

1. はじめに

ビームの輸送路や円形加速器は、ビームに対してある作用をするいくつかの種類の要素からなっている。構成要素は実は片方の手の指で数えられるほどの種類しかない。個々の要素の働きを理解すれば少くとも、それがつながっただけのビーム輸送路は理解が容易である。また実際の運転でもビームの運動を実感しやすい。ビームの形が見えるモニターをビームラインに入れて、ビームを偏向させるとビーム中心が移動するのが観察でき、また偏向する場所とモニターの位置との関係によって移動する方向や量が異なることがわかる。四極磁石を変えるとビームの大きさも変わったり、またビームの運動量の広がりが大きくなると分散のある所ではビーム巾が変わるということも体験できる。しかし、ビーム輸送路というのは輸送路に入ってくるビームの初期条件で、途中のビームの様子を決めてもらっている。つまり自分自身の個性を出さない。ところがリングは基本となるビームラインで構成されているが、ビームが多数回まわるということで個性を持つ。ビーム輸送路では初期条件で決まるが、リングでは基本となるビームラインの周期条件で個性が決まる。このリングの個性は、ビームが安定にまわっている場合には目立たない。特に目立つのはリングへのビーム入射や、リングからの取り出しの際である。逆に言うと、リングへの入射を取り扱ってみようとする、リングの個性を理解する必要がある。この講義は入射/取り出しを目的ともしているが、上に述べた理由で、リングの個性がどのようにして決められているかについて考えてみる。ここではリングの各機器に誤差のないような、理想的なリングを取り扱う。詳しいリングの解説は前年までの夏の学校のテキストに見い出される。次に、入射に際してリングの個性はどのように見えるか、またはリングの個性に適応して入射するにはどうするのかということを経る。最後に主要な入射式について、簡単なモデルを用いて考察するが、細かい入射機器の説明は省いた。この講義はビーム輸送路、リングへの入射/取り出しの入門であるばかりでなく、入射の際に見立つリングの個性を理解するという、リングの入門にもなっている。

1. 粒子軌道

a. 粒子ビームの偏向

粒子は外場からの力として Lorentz 力を受ける。Lorentz 力はよく知られているように

$$F = e(E + v \times B) \quad (1-1)$$

と表わされる。e は電荷、E は電場、B は磁場で v は粒子の速度を表わしている。運動方程式は

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (1-2)$$

で、p は運動量で、粒子の静止質量 m_0 とすると

$$p = m_0 \gamma v \quad (1-3)$$

となる。ここで γ は relativistic factor ($= 1/\sqrt{1-\beta^2}$) である。電場による力と磁場による力の大きさを比較してみる。電場、磁場の強さとして、 $E = 1 \times 10^6 \text{ V/m}$ 、 $B = 1 \text{ T}$ とする。これらの値は適当な努力で到達できる程度にとつてある。高エネルギー粒子の場合には速度は光速 $c (3 \times 10^8 \text{ m/s})$ の程度である。代表的な値で式 (1-1) で 2 つの力を比較すると

$$|v \times B| \sim 3 \times 10^2 \times |E| \quad (1-4)$$

となり、磁場による力が圧倒的に大きい。しかし、式 (1-1, 2) からわかるように磁場による力は、常に運動量 (速度) に対して垂直である。

式 (1-2) の両辺に p をかけると

$$p \frac{dp}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2 = p \cdot F = ep \cdot E \quad (1-5)$$

となる。一方相対論的な粒子の全エネルギー ϵ と p との間には

$$\epsilon^2 = c^2 p^2 + m_0 c^4 \quad (1-6)$$

の関係がなりたつから、式 (1-5) は電場は粒子のエネルギーを変えるが、磁場はエネルギーを変えないことを示している。以上から粒子のエネルギーを上げるには当然電場を用いるわけではあるが、粒子の偏向には通常、磁場が用いられる。この講義では加速を扱わないので、電場による運動は考えない。

一番簡単な場合として、一様磁場中の運動を考える。3次元空間 (x, y, z) で z 方向に一様な磁場 B_0 がある場合に、 $z = 0$ の平面内で運動する粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= ev_y B_0 \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -ev_x B_0 \end{aligned} \quad (1-7)$$

となる。ここで

$$\tilde{V} = v_x + i v_y \quad (1-8)$$

とおくと、式(1-7)は

$$m \frac{d\tilde{V}}{dt} = -ieB_0 \tilde{V} \quad (1-9)$$

となり、適当な積分定数を用いて積分すると

$$\tilde{V} = -i \frac{p}{m} e^{-\frac{eB_0}{m} t} \quad (1-10)$$

が得られる。速度 v_x , v_y は

$$v_x + \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad (1-11)$$

の関係があるので、式(1-10)を再度積分すると

$$x + iy = \frac{p}{eB_0} e^{-i \frac{eB_0}{m} t} \quad (1-12)$$

となる。これは粒子が原点を中心とした円運動をすることを示し、その半径 ρ は

$$\rho = \frac{p}{eB_0} \quad (1-13)$$

であり、回転角周波数 w_c は

$$w_c = \frac{eB_0}{m} \quad (1-14)$$

でサイクロトロン振動数とよばれる。質量 m は静止質量 m_0 とは $m = m_0 \gamma$ の関係があるが、 $\gamma \simeq 1$ で相対論の効果の少ない低エネルギーでは粒子のエネルギーによらず一定である。この w_c の等時性がサイクロトロンという加速器の基本原則となっている。式(1-13)から、磁場中の軌道の長さ L と、その間での偏向角 θ の関係は

$$\theta = \frac{L}{\rho} = \frac{eB_0 L}{p} \quad (1-15)$$

である。磁場による粒子の偏向角は、粒子のエネルギー

磁場による粒子の偏向角は、粒子のエネルギーではなくて運動量に依存している。加速器で使っているエネルギーという言葉は、粒子の全エネルギーではなくて、全エネルギーから静止エネルギーを除いたものである。すなわち、エネルギー T は

$$T = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2 \quad (1-16)$$

$$= m c^2 - m_0 c^2 \quad (1-17)$$

となる。そこで運動量 p は

$$p = mv = (T + m_0 c^2) \cdot \beta / c \quad (1-18)$$

で表わされる。ここで $T + m_0 c^2$ は全エネルギーを表わし、加速器では eV の単位が使われる。式(1-18)から、運動量の単位は eV/c となる。注意することは、同じエネルギーでも陽子と電子では運動量が異なる。例えば、 $T = 1 \text{ GeV}$ とすると、陽子の静止エネルギー $m_p c^2 = 0.938 \text{ GeV}$ 、電子の静止エネルギー $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ を使うと、陽子の運動量は $1.70 \text{ GeV}/c$ で電子では $1.0 \text{ GeV}/c$ となる。エネルギーが $T = 10 \text{ GeV}$ では、陽子と電子ではそれぞれ $10.90 \text{ GeV}/c$, $10 \text{ GeV}/c$ となり、差は小さくなる。ここで式(1-15)を、通常使われる単位を用いた場合にかきなおすと

$$\theta = 0.3 \times \frac{B_0 [T] \cdot L [m]}{p [\text{GeV}/c]} \quad (1-19)$$

が得られる。

b. ビーム軌道の表現

粒子の軌道を記述する方法を考えてみる。基準として代表的な粒子の通る中心軌道を考える。中心軌道そのものは3次元空間の中での曲線として表わせばよいが、ここでは簡単のために中心軌道は水平面内にあるとする。粒子の束(ビーム)は中心軌道のまわりに分布している。個々の粒子の軌道を表わすために、中心軌道のおおのの場所で、中心軌道と垂直な面を考える。粒子軌道がこの面を通る位置と、面との傾きで表わすことにする。すなわち水平方向に x 、垂直方向に y をとると、軌道は (x, x', y, y') の4つの量で表わせる。ここで、 x , y 方向の粒子の運動量を p_x, p_y とし、中心軌道にそっての座標を s とし、この方向の運動量を p_s とすると、軌道の傾き、 x', y' は

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{p_s}, \quad y' = \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{p_s} \quad (1-20)$$

の関係があるが、

$$p_x^2 + p_y^2 + p_s^2 = p^2 \quad (1-21)$$

で、通常は $|x'| \ll 1$, $|y'| \ll 1$ であるから

$$p_s \simeq p \quad (1-22)$$

としてよい。すなわち中心軌道方向の運動量は一定で全運動量に等しいとする。

c. 四極磁石

粒子軌道として一番簡単な例は、磁場のない所を通る場合である。水平方向の運動のみに注目して、 $s = 0$ で (x_0, x'_0) を通る粒子は $s = L$ の下流では $(x_0 + x'_0 L, x'_0)$ を通る。一般には $x'_0 \neq 0$ であるから粒子ビームはどんどん広がって、速くまでビームを輸送することはできない。粒子が中心軌道から遠くへはずれないように収束させる必要がある。光学系で収束作用を持つ凸レンズは、中心軸からはずれて通る光線に対して、中心軸と光線との距離に比例した強さで光線を中心軸の方向に偏向させる。同様に荷電粒子ビームの場合にも、水平方向のずれ x に比例して y 方向の磁場が変化すれば、磁場による偏向角も、ずれ x に比例し収束作用が期待される。すなわち B_y が

$$B_y = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \cdot x = g \cdot y \quad (1-23)$$

であればよい。 g の符号については後で判明するが、 $e > 0$ の時には $g > 0$ で収束作用をする。磁場は Maxwell 方程式の一つ

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \quad (1-24)$$

をみたさなければならないため、式 (1-23) であれば必ず水平方向の磁場

$$B_x = \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \cdot y = g \cdot y \quad (1-25)$$

を伴っている。式 (1-23, 25) の磁場を持つ磁石は四極磁石又は収束磁石と呼ばれる。磁石の中心では磁場はないので、中心軌道は影響を受けない。

中心軌道からずれた粒子の四極磁場での運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= -ev_s B_y \simeq -e \frac{p}{m} B_y \\ \frac{dp_y}{dt} &= ev_s B_x \simeq e \frac{p}{m} B_x \end{aligned} \quad (1-26)$$

となる。独立変数として、軌道の長さ $s (= vt = \frac{p}{m} t)$ を取り、 p_x, p_y を x', y' で書きかえ、 B_x, B_y に式 (1-23, 25) を代入すると

$$\frac{dx'}{ds} = \frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{eg}{p} x \quad (1-27)$$

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{eg}{p} y \quad (1-28)$$

が得られる。これらの式から四極磁場では、 x 方向と y 方向の運動が独立で別々に扱うことができることがわかる。また x と y 方向では収束作用が逆になってい

る。すなわち x 方向で収束作用があれば y 方向では必ず発散作用があり、一つの四極磁石は両方向に同時に収束作用を持つことはできない。また、これらの方程式は x, y の線形な 2 階の微分方程式になっている。

具体的に式 (1-27) を解くことにする。 x の係数の符号によって解の形が異なる。

i) $\frac{eg}{p} = K > 0$ の場合
 $s = 0$ での初期条件 $x(0), x'(0)$ を用いると

$$x(s) = x(0) \cos \sqrt{K}s + \frac{x'(0)}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}s \quad (1-29)$$

$$x'(s) = -\sqrt{K} x(0) \sin \sqrt{K}s + x'(0) \cos \sqrt{K}s \quad (1-30)$$

が得られる。 $\frac{eg}{p} > 0$ の場合には $x(s)$ は振動するだけで大きくならず、四極磁場は収束作用をする。

ii) $\frac{eg}{p} = -K < 0$ の場合

$$x(s) = x(0) \cosh \sqrt{K}s + \frac{x'(0)}{\sqrt{K}} \sinh \sqrt{K}s \quad (1-31)$$

$$x'(s) = \sqrt{K} x(0) \sinh \sqrt{K}s + x'(0) \cosh \sqrt{K}s \quad (1-32)$$

が得られ、この場合は発散作用をする。

式 (1-27) が線形方程式であることから、2 つの解の和は、再び解になっている。これを利用すると、解として、初期条件が $x(0) \neq 0, x'(0) = 0$ の解と、 $x(0) = 0, x'(0) \neq 0$ の解との和として表わすことができ、行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = M(s) \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad (1-33)$$

と書くことができる。ここで行列 $M(s)$ は Transfer Matrix と呼ばれる。長さが L の四極磁石では入口での軌道 $(x(0), x'(0))$ と出口での軌道 $(x(L), x'(L))$ は Transfer Matrix を用いて

$$\begin{pmatrix} x(L) \\ x'(L) \end{pmatrix} = M_F \text{ or } M_o \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad (1-34)$$

と書け、収束、発散に対応してそれぞれ

$$M_F(L) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{KL} & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{KL} \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{KL} & \cos \sqrt{KL} \end{pmatrix} \quad (1-35)$$

$$M_D(L) = \begin{pmatrix} \cosh\sqrt{KL} & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh\sqrt{KL} \\ \sqrt{K} \sinh\sqrt{KL} & \cosh\sqrt{KL} \end{pmatrix} \quad (1-36)$$

となる。特にLを一定にして、Kを0に近づけると、当然ながら磁場のない長さLの自由空間の Transfer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-37)$$

が得られる。ここまでで、四極磁場と自由空間についての Transfer Matrix を求めてしまったので、四極磁石の働きは Transfer Matrix を用いて計算すればよく、運動方程式を解く必要はない。

d. Transfer Matrix の合成

Transfer Matrix M_1, M_2, \dots, M_n で表わされる要素でビームラインが構成され、図1-1のようにこの順にビームが通過するとする。各要素のつなぎ目での軌道 $(x_i; x_i')$ には

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_1 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad (1-38)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = M_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_2 \cdot M_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad (1-39)$$

等の関係があるので、結局 M_n を通った後の軌道 (x_n, x_n') は

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \end{pmatrix} = M_n \cdot M_{n-1} \cdots \cdots \cdot M_2 \cdot M_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad (1-40)$$

となり、全体の Transfer Matrix は粒子の通る順に左側から Transfer Matrix をかけることによって得られる。

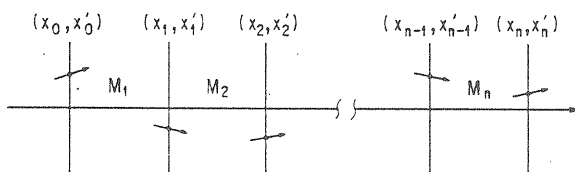


図1-1 Transfer Matrix の合成。粒子は M_1, M_2, \dots, M_n の Transfer Matrix を持つ部分を、この順に通過する。つなぎ目での粒子の中心軌道に対するずれと傾きを (x_i, x_i') で表わし、入口と出口でのずれと傾きをそれぞれ $(x_0, x_0'), (x_n, x_n')$ とする。

e. Thin Lens 近似

光学系のレンズによる収束作用の簡単な取り扱い方法に、うす肉レンズ近似 (Thin Lens 近似) がある。この近似では収束作用を一点に集中させ、レンズの厚みを考慮しない。これに対応して、ビームに対する作用を一ヶ所に集めて、ビームは近似的にそこでのみ作用をうけるということにする。例えば四極磁場による収束の場合に、式(1-35)で長さ方向の作用の積分 KL を一定とし、長さ L を無限小にする。この操作により M_F は

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-41)$$

となる。ここで

$$\frac{1}{f} = KL = \frac{e}{p} \int_0^L g ds \quad (1-42)$$

で f は焦点距離と呼ばれる。収束の場合には Transfer Matrix の $(2, 1)$ 成分 m_{21} が負となり、発散では正となる。式(1-41)で、中心軌道に平行な粒子が x_0 を通ったとすると、レンズの直後では

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり、レンズの下流 L での軌道のずれ x_L は

$$x_L = x_0 - \frac{1}{f} \cdot x_0 \cdot L \quad (1-44)$$

となる。 $L = f$ とすると、平行な軌道は x_0 によらずすべて $x_L = 0$ で中心軌道に集まり、 f はよく知られた焦点距離の性質をみたしている。

四極磁場を Thin Lens で近似するといっても式(1-35,36)を式(1-41)で直接表わすのではなく、実際には Thin Lens の両側に四極磁場の長さの半分の自由空間をつけ加える。すなわち

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{2f} & L(1 - \frac{L}{4f}) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{L}{2f} \end{pmatrix} \quad (1-45) \end{aligned}$$

となる。この式から Thin Lens 近似は磁石の長さ L が焦点距離 f に比べて小さいという条件でなりたっていることがわかる。

大型計算機の利用が容易になり、軌道計算のプログラムも開発されているので、四極磁石の Thin

Lens 近似は実際の計算には使われなくなったが、手計算で簡単な評価をする場合には有効である。その例として、2つの四極磁石を用いた場合の収束作用を検討してみる。式(1-27, 28)からわかるように、一つの四極磁石は水平、垂直の一方に収束作用を持たせれば他方では、必ず発散作用をする。このような四極磁石を用いてはたして、両方向に収束作用を持たせてビームを遠くまで輸送することが可能かどうかを調べてみる。2つの四極磁石を距離 d だけ離して、 f_F の焦点距離の収束磁石、 $-f_D$ の発散磁石の順で置いたとする。四極磁石の収束、発散は水平方向での作用をもとにしていることを注意しておく。そこで水平と垂直の Transfer Matrix は Thin Lens 近似で

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_D} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-46)$$

$$M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_D} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_F} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-47)$$

となる。収束作用を表わす行列の(2, 1)要素は

$$(M_H)_{21} = \frac{1}{f_D} - \frac{1}{f_F} - \frac{d}{f_F \cdot f_D} \quad (1-48)$$

$$(M_V)_{21} = -\frac{1}{f_D} + \frac{1}{f_F} - \frac{d}{f_F \cdot f_D} \quad (1-49)$$

である。例えば $f_D = f_F$ とすると(2, 1)の要素は両方とも

$$-\frac{1}{f^*} = -\frac{d}{f_F \cdot f_D} \quad (1-50)$$

となり、両方向に収束作用を持たせることができることがわかる。

f. 偏向磁石

偏向磁石について Transfer Matrix を求めることにする。簡単のために一様磁場による Sector 型の水平偏向磁石を考える。Sector 型とは、中心軌道が端面に垂直に入射し、垂直に出ていくもので、図(1-2)のように偏向角が θ_0 であれば、両端面の間の角度も θ_0 である。ここでは、中心軌道を通る粒子の偏向角が θ_0 となる運動量の粒子のみを考え、これよりずれた運動量を持つ粒子の運動は後で扱う。

Sector 型の水平偏向磁石のうちの、図(1-2)で θ と $\theta + \Delta\theta$ にはさまれた微小なくさび型をした部分を考える。中心軌道はこの間で $\Delta\theta$ だけ偏向する。 θ での軌道のずれと傾きを $x(\theta)$ 、 $x'(\theta)$ とする。傾きは中心軌道の回転中心から θ の方向に引いた直線との傾きをとる。まず θ と $\theta + \Delta\theta$ 間での軌道の長さ Δl は

中心軌道に対しては、中心軌道の半径を ρ とすると $\Delta l = \rho \Delta\theta$ であるが、 $x(\theta)$ だけずれていると、この間の軌道の長さは

$$\Delta l = (\rho + x(\theta)) \cdot \Delta\theta \quad (1-51)$$

となる。 $\theta + \Delta\theta$ でのずれ $x(\theta + \Delta\theta)$ は、2次の微少量を除くと

$$\begin{aligned} x(\theta + \Delta\theta) &= x(\theta) + x'(\theta) \cdot \Delta l \\ &\simeq x(\theta) + x'(\theta) \cdot \rho \cdot \Delta\theta \end{aligned} \quad (1-52)$$

となる。一方軌道の傾きの変化に関しては、 $x(\theta)$ だけずれると式(1-51)によりこの間の軌道の長さが $x(\theta) \Delta\theta$ だけ中心軌道より長くなり、この間での偏向角が中心軌道よりも多くなる。このことを考慮すると

$$x'(\theta + \Delta\theta) = x'(\theta) - \frac{x(\theta)}{\rho} \cdot \Delta\theta \quad (1-53)$$

となる。式(1-52, 53)で $\Delta\theta$ が小さいとすると

$$\frac{dx}{d\theta} = \rho \cdot x'(\theta) \quad (1-54)$$

$$\frac{dx'}{d\theta} = -\frac{1}{\rho} x(\theta) \quad (1-55)$$

の連立の微分方程式が得られる。式(1-54)を θ で微分して式(1-55)で $x'(\theta)$ を消去すると

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + x = 0 \quad (1-56)$$

となる。 $\theta = 0$ での初期条件 $x(0)$ 、 $x'(0)$ を用いると、式(1-56)の解は

$$x(\theta) = x(0) \cos \theta + \rho x'(0) \sin \theta \quad (1-57)$$

となり、式(1-54)を用いて

$$x'(\theta) = -\frac{1}{\rho} x(0) \sin \theta + x'(0) \cos \theta \quad (1-58)$$

を得る。そこで θ_0 の偏向角を持つ Sector 型の水平偏向磁石の Transfer Matrix M_H は

$$M_H = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \rho \sin \theta_0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (1-59)$$

と表わすことができる。

式(1-56)で独立変数 θ を軌道の長さ s にとると

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{\rho^2} x = 0 \quad (1-60)$$

になる。これと四極磁石の収束の場合の式(1-27)と比べると、偏向磁石では $K = \frac{1}{\rho^2}$ の強さの収束作用があることがわかる。垂直方向の軌道に対しては、水平方向の磁場がないので影響を与えず、自由空間と同じ Transfer Matrix M_v

$$M_v = \begin{pmatrix} 1 & \rho \theta_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-61)$$

となる。

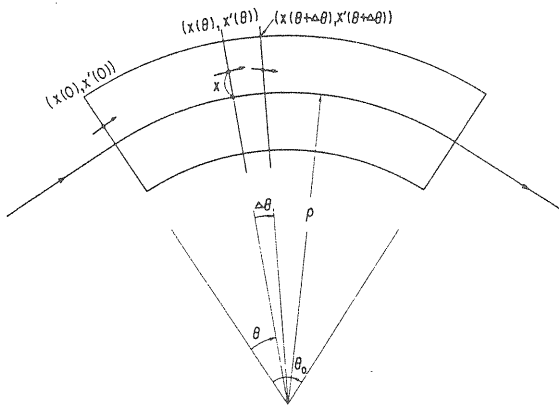


図1-2. Sector型の水平偏向磁石。ビームの中心軌道は磁石の端面に垂直に入射し、端面に垂直に出て行く。軌道のずれは中心軌道の外側に x の正方向を取る。軌道の傾きは、中心軌道の偏向中心からの直線との傾きをとる。 θ と $\theta + \Delta\theta$ 間での軌道のずれと傾きの関係を導く。

g. Edge Focus

Sector型と異なり、中心軌道が偏向磁石の端面と垂直でない場合はどうなるか調べてみる。まず直観的に理解しやすい水平方向を考える。図(1-3)は水平偏向磁石の端部を上から見たもので、中心軌道は一樣磁場の中で、半径 ρ の円を描くとする。点線のように端面がなっていれば、前に扱った垂直入射の場合である。今回は角度 ϵ だけ垂直面とずれている。 ϵ の方向として図の向きを正とする。 x だけずれて入射する粒子に対しては、図の Δl の区間で磁場がない。垂直入射の場合を基準にすると、この部分では偏向磁石と逆の磁場がかかっているとみなせる。

また、 $-x$ で入射する粒子では同様に Δl の区間で余分に偏向磁場がかかっていることになる。そこでこの部分では、 x だけずれて入射する粒子は、垂直入射と

比べて偏向角 $\Delta\theta(x)$

$$\Delta\theta(x) = \frac{\Delta l}{\rho} = \frac{1}{\rho} \tan \epsilon \cdot x \quad (1-62)$$

だけ偏向される。この効果を入射点の垂直面でのみ偏向されるとする Thin Lens 近似をすると、偏向磁石の端面の効果は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \tan \epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (1-63)$$

の Transfer Matrix で表わされる。(2, 1)の要素が正であるから、 $\epsilon > 0$ の場合には、水平方向で発散作用をすることがわかる。同様に、偏向磁石から中心軌道が傾いて出ていく場合も図(1-3)のように ϵ の符号をとれば式(1-63)と同じになる。

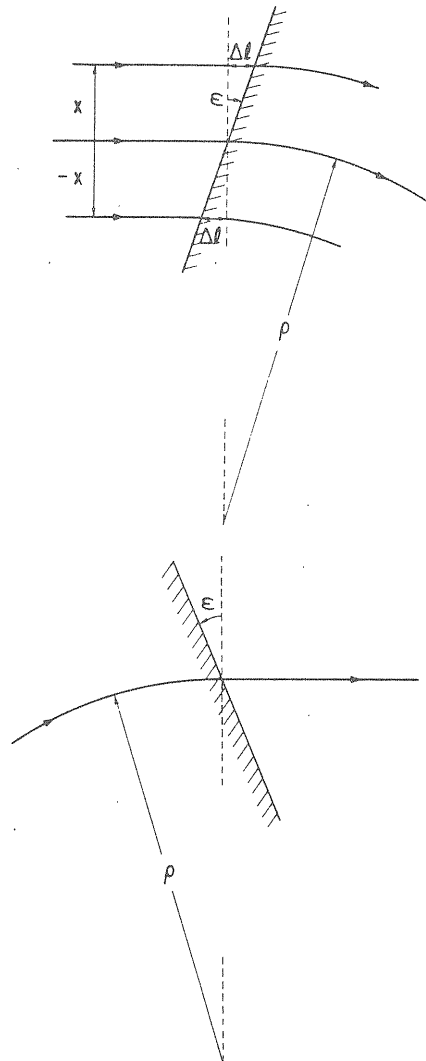


図1-3. 水平偏向磁石の水平方向の Edge Focus.

磁石の端面は中心軌道に対して破線で表わした垂直な面より ϵ だけ傾いている。端面の傾きは、ビームが入る場合と出る場合とで図の向きを正とする。

さて、垂直方向の運動については、図(1-3)を見ると磁場は常にy方向で水平方向の磁場がないので、影響を受けないように考えられるが事実は異なっている。磁場が磁極の中で垂直方向を向き一定で、磁極の外では磁場が急に全くなくなるという水平偏向磁石のモデルでは垂直方向の作用を説明できない。実際の磁石では、磁極の外まで磁場がもれていて、これによって垂直方向の軌道が影響を受ける。図(1-4)の左の図で磁石の端面に垂直な方向の座標nを図の方向に取る。nの軸にそって上下に切断すると図(1-4)の右図で示すようなもれ磁場の分布をしている。対称性から右の図の紙面に垂直な方向には磁場がない。また上下の対称性からy=0ではBn=0であるが、y≠0ではBn≠0でyが小さい所では

$$B_n = \left(\frac{\partial B_n}{\partial y} \right) \cdot y \quad (1-64)$$

と書ける。垂直に入射する場合には、Bnは中心軌道と同じ向きをしていて影響を与えないが、垂直に入射しない場合には粒子にとってBnが水平成分を持つことになる。図(1-4)でビームに対する水平成分Bx(y, s)は

$$\begin{aligned} B_x(y, s) &= -B_n(y, s) \cdot \sin \epsilon \\ &= -\frac{\partial B_n(s)}{\partial y} \cdot y \cdot \sin \epsilon \end{aligned} \quad (1-65)$$

となる。そこで軌道にそって、磁場の水平成分を積分し、積分をsからn(=s/cos ε)に変換すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 B_x(y, s) ds &= -y \cdot \sin \epsilon \int \frac{\partial B_n(s)}{\partial y} ds \\ &= -y \cdot \tan \epsilon \int \frac{\partial B_n(n)}{\partial y} dn \end{aligned} \quad (1-66)$$

となる。ここで Maxwell の方程式

$$\frac{\partial B_n}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial n} = 0 \quad (1-67)$$

を用いると式(1-66)は By(-∞)=0とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 B_x(y, s) ds &= -y \cdot \tan \epsilon \int_{-\infty}^0 \frac{\partial B_y}{\partial n} dn \\ &= -y \tan \epsilon [B_y(0) - B_y(-\infty)] \\ &= -y \cdot B_y(0) \tan \epsilon \end{aligned} \quad (1-68)$$

となる。よってこれによる垂直方向の偏向角 Δθ(y)は

$$\Delta \theta(y) = -y \frac{eBy(0)}{p} \cdot \tan \epsilon = -\frac{\tan \epsilon}{\rho} \cdot y$$

となる。もれ磁場による効果を、すべて端面におし込めてしまうと、傾いて入射した場合の垂直方向への効果は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \tan \epsilon & 1 \end{pmatrix} \quad (1-70)$$

の Transfer Matrix で表わされ、ε > 0では垂直方向に収束作用がある。磁石の外へ出る場合にも、図(1-3)でεの符号をとると同様になる。式(1-63, 70)を比較すると端面の収束の効果は、水平方向と垂直方向で逆になっている。

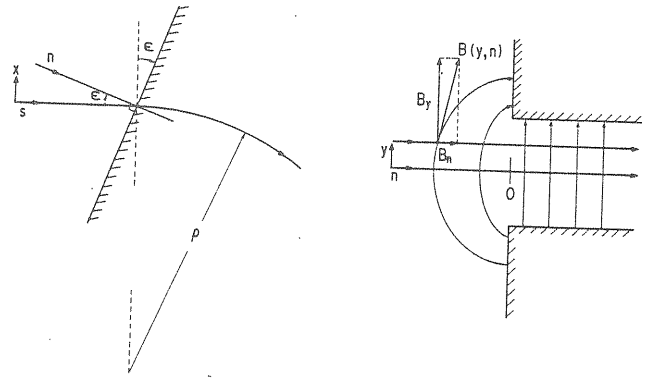


図1-4. 垂直方向の Edge Focus. 左図は水平面内の中心軌道と磁石の端面の関係を表わす。中心軌道にそった座標をsとし、端面に垂直な方向の座標を図の向きにnとする。右図は座標軸nにそって上下に切断した場合の垂直面を示す。上下方向の中心面上では磁場の水平成分はないが、上下にずれるともれ磁場による水平成分 Bn が存在する。中心面上の By は無限遠で零で n=0 から先では一様になると仮定している。しかし実際の磁石では、上下の空隙の半分の距離の程度までは一様でない。

偏向磁石の形でよく使われるのに図(1-5)の長方形がある。磁石を中心軌道に対して対称になるように置くと、中心軌道は偏向角θの半分の角度で端面に入り、同じ角度で出ていく。この場合の長方形水平偏向磁石の Transfer Matrix は、Sector 型の磁石の両側に端面の効果をつけることによって得られる。水平方向の Transfer Matrix M_H は

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \tan \frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \tan \frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (1-71)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-72)$$

となる。水平方向は長さ $\rho \sin \theta$ の自由空間と同じになる。偏向部分で働く収束作用は、両端の発散作用によって、ちょうど打ち消されていることになる。一方垂直方向では、偏向部分に収束発散作用がないので、両端の収束作用が残り、Transfer Matrix M_v は

$$M_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \tan \frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \tan \frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ (1-73)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & \rho \theta \\ -\frac{1}{\rho} \tan \frac{\theta}{2} (2 - \theta \tan \frac{\theta}{2}) & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ (1-74)$$

で与えられる。

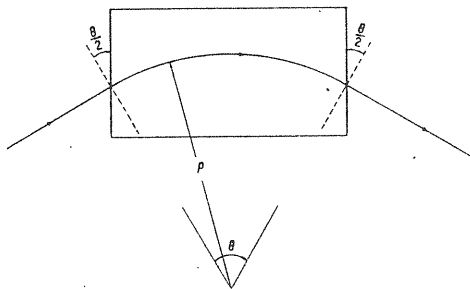


図1-5. 長方形 (Rectangular) 水平偏向磁石。ビームの入口と出口での磁石の端面はお互に平行である。中心軌道は、磁石の端面に対して、偏向角の半分の角度の傾きを持つ。Transfer Matrix は、Sector型磁石の両端に Edge Focus の効果を合成することによって得られる。

h. Phase Space

今まで取り扱った Transfer Matrix は

1. 自由空間
2. 四極磁石
3. Sector 磁石
4. Edge Focus

で、これらの計算と、それらの積の計算ができれば、ビームラインでも円形リングでもすべて線形近似で扱える。ただし運動量のずれによる効果は後で扱うことにする。個々の Transfer Matrix を見ると、これらはすべて行列式が1になっていることがわかる。Matr-

ix の計算のもとになる軌道の方程式は、2階の線形微分方程式で z は x または y を表わすとすると

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K(s)z = 0 \quad (1-75)$$

の形をしていて、 z の一階微分の項をもたない。 $K(s)$ は s の関数であるが、ビームラインや円形リングでは図(1-6)のように区間ごとに一定な値を持つ不連続関数である。自由空間では $K(s)=0$ であり、四極磁石では正又は負の定数である。また Edge Focus のような Thin Lens 近似の場合には Dirac のデルタ関数で表わせばよい。

式(1-75)で、 $z(0)=1$, $z'(0)=0$ の初期条件を持つ解を $C(s)$ とし $z(0)=0$, $z'(0)=1$ となる解を $S(s)$ とする。 $C(s)$, $S(s)$ は式(1-75)の解であるから

$$\frac{d^2 C(s)}{ds^2} + K(s)C(s) = 0 \quad (1-76)$$

$$\frac{d^2 S(s)}{ds^2} + K(s)S(s) = 0 \quad (1-77)$$

がなりたつ。 $C(s)$ と $S(s)$ をみつけると、 $z(0)$, $z'(0)$ の初期条件を持つ解は

$$z(s) = z(0)C(s) + z'(0)S(s) \quad (1-78)$$

$$z'(s) = z(0)C'(s) + z'(0)S'(s) \quad (1-79)$$

と書ける。これを行列で表示すると

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} \\ = M(s) \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} \quad (1-80)$$

となり、 $s=0$ と $s=s$ との間の Transfer Matrix が $M(s)$ で与えられることを示している。そこで行列式が常に1であることを示すには

$$\det M(s) = C(s)S'(s) - C'(s)S(s) \equiv 1 \quad (1-81)$$

を導き出せばよい。式(1-81)を s で微分し式(1-76, 77)を用いると

$$\frac{d}{ds} \det M(s) = C(s)S''(s) - C''(s)S(s) = 0 \quad (1-82)$$

となり、 $\det M(s)$ は常に一定値をとる。 $M(s=0)$ をとると $\det M(0) = 1$ であるから

$$\det M(s) \equiv 1 \quad (1-83)$$

であることがわかる。

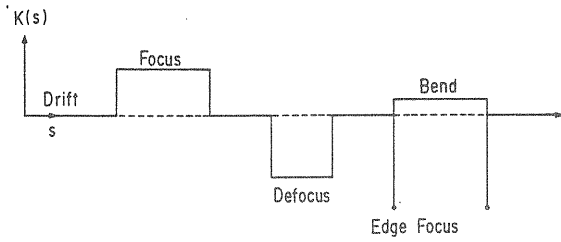


図1-6. 収束の強さを表わす $K(s)$ は、一般には中心軌道にそって長さ s の関数であるが、ビームラインでは $K(s)$ は区間ごとに一定値を取るような関数である。自由空間では $K(s)=0$ で、収束、発散作用に応じて、 $K(s)$ は正または負をとる。また Thin Lens 近似で表わした効果は、Dirac のデルタ関数で表わせる。

次に Transfer Matrix の行列式が常に1であることによって何が導かれるかを考える。まず (z, z') の平面を考えるが、これは位相平面 (Phase Space) と呼ばれる。平面の原点はこの場合、中心軌道を表わし、平面上の点は一つの粒子の軌道を表わしている。今までは Phase Space で一点を取り、この点が軌道にそって Phase Space 上でどのように移動するかを調べた。もうひとつの Phase Space の使い方として、この平面上でビームの分布を表現することができる。1つの粒子に対して、平面上の1点が決まるので、ビームの広がりをビームの粒子の数と同じ数の点の分布として表わせる。この際実際の z 方向のビームの広がり、Phase Space での分布の z 方向への射影となる。

$s=0$ の平面で図(1-7)で示すように dz, dz' のベクトルで作られる微小な平行四辺形を考える。簡単のために $\vec{dz} = (dz, 0)$, $\vec{dz}' = (0, dz')$ とする。この面積はよく知られているように

$$|\vec{dz} \times \vec{dz}'| = dz dz' \quad (1-84)$$

で与えられる。 $s=s$ の Phase Space では $M(s)$ によって、 \vec{dz}, \vec{dz}' はそれぞれ

$$\vec{dZ} = M(s) \cdot \vec{dz} = \begin{pmatrix} C(s) \\ C'(s) \end{pmatrix} dz \quad (1-85)$$

$$\vec{dZ}' = M(s) \cdot \vec{dz}' = \begin{pmatrix} S(s) \\ S'(s) \end{pmatrix} dz' \quad (1-86)$$

に移る。ここで \vec{dZ}, \vec{dZ}' によって作られる平行四辺

形の面積は

$$|\vec{dZ} \times \vec{dZ}'| = [C(s)S'(s) - C'(s)S(s)] \cdot dz dz' \quad (1-87)$$

$$= dz dz' \quad (1-88)$$

となる。すなわち Phase Space の面積は、一定である。また粒子の分布を考え、ある1つの粒子に注目すると、その粒子のまわりの Phase Space での粒子の密度は変わらないことになる。

これまでは粒子の軌道を Transfer Matrix を用い軌道の各点での Phase Space の間での変換として表現してきた。一つの軌道を追いかける方法であった。これで十分ではあるが、次に Phase Space でのビームの分布を扱い、軌道にそってどのように分布が変わるかというふうに表現することもできる。次の章では、ビームラインの粒子の運動を別の方法で表わすことにする。

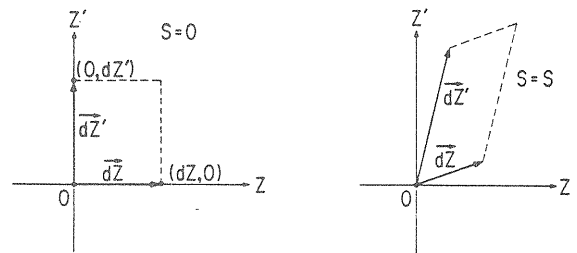


図1-7. 位相平面での変換。 $s=0$ での位相平面で、 \vec{dz}, \vec{dz}' で作られた微小な平行四辺形を考える。 $s=s$ では Transfer Matrix により、 \vec{dz}, \vec{dz}' はそれぞれ、 \vec{dZ}, \vec{dZ}' に移される。このとき \vec{dz}, \vec{dz}' で作られた面積と \vec{dZ}, \vec{dZ}' で作られる面積とは、Transfer Matrix の行列式が1であれば常に等しい。このとき Transfer Matrix による変換は線形変換であるから、 $s=0$ での平行四辺形の内部はすべて $s=s$ の平行四辺形の内部に移される。すなわち位相平面での面積は、変換後も変わらない。 $s=0$ での平行四辺形の内部に点を分布させる。この場合の点は一つの粒子の軌道を表わしている。これらの点すべて $s=s$ の平行四辺形の内部に移される。点の密度を考えると、平行四辺形の面積は変わらないので、一つの粒子に着目して、この粒子の付近での位相平面の粒子密度は不変であることがわかる。位相平面での粒子密度が運動にそって不変であることは Liouville の定理と呼ばれている。

2. Twiss Parameter

a. Parameter の導入

中心からずれた粒子の軌道の方程式は前出の式(1-75)

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K(s)z = 0 \quad (2-1)$$

であった。K(s)が一定である要素ごとに Transfer Matrix を求め、それらをかけあわせることで軌道を求めることができた。式(2-1)でもしK(s)が一定ならばよく知られているように積分定数 A, δ を用いて

$$z(s) = A \cos(\sqrt{K}s + \delta) \quad (2-2)$$

の解を持つ。そこで式(2-1)の解として

$$z(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\Psi(s) + \delta) \quad (2-3)$$

の形で求めてみる。ただし $\beta(s) > 0$ とする。式(2-3)を式(2-1)に代入すると

2つの式

$$2\sqrt{\beta'}\Psi' + \sqrt{\beta}\Psi'' = 0 \quad (2-4)$$

$$\sqrt{\beta}'' - \sqrt{\beta}(\Psi')^2 + K(s)\sqrt{\beta} = 0 \quad (2-5)$$

が得られる。式(2-4)に $\sqrt{\beta}$ をかけると

$$((\sqrt{\beta})^2 \Psi')' = 0 \quad (2-6)$$

となり、積分定数 C を用いて

$$\Psi' = \frac{C}{\beta} \quad (2-7)$$

と書けるが、ここでは $C = 1$ とおくと

$$\Psi' = \frac{1}{\beta} \quad (2-8)$$

すなわち

$$\Psi(s) = \int^s \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2-9)$$

を得る。式(2-8)を式(2-5)に入れると $\beta(s)$ についての式

$$\sqrt{\beta}'' + K(s)\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta^3}} = 0 \quad (2-10)$$

が導かれる。この式を用いて $\beta(s)$ を求めるのは見通しが悪く、後で述べるように実は Transfer Matrix を用いた方が簡単である。とにかく $\beta(s)$ が求められたと

して、これを用いて Transfer Matrix を表現してみる。ここで $\beta(s)$ の微分として

$$\beta'(s) = -2\alpha(s) \quad (2-11)$$

で $\alpha(s)$ を導入する。 $\beta(s)$, $\alpha(s)$, $\Psi(s)$ はそれぞれベータ関数, アルファ関数, ベータトロン位相と呼ばれる。 $s = 0$ で β_0 , α_0 , Ψ_0 とすると式(2-3)で

$$z(0) = A\sqrt{\beta_0} \cos(\Psi_0 + \delta)$$

$$z'(0) = -\frac{A}{\sqrt{\beta_0}} [\alpha_0 \cos(\Psi_0 + \delta) + \sin(\Psi_0 + \delta)] \quad (2-13)$$

となる。一方 $s = s$ では

$$z(s) = A\sqrt{\beta(s)} \cos(\Psi(s) + \delta) \quad (2-14)$$

$$z'(s) = \frac{A}{\sqrt{\beta(s)}} [\alpha(s) \cos(\Psi(s) + \delta) + \sin(\Psi(s) + \delta)] \quad (2-15)$$

である。例えば式(2-14)で

$$\begin{aligned} z(s) &= A\sqrt{\beta(s)} \cos[(\Psi(s) - \Psi_0) + (\Psi_0 + \delta)] \\ &= A\sqrt{\beta(s)} \{ \cos(\Psi(s) - \Psi_0) \cos(\Psi_0 + \delta) - \sin(\Psi(s) - \Psi_0) \sin(\Psi_0 + \delta) \} \end{aligned} \quad (2-16)$$

と変形し、式(2-12, 13)から得られる

$$A \cos(\Psi_0 + \delta) = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} z(0) \quad (2-17)$$

$$A \sin(\Psi_0 + \delta) = -\sqrt{\beta_0} z'(0) - \frac{\alpha_0}{\sqrt{\beta_0}} z(0) \quad (2-18)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} z(s) &= \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) z(0) + \\ &\quad \sqrt{\beta_0 \beta(s)} \sin \Delta\Psi \cdot z'(0) \end{aligned} \quad (2-19)$$

が得られる。ただし位相の進み (Phase Advance)

$\Delta\Psi$ は

$$\Delta\Psi = \Psi(s) - \Psi_0 \quad (2-20)$$

である。式(2-15)についても同様にA, δ を消去するとs=0からs=sへの β , α を用いた Transfer Matrix の表現

$$M(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) & \sqrt{\beta_0 \beta} \sin \Delta\Psi \\ \frac{(1 + \alpha_0 \alpha) \sin \Delta\Psi + (\alpha + \alpha_0) \cos \Delta\Psi}{\sqrt{\beta_0 \beta}} & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (\cos \Delta\Psi - \alpha \sin \Delta\Psi) \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

が得られる。

b. Parameter の意味

ベータ関数を用いることにより、今までは(z(s), z'(s))で粒子軌道を表わしていたのを、今度は $\beta(s)$, $\alpha(s)$ によってビームラインの性質を表わそうとしている。注意しておくことは $\beta(s)$, $\alpha(s)$ は一意には決まらずs=0での初期値によって決定される。 $\beta(s)$, $\alpha(s)$ は一意ではないから式(2-21)のM(s)による表現も一意ではない。すなわちM(s)が決まっても、 $\beta(s)$ は決まらない。 $\beta(s)$, $\alpha(s)$ が何を表わしているのかを考えてみる。式(2-14, 15)を見ると、2つの量z(s), z'(s)を表わすのに $\beta(s)$, $\alpha(s)$, A, δ と4つの量を用いている。当然ながらz(s), z'(s)が決っても4つの量は決められない。しかし $\beta(s)$, $\alpha(s)$ を固定するAと δ は決まってしまう。式(2-14, 15)で $\Psi(s) + \delta$ を消去すると

$$\left(\frac{z}{\sqrt{\beta}}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta} z' + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} z\right)^2 = A^2 \quad (2-22)$$

となる。新しい量rを

$$r \equiv \frac{1}{\beta} (1 + \alpha^2) \quad (2-23)$$

で導入すると、式(2-22)は

$$r z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 = A^2 \quad (2-24)$$

となる。 $\beta > 0$ であり式(2-23)より $r > 0$ だから、式(2-24)は位相平面で楕円を表わしている。楕円の形は β と α によって決まり、 A^2 は楕円の面積に対応している。このように $\beta(s)$, $\alpha(s)$ によって、ビームラインにそって位相平面の楕円がどのように変わるかを記述することができる。Transfer Matrixの行列式が常に1であるから、楕円の面積は常に不変である。

そこで式(2-24)で

$$r z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 = \varepsilon \quad (2-25)$$

と置き、軌道のずれの大きさを表わす ε をCourant-Snyderの不変量と呼ぶ。位相平面の楕円の内部が粒子でつまっているとすると、 ε はエミッタンスと呼ばれビームの広がりを表わす量である。

まず楕円の形と β , α の関係を調べてみる。式(2-14, 15)でsを固定して、 $A = \sqrt{\varepsilon}$ と置き、 $t = \Psi(s) + \delta$ とし、tをパラメータとして楕円を表示する。

$$z = \sqrt{\varepsilon \beta} \cos t \quad (2-26)$$

$$z' = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} [\alpha \cos t + \sin t] \quad (2-27)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

zが最大となるのは、 $t = 0$ で

$$z_{\max} = \sqrt{\varepsilon \beta} \quad (2-28)$$

であり、楕円が粒子でつまっていたとすると、 z_{\max} は実空間でのz方向のビームの半巾を与える。このときz'は

$$z' = -\alpha \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \quad (2-29)$$

となる。また式(2-27)からz'の最大は

$$z'_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta}} \sqrt{1 + \alpha^2} = \sqrt{\varepsilon r} \quad (2-30)$$

で、実空間でのビームの角度の広がり半巾を与える。

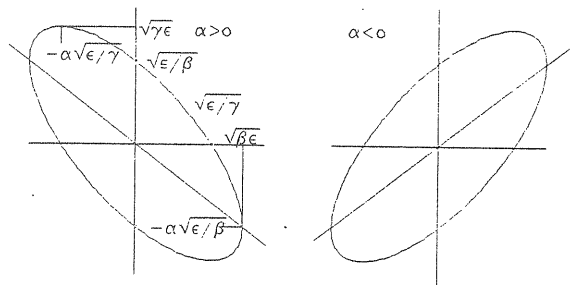


図2-1. $r z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 = \varepsilon$ で与えられる楕円の形。左図は $\alpha > 0$ で、右図は $\alpha < 0$ の場合である。楕円の周上でのz, z'の最大及び座標軸と楕円が交わる位置を示す。

その他の主要な位置を計算すると図(2-1)の楕円が得られる。 $\alpha < 0$ では左に傾いた楕円で、 $\alpha > 0$ では右に傾いている。 β はビームの太さを表わしていて α は式(2-11)からわかるように、 β の変化を示す。たとえば $\alpha > 0$ では β は小さくなりつつあることを示す。楕円の面積は、式(2-25)を用いて計算すると $\pi \epsilon$ となる。注意することは、エミッタンスは位相平面の面積と π だけ係数が異なる。しばしばエミッタンスと称して π をつけて、例えば $\epsilon_H = 100 \pi$ mm-mradと表示することがある。このときはエミッタンスとして位相平面の面積を表わしているのである。

c. Parameter の変換

次に、Transfer Matrix がわかっているときに、 $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ がどう変換されるかを調べる。 $\beta(s)$ を求めるには式(2-10)を解くよりも、この方法の方が容易である。 $s=0$ と $s=s$ 間の Transfer Matrix を $M(s) = (m_{ij})$ とする。 $s=0$ で、 β_0 、 α_0 、 r_0 とすると

$$r_0 z_0^2 + 2\alpha_0 z_0 z_0' + \beta_0 z_0'^2 = \epsilon$$

の楕円は $s=s$ では

$$r z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 = \epsilon$$

の楕円に変換される。 $M(s)$ の逆行列 $M^{-1}(s)$ を用いると

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix} = M^{-1}(s) \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} \quad (2-33)$$

と書けるが、 $\det M(s) = 1$ であるから

$$M^{-1}(s) = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \quad (2-34)$$

であることが簡単にたしかめられる。式(2-33, 34)を用いて、 z_0 、 z_0' を z 、 z' で書いて式(2-31)に代入し、式(2-32)と係数を比較すると、 β 、 α 、 r の変換公式

$$\begin{pmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \\ r(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & 1+2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \quad (2-35)$$

が得られる。式(2-21)から

$$m_{11} = \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\cos \Delta\psi + \alpha_0 \sin \Delta\psi) \quad (2-36)$$

$$m_{12} = \sqrt{\beta_0 \beta(s)} \sin \Delta\psi \quad (2-37)$$

であるが、これらで $\beta(s)$ を消去すると、 $s=0$ と $s=s$ 間の位相の進み $\Delta\psi$ が

$$\tan \Delta\psi = \frac{m_{12}}{m_{11} \beta_0 - m_{12} \alpha_0} \quad (2-38)$$

で求められる。注意することは位相の進みは $M(s)$ だけでは決まらず、 β_0 、 α_0 にも依存する。ただし $m_{12} = 0$ の場合には $\Delta\psi$ は π の整数倍になる。

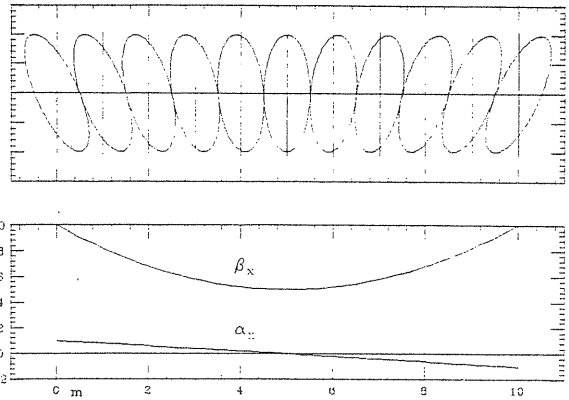


図2-2. 自由空間での β 、 α 及び、楕円の形の変化。初期条件は $B_x = 10\text{m}$ 、 $\alpha_x = 1.0$ で、5 m下流で、 $\alpha_x = 0$ となり、 B_x は最小となる。

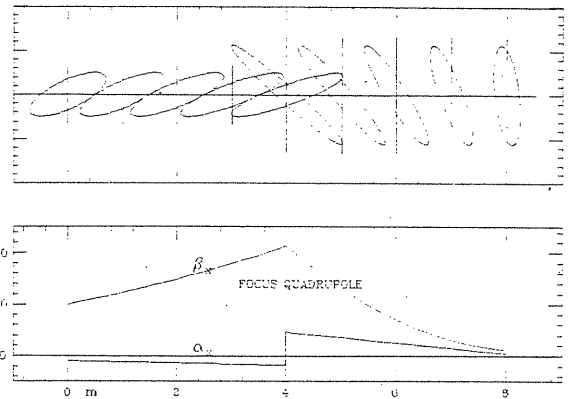


図2-3. Thin Lens で近似された収束四極磁石による β 、 α 及び楕円の形の変化。初期条件は $\beta_x = 10\text{m}$ 、 $\alpha_x = -1.0$ で、4 m下流に焦点距離が、3.3mの収束磁石を置く。磁石の前後で α_x の値が変化し、位相平面では、楕円が時計まわりに回転する。

重要な例として、自由空間では

$$M(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-39)$$

で

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \beta_0 - 2\alpha_0 s + r_0 s^2 \\ \alpha(s) &= \alpha_0 - r_0 s \\ r(s) &= r_0\end{aligned}\quad (2-40)$$

である。 $\alpha_0 > 0$ とすると、図(2-2)のように、 $s = \alpha_0 / r_0$ まで β が小さくなり、それより先では β はどんどん大きくなっていく。次の例として Thin Lens 近似の収束磁石を扱う。磁石の前後で 0 と 1 の記号をつけると、収束磁石の Transfer Matrix は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}\quad (2-41)$$

で

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_0 \\ \alpha_1 &= \alpha_0 + \frac{1}{f} \beta_0 \\ r_1 &= r_0 + \frac{2}{f} \alpha_0 + \frac{1}{f^2} \beta_0\end{aligned}\quad (2-42)$$

である。例えば $\alpha_0 < 0$ で広がりつつあったビームは、図(2-3)のように $\frac{1}{f}$ が十分大きければ、四極磁石の後では $\alpha_1 > 0$ とすることができ、 β は徐々に小さくなる。

3. Dispersion

a. 偏向磁石

今までは、粒子の運動量はすべて中心軌道を通る粒子の運動量と同じであるとしてきた。運動量のずれた粒子の軌道がどうなるかを調べる。前に扱った Sector 型の水平偏向磁石を考え、 θ と $\theta + \Delta\theta$ 間での運動を考える。ただし今回は偏向磁石の磁場は一様でなく水平方向に傾きを持っているとする。中心軌道にそって一定磁場で、傾きも中心軌道にそって一定とする。すなわち

$$B_y = B_0 + g \cdot x\quad (3-1)$$

とする。四極磁場の場合と同様に、Maxwell 方程式を満足するために水平方向の磁場

$$B_x = g \cdot y\quad (3-2)$$

を必ず伴っている。垂直磁場の強さに傾きのある偏向磁石は中心軌道を偏向させるとともに、同時に収束発散作用を持つことができる。粒子の運動量を、中心軌道を通る粒子の運動量 p より Δp 大きい $p + \Delta p$ であ

るとする。水平方向の運動では θ と $\theta + \Delta\theta$ での位置と傾きの関係は

$$x(\theta + \Delta\theta) = x(\theta) + x'(\theta) \cdot \rho \cdot \Delta\theta\quad (3-3)$$

$$\begin{aligned}x'(\theta + \Delta\theta) &= x'(\theta) - \frac{x}{\rho} \Delta\theta - \frac{g \cdot x}{E_0} \Delta\theta + \\ &\frac{\Delta p}{p} \Delta\theta\end{aligned}\quad (3-4)$$

で表わされる。式(3-4)の右辺の第2項は、 x だけずれたために中心軌道よりも θ と $\theta + \Delta\theta$ 間での軌道が長くなっている効果を示す。第3項は磁場の強さが中心軌道と異なっているために偏向角が変わる効果で、第4項は運動量がずれたためにこの間での偏向角がもともとの $\Delta\theta$ と異なるという効果を表わしている。ここで磁場の傾きを

$$\frac{g}{B_0} = \frac{n}{\rho}\quad (3-5)$$

と置いて、式(3-3, 4)を微分方程式におおすと

$$\frac{dx}{d\theta} = x' \cdot \rho\quad (3-6)$$

$$\frac{dx'}{d\theta} = -\frac{1}{\rho} (1+n)x + \frac{\Delta p}{p}\quad (3-7)$$

となり、 x' を消去すると

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + (1+n)x - \frac{\Delta p}{p} \rho = 0\quad (3-8)$$

が得られる。ここから先で注意することは、今回は $1+n$ の符号により水平方向で、収束になる場合と発散になる場合がある。

i) $1+n > 0$

式(3-8)を

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\theta^2} \left[x - \frac{\rho}{1+n} \frac{\Delta p}{p} \right] + (1+n) \left[x - \frac{\rho}{1+n} \frac{\Delta p}{p} \right] \\ = 0\end{aligned}\quad (3-9)$$

と書きかえると、式(3-9)の解は

$$\begin{aligned}x(\theta) - \frac{\rho}{1+n} \frac{\Delta p}{p} &= \left(x(0) - \frac{\rho}{1+n} \frac{\Delta p}{p} \right) \cos \sqrt{1+n} \theta \\ &+ \frac{\rho}{\sqrt{1+n}} x'(0) \sin \sqrt{1+n} \theta\end{aligned}\quad (3-10)$$

$$x'(\theta) = -\frac{\sqrt{1+n}}{\rho} \left(x(0) - \frac{\rho}{1+n} \frac{Dp}{p} \right) \sin \sqrt{1+n} \theta + x'(0) \cos \sqrt{1+n} \theta \quad (3-11)$$

となる。 $\frac{Dp}{p}$ も1つの初期値とみなして、これらを3×3の行列で書きなおし、全偏向角を θ_0 とすると

$$\begin{pmatrix} x(\theta_0) \\ x'(\theta_0) \\ Dp/p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{1+n} \theta_0 & \frac{\rho}{1+n} (1 - \cos \sqrt{1+n} \theta_0) & 0 \\ -\frac{\sqrt{1+n}}{\rho} \sin \sqrt{1+n} \theta_0 & \frac{1}{\sqrt{1+n}} \sin \sqrt{1+n} \theta_0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ \frac{Dp}{p} \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

となる。この行列は分散の入った Transfer Matrix と呼ばれている。分散の入った Transfer Matrix の合成も、今までと同様に行列の積で行うことができる。上の行列の(1, 3)と(2, 3)の要素が、運動量のずれによる軌道の変化を与える。式(3-12)で $n=0$ とおくと、一様な Sector 型の水平偏向磁石の Transfer Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \rho \sin \theta_0 & \rho (1 - \cos \theta_0) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

になる。

ii) $1+n=1-|n|<0$

この場合には水平方向に発散作用を持ち、i)と同様な計算をすると、Transfer Matrix

$$M_H = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{|n|-1} \theta_0 & \frac{\rho}{\sqrt{|n|-1}} \sinh \sqrt{|n|-1} \theta_0 \\ \frac{\sqrt{|n|-1}}{\rho} \sinh \sqrt{|n|-1} \theta_0 & \cosh \sqrt{|n|-1} \theta_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\rho}{|n|-1} (\cosh \sqrt{|n|-1} \theta_0 - 1) \\ \frac{1}{\sqrt{|n|-1}} \sinh \sqrt{|n|-1} \theta_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

が得られる。

垂直方向の運動では式(3-4)の右辺で第2項と4項に対応するものがなく

$$\frac{dy}{d\theta} = y' \cdot \rho \quad (3-15)$$

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{n}{\rho} y \quad (3-16)$$

で y' を消去すると

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} - n y = 0 \quad (3-17)$$

となる。これは四極磁石の場合の式と同じで、 n の符号により収束または発散になる。例えば $n>0$ で発散の場合には Transfer Matrix は

$$M_v = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{n} \theta_0 & \frac{\rho}{\sqrt{n}} \sinh \sqrt{n} \theta_0 & 0 \\ \frac{\sqrt{n}}{\rho} \sinh \sqrt{n} \theta_0 & \cosh \sqrt{n} \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-18)$$

となる。注意することは垂直方向では、(1, 3)と(2, 3)の要素がないので運動量のずれによる軌道のずれはない。

b. 分散関数

以上調べたように、粒子の運動量が基準となる運動量よりずれていると、水平偏向磁石では水平方向に軌道がずれる。運動量のずれによって軌道がどれだけずれるかを表わす量として分散関数(Dispersion Function)がある。運動量のずれによる中心軌道からの位置のずれ Δx 、傾きのずれ $\Delta x'$ とすると

$$\Delta x = \eta \cdot \frac{Dp}{p} \quad (3-19)$$

$$\Delta x' = \eta' \cdot \frac{Dp}{p} \quad (3-20)$$

で、2つの関数 $\eta(s)$ 、 $\eta'(s)$ を定義する。分散の入った Transfer Matrix の式

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \Delta p/p \end{pmatrix} = M(s) \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ \Delta p/p \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

で、

$$x(s) = \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (3-22)$$

$$x'(s) = \eta'(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (3-23)$$

と置くと、 $\eta(s)$ 、 $\eta'(s)$ の変換式

$$\begin{pmatrix} \eta(s) \\ \eta'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = M(s) \cdot \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \eta'(0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3-24)$$

が得られる。

式(3-12)に戻って、 θ_0 が小さいとすると、(1, 3)と(2, 3)の要素は

$$m_{13} \simeq 0 \quad (3-25)$$

$$m_{23} \simeq \theta_0 \quad (3-26)$$

となる。 $\eta(0)=0, \eta'(0)=0$ として式(3-24)を使うと、偏向磁石を通ることによる η 、 η' の変化量は

$$\Delta \eta \simeq 0 \quad (3-27)$$

$$\Delta \eta' \simeq \theta_0 \quad (3-28)$$

となる。すなわち偏向磁石で θ_0 偏向させると、ほぼ同じ量の η' が発生することがわかる。 η' の発生は中心軌道を偏向させる場合に起こるので、四極磁石、自由空間及び水平偏向磁石での垂直方向では分散の入った Transfer Matrix は、(1, 3)と(2, 3)の分散の要素を持たない。式(3-24)が示すように、分散の要素を持たない場合には、 η 、 η' は分散の入らない Transfer Matrix による軌道の変換と同じである。分散の要素があると、そこで η 、 η' が発生する。注意することはビームラインでは、 η 、 η' は前に扱った $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ と同じように初期条件によっている。

c. ビーム巾

ビームラインにそって $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ 及び $\eta(s)$ 、 $\eta'(s)$ がわかった時のビーム巾が分散によってどう変わるか調べてみる。ビームの半巾 W はエミッタンスを ϵ とすると式(2-28)

$$W = \sqrt{\epsilon \beta(s)} \quad (3-29)$$

となるが、 $\eta \neq 0$ で運動量の広がり $\Delta p/p$ があるとビームの半巾は

$$W = \sqrt{\epsilon \beta + \eta \Delta p/p} \quad (3-30)$$

となるか、エミッタンスの分布と運動量の広がりガウス分布をしている場合には

$$W^2 = \epsilon \beta + \left(\eta \cdot \frac{\Delta p}{p} \right)^2 \quad (3-31)$$

となる。ビームラインで中心軌道を偏向すると η が発生し運動量の広がりによるビーム巾の増加が著しくなることがある。

4. リング

a. 安定性と固有な Twiss Parameter

円形をした加速器では、通常対称性を持っていて同じ構成を持つビームラインのくり返しになっている。対称性を持っていなくても回わっているビームにすれば同じリングをまわるわけであるから、同じ構成のビームラインを多数回まわることになる。ビームが一度しか通らないものとして、今まではビームラインを扱ってきた。このようなビームラインでは $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ 及び $\eta(s)$ 、 $\eta'(s)$ は任意で、ビームラインの開始点の初期値によって決まるものであった。ところが、リングのように同じ構成をくり返し通る場合には、基本となるビームラインの持つ固有の $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ 及び $\eta(s)$ 、 $\eta'(s)$ が重要である。固有の $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ とは基本となるビームラインの初期値が β_0 、 α_0 であれば、ビームラインの最終値も β_0 、 α_0 となるものである。基本となるビームラインがつながっているわけであるから、最終値は次の基本となるビームラインの初期値にもなっている。すなわち $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ はリングと同じ対称性を持つことになる。

固有の β 、 α を求めてみる。基本となるビームラインの入口から出口までの Transfer Matrix を $M = (m_{ij})$ とする。入口と出口で β と α は一致しているから、式(2-21)で $\beta = \beta_0$ 、 $\alpha = \alpha_0$ と置くと

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_0 \sin \mu & \beta_0 \sin \mu \\ -\gamma_0 \sin \mu & \cos \mu - \alpha_0 \sin \mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-1)$$

が得られる。ここで μ は基本となるビームラインの位相進みである。

まず式(4-1)を書きかえて

$$M = I \cdot \cos \mu + J \cdot \sin \mu \quad (4-2)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -r & -\alpha \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

とする。IとJは、 $\beta r - \alpha^2 = 1$ であるから、次の性質を持つ。

$$I^2 = I, \quad J^2 = -I, \quad IJ = JI = J \quad (4-4)$$

これらを使うと、基本となるビームラインを2つ通ることによる Transfer Matrix は、Mを2個かけることになり

$$M^2 = (I \cos \mu + J \sin \mu)^2 = I \cos 2\mu + J \sin 2\mu \quad (4-5)$$

となる。N個通ると、同様に

$$M^N = I \cos N\mu + J \sin N\mu \quad (4-6)$$

となる。入口で (x_0, x'_0) の軌道は、Mをかけることによって次々と基本となるビームラインの入口での軌道に変換される。もしMが式(4-2)の形になっていけば、式(4-6)が示すように基本となるビームラインを何回通っても軌道は中心軌道のまわりを振動するだけで大きくなることはなく安定である。このような中心軌道のまわりの振動をベータatron振動という。リングがN個の基本となるビームラインで構成されていたとすると、一周の位相の進みは $N\mu$ になるが、これを 2π で割ったものをベータatron振動数 ν

$$\nu = \frac{N\mu}{2\pi} \quad (4-7)$$

と呼んでいる。 ν はリング一周あたりベータatron振動を何回するかを表わしている。

式(4-1)で

$$\text{Tr}(M) = m_{11} + m_{22} = 2 \cos \mu \quad (4-8)$$

となるが、もし

$$|\text{Tr}(M)| \leq 2 \quad (4-9)$$

であれば式(4-8)をみたく実数の μ が存在し、ベータatron振動は安定である。逆に $|\text{Tr}(M)| > 2$ であれば、 μ は純虚数になり不安定になる。そこでリングの安定条件は、基本となるビームラインの Transfer Matrix が式(4-9)を満足することである。

軌道が安定で、式(4-8)で実数の μ が見つかったとすると、式(4-1)から基本となるビームラインの入口での固有な β_0, α_0, r_0 は

$$\beta_0 = m_{12} / \sin \mu$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} (m_{11} - m_{22}) / \sin \mu$$

$$r_0 = -m_{21} / \sin \mu$$

$$(4-10)$$

となる。ビームラインの初期値が求まったから、ビームラインの途中の $\beta(s), \alpha(s)$ はそこまでの Transfer Matrix を用い式(2-35)で計算すればよい。

b. 基本 Cell 構造

最も簡単な例として、基本となるビームラインが収束と発散の2つの四極磁石で構成されている場合を考える。計算は Thin Lens 近似を用いる。図(4-1)のように磁石間の距離をLとし、収束と発散の焦点距離を $f_F, -f_D$ とする。収束磁石の入口から次の入口までの、水平と垂直方向の Transfer Matrix は

$$M_H = \begin{pmatrix} 1 + v - 2u - uv & L(2 + v) \\ \frac{1}{L}(v - u - uv) & 1 + v \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

$$M_V = \begin{pmatrix} 1 - v + 2u - uv & L(2 - u) \\ \frac{1}{L}(-v + u - uv) & 1 - v \end{pmatrix} \quad (4-12)$$

となる。ただし

$$u = \frac{L}{f_F} > 0, \quad v = \frac{L}{f_D} > 0 \quad (4-13)$$

と置いた。そこで水平方向と垂直方向の両方で安定のための条件は

$$|\text{Tr}(M_H)| = |2 + 2v - 2u - uv| < 2 \quad (4-14)$$

$$|\text{Tr}(M_V)| = |2 + 2u - 2v - uv| < 2 \quad (4-15)$$

となる。適当な頭の体操で $u-v$ 平面で安定な領域を求めると、図(4-2)になる。

この図はその形からネクタイ・ダイアグラムと呼ばれていて、内部では原理的に軌道は安定である。しかしリング一周のベータatron振動数が、整数または半整数のときに、偏向磁場、四極磁場の誤差により軌道が不安定になることが知られている。そこで実際には、安定域の内部に、細い線状の不安定域がある。詳しく

は、以前の夏の学校の講義を参照すること。

ここでは、リングのモデルとしてまず $\mu_x = \mu_y = \frac{\pi}{2}$ をとる。式(4-11, 12)と式(4-8)から、 u, v を求める式は

$$2 + 2y - 2u - uv = 0 \quad (4-16)$$

$$2 + 2u - 2v - uv = 0 \quad (4-17)$$

で、 $u = v = \sqrt{2}$ とすればよい。具体的に式(4-11, 12)の M_H, M_V は

$$M_H = \begin{pmatrix} -1 - \sqrt{2} & L(2 + \sqrt{2}) \\ -\frac{2}{L} & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4-18)$$

$$M_V = \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} & L(2 - \sqrt{2}) \\ -\frac{2}{L} & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

である。収束磁石の入口での固有の β_0, α_0 は式(4-10)を用いて

$$\begin{aligned} \beta_{x_0} &= 2L(1 + \sqrt{2}) \\ \alpha_{x_0} &= -1 - \sqrt{2} \end{aligned} \quad (4-20)$$

$$\begin{aligned} \beta_{y_0} &= 2L(\sqrt{2} - 1) \\ \alpha_{y_0} &= -1 + \sqrt{2} \end{aligned} \quad (4-21)$$

となる。 L を 5m としてこの初期値をもとに、基本のビームラインの β, α を式(2-35)で計算したものを図(4-3)に示す。2つの四極磁石で構成されている基本構造は Cell と呼ばれている。

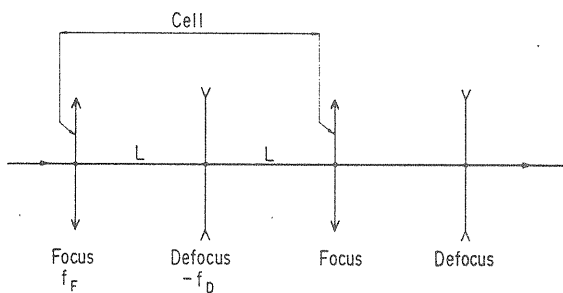


図4-1. 収束と発散の四極磁石を配置する。四極磁石の効果は Thin Lens 近似を用いる。収束と発散の2つの四極磁石の組み合わせが基本となっている場合に、この構造を Cell という。この場合には一つの Cell として、収束磁石の入口から次の収束磁石の入口までを取る。

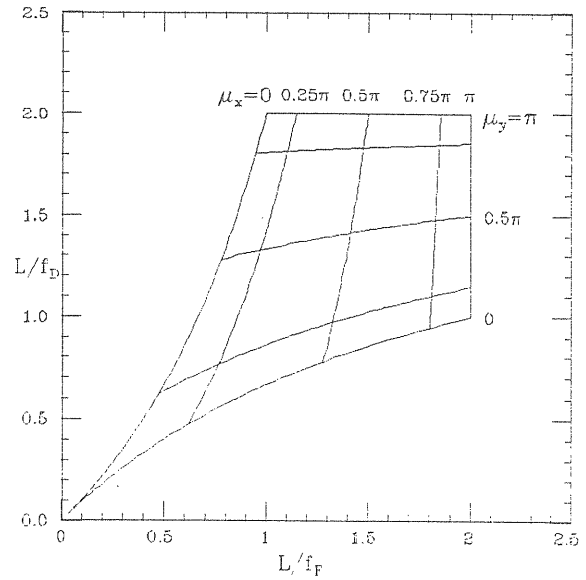


図4-2. Thin Lens で構成された Cell での、ビームの安定領域。ネクタイの形をした内部が安定である。一つの Cell での位相の進み、 μ_x, μ_y は 0 から π までで、位相の進みが一定となる曲線も示す。

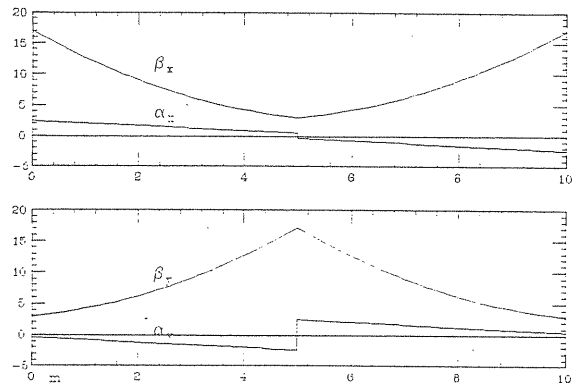


図4-3. $\mu_x = \mu_y = \frac{\pi}{2}$ となる一つの Cell の β と α の変化。 β_x は収束磁石で最大になり、発散磁石で最小となる。 β_y は β_x と逆になる。 μ_x, μ_y が変わっても、 β, α の変化は定性的に変らない。

c. モデル・リングへの入射

$\frac{\pi}{2}$ の位相進みの Cell を 20 個つなげてリングを作る。このとき、一周の位相進みは 10π で、ベータトロン振動数は 5 で整数になってしまう。整数になるのをさけるために、 μ_x を $\frac{\pi}{2}$ よりわずかに増やして、例えばベータトロン振動数が 5.25 となるようにする。このとき $\mu_x = 0.525\pi$ とすればよい。 μ_x が変化したので β_0, α_0 も式(4-20, 21)と異なるが、定性的には図(4-3)と変らない。このモデルリングを用いて、リングへの入射を考えてみる。

20個の Cell のうちの、特定の一つの収束磁石の直前をO点とし、ここを入射の原点とする。ここでの固有な β , α を β_0 , α_0 とする。まず何らかの方法で、O点で中心軌道から (x_0, x_0') の所に粒子を入射したとして、その後の運動を追跡してみる。式(2-21)を用いるとある点Sでの軌道のずれは

$$x_s = \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta_0}} (\cos \Delta\Psi + \alpha_0 \sin \Delta\Psi) x_0 + \sqrt{\beta_0 \beta(s)} \sin \Delta\Psi \cdot x_0' \quad (4-22)$$

で与えられる。 $\beta(s)$ はSでの β_x で、 $\Delta\Psi$ はO点からS点までの粒子の運動にそっての位相進みであり、リング一周毎に $2\pi\nu_x$ ずつ増加するように取る。まず式(4-22)からわかることは、軌道のずれはその点の $\sqrt{\beta(s)}$ に比例する。図(4-3)からわかるように収束磁石の近くで振巾が大きく、発散磁石の近くで振巾が小さい。そこでリングでの振動の振巾は $\sqrt{\beta(s)}$ で規格化しなければならないが、まさにこの目的のために、振巾を表わす量として Courant-Snyder 不変量が導入されたのであった。一方、リングではある有限の振巾をもった粒子しかまわることはできない。収束磁石の近くで振巾が大きくなるから、リングでの最大振巾は収束磁石の有効径によって決まっていることが多い。リングで安定にまわれる最大振巾に対応する不変量をアクセプタンスと呼ぶ。リングのアクセプタンスより小さなエミッタンスを持ったビームは必ず安定にまわる事ができる。

簡単のために、式(4-22)で $x_0=0$ として、入射されたビームの軌道を図(4-4)で示す。中心軌道のまわりに振動しながらリングをまわる。この振動をベータトロン振動というのであった。次に、一ヶ所でベータトロン振動を観察する。 $x_0=0$ の条件で入射するとO点での軌道のずれと傾きは

$$x_s = \beta_0 \sin \Delta\Psi \cdot x_0' \quad (4-23)$$

$$x_s' = (\cos \Delta\Psi - \alpha_0 \sin \Delta\Psi) x_0' \quad (4-24)$$

で、Nターン後では

$$\Delta\Psi = 2\pi\nu_x \cdot N \quad (4-25)$$

である。式(4-23, 24)で $\Delta\Psi$ を消去すると

$$\gamma_0 x_s^2 + 2\alpha_0 x_s x_s' + \beta_0 x_s'^2 = \epsilon = \beta_0 x_0'^2 \quad (4-26)$$

となる。すなわち、 x_s, x_s' はO点での位相平面で、

固有な β_0, α_0 で決められた楕円の周上を移動する。楕円の大きさは入射時のずれに対応した振動の大きさの不変量 ϵ によって決まる。 $x_0 \neq 0$ の場合には、式(4-26)の不変量を

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x_0' + \beta_0 x_0'^2 = \epsilon \quad (4-27)$$

と置けばよい。O点の位相平面での楕円の周上の移動量は、 ν_x の端数部に関係していて、リングの回転数が端数部の逆数になると、粒子の軌道が楕円の周上を一周する。この例では端数が0.25であるから、4周リングをまわるとともに戻ることになる。一般のS点についても、入射条件によって振動の不変量 ϵ 、式(4-27)が決まると、粒子軌道はSでの位相平面上で、Sでの固有な β, α によって決まる楕円

$$\gamma x_s^2 + 2\alpha x_s x_s' + \beta x_s'^2 = \epsilon \quad (4-28)$$

の周上を動くことになる。

1個の粒子が入射された場合の軌道を調べたが、入射ビームが位相平面上で広がりを持っている場合を考える。このときビームがエミッタンスを持っているという言い方をするが、エミッタンスが楕円の大きさを示す不変量を表わす場合と、楕円の形そのものを表わす場合がある。前者の表現ではエミッタンスは不変であるが、後者の場合には例えば、O点での入射ビームのエミッタンスの形と言うことがある。アクセプタンスについても同じような使い方がされることを注意しておく。そこで入射ビームのO点でのエミッタンスの形が、そこで固有な β_0, α_0 で決まる楕円と相似で

$$\gamma_0 x^2 + 2\alpha_0 x x' + \beta_0 x'^2 = \epsilon_0 \quad (4-29)$$

であったとする。このときこの楕円に含まれる点 (x, x') について振動の不変量 ϵ をO点で

$$\epsilon = \gamma_0 x^2 + 2\alpha_0 x x' + \beta_0 x'^2 \quad (4-29)$$

を用いて計算すると、振巾の最大を示す ϵ の最大はちようど ϵ_0 になっている。このとき入射後のビームの振巾が最小になっている。これに反して、入射ビームがO点で β_0, α_0 の楕円と相似でなければ式(4-30)の最大 ϵ は ϵ_0 より大きくなる。入射ビームのエミッタンスを含む、 β_0 と α_0 の固有な楕円の大きさが最大振巾を決める。図(4-5)でO点に相似でないエミッタンスのビームが入射した場合、O点での位相平

面での様子を示す。

入射ビームのエミッタンスが、リングのアクセプタンスより十分小さくない場合には、ビーム中心が入射後になるべく振動しないように調整することは当然であるが、位相平面でエミッタンスをアクセプタンスとあわせる必要がある。この操作を位相平面でのマッチングと呼んでいる。楕円の形は2つのパラメータを持っているから、水平、垂直のうち片方のマッチングのためには、2台の四極磁石を必要とする。マッチングにはこの他にリングと入射路の η , η' を一致させる分散のマッチングがある。

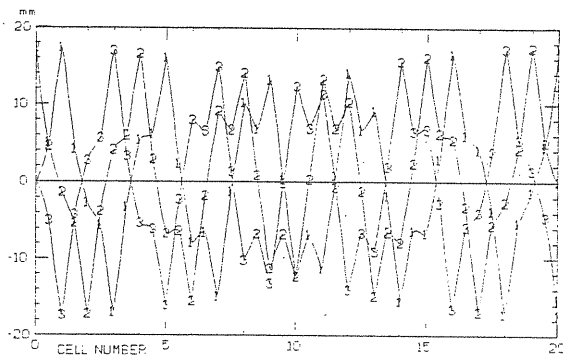


図4-4. 20個のCellをつないで、モデルリングを作る。 $\nu_x = 5.25$ とした場合に、 $x_0' = 1$ mradの角度の入射エラーがある粒子のその後の各四極磁石での軌道のずれ。数字はリングでの回転数を表わし、1回転するまでを1とする。粒子は中心軌道のまわりをベータトロン振動をしながら、リングを回転する。

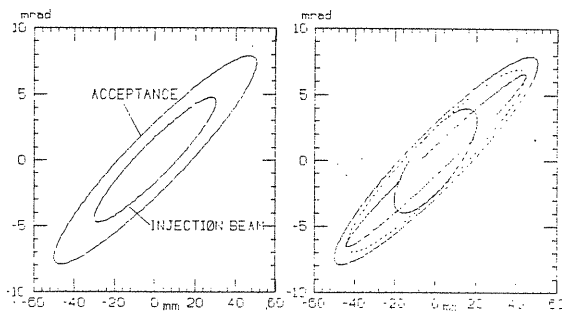


図4-5. 入射点のアクセプタンスの中を50mmとすると、入射点での固有な楕円と相似なアクセプタンスの形は左図のようになる。入射ビームのエミッタンスの形がアクセプタンスと相似であれば、入射ビームがリングをまわるのに必要なアパーチャはちょうど入射ビームのエミッタンスと一致する。しかし同じエミッタンスの大きさを持っているが、形がアクセプタンス相似でなければ、入射ビームが安定にまわるには右図のように、破線で示された大きさのアパーチャを必要とする。

d. バンプ軌道

リングへの入射や、取り出しの際に、リングの一部で故意にビームの中心軌道を、もとの中心からずらすことがある。磁石を用いて軌道をずらすのが、時間的にゆっくりと軌道をずらすような場合にはバンプ磁石と呼び、パルスのにずらす場合にはキッカー磁石と呼んでいる。バンプ軌道の外では、中心軌道は変わらない。一例として3台の磁石を用いる場合を考える。図(4-6)で1, 2, 3, の位置に磁石を置き、そこでの

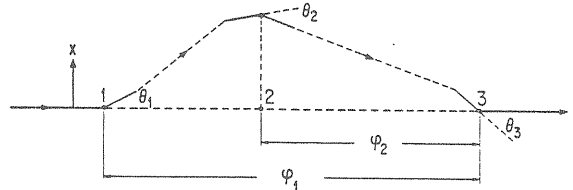


図4-6. 図で1, 2, 3の位置に置いた偏向磁石を用いて、ビームの中心軌道をもとの中心軌道からずらすことができる。もとの中心軌道からずらされたビームの中心軌道をバンプ軌道と呼んでいる。偏向磁石の効果は Thin Lens 近似を用いて表わし、各位置での偏向角を θ_1 , θ_2 , θ_3 とし、1から3及び2から3の間の位相の進みを φ_1 , φ_2 とし、バンプ軌道が1と3の間で閉じる条件を求める。軌道が閉じるとは、ビーム軌道が1と3の間でのみずらされ、それ以外では全くずれないようになることをいう。

偏向角 θ や β , α に同じ数字をつける。1から3と2から3の間の位相の進みを φ_1 , φ_2 とする。このとき、1の位置まで中心軌道を通ってきたビーム中心は、 θ_1 , θ_2 の偏向を受け3の位置での軌道のずれ x_3 , x_3' は式(2-21)を使うと

$$x_3 = \sqrt{\beta_3} (\sqrt{\beta_1} \sin \varphi_1 \theta_1 + \sqrt{\beta_2} \sin \varphi_2 \theta_2) \quad (4-31)$$

$$x_3' = \frac{1}{\sqrt{\beta_3}} (\sqrt{\beta_1} \cos \varphi_1 \theta_1 + \sqrt{\beta_2} \cos \varphi_2 \theta_2) - \frac{\alpha_3}{\beta_3} x_3 \quad (4-32)$$

となる。ここでバンプ軌道が3でもとに戻るためには

$$x_3 = 0 \quad (4-33)$$

$$x_3' = -\theta_3 \quad (4-34)$$

であればよい。これを解くと

$$\theta_2 = -\frac{\sqrt{\beta_1} \sin \varphi_1}{\sqrt{\beta_2} \sin \varphi_2} \theta_1 \quad (4-35)$$

$$\theta_3 = -\frac{\sqrt{\beta_1} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{\beta_3} \sin \varphi_2} \theta_1 \quad (4-36)$$

となる。 θ_1 を決めてしまうと θ_2 、 θ_3 も決まり、バンプ軌道の大きさと形が決まってしまう。式(4-35)で $\sin \varphi_1 = 0$ とすると、すなわち1と3の間の位相の進みが π の整数倍であると、 $\theta_2 = 0$ となり、1と3の2台の磁石でバンプ軌道を作ることができる。4台の磁石を用いると、バンプ軌道の大きさの他に、傾きも自由に変えることができるようになる。

e. 固有な分散関数

モデルのリングでは Cell が偏向磁石を含まないために、リングの分散を扱わなかった。しかし実際のリングは軌道を曲げるために偏向磁石があるために分散がある。一度しかビームの通らないビームラインでは、 β 、 α は初期値によって決まるが、ビームラインをつなげてリングを作ると、ビームラインに固有の β 、 α が重要になった。これと同じ事情で、一度しかビームの通らないラインでは、 η 、 η' は任意であるが、リングでは固有の η 、 η' が重要である。固有の η 、 η' とは基本となるビームラインの入口と出口で η 、 η' がそれぞれ一致するものである。 β 、 α と同様に固有な η 、 η' はリングと同じ対称性を持つ。基本となるビームラインの入口から出口までの、分散を含んだ Transfer Matrix を $M = (m_{ij})$ とすると、入口と出口で η_0 、 η'_0 であるから式(3-24)を用いると

$$\eta_0 = m_{11} \eta_0 + m_{12} \eta'_0 + m_{13} \quad (4-37)$$

$$\eta'_0 = m_{21} \eta_0 + m_{22} \eta'_0 + m_{23} \quad (4-38)$$

となりこれを解くと

$$\eta_0 = \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} [(1 - m_{22}) m_{13} + m_{12} m_{23}] \quad (4-39)$$

$$\eta'_0 = \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} [(1 - m_{11}) m_{23} + m_{21} m_{13}] \quad (4-40)$$

が求まる。ただし $m_{11} + m_{22} = 2 \cos \mu$ を使った。入口の η_0 、 η'_0 が求まったから後は式(3-24)で η 、 η' を計算すればよい。

f. 分散のマッチング

入射ビームの運動量が基準より $\Delta p/p$ ずれていたとする。このときこの運動量の粒子にとって、リングの中心軌道はもとの中心より $\Delta x(s)$ 、 $\Delta x'(s)$ だけずれていて、 η 、 η' の定義より

$$\Delta x(s) = \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (4-41)$$

$$\Delta x'(s) = \eta'(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (4-42)$$

である。 $p + \Delta p$ の粒子はずれた軌道を中心にベータatron振動をする。入射点Oでの固有な η 、 η' を、 η_0 、 η'_0 として入射ラインから追跡してきた η 、 η' のO点での値を η_i 、 η'_i とする。図(4-7)のO点での位相平面では、運動量のずれた粒子は $(\eta_i \frac{\Delta p}{p}, \eta'_i \frac{\Delta p}{p})$ に入り $(\eta_0 \frac{\Delta p}{p}, \eta'_0 \frac{\Delta p}{p})$ のまわりでベータatron振動することになる。このとき振動の大きさを表わす不変量は、 β_0 、 α_0 が $\frac{\Delta p}{p}$ によって変らないとすると近似的に

$$\epsilon = [\gamma_0 (\eta_i - \eta_0)^2 + 2 \alpha_0 (\eta_i - \eta_0) (\eta'_i - \eta'_0) + \beta_0 (\eta'_i - \eta'_0)^2] \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 \quad (4-43)$$

となる。 η 、 η' をリングと入射路の間で一致させることを分散のマッチングと呼んでいて、入射ビームの運動量分布が広い場合には重要な操作である。

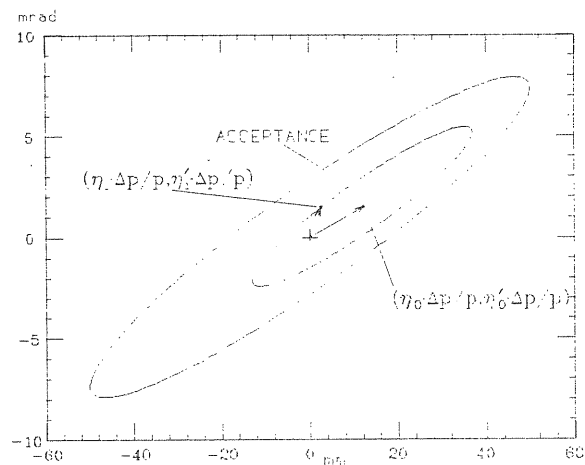


図4-7. 運動量が $p + \Delta p$ にずれている粒子にとってのリングの中心軌道は、入射点で $(\eta_0 \Delta p/p, \eta'_0 \Delta p/p)$ になっている。もし入射路から追跡してきた分散関数が一致していなければ、 $p + \Delta p$ の運動量を持つ粒子は、 $p + \Delta p$ の粒子のリングの中心軌道のまわりにベータatron振動をする。このとき振動の大きさは $(\eta_i \Delta p/p, \eta'_i \Delta p/p)$ を通るアクセプタンスに相似な楕円の大きさと評価できる。

5. 入射 / 取り出し

a. One-turn 入射

入射のもっとも簡単なモデルは図(5-1)で示したものである。リングの中心軌道に対してある角度をもって入射してきたビームを、パルスの外側に偏向させ、リングの軌道にのせる。このとき偏向磁場のパルス巾は十分短かく、リングを回っている他のビームバンチや、入射したビーム自身を一周後に影響を与えないようにする必要がある。このときリングの同じ位置には再度ビームを入れることはできない。入れる場所に先にビームが入って回っていたとすると、入射する際に、入射ビームは外向きに偏向され中心軌道にのるが、先に中心軌道を回っていたビームは同じように外向きに偏向され、大きなベータトロン振動のために失なわれてしまう。

実際の入射では図(5-1)の入射角が大きくなりすぎ、パルス磁石で偏向する角度が大きくなり実用になりにくい。そこでまずセプタム磁石と呼ばれる磁石で外向きに偏向し、十分入射角を浅くする。セプタム磁石というのは図(5-2)の形をしており、セプタムと称するうすいコイルに電流を流すことにより、磁石の内側にのみ磁場を発生させ、セプタムの外側には全く磁場を作らないようにすることができる。これにより、入射ビームの位置が中心軌道に近いにもかかわらず、リングを回っているビームには全く影響を与えず、入射ビームのみ偏向させることが可能になる。

モデルリングの入射基準点Oで、収束磁石の直前から入射する場合を考える。このときセプタム磁石は図(5-3a)のようにO点のすぐそばまでのびていると考えてよい。O点での水平方向の位相平面を図(5-3b)に示す。O点でのリングのアクセプタンスを原点を中心とする楕円で表わす。楕円の形はO点での固有な β_0 、 α_0 で決まっている。セプタムは通常リングのアクセプタンスを減らさないように置かれるために、セプタムの外側(リング側)は位相平面でアクセプタンスに接する縦の直線で表わされ、セプタムの内側はセプタムの厚さだけずれた直線で表わされる。入射ビームのエミッタンスの楕円の形は、アクセプタンスの形と相似になるようにマッチングがとれているとする。入射ビーム中心とリングの軌道中心との距離は、入射ビームがセプタムの内側に接触しないようにしてなるべく小さく選ばれる。入射されたビーム中心は、このビーム中心を通るO点で固有の形をした楕円できまる大きさで、ベータトロン振動をする。ベータトロン振動をできるだけ小さくするために、入射位置を表わす縦の直線が固有な楕円と接するように選ばばよ

い。接点が入射軌道の最適位置を示す。この例の場合の収束磁石の直前で入射する場合には入射点での固有楕円が右に傾いているので、外向きに入射すればよく、反対に発散磁石の前で入射する場合には内向きに入射した方がよいことがわかる。

入射されたビームの中心は、中心軌道のまわりをベータトロン振動をし、入射点から位相進みが約 $\frac{\pi}{2}$ になった所で、中心軌道と負の傾きを持って交さず。交さず場所での位相平面を図(5-4)で表わす。入射ビームが中心軌道と交さず瞬間に外向きに偏向させると、入射ビームをアクセプタンスの中へ入れることができる。こうして、アクセプタンスの内側に入ったビームはリングをまわり続けることになり入射が終了する。

注意することは、入射ビームは入射点からパルス磁石(キッカー磁石)までの間で、アクセプタンスの外側を通ることになる。特に収束磁石でのアクセプタンスは磁石の有効域で決まっているために、入射ビームは一度しか通らないけれども、性質の保証されない磁場を通過することになる。通常は収束磁石も発散磁石も同じ大きさの四極磁石を用いるため、両方の有効域は同じである。そこで、もし発散磁石の前で入射すると、そこでのリングのアクセプタンスが小さいから、セプタムをリング側によせることができ、入射軌道も中心軌道に近づく。入射直後の発散磁石の有効域にビームを通すことが可能になる。このようにリングのどの場所で入射をしたらよいかを決めるには、入射ビームのエミッタンスや入射方式を考慮し検討する必要がある。

最初に扱った入射方式は One-turn 入射方式と呼ばれ、入射ビームのエミッタンスがリングのアクセプタンスの同程度の場合に使用される。

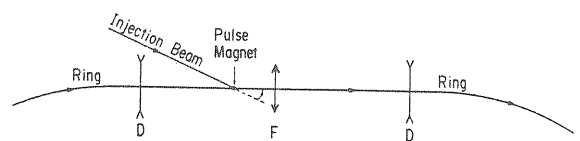


図5-1. 入射ビームは、リングの中心軌道に対してある角度で交差する。交差する位置にパルス磁石を置き、入射ビームを偏向させて中心軌道に乗せることによって入射が完了する。しかし、実際の加速器では、入射ビームと中心軌道の交差角が大きすぎ、このままでは実用になりにくい。

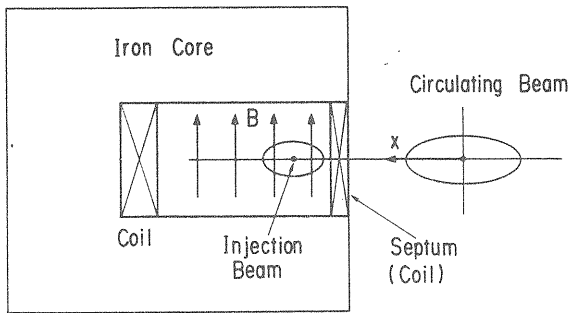


図5-2. セプタム電磁石。セプタムと称する厚さの薄いコイルと他方のコイルとで磁石の中に一様磁場を発生させる。しかし、磁場はセプタムの外側には全く発生しない。入射ビームがリングの中心軌道に近いにもかかわらず、この磁石によりリングを周回しているビームには影響を与えず、入射ビームのみを偏向させ、入射角を浅くすることが可能になる。

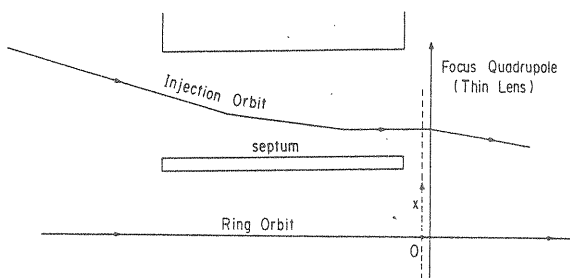


図5-3 a. 入射ビームはセプタム磁石で外向きに偏向され、収束四極磁石の前でリングへ入射される。入射の基準となるO点を収束磁石の直前にとる。セプタム磁石の下流端は入射基準点の近くまでのびている。

b. Multi-turn 入射

リングのアクセプタンスが入射ビームのエミッタンスと比べてかなり大きな場合には、リングの同じビームパルス内に複数回入射することが可能で Multi-turn 入射方式と呼ばれる。簡単な例を、パルスのバンパ軌道とセプタム磁石を用いて作ってみる。わかりやすくするために一回に入射するビームの長さは、リング一周の長さより十分短かく、また入射くり返しはリングの回転周波数と同じにする。O点での位相平面を図(5-5)の左図に示す。セプタムはアクセプタンスに接するように置かれている。入射時にO点のまわりで外側にバンパ軌道をパルスのように作り、バンパ軌道によって中心をずらされたアクセプタンスが入射ビームのエミッタンスを含むようにする。この例ではO

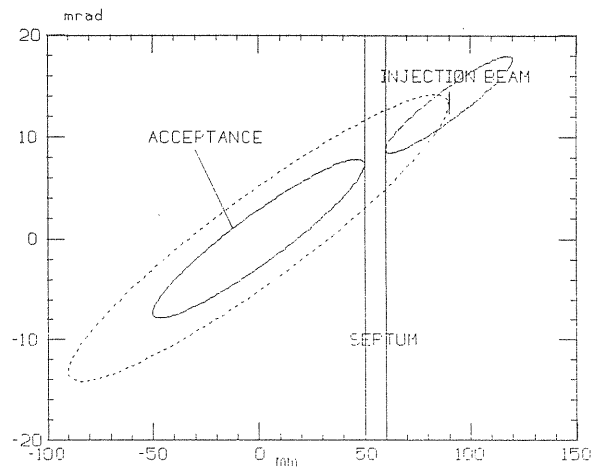


図5-3 b. 入射基準のO点でのアクセプタンスを±50mmとし、セプタムの厚さを10mmとする。セプタムの外側はアクセプタンスの楕円に接している。入射ビームのエミッタンスの形はアクセプタンスと相似になるように調整されている。入射ビームの角度は、アクセプタンスの形の相似な楕円(破線)が入射軌道と接するように選ばれる。入射ビームの中心は破線にそってベータatron振動をする。

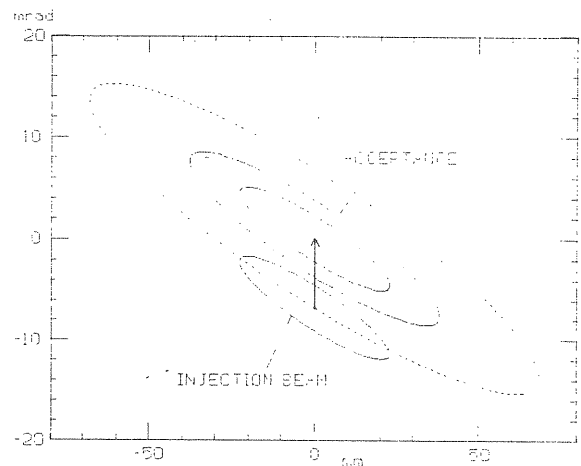


図5-4. 入射点の下流で、入射ビームの中心軌道が、リングの中心軌道と交さる所にパルス磁石を置き、入射ビームを矢印の方向に偏向してリングのアクセプタンスの中心に入れる。

点でのバンパ軌道は中心軌道と平行になっている。Multi-turn 入射の場合には、入射ビームのエミッタンスの形がアクセプタンスの楕円と相似であることが、必ずしも入射の最適条件ではない。入射されたビームはバンパ軌道を中心にベータatron振動をする。入射ビームの一周後に2回目の入射を行うが、このとき最初に入れたビームはベータatron振動数の端数だけ位相がずれて図(5-5)の右図の位置になっている。モデルリングでは端数が0.25だから、アクセプタンスの内側で1/4周移動する。同様に3,4回目の入射をす

る。このまま5回目の入射をすると、1回目に入れたビームは位相空間でセプタムの内側になってしまい、実際にはセプタムに当たり失なわれてしまう。そこで4回目の入射終了後、図(5-6)のように1回目のビームが0点に戻らないうちに軌道を急いで元にもどす。この例では、リングの一つのパルスに4回入射ビームを入れることができたことになる。

もし入射ビームが長く継がっているならば、この方式によりリング4周分の長さの入射ビームをリングに蓄積できる。この入射の例ではバンパ軌道の大きさを入射中に一定にしてあるが、実際の加速器の運転では入射中にバンパ軌道の大きさを換え、アクセプタンスを入射ビームでうめつくす工夫をし、なるべく多くのビームを入れる努力をする。

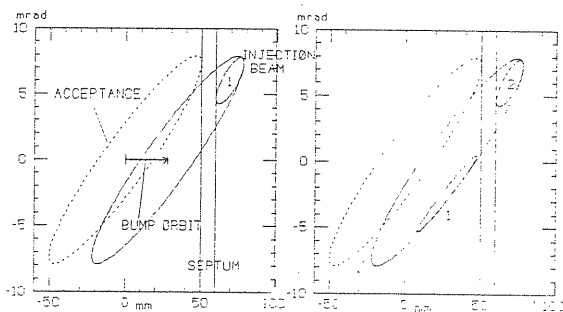


図5-5. 左図で、1ターン目のビームの入射の時に入射点にバンパ軌道を作り、もとのアクセプタンス(破線)を外側にずらし、入射ビームのエミッタンスを含むようにする。2ターン目のビームを入れる時には、右図のように、1ターン目のビームはアクセプタンスの中で1/4回転ずれた所に戻ってくるために、セプタムに当たらない。

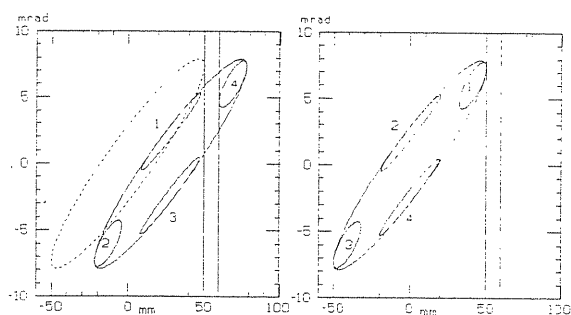


図5-6. 4ターン目のビームを入れる時には、左図のようにそれ以前に入れたビームが位置することになる。4ターン目のビームの入射が終了後、直ちにバンパ軌道をおろし、右図のように1ターン目のビームがセプタムに当たらないようにする。

c. 電子の入射蓄積

電子蓄積リングの入射では、電子リングに特長的な放射減衰(Radiation Damping)を利用して、リングの同じパルスにくり返し入射することが可能である。放射減衰とは、電子が軌道放射光を発生することにより、エネルギーを失うとともに、横方向の運動量も徐々に失ない、結果的にベータatron振動の振巾が時間とともに指数関数的に減少していく。このベータatron振動の減衰時間は、リングの形とエネルギーに依存している。詳しくは電子リングの解説、例えば夏の学校のテキストを参照するとよい。TRISTANの蓄積リングでは2.5 GeV入射エネルギーで減衰時間は約50 msecで、この間電子はリングを約4万回転する。ベータatron振動が減衰しつづけると、ビームはすべて中心軌道に集まりそうであるが、放射光発生の際の量子効果によりベータatron振動が励起されて、定常状態でのビームのエミッタンスは、放射減衰と量子効果による励起とのバランスで決まる。しかし、入射エネルギーではエミッタンスが十分小さく、入射のモデルとしては中心軌道に向って、ベータatron振動が減衰するとしてよい。

入射ビームのエミッタンスがリングのアクセプタンスよりかなり小さいとして、Multi-turn入射と同様にパルスのバンパ軌道とセプタム磁石を用いて、入射蓄積を実現してみる。ただし、Multi-turn入射と異なり、放射減衰を利用しているために、入射のくり返し周期は、ベータatron振動の減衰時間の程度が必要である。図(5-7)の左図で入射点での位相平面を示す。0点のアクセプタンスにセプタムが接している。簡単のために入射点でのバンパ軌道は、中心軌道に平行する。入射の際にパルスのバンパ軌道を作り、入射ビームをアクセプタンスの中に入れ、ただちにバンパ軌道に戻し、入射されたビームが一周して戻ってきた時にはバンパ軌道がなくなっているようにする。入射ビームの傾きは、ベータatron振動の振巾が最小になるように選ばれる。入射されたビームはアクセプタンスの中で大きな振動をしていて、図(5-7)の右図の外側のドーナツの部分の回っている。時間がたつにつれて放射減衰により入射ビームの回っているドーナツは中心に向って小さくなる。次の入射でバンパ軌道をたてた時に、図(5-8)のように小さくなったドーナツがセプタムにさわらなければ、前回に入射したビームは全く失なわれない。この方式で入射ビームをリングの同じパルスに次々と蓄積することが可能である。

注意として図(5-9)のように、入射周期が長くなく、ドーナツが十分小さくならないで次回の

入射の時にセプタムと重なっている場合でも、必ずしも前回に入射されたビームが全て失なわれるわけではない。前回に入射されたビームは、ドーナツの内部のどこかにいるわけであるから、ドーナツの中に一樣にひろがっていると考えると、セプタムと重なった部分のみが失なわれることになる。大部分は失なわれず蓄積されることになる。そこである程度、入射の際のビーム損失を覚悟して、入射くり返し周期を短かくすることにより、単位時間あたりの蓄積電流の増加量を上げることができる。

ビームの取り出しは、原理的には入射の逆を行なえばよい。One-turn 入射の逆を使うと、損失なしに One-turn 取り出しができ、多段の加速器システムで入射器として使われる円形加速器で使われる。Multi-turn 入射の逆を行なうと、セプタムでビームをけずりながら、リングの回転周期の数倍の時間をかけてゆっくり取り出すことができる。さらにゆっくりと数万回転以上の時間をかけて取り出す方法に、ベータトロン振動の共鳴現象を利用して振動を大きくし、振動が大きくなった粒子を徐々にセプタムでけずりながら取り出すことができる。しかし、非線型なベータトロン振動を扱わなければならない、ビーム取り出しの入門としては程度が高いのでここでは触れないことにする。

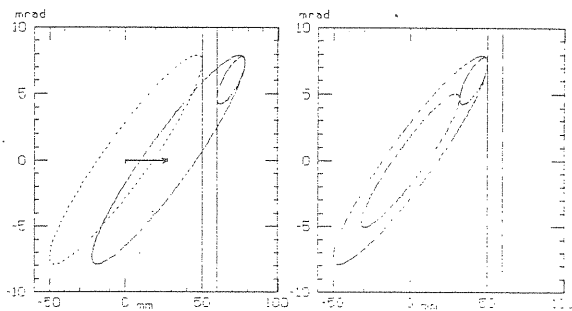


図5-7. 電子ビームを入射する瞬間に、入射点にバンプ軌道を作り、左図のようにリングのアクセプタンスをずらし、入射ビームのエミッタンスを含むようにする。入射終了後は直ちにバンプ軌道をおろす。入射されたビームは、右図のようにアクセプタンスの内側のドーナツの中でベータトロン振動をしている。

参 考 文 献

- [1] 神谷幸秀, "加速器の原理", OHO '84 テキスト.
- [2] 鎌田 進, "加速器の原理と設計", OHO '85 テキスト.
- [3] M. Sands, "The Physics of Electron Storage

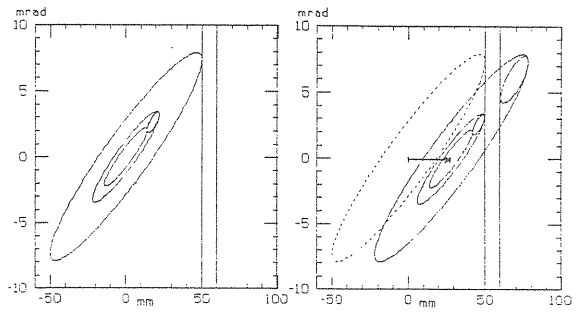


図5-8. 次回の入射までには、左図のように放射減衰により入射ビームは小さなドーナツの中でベータトロン振動をしている。次回の入射の際には、バンプ軌道が作られても右図のようにドーナツが十分小さくなっていれば、前回に入射されたビームはセプタムに触れず、失なわれることはない。この方式により入射を続けることができる。

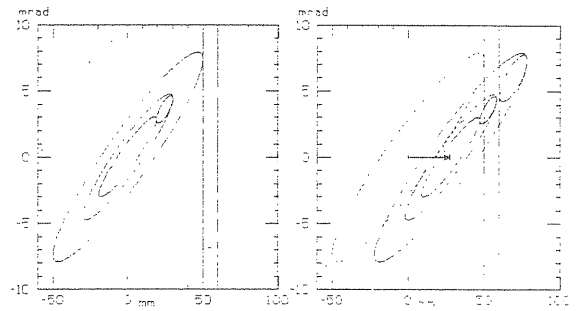


図5-9. 次回の入射までに、左図のように前回に入射されたビームを含むドーナツが十分小さくならないと、次回の入射の際にはドーナツがセプタムと重なることになる。しかし、この場合でも一部のドーナツがセプタムと重なっているだけで、前回入射された多くのビームは、失なわれず蓄積されることになる。

Rings, SLAC-121, 1970.

- [4] T. Suzuki and S. Kamada, "Theory of Half-Integral Resonant Extraction, KEK 76-7.

[1], [2]は日本語で書かれた円形加速器のテキストである。[3]は電子加速器の入門書である。[4]はここで扱わなかった遅い取り出しの明解な論文である。