部分は最終的に結果を整理する。tracking の核心部である super period は実際の ring に対応して図 3-7-b に示す様に構成される。Arc の部分は normal cell であり「IP」は interaction point 「Cavity」は rf cavity の部分である。

普通の衝突 ring では、実際の 1 super period の構成は Arc-Cavity-Arc-IP-Arc-Cavity-Arc と対称になっている。これを忠実に追うのは step 数の関係で不利なので Arc も Cavity も 1ヶ所にまとめてしまう。

以上が 1つの beam に対する tracking の概要であるが 2つの beam が逆に回って IP の所で beam-beam interaction をするので全体として図 3-7-c の様になる。IP の数は 2ヶ所とした。e⁺bunch が 2 個、e⁻bunch が 2 個、IP の数が 4 個等々の場合も (c) をやや複雑にするだけである。

[Arc と Cavity]

Normal cell では各粒子の運動が独立している。

まず longitudinal motion の tracking を説明しよう。

Arc において

$$T(I) = T(I) + \frac{\alpha}{N_{sp}} T_0 \frac{E(I)}{E_0} \quad (3.3.3)$$

$$E(I) = E(I) - U_0 \frac{1}{N_{sp}} \left(1 + 2 \frac{E(I)}{E_0} \right) + \gamma(I) \quad (3.3.4)$$

である*)。ここで N_{sp} は super period の数である。 $\gamma(I)$ は radiation の quantum effect を表わす Gauss 乱数で

$$\langle \gamma \rangle = 0 \quad (3.3.5)$$

$$\langle \gamma^2 \rangle = 4 \frac{U_0}{E_0} \frac{1}{N_{sp}} (\sigma^0_E)^2 \quad (3.3.6)$$

表 3-1 記号一覧

α	momentum compaction factor
U_0	reference particle の energy loss/turn
ρ_B	bending radius
E_0	beam energy
σ_E	energy spread
σ_E^0	natural energy spread
V_0	rf cavity の peak voltage
ω_{rf}	rf voltage の (angular) frequency
T_0	revolution time
T_ϵ	damping time/ T_0
ξ_c	linear chromaticity
$\epsilon_{x,y}^0$	natural emittance
$T_{x,y}$	transverse damping time/ $T_0 \approx T_\epsilon$
NP	# of super particle
N_{sp}	# of super periodicity

である。Arc における多数の光子放出の効果を γ ひとつで済ませます。個々の光子の energy 分布は gaussian ではないが、多数回まとめると必ず gaussian になる (中心極限定理)。

*) いろいろな係数の定義を表 3-1 にまとめてある。

(3.3.6) は (3.3.4) で tracking した結果, beam-beam force がなければ

$$\langle E^2 \rangle = (\sigma_E^0)^2 \quad (3.3.7)$$

になる様に決めてある*)。

(問 3-ホ) (3.3.3) と (3.3.4) で変換の Jacobian を計算せよ
cavity では

$$E(I) = E(I) + \frac{V_0}{N_{sp}} \sin(\omega_{rf} T(I)) \quad (3.3.8)$$

$$T(I) = T(I) \quad (3.3.9)$$

とする。以上で normal cell での tracking は終わる。transverse に関しても殆んど同様である。

*) (3.3.1) より 1 turn で E は平均として

$$\langle E(I) \rangle$$

$$\rightarrow \langle E(I) \rangle \left(1 - \frac{2}{T_\epsilon} \right) \approx \langle E(I) \rangle \exp \frac{-2}{T_\epsilon}$$

$$T_\epsilon = E_0 / U_0$$

であり $\langle E \rangle$ は T_ϵ turn 程度で 0 になる。定常状態では

$$\langle E^2(I) \rangle = \langle E^2(I) \rangle \left(1 - \frac{2}{T_\epsilon} \right)^2 + \frac{4}{T_\epsilon} (\sigma_E^0)^2$$

より $\langle E^2(I) \rangle = (\sigma_E^0)^2$ となる。

ここで $T_\epsilon \ll 1$ と仮定してある。

X, Y をまとめて Z と書くことにする。 Z, Z' は betatron 振動 + radiation effect を経験するので Arc では

$$Z(I) = M_{11} Z(I) + M_{12} Z'(I) + \gamma'(I)$$

$$Z'(I) = M_{21} Z(I) + M_{22} Z'(I) \quad (3.3.10)$$

となる。ここで M_{ij} は 1 super period 分の (linear) transfer matrix

$$M = \begin{bmatrix} \cos \mu_z + \alpha_z \sin \mu_z & \beta_z \sin \mu_z \\ -\gamma_z \sin \mu_z & \cos \mu_z - \alpha_z \sin \mu_z \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

$$\mu_z = 2\pi \left(\nu_z + \xi_{cz} \frac{E}{E_0} \right) / N_{sp} \quad (3.3.12)$$

である。Arc を IP \rightarrow IP で考えているので α, β, γ には IP の値を用いる。また γ' は Gauss 乱数

$$\langle \gamma' \rangle = 0$$

$$\langle \gamma'^2 \rangle = 4 \beta_z \epsilon_z^0 \frac{1}{T_z N_{sp}} \quad (3.3.13)$$

であり、定常状態で

$$\langle Z^2(I) \rangle = \beta_z \epsilon_z^0 \quad (3.3.14)$$

となる様に決めてある。

cavity では

$$Z'(I) = \left(1 - \frac{\Delta E(I)}{E_0} \right) Z'(I) \quad (3.3.15)$$

とする。 $\Delta E(I)$ は cavity における energy gain (3.3.8) の右辺第 2 項であって、

$$Z' = \frac{dZ}{ds} = \frac{v_z}{v_s} \rightarrow \frac{v_z}{v_s + \Delta v_s}$$

$$= v_z \left(1 - \Delta v_s / v_s \right) = Z' \left(1 - \frac{\Delta E}{E_0} \right)$$

$$(3.3.16)$$

ということである。ここで v_z , v_z は transverse, longitudinal 方向での粒子の speed。

(問 3-へ) (3.3.15) で $\Delta E(I) = U_0$ (平均としてはこうなる) として $\langle Z \rangle$ が $1/e$ になるのに要する turn 数を求めよ

ここでは、理解しやすい様に normal cell での track-ing を何回かの step に分けた。これを 1 回の step にまとめることはできるが、symplecticity を損なわない様に注意しなければならない。(damping 項を別にして)

[Interaction point] *)

IP ではまず双方の bunch の $\sigma_x, \sigma_y, \langle X \rangle, \langle Y \rangle$ を計算する。beam-beam interaction が無ければ、これ等は $\sqrt{\beta_x^* \epsilon_x^*}, \sqrt{\beta_y^* \epsilon_y^*}, 0, 0$ となるべき量である。beam-beam interaction のために σ_x , 等は natural なものからずれる。しかももはや Gauss 分布をしているかどうか疑わしい。1つの考え方としては、点電荷の作る $\tilde{\phi}$ (問 3-ハ) を足し合わせて 1つの粒子に働く力を計算する事があるであろう。これだと 1回の衝突ごとに NP²回の計算が必要とされ計算時間の観点から無理がある。現在の所双方の bunch の分布関数を gaussian で近似し、 $\sigma_{x,y}, \langle X \rangle, \langle Y \rangle$ を与えて (3.2.9) を用いて kick を決めている。実は (3.2.9) を微分して作る kick の式 (3.2.8) は複素誤差関数で書かれ、積分計算をしなくても kick が計算できるのである**)。この方式の発見によって beam-beam interaction の tracking が可能になったとも言える。これによって

$$\Delta Z'(I) = f(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, X - \langle \bar{X} \rangle, Y - \langle \bar{Y} \rangle) \quad (3.3.17)$$

と代数関数の形で書けることになる。ここで $\bar{\sigma}_{x,y}$ は相手の beam の $\sigma_{x,y}, \langle \bar{X} \rangle, \langle \bar{Y} \rangle$ も相手の beam の平均値である。

この時同時に

$$L = \frac{N^2}{2\pi} f_0 \exp - \left\{ \frac{\langle X - X' \rangle^2}{2\sqrt{(\sigma_x^*)^2 + (\sigma_x'^*)^2}} + \frac{\langle Y - Y' \rangle^2}{2\sqrt{(\sigma_y^*)^2 + (\sigma_y'^*)^2}} \right\} \\ \frac{1}{\sqrt{(\sigma_x^*)^2 + (\sigma_x'^*)^2} \sqrt{(\sigma_y^*)^2 + (\sigma_y'^*)^2}} \quad (3.3.18)$$

*) この記述は文献 3-9 に従った

*) 文献 3-6

によってその時点での luminosity を計算、記憶する。

(問 3-ト) (3.2.11) を示せ

この計算方法は速さの点ではすぐれているが、beam-beam force によって bunch の形が gaussian から大きくずれる場合には使えない。

[option]

tracking を実際の加速器の状況に近づける為に、machine にはつきものの様々な error を入れる様にする。主なものは i) phase advance μ (3.3.11) を各 super period ごとに変える。ii) IP での beam separation を人工的に作る。iii) IP の dispersion を入れる。の 3つであろう。

phase advance μ は、normal lattice の construction error で出てくるもので、主として 4 極磁石の強さの error から来る。この error は Hamiltonian H_0 , (2.3.1) に

$$H_{\text{error}} = f(\theta) \beta(\theta) \frac{X^2}{2} \quad (3.3.19)$$

をつけ加えるもので

$$\Delta \nu = \frac{1}{4\pi} \oint f(\theta) \beta(\theta) d\theta \quad (3.3.20)$$

を与える

(問 3-チ) 摂動論を用いて (3.3.20) を導け。

この error は当然のことながら lattice 全体に分布しており、各 super period ごとに μ/N_{sp} が異なることになる。

beam separation error は e^+ と e^- の bunch が異なる closed orbit を持つこと。或はそれを補正すべき separator の error から来るものである。closed orbit が e^+ と e^- で異なってくる mechanism の内有力なもの 1つが文献 3-7 で示されている。

IP においては dispersion η が 0 になる様に設計するが、少しは出てくる。これがあると IP において (3.3.17) を

$$\Delta Z' = f(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, X - \langle X \rangle + \eta_x \frac{E}{E_0}, Y - \langle Y \rangle + \eta_y \frac{E}{E_0}) \quad (3.3.21)$$

としなければならなくなる。つまり各粒子の energy deviation $E(I)$ も kick を決める要素の1つとなる。

これ等の error を人が勝手に入れると、その人の好み (私は3より4が好きだ) によって変な相関が出てこないとも限らないので計算機に乱数を用いて決めさせる。(このために使える computer code が別にある) *)。

*) 文献3-8

[tracking の結果]

beam-beam interaction の tracking code には、one particle tracking の PATRICIA の様に国際的なものは無くて、各研究所ごとに自前の program を作っている。よく知られているものに Myers の code*) がある。KEK の自前の code には Yokoya の code**) がある。2つの code を比較してみると、基本的な違いはない (図3-8)***)

この図は TRISTAN main ring における vertical tune と luminosity の関係を plot したものである。 ν_y が41に下から近づくと、本当の tune $\bar{\nu}_y$ は tune shift の結果+にずれて41の resonance line に乗ってしまうので luminosity が減っている様子が判る。

さて、luminosity limit についてはどうであろうか。図3-9****) に luminosity と current の関係を示した。但し current I は (3.1.18) の ξ_y によって表わされている。 $(\xi_y \propto I)$ 。(a)は ξ_y と luminosity L の関係。 L は beam が定常状態に達してから $T_e = U_0 / E_0$ (3.3.1の注) turn させた平均値である。(b)は

$$\bar{\xi}_y = \xi_y L / L_{\text{design}} \quad (3.3.22)$$

と ξ_y の関係である。 L_{design} は (3.1.19) によって与えられる値で、通常 $\beta_y^* \ll \beta_x^*$ となるので

*) 文献3-9

**) 文献3-10

***) 提供 E. Kikutani and H. Koiso

****) 文献3-9より

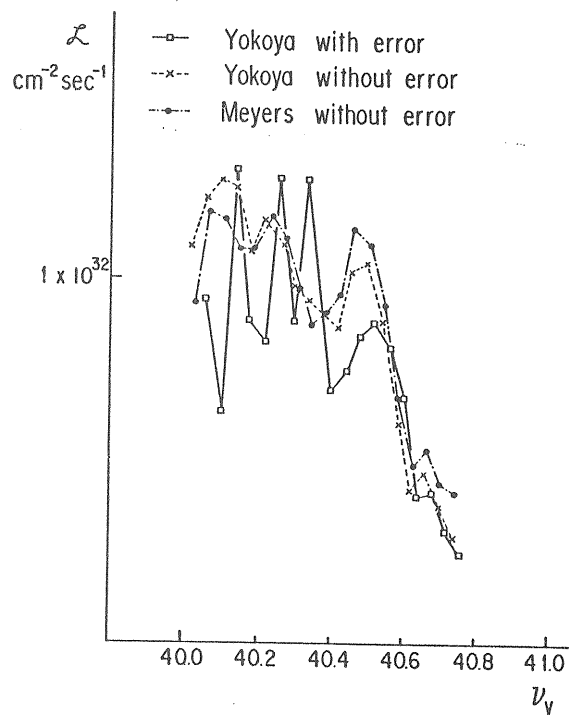


図3-8 Myers の code と Yokoya の code による tracking の結果

$$L_{\text{design}} \approx \frac{I \gamma}{2 e r_e} \frac{\xi_y}{\beta_y^*} \quad (3.3.23)$$

である。これより

$$\bar{\xi}_y = \frac{2 e r_e \beta_y^*}{\gamma} \frac{L}{I} \propto \frac{L}{I} \quad (3.3.24)$$

である。 ξ_y が 0.06 位で $\bar{\xi}_y$ はほぼ一定になり、 I をあげていくと $L \propto I$ になる。(3.1.16) の傾向が見えている。

[tracking の結果の解釈]

上記の結果は beam-beam limit (3.1.22) を、定量的に再現しているというべきであろう (0.03 は大体の値—どんぶり勘定である)。 $L \propto I$ の傾向も出てきた。要するに beam-beam problem の基本的な所は再現できたことになる。これから2つの結論が得られるだろう。

1. strong-weak では不足で、双方の bunch が dynamical に変形していくことが essential
2. tracking でとり入れた条件だけで十分であり、他の要因は無視してよい

これは大変な収穫である。今後は tracking の結果を理論的に解釈する方向と、tracking を実用的にオペレーションの道具として使用する方向の2つの道があることになった。(こう云いきるにはまだ早いと

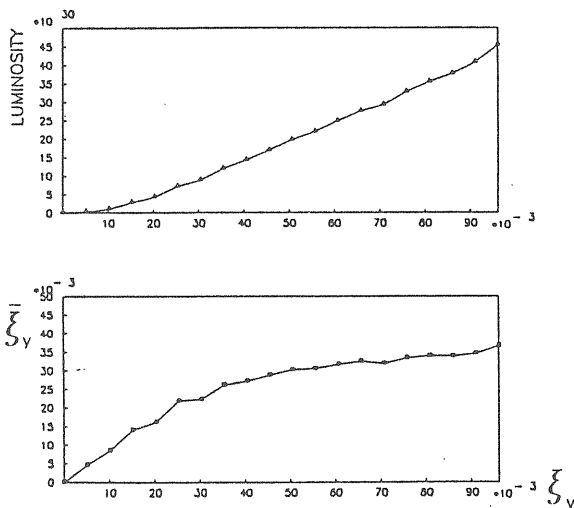


図 3-9 tracking による beam-beam limit (LEP のパラメータによる)。^[文献 3-9 より]

いう感じもするが、そういう方向に事態が動いていることは確かである)

3.4 Tracking for one collision

3.3 で扱った Myers の code も Yokoya の code も、beam の distribution function を gaussian で近似して、kick もそれで決めていた。また super particle 数は 100 ~ 200 で済ましているものであり、これらの点が不満として残る。(計算機の性能から仕方ないが)。しかし、この近似が絶対許されない場合もある。

1 TeV - 1 TeV の e⁺e⁻ linear collider^{*)} の可能性を追求すると、蓄積 ring の場合とは別な意味で beam-beam interaction が問題になってくる。linear collider では 1 つの bunch は 1 回しか interaction をしないのであるが、1 対の bunch がすれ違う間に bunch の先頭が強い収束を受けてしばらく強烈な磁場を作る → そのため synchrotron radiation も強烈に起こり電子がエネルギーを失う → 1 TeV × 1 TeV のつもりが 300 GeV × 300 GeV の実験になったりする、又は e⁺e⁻ のつもりが e⁻γ (photon) の実験になってしまう。ということが起きる。

*) 文献 3-11

こういう現象を tracking で調べるには

- i) 時々刻々の distribution function を追い、各時刻に
- ii) kick の potential $\tilde{\phi}(x, y)$ (3.2.8) を各 Z (longitudinal の座標) ごとに計算する

iii) それによる相手の beam の変形を計算する。

iv) 次の時刻に移る。

という手間をかけなければならない。

図 3-10 にこの様な tracking の結果を示した。^{*)} a, b, c 共に右から左へ行く bunch の形を描いたもので上が horizontal, 下が vertical の分布である。

(a) は衝突前, (b) は衝突中, (c) は衝突後である。衝突の最中から bunch の vertical 分布が細くなって行くのが見える。この計算は双方 8000 個の super particle を用い、5 分程の CPU time を要した (M-280H で)。

beam-beam force の研究が進むにつれて、いずれはこの様な simulation を蓄積 ring の為にやる様になるであろう。

*) 文献 3-12

[3章のまとめ]

beam-beam problem は tracking によってほぼ完全に再現できる。もはや, unknown factor に脅かされることなく理論的な研究を進めることができるし、実用上の道具として tracking を用いることもできる。

[文献について]

本 text は tracking に主眼をおいているので、beam-beam の解説としては完全に不足している。この意味で文献リストに加えたいのは 3-13), 3-14) であり、compact に要点をまとめてあり、筆者にも大変役に立った。

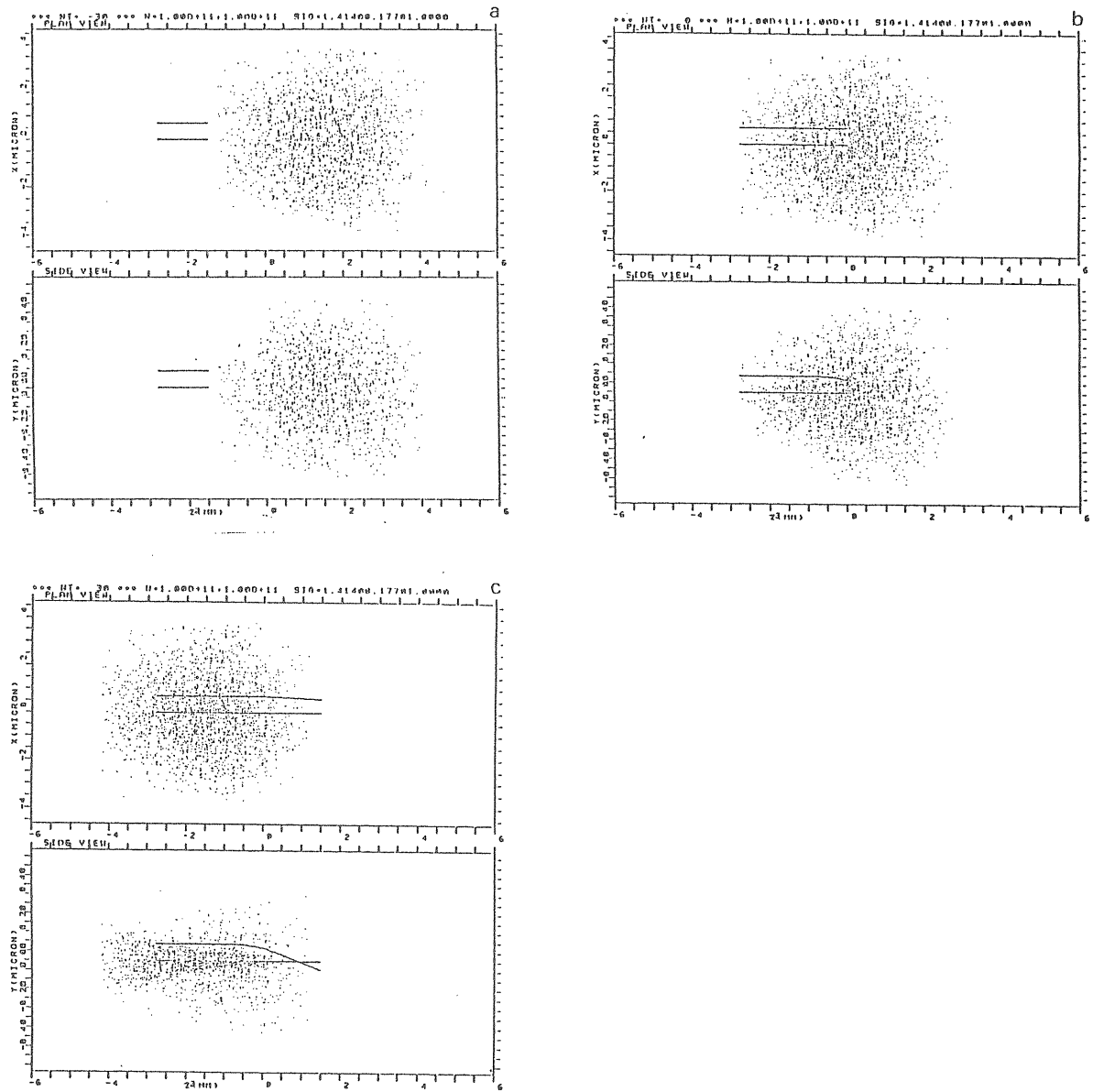


図 3-10 1 TeV × 1 TeV collider での 1 回の collision。(a) 衝突前, (b) 衝突中, (c) 衝突後である。衝突の相手は書いていないが, 相手の bunch の中央にいる粒子と, 中心から少しはずれた粒子の軌道が実線で書いてある。[提供 K, Yokoya]

4章 beam—environment interaction と tracking

[この章の内容] Beam と環境の電磁的相互作用は, bunch の粒子間に働く力 = wake force = の形で記述することができる。wake force は非常に nonlinearity の強い力であり, beam の intensity が増すと bunch の形状を大きく変え, また instability をひきおこす。TRISTAN における beam intensity の limit はこの effect で決まると思われる。wake force の影響を調べるには multiparticle tracking によるしか方法がないが, transverse motion については理論と tracking はよく一致する。longitudinal motion では理論と tracking は定性的に異なる結果に導く。

4.1 wake function

beam 内の電子*)は beam pipe や cavity の中に電磁場を作る。多数の電子が ring を回っている時, 例えば cavity に早く到着した電子 (driving particle) は Maxwell eq. に従って cavity の中に電磁場を作り出す。遅れてきた電子 (test particle) はこの電磁場から Lorentz 力を受ける。結局 driving particle が test particle に力を及ぼすことになる。

この力の為に bunch 内の各電子の運動を独立に議論することはもはや許されなくなり, 個々の電子の運動を記述するのに他のすべての粒子の運動の情報が必要になる。つまり beam—environment interaction によって beam の運動は

1 粒子問題 → 多体問題

になった。

*)本章では主に (陽) 電子 beam について述べる。

[wake force]

3章で見た様に相対論的な電子は transverse 方向のみに電場と磁場を作る。もし beam pipe が平坦な完全導体であれば走っている電子の作る電磁場は図4-1の様なものである。つまり電子の作った電気力線は pipe の壁に現れる wall charge に完全に吸収され, wall charge は電子と共に pipe を走って行き, 同時に wall current となって ϕ 方向の磁場 (図3-4) を壁の表面で完全に打ち消す。壁が完全導体だから何の energy loss もなく電子はあたかも自由空間であるかの様に進んで行くのである。

電磁場のこのような振るまいには, 同時に, 壁がZ

方向 (進行方向) に一様であることも重要な役割をはたしている。電磁場の方程式 (Maxwell eq.) が2次元的に書けたとしても (公式集4参照), 境界条件がZ方向に一様でなければ2次元的な電磁場は得られない。このため pipe が smooth でない所では, 図4-1は図4-2-a, b の様に書きかえられねばならない。(a)はいわゆる bellows とよばれる「じゃばら」であり, (b)は rf cavity の模型である*)。(a)も (b)も, pipe がZ方向に一様な所では, 図4-1の様な電場を作っているが, 一様でなくなると, 場が乱れる。Z方向の一様性が無くなったらすぐに場が乱れる様子は図4-2-c に見える**)。

この場の乱れは wall charge と wall current が, 「じゃまもの」のために粒子と一緒に走れなくなり, 遅れたためと見ることもできる。

図4-2から明らかな様に, pipe の中心を通る粒子でも電磁場を excite し, 後ろに残していく。電子は光速で走っているのに, 自分の前方には場を作らない。これを因果律 (causality) と呼ぶ。causality の結果

*) bellows も cavity も回転対称性 (ϕ 方向の一様性) を仮定している。

**) これらの図は点電荷でなく, Z方向に少し拡がった電荷分布に対して書かれている。この拡がりを無限小にした極限が点電荷である。

driving particle は test particle に力をおよぼすが逆のことは無いことになる。

さて, driving particle が test particle におよぼ

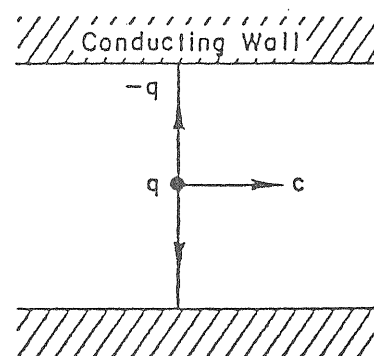
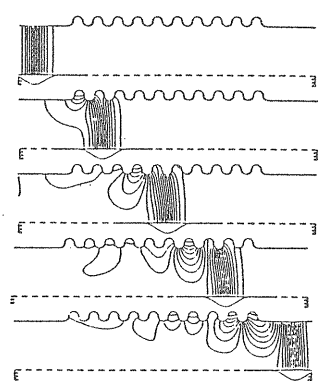
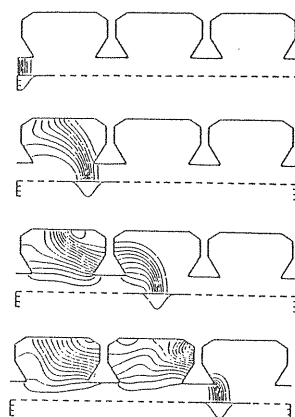


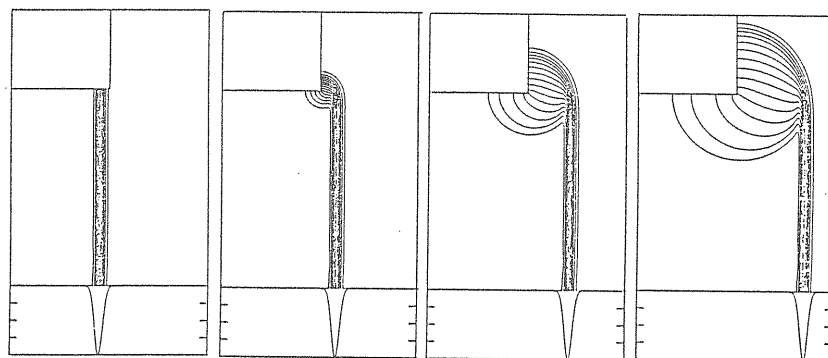
図4-1 平坦な完全導体の beam pipe の中を走る荷電粒子が作る電場 [文献4-1より]



(a) bellows.



(b) cavity 通過時の電場。壁に角があるとすぐに電場は乱れる。



(c)

[T. Weiland, TN-84-007, S. Kamada and Y. Kimura, editors (1984) より]

図 4-2

す力を wake force と言う。wake force は両 particle の相対的な位置の他に、ring 上の場所にもよる (smooth pipe の所では $\cong 0$) 複雑な関数である。そこで wake force をある長さ L で平均してしまうのが便利で良い。 L としては wake force の平均が、両 particle の距離 Z だけの関数になる程度の長さをとる。ring 1 周で平均してしまうのが最も単純であるが、もっと短い区間で平均してもよい。(この方法は 2.2 でやった一周平均近似に似ているので何となく危なっかしいと言えるが、これをやらないと複雑で手がつけられなくなるので、とりあえずは平均された wake force を認めて先に進む。)

[wake function]

wake force を平均化したことにより、再び Z 方向の一様性がある意味で成り立つことになる。更に beam の環境は常に回転対称性 (φ 方向の一様性) を

持つことも仮定しよう。そうすると、Maxwell eq. や Lorentz 力の式は簡単な形になる。

1 つの bunch の distribution function を $\rho(x, y, z)$ とすると、bunch 中の 1 つの粒子 e が、前方の粒子から受ける力は wake function

$$W_m(Z) \quad m=1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

と ρ によって公式 5 の様に記述できることが知られている。^{*} wake force が wake function だけによって簡単な形にまとめられたのは

平均化による Z 方向の一様性
 φ 方向の一様性の仮定

*) 文献 4-1

のおかげである。(wake force の平均化に用い

公式 5 wake function

電荷分布 $\rho = \tilde{\rho}(x, y) \delta(z - ct)$ が m 次の moment

$$M_m = \int \tilde{\rho}(x, y) r^m e^{im\theta} dx dy$$

を持たば、 Z だけ遅れている test particle e に

$$F_x + iF_y = e W_m(Z) m r^{m-1} M_m e^{-im-1} i \theta$$

$$F_z = -e W'_m(Z) r^m \text{Re}(M_m e^{im\theta})$$

の wake force をおよぼす。力は一般に $m = 0$.

1. 2. …… の重ね合わせになる。

電荷分布 $\rho = \rho(x, y, z)$ が作る wake force は

$$F_x + iF_y = e \int dz' dx' dy' \sum_m W_m(z' - z) m (x - iy)^{m-1} (x' + iy')^m \rho(x', y', z')$$

$$F_z = -e \int dz' dx' dy' \sum_m W'_m(z' - z) r^m r'^m \cos m(\theta - \theta') \rho(x', y', z')$$

となる。 W'_m は W_m の微分である。

た)長さLの区間を test particle が走ることによって、この粒子は

$$\text{energy gain} \quad \Delta E = F_z L \quad (4.1.2)$$

$$\text{Transverse kick} \quad \Delta x' = \frac{F_x}{E_0} L \quad (4.1.3)$$

を受ける。y 方向の変位を無視し、m=0 と 1 だけとれば

$$\Delta E = -eL \int_0^\infty dZ W_0'(Z) \rho(Z) - eLx \int_0^\infty dZ W_1'(Z) d(Z) \quad (4.1.4)$$

$$\Delta x' = \frac{eL}{E_0} \int_0^\infty dZ W_1(Z) d(Z) \quad (4.1.5)$$

ここで

$$\rho(Z) = \int dx dy \rho(x, y, Z) \quad (4.1.6)$$

$$d(Z) = \int dx dy x \rho(x, y, Z) \quad (4.1.7)$$

である。 $\rho(Z)$ は longitudinal distribution, $d(Z)$ は dipole distribution function である。

ring 1 周には、この様な長さLの区間がいくつかあるが、1 turn 分の energy gain などは、これ等の区間の足し合わせになる。

wake function (4.1.1) は、beam とは独立に、環境 (rf cavity の形等) だけから決まる関数である。但し、1 つの cavity の wake function というのはあまり意味がない。wake function はある区間で平均化された wake force を表わすからである。

公式 5 からわかる様に、wake function が不変ならば、

$$\text{wake force} \propto I$$

である。bunch 全体の粒子数 (beam current) が 2 倍になれば、 ρ の濃さも 2 倍になり、 F も 2 倍になる。

[TBCI]

wake function $W_m(Z)$ を計算するのは非常に大変である。これは普通 computer code TBCI*) を用いる。(図 4-2 もこれを用いて書かれた)。TBCI では先行粒子を走らせて、その作る電磁場を時々刻々おいかけ、先行粒子から Z だけおくれた点における wake force をやはり時々刻々計算し、それを

積分して W_0, W_0', W_1 を計算する。詳細は肥後氏の稿を参照のこと。

TBCI も sense としては tracking である。

*) 文献 4-2

[potential well]

beam 内粒子の longitudinal motion を考えよう。もし wake force がなければ、1 つの粒子の longitudinal motion は

$$H = \frac{\alpha}{2c} \delta^2 + \frac{\omega_s^2}{2c\alpha} t^2 \quad (4.1.8)$$

の Hamiltonian で記述できる。ここで $\delta = P_1/E_0$, ω_s は synchrotron angular frequency である。

時間パラメータは $s = R\theta$ である。Hamilton eq. は

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \delta} = \frac{\alpha}{c} \delta \quad (4.1.9)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\omega_s^2}{c\alpha} t \quad (4.1.10)$$

となる。(4.1.10) の右辺は 1 turn あたりの energy gain / ($E_0 2\pi R$)

である。

wake force があると (4.1.10) を

$$\frac{d\delta}{ds} = g(t) = -\frac{\omega_s^2}{c\alpha} t - \frac{e^2 L}{T_0 E_0 c} \int_{-\infty}^t dt' W_0'(t-t') \rho(t', s) \quad (4.1.11)$$

としなければならない*)。ここで (4.1.4) の第 1 項のみをとった。(longitudinal motion のみを考えている場合は $m=0$ の項しかない)。(4.1.11) の ρ は一般に s の関数であるが、もし定常状態が実現していて ρ が s によって変化しないのであれば ρ を与えられた関数として、(4.1.11) を

$$H = \frac{\alpha}{2c} \delta^2 - \int_0^t g(t') dt' \quad (4.1.12)$$

という Hamiltonian から導かれる Hamilton eq. と考えることができる。つまり wake function の存在によって potential が

*) W_0 は Z の関数として定義した。 $Z=ct$ として t の関数と見なおすことにする。

$$\frac{\omega_s^2}{2c\alpha} t^2 \rightarrow \frac{\omega_s^2}{2c\alpha} t^2 + \frac{e^2 L}{T_0 E_0 c} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' W_0'(t'-t'') \rho(t'') \quad (4.1.13)$$

と変化したと見なせることが判った。wake functionによる potential の変化を potential well distortion (PWD) と呼ぶ。PWD の発想は定常状態における粒子の運動を、他の粒子が作る平均的な場の中の1粒子運動として解釈しようとするものである。

電子は radiation の quantum effect によって強制的に広がっているが、(4.1.13) の場の中では、定常分布は

$$\rho_{\text{PWD}}(t) = A \exp \left\{ -\frac{c}{\alpha \sigma_0^2} \times (4.1.13) \text{の右辺} \right\} \quad (4.1.14)$$

となるはずである。ここでAは normalization factor。(4.1.13) の右辺の ρ としても $\rho_{\text{PWD}}(t)$ を入れなければならないので(4.1.14)は ρ_{PWD} を決める方程式となる。

PWD の様な平均場近似は、定常状態が存在するなら(4.1.14)を満たすはずだ、ということしか主張していない。(定常状態というものはないかもしれない)。この仮定と近似によって自由度10¹¹の time dependent 系が自由度1の autonomous 系に変わってしまうのだから、ものすごい近似である。

[bunch lengthening]

平衡状態では(4.1.14)が成り立っているとしよう。平衡状態に十分近い状態では、beam の分布関数は

$$\rho(t,s) = \rho(t)_{\text{PWD}} + \psi(t,s) \quad (4.1.15)$$

の形をしているとして ψ が従う方程式を考えてみよう。

ψ は小さい値をとる関数である。図4-3-aを見よ。 ρ が s の変化に伴ってする複雑な運動を ρ_{PWD} のまわりの微少振動と考えてしまうわけだ。

一般に ρ が従う方程式は非線型の微分積分方程式であって

$$\frac{\partial}{\partial s} \rho(t,s) = f(\rho, t, \partial_t) \quad (4.1.16)$$

のようになっていると考えられる*)。 ρ の時間変化を決める式が ρ の複雑な関数になっている。但し f は知られた関数で wake function 等によって書かれて

いる。(f は t の微分オペレーターをも内包している) 定常状態 $\rho = \rho_{\text{PWD}}$ では

$$0 = \frac{\partial \rho_{\text{PWD}}}{\partial s} = f(\rho_{\text{PWD}}, t, \partial_t) \quad (4.1.17)$$

である。(4.1.16)に(4.1.15)を代入すると

$$\frac{\partial \psi(t,s)}{\partial s} = f(\rho_{\text{PWD}}, t, \partial_t) + F(\rho_{\text{PWD}}, t, \partial_t) \psi + \psi^2 \text{の項} + \dots \quad (4.1.18)$$

*) 実際はもっと複雑な Vlasov eq. だが、ここでは簡単化して理論の荒スジだけを見る。

となる。ここで

$$F(\rho_{\text{PWD}}, t, \partial_t) = \left. \frac{\partial f}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_{\text{PWD}}} \quad (4.1.19)$$

である。 $\psi \ll 1$ として ψ^2 以上の項を捨て、(4.1.17)を使えば

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = F(\rho_{\text{PWD}}, t, \partial_t) \psi(t,s) \quad (4.1.20)$$

という線型齊次の微分方程式になった。適当な規格化完全系 $\psi_l(t)$ を用いて

$$\psi(t,s) = \sum_l a_l(s) \psi_l(t) \quad (4.1.21)$$

と展開してやれば

$$\frac{d}{ds} a_l(s) = \sum_{l' \neq l} \alpha_{ll'} a_{l'}(s) \quad (4.1.22)$$

$$\alpha_{ll'} = \int \psi_l^*(t) F \psi_{l'}(t) dt \quad (4.1.23)$$

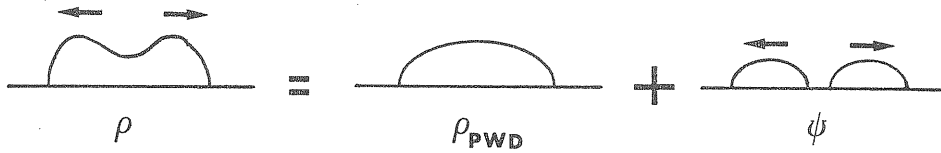
という連立線型微分方程式を得る。

$$a_l(s) = e^{i\Omega_l \frac{s}{c}} \quad (4.1.24)$$

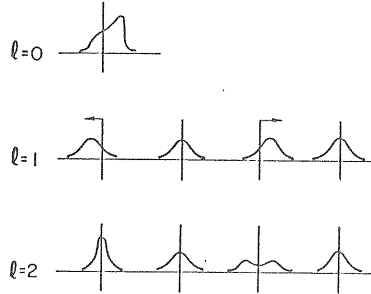
とおいてやると Ω の満たすべき高次(無限次)の方程式を得る*)。その解は

$$\Omega = \Omega_l = l\omega_s + W_l \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.1.25)$$

の様に書ける筈である。ここで W_l は wake がなくなると0になる項である。これを用いれば



(a) Potential well distortion による static distribution とそのまわりの線型振動。



(b) ψ の各 mode の運動 [(b) は文献 4-1 より]

図 4-3

$$\psi(t, s) = \sum_l e^{i\Omega_l s} \tilde{\psi}_l(t) \quad (4.1.26)$$

$$\tilde{\psi}(t) \text{ は } \psi_l(t) \text{ の線型和} \quad (4.1.27)$$

と書いて解が求まる。 Ω_l を mode l の固有値 $\tilde{\psi}_l$ を mode l の固有関数と呼ぶ。wake が十分小さければ (4.1.26) の各 mode は図 4-3-b の様な運動をする。

*) Sacherer の方程式 (文献 4-6) がこれにあたる。

wake が大きくなると Ω_l は $l\omega_0$ からずれて行き、各 Ω_l のうち 2 つの Ω_l が等しくなった所で imaginary part が出る。 Ω_l と Ω_l' が等しくなる付近では

$$\Omega_l = \alpha + \sqrt{\beta} \quad (4.1.28)$$

$$\Omega_l' = \alpha - \sqrt{\beta}$$

となっていて、wake が大きくなるに従って β は小さくなる。 $\beta < 0$ になると

$$\hat{\Omega}_l = \alpha + i\sqrt{-\beta} \quad (4.1.29)$$

$$\hat{\Omega}_l' = \alpha - i\sqrt{-\beta}$$

となって、どちらも複素数になる*)。こういう振る舞いは、(4.1.20) の様な系では一般的に起こることである。

(4.1.26) を見れば、 Ω_l が複素数になると指数の肩が実数になり、一方の mode は s が大きくなるに従って増大して行くことが判る。

*) Ω_l と Ω_l' が $\Omega_l = -a + \sqrt{b^2 - ac}$, $\Omega_l' = -a - \sqrt{b^2 - ac}$ の様になっていると $b^2 > ac$ なら Ω_l, Ω_l' は異なる実数, $b^2 = ac$ だと $\Omega_l = \Omega_l'$, $b^2 < ac$ なら両方とも imaginary part を持つ。

wake force が強くなって、ある所で $\Omega_l = \Omega_l'$ となるのを mode coupling, それ以上 wake が強くなった所でどちらかの mode が増大していくことを mode coupling による bunch lengthening という。また、mode coupling が初めておこる current を threshold current と呼ぶ。ある wake force の時の mode coupling の様子を図 4-4 に示した。

実際の wake function は非常に複雑で、上記の様な計算で各 Ω_l を求めるのは難しいが ρ_{PWD} が gauss 分布であるという仮定の下に、各 Ω_l を計算する方法が Suzuki-Chin-Satoh*) によって見出だされ、それを基にした computer code が実用化されている。**)

*) 文献 4-3

**) Longitudinal Mode Mixing by Satoh's Hybrid Mode Formulation.

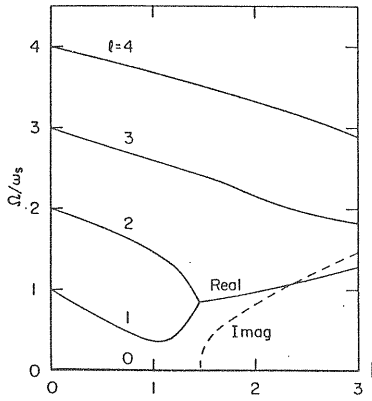


図 4-4 ある wake function を仮定した時の mode coupling の起き方

[wake force による instability]

ある bunch が作った wake field がなかなか減衰しない場合、次の bunch に影響を与える。この bunch もまた wake field を作る。この様にして綿々と効果が続いていくのを multi-turn effect と呼ぶ。これによる instability には、複数個の bunch が互いに影響しあう coupled-bunch-instability*) 等がある。この効果はとても大きく、必ず起きるといっても良い程であるが、適当な feed back system で解決できると思われる。

一方 1 つの bunch 内で先行粒子が後ろの粒子を transverse 方向に kick する為におきる効果は fast-head-tail instability を呼ばれ、beam current を制限する主要因になる。transverse motion についても mode coupling 理論に基づく複雑な理論があるが省略する。**) これ等の問題は非常に複雑であり、大胆な近似を重ねていくことによって理論が作られている。1 つ 1 つの近似は reasonable でも、集めてみると現実から大分離れている可能性もある。

*) 文献 4-4 **) 文献 4-5

4.2 computer code

strong head-tail effect に対しては、現象が重要であるだけに、近似解で満足するわけにはいかず、multi particle tracking が必要とされる。

実は、transverse motion に関しては「もし、longitudinal distribution は与えられており不変とすれば、transverse instability の起こり方は tracking と理論が良く合う」ことが観測されており

longitudinal に固定された分布を仮定する (longitudinal wake を高々 PWD の範囲でしか入れない) 限り tracking の必要はないと思われる。それ故、tracking の主要な問題は、いかに longitudinal な集団運動を正しく与えるかに尽きる。

[tracking code]

longitudinal motion の tracking の方法は normal cell に関しては 3.3 で見た beam-beam の tracking と全く同じである。(3・3・3) から (3・3・9) を見よ。唯一の変更は、図 3-7-b で IP を「WAKE」にするだけである。

*) K. Yokoya ; private communication.

WAKE 部分では、(4・1・4) の第 1 項を用いて各粒子の ΔE を計算する。この式のまま忠実にやると NP^2 回の操作が必要になって実際的ではないので longitudinal の座標 T についていくつかの mesh に切って計算する。各 mesh には前から順に番号 J_{bin} をふっておく。I-th super particle が入っている bin の番号を $K_{bin}(I)$ と書けば (4・1・4) による energy gain は

$$E(I) \rightarrow E(I) - \frac{Q}{N_{sp}} \sum_{J_{bin}} N(J_{bin}) W(J_{bin} - K_{bin}(I)) \quad (4.2.1)$$

である。ここで

$$Q = \frac{T_0}{NP} \times (\text{beam current}) \quad (4.2.2)$$

は各 super particle の電荷であり、 J_{bin} の和は $J_{bin} > K_{bin}(I)$ のすべての bin についてとる。 $N(J_{bin})$ は J_{bin} の bin に入っている粒子数、

$$W(J-I) = LW_0'(\Delta(J-I)) \quad (4.2.3)$$

である。 LW_0' は 1 super period ごとの平均化された wake force である。 Δ は mesh の巾。

このままやると各粒子の受ける wake force が図 4-5 の実線の様になって滑らかさに欠けるので、点線のように変える。(各粒子が各 bin のどの辺にいるかによって、受ける力を変える)。

以上で tracking code ができる。 $W(4.2.3)$ の値は TBCI の結果から input するのである。

こうして作った program で tracking をしてみると、結果が tracking の条件によって変化することに

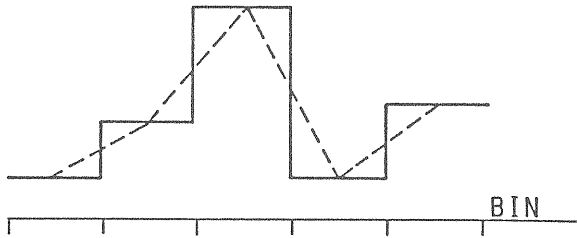


図4-5 wake force の連続化

気がつく。

[NPによる不確定性]

Trackingの結果は、NPに依存する。一般に Gauss 分布に近い分布では σ_T 等に $1/\sqrt{NP}$ 程度の不確実性が生じる。しかしこれは、評価の可能な不確実性であるので問題にはならない。しかし、粒子間の相互作用—wake force があると話しが違ってくる。この時、 σ_T の $1/\sqrt{NP}$ の誤差が wake によってどう増幅されるか考えてみよう。

*) σ_T は時間で測った bunch length

Bin 分けの効果を無視すれば、各 wake section で

$$\Delta E(I) \propto \frac{1}{NP} \sum_j W_0 (T(j) - T(I))$$

である((4.2.1), (4.2.2) 参照)。簡単のため、constant wake W_0 を仮定すれば

$$\Delta E(I) \propto \frac{W_0}{NP} \times (I \text{ より前方にある粒子数})$$

となる。Bunch の中央付近にいる粒子から見ると、自分より前方にある粒子数は、大体 $1/2$ ($NP \pm \sqrt{NP}$) であり、 $\Delta E(I)$ には \sqrt{NP}^{-1} に比例した不確実性がある。それ故、各 WAKE section で、結果的に乱数的な energy gain (loss) があることになり、effective には、Arc での radiation の quantum effect と同様の効果になる。この乱数 $\gamma'(I)$ について正確な評価を与えるのは難しいが

$$\langle \gamma'^2 \rangle \propto \frac{|W_0|^2}{NP}, \quad (\text{ensemble 平均}) \quad (4.2.4)$$

と大体評価できる。Bunch の前方にいる粒子は、比較的弱い wake force を受けるが、粒子数有限に由来するゆらぎは大きくなる。後方にいる粒子は逆に、

大きな wake force を受けるが、ゆらぎは小さいはずである。このゆらぎ $\langle \gamma'^2 \rangle$ のために σ_E , σ_T には、大体 $|W_0|/\sqrt{NP}$ に比例した非現実的な部分があると予想できる。

この様な、分布のゆらぎによる σ_E の増分は、 γ' を gaussian と考えれば、(3.3.6) を参考にして

$$\langle E^2 \rangle = (\sigma_E^0)^2 + \text{wakeによる physicalな増分}$$

$$+ \frac{T_\epsilon}{4} \langle \gamma'^2 \rangle \quad (4.2.5)$$

となり、 σ_E についても同様のことが結局起こるので

$$\frac{(\sigma_T)_{\text{un}}^2}{(\sigma_T^0)^2} \equiv \frac{(\sigma_T)_{\text{tr}}^2 - (\sigma_T)_{NP=\infty}^2}{(\sigma_T^0)^2} = d \frac{1}{NP}, \quad (4.2.6)$$

$$d \propto T_\epsilon |W_0|^2, \quad (4.2.7)$$

と考えられる。ここで添字「un」は unphysical, 「tr」は tracking の意味である。

NPが多くなると tracking に時間がかかるが、(4.2.6) の為にもどうしてもある程度より大きい NP を用いなければならない。特に、current を上げていくと d は I^2 で大きくなるので、それだけ大きい NP を用いなければならない。

実際には NP を段階的に大きくしていき

$$\sigma_T^2(NP) = \text{const} + \frac{d}{NP} \quad (4.2.8)$$

で fit できる所まで NP をもってゆけばよい*)。(4.2.7) は特に damping time の小さい場合 (injection の時など) には非常に重大である。

逆に NP を十分大きくとれば、tracking の結果は信用できる。

*) これは electron ring の話である。electron には damping 効果があるので σ_T はともかくどこかに落ち着くが、proton ring の tracking では σ_T はいくらでも大きくなって行く。

4.3 Tracking の展望

[理論との対応]

TRISTAN main ring の parameter を用いて、wake には constant wake を用いた tracking の結果、得られた current と bunch length 等の関係が図

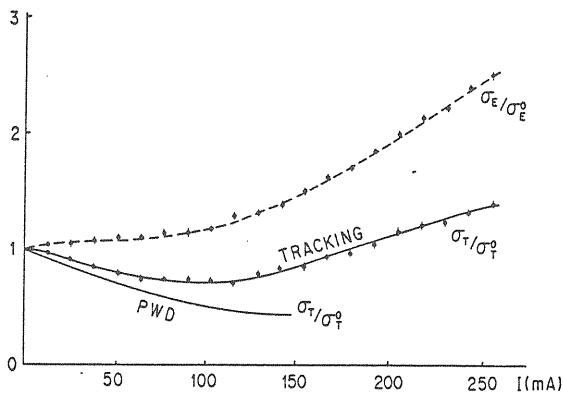


図 4-6 constant wake の場合の tracking の結果と PWD の解を数値的に解いたものと
の比較

4-6 に示してある。PWD と書いたのは、PWD の式 (4-1-14) に同じ wake function を入れて数値的に解いたものである。tracking は T_s の 10 数倍の turn 数やって平均の σ_T を出したものであり、もし定常状態が存在すれば、当然 PWD の解と一致するはずであるが current ≈ 0 付近から有意の違いが出ている。PWD からのずれ (4-1-15) の ψ が非常に大きいとも言えるが、PWD と tracking は相容れない様に見える。

PWD による Hamiltonian (4-1-12) は time independent であって、1 周平均近似にもなっている。一方 tracking では wake force は localize しており、1 周平均近似からのずれが見えているとも思える。

次に 4.1 で触れた bunch-lengthening の threshold-current を Satoh's hybrid mode formulation を用いた数値計算で求めた所、 $l=1$ と -1 の mode が $I=68\text{mA}$ で couple すると出た。図 4-6 では 68mA 位の所で何か起きている様には見えない。またこの数値計算での mode coupling の起り方は図 4-7 の様になっているが、tracking による spectrum analysis では、 $l=1$ mode の振動数がこの様に大きく動くとは見えない (図 4-8)。

Tracking の結果と理論的予測がかなりずれていることが判った。

[計算時間の問題]

longitudinal motion の tracking は計算時間を度外視すれば信頼できる結果を出す。問題は計算時間であって、例えば TRISTAN の main ring の injection energy に対応する tracking をするには、vec-

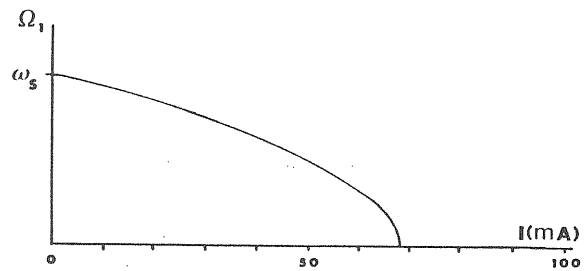


図 4-7 図 4-6 の wake の時の mode coupling の起り方。beam current と $l=1$ mode の固有値 Ω_1 ($\Omega_1 = -\Omega_1$)。

tor 型の supercomputer (小柳氏の項参照) でも最低 1 時間はかかる。実際の役に立てようとするれば、いろいろとパラメーターを変えて何度も tracking するので、1 回 1 時間の CPU time は非常に長い。更に高速の computer が欲しい所である。

[tracking の最大の問題]

tracking をするには wake function が詳しくわからなければならない。wake function は TBCI を用いて評価するわけだが、TBCI も万能ではない。例えば、実際の加速器の pipe は長円形に近いものであるが、TBCI は回転対称性のあるものしか相手にしない。また、ring 1 周の element すべてについて wake function を計算しているのが現状である。また例え ring 1 周にわたって wake function を計算しても、それが正しいかどうかは tracking と実験を比較するしか調べる方法はない。これは tracking 以前の問題であるが、tracking の信頼性に直接係わる最大の問題でもある。

3 章でみた beam-beam interaction の場合、現象は複雑だが、beam-beam force の origin については何の疑問の余地もなかった。

現状ではできるだけ正確な wake function を用意して tracking を注意深くやっても、設計の参考にする程度のことしかできないのではないかと考えられる。

[tracking の役割]

この様に何となくあやしげな所のある tracking であるが、近似に頼らざるを得ない理論的予測に比べれば、信頼性が高い。wake function さえはっきりと与えられていれば、あとは計算時間だけの問題である。

一方、理論から見れば、tracking は現実の加速器で

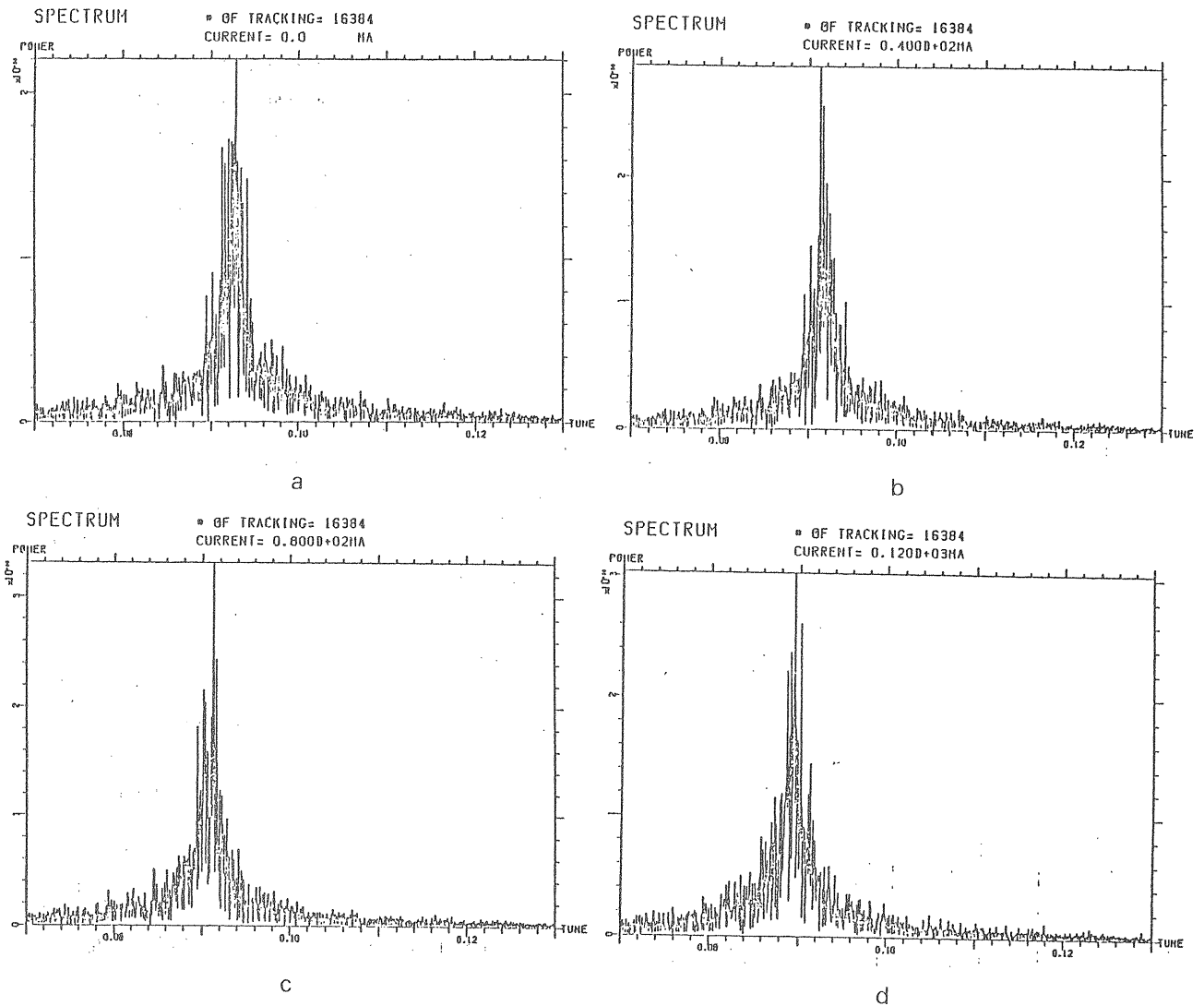


図 4-8 図 4-6 の wake の時の T の平均値のスペクトル ($\nu_s^0=0.09133$)。(a) は $I=0$ の極限, (b) $I=40\text{m A}$, (c) $I=80\text{m A}$, (d) $I=120\text{m A}$, ν_s で $0.07\sim 0.13$ の所を示した。

実験するのと同じ様なものである。そこで理論の信頼性や欠点を check するのに役立つこともできる。

[4章のまとめ]

beam - environment interaction は wake function を用いて表わされ, wake function が与えられれば, tracking を用いて効果を予測できる。wake function を正しく与える方法や, 計算時間の点である程度大まかにしか現象を追えないという弱点はあるものの, beam - environment interaction の解析には現在の所 tracking が唯一の手段である。

[文献について] 本章の内容は主に文献 4-7 による。instability の理論については文献 4-1 が読みやすい。

5. Tracking の歴史と展望

これまで3つの topics について tracking の方法を見てきた。これ等の tracking が必要とされてきた歴史的な過程についてまず触れてみたい。

[single particle tracking の歴史]

2章で見た toy model の様な簡単な力学系の研究は, 3体問題に関連して古くから調べられてきた。

Poincaré は既に力学系の stochasticity について知っていたらしいが、どうやって判ったのか筆者には想像もつかない。電子計算機が開発されると、力学系を計算機の tracking で調べる研究が始まった。歴史的には Fermi-Pasta-Ulam (1955) が最初に計算機を用いて力学系の研究をした様である。計算機の能力向上に伴って力学系の研究は飛躍的に進歩し、理論的にも昔と全く面影を変えるに致った。今日でも力学系の理論は活発に研究されている。

加速器の分野で、力学系の stochasticity が注目されてきたのは、70年代にISR, SPEAR, DORIS等の蓄積型 ring が活躍はじめてからである。既に1974年の高エネルギー加速器国際会議で Laslett が stochasticity について講演している*)。PATRICIA, HARMON は PEP における chromaticity correction の為に開発された。PATRICIA による tracking は大変時間がかかる。電子 ring の場合には、damping time 程度の tracking で十分(それ以上やっても意味ない)であるが陽子 ring の場合には桁違いに長時間の tracking をしなければならない。MARYLIE の様に正確さを多少犠牲にしても速い tracking code が望まれるのは SSC を意識してのことである。

*) 文献 5-1

[beam-beam tracking の歴史]

衝突型蓄積 ring での beam-beam effect は昔から知られていたが、1970年代後半になると衝突型 ring の普遍的な問題であることが認識された。beam-beam interactionは初めの内は当然、strong-weak近似の1体問題として研究された。力学系の stochasticity とその理論は beam-beam problem を解く鍵だと思われていた様であり、文献 2-6 には当時のそうした熱いムードが漂っている。その他にもいろいろな理論が提出された様だが決定打は出なかった。

その内、計算機の進歩もあって multi-particle tracking が試みられる様になり1980年の国際会議では Piwinski が tracking の結果について報告している*)。これで一件落着となった訳ではないが、以後は [3章のまとめ] に書いたことが業界の主流になっている。

*) 文献 5-2

[beam-environment interaction の歴史]

beam-environment interaction 自体は昔からよく知られていたが、wake force の計算ができないので tracking 的な研究はあまりされていなかった。やはり1980年の国際会議で Weiland が TBCI の前身である BCI を用いて図 4-2 の様な絵を映画にして披露した時は大変 exciting だった様である。これで tracking が実現可能となり、各地の研究所で program 作りが盛んになった。しかし成果の点では前の2つの topics に比べると見おとりがするのが現状である。tracking の問題としては最も複雑であり、wake function の計算という異質なものを必要とするからであろう。しかしこの分野はいかなる加速器でも必要とすることもあって、今後大発展していく見通しである。

[tracking の普遍的性格]

以上の歴史を見てみると、tracking が果たしてきた役割が鮮明になってくる。tracking の研究には外的要因として加速器の大型化による非線型問題の出現と、計算機の進歩の2つがある。内的要因としては解析的理論が無いとかあっても複雑すぎるという事情もあるが、結局の所「もはや tracking しか無い」という状況が重要である。例えば HARMON で事が済むなら誰も PATRICIA を動かす様なことはしないであろう。

「もはや tracking しか無い」というのは、非線型現象を研究している人達が必ず一度はたどりつく結論である様に見える。その端的な例が2章の力学系であり、tracking によって逆に解析的理論が進歩したりしているのである。beam-beam problem にしても tracking の結果を理論的に説明するのが解析的理論の当面の目標であろう。(beam-environment interaction の tracking はまだそこまで行っていない)。

この様な傾向は加速器特有のものでなく、ほとんどあらゆる分野にわたって現れている。いずれも、物理の基本原理はあるものの、実際の現象が複雑すぎて、その原理から現象が説明できるかどうかよく分からないという場合である。物理学の実験はどこでも、いつでも、何度でも繰り返しできる所が良い所であったが、例えば加速器を何種類も作って比較するという様なことは不可能である。Big science には皆この傾向がある。

例えば天文学や気象学などは昔からそうであったのであり、物理学もそれに近づいてきたと云える。

表 5 - 1 様々な理論と現実

積分可能系	摂動論 HARMON	Lie-tracking MARYLIE	Tracking PATRICIA	1粒子の stochasticity
linear resonance	strong-weak 近似	Myers Yokoya	Yokoya (linear collider)	beam - beam
Soluble model	Suzuki - Chin - Satoh hybrid mode の computer code		tracking	beam - 環境

そこで加速器を沢山作る代わりに計算機で大規模な simulation をする。計算機の中で台風を作ってみる。ということが必要になってくる。

これ等は計算機実験と昔から呼ばれていたものだが、最近では堂々と計算機物理とか計算物理と云う様になった。理論物理、実験物理と並ぶ第3の物理学などという人もいる。これは全分野にわたる必然的傾向であり、加速器もその流れに乗っているわけである。

しかし、あまり調子に乗るのは危険でもある。

[tracking と現実]

表 5 - 1 に加速器における様々な現象とその理論の関係を示した。左端が解析的に解ける model であり、右に行くに従って、より近似の質が定量的に高まって行く。tracking がその頂点である。しかし、これまでの各章で見た様に tracking code も大なり小なり近似をしている。例えば PATRICIA では thin lens 近似をしている。計算機の発達によって、より近似の少ない、より現実的な方向に tracking は進んでいくはずである。Keil は次の様に云っている*。

In order to simulate a phenomenon well all relevant dynamic processes must be included. Since it is a priori not known which processes are relevant, all of them must be included.

ある現象を計算機で調べたかったら、考え得るかぎりすべての情報を input せよ (訳筆者)

*) 文献 5 - 3

これが tracking の精神である。しかし、この精神でやると云っても、ある情報をどう利用するか、どの様にプログラムするかは、やはり各研究者の sense とか考え方によるのである。

tracking は理論から見れば現実のとなりにある様に見えるが現実そのものではなく、できるだけ近似を排した理論なのである。

[tracking の将来]

これまで見てきた様に、tracking が大規模化、精密化して行くのは必然的傾向である。より近似を高めるにつれて、より大型、高速の computer を必要としていくであろう。更に加速器の tracking 専用 machine もいずれ出てくるとされる (計算機が ring 状に並んでいる、かどうか筆者は知らない)。既に tracking 用の special processor が開発されている様である*。

tracking の発展が (力学系の研究の様に) 加速器理論の進歩をうながしながら、それに支えられて進んでいくことを祈る。

*) 文献 5 - 4

Appendix 1 解析力学と betatron 振動

よく使われる解析力学の公式をまとめ、それを用いて betatron 振動の解析力学的扱いを示す。

Hamilton eq.

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

正準変換の母関数 $(X, P) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{P})$

$$F_1 = F_1(X, \tilde{X}, t)$$

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial X}, \quad \tilde{P} = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{X}}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$F_2 = F_2(X, \tilde{P}, t)$$

$$P = \frac{\partial F_2}{\partial X}, \quad \tilde{X} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{P}}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

重要な正準変換

1. 恒等変換 $F_2(X, \tilde{P}) = X\tilde{P}$
2. 座標変換 $F_2(X, \tilde{P}) = f(X, t)\tilde{P} + g(X, t)$

$$\tilde{X} = f(X, t), \quad P = \frac{\partial f}{\partial X} \tilde{P} + \frac{\partial g}{\partial X}$$

3. 回転

$$F_1(X, \tilde{X}) = -\frac{1}{\sin\mu} X\tilde{X} + \frac{1}{2\tan\mu} (X^2 + \tilde{X}^2)$$

$$F_2(X, \tilde{P}) = \frac{1}{\cos\mu} X\tilde{P} - \frac{\tan\mu}{2} (X^2 + \tilde{P}^2)$$

$$\tilde{X} = X\cos\mu - P\sin\mu$$

$$\tilde{P} = X\sin\mu + P\cos\mu$$

Betatron 振動の Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}k(s)x^2$$

$$p = \frac{dx}{ds}, \quad B_y(s) = \frac{E_0}{ce} k(s)x$$

これより正準変換 $(x, p) \rightarrow (\psi, J)$

$$F_1(x, \psi, s)$$

$$= \frac{1}{2\beta(s)} \left\{ \cot(\psi + \phi(s) - \frac{\nu}{R}s) - \alpha(s) \right\} x^2$$

によって

$$x = \sqrt{2J\beta} \sin(\psi + \phi - \frac{\nu}{R}s)$$

$$\alpha x + \beta p = \sqrt{2J\beta} \cos(\psi + \phi - \frac{\nu}{R}s)$$

$$H = \frac{\nu}{R} J$$

ここで α, β は twiss parameter. R は ring の mean radius, ν は betatron tune

$$\phi(s) = \int^s \frac{ds}{\beta}$$

である。

Smooth 近似

$$\beta(s) \equiv \text{const とすると } R = \nu\beta, \quad \alpha = 0$$

$$\phi = \frac{\nu}{R}s$$

正準変換 $(x, p) \rightarrow (X, P)$

$$\frac{x}{\sqrt{\beta}} = X, \quad \sqrt{\beta} p = P$$

$$X = \sqrt{2J} \sin\psi \quad P = \sqrt{2J} \cos\psi$$

$$H = \frac{\nu}{2R} (P^2 + X^2)$$

時間を s から θ に変えれば

$$H = \frac{\nu}{2} (P^2 + X^2)$$

で(2.1.5)を得る。

Appendix 2 摂動論の計算

(2・3・48) を導く。

一般に

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial W}{\partial \varphi} = e^{in\varphi} f(\theta)$$

(f は periodic function) の periodic な解は $n \neq 0$ なら

$$W = \frac{e^{in(\varphi - \nu\theta)}}{e^{2\pi in\nu} - 1} \int_{\theta}^{\theta + 2\pi} d\theta' e^{in\nu\theta'} f(\theta')$$

で与えられる。 n が 0 の時は $\langle f \rangle = 0$ であれば

$$W = \int^{\theta} f(\theta') d\theta'$$

が periodic な解である。

(2・3・41) の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{-KJ^2}{\nu^2} \left[\frac{3}{8} \left(\delta_p(\theta) - \frac{1}{2\pi} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \delta_p(\theta) (e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi} - 4e^{2i\varphi} - 4e^{-2i\varphi}) \right] \end{aligned}$$

と書けるので (2・3・48) を得る。

Appendix 3 θ -dependent Hamiltonian の Lie 変換

H が piecewise でなく θ による場合にも (2・4・27) を積分することはできる。

$$\frac{dZ}{d\theta} = -\hat{H}(\theta)Z(\theta)$$

を θ で積分すれば

$$Z(\theta) = Z(0) - \int_0^\theta \hat{H}(\theta')Z(\theta')d\theta'$$

を得る。左辺の $Z(\theta)$ を右辺の $Z(\theta')$ に次々と代入することにより

$$\begin{aligned} Z(\theta) &= Z(0) - \int_0^\theta d\theta' \hat{H}(\theta')Z(0) \\ &\quad + \int_0^\theta d\theta' \int_0^{\theta'} d\theta'' \hat{H}(\theta')\hat{H}(\theta'')Z(0) \\ &\quad + \dots \\ &= \left\{ 1 - \int_0^\theta d\theta' \hat{H}(\theta') \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\theta d\theta' \int_0^{\theta'} d\theta'' T(\hat{H}(\theta')\hat{H}(\theta'')) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} \int_0^\theta d\theta_1 \dots d\theta_n \\ &\quad \left. T(\hat{H}(\theta_1)\hat{H}(\theta_2)\dots\hat{H}(\theta_n) + \dots) \right\} Z(0) \end{aligned}$$

ここで $T(\dots)$ は

$$\begin{aligned} T(\hat{H}(\theta_1)\hat{H}(\theta_2)\dots\hat{H}(\theta_n)) \\ = \hat{H}(\theta_{i_1})\hat{H}(\theta_{i_2})\dots\hat{H}(\theta_{i_n}), \quad (\theta_{i_1} > \theta_{i_2} > \theta_{i_3} \dots > \theta_{i_n}) \end{aligned}$$

で定義される T 積 (Time ordered product) である。(要するに θ の大きいもの程左にもってくる)。これにより

$$Z(\theta) = \left\{ T \exp - \int_0^\theta \hat{H}(\theta')d\theta' \right\} Z(0)$$

と書ける。H が piecewise θ dependent の時、この式は (2・4・29) に一致する。

Appendix 4 $\exp \hat{f}(gh) = (\exp \hat{f})g(\exp \hat{f})h$ の証明

$$\hat{f}(gh) = (\hat{f}g)h + g(\hat{f}h) \text{ より}$$

$$\hat{f}^n(gh) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\hat{f}^m g) (\hat{f}^{n-m} h)$$

ここで $\binom{n}{m}$ は $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ である (gh の n 階微分の式と比べよ)。

$$\begin{aligned} e^{\hat{f}}(gh) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (\hat{f}^m g) (\hat{f}^{n-m} h) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(l+m)!} \binom{l+m}{m} (\hat{f}^m g) (\hat{f}^l h) \\ &= \sum_{l,m} \frac{1}{m!} \frac{1}{l!} (\hat{f}^m g) (\hat{f}^l h) \\ &= (e^{\hat{f}}g) (e^{\hat{f}}h) \end{aligned}$$

ここで $n - m = l$ とおいた。

Appendix 5 (2・4・56) の証明

まず $e^{a\hat{g}}e^{-a\hat{f}} = \hat{G}(a)$ とおく。 $\hat{G}(0) = \hat{g}$ である。両辺を a で微分すると

$$\hat{G}'(a) = e^{a\hat{f}}(\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f})e^{-a\hat{f}} = e^{a\hat{f}}(\widehat{f\hat{g}})e^{-a\hat{f}}$$

$$\hat{G}''(a) = e^{a\hat{f}}[\hat{f}, (\widehat{f\hat{g}})]e^{-a\hat{f}} = e^{a\hat{f}}(\widehat{f^2\hat{g}})e^{-a\hat{f}}$$

$$\hat{G}^{(n)}(a) = e^{a\hat{f}}(\widehat{f^n\hat{g}})e^{-a\hat{f}}$$

また、 $\hat{G}(a) = \hat{G}(0) + \hat{G}'(0)a + \dots$ より

$$\hat{G}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\widehat{f^n\hat{g}}) a^n = (\widehat{\exp a\hat{f}\hat{g}}) \quad \text{を得る。}$$

これより $e^{a\hat{g}}e^{-a\hat{f}} = \hat{h} \leftrightarrow \hat{h} = e^{a\hat{f}}\hat{g}$ である。

同様にして

$$e^{a\hat{g}^m}e^{-a\hat{f}} = e^{a\hat{f}}\hat{g}e^{-a\hat{f}}e^{a\hat{f}}\hat{g}e^{-a\hat{f}}\dots = (\widehat{\exp a\hat{f}\hat{g}})^m$$

同様にして

$$e^{a\hat{f}}e^{\hat{g}}e^{-a\hat{f}} = e^{\hat{h}} \leftrightarrow \hat{h} = e^{a\hat{f}}\hat{g} = \hat{g}(e^{a\hat{f}}Z)$$

Appendix 6 Poisson bracket と正準変換

Poisson bracket はどの正準変数を用いて計算してもよいことをN自由度の場合に示す。N自由度の正準変数, $X_1, X_1, X_2, \dots, X_N, P_1, P_2, \dots, P_N$ をまとめて Z_i ($i=1 \sim 2N$) で表わす。

$$\begin{aligned} X_i &= Z_i & i &= 1 \sim N \\ P_i &= Z_{i+N} \end{aligned}$$

である。 $2N \times 2N$ の matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いれば, Poisson bracket は

$$[f, g] = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial Z_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial Z_j}$$

と書ける。

$$[Z_i, Z_j] = J_{ij}$$

でもある。また $J^2 = -1$ である。

正準変換 $Z \rightarrow Z'$ を考えよう。

$$Z'_i = Z'_i(Z_1, \dots, Z_{2N}, \theta)$$

である。 Z' も正準変数なので

$$[Z'_i, Z'_j] = \sum_{kl} \frac{\partial Z'_i}{\partial Z_k} \frac{\partial Z'_j}{\partial Z_l} J_{kl} = J_{ij} \quad (*)$$

が成り立つ。Jacobi 行列Mを

$$M_{ij} = \frac{\partial Z'_i}{\partial Z_j}$$

で定義する。 (*) は

$$\sum_{kl} M_{ik} J_{kl} M_{jl} = J_{ij}$$

又は $MJM^T = J$ と書ける (M^T は M の転置)。

これより $\det M = \pm 1$ であることが判る。無限小正準変換, (2・3・17)etc, では $\det M = 1$ であるので無限小変換とつながる正準変換では $\det M = -1$ である。

さて, $MJM^T = J$ より $JM^T = M^{-1}J$, $JM^T J = -M^{-1}$, $M^T J = JM^{-1}$, $M^T J M = J$ と書きかえるとこれは

$$\sum_{kl} \frac{\partial Z'_k}{\partial Z_i} \frac{\partial Z'_l}{\partial Z_j} J_{kl} = J_{ij}$$

を意味する。また $M^{-1}J (M^{-1})^T = J$ でもあるので

$$\sum_{kl} \frac{\partial Z_i}{\partial Z'_k} \frac{\partial Z_j}{\partial Z'_l} J_{kl} = J_{ij}$$

を得る。

さて, これを使えば

$$\begin{aligned} \sum_{kl} \frac{\partial f}{\partial Z'_k} \frac{\partial g}{\partial Z'_l} J_{kl} &= \sum_{kl} \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial Z'_k} \frac{\partial g}{\partial Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial Z'_l} J_{kl} \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial Z_i} \frac{\partial g}{\partial Z_j} J_{ij} = [f, g] \end{aligned}$$

である。これで, $[f, g]$ を計算するのに, どの正準変数を用いてもよいことが示された。

あとがき

2章の toy model は本講義のために作ったもので、理論的計算と tracking の計算をかなり趣味的にやった。筆者の好みで詳しい所と雑な所ができてしまったが、読めば判る様に書けたと思う。

2章で凝りすぎたので、3章、4章は少し大まかになった。ここを2章と同じ調子で書いていたら、現在の3~4倍の volume になっていただろう。

本稿は KEK の木村嘉孝教授の勧めで書かれたもので貴重な経験を与えて頂き大変感謝しています(書き終わった今では)。横谷馨氏には本稿作成の準備段階から相談に乗って頂き、草稿の点検にまでお世話になった。深く感謝します。2章の草稿は小磯晴代博士に読んで頂き、誤りと判りにくい点を指摘され大変参考になった。心から感謝します。

問題の解答

(2-イ)

$$\begin{aligned} J^2 &= -1, \quad e^{J\mu} = \sum \frac{J^n}{n!} \mu^n \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \mu^{2m} + \sum_0^{\infty} J \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \mu^{2m+1} \\ &= \cos\mu + J\sin\mu \quad \text{これより } (e^{J\mu})^n = e^{nJ\mu} \end{aligned}$$

(2-ロ) 微分すればわかる。

(2-ハ) らせん状に原点から離れて行き、どこかで over flow になる。

(2-ニ) それぞれ Jacobian が1で矛盾しない。一緒にやっても当然矛盾しない。

(2-ホ)

# OF TURN =	1	X=	0.500000000000000000	P=	0.0
# OF TURN =	10	X=	0.1430712584622175	P=	-0.4075122906792329
# OF TURN =	100	X=	-0.5447681699966404	P=	0.1697035408101654
# OF TURN =	1000	X=	-0.3448160160646111	P=	0.2280256960392819
# OF TURN =	10000	X=	0.2049159745086950	P=	-0.6428437347037629
TUNE =	0.2300000	K=	0.0529000		

(2-ヘ) meter である。

(2-ト) separatrix 上でHは一定なので、(X, P)としてA又はB点の座標(2・2・11)

を入れればよい。

- (2-チ) Xが X_B に近い所だけ考えればよい。
 (2・2・13)の被積分関数の分母の $\sqrt{\quad}$ の中を $X=X_B$ のまわりで展開して、初項のみとれば、積分は $\int^0 \frac{dX}{X}$ の形になって対数的に発散する。

(2-リ)

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial X} \frac{dX}{d\theta} + \frac{\partial h}{\partial P} \frac{dP}{d\theta} \text{ より明きらか}$$

- (2-ヌ) Appendix 6を見よ。
 (2-ル) $(\tan^{-1}x)' = 1/(1+x^2)$ を用いればすぐできる。
 (2-オ) 自由度2なので $[\varphi, J]=1$, $[\varphi, \theta]=0$, $[\varphi, H]=0$, $[J, \theta]=0$, $[J, H]=0$, $[\theta, H]=-1$, である ($H=-P_\theta$)
 (2-ワ) resonance 近似より楕円型不動点では $\sqrt{2J}=0.71$, 双曲型では $\sqrt{2J}=0.52$ である。tracking よりそれぞれ0.67, 0.52となり大体合っている。
 (2-カ) (2・4・9) から (2・4・18) まで, XをすべてPに変えよ。
 (2-ヨ) $-X \sin\theta + P \cos\theta$
 (2-タ) $\hat{W}_2 X=0$, $\hat{W}_2 P=-X \cot\mu$ である。

- (3-イ) 約61%になる。
 (3-ロ) 図3-4のdiscのまわりを1周するHの積分は $2\pi r H_\varphi = i = cq$ を与える。またdiscのまわりで外向き法線方向にEを表面積分すれば $2\pi r E_r = q/\epsilon$ を得る。

(3-ハ)

$$\tilde{\varphi} = -\frac{q}{2\pi\epsilon} \ln r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- (3-ニ) $\bar{\nu} = \nu + \xi$
 (3-ホ)

$$\partial(T', E') / \partial(T, E) = 1 - 2 / (T_\epsilon N_{SP})$$

 (3-ヘ)

$$T_\epsilon$$

 (3-ト) (3・1・8) で $\rho^+ = \rho^0$ ($x - \langle x \rangle$, $y - \langle y \rangle$, s) として計算せよ。
 (3-チ)

$$\begin{aligned} \langle H_{\text{error}} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \oint f(\theta) \beta(\theta) d\theta \times J \langle \sin^2 \varphi \rangle \\ &= \frac{J}{4\pi} \oint f(\theta) \beta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

文 献

- 2-1) A. J. Lichtenberg, M. A. Leiberman, Regular and Stochastic Motion (Springer, New York, 1983)
 2-2) V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, (Springer, New York, 1979)
 2-3) H. Goldstein, Classical Mechanics (second ed.), (Addison-Wesley, 1980)
 2-4) A. J. Dragt, "Lectures on Nonlinear Orbit Dynamics", AIP conf. Proc. 87, R. A. Carrigan et al, editors (1982)
 2-5) F. Vivaldi, Rev. Mod. Phys. 56 (1984)
 2-6) "Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction" AIP Conf. Proc. 57, Brookhaven National Laboratory, M. Month and J. C. Herrera, editors (1979)
 2-7) H. Wiedemann, PEP Note 220 (1976)
 2-8) M. H. R. Donald, PEP Note 311 (1979)
 2-9) K. L. Brown, D. C. Carey, Ch. Iselin and F. Rothacker, CERN80-04 (1980)
 2-10) D. R. Douglas and A. I. Dragt IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-28, 2522 (1981)
 3-1) J. T. Seeman: Proceedings of the 12th Int. Conf. on High Energy Acc., 212 (1983)
 3-2) K. Hirata, TN-85-006, KEK (1985)
 3-3) K. Takayama, Lett. Nuovo Cimento 34 190 (1982)
 3-4) M. Sands, "The Physics of Electron Storage Rings. -An Introduction", SLAC-121, UC-28(1970)
 3-5) B. V. Chirikov, Phys. Reports 52 263 (1979)

- 3 - 6) M. Bassetti and G.A.Erskine,
CERN-ISR-TH, 80-06 (1980)
- 3 - 7) K. Hirata, T. Suzuki and R. L.
Gluckstern, Nucl. Instru. Methods,
227 420 (1984)
- 3 - 8) G. Guignard and Y. Marti, CERN/
ISR-BOM TH/81-32 (1981)
- 3 - 9) S. Myers, Nucl. Instru. Methods,
211 263 (1983)
- 3 -10) K. Yokoya, to be published some-
where. (1984)
- 3 -11) T. Sato, editor, Proceedings of the
workshop on the Future Accelerator
and Physics, KEK Report 84-16A/
H (1984)
- 3 -12) K. Yokoya, To be published some-
where (1984)
- 3 -13) A. W. Chao, 'Beam-Beam Insta-
bility', AIP Conf. Proc. 127 (1985)
- 3 -14) 安東愛之輔, コライダー, 月刊フィジク
ス, 44 33 (1985)
- 3 -15) F. Israilev, Physica 1D 243 (1980)
- 4 - 1) A. W. Chao, SLAC-PUB-2946 (1982)
- 4 - 2) T. Weiland, DESY 82-015 (1982)
- 4 - 3) T. Suzuki, Y. Chin and K. Satoh,
Particle Accelerators 13 179 (1983)
- 4 - 4) T. Suzuki and, K. Yokoya, Nucl.
Instru. Methods 203 45 (1982)
- 4 - 5) K. Satoh and Y. Chin, Nucl. Ins-
tru. Methods 207 309 (1983)
- 4 - 6) F. Sacherer, IEEE Trans. Nucl.
Sci. NS-24 1393 (1977)
- 4 - 7) K. Hirata, KEK Internal 85-3 (1985)
- 5 - 1) L. J. Laslett, Proc.IX-th Interna-
tional Conf. on High Energy Acce-
lerators 394 (1974)
- 5 - 2) A. Piwinski, Proc. 11-th Interna-
tional Conf. on High Energy Acce-
lerators 751 (1980)
- 5 - 3) E. Keil, "Computer Programs in
Accelerator Physic," AIP Conf.
Proc. 105 651 (1982)
- 5 - 4) A. Wrulich, DESY HERA 85-
06 (1985)