

## 第1章 はじめに

ビーム不安定性は、ビーム強度の高い最近の加速器では多く観測され、それに対し適当な対策をとらねばならない等、重要な問題である。それがこのサマースクールで取り挙げられた理由であろう。

最近はヨーロッパやアメリカでも色々な Accelerator School が開かれ、ビーム不安定性の良い教科書も出来ているが、日本語で書かれた物がない等の理由

から、外国の個々の教科書の題材よりも巾広く書く事にした。なるべく分り易く書く事を心がけたが、出来はどうであろうか？単純化しようとして間違いがある事を恐れるが、皆さんの批判をもとに機会があったら改良したものにしたい。尚、講義は筆者の都合により、生田勝宣、平田光司両君にお願いする事にした。

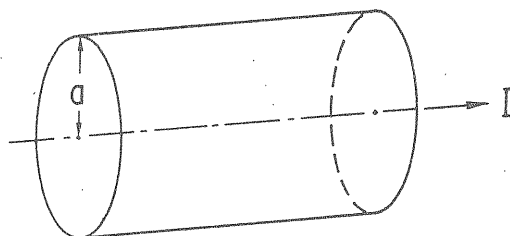
## 第2章 Incoherent Space Charge Limit

### § 2-1 はじめに

incoherent space charge limit とは、beam が空間電荷力によって発散力を受け、その為、磁石による収束力が弱まり、betatron 振動数 (tune) が減少し、integer, half integer resonance 等の強い resonance に引っかかり beam が失われる limit であり、陽子シンクロトロンへの到達強度の limit を与えるものである。これを計算するには、CERNの公式集<sup>1)</sup>などの公式を用いればよいのであるが、space charge limitを計算するには、そのよって立つ基礎を良く理解しておいた方が良いので、なるべく簡単に、いくつかの文献と共に述べておく。

### § 2-2 円形ビームの direct space charge force

#### 2-1) Uniform beam



$$I = \lambda ev$$

$$\lambda = \rho (\pi a^2)$$

図 2-1.

図 2-1 の様な半径 a の円柱 (無限に長いと考える)

に uniform に密度  $\rho$  (粒子数/体積) 線密度  $\lambda$  の電荷が詰まっている時の電磁場の計算は Gauss 及び Ampere の定理により計算できる。(この講義では MKSA 単位系を使う)

$r > a$  のとき

$$E_r = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$H_\phi = \frac{\lambda ev}{2\pi} \frac{1}{r}$$
(2-1)

$r < a$  のとき

$$E_r = \frac{e\lambda}{2\pi a^2 \epsilon_0} r$$

$$H_\phi = \frac{\lambda ev}{2\pi a^2} r$$
(2-2)

という結果が得られる。

$r < a$  のときの Lorentz 力は、

$$F_r = eE_r - evB_\phi$$

$$= \frac{e^2\lambda}{2\pi a^2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} r$$
(2-3)

である。ここで  $r$  は Lorentz factor である。

(2-3) が空間電荷による発散力である。この場合はビームと同じ向きに走る電荷に働く力を考えたので、電場の力と磁場の力が打ち消しあう。ビームを反対向きに走る電荷に働く力の場合は電場の力と磁場の力が、たし算になり relativistic な場合 ( $\beta \sim 1$ ) でも発散力

(異電荷のビームの場合は収束力)は小さくならない。これが storage ring でよく言われる beam-beam tune shift の原因となる。beam-beam tune shift の計算と Space charge limit の計算の仕方は殆んど同じである。

さて(2-3)は極座標で表わした力であるが直角座標では、

$$F_x = F_r \cos \varphi = \frac{e^2 \lambda}{2 \pi a^2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} x \quad (2-4)$$

$$F_y = F_r \sin \varphi = \frac{e^2 \lambda}{2 \pi a^2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} y$$

となり変位  $x, y$  に比例した力が働く事が分る。(線型の力)

2-2) ベータトロン振動数のずれ

力が(2-4)で分ったから、粒子のベータトロン振動を考える。Newton の運動方程式から、

$$m r \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \quad (2-5)$$

軌道の運動を考える時は独立変数を時間  $t$  から軌道の長さ  $s$  に変えて ( $ds = c \beta dt$ )

$$m c^2 \beta^2 r \frac{d^2 x}{ds^2} = F_x \quad (2-6)$$

従って、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{N r_0}{\pi R a^2} \frac{1}{\beta^2 r^3} x \quad (2-7)$$

$$r_0 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m c^2} \quad (\text{古典半径})$$

$$\lambda = \frac{N}{2 \pi R} \quad (R \text{ は平均半径}, N \text{ は粒子数})$$

さてベータトロン振動の式は

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + (K + k) x = 0 \quad (2-8)$$

ここで、

$K$  ; 磁石による収束力

$$k = - \frac{N r_0}{\pi R a^2} \frac{1}{\beta^2 r^3}$$

そこで Courant Snyder<sup>2)</sup> の (4.31) 式よりベータト

ロン振動数のずれ (detuning ともいう)  $\Delta \nu$  は、

$$\begin{aligned} \Delta \nu &= \frac{1}{4 \pi} \int k \beta ds \\ &= - \frac{N r_0 \beta_{av}}{2 \pi a^2 \beta^2 r^3} \end{aligned} \quad (2-9)$$

ここで  $\beta_{av} = R/\nu$  を用いると

$$\Delta \nu = - \frac{N r_0 R}{2 \pi a^2 \nu \beta^2 r^3} \quad (2-10)$$

(10) 式は CERN の公式集<sup>1)</sup> で、 $a = b$ ,  $F$  (image force coefficient) = 1,  $B_f$  (bunching factor) = 1 とした式である。

さて、ここまでの導出で分る様にビームサイズ  $a$ ,  $\beta$  関数  $\beta_{av}$  はすべて円周についての、平均の値である。(a に最大値等を入れないように) ビームサイズの AG 収束による変化も入れようとするれば、(2-9) 式をまじめに (数値) 積分すればよい。(但し、§ 2-5 もみよ)。ここで  $\Delta \nu = 0.25$  (Operating point を整数 + 0.25 とした場合) 等と置き、space charge limit  $N$  を出す。後は楕円ビームの場合 (これについては付録 1 を見よ)、image force, bunching factor の説明をすれば良い筈だが、ここで一次の注意が必要である。(2-10) 式は uniform な分布を仮定したもので、linear な tune shift だけが出てきた。普通加速器で観測される様な nonuniform なビームの場合はどうだろうか? これをやはり計算が簡単な円形ビームについてみてみよう。

2-3) non-uniform beam

まず Parabolic 分布

$$\rho(r) = \frac{2 \lambda}{\pi a^2} \left\{ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\} \quad (2-11)$$

を考えよう。この場合も Gauss, Ampere の定理で簡単に計算でき

$$E_r = \frac{\lambda e}{\pi a^2 \epsilon_0} \left( r - \frac{r^3}{2 a^2} \right) \quad (r < a) \quad (2-12)$$

となる。磁場も考え Lorentz 力を出すと、電場の力に  $1/r^2$  をかければよいのは、前と同じである。

(2-12) を uniform な場合 (2-2) と比べると線形な部分 ( $r$  に比例) は、uniform な場合の 2 倍となっている。従って tune shift も 2 倍になる。これは uniform な分布に比べ図 2-2 の様に中心付近で、電

荷密度が大きい事による。

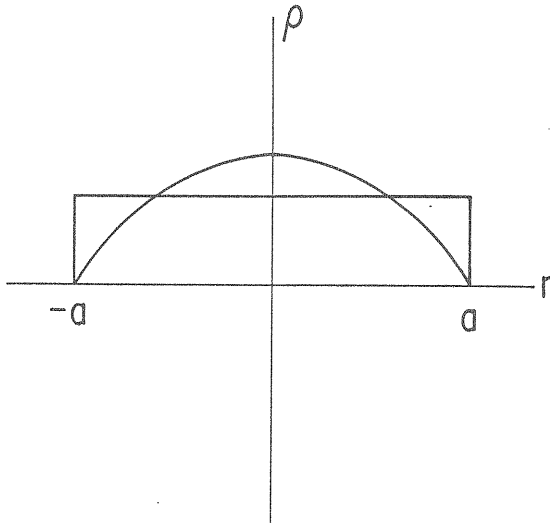


図 2 - 2.

その他に (2-12) では  $r^3$  に比例する項 (octupole 成分) が出て、このお蔭で tune spread (ベータトロン振動数がベータトロン振動の振幅に依存する) が出てくる。次に加速器で parabolic 分布と共によく使われる Gauss 分布の場合を計算してみよう。

$$\rho(r) = \frac{\lambda}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (2-13)$$

電場は、

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\right) \\ &= \frac{\lambda e}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{2\sigma^2} - \frac{r^3}{8\sigma^4} + \dots\right) \end{aligned} \quad (2-14)$$

ここで  $a = 2\sigma$  と置いてみると、線形部分は parabolic な場合と同じく、uniform 分布の 2 倍となり、octupole 成分は parabolic の場合の 2 倍となる。更に高い multipole の成分が出る。

#### 2-4) bunch の transverse distribution

前小節の議論から bunch の distribution によって、space charge による、detuning  $\Delta\nu$  の値が変わる事が、分った。この factor を uniform distribution の場合を 1 として表わしたのが、form factor G である。Reich et al.<sup>3)</sup> は  $H^-$  injection をうまくすると、G を 1.2 ~ 1.3 にでき、普通の multi-turn injection では、G は 1.5 ~ 2 だと結論づけている。更に octupole 成分による、tune spread については、付録 2 にまとめ

ておく。

### § 2-3 Bunching factor

今までの議論は coasting beam (進行方向について、uniform な beam) についてであった。さて bunched beam については、どうであろうか？ 厳密に言えば、これは 3 次元の問題であるから前の様な、2 次元の取り扱いは、出来ないといえる。しかし proton beam は、口径が小さく、非常に長いバンチである。従って進行方向の電場は無視でき、良い近似で 2 次元の扱いが出来る。また Vacuum chamber の shielding によって、進行方向の電場が更に suppress されよう。(図 2-3) を見よ。

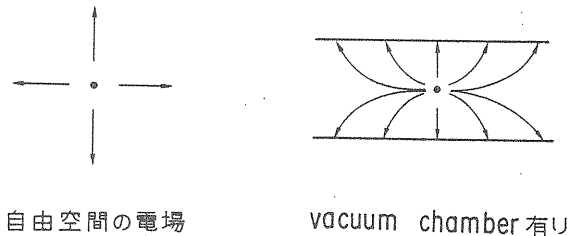


図 2 - 3.

また electron についても、バンチの長さは一般に短かいが、 $r$  が大きいので、Lorentz 収縮により、電磁場は 2 次元のと、考えてよい。

そこで、電磁場は (2-2) 式のように表わされるとして、 $\lambda$  に s-dependence を入れるという計算をする。そうすると、

$$B = \frac{\text{バンチの平均密度}}{\text{バンチの最大密度}} \quad (2-15)$$

で、bunching factor B を定義すると、最大の detuning は、coasting beam での計算に比べ  $1/B$  だけ増える事になる。これが bunching factor の意味である。(単なる bunch の長さで、取り違えない事！)

従って bunching factor も longitudinal の分布によって、色々異なる。例えば parabolic bunch

$$\lambda(s) = \frac{3}{2} \lambda_0 \left\{ \ell - \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \right\} \quad (2-16)$$

(2ℓ : 全バンチ長)

では RF 波長を 2L として、

$$B = \frac{2}{3} \frac{\ell}{L} \quad (2-17)$$

となる。Gauss 分布の場合は、

$$B = \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_z}{2L} \quad (2-18)$$

となる。更に phase space (bunch area) に uniform に、beam が入っている様な分布についての、数値計算の結果が、Cole-Morton<sup>5)</sup> により数表として作られている。form factor G を小さくし、bunching factor B をなるべく大きくする等して、space charge limit を上げる試みは、CERN-PSB について、文献(6)にのっている。

### § 2-4 Image coefficient

さて、加速器のビームにはこれまで述べた direct space charge force の他に、vacuum chamber や、magnet pole で、電磁場が shield され、余分な鏡像力が働く。image force なしの detuning の大きさを 1 とし、image force がある場合の detuning は F 倍となる。F の事を image coefficient と呼ぶ。image force については、Laslett<sup>7)</sup> の論文に、色々な場合についてよく述べられているので具体的計算例は、文献を見られたい。この計算に使う technique は、等角写像 (conformal mapping) であり数学では、スミルノフ<sup>8)</sup> の教科書。電磁気の本では、Smythe<sup>9)</sup> の教科書に詳しい。

ここで注意する事は image force の計算では簡単の為、ビームサイズを考えないで、線状のビームが走っていると、考える事である。従って粒子の横方向の分布の違いには、image force はよらない。

### § 2-5 Envelope equation

さて、今までの議論を反省してみると、space charge detuning とは、空間電荷力により磁場の収束力が弱まり、betatron 振動数が小さくなるという事であった。ところが磁場の収束力が弱まると、ビームサイズは大きくなる事が期待され、ビームサイズが大きくなると空間電荷力は弱まる。従ってこれまでの議論は、厳密に言えば、ビームサイズの変化も取り入れ self-consistent に問題を解かねばならぬ。この self-consistent な扱いが、envelope equation による扱いであり、Kapchinskij-Vladimirskij<sup>10)</sup> によって、初めてなされたものである。

この扱いによれば必要な aperture が若干大きくなり、space charge limit が Laslett の公式によって、計算されたものより大きくなる。実際 Sacherer<sup>11)</sup> が

詳しく示したように、uniform beam では許される detuning  $\Delta\nu$  は

$$\Delta\nu = \frac{4}{3} \Delta\nu_{\text{Laslett}} \quad (2-19)$$

としてよく、space charge limit は、約 30% 程大きくなる事が分る。

### § 2-6 Emittance growth

space charge limit とは空間電荷力により、tune が小さくなり、強い共鳴である整数、半整数共鳴にひっきり、ビームが無くなってしまふ効果である。しかし実際にはもっと弱い共鳴がたくさんある。これらの共鳴は beam loss とはならなくとも、emittance growth をひき起こす。

まず § 2-3 で述べた bunching factor の議論を、思い出してみよう。今、簡単のため縦方向に parabolic 分布

$$\lambda(s) = \frac{3}{2} \lambda_0 \left\{ 1 - \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \right\} \quad (2-20)$$

をしているとする。横方向のビームサイズは、 $\beta$  関数がほぼ一定とすると、ほぼ一定なので、バンチの中心部 ( $s=0$ ) で粒子密度は大きく、端 ( $s=\pm\ell$ ) で 0 となる。space charge detuning とは、最大 ( $s=0$  の点) の tune shift である。今バンチ内で粒子はシンクロトン振動

$$s = s_0 \cos \omega_s t \quad (2-21)$$

をしているので、tune shift は、

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \Delta\nu_{\text{max}} \left\{ 1 - \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \right\} \\ &= \Delta\nu_{\text{max}} \left\{ 1 - \frac{s_0^2}{2\ell^2} - \frac{s_0^2}{2\ell^2} \cos 2\omega_s t \right\} \end{aligned} \quad (2-22)$$

とシンクロトン振動数  $\omega_s$  の 2 倍の角振動数で、振動する事になる。従ってベータトン振動数は一定でなく、時間的に変化する。(これは chromaticity がある時に tune が、シンクロトン振動数で変化するのに似ている。) 従って図 2-4 に模式的に示すように tune は resonance line を何回も速く cross する事になる。これが emittance growth を、引き起こす。

一方上の議論から、resonance の強さが弱い (言い換えれば stopband width が小さい) ならば emittance

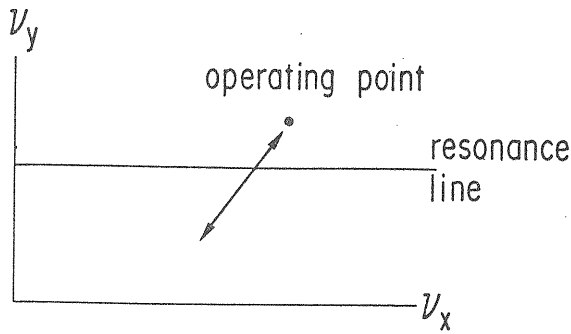


図 2 - 4.

growth は小さいと期待される。これが tuning の考え方で, resonance をうまく補正した後, operating point を space charge detuning の大きい injection 付近で integer (half -integer) から大きく離し, 加

速が始まり detuning が小さくなるにつれ, resonance line をはずす様に, tune を時間的に変えていく事であり, この様にして space charge limit を上げていく事が, 多くの加速器で試みられている。例えば CERN - PSB については, 前出の文献 (6) を見よ。emittance growth は  $\sqrt{t}$  ( $t$ : 時間) に比例し, あまり長時間 resonance を cross すると, emittance は, 大きくなる事に注意する。

尚, incoherent space charge limit を測定するには, 乱暴な方法であるが, tune を integer line に近づけ (integer resonance の幅を別に測っておく必要があるが) beam loss の始まる intensity, 又は tune の値を測る様な事が考えられる。なお transverse form factor  $G$  や, bunching factor  $B$  は, 実空間の分布に關した量であるから, 実測から推定する事ができよう。

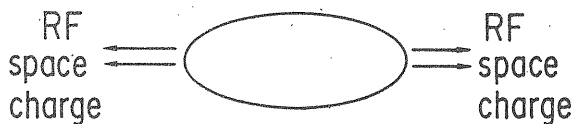
### 第 3 章 Longitudinal Space Charge Limit

#### § 3-1 はじめに

第 2 章では横方向の空間電荷効果を考えたが, この章では縦方向 (ビームの進行方向) の空間電荷効果を考える。図 3-1 (a) のようなバンチがあると ( $r < r_t$  トランジションエネルギー以下で, まず考える), RF による力は収束力となる。



a)  $\gamma < \gamma_t$



b)  $\gamma > \gamma_t$

図 3 - 1.

空間電荷力は勿論斥力であるから  $r < r_t$  では RF の力と空間電荷力は打ち消しあい, バンチの長さは長くなる。段々空間電荷が多くなると, しまいには両方の力

が完全に打ち消しあい, 位相安定性がなくなってしまう。これが longitudinal space charge limit である。この様な効果は最初 Nielsen and Sessler<sup>1)</sup> によって考えられた。 $r > r_t$  では図 3-1 (b) に示す様に RF の力と空間電荷力は, たし算となり, 収束力は一層強くなり位相安定性が崩れることはない。この効果を考える場合, 真空壁の影響 (image force) を取り入れる事が重要である。そこで § 3-2 では, まずこの計算を簡単な場合に示し, § 3-3 で空間電荷効果の説明をする。

#### § 3-2 縦方向の電場の計算

いま図 3-2 に示す様に進行方向  $s$  にビームのバンチが速度  $V$  で走っているとす。ビーム, 真空壁共, 円形で半径を各々  $a, b$  とする。真空壁はスムーズであるとす。いま時間  $t$  を fix して図 3-3 の様な path を考えて, ビームの中心での電場  $E_s$  を求める。

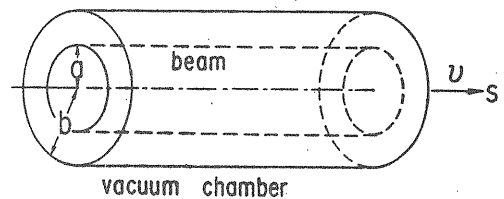


図 3 - 2.

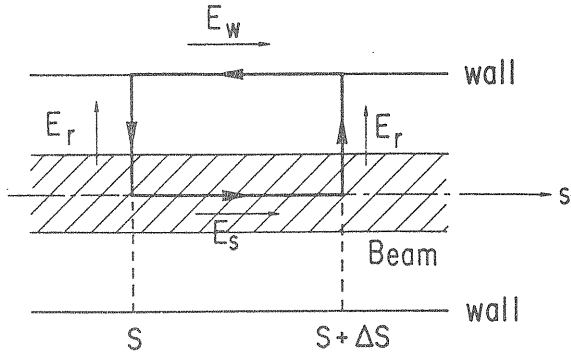


図 3 - 3.

Maxwell 方程式の積分形

$$\int \vec{E} d\vec{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{\sigma} \quad (3-1)$$

を用いて計算する。いま一般にバンチは真空壁の半径  $b$  に比べて長く、更にローレンツ収縮により縦方向の電場は、収縮する。この様に、

$$(\text{バンチ長}) \gg \frac{2\pi b}{r} \quad (3-2)$$

の時は、第一近似として線密度  $\lambda$  の  $s$  依存性は無視できる。そうすると横方向の電磁場は第 2 章の (2-1), (2-2) 式で表わされ、

$$E_r = \begin{cases} \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (3-3)$$

$$H_\phi = \begin{cases} \frac{e\lambda v}{2\pi} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda v}{2\pi} \frac{1}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (3-4)$$

となる。ここで (3-3), (3-4) を (3-1) 式に入れて (この計算の時に 2 次の近似として、 $\lambda$  の  $s$  依存性を入れる。)

$$\begin{aligned} & (E_s - E_w) \Delta s + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a}\right) \\ & \times \left\{ \lambda(s + \Delta s) - \lambda(s) \right\} \\ & = - \Delta s \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{ev\mu_0}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a}\right) \quad (3-5) \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -v \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (3-6)$$

であり、

$$g_0 = 1 + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (3-7)$$

という量  $g_0$  を導入して、

$$E_s = - \frac{eg_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial s} + E_w \quad (3-8)$$

と表わされる。従って壁に現われる電場  $E_w$  が分ればビーム中心に働く電場  $E_s$  が求められる。ここで壁の conductivity は大きく第一近似として完全導体と仮定すると

$$\vec{K} (\text{A/m}) = \vec{n} \times \vec{H} \quad (3-9)$$

の表面電流 (壁電流) が流れる。ここで  $\vec{K}$  は表面電流密度、 $\vec{n}$  は導体の外向きの normal である。従って (3-4) 式より、

$$K = - \frac{e\lambda v}{2\pi} \frac{1}{b} \quad (3-10)$$

従って全体の壁電流  $I_w$  は、

$$I_w = 2\pi b k = -e\lambda v = -I \quad (3-11)$$

となり、バンチの (交流) 電流と同じ大きさの壁電流が逆向きに流れる事が分る。

壁に現われる電場  $E_w$  は壁のインピーダンスを考えて、 $I_w$  に比例するであろう。従って (3-8) 式より  $E_s$  は  $I$  に比例する事が分り、 $E_s$  と  $I$  との比 (第 4 章で述べる coupling impedance を  $2\pi R$  ( $R$ : 平均半径) で割ったもの) は、 $g_0$  と壁の性質だけによって決まる事が分る。

ここで壁の性質として次の 2 つの場合を考えよう。

i) 完全導体壁 (space charge)

スムーズな完全導体壁の場合を、狭い意味で space charge interaction と呼んでいる。この場合は、 $E_w = 0$  であるから 1 周あたりの energy gain を  $eU$  とすると、

$$U = 2\pi R E_s \quad (3-12)$$

で表わされ、

$$U = - \frac{eg_0}{2\epsilon_0} \frac{R}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (3-13)$$

となる。

## ii) Inductive Wall

壁に単位長さ当り  $L'$  の inductance があるとする。壁電流は第一近似として完全導体の場合と同じとするから、

$$E_w = L' \frac{dI_w}{dt} = -L' \frac{dI}{dt} = +ev^2 L' \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (3-14)$$

従って1周当りの inductance を  $L$  とすると、

$$U = ev^2 L \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (3-15)$$

(3-13)と(3-15)を合わせて書くと両方が存在する場合、

$$U = - \left( \frac{eg_0 R}{2\epsilon_0 r^2} - ev^2 L \right) \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (3-16)$$

となり、space charge と inductive wall は互いに逆符号である事が分る。

### § 3-3 Longitudinal space charge effect

§ 3-2 で力が分ったから次に dynamics を調べる。そこで線密度  $\lambda(s)$  についての仮定が必要になる。文献<sup>1)</sup>では位相空間で一様にビームが詰まっている分布を考えているが、ここでは簡単の為 Hofmann<sup>2)</sup>に従い、parabolic bunch、

$$\lambda(s) = \frac{3N}{4\ell} \left\{ 1 - \left( \frac{s}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (3-17)$$

を考えよう。ここで  $\ell$  はバンチの半長であり、バンチの中に  $N$  個の電荷があるとす。これに対応する位相空間の分布  $f(r)$  は位相空間  $(s, s/w_s)$  の中で粒子が円運動するとして(線型近似)その半径を  $r$  とすると elliptic distribution、

$$f(r) \propto \sqrt{\ell^2 - r^2} \quad (3-18)$$

となる。

さて(3-17)を(3-16)に入れると1周当りの energy gain は、

$$U = \left( \frac{eg_0 R}{2\epsilon_0 r^2} - ev^2 L \right) \frac{3N}{2\ell^3} s \quad (3-19)$$

となり、力(energy gain)が  $s$  に比例して線型の力となる。RF空胴による一周当りの energy gain を  $eV \sin \phi_s$  とすると( $\phi_s$  は平衡位相)、シンクロトロン振動の式は、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{w_0} \right) = \frac{e}{2\pi} [V(\sin \phi - \sin \phi_s) - U] \quad (3-20)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{hw_0^2 \eta}{\beta^2 E} \frac{\Delta E}{w_0}$$

となる。ここで  $\phi = \phi_s + \Delta\phi$  はRF位相角で  $h$  をハーモニック数、 $R$  を平均半径とすると、 $s$  と

$$\Delta\phi = h \frac{s}{R} \quad (3-21)$$

の関係がある。他の notation は、convetionalなものである。

さて(3-20)式で線型近似をすると、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta E}{w_0} \right) = \frac{e}{2\pi} \left[ \frac{Vh}{R} \cos \phi_s - \frac{3Ne v R}{2\ell^3} \text{Im} \left( \frac{Z_L}{n} \right) \right] s \quad (3-22)$$

となる。ここで、

$$\text{Im} \left( \frac{Z_L}{n} \right) = \frac{g_0 Z_0}{2\beta \sigma^2} - \omega_0 L \quad (3-23)$$

とおいた。 $Z_0$  は真空のインピーダンス  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 337 \Omega$  である。 $Z_L / n$  は第4章で説明するモード数  $n$  で割った longitudinal coupling impedance であり、 $\text{Im}$  は虚数部を表わす。ここで(3-22)式を零とおき、longitudinal space charge limit  $N_{sp}$  が

$$N_{sp} = \frac{2Vh\ell^3 \cos \phi_s}{3evR^2 \text{Im}(Z_L/n)} \quad (3-24)$$

と求めることが出来る。

space charge limit にまでいかなくとも longitudinal space charge effect は bunch の長さを変えたりする。これを見てみよう。(3-22)式は space charge の為、RF電圧  $V_0$  が、

$$V = V_0 \left\{ 1 - \frac{3Ne v R^2}{2V_0 h \ell^3 \cos \phi_s} \text{Im} \left( \frac{Z_L}{n} \right) \right\} \quad (3-25)$$

の様にVに変わる事を示す。即ち、effectiveな電圧が変  
 なる事になる。incoherent synchrotron oscillation  
 frequency  $f_s$  は  $\sqrt{V}$  に比例するので、Nの小さい時

$$\frac{\Delta f_s}{f_s} \approx - \frac{3 N_e v R^2}{4 V_0 h \ell^3 \cos \phi_s} \operatorname{Im} \left( \frac{Z_L}{n} \right) \quad (3-26)$$

となる。バンチのエミッタンスは  $\ell^2 f_s$  に比例するの  
 で、陽子の場合、

$$\ell^2 f_s \approx \text{const} \quad (3-27)$$

従って、

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} \approx - \frac{1}{2} \frac{\Delta f_s}{f_s} \quad (3-28)$$

となる。Nが大きい場合は(3-27)をそのまま使い、

$$\ell^4 - \frac{3 N_e v R^2 \operatorname{Im} (Z_L/n)}{2 h V_0 \cos \phi_s} \ell - \ell_0^4 = 0 \quad (3-29)$$

の解  $\ell$  がバンチの長さとなる。ここで  $\ell_0$  は  $N=0$  の  
 時のバンチの長さである。電子の場合はシンクロト  
 ロン放射による放射減衰と量子ゆらぎにより energy  
 spread が一定におさえられる為、バンチの長さ  $\sigma$  は

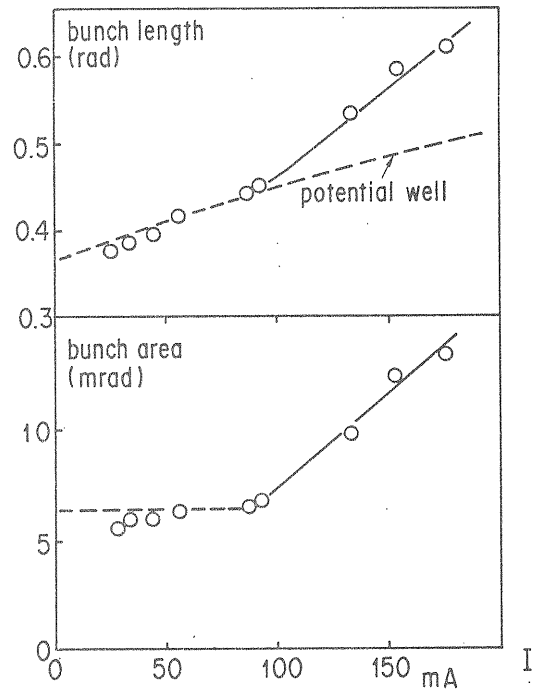
$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} \approx - \frac{\Delta f}{f} \quad (3-30)$$

となる。以上述べたバンチの長くなる効果は、poten-  
 tial well distortion bunch lengthening と呼ばれる。

図3-4にCERN-ISRの実験結果<sup>3)</sup>を示す。

ビーム強度の低い時は、ビーム強度に比例してバン  
 チが長くなっている。(CERN-ISRでは  $r > r_t$   
 であるが、space charge に比べ inductive wall の影  
 響が大きいため、バンチが長くなる。)図を見ると、強  
 度が大きくなると threshold があり、バンチが更に大  
 きくなる事が分る。これは anomalous bunch leng-

thening と呼ばれ、第4章に述べる microwave



Potential and anomalous bunch  
 lengthening (ref. 3)

図 3 - 4.

instability によるものと考えられている。この insta-  
 bility が起きると、longitudinal emittance が増大す  
 る。この instability は、Hofmann-Pedersen<sup>4)</sup>によ  
 れば、(3-24)式で与えられる space charge limit  
 $N_{sp}$  の40%の強度で起こる。従って  $0.4 N_{sp}$  が emitt-  
 ance 増大の起こる limit である。尚、この論文<sup>4)</sup>で  
 はRF波長に比べ短いバンチでよい近似である、  
 parabolic distribution を長バンチにも適用できる様  
 に拡張した local elliptic distribution を仮定してい  
 る。この様な potential well and anomalous  
 bunch lengthening は、電子リングでも観測され、特  
 にSPEAR II<sup>5)</sup>では、詳しい実験がなされた。



## 第4章 Longitudinal Coasting Beam Instability

### 4.1 はじめに

進行方向に uniform なビーム (coasting beam) の安定性は、先ず MURA で陽子-陽子衝突器を設計研究した際に問題となった。これは摂動により、ビームがだんだんバンチしてくると、粒子が衝突したり、しなかったりして衝突器としては望ましくないからである。MURA の機械は実現しなかったが、そこで行われた理論的及び基礎実験的研究は CERN で ISR を作る時の基となり、その理論は更に ISR で発展された。通常の加速器でも linac からのビームを RF capture する時や Slow extraction でビームを debunch して、なるべく一様なビームを得ようとする時に coasting beam instability が問題となる。

最初に考えられた mechanism は、negative mass instability<sup>1,2)</sup> と呼ばれるもので、最初は理論的に予言されたものである。これはトランジションエネルギー以上 ( $r > r_t$ ) では、空間電荷の斥力を受けて粒子のエネルギーが増えると、回転周波数が小さくなり元に戻る時間が遅くなり、ビームがだんだんバンチしてしまう効果である。これはいわば質量が負と考えた様な効果なので、上の様な名前が付いた。余談になるが昔、J・C・Maxwell は土星のリングの安定性を同じ様な考えで説明したとの事である。(重力の場合は引力なので安定性が結論される。)

これは真空壁を完全導体とした時の議論であるが、その後 inductive wall の重要性<sup>3,4)</sup> が指摘された。これは第3章で見た様に space charge の力と逆向きに働く。この様な訳で inductance を巧く加減して negative mass instability が起こらない様にする、いわゆる passive compensation (helical insert 等<sup>4,5)</sup>) が提案された事もあるが、これは実際に用いられた例を知らない。更に電圧を印加しない RF 空洞 (passive cavity) があっても、ビームはバンチする<sup>6)</sup>。これらの bunching (instability) が起こらない様にするには、ビームの運動量を拡がり大きくしていわゆる Landau damping によって、instability を抑える必要がある。文献6) では空洞のシャントインピーダンスとビーム安定性に必要な運動量の拡がりとの関係式 (L N S criterion と呼ばれる安定性条件) を出している。更に Neil-Sessler<sup>7)</sup> は  $r > r_t$  でも bunching が起る MURA の実験を説明する為に、真空壁の resistivity を考慮に入れた。これは、resistive wall instability と呼ばれる。

今まで述べてきた事から分る様に初めは真空壁の性質や加速空洞等の装置の影響が個別に論じられてきた。しかしビームを取り巻く環境 (environment) の影響を一つの物理量で表わす事が出来たら、もっと統一的な取り扱いが出来るであろう。この様な量が次節で述べる coupling impedance である。以下この様な統一的な扱いを述べる。

### 4.2 Longitudinal coupling impedance

今 coasting beam に起る perturbation current (疎密波) を  $I(s, t)$  とおく。これは一周の周期性から

$$I(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n e^{i(n\theta - \Omega t)} \quad (4.1)$$

と Fourier 級数に展開できる。ここで  $R$  を平均半径として  $\theta = s/R$  である。さて Maxwell 方程式は線型だから一つの成分  $I_n e^{i(n\theta - \Omega t)}$  だけを考えて計算すればよい。ここで perturbation (疎密波) の位相速度、 $\frac{R\Omega}{n}$  は一般に粒子の速度  $v$  とは異なるが、その差は小さいのでお互いに等しいと近似する。すると3章の (3.16) 式で

$$\lambda(s, t) = \frac{I_n}{ev} e^{i(n\theta - \Omega t)} \quad (4.2)$$

として

$$V_n = -in \left( \frac{g_0 Z_0}{2\beta r^2} - \omega_0 L \right) I_n \quad (4.3)$$

となる。ここで一般に longitudinal coupling impedance  $Z_n$  を

$$V_n = -Z_n I_n \quad (4.4)$$

で定義すると、(4.3) から space charge と inductive wall のある場合

$$Z_n = in \left( \frac{g_0 Z_0}{2\beta r^2} - \omega_0 L \right) \quad (4.5)$$

となる。

ここで (4.4) において付けた負の符号は、 $eV$  を energy gain として定義しているからである。こうすると coupling impedance  $Z_n$  の resistive part, reactive part 共、回路理論の定義と一致する。但し、

壁や空洞の影響は常に energy loss をもたらすとは限らず、加速として働く場合もある。この様な力を利用しようというのがいわゆる wake field accelerator<sup>8)</sup>の原理である。

ここで capacitance の impedance  $\frac{1}{jC\omega} = -jC\omega = +iC\omega$  の類推から space charge の impedance は capacitive であるといわれる。(電子工学では普通  $e^{+i\omega t}$  の時間依存性を仮定する。 $e^{-i\omega t}$  の依存性と対応させる為には、 $i = -j$  となる。) 又, inductive wall の impedance は inductive になる。

次に別の例として resistive wall<sup>7)</sup> を考えよう。伝導度  $\sigma$  の壁での境界条件は角周波数  $\omega$  の交流成分について

$$\vec{E}_n = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} (1-i) (\vec{n} \times \vec{H}_n) \quad (4.6)$$

である。従って (3.4) より

$$E_w = -\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \frac{e\lambda v}{2\pi b} \quad (4.7)$$

となる。従って (3.8) より

$$E_s = -\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} (1-i) \frac{e\lambda v}{2\pi b} + (\text{space charge})$$

となり resistive wall の coupling impedance は

$$Z_n = \sqrt{\frac{\mu n \omega_0}{2\sigma}} (1-i) \frac{R}{b} \quad (4.8)$$

となる。ここで注意すべきは space charge と inductive wall では, coupling impedance は reactive part (虚数部) だけであったのに, resistive wall では, resistive part (実数部) が現われる事である。resistive part は power loss (dissipation) を引き起す事を指摘しておく。

さて, coupling impedance  $Z_n$  の定義を連続的な  $\omega$  に拡張し, 周波数領域でみた RF 電流  $I(\omega)$ , energy gain  $eV(\omega)$  を用いて

$$V(\omega) = -Z(\omega) I(\omega) \quad (4.9)$$

と定義できる。(4.9) 式は Fourier 変換でよくお目にかかる convolution theorem (合成積定理) の形をしている。今,  $V(\omega)$ ,  $Z(\omega)$ ,  $I(\omega)$  の時間領域でみた Fourier 変換を  $V(t)$ ,  $W(t)$ ,  $I(t)$  として

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.10)$$

$$W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.11)$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.12)$$

とすると

$$V(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} W(t-t') I(t') dt' \quad (4.13)$$

と時間領域では合成積の形で表わされる。ここでいま

$$I(t') = e \delta(t') \quad (4.14)$$

という単一粒子による電流を考えると, (4.13) から

$$V(t) = -eW(t) \quad (4.15)$$

となる。従って  $W(t)$  は単一粒子 (exciting charge) の電磁場により時間後に通る粒子 (test charge) の受ける一周当りの energy loss を表わす。(もっともここで述べた場合は発散を避ける為, ビームサイズを考えたので単一粒子とは言えないが) この様な訳で,  $W(t)$  は通常は wake potential と呼ばれるが, Green 関数とも呼ばれる。

ここで今まで求めた coupling impedance について wake potential を求めておこう。

i) space charge と inductive wall

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega}{\omega_0} \left( \frac{g_0 z_0}{2\beta r^2} - \omega_0 L \right) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{g_0 z_0}{2\beta r^2} - \omega_0 L \right) \delta'(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

これは局所的な相互作用である。

ii) resistive wall

(4.8) より

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} (1-i) \frac{R}{b} \quad (4.17)$$

ここで  $\omega$  が負の時の平方根の定義をしておかねばならない。これは (4.11) で  $W(t)$  が実という条件から

$$Z(-\omega) = Z^*(\omega) \quad (4.18)$$

という条件がつく。従って

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma}} \frac{R}{b} (1 - i \operatorname{sgn}(\omega)) \sqrt{|\omega|} \quad (4.19)$$

となる。ここで  $\operatorname{sgn}(\omega)$  は  $\omega$  の正負の符号に従い  $\pm 1$  を表わす。これを Fourier 変換<sup>9)</sup> すると

$$W(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{2\sigma}} \frac{R}{b v^2} \frac{S(t)}{|t|^{\frac{3}{2}}} \quad (4.20)$$

となる。

ここで

$$S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

であり  $S(t)$  は前に通る粒子には力を与えないという因果律を示す。又、resistive wall は粒子が通った後も力を及ぼし memory を持つ事が分る。図 4.1 の様に模式的に書くと

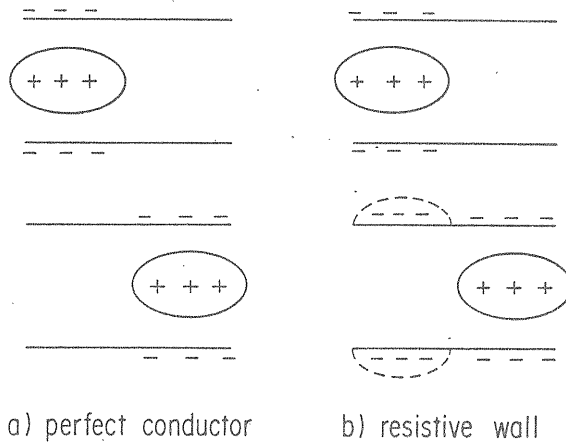


図 4-1.

完全導体では image charge はビームと共に動くが、抵抗のある場合 image charge が真空壁中に拡散していく。この様な描像が正しい事を数学的に示したのに、Robinson<sup>10)</sup> の論文がある。

Coupling impedance の概念は coasting beam instability の理論の発展から徐々に出てきたので、まず周波数領域で定義された。一方時間領域で考える wake potential の概念も重要である。直観的には最初から時間領域で考えて次に周波数領域に行った方が考えやすいかもしれない。この様な立場からこの講義で述べる事以外の事柄も含めて、良く書いてあるものに Chao の講義録<sup>11)</sup> がある。合わせて読まれたい。

尚、今までスムーズな真空壁についてだけ述べたが RF 空洞のような不連続な装置のインピーダンスも考える必要がある。この時はインピーダンスの定義にいわゆる transit time factor を入れなければならない

という違いはあるが、ほぼ同様に出来る。これについては文献(12) の Appendix を見られたい。

ここで RF 空洞の impedance と wake function を結果だけ書いておく。

$$Z(\omega) = \frac{R_L}{1 - iQ(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)} \quad (4.22)$$

$$W(t) = \frac{R_L \omega_r}{Q} e^{-\frac{\omega_r t}{2Q}} \left[ \cos \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t - \frac{1}{2Q \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \sin \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right]$$

(4.23)

ここで  $R_L$  は shunt impedance ( $V^2/2P$  で定義)、 $Q$  は  $Q$ -値、 $\omega_r$  は共鳴角周波数である。 $R_L$  と  $Q$  は一般に  $\omega$  に依存するが、普通定数と考える。

尚、RF 空洞の様な resonator で  $Q$  が小さい場合 (broadband resonator) の impedance の図を書く

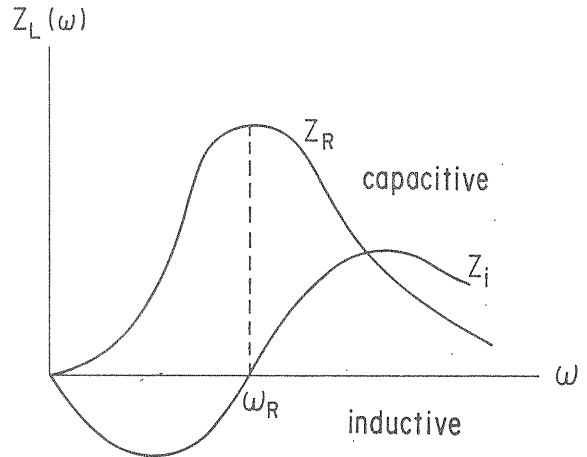


図 4-2.

図 4.2 の様になる。 $\omega_r$  が大きいと、 $\omega$  の小さい時 inductive part が主となる。陽子加速器で観測される inductive impedance は主として、corrugated chamber や真空壁の不連続性の様な  $\omega_r$  が大きく  $Q$  の小さい resonator の impedance を低い周波数で観測しているものと、考えられている。

### 4.3 Vlasov 方程式

粒子に働く力が coupling impedance で表現される事が分ったので、いよいよ beam dynamics を考える。この際基礎となる方程式は、Vlasov 方程式なので先ずこの説明をする。

まず最初に Liouville の定理を考える。今運動方程式は時間によらないハミルトニアン  $H(\vec{q}, \vec{p})$  で与えられるとする。ここで  $\vec{q}, \vec{p}$  は  $N$  個の粒子の各々の座標及び運動量をまとめて書いたもので、 $6N$  次元の位相空間 ( $\Gamma$ -空間) を作る。今  $6N$  次元の  $\Gamma$ -空間での分布関数 (アンサンブル理論で考えたもの) を  $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t)$  とする。  $\rho(\vec{q}, \vec{p}, t) d\vec{q} d\vec{p}$  は粒子数を表わしこれは一定であり、位相空間の体積  $d\vec{q} d\vec{p}$  は Liouville の定理から不変であるから、  $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$  は位相空間内での連続の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} \left\{ \dot{\vec{q}}_i f \right\} + \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \left\{ \dot{\vec{p}}_i f \right\} = 0 \quad (4.24)$$

を満足する。これを書き直すと

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{\partial \dot{\vec{q}}_i}{\partial \vec{q}_i} + \frac{\partial \dot{\vec{p}}_i}{\partial \vec{p}_i} \right) f + \dot{\vec{q}}_i \frac{\partial f}{\partial \vec{q}_i} + \dot{\vec{p}}_i \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_i} = 0 \quad (4.25)$$

となる。ここで Hamiltonian の方程式

$$\dot{\vec{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \quad (4.26)$$

$$\dot{\vec{p}}_i = - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i}$$

より

$$\frac{\partial \dot{\vec{q}}_i}{\partial \vec{q}_i} + \frac{\partial \dot{\vec{p}}_i}{\partial \vec{p}_i} = 0 \quad (4.27)$$

となり結局

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\vec{q}}_i \frac{\partial f}{\partial \vec{q}_i} + \dot{\vec{p}}_i \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_i} = 0 \quad (4.28)$$

となる。これは Liouville 方程式と呼ばれるものである。ここで  $D$  は全微分を表わすが、流体力学で対流微分とよばれる慣用に従い、大文字で表わした。

Vlasov 方程式は  $N$  粒子の集団を  $6$  次元の位相空間 ( $\mu$ -空間) の座標  $q, p$  で表わした時の一体分布関数を  $f(q, p, t)$  と書き、これに位相空間での連続の方程式を適用し、前と同様に

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \quad (4.29)$$

としたものである。ここで  $\dot{q}_i, \dot{p}_i$  については一体のハミルトニアン  $H(q, p)$  から

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.30)$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

として求める。このハミルトニアンは 2 体の相関などは含まないが、他の粒子が全体として一つの粒子に与える力 (collective force) は含むものである。

Vlasov 方程式は Boltzmann 方程式で衝突項を落したもので、collisionless (reduced) Boltzmann 方程式とも呼ばれる。又この様に集団場を考えるのは量子力学の Hartree-Fock 近似に相当するので time-dependent Hartree 方程式とも呼ばれる。

ここで Liouville 方程式と Vlasov 方程式が時々混同されるので、その違いを強調しておこう。Liouville 方程式は  $\Gamma$  空間で考えたもので、ハミルトン系ならば厳密に成り立つ。一方 Vlasov 方程式は  $\mu$ -空間で考えたもので、2 体、3 体等の相互作用を無視した近似的方程式である。ところで集団場とは元をただせば 2 粒子間のクーロン相互作用に基づくものであるから、Vlasov 方程式の基礎に疑問をいだく人もいるだろう。実際これが運動論的に基礎づけられたのは、そんなに古い事ではない。これについてはプラズマ物理の、適当な教科書<sup>13)</sup>で勉強していただくとして、何を勉強すればよいか、筋道だけを示す。まず  $N$  個の粒子の座標を含む Klimontovich 分布関数と、その満足する微視的な、厳密に成り立つ Klimontovich-Dupree 方程式を出発点とする。これから 1 体分布関数、2 つの粒子の座標を含む 2 体分布関数等々を、定義する。そして 1 体分布関数の満足する方程式をたてると、それは 2 体分布関数を含むようになる。2 体分布関数を満足する方程式では、3 体分布関数を含む等々、BBGKY hierarchy と呼ばれる階層構造になっている。これを 1 体分布関数だけで表わせるように、最低次で打ち切ったものが Vlasov 方程式になっている。

尚、Vlasov 方程式は  $\mu$ -空間で考えた時の位相空間の体積 (エミッタンス) が不変である事を示す。2 体衝突を考えに入れると、この様なエミッタンスは増大する。これは intrabeam scattering<sup>14)</sup> と呼ばれる。それでは Vlasov 方程式に基づく beam instability ではエミッタンスは増大しないのであろうか。これは微視的に見ればその通りであるが、Nonlinear field でエミッタンスが増大するという事と同じ意味で coarse-graining (粗っぽく見る) をすれば、確かにエミッタンスは増大する。

#### 4.4 Instability の growth rate

まず Vlasov の方程式 (4.28) から出発する。我々は縦方向の運動だけを論ずるのだから、一次元の問題となる。ここで縦方向の正準変数として次に定義する、

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (4.31)$$

$$W = 2\pi \int_0^E \frac{dE}{\omega} \quad (4.32)$$

( $\theta, W$ ) をとる。従って分布関数を  $\bar{g}(\theta, W)$  とすると、Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial \bar{g}(\theta, W)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{g}(\theta, W)}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \bar{g}(\theta, W)}{\partial E} \dot{W} = 0 \quad (4.33)$$

となる。ところで我々は小さい energy spread を考えるので、回転角周波数  $\omega$  はほぼ一定としてよい。そうすると ( $\theta, E$ ) を変数として分布関数  $g(\theta, E)$  は

$$\frac{\partial g(\theta, E)}{\partial t} + \frac{\partial g(\theta, E)}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial g(\theta, E)}{\partial E} \dot{E} = 0 \quad (4.34)$$

という方程式を満たす。ここで  $\dot{E}$  は1周当りの energy gain eV より

$$\dot{E} = \frac{eV\omega}{2\pi} = -\sum_n \frac{e\omega_0}{2\pi} Z_n I_n e^{i(n\theta - \Omega t)} \quad (4.35)$$

と表わされる。ここで (4.4) 式を用いた。

ここで分布関数  $g(\theta, E)$  を定常部と摂動部に分け

$$g(\theta, E) = g_0(E) + \sum_n g_{1n}(E) e^{i(n\theta - \Omega t)} \quad (4.36)$$

とおく。ここで

$$g_{1n} \ll g_0 \quad (4.37)$$

と仮定する。定常分布  $g_0(E)$  は勿論  $\theta$  方向に一様なビームであるから変数  $\theta$  にはよらない。定常だから時間  $t$  にも、勿論よらない。

ここで

$$\lambda_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{1n}(E) dE e^{i(n\theta - \Omega t)} \quad (4.38)$$

であるから ( $E < 0$  の時は当然  $g_1(E) = 0$  とおくから、積分下限は  $-\infty$  にできる)。

$$I_n = \frac{eV}{R} \lambda_n = e\omega_0 e^{i(n\theta - \Omega t)} \int g_{1n}(E) dE \quad (4.39)$$

である。(4.35)、(4.36) を Vlasov 方程式 (4.34) に代入し、(4.37) の近似から  $g_{1n}(E)$  について線型化すると

$$(-i\Omega + in\omega) g_{1n}(E) e^{i(n\theta - \Omega t)}$$

$$- \frac{dg_0}{dE} \frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} Z_n e^{i(n\theta - \Omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} g_{1n}(E) dE = 0 \quad (4.40)$$

ここで (4.39) 式を用い、線型化近似では、Fourier 成分の一つだけに着目すれば良いという事を用いた。

次に (4.40) 式で両辺を  $(-i\Omega + in\omega) e^{i(n\theta - \Omega t)}$  で割り、 $E$  について積分し共通因子  $\int g_{1n}(E) dE$  を落とすと

$$1 = i \frac{(e\omega_0)^2 Z_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg_0/dE}{\Omega - n\omega} dE \quad (4.41)$$

となる。

ここでビームの中心エネルギーを  $E_0$  として

$$E = E_0 + \epsilon \quad (4.42)$$

とおき

$$\omega(E) = \omega_0 + k_0 \epsilon \quad (4.43)$$

とする。ここで

$$k_0 = \left. \frac{d\omega}{dE} \right|_{E=E_0} = -\frac{\omega_0 \eta}{\beta^2 E_0} = -\frac{\omega_0}{\beta^2 E_0} \left( \alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (4.44)$$

である。すると (4.41) は

$$1 = i \frac{(e\omega_0)^2 Z_n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg_0/d\epsilon}{\Omega - n(\omega_0 + k_0 \epsilon)} d\epsilon \quad (4.45)$$

となる。これがいわゆる分散関係式 (dispersion relation) であり、instability の理論の基礎となる。

さて (4.45) の積分は  $\epsilon = (\Omega - n\omega_0)/(nk_0)$  の所に、

特異点を持つ。この特異点の扱い方を処理しなければ、積分に unique な意味を与えられない。これはいわゆる Landau damping に関する問題である。これを詳しく述べる前に、特異点の存在を無視して良いエネルギー巾のない monoenergetic beam について考えよう。これは

$$g_0(\epsilon) = \begin{cases} \frac{N}{2\pi(2A)} & (-A < \epsilon < A) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4.46)$$

という分布で表わされる。(後に  $A \rightarrow 0$  とする。)

$$\frac{dg_0}{d\epsilon} = \frac{N}{4\pi A} \left\{ -\delta(\epsilon - A) + \delta(\epsilon + A) \right\} \quad (4.47)$$

であるから (4.45) 式より  $\Omega$  について解けば、

$$\Omega = n \left[ \omega_0 \pm \left\{ k_0^2 A^2 - i \frac{(e\omega_0)^2}{4\pi^2} \frac{Z_n}{n} N k_0 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.48)$$

となる。今、impedance  $Z_n$  として (4.5) 式の space charge と inductive wall の impedance をとり、中カッコ内で  $A \rightarrow 0$  とすると

$$\frac{Z_n}{n} k_0$$

が負の時、 $\Omega$  は complex となり、instability が起る。細かく書くと

	$r < r_t$	$r > r_t$
space charge dominant	安定	不安定
inductive wall dominant	不安定	安定

となり (拡張された意味の) negative mass instability の growth rate が計算できた事になる。(4.48) 式は一般のインピーダンスで成り立つ。例えばインピーダンスとして (4.8) の resistive wall impedance をとれば、 $Z_n$  は complex であるから  $k_0$  の符号によらず、常に instability が起る。これが resistive wall instability である。

#### 4.5 Landau damping と LNS criterion

前の節で見た様に monoenergetic beam の場合は色々な instability が起る。ビームにエネルギー巾がある場合は、instability が抑えられる事がある。こ

れがいわゆる Landau damping であり (4.45) 式の分散関係式の特異点を正しく扱う事によって説明できる。

この特異点の処理法の問題は以上述べた様な Fourier 変換による定常的扱いに関連したものであって、Landau<sup>15)</sup> が示した様に、初期の disturbance が時間的に増大していくという、Laplace 変換による初期値問題として正しく扱えば、解決できる。ここでは Landau-Lifschitz の教科書<sup>16)</sup> に従い簡単化して述べる。今まで  $e^{-i\Omega t}$  という時間依存性を仮定したが、時間と共に増大する (初期に零) の摂動は  $e^{\delta t}$  ( $\delta > 0$ ) という時間依存性を、持つべきである。(ここで最後に  $\delta \rightarrow +0$  とする。) 従って初期値問題を考えると

$$\Omega \rightarrow \Omega + i0 \quad (4.49)$$

という置き換えをすべきである。さて (4.45) の分散関係式で、 $k_0 > 0$  ( $r < r_t$ ) では図 4.3 の様に、 $\epsilon$  についての積分を考えると極は上半平面にある。従って  $\Omega$  が real な時は図 4.4 (b) の様に極の下をまわる径路を取るというよい。解析接続の考え方から  $\Omega$  が complex の場合も含めて図 4.4 の様になる。 $k_0 < 0$  の時は図は

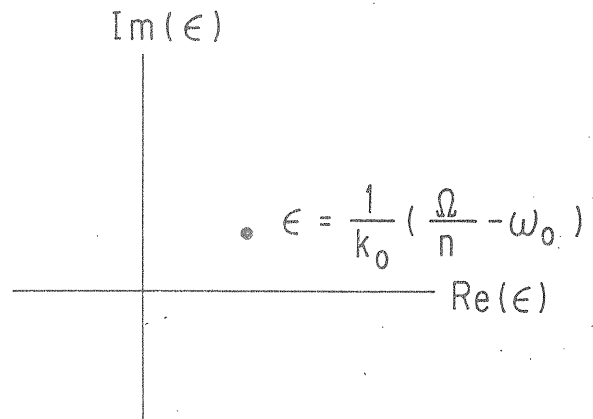


図 4-3.

逆転する。(常に  $\text{Im } \Omega > 0$  の時に実軸での積分が定義されていると考え、後は解析接続可能な道筋を取れば良い。) この図の径路が Landau contour と呼ばれるもので、分散関係式の積分は Landau contour に沿って行われると考える。ここで  $\text{Im } \Omega > 0$  のとき不安定、 $\text{Im } \Omega < 0$  のとき減衰、 $\text{Im } \Omega = 0$  のときが stability limit を与える。

積分の径路が定まったから (4.45) の分散式は unique に評価できる。これを書きなおすと

$$1 = i \frac{(e\omega_0)^2 Z_n}{2\pi k_0} \int_L \frac{\frac{dg_0}{d\epsilon}}{\frac{\Omega}{n k_0} - \frac{\omega_0}{k_0} - \epsilon} d\epsilon \quad (4.50)$$

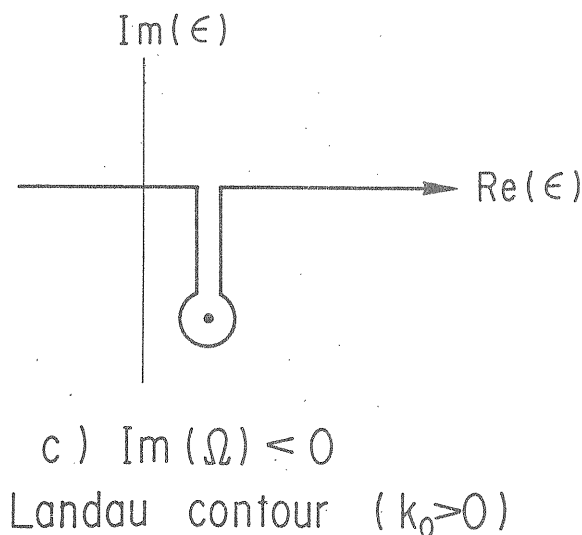
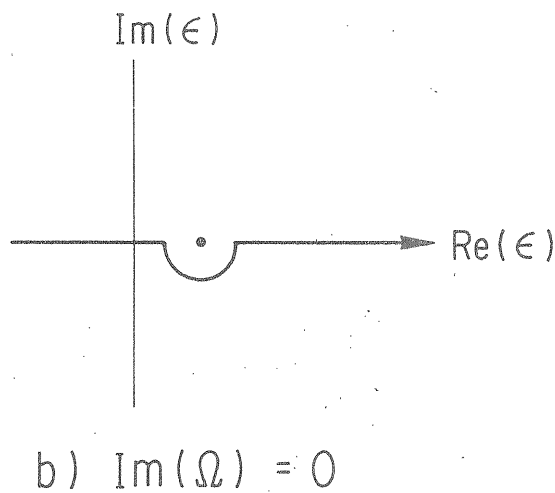
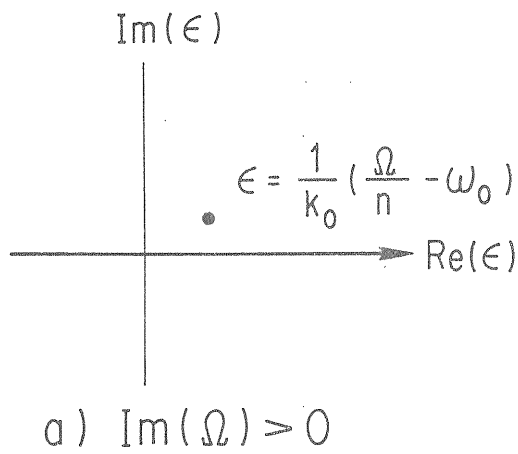


図 4-4.

となり ( $L$ は Landau contour を示す)平衡分布  $g_0$  とインピーダンス  $Z_n$  を決めると周波数  $\Omega$  と、波数  $n$

の関係式が出てくるという本来の意味の他に,  $g_0$  と  $n$  を決めると  $\Omega$  と  $Z_n/n$  の関係式とみる事もできる。ここでインピーダンスを次式

$$\dot{V} + i\dot{U} = \frac{2 I_0 e}{\pi m_0 c^2 \beta^2 \alpha |\eta| \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2} \frac{Z_n}{n} \quad (4.51)$$

と変形した  $\dot{U}$ ,  $\dot{V}$  という量を定義する。  $I_0$  はビームの DC 電流であり, 運動量の拡がり  $\Delta p$  は半値全巾である。更に

$$2S = -\eta \omega_0 \frac{\Delta p}{p} \quad (4.52)$$

として

$$x_1 = \frac{\Omega - n\omega_0}{nS} \quad (4.53)$$

$$x = \frac{R_0 \epsilon}{S} \quad (4.54)$$

とし更に

$$f(x) = \frac{2\pi S}{NR_0} g_0(\epsilon) \quad (4.55)$$

とおく。そうすると  $f(x)$  の規格化は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (4.56)$$

となる。すると分散関係式 (4.50) は

$$1 = \text{sgn}(\eta) (\dot{V} + i\dot{U}) I_D \quad (4.57)$$

$$I_D = i \int_L \frac{df}{dx} \frac{dx}{x - x_1} \quad (4.58)$$

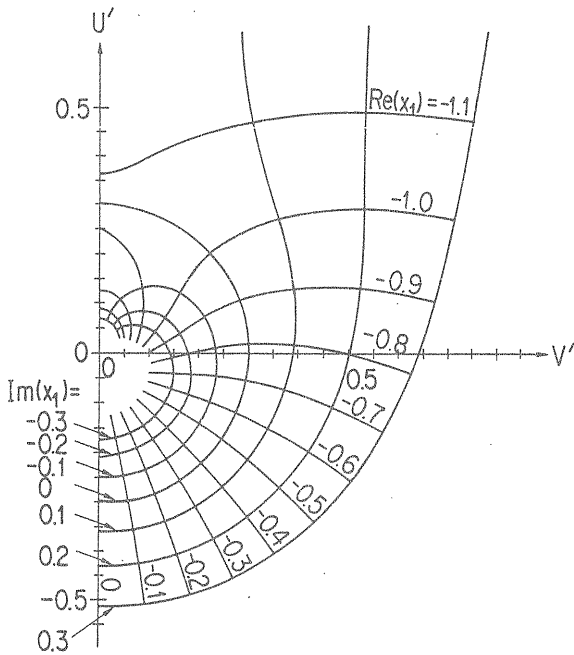
と規格化された形になる。積分は Landau contour に沿ってとる。

ここで規格化された分散式 (4.58) で, インピーダンス ( $\dot{U}, \dot{V}$ ) - 平面上に  $\text{Re}(x_1)$ ,  $\text{Im}(x_1)$  の mapping をする。この様な mapping は色々な分布について, CERN-ISR<sup>17)</sup> で詳しく調べられたが, ここでは文献<sup>18)</sup> から取った例を図 4.5 に示す。

この図で仮定した分布は,

$$f(x) = \frac{8a}{3\pi} (1 - a^2 x^2)^{\frac{3}{2}} \text{ for } |x| < \frac{1}{a} \quad (4.59)$$

ただし  $a^2 = \frac{5}{6}$

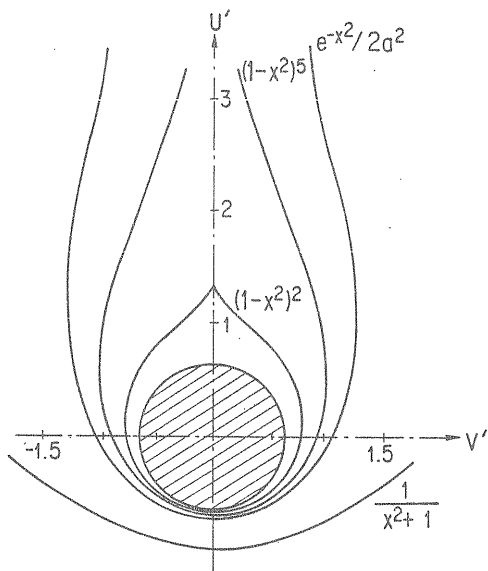


Stability diagram (ref.18)

図 4-5.

というものである。ここで  $\text{Im}(x_1)=0$  の線が stability limit を与える。

幾つかの異なる平衡分布に対する stability diagram の例を文献(19) からとって図 4.6 に示す。



Stability diagrams for different distributions<sup>19)</sup>

図 4-6.

ここで  $\dot{V} < 0$  の所は negative resistance となり、自然には存在しないが feedback があると起りうる。

ここで斜線をつけた丸い部分は安定領域の共通部分で、この円形部分をとると、安定条件は

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| < F \frac{m_0 c^2 \beta^2 r |\eta| (\Delta p/p)^2}{e I_0} \quad (4.60)$$

となる。ここで  $F$  は form factor と呼ばれる 1 に近い数で、平衡分布の違いによる安定領域の違いを示す。(4.60) 式は普通 Keil-Schnell criterion<sup>20)</sup> と呼ばれるが、 $F$  を 1 とおき、 $Z_n$  を加速空洞のシャントインピーダンスとした式は、それ以前に Laslett-Neil-Sessler<sup>6)</sup> によって提出されているので、LNS criterion と呼ぶべきものであろう。

LNS criterion (4.60) は、運動量の拡がりがあると ( $\Delta p/p \approx 0$ ) ビーム不安定性が、Landau damping で抑えられる事がある事を示す。ここでは陳一横谷<sup>18)</sup> 等の分析の初期値問題による扱いを単純化した扱いで、Landau damping を説明した。一方 Van Kampen<sup>21)</sup> は、分散式の特異点の扱いを定常解の形で扱い、超関数で与えられる定常解の完全系を、求めた。この扱いでは安定領域内の  $\omega$  は定数と考える。しかし一般の摂動分布関数は、上で求めた完全系の重ね合わせとなり、各々の固有関数は異なった振動数で振動するので、重ね合わされた摂動分布は Phase mixing により、smear out され、減衰する事になる。この様な考えで Landau damping を説明したものが、加速器の文献には多い。この二つの扱いの同等性は Case<sup>22)</sup> により示された。Landau damping をもっと直観的に説明したものに Dawson<sup>23)</sup> の論文がある。詳しくはプラズマ物理の教科書をみられたい。

#### 4.6 Microwave Instability

microwave instability とはバンチしたビームに LNS (Keil-Schnell) criterion を適用してバンチの縦方向の不安定性を説明したものである。図 4.7 の様にビームを debunch した時、debunch されたビームでは、局所的に運動量の拡がり  $\Delta p$  が小さくなり、LNS criterion に局所的な  $\Delta \phi$  の値を入れると、debunch する前に安定なビームでも debunch すると不安定になり、エミッタンス増大が起る。この様な debunching の際のエミッタンス増大は、CERN-PS で観測され、その際 microwave signal が観測されたので上の様な名前がついた。これについては上の様な説明と共に、Boussard<sup>24)</sup> の論文で初めて提出された。

これは RF 電圧がかかっており、シンクロトロン振動がある場合でも、実験を半定量的に説明する。例えば第 3 章で述べた anomalous bunch lengthening で



ある。この instability は、シンクロトロン振動の周期よりも短い時間で増大する、強い instability である

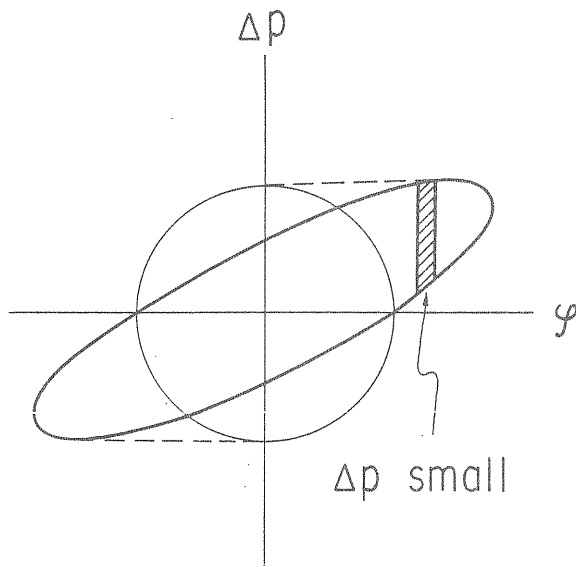


図 4-7.

ので coasting beam という近似が良い為と考えられる。これを bunched beam の理論から説明するものが、後に述べる mode coupling theory<sup>25,26)</sup>である。特に Sacherer<sup>26)</sup>は、broadband resonator impedance を用い、LNS criterion と mode coupling theory の

予言がほぼ一致する事を示した。

さて LNS criterion は運動量の拡がり小さいと、instability が起き易くエミッタンスが増大する事を示す。それでは最初の運動量の拡がり  $\Delta p_i$  と instability によって増大した後の運動量の拡がり  $\Delta p_f$  には、何か関係があるのだろうか？この関係を coasting beam の negative mass instability について、計算機シミュレーションで初めて示したのが Dory<sup>27)</sup>である。彼によれば threshold の運動量の拡がりを  $\Delta p_{th}$  として

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_i \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_f = \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{th}^2 \quad (4.61)$$

という関係式を出した。これは  $\Delta p_i$  が小さければ、最終的  $\Delta p_f$  が大きくなる事を示すので、overshoot formula という。これを解析的に説明しようとしたのが、陳一横谷<sup>18)</sup>である。彼等は Vlasov 方程式の非線型性を一部取り入れた議論をしている。彼等の与えた overshoot formula は

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_i^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_f^2 = 2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{th}^2 \quad (4.62)$$

という物である。どちらの公式も実験結果をほぼ説明する。bunched beam についても overshoot が観測されている。この理論については、文献(28)をみられたい。

## 第5章 Transverse Coasting Beam Instability

### § 5-1 Transverse coupling impedance

#### 1) 定義

Transverse coupling impedance は Hereward により unpublished manuscript の中で導入された。これは第4章で述べた longitudinal coupling impedance と同様に、摂動による横方向の力を(周波数領域で)うまく parametrize したものである。これは単位が ohm でなく ohm/m であったり、横方向のビームの変位を考えねばならなかったり、longitudinal の場合よりも分りにくいであろう。

Transverse coupling impedance  $Z_T(\omega)$  の定義は

$$Z_T(\omega) = -i \frac{\int_0^{2\pi R} [E(\omega, s) + v \times B(\omega, s)]_T ds}{\beta I(\omega) \xi} \quad (\text{ohm/m}) \quad (5.1)$$

である。ここで  $\exp(-i\omega t)$  の時間依存性を仮定した。ここで  $\xi$  は横方向のビームの変位であり、 $E(\omega, s)$ ,  $B(\omega, s)$  はその様な変位があった時に誘起される電磁場の Fourier 変換であり、スムーズな pipe の場合  $s$  に依存しない。加速空洞の様な局所的な物については、 $E(\omega) \exp(-i\omega s/v)$  のように transit time factor を含む。 $\beta$  は Lorentz 因子であり、 $I(\omega)$  は電流の Fourier 変換である。定義はこの通りである

が、この定義を理解するには次の小節に述べる具体例をみた方が、分り易いであろう。

2) Resistive wall impedance の計算例<sup>1)</sup>

図5-1.の様に半径  $a$  一様な面密度  $n_0$  ( $\pi a^2 n_0 = N$ ) のビームの重心が  $\xi$  だけ  $y$  方向にずれたとする。この時の摂動電荷密度  $\rho_1$  は

$$\rho_1 = n_0 e \xi \cos \theta \delta(r-a) f(s-vt) \exp(-i\nu\omega_0 t) \quad (5.2)$$

となる。(ここで  $\int f(s-vt) ds = 1$  と規格化した。)  $\nu$  はベータatron振動数であり、(5.2)の実部をとると考える事にする。ここでひとまずパンチの形は時間的に変らないとした。摂動電流密度  $\vec{J}_1$  は

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 = & n_0 e \xi f(s-vt) \exp(-i\nu\omega_0 t) \\ & \times \{ i\omega H(a-r) [-\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}] \\ & + v \delta(r-a) \cos\theta \hat{s} \} \quad (5.3) \end{aligned}$$

となる。ここで  $H(a-r)$  はHeavisideの関数 ( $H(x)=0 (x<0), 1 (x>0)$ ) であるが、横方向の電流は以下で無視する。

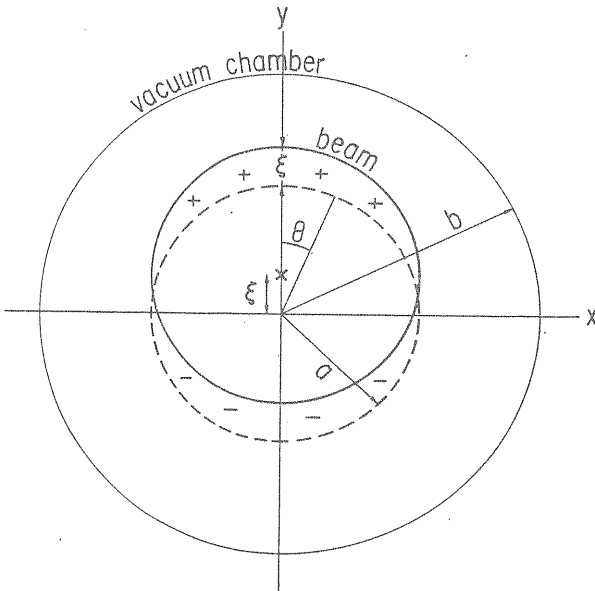


図5-1.

ここで(5.2), (5.3)の摂動電荷、電流により誘起される電磁場  $E_s(t, s-vt)$  等を考え

$$\begin{aligned} E_s(t, s-vt) = & \cos\theta \exp(-i\nu\omega_0 t) \\ & \int \tilde{E}_s(k, \nu\omega_0) e^{ik(s-vt)} dk \end{aligned}$$

(5.4)

等と Fourier 積分で表わしておく。ここで Maxwell 方程式から  $E_r, E_s, B_\theta$  は  $\cos\theta$  に比例し  $E_\theta, B_r, B_s$  は  $\sin\theta$  に比例する。さて  $\rho_1, J_{1s}$  も Fourier 積分で表わすと

$$f_1 = n_0 e \xi \cos\theta \delta(r-a) \int \tilde{f}(k) e^{(ks-\omega t)} dk \quad (5.5)$$

$$J_{1s} = \rho_1 v \quad (5.6)$$

$$\omega = kv + \nu\omega_0 \quad (5.7)$$

となる。ここで Maxwell 方程式は線型だから各々の Fourier 成分についてだけ計算すればよい。

今、文献(1)に従い  $bk/r \ll 1$  ( $b$  はパイプ半径)の長波長近似の場合を考え、電磁場を quasistatic な方法で求める。ビームの内外で、 $\rho_1 = J_{1s} = 0$  であるから scalar potential  $\Psi$  は

$$\Delta\Psi = 0 \quad (5.8)$$

を満足する。円筒座標系で

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} = 0 \quad (5.9)$$

ここで長波長近似より  $s$  についての微分を零とおき、 $\Psi = R(r) \Theta(\theta)$  とおき変数分離により解くと、

$$R = Ar^m + Br^{-m} \quad (5.10)$$

$$\Theta = C \cos m\theta + D \sin m\theta$$

となる。ここで  $\theta$  についての周期性は  $2\pi$  だから  $m=1$  であり

$$E_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \left( A - \frac{B}{r^2} \right) (C \cos \theta + D \sin \theta) \quad (5.11)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \left( A + \frac{B}{r^2} \right) (-C \sin \theta + D \cos \theta)$$

となる。ここでビーム内部で  $r=0$  の条件から  $B=0$ 、ビーム外部で  $r=b$  で  $E_\theta=0$  (一次近似として完全導体の境界条件を用いる) より、 $B=-b^2 A$ 、又前に述べた電場の対称性から  $D=0$  となる。従って電場は

$$\text{内部 } \vec{E}_1 = E_{1y} (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \exp \{i(ks - \omega t)\}$$

$$\text{外部 } \vec{E}_1 = E \left\{ \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 1 \right] \cos \theta \hat{r} + \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right] \sin \theta \hat{\theta} \right\} \times \exp \{i(ks - \omega t)\} \quad (5.12)$$

となる。

同様の考え方より磁場につき

$$\text{内部 } \vec{B} = B_{1x} (\sin \theta \hat{\theta}) \exp \{i(ks - \omega t)\}$$

$$\text{外部 } \vec{B}_1 = B \left\{ \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right] \sin \theta \hat{r} - \left[ \left( \frac{b}{r} \right)^2 + 1 \right] \cos \theta \hat{\theta} \right\} \times \exp \{i(ks - \omega t)\} \quad (5.13)$$

となる。次に  $r = a$  での境界条件 (この小節では文献(1)と合わせ Gauss 単位系を用いる。)

$$\begin{aligned} E_r^+ - E_r^- &= 4\pi\rho_1 \\ E_\theta^+ - E_\theta^- &= 0 \\ B_r^+ - B_r^- &= 0 \\ B_\theta^+ - B_\theta^- &= 4\pi J_{1s} \end{aligned} \quad (5.14)$$

より

$$\begin{aligned} E_{1y} &= -2\pi n_0 e \xi \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] \tilde{f}(k) \\ E &= 2\pi n_0 e \xi \left( \frac{a}{b} \right)^2 \tilde{f}(k) \\ B_{1x} &= \beta E_{1y} \\ B &= -\beta E \end{aligned} \quad (5.15)$$

がでる。

次にパイプが resistive wall である事を考慮に入れると境界条件

$$E'_{1s} = -(1-i)R(\omega) B_{1\theta} \quad (r=b) \quad (5.16)$$

の電場がでる。ただし

$$R(\omega) = i\sqrt{|\omega|/2\pi\sigma} \quad (5.17)$$

であり、 $\sigma$  は伝導度である。さて前に述べた様に

$\Psi = Ar + B/r$ ,  $E_s = \delta\Psi/\delta s = ik\Psi$  で  $r=0$  で nonsingular の条件から  $E_{1s}$  は  $r$  に比例する。従って

$$E'_{1s} = -4\pi\beta n_0 e \xi \tilde{f}(k) \xi \frac{a}{b} (1-i)R(\omega) \frac{r}{b} \cos \theta \exp \{i(ks - \omega t)\} \quad (5.18)$$

となる。次に Maxwell 方程式,  $\text{rot } \vec{E}' = i\omega \vec{B}_1/c$  で  $s$  についての微分を零とおき

$$\begin{aligned} \vec{B}'_1 &= -4\pi\beta n_0 e \xi \tilde{f}(k) \left( \frac{a}{b} \right)^2 (1+i) \frac{cR(\omega)}{\omega b} \\ &\quad \times (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \exp \{i(ks - \omega t)\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

以上の事から Lorentz 力を求めると

$$\begin{aligned} E_{1y} + \beta B_{1x} &= -2\pi n_0 e \xi \tilde{f}(k) \left\{ r^{-2} \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \left( \frac{\beta a}{b} \right)^2 (1+i) \frac{cR(\omega)}{\omega b} \right\} \\ &\quad \exp \{i(ks - \omega t)\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

となる。この第一項は  $\sigma = \infty$  でも残る項で, space charge (完全導体壁) の効果を表わす。ここで

$$I(\omega) = n_0 e v \tilde{f}(k) \pi a^2 \exp \{i(ks - \omega t)\} \quad (5.21)$$

であるから (5-1) の定義から

$$\begin{aligned} Z_T(\omega) &= \frac{4\pi R}{a^2 c \beta^2} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[ 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] i + 2 \left( \frac{\beta a}{b} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. (1-i) \frac{cR(\omega)}{\omega b} \right\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

である。ここで  $R$  は平均半径を表わすから,  $R(\omega)$  と混同しない様に。ここで用いた単位系は Gauss 単位系である。MKSA 系に直すには (5.22) 式を  $4\pi\epsilon_0$  で割ればよい。尚, Maxwell 方程式をきちんと解く事は文献(2)によってなされている。なお coherent synchrotron 振動があり,  $\omega = kv$  の関係が減り立たない時でも上に述べた筋道をたどっていい。但この場

合は  $k$  と  $\omega$  の分散関係式は beam dynamics から決まる。

### 3) wake potential その他

電磁場が (5.4) の様に表わせるのと同様に時間領域でみた Lorentz 力  $F(t, s-vt)$  も

$$F(t, s-vt) = \exp(-i\nu\omega_0) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(k, \nu\omega_0) \exp\{ik(s-vt)\} dk \quad (5.23)$$

と表わされる。coupling impedance の定義 (5-1) より

$$\frac{\tilde{F}(k, \nu\omega_0)}{e} = i \frac{Z_1(k\nu)}{2\pi R} \beta \xi \tilde{I}(k\nu) \quad (5.24)$$

従って

$$\begin{aligned} & \exp(i\nu\omega_0 t) F(t, s-vt) \\ &= \frac{e\beta\xi i}{2\pi R\nu} \int Z_1(\omega) \tilde{I}(\omega) \exp\{i\omega(s/\nu-t)\} d\omega \end{aligned} \quad (5.25)$$

となり、 $\tilde{I}(\omega) = \frac{e}{2\pi}$  のように  $\delta$ -function charge の場合の  $\exp(i\nu\omega_0 t) F(t, \xi-vt)$  を  $W(s-vt)$  とすると

$$W(s-vt) = \frac{ie^2\beta\xi}{4\pi^2 R} \int Z_1(\omega) \exp\left\{i\frac{\omega}{\nu}(s-vt)\right\} d\omega \quad (5.26)$$

となる。 $W(s-vt)$  を longitudinal の場合と同じく、wake potential と呼ぶ。(5.24) も合成積の形をしているから、合成積定理により wake potential が Green 関数となる。resistive wall の場合は文献(2)に従い、

$$\begin{aligned} W(s-vt) &= \frac{4e^2\beta^2\xi}{\sqrt{\pi}b^2} \sqrt{\frac{c}{\pi\sigma\beta}} \exp\{-i\nu\omega_0 \\ & \quad (s-vt)/\nu\} \times \frac{S(s,t)}{|s-vt|^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.27)$$

となる。 $S(s,t)$  は  $s > vt$  で零で  $s < vt$  で 1 という関数であるこの式が成り立つ範囲は文献(2)によると

$$b \ll |s-vt| \ll b^2 \left(\frac{4\pi\beta\sigma}{c}\right) \quad (5.28)$$

である。完全導体壁の場合は

$$W(s-vt) = -\frac{2e^2\xi}{a^2 r^2} \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \delta(s-vt) \quad (5.29)$$

となり memory を持たない。

さて Sacherer<sup>3)</sup> は longitudinal impedance  $Z_L$  と、transverse impedance  $Z_T$  の間に

$$Z_T = \frac{2C}{b^2} \frac{Z_L}{\omega} \quad (5.30)$$

という関係をつけた。この関係式は resistive wall の場合は厳密に成り立つが、一般には、近似式である。この関係式はしばしば用いられている。

尚、この講義では monopole current による longitudinal impedance と dipole current による transverse impedance だけを説明した。その他に dipole current による longitudinal impedance やより高次の quadrupole, sextupole etc. の current による impedance も考える事ができる。これ等については Chao の lecture<sup>4)</sup> を見られたい。

### 4) RF 空洞

最後に後で必要になる RF 空洞の coupling impedance と wake potential を書いておく。

$$Z_T(\omega) = \frac{R_T \omega_r / \omega}{1 - iQ(\omega/\omega_r - \omega_r/\omega)} \quad (5.31)$$

ここで  $R_T$  は transverse shunt impedance,  $Q$  は  $Q$ -値,  $\omega_r$  は共鳴角周波数であり、一般には前二者は  $\omega$  に依存するが、普通定数と考える。wake potential は

$$\begin{aligned} W(-vt) &= \frac{e^2\beta\xi R_T \omega_r}{Q\sqrt{1-1/(4Q^2)}} e^{-\frac{\omega_r}{2Q}t} \\ & \quad \times \sin\omega_r \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} t \end{aligned} \quad (5.32)$$

ここで  $s=0$  とおいた。加速空洞の transverse impedance を Maxwell 方程式からきちんと導いた良い論文が見当たらないので、この事については不完全では

あるが文献(5)を、見られたい。

## § 5-2 Transverse coasting beam instability

これはLaslett 達<sup>1)</sup>により resistive wall についてまず解析された。これは横方向の変位がだんだん増して、しまいにはビームロスになるものである。一方前章で述べた longitudinal な場合は bunching はするが、ビームロスとは普通ならない。一周当りの周期性により変位は  $\exp\{i(n\theta - \Omega t)\}$  という、フーリエ成分の重ね合わせて表現できる。n はモード数と呼ばれる整数で  $n=3$  の場合を図 5-2 に示す。

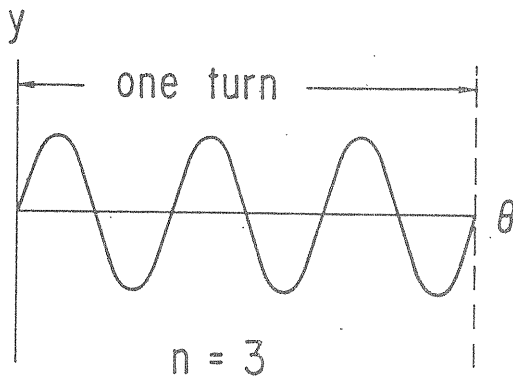


図 5-2.

この変位に関する位相空間での分布関数を、 $\Psi(y, P_y, \theta, W, t)$  と書く。ここで  $P_y$  は  $y$  と共役な運動量、 $W$  は (4.32) 式で微小部分を取ったもので、

$$W = \frac{2\pi \Delta E}{\omega} \quad (5.33)$$

である。変位は  $\theta$  によって変るから分布  $\Psi$  は  $y, \theta$  の 2 つの方向に依存する。

Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \dot{W} \frac{\partial \Psi}{\partial W} + \dot{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \dot{P}_y \frac{\partial \Psi}{\partial P_y} = 0 \quad (5.34)$$

である。ここでベータトロンの振巾を  $a$ 、位相を  $\phi$  とし、角周波数を  $\omega$  とすると、wake のない時は  $P_y$  を  $P_{y0}$  とおき

$$y = a \sin \phi \\ P_{y0} = m\nu a \omega \cos \phi$$

$$\phi = \nu \omega t \\ \theta = \omega t \quad (5.35)$$

となる。 $\nu$  はベータatron振動数である。

wake のある時は

$$\dot{P}_y = \dot{P}_{y0} + e(E_{1y} + \beta B_{1x}) \exp\{i(n\theta - \Omega t)\} \quad (5.36)$$

$$\dot{W} = 0 \quad (5.37)$$

である。ここで一様なビームを考えるから、 $\dot{W}$  を零とおいたが厳密に言えば、transverse dipole 振動による longitudinal wake があるが、これは小さいので普通無視される。

これについての議論は bunched beam の場合文献(4)に載っている。

さて  $\Psi$  を

$$\Psi = \Psi_0(W, a) + \Psi_1(W, a, \phi) \exp\{i(n\theta - \Omega t)\} \quad (5.38)$$

と置き、線型化近似をすると Vlasov 方程式は、

$$i(n\omega - \Omega) \Psi_1 + \nu \omega \left( \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi} \right) = -e(E_{1y} + \beta B_{1x}) \frac{\partial \Psi_0}{\partial P_y} \quad (5.39)$$

となる。ここで

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial P_y} = \frac{\partial \Psi_0}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial P_y} = \frac{\cos \phi}{m\nu \omega} \frac{\partial \Psi_0}{\partial a} \quad (5.40)$$

という近似式を用い

$$\Psi_1 = \frac{-ie(E_{1y} + \beta B_{1x})}{m\nu \omega} \frac{\partial \Psi_0}{\partial a} \left[ \frac{(\Omega - n\omega) \cos \phi + i\nu \omega \sin \phi}{(\Omega - n\omega)^2 - \nu^2 \omega^2} \right] \quad (5.41)$$

を得る。

さて分布関数  $\Psi_1$  から dipole moment  $P(\theta, t) = p \exp\{i(n\theta - \omega t)\}$  を計算すると

$$\begin{aligned}
p &= e \int y \Psi_1 \text{ adad } \phi \text{ dw} \\
&= \frac{\pi e^2}{m} (E_{1y} + \beta B_{1z}) \int \frac{(\partial \Psi_1 / \partial a) a^2 \text{ dad } \omega}{(\Omega - n\omega)^2 - \nu^2 \omega^2}
\end{aligned} \tag{5.42}$$

となる。ここで  $p$  を前節の記法を用いて

$$p = n_0 e \pi a^2 \xi \tag{5.43}$$

として (5.42) と等置する。ここで  $(E_{1y} + \beta B_{1z})$  を前節で導入した coupling impedance  $Z_T$  で表わすと

$$i \frac{Z_T(\omega) e^2 N c \beta^2}{8 \pi^2 m R^2} \int \frac{h'(a) f(W) a^2 \text{ dad } W}{(\Omega - n\omega)^2 - \nu^2 \omega^2} = 1 \tag{5.44}$$

という分散関係式 (dispersion relation) を得る。ここで  $N$  は全粒子数であり

$$\psi_0 = \frac{N h(a) f(W)}{(2\pi)^2 R} \tag{5.45}$$

とおいた。

ここで  $\omega$  は  $a$  に依存せず  $f(W)$  は

$$f(W) = \delta(W) \tag{5.46}$$

という monoenergetic な場合を考えると、積分は簡単にでき、 $\Omega$  について解くと

$$\Omega = (n \pm \nu) \omega_0 \mp \frac{i Z_T e^2 N c \beta^2}{8 \pi^2 m R \nu \omega_0} \tag{5.47}$$

ここで  $Z_T$  の reactive part (虚数部) は、ビーム全体としての coherent なベータatron 振動数  $\Omega$  を変えるだけであるが、resistive part (実数部) は  $n > \nu$  の時、正であるので  $(n - \nu) \omega_0$  の short wave について instability が起る。

instability を抑えるメカニズムは longitudinal な場合と同じく、Landau damping である。これに効く振動数の拡がりにはベータatron 振動数  $\nu$  の振幅  $a$  への依存性と、回転周波数  $\omega$  の運動量への依存性である。これらについては文献(1)で調べられている。後者だけが効く場合、longitudinal な場合と同じく mapping 法により、LNS (Keil - Schnell) criterion に対して

$$|Z_T| < 4 F \frac{m c^2}{e} |(n - \nu) \eta + \nu| \left| \frac{\nu}{R I_0} \frac{\Delta P}{m c} \right| \tag{5.48}$$

という criterion が得られている<sup>6)</sup>。ここで  $F$  は form factor,  $\nu$  は chromaticity  $\Delta \nu / (\Delta P / P)$  である。 $\Delta P$  は運動量の半値全巾である。

## 第 6 章 Bunched Beam Instability

### § 6-1 はじめに

第 4, 5 章で microwave instability を除き coasting beam の理論を述べてきたが、いよいよ實際上より重要な bunched beam の理論に入る。coasting beam の場合は一つのフーリエ成分の摂動だけを考えれば良かったが、bunched beam の理論ではこれらの多くの成分の結合を考えなければならない等理論は、やや難しくなる。また周波数領域で考えた coupling impedance だけでなく、時間領域でみた wake potential も良く理解しておく必要がある。幸い bunched beam

instability については Chao の良い教科書<sup>1)</sup>があるので、これも参照されたい。ここではなるべくこの教科書と相補う形で説明したい。この章では直観的な macroparticle model に基づいて説明する。これはバンチを 1 個又は 2 個の macroparticle を考えて、粒子の運動の微分方程式を立て、時間領域で考えるものである。粒子の数を多くすると計算機で simulation をすることになるが、この様な tracking (粒子追跡) の方法も有力な研究手段の一つである。これについては文献(2)を見られたい。Vlasov 方程式による扱いは、次章に述べる。

## § 6-2 Higher order mode loss

これは cavity などの物体にビームが入ると、電磁場 (wake field) を誘起する事によって起るビームのエネルギー損失で、parasitic loss とも呼ばれる。

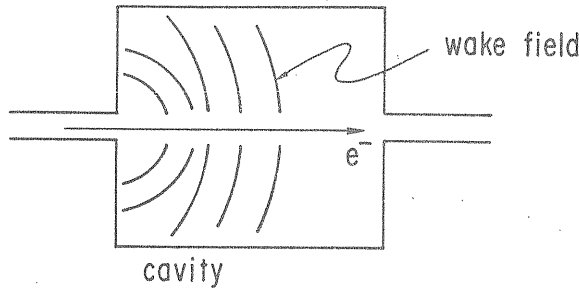


図 6-1.

この wake field が instability を起す原因となるが、ここでは粒子のエネルギー損失だけを考える。これは昔、electron ring accelerator (ERA) での加速限界を与える原因の一つとして、理論的に研究されたが、その後 SPEAR で問題となり、その後の電子 storage ring では真空壁をなるべくスムーズにするなどして、impedance を下げる努力がなされるようになった。

今、linac のように粒子が 1 回だけ物体を通る時、電流を  $I(t)$ 、それにより誘起される加速電圧を  $U(t)$  とすると、エネルギー損失  $\Delta U$  は、

$$\Delta U = - \int_{-\infty}^{\infty} U(t) I(t) dt \quad (6.1)$$

と表される。ここで (4.10) から (4.13) 式を参照して周波数領域で考えると、

$$\begin{aligned} \Delta U &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot I^*(\omega) d\omega \\ &= 4\pi \int_0^{\infty} \text{Re} Z(\omega) |I(\omega)|^2 d\omega \quad (6.2) \end{aligned}$$

となる。

ここで wake function が実であるという事からくる (4.18) の関係式を用いた。(6.2) をみると、space charge の場合のような impedance の虚数部 (reactive part) はエネルギー損失には効かないが、実部があるとエネルギー損失が現われる事が分る。ここで電流  $I(t)$  として Gauss 分布を仮定すると r. m. s. のバンチの長さ (時間単位) を  $\sigma$  として、

$$\Delta U = \frac{q^2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} Z(\omega) \exp(-\omega^2 \sigma^2) d\omega \quad (6.3)$$

となる。ここで  $q$  はバンチ内の電荷である。(6.3) 式

をみると、バンチの長い陽子ビームの様な場合は余り問題にならず、バンチの短い電子ビームで特に問題となる事が分る。

それではシンクロトロンのような円形加速器の場合を考えると、電圧  $U_m(t)$  は各々のターンの和となり、

$$U_m(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} U(t + pT) \quad (6.4)$$

ただし  $T$  はバンチ間隔であり、 $p$  の和は 0 から  $\infty$  までであるが、

$$U(t + pT) = 0 \quad \text{for } p < 0 \quad (6.5)$$

という因果律を用いて  $-\infty$  までとした。(6.4) を周波数領域の量で表すと、

$$U_m(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) I(\omega) \exp(-i\omega t - ip\omega T) d\omega \quad (6.6)$$

となる。ここで Poisson の和公式

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp(-ip\omega T) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (6.7)$$

を用いると、

$$U_m(t) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z(n\omega_0) I(n\omega_0) \exp(-in\omega_0 t) \quad (6.8)$$

となる。ここで

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (6.9)$$

とおいた。

Poisson 和公式とは関数  $F(t)$  とそのフーリエ変換  $\tilde{F}(\omega)$  の間にある関係式

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} F(pT) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{F}(2\pi n/T) \quad (6.10)$$

であり、時間領域の和と周波数領域での和とを相互に移しかえず非常に有用な関係式である。(6.10) の証明はクーラン=ヒルベルトの本<sup>3)</sup>にのっている。(6.7) 式はこれを超関数に適用したものである。超関数については文献(4)を見よ。そこで重ね合わされた加速電圧が分ったから、エネルギー損失  $\Delta U_m$  は

$$\Delta U_m = 2T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re} Z(n\omega_0) |I_n|^2 \quad (6.11)$$

となる。ここで

$$I_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} I(t) \exp(in\omega_0 t) dt$$

$$= 2\pi I(n\omega_0)/T \quad (6.12)$$

である。

### § 6-3 Resistive-wall transverse instability

Bunched beam の transverse instability は、まず Courant-Sessler<sup>5)</sup> により、resistive wall について研究された。彼らは Vlasov 方程式による扱いも述べているが、ここでは彼らの macroparticle model による簡単化した扱いを述べる。

5章の(5.27)式より resistive wall による力は、 $s > vt$  の時

$$F = \frac{4Ne^2 \xi \beta^2}{\sqrt{\pi} b^3} \sqrt{\frac{c}{4\pi\sigma\beta}} \frac{\exp(-i\omega s/v)}{|s-vt|^{1/2}} \quad (6.13)$$

である。 $s < vt$  では  $F = 0$  としてよい。

運動方程式は (スムーズなベータatron振動を仮定して)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \nu_0^2 \omega_0^2 y = F/rm \quad (6.14)$$

である。ここで  $\nu_0$  は wake のない時のベータatron振動数である。

ここでシンクロトロンのように何回もビームが回る事を考えて

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \nu_0^2 \omega_0^2 \right] \xi \exp(-i\nu\omega_0 t)$$

$$= \frac{4e^2 N \xi \beta^2}{\sqrt{\pi} b^3 \sqrt{R} rm} \sqrt{\frac{c}{4\pi\sigma\beta}}$$

$$\frac{\exp(-i\nu\omega_0 t)}{2\sqrt{\pi}} G^*(2\pi, \nu) \quad (6.15)$$

とおく。ここで

$$G^*(2\pi, \nu) = 2\sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(i\nu 2\pi n)}{(2\pi n)^{1/2}} \quad (6.16)$$

とおいた。\*印は複素共役を表し、文献(5)と notation を合わせる為につけた。(6.15)より  $\nu \approx \nu_0$  として

$$\nu = \nu_0 \left[ 1 - \frac{Ne^2 \beta^2 G^*(2\pi, \nu)}{\pi b^3 rm \sqrt{R} \omega_0^2 \nu_0^2} \sqrt{\frac{c}{4\pi\sigma\beta}} \right] \quad (6.17)$$

を得る。

ここで  $G(2\pi, \nu)$  の実部は coherent な振動数のずれを表すが、虚部は instability 又は damping を表す。この関数は文献(5)で詳しく調べられ、 $n - \frac{1}{2} < \nu < n$  の時 ( $n$  は整数)、 $\text{Im} G(2\pi, \nu) > 0$  であり、instability が起る。 $n < \nu < n + \frac{1}{2}$  の時は damping が起る。このような性質は resistive wall impedance で起るもので、他の impedance では別の条件となりうる。

ここで発散を避ける為、single turn wake ( $n=0$ ) の効果を省いたが、これを評価するにはバンチの長さを考えないといけない。この項の不安定性に対する効果は小さい。ただし振動数のずれには resistivity によらない space charge の項が効く。これについては別に詳しく調べられ、このずれが 0.25 となるとビームは失われる。これを coherent space charge limit という。これについては文献(6, 7)を見られたい。

ここで何故 instability が起るかを考えると、(6.15)式で実部をとるという本来の約束に従うと、 $G(2\pi, \nu)$  が複素数であるとは、変位に比例すると考えられる  $\cos \nu \omega_0 t$  の項の他に速度に比例する  $\sin \nu \omega_0 t$  という項の強制力が (多重回転により) 働くようになり、不安定性や減衰効果を及ぼす事になる。どちらが起るかは、wake の形と 1 回転当りのベータatron振動の位相のずれが効く事になる。以上では 1 つのバンチがある場合を考えたが、多数個のバンチがあると、バンチ間の位相関係により、不安定性が起きたり、減衰が起きたりする。これはバンチ間の結合によるものであるから coupled bunch instability と呼ばれる。これについては後にまた述べる。

尚、加速空洞のインピーダンスの場合も wake potential が簡単な形をしているので議論しやすい。これについては文献(8)を見よ。なお、この際バンチの長さを考えて  $n=0$  の発散を避ける事については文献(9)を見られたい。

### § 6-4 Head-tail instability と strong head-tail instability

前の節で transverse instability は macroparticle 間のベータatron振動の位相差が重要な役割をする事が分った。それでは 2 つの macroparticle がくっついて、一つのバンチとなった時はどうであろうか？ これは  $N$  個の粒子からなる一つのバンチを  $N/2$  個の粒子からなる二つの macroparticle と考える事に相当する。ここで二つの粒子はバンチ長程度の距離だけ離れていて、各々シンクロトロン振動をしているとする。すると先頭に (head) にある粒子と後 (tail) にある



粒子はシンクロトロン振動の半周期毎に入れ替る事になる。

この様なシンクロトロン振動によって、ベータトロン振動の位相はどう変わるだろうか？ 今 chromaticity を  $\xi$  とすると  $\delta = \Delta p/p$  だけの運動量の差のある粒子のベータトロン振動数  $\omega_\beta(\delta)$  は

$$\omega_\beta(\delta) = \omega_\beta + \omega_0 \xi \delta \quad (6.18)$$

となる。シンクロトロン振動の式は到着時間を  $\tau(t)$  とすると

$$\frac{d\tau}{dt} = -\eta \delta \quad (6.19)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_s^2}{\eta} \tau \quad (6.20)$$

である。ここで  $\tau$  と Courant-Snyder<sup>10)</sup> の  $\Delta\phi$  とは

$$\tau = -\frac{\Delta\phi}{h\omega_0} \quad (6.21)$$

の関係があり、更に微小振動近似を行った。更に、

$$\eta = \alpha - 1/r^2 \quad (6.22)$$

であり、 $\alpha$  は momentum compaction factor,  $r$  はローレンツ因子である。そこで wake のない時の自由なベータトロン振動の位相は、

$$\int \omega_\beta(\delta) dt = \omega_\beta t - \frac{\xi\omega_0}{\eta} \tau(t) \quad (6.23)$$

となる。この様に chromaticity によって、ベータトロン振動の位相関係が変わる。

いま2つの macroparticle を

$$\tau_1 = \hat{\tau} \sin(\omega_s t) \quad (6.24)$$

$$\tau_2 = -\tau_1$$

とする。  $0 < t < \pi/\omega_s$  の間1が先頭におり、  $\pi/\omega_s < t < 2\pi/\omega_s$  の間1が2の後にいる事になる。この2つの粒子の自由振動は、

$$y_1(t) = \tilde{y}_1 \exp \left\{ -i\omega_\beta t + i \frac{\xi\omega_0}{\eta} \hat{\tau} \sin \omega_s t \right\} \quad (6.25)$$

$$y_2(t) = \tilde{y}_2 \exp \left\{ -i\omega_\beta t - i \frac{\xi\omega_0}{\eta} \hat{\tau} \sin \omega_s t \right\}$$

となる。ここで  $\xi\omega_0\hat{\tau}/\eta$  を head-tail phase という。(6.25) から  $\xi \neq 0$  の時、1と2の粒子に位相差が生ずる事が分る。

さて  $0 < t < \pi/\omega_s$  の間、後にいる2の粒子の運動は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \left( \omega_\beta + \frac{\xi\omega_0\hat{\tau}\omega_s}{\eta} \cos \omega_s t \right)^2 y_2 \\ = \frac{Ne^2 W_0}{2m_0 r} y_1 \end{aligned} \quad (6.26)$$

となる。ここで  $W_0$  は wake potential でバンチ長の間一定で前後で零となるものと仮定した。(constant wake) ここで  $y_1$  は因果律により後の粒子は前の粒子に力を及ぼさないから自由振動をし、(6.25) で与えられる。 $y_2$  については解が(6.25) の形で与えられるとして  $\tilde{y}_2$  が、時間的にゆっくり変るとする(定数変化法)。すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{y}_2}{dt} + \frac{iNe^2 W_0}{4m_0 r \omega_\beta} \tilde{y}_1(0) \exp \left( 2i \frac{\xi\omega_0\hat{\tau}}{\eta} \sin \omega_s t \right) \end{aligned} \quad (6.27)$$

となる。ここで通常 head-tail phase  $\xi\omega_0\hat{\tau}/\eta$  は、1よりずっと小さいので(6.27) を Taylor 展開して積分する事により、

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(t) = \tilde{y}_2(0) + \frac{iNe^2 W_0}{4m_0 r \omega_\beta} \tilde{y}_1(0) \\ \left[ t + \frac{2i\xi\omega_0\hat{\tau}}{\eta\omega_s} (1 - \cos \omega_s t) \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

を得る。従って  $t=0$  から  $t=\pi/\omega_s$  の間の変換は、

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}_{\pi/\omega_s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\eta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}_0 \quad (6.29)$$

ただし、

$$\eta_1 = \frac{\pi Ne^2 W_0}{4m_0 r \omega_\beta \omega_s} \left[ 1 + i \frac{4\xi\omega_0\hat{\tau}}{\pi\eta} \right] \quad (6.30)$$

となる。ここで  $\xi \neq 0$  の時、 $\eta_1$  が複素数となる事が以下重要となる。同様に  $t=\pi/\omega_s$  から  $t=2\pi/\omega_s$  の変換は、

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}_{2\pi/\omega_s} = \begin{pmatrix} 1 & i\eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix}_{\pi/\omega_s} \quad (6.31)$$

となり、シンクロトロン一周の間の変換は、

$$\begin{pmatrix} 1 & i\eta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\eta_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\eta_1^2 & i\eta_1 \\ i\eta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.32)$$

となる。この固有値は intensity が低く  $|\eta_1| \ll 1$  の時、

$$\lambda_{\pm} \approx \exp(\pm i\eta_1) \quad (6.33)$$

となる。ここで固有ベクトルを考えると  $|\eta_1| \ll 1$  で図 6-2 に示す様に +モードの方は、両方の粒子が同時に上下し、-モードの方は両方の粒子が別々に上下する。

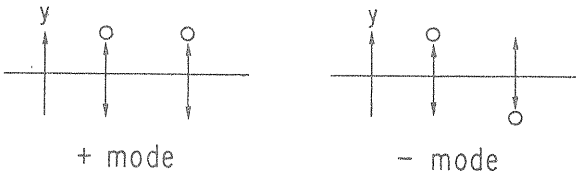


図 6-2.

Growth rate  $\tau_{\pm}^{-1}$  は

$$\tau_{\pm}^{-1} = \mp \frac{Ne^2 W_0}{2\pi m_0 r \omega \beta} \frac{\xi \hat{\tau} \omega_0}{\eta} \quad (6.34)$$

で  $\xi/\eta > 0$  の時、+mode が減衰し、 $\xi/\eta < 0$  の時、増大する。(6.31) では +モードと -モードの Growth rate は符号が異なるだけであるが、Vlasov 方程式によるもっと正確な扱いでは、+モードの方が Growth rate は大きい。従って +モードを抑える為、通常トランジションエネルギーより上では、 $\xi$  を少し正にしておく。

さて head-tail instability は  $\xi = 0$  では起らないが、以下述べる事より  $\xi = 0$  でも粒子数  $N$  が大きくなる ( $|\eta_1|$  が大きくなる) と、instability が起る事が分る。 $|\eta_1|$  が大きい時、 $\xi = 0$  とおき  $\eta_1 > 0$  と考える。すると (6.32) の固有値を  $\exp(\pm i\mu)$  とすると、

$$\cos \mu = 1 - \frac{1}{2} \eta_1^2 \quad (6.35)$$

となる。 $\eta$  が小さく  $\mu$  が実であれば、ビームは安定であるが、

$$\eta_1 \geq 2 \quad (6.36)$$

となり、ビーム強度が (6.36) を与えられるしきい値を越すと、強いビーム不安定性が起る。これは strong head-tail instability と呼ばれる。この threshold では +モードと -モードの振動数が一致するので、transverse mode coupling instability と呼ばれる。詳しくは Chao の教科書<sup>1)</sup>を見よ。この instability は最初 PETRA で観測されたが、TRISTAN や LEP の様な衝突器の強度に強い制限を与えると、考えられてい

る<sup>11)</sup>。尚、strong head-tail instability の two particle model は文献 (12, 13) で始められた。

### § 6-5 Beam break-up in linacs

線型加速器においても transverse instability に類した事が起る。これが Beam Break-Up (BBU) である。原因は共に wake field にある。ここでは特に電子線型加速器に注目しよう。ビームのバンチの先頭が加速空洞の軸よりずれると、deflection を与えるような wake field ができる。後の粒子は deflection を受け更に軌道がずれ、又更に大きな wake field を作る。この様なわけで後に行く程、大きな変位を受け、しまいには aperture を越しビームが失われる。この様にビームパルスの後の方がけられ、パルスが短くなる現象が BBU であり、pulse shortening とも言われる。この現象の解析は文献 (14) を見られたい。

上に述べた事は多くのバンチがある場合で円型加速器の coupled bunch instability に相当するものであるが、SLAC の SLC の様な single bunch と考えられる場合も、head-tail effect のような BBU がある。電子線型加速器の場合、シンクロトロン振動が無視できるので、バンチの後の粒子は同じ方向の deflection を受け続け、図 6-3 に示す様にバンチはバナナ状になる。

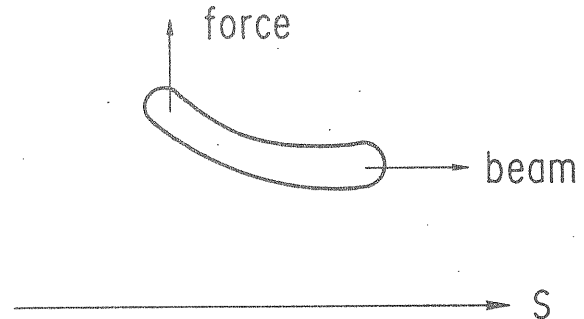


図 6-3.

wake field は加速空洞によるもので (5.32) 式からも分るように、後の方が強くなる。これはビーム損失にならなくともルミノシティが下がるため、linear collider では大問題である。これについては文献 (15) を見よ。なお、若干の簡単な数式的扱いは文献 (1) に載っている。

### § 6-6 Longitudinal bunched beam instability

今まで横方向の不安定性について述べてきたが、縦方向の運動にも様々な不安定性が起る。ここでは Chao

の講義録<sup>1)</sup>に従いがい、RF空胴の関与する Robinson instability について述べる。ここでも単一粒子モデルをとる。さて、wakeがない時のシンクロトロン振動は(6.19)、(6.20)で与えられるが、wakeがある時は(6.20)は  $t = nT_0$  とおき、

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{T_0 W_s^2}{\eta} \tau_n - \frac{Ne^2 L}{E} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(nT_0 - kT_0 - \tau_n + \tau_k) \quad (6.37)$$

となる。ただし  $W$  は RF 空胴単位長さ当りの wake potential であり、 $L$  は空胴の全長である。ここで  $W$  に関する causality より  $k$  の和を  $+\infty$  までとる事ができる。(6.19)(6.37)より、

$$\frac{d^2 \tau_n}{dn^2} + (\omega_s T_0)^2 \tau_n = \frac{\eta T_0 Ne^2 L}{E} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(nT_0 - kT_0 - \tau_n + \tau_k) \quad (6.38)$$

ここでバンチの全体としてのシンクロトロン振動 (coherent oscillation) の振巾が空胴の基本振動の波長よりずっと小さいとして、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} W(nT_0 - kT_0 - \tau_n + \tau_k) \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(nT_0 - kT_0) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\tau_n - \tau_k) W'(nT_0 - kT_0) \quad (6.39)$$

と近似する。

さて(6.39)の第一項は粒子の運動  $\tau$  に関係しない量で、前に述べた parasitic loss を与える。これは  $\tau$  の原点を変えるだけであるから、以後無視し第2項だけ考える。

さて、

$$\tau_n \propto \exp(-in\varrho T_0) \quad (6.40)$$

とおいて(6.39)の近似で(6.38)に代入すると、

$$\varrho^2 - \omega_s^2 = \frac{\eta Ne^2 L}{ET_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-ik\varrho T_0}) \times W'(kT_0) \quad (6.41)$$

となる。

さて wake potential のフーリエ変換は coupling impedance であるから、Poisson の和公式(6.10)より

$$\varrho^2 - \omega_s^2 = -i \frac{\eta Ne^2}{ET_0^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \{ p\omega_0 Z_L(p\omega_0) - (p\omega_0 + \varrho) Z_L(p\omega_0 + \varrho) \} \quad (6.42)$$

となる。ここで  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  は回転角周波数である。(6.42)式より

$$\begin{aligned} \text{frequency shift } \Delta\varrho &= \text{Re}(\varrho - \omega_s) \\ &= -\frac{\eta Ne^2}{2ET_0^2 \omega_s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \{ p\omega_0 \text{Im} Z(p\omega_0) - (p\omega_0 + \omega_s) \text{Im}(p\omega_0 + \omega_s) \} \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \text{growth rate } \tau^{-1} &= \text{Im}(\varrho - \omega_s) \\ &= \frac{\eta Ne^2}{2ET_0^2 \omega_s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) \text{Re} Z(p\omega_0 + \omega_s) \end{aligned} \quad (6.44)$$

となる。ここで  $\varrho \doteq \omega_s$  とした。

さて(4.22)式でみたように、空胴のインピーダンスは共鳴型をしていて、 $\omega = \omega_r$  で  $\text{Re} Z_L(\omega)$  は鋭いピークを持つ。従って  $h$  をハーモニック数として  $p = \pm h$  でピークを持つ。この2項だけを取り、wake potential が実数であるという事からくる  $Z_L(\omega) = Z_L^*(-\omega)$  の関係式より ( $h\omega_0 \gg \omega_s$  として)

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &= \frac{\eta Ne^2 h \omega_0}{2ET_0^2 \omega_s} \{ \text{Re} Z_L(h\omega_0 + \omega_s) - \text{Re} Z_L(h\omega_0 - \omega_s) \} \end{aligned} \quad (6.45)$$

となる。ビーム安定性のためには  $\tau^{-1} < 0$  でなければならない。従って図6-4の様に  $r > r_t$  では ( $r < r_t$  では逆)  $\omega_r$  を  $h\omega_0$  よりやや小さくする必要がある。(detuning)

逆の場合は不安定性が起り、最初に解析した人の名をとり、Robinson instability<sup>16)</sup> と呼ばれる。

ここでは空胴の基本モードを考えたが、勿論高調波モードでも同様な事が起る。ただ基本モードのインピーダンスが特に大きく、又制御可能な事が異なる。基本モードの場合、外部から与える電磁場と wake による電磁場の両方を扱わねばならぬ。この様な問題はここで述べた以上に詳しく調べられ、beam loading の問題といわれる。これについては Wilson の教科書<sup>17)</sup>等を見られたい。

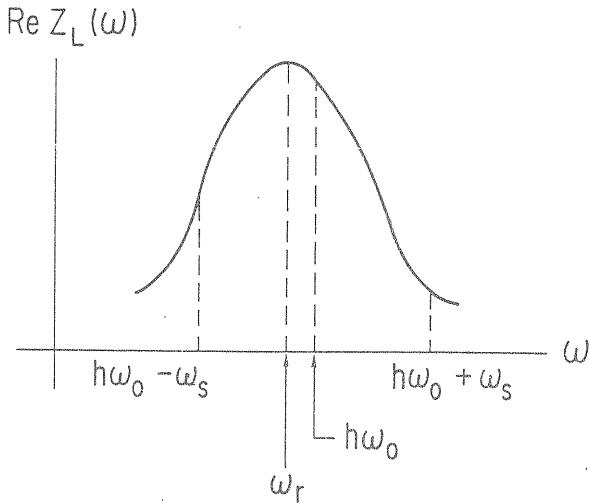


図 6-4.

### § 6-7 Coupled bunch modes

今まで一つのバンチがある場合を述べてきたが、2つ以上のバンチがある場合を考える。この様な coupled bunch instability ではバンチ間のベータatronやシンクロトロン振動の位相差が問題となる事は、前に述べた議論から分るのであろう。多バンチの場合、個々のバンチの運動を独立に考えずに、振動の normal mode で考えた方がはっきりするのは、連成振動の場合と同じである。連成振動の話は良く御存知の事と思うが、復習しようという人には文献(18)をあげておく。これは色々な事が書いてあって読みにくいかも知れないが、面白い本である。

ここでは coupled bunch mode については Chao の講義録<sup>1)</sup>によく書かれているので、その翻訳みたいであるが講義録としての完結性の為、簡単に述べておく。2つのバンチ 0 と 1 がある場合 (transverse の場合を述べる) 運動方程式は、

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0(t) + \omega_\beta^2 y_0(t) &= \frac{Ne^2}{m\tau} \\ &\times \Sigma \{ W(kT_0 + T_0/2) y_1(t - kT_0 - T_0/2) \\ &+ W(kT_0) y_0(t - kT_0) \} \end{aligned} \quad (6.46)$$

であり、もう一つの方程式は添字 0 と 1 を交換したも

のである。k の和は causality により考えるバンチが通る前のすべての回転についてとる。

今 2 つのバンチの運動を

$$y_{0,1}(t) = \tilde{y}_{0,1} \exp(-i\Omega t) \quad (6.47)$$

とおくと (6.46) は  $\Omega \approx \omega_\beta$  という近似で

$$(\Omega - \omega_\beta + \omega_\beta \eta_A) \tilde{y}_0 + \omega_\beta \eta_B \tilde{y}_1 = 0 \quad (6.48)$$

$$\omega_\beta \eta_B \tilde{y}_1 + (\Omega - \omega_\beta + \omega_\beta \eta_A) \tilde{y}_1 = 0$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \eta_A &= \frac{Ne^2}{2\omega_\beta^2 m_0 \tau} \sum_k W(kT_0) \exp(i\omega_\beta kT_0) \\ \eta_B &= \frac{Ne^2}{2\omega_\beta^2 m_0 \tau} \sum_k W(kT_0 + T_0/2) \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\exp\{i\omega_\beta(k+1/2)T_0\}$$

とおいた。これの固有値を求めると、

$$\Omega_{\pm} = \omega_\beta (1 - \eta_A \mp \eta_B) \quad (6.50)$$

となり、固有ベクトルを求めると

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 &= \tilde{y}_1 && + \text{モード} \\ \tilde{y}_0 &= -\tilde{y}_1 && - \text{モード} \end{aligned} \quad (6.51)$$

となる。一般に等間隔、等強度の M バンチがある場合のモードは、

$$y_n^{(\mu)} \propto \exp(-i2\pi n\mu/M) \quad (6.52)$$

と表される。ここで  $\mu=0,1,\dots,M-1$  は M 個の normal mode であり、 $\mu$  を coupled bunch mode number という。n=0,1,...,M-1 はバンチの番号である。従ってモード  $\mu$  のバンチの位相は互いに  $2\pi\mu/M$  の位相差を持つ事になる。ここで注意する事は、実際のバンチの運動は色々なモード  $\mu$  の重ね合わせである事を忘れてはならない。

# 第7章 Vlasov 方程式による Bunched Beam Instability の扱い (Sacherer の理論)

## § 7-1 はじめに

第6章で macroparticle mode による bunched beam instability の扱いを述べた。これは1つのバンチを1つ又は2つの粒子で近似したものであり、主として時間領域で扱う。この扱いはこの章で述べる理論よりも直観的であるが、近似をあげて macroparticle の数を増やそうとすると、計算機に頼らざるを得ない。この様な計算機による simulation も重要な方法であるが、この章ではより解析的な Vlasov 方程式による扱いを述べる。これはバンチ内粒子を別の極限、即ち連続体として扱う物である。この様な理論の枠組は Sacherer<sup>1-4)</sup> により作られ、その後多くの人達によって発展させられた。これがこの章の副題を Sacherer の理論とした由縁である。

この様な扱いは1つ又は2つの粒子による前節の扱いよりも実際に合う結果をもたらすし、その上統一的な扱いが可能になる。その上、1粒子の場合の dipole mode, 2粒子の場合の dipole と quadrupole mode 以上の higher mode が扱える。これらの mode については次に述べる。しかしながらこの扱いは主として周波数領域でなされる為、抽象的な感じがするのは否めない。

ここで色々な mode について述べる。まず横方向のベータatron 振動についてのモードを考える。これは図7-1に示すように実空間でビーム軸が真空壁の軸と一致している monopole mode, ビームが真空壁の中心からずれて、振動している dipole mode, ビームが扁平となり振動する quadrupole mode 等がある。この講義では monopole mode の longitudinal impedance と dipole mode の transverse impedance を考えた。より一般の場合の統一的扱いは Chao の講義録<sup>5)</sup> に載っているので参照されたい。

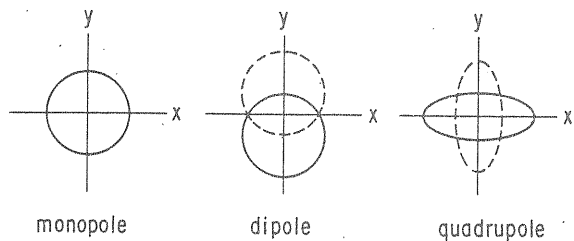


図 7-1.

さて横方向には monopole mode である longitudinal な振動を考えよう。

これは図7-2に示すようにビームの重心の振動である。dipole 振動 ( $m=1$ )、ビームが太ったり細ったりする quadrupole 振動 ( $m=2$ ) 等がある。

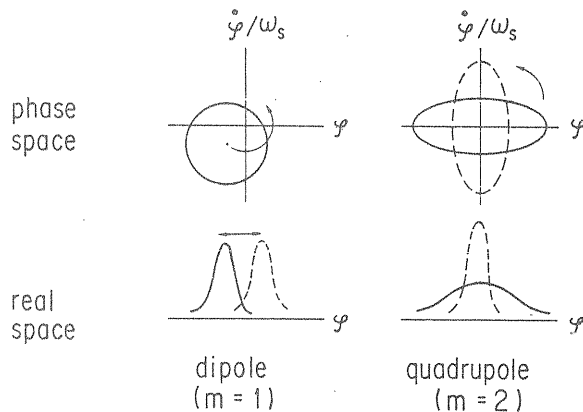


図 7-2.

横方向には dipole 振動の場合を考えると、ビームが進行方向にくねくねとねじ回ることに着目してモードを考える。例を図7-3に示す。

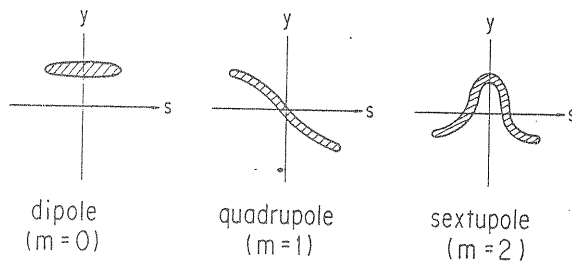


図 7-3.

この様なモードについては位相空間の分布を考えるが、ここで考える位相空間は進行方向の longitudinal phase space である。横方向の monopole mode の場合も考える位相空間は longitudinal phase space であるが、この時の分布関数の意味は進行方向についての粒子の濃淡であり、横方向の dipole 振動の場合の分布関数はビームの進行方向のねじれ (dipole moment) であり、それぞれ別物である事に注意する。

さて Vlasov 方程式は粒子に働く力が分った時に粒子の分布を定める方程式であるが、粒子に働く力は分布が分ったとして Maxwell 方程式を解く事によって求められる。従ってプラズマ物理で普通用いられる方法は、この2つの方程式を self-consistent に解く事である。しかし、加速器では粒子に働く力と分布とは、wake potential 又は impedance が分っていれば、一義的に関係づける事ができる。従って Sacherer が導い

た様に一つの積分方程式 (Sacherer の積分方程式と呼ばれる) を解く事に帰着する。これは分布関数に関する固有関数と coherent な振動数の固有値を求める固有値問題である。

## § 7-2 Sacherer の積分方程式

transverse monopole mode の場合は、縦方向の粒子密度の濃淡が問題となり (coherent longitudinal mode), transverse dipole mode の場合は、縦方向の dipole moment (ビームのねじれ) が問題となる (head-tail mode)。いずれの場合も縦方向の位相空間が問題となる。ここで位相空間の直角座標  $(\tau, \delta)$  の代りに、極座標  $(r, \phi)$  を

$$\tau = r \cos \phi \quad (7.1)$$

$$\frac{\eta}{\omega_s} \delta = r \sin \phi$$

で導入する。微小振動の場合は  $r = \text{一定}$  となり、位相空間で円軌道を描く。(一般には action-angle variable を導入すればよい。これについては文献(6)を見よ。)

さて transverse monopole mode を考え、縦方向位相空間での分布  $\psi(r, \phi, s)$  を

$$\psi(r, \phi, s) = \psi_0(r) + \psi_1(r, \phi) \exp(-i\Omega s/v) \quad (7.2)$$

とおく。ここで  $\int \psi d\tau d\delta = N$  と規格化する。さて実空間での分布  $\varphi_1(\tau)$  は、

$$\varphi_1(\tau) \exp(-i\Omega s/v) = \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \psi_1(r, \phi) \exp(-i\Omega s/v) \quad (7.3)$$

で表される。この振動粒子分布により wake potential を  $w(t)$  として、

$$V(\tau, s) = e \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \sum_{R=-\infty}^{\infty} \varphi_1(\tau') \exp\{-i\Omega(s/v - RT_0) + i(\tau' - \tau)\} \times W(RT_0 + \tau' - \tau) \quad (7.4)$$

の電圧がでる事になる。これを Poisson の和公式でフーリエ変換したものに書き換えると、

$$V(\tau, s) = e\omega_0 \exp(-i\Omega s/v) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(p\omega_0 + \Omega) \exp\{i(p\omega_0 + \Omega)\tau\} Z(p\omega_0 + \Omega) \quad (7.5)$$

となる。

ここで Vlasov 方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\eta \delta}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\omega_s^2}{\eta v} \tau \frac{\partial \psi}{\partial \delta} - \frac{e}{T_0 E v} V(\tau, s) \frac{\partial \psi}{\partial \delta} = 0 \quad (7.6)$$

より (Vlasov 方程式を  $s$  を独立変数とする事については文献(5, 6)を見よ), 少し変形して

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\omega_s}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \frac{e}{T_0 E v \beta^2} V(\tau, s) \frac{\partial \psi}{\partial \delta} = 0 \quad (7.7)$$

を得る。ここで (7.2) を (7.7) に代入して  $\psi$  に関し線型化近似をとり

$$\begin{aligned} & -i\Omega \psi_1 + \omega_s \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi} - \frac{\eta e^2}{T_0 E \beta^2} \frac{\omega_0}{\omega_s} \sin \phi \psi_0'(r) \\ & \times \sum_p \tilde{\varphi}_1(p\omega_0 + \Omega) \exp\{i(p\omega_0 + \Omega)\tau\} Z(p\omega_0 + \Omega) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

を得る。

さて、次に  $\psi_1$  を

$$\psi_1(r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_m(r) \exp(im\phi) \quad (7.9)$$

とフーリエ級数に展開する。これは  $\psi_1$  が  $\phi$  について  $2\pi$  の周期を持つ事から級数展開可能な事が分る。ここで  $m$  は azimuthal mode number とよばれ、§ 7-1 で述べたように  $m=1$  が dipole mode,  $m=2$  が quadrupole 等々に対応している。(7.9) を (7.8) に代入して

$$\begin{aligned} & -i \sum_m R_m'(r) \exp(im'\phi) (\Omega - m'\omega_s) - \frac{\eta e^2 \omega_0}{\beta^2 T_0 E \omega_s} \\ & \sin \phi \psi_0'(r) \times \sum_p \tilde{\varphi}_1(\omega') Z(\omega') \exp(i\omega' r \cos \phi) = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

を得る。ここで  $\omega' = p\omega_0 + \Omega$  とおいた。両辺に  $\exp(-im\phi)$  をかけ、 $\phi$  について 0 から  $2\pi$  まで積分すると

$$\begin{aligned} & -i(\Omega - m\omega_s) R_m(r) + \frac{\eta e^2 \omega_0}{\beta^2 T_0 E \omega_s} m i^m \frac{\psi_0'(r)}{r} \\ & \times \sum_p \tilde{\varphi}_1(\omega') \frac{Z(\omega')}{\omega'} J_m(\omega' r) = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

を得る。ここで

$$\tilde{\varphi}_1(\omega') = \frac{\omega_s}{\eta} \sum_m \int_0^{\infty} r dr R_m'(r) i^{-m} J_m'(\omega' r) \quad (7.13)$$

である。(7.13)を(7.12)に代入し

$$(\Omega - m\omega_s) R_m(r) = -i \frac{e^2 \omega_0}{\beta^2 T_0 E} m \frac{\psi'_0(r)}{r} \sum_m \int_0^\infty r' dr' \times R_m'(r') i^{m-m'} \sum_p \frac{Z(\omega')}{\omega'} J_m(\omega' r) J_m'(\omega' r')$$
(7.14)

を得る。これは  $R_m(r)$  と  $\Omega$  に関する積分方程式の固有値問題の方程式であり、Sacherer の積分方程式と呼ばれる。ここでは Chao 講義録<sup>5)</sup>に沿って導いた。実際 Sacherer 積分方程式を現在の完成された形に定式化するのに、Chao は大きな役割をした。

transverse dipole mode については、導き方をここでは省略するが、Chao の講義録<sup>5)</sup>の § 3-6 により、

$$i(\Omega - \omega_\beta - m\omega_s) R_m(r) = \frac{ce^2 \omega_0 \omega_s}{2\beta^2 E \omega_\beta T_0 \eta} i g_0(r) \times \sum_p \sum_m \int_0^\infty r' dr' R_m'(r') i^{m-m'} J_m'(\omega' r' - \frac{\xi}{\eta} \omega_0 r') \times Z(\omega') J_m(\omega' r - \frac{\xi}{\eta} \omega_0 r)$$
(7.15)

という積分方程式になる。ここで  $g_0(r)$  は平衡分布を表す。(  $\int g_0(r) dr d\delta = N$  と規格化する。)

なお transverse な方程式 (7.15) を導いた際、分布関数  $\psi$  に関する線型近似が行われているが、transverse な場合は線型近似は必要でなく、(7.15) よりも拡張された方程式が、Ruggiero<sup>7)</sup>により求められている。

### § 7-3 厳密解の求まるモデル (Waterbag, Hollow-bunch models)

さて、いよいよ積分方程式 (7.14) と (7.15) を解く問題に移る。解は平衡分布  $\psi_0, g_0$  やインピーダンスによる。この際、厳密解が簡単に求まる平衡分布がある。これは longitudinal な場合 (7.14) では、

$$\psi_0(r) = \begin{cases} 0 & (\tau > \hat{\tau}) \\ \frac{N\eta}{\pi \hat{\tau}^2 \omega_s} & (\tau < \hat{\tau}) \end{cases}$$
(7.16)

という分布で waterbag distribution と呼ばれる。transverse な場合 (7.15) では、

$$g_0(r) = \frac{N\eta}{2\pi \omega_s \hat{\tau}} \delta(r - \hat{\tau})$$
(7.17)

という分布で hollow-bunch (又は airbag) distribution と呼ばれる。

これらの分布では  $\psi'_0, g_0$  が  $\delta(r - \hat{\tau})$  と  $\delta$ -関数の形をしているので、(7.14) (7.15) から  $R_m(r)$  も  $\delta(r - \hat{\tau})$  の形をしている事がすぐ分る。この様に厳密解が求まる。Chao はこれを多用した。実際 Chao の講義録<sup>5)</sup>では、これらのモデルだけで説明してある。Sacherer はこれ等のモデルは unphysical であるとし、好まなかったが、これらのモデルで少なくとも定性的な見通しは得られるであろう。詳しくは Chao の講義録<sup>5)</sup>を見られたい。なお、これ等のモデルのより厳密な解との定量的比較は文献(8)に載っている。この文献では良い一致が得られているが、常に良い一致を示すとは限らない。

### § 7-4 直交関数による展開法

縦方向の場合の (7.14) の方程式に沿って説明する。横方向の (7.15) の方程式の場合も同様である。今 weight function  $W(r)$  を

$$W(r) = C \frac{1}{r} \frac{d\psi_0}{dr}$$
(7.18)

とおく。ここで  $C$  は後で適当に定める定数である。今、後に定める適当な関数列  $f_k^{(m)}(r)$  をとり、

$$R_m(r) = W(r) \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)} f_k^{(m)}(r)$$
(7.19)

と展開する。ここで関数  $f_k^{(m)}(r)$  は直交関係

$$\int_0^\infty W(r) f_k^{(m)}(r) f_l^{(m)}(r) r dr = \delta_{kl}$$
(7.20)

を満足するものをとると、都合がよい。

(7.20) を (7.14) に代入し、 $f_h^{(m)}(r)$  をかけて  $rdr$  で積分すると

$$(\Omega - m\omega_s) a_h^{(m)} = - \frac{i m^2 e \omega_0}{\beta^2 T E_0 C} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_{nl}^{mh} a_l^{(n)}$$
(7.21)

という (無限次元の) 一次連立方程式を得る。これは、もとの積分方程式が線型だからである。ここで、

$$M_{nl}^{mh} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z(\omega')}{\omega'} i^{m-n} I_{mh}(\omega') I_{nl}(\omega')$$
(7.22)

$$I_{nl}(\omega') = \int_0^\infty w(r) f_l^{(n)}(r) J_n(\omega' r) r dr$$
(7.23)

である。

ここで (7.21) の連立方程式の次元を適当に打ち切って固有値  $\Omega$  と固有ベクトル  $a_h^{(m)}$  を求め、これを (7.19)

に代入して固有関数  $R_m(r)$  を得る。打ち切った次元を  $n-1$  次元とすると、一般に  $n$  個の相異なる固有関数  $R_{ml}(r)$  ( $l=0, \dots, n-1$ ) を得る。これらは  $r$ -依存性が異なるので、 $l$  を radial mode と呼ぶ。

これは azimuthal mode  $m$  が  $\phi$  のモードを表すのに対し、radial mode  $l$  は  $r$  の依存性を表すものである。§ 7-3 に述べた分布では radial mode がすべて縮退している。

さて次に (7.20) の直交関係を満足する関数  $f_r^{(m)}(r)$  を求める事が問題となる。これは任意の  $W(r)$  (言い換えれば、任意の平衡分布  $\psi_0(r)$ ) について求められる訳ではないが、応用上重要なものについては求められる。例えば、 $\psi_0$  がガウス分布ならば、一般化されたラゲール多項式を用い、 $\psi_0 \propto \sqrt{1-r^2}$  ならばルジャンドル多項式を用いるなどである。この解法は Besnier<sup>9)</sup> により、space charge impedance の場合、詳しく研究されたが、その後、佐藤<sup>10)</sup>、Zotter<sup>11)</sup> 等により、より広く適用された。Besnier は Landau damping についても同様な展開解法を述べたが、これのより一層の発展については、文献(12)を見られたい。

## § 7-5 Sacherer の解析解

Sacherer の積分方程式の解法は、§ 7-4 で述べた直交関数による展開法が、現在最も精度の良い解法であるが、多次元の固有値問題を計算機で解かなければならない等、解析的な式一つで済ませられないのが欠点である。Sacherer は space charge (及び inductive wall) の impedance が主として効く陽子ビームについて近似的な解析解を求めた。この解も広く用いられているので、ここにまとめておく。

まず縦方向の方程式 (7.14) を見てみよう。(7.14) で  $m'$  の和の中で  $m'=m$  の項だけを取る事にしよう。これは次節に述べる mode coupling を無視する事に相当し、wake のない時の固有値  $\Omega = m\omega_s$  の間隔が、wake のある時の固有値  $\Omega$  のずれよりもずっと大きい時、各々の azimuthal mode  $m$  は独立と近似してよいと考えられるからである。複素共役を \*印で表すと (7.14) より、

$$(\Omega_{mn}^* - m\omega_s) R_{mn}^*(r) = i \frac{e^2 \omega_0}{\beta^2 T_0 E} m W(r) / c \int_0^\infty r' dr' R_{mn}^*(r') \sum_p \frac{Z^*(\omega')}{\omega'} J_m(\omega' r) J_m(\omega' r')$$

(7.24)

ここで  $R$  に前節で述べた radial mode の添字  $n$  を付けた。  $W(r)$  は (7.18) の weight function である。(7.14) の radial mode の添字を  $l$  として (7.14) に

$R_{mn}^*/W(r)$  をかけ、(7.24) に  $R_{ml}/W(r)$  をかけて、 $r dr$  で積分し引き算すると、

$$(\Omega_{ml} - \Omega_{mn}^*) \int R_{ml}(r) R_{mn}^*(r) / W(r) r dr = 0$$

(7.25)

となる。ここで  $Z^*(\omega) = Z(-\omega)$  の関係式を用い、 $\omega' = p\omega_0 + \Omega$  の  $\Omega$  を省略し、 $p$  の和が  $-\infty$  から  $\infty$  までである事を使った。今 space charge impedance が主に効くから  $\Omega$  は実である。(7.25) より radial mode についての直交性

$$\int R_{mn}(r) R_{ml}^*(r) / W(r) r dr = N_m \delta_{nl}$$

(7.26)

がでてくる。  $N_m$  は定数である。

さて実空間の粒子密度分布  $\varphi_{mn}(\tau)$  は

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}(\tau) &= \int R_{mn}(r) e^{im\phi} d\delta \\ &= \int R_{mn}(r) e^{im\phi} \delta(\tau - r \cos \phi) d\tau d\delta \\ &= \frac{\omega_s}{2\pi\eta} \int R_{mn}(r) e^{im\phi} e^{ik(\tau - r \cos \phi)} dk r dr d\phi \\ &= \frac{\omega_s}{\eta i^m} \int R_{mn}(r) e^{ikr} J_m(kr) r dr dk \end{aligned}$$

(7.27)

と表される。(7.27) から  $\varphi_{mn}(\tau)$  のフーリエ変換  $\tilde{\varphi}_{mn}(k)$  が

$$\tilde{\varphi}_{mn}(k) = \frac{\omega_s}{\eta i^m} \int R_{mn}(r) J_m(kr) r dr$$

(7.28)

で表される事が分る。これは (7.13) 式で  $m'=m$  の項だけをとったものである。

ここで Sacherer の積分方程式 (7.14) は、

$$(\Omega - m\omega_s) R_{mn}(r) = -i^{m+1} \alpha W(r) \sum_p \frac{Z(\omega')}{\omega'} \tilde{\varphi}_{mn}(\omega') J_m(\omega' r)$$

(7.29)

となる。ここで定数を

$$\alpha = \frac{e^2 \omega_0 m}{\beta^2 T_0 E} \frac{\eta}{\omega_s}$$

(7.30)

とおいた。

さて (7.29) に  $R_{ml}/W(r)$  をかけて  $r dr$  で積分すると

$$(\Omega - m\omega_s) N_m \delta_{nl} = \frac{-i \alpha \eta}{\omega_s} \sum_p \frac{Z(\omega')}{\omega'} \tilde{\varphi}_{mn}(\omega') \tilde{\varphi}_{ml}^*(\omega')$$

(7.31)



となる。これから mode (m, n) の固有振動数  $\Omega_{mn}$  は

$$\Omega_{mn} = m\omega_s - \frac{i\alpha\eta}{N_m\omega_s} \sum_p \frac{Z(\omega')}{\omega'} |\tilde{\varphi}_{mn}(\omega')|^2 \quad (7.32)$$

で与えられる事が分る。

さて space charge impedance では,  $Z(\omega')/\omega'$  は一定であるから (7.31) の和の外に出し, 和を積分でおきかえると,

$$(\Omega - m\omega_s) N_m \delta_{nl} = - \frac{i\alpha\eta}{\omega_s} \frac{Z(\omega)}{\omega} \frac{1}{\omega_0} \int \tilde{\varphi}_{mn}(\omega') \tilde{\varphi}_{ml}^*(\omega') d\omega' \quad (7.33)$$

となる。さてフーリエ変換のパワー定理

$$\int \varphi_{mn}(\tau) \varphi_{ml}(\tau) d\tau = 2\pi \int \tilde{\varphi}_{mn}(\omega') \tilde{\varphi}_{ml}^*(\omega') d\omega' \quad (7.34)$$

より  $\varphi_{mn}(\tau)$  も space charge impedance では radial mode について直交性をみたす事が分る。ここで Sacherer に従い,

$$C_{mn} = \frac{\int \varphi_{mn}^2(\tau) d\tau}{\int |R_{mn}(r)|^2 / W(r) r dr} \quad (7.35)$$

という定数を導入すると, 固有振動数 (7.32) は,

$$\Omega_{mn} = m\omega_s - \frac{i\alpha\eta C_{mn}}{\omega_s \omega_0} \frac{\sum_p \frac{Z(\omega')}{\omega'} h_{mn}(\omega')}{\sum_p h_{mn}(\omega')} \quad (7.36)$$

と  $\varphi$  の規格化によらない形に表される。

ここで

$$h_{mn}(\omega') = |\tilde{\varphi}_{mn}(\omega')|^2 \quad (7.37)$$

である。

さて Sacherer は

$$W(r) = W = \text{const} \quad (r < 1) \quad (7.38)$$

という weight function を持つ平衡分布を考えた。ここでパンチの半長を 1 と規格化した。(7.20)式からこの場合取るべき直交関数は

$$f_n^{(m)}(r) = \sqrt{\frac{2}{W}} \frac{J_m(\nu_{mn} r)}{J_{m+1}(\nu_{mn})} \quad (7.39)$$

である。ここで  $\nu_{mn}$  は  $J_m$  の n 番目の零点である。(7.39) に対応する密度分布関数の多項式を  $\varphi_{mn}^0(\tau)$  と

おくと

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}^0(\tau) &= \frac{\sqrt{2W}}{J_{m+1}(\nu_{mn})} \int J_m(\nu_{mn} r) e^{im\phi} d\delta \\ &= \frac{\sqrt{2W}}{J_{m+1}(\nu_{mn})} \int J_m(\nu_{mn} r) e^{im\phi} \delta(\tau - r \cos\phi) \\ &\quad \times d\tau d\delta \\ &= \frac{\omega_s \sqrt{2W}}{2\pi \eta J_{m+1}(\nu_{mn})} \int J_m(\nu_{mn} r) \exp(im\phi + k\tau - kr \cos\phi) r dr d\phi dk \\ &= \frac{\omega_s \sqrt{2W}}{\eta i^m J_{m+1}(\nu_{mn})} \int J_m(\nu_{mn} r) e^{ik\tau} J_m(kr) \\ &\quad \times r dr dk \end{aligned} \quad (7.40)$$

となる。

ここで  $k$  についての積分は  $-\infty$  から  $\infty$  までであるがこれを 0 から  $\infty$  までとすると

$$\begin{aligned} \varphi_{mn}^0(\tau) &= \frac{\omega_s \sqrt{2W}}{\eta i^m J_{m+1}(\nu_{mn})} \int_0^\infty dk \{ [1 + (-1)^m] \\ &\quad \cos k\tau + i [1 - (-1)^m] \sin k\tau \} \\ &\quad \times \frac{\nu_{mn} J_{m+1}(\nu_{mn}) J_m(k)}{\nu_{mn}^2 - k^2} \end{aligned} \quad (7.41)$$

となる。ここで  $\varphi_{mn}^0(\tau)$  は  $\sin k\tau$ ,  $\cos k\tau$  の重ね合わせであるが, パンチの端 ( $\tau=1$ ) で 0 となる条件から,  $k = \frac{\pi}{2} p$  とおき  $\sin$  の場合は  $k = \text{even}$ ,  $\cos$  の場合は  $k = \text{odd}$  の条件がつく。従って

$$\varphi_{mn}^0(\tau) = \sum_p A_{np}^m b_p(\tau) \quad (7.42)$$

$$b_p(\tau) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} p \tau & p = 1, 3, \dots \\ \sin \frac{\pi}{2} p \tau & p = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (7.43)$$

$$\int_1^1 b_i(\tau) b_j(\tau) d\tau = \delta_{ij} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} A_{np}^m &= \frac{\omega_s \sqrt{2W} \nu_{mn} J_m(\frac{\pi}{2} p)}{\eta (\nu_{mn}^2 - \pi^2 p^2 / 4)} \\ &\quad \times \begin{cases} (-1)^{m/2} & (m \text{ even}) \\ (-1)^{\frac{m-1}{2}} & (m \text{ odd}) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.45)$$

となる。  $m = \text{even}$  の時は  $p = \text{odd}$  だけが効き,  $m = \text{odd}$  の時は  $p = \text{even}$  だけが効く。

さて (7.29) で  $W(r) = \text{const}$ ,  $Z(\omega')/\omega' = \text{const}$  (space charge の場合) を考え, (7.19) の展開を用いると,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L} - m\omega_s) W_p \sum_k a_k f_k^{(m)}(r) \\ &= -i^{m+1} \alpha W \frac{Z}{n} \frac{1}{\omega_0} \sum_k a_k \sum_p \tilde{\varphi}_k^0(\omega') J_m(\omega' r) \end{aligned} \quad (7.46)$$

となる。両辺に  $f_j^{(m)}(r)$  をかけて  $rdr$  で積分すると

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - m\omega_s) a_j &= -i(-1)^m \frac{\eta}{\omega_s} \frac{J_{m+1}(\nu_{mj})}{\sqrt{2W}} \frac{1}{W} \\ & \alpha \frac{Z}{n} \frac{1}{\omega_0} \sum_k a_k \sum_p \tilde{\varphi}_k^0(\omega') \times \tilde{\varphi}_j^0(\omega') \end{aligned} \quad (7.47)$$

という代数的固有値問題となる。ここで (7.39) (7.40) を用いた。(7.47) のパワー定理を用いて, 実空間の積分に直すと

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - m\omega_s) a_j &= -i(-1)^m \frac{\eta}{2\pi\omega_s} \frac{J_{m+1}(\nu_{mj})}{\sqrt{2W}} \frac{\alpha}{W} \\ & \frac{Z}{n} \frac{1}{\omega_0} \sum_k a_k \times \int \varphi_k^0(\tau) \varphi_j^0(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (7.48)$$

この固有値問題の行列は, ほぼ対角行列で Sacherer<sup>1)</sup> により 20 行 20 列の行列について解かれている。ここで行列がほぼ対角行列なので,  $\varphi(\tau)$  の固有関数は近似的に (7.43) で考えた三角関数となる。これを sinusoidal mode という。cosine-mode は全振動電荷が零とならないので, consistent でないが普通そのまま役立っている。これは Sacherer によれば, 相互作用を考える時, 電荷密度そのものでなく電荷密度の変化が効くと考えられる為, このような近似ができようというのである。ただし, この近似が問題となる事もある。例えば文献 (13) を見よ。このような固有関数について (7.35) で導入した  $C_{mm}$  を計算してみると

$$C_{mm} = \frac{2\pi W}{m+1} \left(\frac{\omega_s}{\eta}\right)^2 \quad (7.49)$$

となる。(n=m の場合が一番大きく, この最低の radial mode を考える。) Sacherer はこの様な三角関数の振動密度分布が, 陽子加速器で観測される head-tail mode とよく一致するなどの理由から, 物理的だと言って好んで用いた。

さて  $W(r) = \text{const}$  を与える平衡分布は

$$\psi_0 = \frac{2N\eta}{\pi\omega_s} (1-r^2) \quad (7.50)$$

であるから (7.18) より

$$W = \frac{4N\eta C}{\pi\omega_s} \quad (7.51)$$

これを (7.36) に入れると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mm} &= m\omega_s + i \frac{4m e^2 \omega_0 N \eta}{\pi(m+1)\beta^2 T_0 E \hat{r}^3 \omega_s \omega_0^2} \\ & \frac{\sum_p \frac{Z(\omega')}{p} h_{mm}(\omega')}{\sum_p h_{mm}(\omega')} \end{aligned} \quad (7.52)$$

となる。ここでバンチの半長  $\hat{r}$  を入れた。

$$\omega_s^2 = - \frac{\eta h \omega_0}{\beta^2 E} \frac{eV}{2\pi} \cos \phi_s \quad (7.53)$$

を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mm} &= m\omega_s - i \frac{m\omega_s}{m+1} \frac{I_0}{3B^3 v h \cos \phi_s} \\ & \frac{\sum_p \frac{Z(\omega')}{\omega'} h_{mm}(\omega')}{\sum_p h_{mm}(\omega')} \end{aligned} \quad (7.54)$$

となる。ここで  $I_0$  はバンチの平均電流であり,  $B = \omega_0 \tau / \pi$  は bunching factor である(これはバンチの長さであり, 第 2 章の定義と異なる)。

構方向についても同様である。これには Sacherer の教科書<sup>14)</sup> があり, より広くは Laclare の review<sup>15)</sup> がある。

## § 7-6 mode coupling

前の節では (7.14) 式で  $m'=m$  の項だけ残すという近似を用いたが, この近似をやめると新しい効果が入る。これは例えば dipole 振動と quadrupole 振動を同時に扱う事である。2つの振動の振動数が一致すると強い不安定性が起る。これは Sacherer<sup>4)</sup> により定式化されたが, この考え方はそれ以前に Chao と Gareyte<sup>16)</sup> により SPEAR の bunch lengthening を説明する為に用いられたのである。

今 impedance  $Z(\omega)$  の  $\omega$  依存性がゆるやかであるとする。これは broadband impedance と言われ, 巾が広い事からフーリエ変換すると分るように, 早く decay する wake field となる。この場合 (7.22) の  $p$  の和は  $\omega$  についての積分で近似でき ( $\mathcal{L}=0$  とおく)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\omega)}{\omega} I_{mh}(\omega) I_{nl}(\omega) d\omega \quad (7.55)$$

となる。ここで  $Z(-\omega) = Z^*(\omega)$  の関係式から  $m-$

$m' = \text{even}$  の時、(7.55) の積分は

$$2i \int_0^\infty \frac{\text{Im}Z(\omega)}{\omega} I_{mh}(\omega) I_{nl}(\omega) d\omega \quad (7.56)$$

となり、 $Z(\omega)$  の reactive part だけが効く。 $m - m' = \text{odd}$  の時は

$$2 \int_0^\infty \frac{\text{Re}Z(\omega)}{\omega} I_{mh}(\omega) I_{nl}(\omega) d\omega \quad (7.57)$$

となり実部が効く。すると(7.22)の行列要素に  $-i$  をかけた  $-i M_{mn}^h$  は  $m$  と  $n$  に関し反対行列となる。ここで azimuthal mode に 2 つの mode, radial mode を一つ取ると、固有値を  $\lambda$  として固有値問題は

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ c & \lambda - b \end{vmatrix} = 0 \quad (7.58)$$

となる。ここで  $a, b, c$  は実数である。固有値は

$$\lambda = \frac{a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 - c^2}}{2} \quad (7.59)$$

となる。ここで電流が小さい時は固有値が  $\lambda \approx a, b$  となる事から  $(a-b)^2 > c^2$  であるが、電流がふえ、2 つの固有値が一致する  $(a-b)^2 = c^2$  を超すと平方根の中が負となり、一つのモードは強い不安性を示す。これが mode coupling instability である。

加速空洞の様にインピーダンスに鋭いピークを幾つも持つ場合も single turn の効果を考えると、周波数  $\omega$  についての積分となりピークがならされた形になり、上と同様な扱いができる。文献(8)を見られたい。

## 付録 1 楕円体ポテンシャル

さて § 2-2 で述べた円形ビームの電磁場を楕円ビームに拡張する。これは uniform 分布の場合、Teng<sup>1)</sup> により elementary な計算法で計算されている。さて動いている粒子の電磁場は Lorentz 変換で求まるから、静止していた粒子の potential を求めればよい。space charge limit の計算は実際は 2 次元問題であるが、一般に 3 次元の楕円体の potential を求める事ができる。uniform 分布の場合は Kellogg<sup>2)</sup> の本ののっている。一般の分布への拡張は容易であるが、これはフランスの Houssais<sup>3)</sup> という人によって(加速器では)なされ、

この mode coupling instability は、§ 4-6 で述べた microwave instability や § 6-4 で述べた strong head-tail instability に相当するものである。より進んだ扱いについては、文献(7, 17, 18)を見られたい。

## § 7-7 おわりに

今までビーム不安定性の理論を述べてきたが、Vlasov 方程式による扱いは実験をかなりよく説明する。ただし細かく見ると、factor 位の食い違いもある。<sup>18)</sup> もっともこの違いはインピーダンスが、はっきりしないせいかもしれないが。又電子リングについては、Vlasov 方程式より正しいと考えられる Fokker-Planck 方程式による扱いもある。<sup>19, 20)</sup>

一方、ここでは述べなかったが時間領域での tracking (computer simulation) の扱いも大部やられている。この 2 つの扱いは、ほぼ一致した予言をするが、食い違いもある。一つには simulation の場合、計算上 localized impedance を用いる事も効いているだろう。これについては、例えば文献(21)を見よ。

一方、インピーダンスを正しく評価する事も重要である。これは電磁気学の問題であるが、解析的方法はもとより、計算機による境界値問題の解法など、大部進歩してきた。また § 7-5 で述べた Sacherer の方法の計算機プログラム BBI<sup>22)</sup> も出来ており、KEK で用いる事が出来る。また § 7-4 で述べたより進んだ解法で解くプログラムも KEK を始め、諸外国でも開発されつつある。これらの進歩によりビーム不安定性の問題は、かなり良く分ってきたと言えるであろう。

よく private communication として引用される。これはフランス語で書かれている事、又 Kellogg の本の必要な所を理解すればそれほど面倒な事でないのここにとまとめておく。なお Gauss 分布の楕円体ビームの potential は高山<sup>4)</sup> によって簡単な方法で導びかれているが、ここに述べる方法がより一般的であろう。

楕円体に電荷が詰まっている場合の potential を考える前に、電磁気の教科書<sup>5)</sup> ののっている楕円体導体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{A-1-1})$$

の potential の問題のみてみよう。(この話も Kellog の本に詳しくのっているので初めての方は、Kellog の本だけ読めばよい。)これは楕円体座標を使って解かれ、結果を示すと(MKSで)

$$U = \begin{cases} \frac{E}{8\pi\epsilon_0} \int_x^\infty \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}} & 0 \leq \lambda \text{ (楕円体の外部)} \\ \frac{E}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}} & \text{(A-1-2)} \\ = \text{一定} & \lambda \leq 0 \text{ (楕円体の内部)} \end{cases}$$

ここで、

$$\varphi(s) = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s) \quad \text{(A-1-3)}$$

$\lambda$  は

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \quad \text{(A-1-4)}$$

の最大根である。(楕円体座標の1つ)なおEは全電荷である。表面電荷密度  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{E}{4\pi abc} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(A-1-5)}$$

である。

ここで楕円体(A-1-1)の点(x, y, z)での接平面への原点からの垂線の長さを p とすると、

$$p = \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(A-1-6)}$$

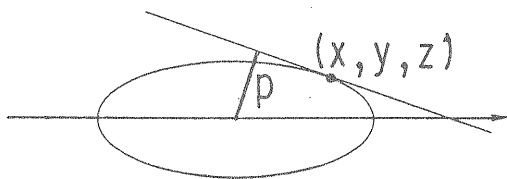


図 A-1-1.

となり、電荷密度は、

$$\sigma = \frac{E}{4\pi abc} p \quad \text{(A-1-7)}$$

となる。従って楕円体での長軸の点(曲率大)の方が短軸の点(曲率小)よりも電荷密度が大きい。これが導体で曲率の大きい(尖がっている)点に電荷がたまりやす

いという事を解析的に示す例となっている。

さて楕円体に電荷が詰まっている時の問題に移る。図A-1-2に示す様に楕円体(A-1-1)の表面に dS の小面積をとり楕円体の中心をなす錐体を考えて、その体積  $\Delta V$  は、

$$\Delta V = \frac{1}{3} p dS \quad \text{(A-1-8)}$$

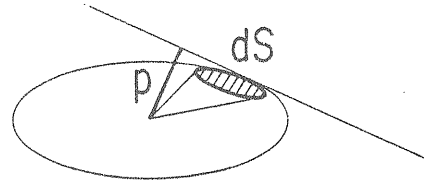


図 A-1-2

となる。今、軸が各々 u だけ小さい楕円体((au, bu, cu)の楕円体)を考えると、

$$\Delta V = \frac{u^3}{3} p_0 dS_0 \quad \text{(A-1-9)}$$

ただし添字<sub>0</sub>は基本楕円体(A-1-1)についての値である事を示す。ここで(u, u+du)の体積は、

$$\Delta V = u^2 du p_0 dS_0 \quad \text{(A-1-10)}$$

添字0の(A-1-1)の楕円体から(au, bu, cu)の楕円体の値に直すと、

$$\Delta V = \frac{1}{u} PdSdu \quad \text{(A-1-11)}$$

となる。

従って電荷密度をK(u)とすると potential U は、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{K \Delta V}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{K p dS du}{ur} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{u_2} \frac{K(u)}{u} \int \frac{PdS}{r} du \end{aligned} \quad \text{(A-1-12)}$$

となる。ここで r はクーロンポテンシャルに現われる距離である。ただし、 $u_2$  は u の上限(一様分布の様に境界がはっきりしている時は、 $u_2 = 1$ , Gauss 分布の場合には  $u_2 = \infty$ )である。

さて(A-1-12)式をみると S についての積分は楕円伝導体に面密度 p で分布した potential  $U_u$  で表わされることがわかる。従って(A-1-2), (A-1-7)を参照して、

$$U_u = \frac{abc u^3}{2 \epsilon_0} \begin{cases} \int_{\lambda(u)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(u, s)}} & \text{(外部)} \\ \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(u, s)}} & \text{(内部)} \end{cases} \quad (A-1-13)$$

と表わされる。ここで、

$$\varphi(u, s) = (a^2 u^2 + s)(b^2 u^2 + s)(c^2 u^2 + s) \quad (A-1-14)$$

であり  $\lambda(u)$  は、

$$\frac{x^2}{a^2 u^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 u^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 u^2 + \lambda} = 1 \quad (A-1-15)$$

の最大根である。(楕円体座標の一つ)

従って楕円体の内部の点  $u = u_0$  では、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = u_0^2 \quad (A-1-16)$$

を満たし、その点で potential  $U_i$  は、

$$U_i = \frac{abc}{2 \epsilon_0} \left[ \int_0^{u_0} K(u) u^2 \int_{\lambda(u)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(u, s)}} du + \int_{u_0}^{u_2} K(u) u^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{\varphi(u, s)}} du \right] \quad (A-1-17)$$

となる。

さて、

$$\begin{cases} s = u^2 t \\ v = \frac{\lambda(u)}{u^2} \end{cases} \quad (A-1-18)$$

とおくと、

$$U_i = \frac{abc}{2 \epsilon_0} \left[ \int_0^{u_0} K(u) u \int_v^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} du + \int_{u_0}^{u_2} K(u) u \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} du \right] \quad (A-1-19)$$

となる。さて、

$$P(u) = \int^u K(u) u du \quad (A-1-20)$$

とおく。この様に密度  $K$  を constant  $K_0$  として積分の外に出さずに (A-1-20) の様に  $P(u)$  を導入したのが Houssais のやった事である。さて (A-1-19) の第1の積分を部分積分によって、

$$\left[ P(u) \int_v^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} \right]_0^{u_0} + \int_0^{u_0} \frac{P(u)}{\sqrt{\varphi(v)}} \frac{dv}{du} du \quad (A-1-21)$$

とする。すると (A-1-19) は、

$$U_i = \frac{abc}{2 \epsilon_0} \left[ P(u_0) \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} + \int_0^{\infty} \frac{Q(v)}{\sqrt{\varphi(v)}} dv + (P(u_2) - P(u_0)) \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} \right] \quad (A-1-22)$$

となる。但し、

$$\begin{cases} u = 0 \text{ の時} & V = \infty \\ u = u_0 \text{ の時} & V = 0 \end{cases}$$

であり、

$$Q(v) = P(u) = P\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2+v} + \frac{y^2}{b^2+v} + \frac{z^2}{c^2+v}}\right) \quad (A-1-23)$$

である事が (A-1-15), (A-1-18) からわかる。従って、

$$U_i = \frac{abc}{2 \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{P(u_2) - P\left\{\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t}\right)^{1/2}\right\}}{\sqrt{\varphi(t)}} dt \quad (A-1-24)$$

が求める一般的 potential である。(  $\varphi(t)$  は (A-1-3) 式で与えられる)

i) uniform 分布

$$K = K_0 \\ P(u) = \frac{1}{2} K_0 u^2$$

$$U_i = \frac{abc K_0}{4 \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} dt \quad (A-1-25)$$

積分は楕円積分で表わされる。

ii) Gaussian 分布

$$K = K' \exp(-k^2 u^2)$$

$$P(u) = -\frac{K'}{2k^2} \exp(-k^2 u^2)$$

$$U_i = \frac{abc K'}{4k^2 \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\exp\left\{-k^2\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t}\right)\right\}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} dt \quad (\text{A-1-26})$$

iii) parabolic 分布

$$K = K'(1-u^2)$$

$$P(u) = \frac{1}{2} K' (u^2 - \frac{1}{2} u^4)$$

$$U_i = \frac{abc K'}{4\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t}\right)^2 dt \quad (\text{A-1-27})$$

(A-1-25), (A-1-26), (A-1-27)で  $c \rightarrow \infty$  とすると, 2次元楕円柱の potential ができる。2次元の場合は積分は初等関数で表わされ,

i) uniform 分布

$$U_i = -\frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x^2}{a(a+b)} + \frac{y^2}{b(a+b)} \right] \quad (\text{A-1-28})$$

で Teng<sup>1)</sup> の elementary な derivation と一致する。

ii) parabolic 分布

$$U_i = -\frac{e\lambda}{\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x^2}{a(a+b)} + \frac{y^2}{b(a+b)} - \frac{(b+2a)}{6a^3(a+b)^2} x^4 - \frac{(a+2b)}{6b^3(a+b)^2} y^4 - \frac{1}{ab(a+b)^2} x^2 y^2 \right] \quad (\text{A-1-29})$$

ここで  $a = b$  とおくと § 2-2 の (2-2), (2-12) と当然の事ながら一致する事が分る。

## 付録 2 Tune Spread

ここで non-uniform beam で出てきた octupole 成分による tune spread を計算してみる。これには Hamiltonian 形式を用いるのが一般性があるが、文献(1)に sextupole, octupole magnet について計算法も含めて、詳しく書いてある。

先ず parabolic 分布の場合を考える。(Gaussian の場合は factor の違いだけである。)力は(2.12)より

$$F_r = \frac{\lambda e^2}{\pi a^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left( -\frac{r^3}{2a^2} \right) \quad (\text{A.2.1})$$

従ってポテンシャルVは(電場のポテンシャルでなく, 力のポテンシャルである)。

$$V = \frac{\lambda e^2}{8\pi a^4 \epsilon_0} \frac{1}{r^2} r^4 = \frac{mc^2 \lambda r_0}{2a^4} \frac{1}{r^2} (x^2 + y^2)^2 \quad (\text{A.2.2})$$

これが摂動の Hamiltonian になる。但し, 前出の論文の Hamiltonian は時間 t の代りに軌道長  $S = c\beta t$  を独立変数にしてあり, 更に momentum  $mc\beta\alpha$  で割っている。詳しくは文献(2)の Appendix を見よ。従ってこの違いを考えると (A.2.2) のポテンシャルを  $mc^2\beta^2\alpha$  で割って

$$V = \frac{\lambda r_0}{2 a^4} \frac{1}{\beta^2 r^3} (x^2 + y^2)^2 \quad (\text{A. 2.3})$$

が摂動 Hamiltonian となる。

前出の論文<sup>1)</sup>の(1)式で octupole magnet による  $a_3$  の項だけとると

$$H^{(4)} = \frac{a_3}{24 \beta \varphi} (x^4 - 2x^2 y^2 + y^4) \quad (\text{A. 2.4})$$

となる。ここで  $a_3 = \frac{\alpha^3 \beta}{2 x^3}$  である。(A. 2.3) と (A. 2.4) を比べると

$$\frac{a_3}{\beta \varphi} = \frac{12 \lambda r_0}{a^4} \frac{1}{\beta^2 r^3} \quad (\text{A. 2.5})$$

と置きかえ、 $x^2 y^2$  の項の符号を変えればよい事が分る。そこで文献(1)の(14), (15)より tune spread は

$$\Delta \nu_x = \frac{3}{4} \frac{\lambda r_0}{a^4 \beta^2 r^3} \frac{R^3}{\nu_x^2} E_x + \frac{3}{2} \frac{\lambda r_0}{a^4 \beta^2 r^3} \frac{R^3}{\nu_x \nu_y} E_y \quad (\text{A. 2.6})$$

$$\Delta \nu_y = \frac{3}{4} \frac{\lambda r_0}{a^4 \beta^2 r^3} \frac{R^3}{\nu_x^2} E_y + \frac{3}{2} \frac{\lambda r_0}{a^4 \beta^2 r^3} \frac{R^3}{\nu_x \nu_y} E_x$$

となる。但し、 $\beta_x = R/\nu_x$ ,  $\beta_y = R/\nu_y$  とおいた。ここで  $\pi E_x$ ,  $\pi E_y$  は emittance である。ここでは円形ビームについて述べたが、楕円ビームに拡張するのは容易である。

octupole 成分は tune spread を引き起すだけでなく、 $4\nu = \text{integer}$ ,  $2\nu_x \pm 2\nu_y = \text{integer}$  の resonance を引き起す。特に  $2\nu_x - 2\nu_y = 0$  の resonance について、space charge の octupole 成分の寄与については、Montague<sup>3)</sup> が述べている。(楕円ビーム、Gauss 分布について)

### 付録3 Phase Space Distribution

第2章の議論から分るように space charge detuning  $\Delta\nu$  をなるべく小さくする為には、transverse, longitudinal 共、実空間でなるべく一様な分布にして入射してやれば良い事が分った。injection process を最適化するためには、対応する phase space の分布がどのような物であるかを知らねばならぬ。また実空間の分布に対応して必ず Phase space の分布が存在しなければならず、Phase space の分布が存在しない様な実空間の分布は現実的な物と言えない。後にみる様に三次元実空間の一様分布のような簡単で実現可能な様な分布でも、それに対応する位相空間分布が存在しない。

位相空間の分布(主軸変換, scale 変換で分布を円対称とする。すると stationary 分布は半径  $r$  だけの関数となる。)が与えられた時、実空間での分布  $\varphi(x)$  を求めるのは単に積分するだけでよい。逆の問題、すなわち実空間の分布  $\varphi(x)$  が与えられた時に対応する位相空間の分布  $f(r)$  を求める問題は Abel の積分方程式を解く問題となる。Abel の積分方程式は、例えば寺沢寛一<sup>1)</sup> の教科書など多くの数学書にのっているが、ここでは Whittaker-Watson<sup>2)</sup> を参照する。それによれば

$$\varphi(x) = \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^\mu} d\xi \quad (0 < \mu < 1, a \leq x \leq b) \quad (\text{A. 3.1})$$

$$\varphi(x) \text{ continuous, } \varphi(a) = 0$$

の解は

$$f(z) = \frac{\sin \mu \pi}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{\varphi(x) dx}{(z-x)^{1-\mu}} \quad (\text{A. 3.2})$$

で与えられる。

例として実空間(一次元)で一様な分子を与える位相空間分布  $f(r)$  を求めよう。

$$\frac{N}{2a} = \int_{x^2+p^2 \leq 1} f(x^2+p^2) dp \quad (\text{A. 3.3})$$

極座標を用い  $x$  が一定だという事を用い

$$x^2 + p^2 = r^2 \quad pdp = r dr \quad (\text{A. 3.4})$$

より

$$\frac{N}{2a} = 2 \int_x^1 \frac{f(r^2)}{\sqrt{r^2-x^2}} r dr \quad (\text{A. 3.5})$$

$$= i \int_1^{x^2} \frac{f(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi}} d\xi$$

となり Abel の積分方程式となる。従って

$$\begin{aligned} i f(z) &= \frac{\sin 2}{\pi} \frac{d}{dz} \int_1^z \frac{\frac{N}{2a}}{(z-x)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{N}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{z-1}} \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

よって

$$f(r^2) = \frac{N}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (\text{A.3.7})$$

他の分布についても同様であるが、例をあげよう。

i) waterbag distribution

$$\begin{aligned} f(r) &= \text{const} \\ \varphi(x) &\propto \sqrt{1-x^2} \end{aligned} \quad (\text{A.3.8})$$

ii) square bunch

$$\begin{aligned} f(r) &\propto \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \\ \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.3.9})$$

iii) parabolic

$$\begin{aligned} f(r) &\propto \sqrt{1-r^2} \\ \varphi(x) &= \frac{3}{4}(1-x^2) \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

iv)

$$\begin{aligned} f(r) &\propto (1-r^2) \\ \varphi(x) &\propto (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.3.11})$$

今までの話は一次元の場合であったが、二次元、三次元の場合はどうであろうか？ Gauss 分布の様な場合は Phase space でも Gauss 分布する事はすぐ分かるが、一般論はないようである。理論上、力が linear になるため重要な実空間での一様分布を考える。まず

空間を 2 次元として位相変数を  $v_1, v_2, v_3, v_4$  とおき、4 次元の球面に変換しておいて

$$\begin{aligned} \int f(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2) dv_3 dv_4 &= \text{const} \\ v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.3.12})$$

を満足する  $f$  を求めればよい。 $v_1, v_2$  を固定して

$$\begin{aligned} v_3 &= r \cos \theta \\ v_4 &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.3.13})$$

とおくと (A.3.12) は

$$\int f(v_1^2 + v_2^2 + r^2) r dr d\theta = \text{const} \quad (\text{A.3.14})$$

$$v_1^2 + v_2^2 + r^2 \leq 1$$

となる。

$$\begin{aligned} q &= r^2 \\ dq &= 2 r dr \end{aligned} \quad (\text{A.3.15})$$

とおくと、(A.3.14) は

$$\int_0^{1-v_1^2-v_2^2} f(v_1^2 + v_2^2 + q) dq = \text{const} \quad (\text{A.3.16})$$

となり解は簡単に

$$\begin{aligned} f(v_1^2 + v_2^2 + q) &= \text{const} \delta(v_1^2 + v_2^2 + q - 1) \\ &= \text{const} \delta(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{A.3.17})$$

という位相空間内の  $\delta$  関数の分布となる。これは最初に提出した人の名をとって、Kapchinskij-Vladimirskij (K-V) distribution と呼ばれる<sup>3)</sup>。

2 次元の一様分布でも位相空間では  $\delta$  関数というかなり特異な分布となる。3 次元の一様分布はそれに対応する位相空間分布がなく、実現不可能である事が Sacherer の博士論文<sup>4)</sup>の Appendix A で証明されている。この様な位相分布を求める問題は、ビーム不安定性の理論で Vlasov 方程式による扱いをする時にも現われる。



## 参考文献

### 第2章

- 1) C. Boret et al., CERN/MPS-SI/Int./DL/70/4 (1970)
- 2) E.D. Courant and H.S. Snyder, Ann. Phys. 3, 1 (1958)
- 3) K.H. Reich, K. Shindl and H. Schönauer, Proc. 12th Int. Conf. on High Energy Accelerators, Fermilab (1983) p.438.
- 4) T. Suzuki, KEK-74-4 (1974)
- 5) F.T. Cole and P.L. Morton, UCID 10130 (1964)
- 6) J.P. Delahaye et al. Proc. 11th Int. Conf. on High Energy Accelerators, CERN, (1980) p.299
- 7) L.J. Laslett, Proc. Brookhaven Summer Study BNL7534 (1963) p.324.
- 8) スミルノフ, 「高等数学教程」Ⅲ巻二部第2章
- 9) W.R. Smythe, "Static and Dynamic Electricity" McGraw-Hill (1968) Chap IV
- 10) I.M. Kapchinskij and V.V. Vladimirkij, 1959 CERN Acc. Conf. p.274
- 11) F.J. Sacherer, VCRL-18454 (1968)

### 第3章

- 1) C.E. Nriksen and A.M. Sessler, Rev. Sci. Instrum. 30, 80 (1959)
- 2) A. Hofmann, Proc. Erice School, CERN 77-13 (1977) p.139
- 3) P. Bramham et al., IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-24, 1490 (1977)
- 4) A. Hofmann and F. Rererersen, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-26, 3526 (1979)
- 5) P.B. Wilson et al., IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-24, 1211 (1977)

### 第4章

- 1) C.E. Nielsen, A.M. Sessler and K.R. Symon, 1959 CERN Accelerator Conf. P.239 (1959)
- 2) A.A. Kolomenskij and A.N. Lebedev. 同上 p.115
- 3) R.J. Briggs and V.K. Neil, Plasma Phys. (J. Nuclear Energy Part C) 8, 225 (1966)
- 4) V.K. Neil and R.J. Briggs, Plasma Phys. 9, 631 (1967)
- 5) A.M. Sessler and V.G. Vaccaro, CERN 68-1

(1968)

- 6) L.J. Laslett, V.K. Neil and A.M. Sessler, Rev. Sci. Instrum. 32, 276 (1961)
- 7) V.K. Neil and A.M. Sessler, Rev. Sci. Instrum. 36, 429 (1965)
- 8) 例えば K. Bane, T. Weiland and P. Wilson, Proc. 1983 BNL/SUNY Summer School (AIP, Conf. Proc. No.127) p.875
- 9) M.J. Lighthill, "An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions" Cambridge Univ. Press (1958)  
高見穎郎訳「フーリエ解析と超関数」ダイヤモンド社.
- 10) K.W. Robinson, SLAC-49, p.32 (1965)
- 11) A.W. Chao, Proc. 1982 SLAC Summer School (AIP Conf. Proc. No.105) p.353
- 12) T. Suzuki, Jpn. J. Appl. Phys. 21, 731 (1982)
- 13) 例えば  
S. Ichimaru, "Basic Principles of Plasma Physics" (Benjamin, 1973) Appendix A  
N.A. Krall and A.W. Trivelpiece, "Principles of Plasma Physics (McGraw-Hill, 1973), Chap. 7
- 14) J.D. Bjorken and S.K. Mtingwa, Part. Accel. 13, 115 (1983)
- 15) L. Landau, J. Phys. U.S.S.R. 10, 25 (1946)
- 16) L.D. Landau and E.M. Lifschitz, "Physical Kinetics" (Pergamon Press, 1981) § 29-30
- 17) A.G. Ruggieno and V.G. Vaccaro, CERN-ISR-TH/68-33 (1968)
- 18) Y. Chin and K. Yokoya, Phys. Rev. D28, 2141 (1983)
- 19) A. Hofmann, Proc. Erice School CERN77-13 (1977) p.139
- 20) E. Keil and W. Schnell, CERN-ISR-TH-RF/69-48 (1969)
- 21) N.G. van Kampen Physica. 21, 949 (1955)
- 22) K.M. Case, Ann. Phys. (N.Y) 7, 349 (1959)
- 23) J. Dawson, Phys. Fluid, 4, 819 (1961)
- 24) D. Boussand, CERN/Lab II/RF/Int/75-2 (1975)
- 25) A.W. Chao and J. Gareyte, PEP-224 (1976)
- 26) F. Sacherer, IEEE Trans., NS-24, 1393 (1977)
- 27) R.A. Dory, MURA 654 (1962)
- 28) Y. Chin and K. Yokoya, Nucl. Instrum, Methods 226, 223 (1984)

## 第5章

- 1) L.J. Laslett, V.K. Neil and A.M. Sessler, Rev. Sci. Instrum. 36, 436 (1965)
- 2) P.L. Morton, V.K. Neil and A.M. Sessler, J. Appl. Phys. 37, 3875 (1966)
- 3) F. Sacherer, Proc. IX-th Intern. Conf. on High Energy Accelerators, SLAC (1974) p.347
- 4) A.W. Chao, Proc. SLAC Summer School (AIP 105, 1982) p.353
- 5) T. Suzuki, KEK Int. Rep. TN-81-018 (1981)
- 6) K. Hübner and V. Vaccaro, CERN/ISR-TH/70-44 (1970)

## 第6章

- 1) A.W. Chao, SLAC Summer School, 1982 (AIP No.105) p.353
- 2) 平田 光司, ビームトラッキング OHO' 85 (1985).
- 3) R. クーラン, D. ヒルベルト, 「数物理学の方法 I」(東京図書) 第2章 § 5.
- 4) M.J. Lighthill, Fourier Analysis and Generalized Functions (Cambridge Univ. Press, 1958)
- 5) E.D. Courant and A.M. Sessler, Rev. Sci. Instrum. 37, 1579 (1966)
- 6) L.J. Laslett, Proc. Brookhaven Summer Study, BNL 7534 (1963) p.324
- 7) L.J. Laslett and L. Resegotti, Proc. 6th Int. Conf. on High Energy Accelerators, Cambridge, CEAL 2000 (1967) p.150
- 8) R.L. Gluckstern and T. Suzuki KEK 83-29 (1984)
- 9) T. Suzuki and K. Yokoya, Nucl Instrum. Methods 203, 45 (1982)
- 10) E.D. Courant and H.S. Snyder Ann. Phys. 3, 1 (1958)
- 11) K. Satoh and Y. Chin, Nucl. Instrum. Methods 207, 309 (1983)
- 12) R.D. Kohaupt, DESYM-80/19 (1980)
- 13) R. Talman, Nucl. Instrum. Methods 193, 423 (1982)
- 14) W.K.H. Panofsky and M. Bander, Rev. Sci. Instrum. 39, 206 (1968)
- 15) A.W. Chao, B. Richter and C.Y. Yao, Nucl. Instrum. Methods 178, 1 (1980)
- 16) K.W. Robinson, CEAL 1010 (1964)
- 17) P.B. Wilson, Fermilab Summer School (AIP

No.87) p.450

- 18) F.S. Crawford, Jr. "Waves, Berkeley Physics Course Vol.3" (McGraw-Hill)

## 第7章

- 1) F. Sacherer, CERN/SI-BR/72-5 (1972)
- 2) F. Sacherer, Proc. 9th Int. Conf. on High Energy Accelerators, SLAC (1974) p.347
- 3) F. Sacherer, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-20, 825 (1973)
- 4) F. Sacherer, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-24, 1393 (1977)
- 5) A.W. Chao, SLAC Summer School, 1982 (AIP No.105) p.353
- 6) T. Suzuki, Part. Accel. 12, 237 (1982)
- 7) F. Ruggiero, CERN/LEP-TH/84-2 (1984)
- 8) T. Suzuki, and K. Yokoya, Nucl. Instrum. Methods 203, 45 (1982)
- 9) G. Besnier, Ph. D. Thesis, Univ. Rennes (1978) G. Besnier, Nucl. Instrum. Methods 164, 235 (1979)
- 10) K. Satoh, PEP-Note 357 (1981)
- 11) B. Zotter, CERN SPS/81-18 (DI) (1981)
- 12) Y. Chin, K. Satoh, and K. Yokoya, Part. Accel. 13, 45 (1983)
- 13) R. Baartman, H. Schönauer and T. Suzuki, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-32, 2395 (1985)
- 14) F. Sacherer, Erice School CERN 77-13 (1977) p.198
- 15) J.L. Laclare, Proc. 11th Int. Conf. on High Energy Accelerators, CERN (1980) p.526
- 16) A.W. Chao and J. Gareyte, SPEAR-197 (1976)
- 17) K. Satoh and Y. Chin, Nucl. Instrum. Methods 207, 309 (1983)
- 18) T. Suzuki, Y. Chin, and K. Satoh, Part. Accel. 13, 179 (1983)
- 19) T. Suzuki, Part. Accel. 14, 91 (1983)
- 20) T. Suzuki, KEK Preprint 85-77 (1986)
- 21) K. Hirata, KEK Preprint 86-1 (1986)
- 22) M. Gygi-Hanney et al., CERN/LEP-TH/83-2 (1983)

## 付録 1

- 1) L.C. Teng, ANLAD-59 (1960)
- 2) O.D. Kellog, "Foundations of Potential Theory" (Dover 1953) Chap VII

- 3) B. Houssais, private communication
- 4) K. Takayama, Nuovo Cimento 34, 192 (1982)
- 5) 例えば  
ランダウニリフシツ「電磁気学」(東京図書)§ 4  
竹山説三「電磁気学現象理論」(丸善) VIII. 1  
J.A. Stratton "Electromagnetic Theory"  
(McGraw-Hill, 1941) § 3.25

#### 付録 2

- 1) T. Suzuki, KEK-74-6 (1974)
- 2) T. Suzuki, and S. Kamada, KEK-76-7

(1976)

- 3) B.W. Montague, CERN 68-38 (1968)

#### 付録 3

- 1) 寺沢 寛一 「数学概論」(岩波).
- 2) E.T. Whittaker and G.N. Watson "Modern Analysis" (Cambridge University Press) §11.8
- 3) I.M. Kapchinskij and V.V. Vladimirkij, 1959  
CERN Acc. Conf. p.274
- 4) F.J. Sacherer, UCRL-18454 (1968)