

1. 初めに。

この講義では加速器物理への入門からスタートして、電子リングでのエミッタンスについてまなび、低エミッタンスを実現するためのいくつかの手法を紹介する。

エミッタンスを一言で定義することは困難であるが、あえて一言でいえばそれは位相空間内でのビームの拡がりをあらわす量である。加速器の性能はビーム全体の強度だけではなくその"明るさ"が問題になる。例えば、トリスタンのような衝突型の加速器では、ルミノシティ

$$L \propto I^2 / \sqrt{\epsilon_x \epsilon_y}$$

がビームの明るさをあらわす量である。このように"明るさ"とはビームの強さをその拡がりで割った量と言うことが出来る。従ってビームのひろがりあらわす量であるエミッタンス ϵ_x を小さくすることはビームの強度を上げることとならんで"明るい"ビームを得る上で非常に重要である。

2. 軌道理論とエミッタンス入門

2.1 座標系とハミルトニアン

これから円形加速器内の荷電粒子の運動を議論してゆくわけであるが、まずは運動を記述するための土俵を固めておこう。加速器中の粒子の軌跡は通常空間に固定された直交座標系よりも平均的な粒子の軌道からのズレとしてあらわすのが便利である。この基準となる軌道を定義するためにこれから我々の考える加速器では、設計エネルギー、 $E_0 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ を持つ仮想的な粒子を考える。この設計エネルギーをもった理想的な荷電粒子の仮想的な軌道(設計軌道)を $r_0(s)$ とする。ここで、 s はこの設計軌道に沿ったある原点からの軌道の長さである。設計軌道上の位置はこの s を指定することで表現できる。 s は 0 から $2\pi R$ までの値をとる周期的な座標になっている。加速器内の粒子の位置は、軌道上の位置 s と、 s で軌道に直交する平面上の位置を使って指定される。設計軌道上の位置 s における正規直交ベクトル $\{e_x, e_y, e_s\}$ を、図-1に示されるように取る。これ等のベクトルは、次のよう

な関係式を満たしている。

$$\begin{cases} e_s(s) = \frac{dr_0(s)}{ds} \\ e_x(s) = -\rho_0 \frac{de_s}{ds} \\ e_y(s) = e_s \times e_x \end{cases} \quad (2.1)$$

$$|e_s| = |e_x| = |e_y| = 1$$

ここで、 ρ_0 は設計軌道上の位置 s に於ける設計軌道 $r_0(s)$ の曲率半径である。また $r(s)$ は一つの水平面内に含まれるとした。

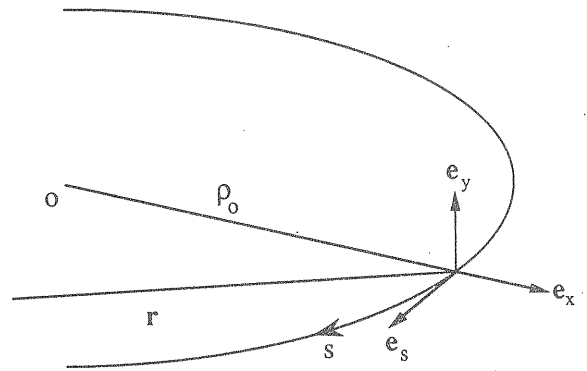


Fig-1

粒子の位置 r は、

$$r(s) = r_0(s) + x e_x(s) + y e_y(s) \quad (2.2)$$

と表される。即ち、粒子の位置をあらわす座標は (s, x, y) の三つである。加速器物理では、粒子の運動を記述する自由変数に、時刻 t の代わりに設計軌道上の位置 s を使う。更に、時刻 $t(s)$ に代わる座標 z を

$$z = \frac{1}{v}(s - z), \quad v = \frac{pc^2}{E} \quad (2.3)$$

によって導入する。 v は粒子の速さ、 $v = pc^2/E$ である。 $t(s)$ は設計軌道上の位置 s を通過する時刻、 z はバンチ内での粒子の相対的な位置と言う、物理的な意味を持っている。加速器の軌道理論では運動量は設計エネルギーでの運動量、 p_0 、で正規化して取り扱う。これによって収束系の設計はエネルギーと無関係に表現出来るようになる。位置を現わす座標 (z, x, y) に正

準共役な運動量座標 (p_z, p_x, p_y) は, 従って, 粒子の運動量, P , と

$$\begin{cases} p_z = \frac{|\mathbf{p}| - p_0}{p_0} \\ p_x = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x) / p_0 \\ p_y = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y) / p_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

なる関係がある。粒子の運動を書きあらわすための座標系はこれで準備できた。つぎに運動を決定する運動方程式を知らねばならない。力学の正準理論によれば運動方程式は, ハミルトニアンから正準方程式によって導かれる。相対論的な一粒子のハミルトニアンから出発して適当な正準変換を施すことによって, この正準座標 $\{x, y, z, p_x, p_y, p_z\}$ でのハミルトニアン,

$$\begin{aligned} H_s = & -\left(1 + \frac{x}{\rho_0}\right) \left[\sqrt{(1+p_z)^2 + \left(\frac{m_0 c}{p_0}\right)^2} \right. \\ & \left. - \frac{e\phi}{cp_0} \right]^2 - \frac{m_0^2 c^2}{p_0^2} - \left(p_x - \frac{eA_x}{p_0}\right)^2 \\ & - \left(p_y - \frac{eA_y}{p_0}\right)^2 \Big]^{1/2} + p_z - \frac{eA_s}{p_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

が導かれる。ここで,

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + \frac{A_s}{1 + \frac{x}{\rho_0}} \mathbf{e}_s \quad (2.6)$$

は, 電磁場のベクトルポテンシャルである。ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャル, ϕ , で電磁場は,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (2.6')$$

とあらわされる。磁場 \mathbf{B} の $s, x,$ 及び y の各方向への成分は, それぞれ

$$\begin{aligned} B_x &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho_0}} \left(\frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s} \right) \\ B_y &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_y) = \frac{1}{1 + \frac{x}{\rho_0}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} \right) \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

と現わされる。ここで取り扱う磁場は水平面について対称で, また s -方向の成分 B_s は無いとする。このとき静磁場はベクトルポテンシャルの一つの成分 A_s だけで書きあらわすことが出来る。磁場は B_x, B_y の成分だけをもつので, 静磁場の多重極成分を,

$$\frac{eB_y}{p_0} = \frac{1}{\rho} + k \cdot x + \frac{\lambda}{2} (x^2 - y^2) + \dots \quad (2.8)$$

で定義する。このときベクトルポテンシャル A_s は,

$$\begin{aligned} \frac{eA_s}{p_0} = & -\left\{ \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} k(x^2 - y^2) + \frac{x^2}{2\rho^2} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{6} (x^3 - 3xy^2) + \frac{k}{3\rho} x^3 + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

と展開される。ここで $1/\rho, k,$ および λ はそれぞれ二重極, 四重極および六重極の各成分である。

一方, ハミルトニアンの中で x, y, z は曲率半径 ρ_0 に比べ, 十分小さいのでハミルトニアンをこれらの量で展開することが出来る。結局ハミルトニアンは, x, y および z について三次まで, p_x および p_y については二次までで展開を止めると,

$$\begin{aligned} H_s = & \frac{1}{2(1+p_z)} \{ p_x^2 + p_y^2 \} - \frac{x}{p_0} p_z \\ & + \left\{ \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) x + \frac{k}{2} (x^2 - y^2) + \frac{x^2}{2\rho^2} \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{6} (x^3 - 3xy^2) + \frac{k}{3\rho} x^3 + \dots \right\} \\ & + \left(1 + \frac{x}{\rho_0} \right) \frac{e\phi}{cp_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。以下のこの講義では, このハミルトニアンを議論の基礎とする。

2.2 CODと振動の分離

今上で導入したハミルトニアンから, 運動方程式を書き下すと,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{1}{1+p_z} p_x, \quad \frac{dP_x}{ds} = \frac{1}{\rho_0} p_z + \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \\ &\quad - \left(k + \frac{1}{\rho^2}\right)x - \frac{\lambda}{2} (x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{1}{1+p_z} p_y, \quad \frac{dp_y}{ds} = +k \cdot y + \lambda_{xy} \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{x}{\rho_0} - \frac{p_x^2 + p_y^2}{2(1+p_z)^2}, \quad \frac{dp_z}{ds} = -\frac{\partial H_s}{\partial z} \\ &= -\left(1 + \frac{x}{\rho_0(s)}\right) \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e\phi}{cp_0}\right)\end{aligned}\quad (2.11)$$

である。運動方程式に現われる $1/\rho$, k , λ 等の係数は周期 $2\pi R$ を持つ s の周期関数である。この運動方程式の解を幾つかの部分に分けて考える。粒子の運動はまず長時間の平均で捕えられる部分と振動部分に分けられるであろう。まず、この運動方程式の周期解を

$$\begin{cases} x(s) = x_c(s), \\ y(s) = y_c(s), \\ z(s) = z_c(s) \end{cases}\quad (2.12)$$

と書くことにする。此の解の現わす軌道を、COD (Close Orbit Distorsion) と呼ぶ。加速器中の粒子は、このCODの周りを振動しながら周回を続けている。CODはしたがって、平衡軌道を現わしている。運動方程式の解もこの物理的な描像に従って、平衡軌道と振動部分に分けて考える。

$$\begin{cases} x = x_c + x_\beta, \quad p_x = p_{xc} + p_{x\beta} \\ y = y_c + y_\beta \\ z = z_c + z_\beta \end{cases}\quad (2.13)$$

振動部分 x_β について運動方程式を線形化すると、

$$\begin{aligned}\frac{dx_\beta}{ds} &= +\frac{1}{1+p_{zc}} p_{x\beta} - \frac{p_{xc}}{(1+p_{zc})^2} p_{z\beta} \\ \frac{dy_\beta}{ds} &= +\frac{1}{1+p_{zc}} p_{y\beta} - \frac{p_{yc}}{(1+p_{zc})^2} p_{z\beta} \\ \frac{dz_\beta}{ds} &= -\frac{1}{\rho} x_\beta - \frac{p_{xc} p_{x\beta} + p_{yc} p_{y\beta}}{(1+p_{zc})^2}\end{aligned}$$

$$+ \frac{p_{xc}^2 + p_{yc}^2}{(1+p_z)^3} p_{z\beta}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_{x\beta}}{ds} &= \frac{1}{\rho_0} p_{z\beta} - \left(k + \frac{1}{\rho^2}\right) x_\beta \\ &\quad - \lambda (x_c x_\beta - y_c y_\beta) - \frac{2k}{\rho} x_c x_\beta\end{aligned}$$

$$\frac{dp_{y\beta}}{ds} = k \cdot y_\beta + \lambda_{x_c} \cdot y_\beta + \lambda_{x_\beta y_c}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_\beta}{ds} &= -\left[\frac{\partial}{\partial} \frac{e\phi(x_\beta + x_c, y_\beta + y_c, z_\beta + z_c)}{cp_0}\right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \frac{e\phi}{cp_0}(x_c, y_c, z_c)\right]\end{aligned}$$

(2.14)

となる。此の振動のうち横方向成分 (x, y) をベータatron振動、縦方向の成分をシンクロトロン振動と呼ぶ習わしである。上の運動方程式から分かるように、六重極成分などによってこれらの振動の混合が起きている。より厳密な取扱のためには、この混合を分離する固有モードに分解する必要がある。一つのモードに着目するとその線形化された運動方程式は、適当な周期関数 $K(s)$, をもちいて、

$$\frac{d^2 X}{ds^2} + K(s)X = 0\quad (2.15)$$

とかける(Hill's equation)。水平方向については、

$$K_x(s) = k(s) + \frac{1}{\rho^2(s)}\quad (2.15a)$$

垂直方向では、

$$K_y(s) = -k(s)\quad (2.15b)$$

である。 K_x の $1/\rho^2$ は弱収束の効果をあらわしている。

2.3 Twiss's parameters

これからまずヒルの方程式の性質を調べ、加速器の収束系を特徴付けるツイスのパラメータについて説明する。

ヒルの方程式は K =一定であれば単振動の方程式となるから、一般の場合にも単振動的な解を持つと予想

される。実際、ヒルの方程式(2.15)の解は 適当な周期関数 $\beta(s)$ をもちいて、

$$x(s) = \sqrt{\beta(s) \cdot \epsilon_0} \cos(\varphi(s) + \varphi_0) \quad (2.16)$$

と書き下すことが出来る。 φ 及び β は、微分方程式

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\beta(s)}$$

$$\frac{1}{2}\beta'' + K(s)\beta - \frac{1 + \frac{1}{4}(\beta')^2}{\beta} = 0$$

(ただし $\beta' = \frac{d\beta}{ds}$, $\beta'' = \frac{d^2\beta}{ds^2}$ である。)

(2.17)

を満たす。 φ はベータトロン振動の位相とよばれる。

$\beta(s)$ は、次の関数

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2}\beta' \\ r = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \end{cases} \quad (2.18)$$

と共に、Twiss parameters と名付けられている。 $s=s_0$ での初期条件(x_0, p_{x0})が与えられたとき、(2.15)の解は、トランスフォーマトリックスをもちいて、

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} [\cos(\varphi - \varphi_0) + \alpha_0 \sin(\varphi - \varphi_0)] \\ \frac{1}{\sqrt{\beta\beta_0}} [(\alpha_0 - \alpha) \cos(\varphi - \varphi_0) - (1 + \alpha\alpha_0) \sin(\varphi - \varphi_0)] \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\beta\beta_0} \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} [\cos(\varphi - \varphi_0) - \alpha \sin(\varphi - \varphi_0)] \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

と書き現わすことが出来る。(2.19)では、

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(s), \quad \beta_0 = \beta(s_0), \quad \varphi = \varphi(s), \\ \varphi_0 &= \varphi(s_0), \quad \alpha = \alpha(s), \quad \alpha_0 = \alpha(s_0) \end{aligned} \quad (2.20)$$

と言った省略を使った。特にリング一周分のマトリックスは、

$$M(s) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\nu) + \alpha \sin(2\pi\nu), & \beta \sin(2\pi\nu) \\ -r \sin(2\pi\nu), & \cos(2\pi\nu) - \alpha \sin(2\pi\nu) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

と簡単になる。 $2\pi\nu$ はベータトロン振動のリング一周分の位相の進みで、 ν はベータトロン振動のチューンと呼ぶ。ベータトロン振動が安定であるためにはチューン ν が実数である必要がある。この条件は一周分のトランスフォーマトリックス M を用いて、

$$\text{Tr}M = 2 \cos(2\pi\nu) < 2 \quad (2.21)'$$

と書ける。

2.4 運動の不変量

ヒルの方程式の解について、量

$$\begin{aligned} \epsilon &= \beta \cdot x'^2 + 2\alpha x x' + r x^2 \\ &= \frac{1}{\beta} \{ x^2 + (\alpha x + \beta x')^2 \} \end{aligned} \quad (2.22)$$

は軌道上の位置 s に依存しない運動の不変量になる(Courant-Snyder 不変量)。 $x-x'$ 平面上では $\epsilon =$ 一定の曲線は図-2 に示したように楕円になる。 x 及び x' の最大値は、従って、

$$\begin{cases} x_{\max}^{(s)} = \sqrt{\beta(s)} \epsilon \\ x'_{\max}^{(s)} = \sqrt{r(s)} \epsilon \end{cases} \quad (2.23)$$

で与えられる。

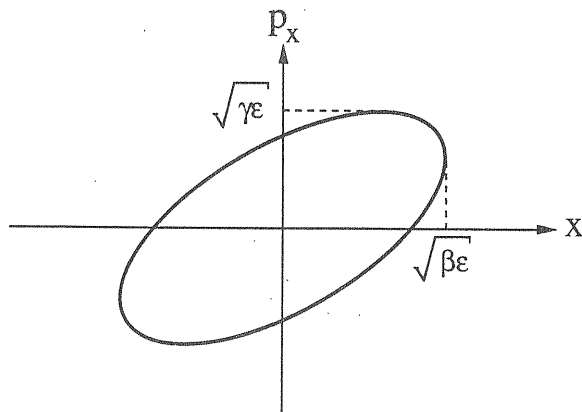


Fig -2

ヒルの方程式で記述される系は正準系なのでリウヴィルの定理がなりたつ。つまり ϵ = 一定の曲線に囲まれる領域内の粒子は、常に此の領域の中に閉じ込められている。したがって、ビーム内の全ての粒子をその中に含むような ϵ_0 があればそれはビームの大きさをあらわすパラメーターとなる。この ϵ_0 をエミッタンスと呼ぶ。電子リングではビームはほぼガウス分布で広がっているためにこのような ϵ_0 は存在しないが、 ϵ の粒子分布による平均値をエミッタンスと呼ぶ。あとで述べるように、電子リングでのエミッタンスは、主にシンクロトロン放射による振動の減衰力と、量子効果による振動の励起のバランスによってきままっている。

2.5 COD およびディスパージョン関数

シンクロトロン放射の話しに入る前にもう少し準備をする。CODは既に述べたように、運動方程式 (2.11) の周期解であるが、今導入したTwiss parametersを使って、形式的に

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_c \\ p_c \end{pmatrix} &= \frac{1}{2 \sin \pi \nu_x} \int_s^{s+2\pi R} ds_1 \\ &\times \left[\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\beta_x}{\beta_{x1}}} [-\sin \phi_x(s, s_1) + \alpha_{x1} \cos \phi_x(s, s_1)], \\ &\frac{1}{\sqrt{\beta_x \beta_{x1}}} [(\alpha_x - \alpha_{x1}) \sin \phi_x(s, s_1) \\ &\quad - (1 + \alpha_x \alpha_{x1}) \cos \phi_x(s, s_1)], \\ &\sqrt{\beta_x \beta_{x1}} \cos \phi_x(s, s_1) \\ &\sqrt{\frac{\beta_{x1}}{\beta_x}} [-\alpha_x \cos \phi_x(s, s_1) - \sin \phi_x(s, s_1)] \end{aligned} \right] \\ &\times \left[\begin{aligned} &-\frac{p_{xc} p_{zc}}{(1 + p_{zc})^2} \\ &\frac{1}{\rho_0(s_1)} - \frac{1}{\rho(s_1)} + \frac{p_{zc}}{\rho_0(s_1)} \\ &+ \frac{\lambda}{2} (x_c^2(s_1) - y_c(s_1)^2) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

とかける。これらは両辺に η を含むから、いわゆる積分方程式になっている。六重極成分が無視できる場合には、この積分が直ちに解を与える。COD, $x_c(s)$, $y_c(s)$ の運動量偏移 p_z による微分係数 η_x , η_y を分散関数またはディスパージョン関数と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \eta_x &= \frac{1}{2 \sin \pi \nu_x} \int_s^{s+2\pi R} ds_1 \sqrt{\beta_x \beta_{x1}} \\ &\cos(\phi_x(s) - \phi_x(s_1) + \pi \nu_x) \left\{ \frac{1}{\rho_0(s)} \right. \\ &\quad \left. + \lambda x_c \eta_x - \lambda y_c \eta_y \right\} \\ \eta_y &= \frac{1}{2 \sin \pi \nu_y} \int_s^{s+2\pi R} ds_1 \sqrt{\beta_y \beta_{y1}} \\ &\cos[\phi_y(s) - \phi_y(s_1) + \pi \nu_y] \\ &\times \lambda (x_c \eta_y + y_c \eta_x) \end{aligned} \quad (2.25)$$

水平方向のディスパージョンの源は此の式からも解るように、おもに偏向磁石である。また理想的な加速器では鉛直方向のディスパージョンはゼロであるが、CODと六極電磁石による水平方向のディスパージョンからの周り込みが無視できない場合がある。

2.6 クロマティシティと六重極磁石

x_β , y_β の運動方程式,

$$\begin{cases} x''_\beta + K_x \cdot x_\beta = (K_x \cdot p_z) x_\beta \\ \quad - \lambda (x_c \cdot x_\beta - y_c \cdot y_\beta) \\ y''_\beta + K_y \cdot y_\beta = (K_y \cdot p_z) y_\beta \\ \quad + \lambda (x_c \cdot y_\beta + y_c \cdot x_\beta) \end{cases} \quad (2.26)$$

の右辺は運動量偏移 p_z と六重極成分 λ の効果を現わしている。これらの項は、ベータトロン振動のチューンのズレ,

$$\begin{cases} \Delta \nu_x = \frac{-1}{2\pi} \oint ds [K_x p_z - \lambda x_c] \beta_x(s) \\ \Delta \nu_y = -\frac{1}{2\pi} \oint \beta_y ds [K_y p_z + \lambda x_c] \end{cases} \quad (2.27)$$

を生ずる。チューンシフト $\delta \nu_x$, $\delta \nu_y$ の運動量偏移 p_z による微分係数をクロマティシティという。

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{d}{dp_z} \Delta \nu_x = -\frac{1}{2\pi} \oint \beta_x ds [K_x - \lambda \eta_x] \\ \xi_y &= \frac{d}{dp_z} \Delta \nu_y = -\frac{1}{2\pi} \oint \beta_y ds [K_y + \lambda \eta_x] \end{aligned} \quad (2.28)$$

右辺第二項は、分散のあるところに設置された六重極磁石でクロマチシティの制御が可能であることを示している。

2.7 シンクロトロン振動

ベータトロン振動の議論では p_z は一定としてとりあつかってきた。これは、シンクロトロン振動がベータトロン振動で比べて遅い振動であることによっている。一周毎の z_β および p_β の変化分はベータトロン振動などの速い変化は平均されて

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Z}{2\pi R} &= -\alpha p_z \\ \frac{\Delta p_z}{2\pi R} &= \frac{1}{2\pi R} \frac{e}{cp_0} \left\{ V\left(\frac{s_0 - z_0 + z_\beta}{v}\right) - V\left(\frac{s_0 - z_0}{v_0}\right) \right\} \\ \frac{\Delta^2 p_z}{(2\pi R)^2} &= \frac{1}{(2\pi R)^2} \frac{e}{cp_0} \left\{ V\left(\frac{s_0 + 2\pi R - z_0 + z_\beta + \Delta z_\beta}{v}\right) - V\left(\frac{s_0 - z_0 + z_\beta}{v}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi R)^2} \frac{2\pi eV}{cp_0 \omega_0} \left(\alpha - \frac{1}{r^2} \right) p_z \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。 $\gamma = E/mc^2$ はローレンツ因子、また α はしばしばモーメントコンパクション係数とよばれる。

$$\alpha = \oint \frac{\eta_x}{\rho_0} ds \quad (2.30)$$

したがって一周あたりに平均化された運動量偏移 p_z の運動は単振動(シンクロトロン振動)であってその振動の一周あたりの振動数(チューン) ν_s は、

$$\nu_s = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{e\dot{V}}{cp_0 \omega_0} \left(\frac{1}{r^2} - \alpha \right)} \quad (2.31)$$

である。

2.8 シンクロトロン放射と平衡位相

加速度運動をしている荷電粒子はその加速度の自乗に比例した電磁波の放射を伴う。一樣磁場中での運動

に伴う此の電磁波の放射はシンクロトロン放射と呼ばれている。量子論によれば、此の放射された電磁波はある確率で放出される光子の重ね合わせである。放射される光子のエネルギーの平均は、古典的な立場での単位時間あたりに放射される電磁波のエネルギーに等しく、

$$\begin{aligned} P_r &= \langle \epsilon_r \cdot \xi \rangle \\ &= \frac{2}{3} mc^3 r_e \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 \left(\frac{eB}{p_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

であたえられる。ここで、 r_e は古典電子半径であって、電荷 e のクーロンエネルギーが電子の静止エネルギー、 mc^2 、に等しくなる距離をあらわす。放射される電磁波のスペクトラムは臨界エネルギー、

$$\epsilon_c = \frac{3\hbar c}{2\rho_0} r^3 \quad (2.33)$$

で最大となる。スペクトラムの広がり、

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_r^2 \cdot \xi \rangle &= \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{r_e \hbar c^3 p_0^3 p^4}{(mc)^6} \left(\frac{1}{\rho_0} \right)^3 \\ &= \frac{55}{24\sqrt{3}} \alpha_{\text{fine}} \left(\frac{\hbar}{mc} \times \frac{1}{\rho_0} \right)^3 \\ &\quad \left(\frac{p_0}{mc} \right)^3 \left(\frac{p}{mc} \right)^4 \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right)^3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

で特徴づけられる。

縦方向の運動の平衡軌道は、条件

$$\begin{aligned} \Delta p_{zc} &= \frac{eV_c \left(\frac{s_0 - z_0}{v} \right)}{cp_0} - \frac{U_0}{cp_0} = 0 \\ \Delta^2 p_{zc} &= \Delta P_{zc}(2\pi R) - \Delta P_z(0) \\ &= \frac{eV_c}{cp_0} \left(\frac{s_0 + 2\pi R - z_0 - \Delta z_c}{v} \right) \\ &\quad - \frac{eV_c \left(\frac{s_0 - z_0}{v} \right)}{cp_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

から決められる。ここで、 Δz_c および U_0 は、

$$\Delta z_c = -2\pi R \cdot \alpha p_z \quad (2.36)$$

であたえられる。 U_0 は加速器の一周あたりに荷電粒子が放射するエネルギーである。高周波加速電圧 V_c

の時間変化を

$$V_c = V_0 \sin(\omega_{rf} \cdot t) \quad (2.37)$$

とすると、平衡位相 $\phi_0 = (s_0 - z_0)/v_0$ は

$$V_0 \sin \phi_0 = U_0, \quad \phi_0 = \frac{S_0 - Z_0}{v_0} \quad (2.38)$$

によってきまる。また高周波周波数 ω_{RF} は、

$$\frac{\omega_{rf}}{\omega_0} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha \right) P \right\} = h \quad (h \text{ は整数})$$

$$\omega_0 = v_0/R \quad (2.39)$$

を満たさなければならない。hをハーモニック数と呼ぶ。 $p_z = \Delta E/E_0$ であるから縦方向の振動はまたエネルギー振動でもある。この振動をシンクロトロン振動と呼ぶ。

シンクロトロン振動の方程式は、 $\phi = -\omega_{RF} \cdot z/v$ と書けば、

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \omega_{rf} p_z \\ \frac{dP_z}{dt} = \frac{\omega_0 e V_0}{2\pi c p_0} \{ \sin(\phi + \phi_0) - \sin \phi_0 \} \end{cases} \quad (2.39')$$

これは、ポテンシャル

$$U = \frac{\omega_0 e V_0}{2\pi c p_0} \{ \cos(\phi + \phi_0) + \sin \phi_0 \} \quad (2.39'')$$

のなかの運動になる。相空間内で安定な振動領域は図-3に示したようなセパトリックスにかこまれた領域である。この領域のエネルギー方向の幅は

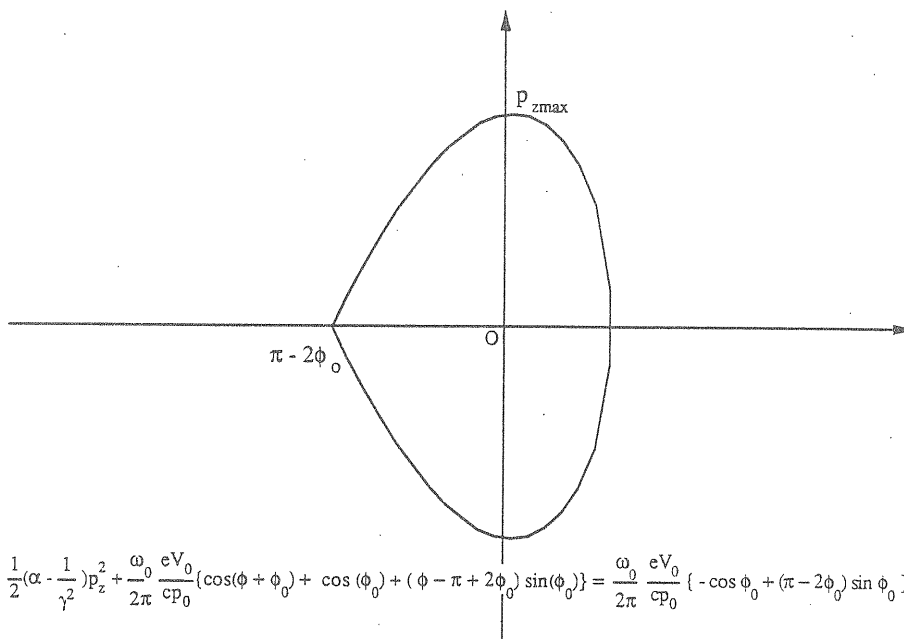
$$p_z \max^2 = \frac{e V_0}{\pi \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) h c p_0} \left\{ -2 \cos \phi_0 + (\pi - 2\phi_0) \sin \phi_0 \right\} \quad (2.39''')$$

となる。

2.9 放射による振動の減衰

シンクロトロン放射を考慮したシンクロトロン振動の方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Z}{2\pi R} &= -\alpha p_z \\ \Delta P_z &= \frac{e V_0}{c p_0} \sin(\phi + \phi_0) \\ &\quad - \mathcal{P} \frac{1}{c v p_0} \left(1 + \frac{\eta_x}{\rho_0} p_z \right) (\epsilon_r \cdot \xi) ds \end{aligned} \quad (2.40)$$



$$\frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) p_z^2 + \frac{\omega_0 e V_0}{2\pi c p_0} \{ \cos(\phi + \phi_0) + \cos(\phi_0) + (\phi - \pi + 2\phi_0) \sin(\phi_0) \} = \frac{\omega_0 e V_0}{2\pi c p_0} \{ -\cos \phi_0 + (\pi - 2\phi_0) \sin \phi_0 \}$$

図-3

と近似できる。ただし、 z の原点は平衡位相にとりな
おし、また ξ は単位時間あたりにエネルギー ϵ_{ph} の
光子を放射する確率をあらわす確率変数である。この
第二式を p_z について展開すると、

$$\begin{aligned} \langle \Delta P_z \rangle = & \frac{eV_0}{cp_0} \{ \sin(\varphi + \varphi_0) - \sin \varphi_0 \} \\ & - \int \frac{P_r(0)}{CP_0} \cdot \left\{ 2 + \frac{\eta_x}{P_0} \right. \\ & \left. + \frac{2}{B_0} \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \eta_x \right\} P_z ds \quad (2.41) \end{aligned}$$

となる。此の式の第二項は、 p_z に比例し 振動を減
衰させる。その減衰時間 τ_z は、上の方程式から

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau_z} = & \frac{1}{\tau_0} \frac{U_0}{cp_0} J_z, \quad J_z = 2 + D \\ D = & \frac{\oint \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{\rho_0} + 2k_x \right) \eta_x ds}{\oint \frac{1}{\rho_0^2} ds} = \frac{I_4}{I_2} \quad (2.42) \end{aligned}$$

である。 J_z を damping partition, (減衰分配率) と呼ぶ。
次に、水平方向を考えて見よう。電磁波の放射によっ
てエネルギーが変化していることを考慮するとベータ
トロン振動の方程式 (2.14) は

$$\begin{cases} x'_\beta = p_{x\beta} - \eta_x(s) P'_z \\ p'_\beta = -K_x \cdot x_\beta - \frac{(\epsilon_r \xi)}{c^2 p_0} - \eta'_x(s) p'_z \end{cases} \quad (2.43)$$

と書き換えられる。第二式の第二項は光子の放出によ
る運動量の変化をあらわしている。このときベータト
ロン振動のエミッタンスは一周あたり、

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_x = & 2 \int ds \left\{ (\beta_x p_{\beta x} + \alpha_x x_\beta) \left[-\frac{\epsilon_r \xi}{c^2 p_0} p_{x\beta} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\epsilon_r \xi}{c^2 p_0} \left(1 + \frac{x_\beta}{\rho_0} \right) \eta'_x \right] \right. \\ & \left. + (\alpha_x p_{x\beta} + r_x x_\beta) \frac{\epsilon_r \xi}{C^2 P_0} \left(1 + \frac{x_\beta}{\rho_0} \right) \cdot \eta_x \right\} \quad (2.44) \end{aligned}$$

の変化を生じる。光子エネルギーとベータトロン振動
の初期位相についての平均をとると、

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_x = & \epsilon_x \left\{ -\frac{1}{c^2 p_0} \oint P_r ds + \oint \frac{P_r}{c^2 p_0} \left[\frac{1}{\rho} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right] \right\} \\ = & -\epsilon_x \frac{U_0}{CP_0} (1 - D) \quad (2.45) \end{aligned}$$

である。ここで、ベータトロン振動の初期位相の平均
のために、

$$\begin{cases} \langle x_\beta^2 \rangle = \frac{\beta_x \epsilon_x}{2}, \quad \langle x_\beta \rangle = 0 \\ \langle P_\beta^2 \rangle = \frac{\gamma_x \epsilon_x}{2}, \quad \langle P_\beta \rangle = 0 \\ \langle x_\beta P_\beta \rangle = -\frac{\alpha_x \cdot \epsilon_x}{2} \end{cases} \quad (2.46)$$

をもちいた。結局水平方向のベータトロン振動の減衰
時間 τ_x は、減衰分配率 $J_x=1-D$ をもちいて、

$$\frac{2}{\tau_x} = \frac{1}{T_0} \frac{U_0}{cp_0} J_x \quad (2.47)$$

となる。垂直方向のベータトロン振動の減衰時間 τ_y
は同様にして

$$\frac{2}{\tau_y} = \frac{1}{T_0} \frac{U_0}{cp_0} J_y \quad (2.48)$$

である。ただし $J_y = 1$ 。

2.10 ベータトロン振動の量子励起

$1/\gamma$ の円錐の中に放射される光子の数は、その円錐
中に放射される電磁波のエネルギーを臨界エネルギー
で割って、

$$N_r \sim \frac{P_r}{\epsilon_c} \frac{\rho_0}{r_c} = \frac{4}{9} \alpha_{\text{fine}} \sim 3 \times 10^{-3} \text{個}$$

となる。 $\alpha_{\text{fine}}=1/137$ は微細構造定数である。このよ
うにシンクロトロン放射に参与する光子の数は少ない
から、シンクロトロン放射の量子論的な効果を無視す
ることは出来ない。量子論的には電磁波は光子の集ま
りとしてあらわされる。電磁波の放射も離散的に光子
がある確率で放出されることによって起こる。従って
短い時間の間に放出されるエネルギーは一定ではなく
平均値、それは古典論で計算される放射率に等しい、

のまわりにゆらぎをもっている。光子の放出に伴い荷電粒子は反跳をうけるが、この反跳もやはり古典的な値の周りにゆらいでいる。これらのゆらぎはベータトロン振動およびシンクロトロン振動を励起する。電子リングではこの振動の励起と放射による振動の減衰の釣合がエミッタンスを決める主要な要因である。

電子リングのエミッタンスを議論する前に減衰力と振動を励起するランダムな外力のある簡単な系を考えて見よう。

このモデルの運動方程式は、

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\frac{2}{\tau}\varepsilon(t) + \xi(t) \quad (2.49)$$

ここで $\xi(t)$ はランダムな外力をあらわす。この方程式の解は形式的に、

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) e^{-\frac{2}{\tau}t} + \int_0^t e^{-\frac{2}{\tau}(t-t_1)} \xi(t_1) dt_1 \quad (2.50)$$

と書くことができる。我々が必要としているのは特別な ξ を与えたときの解ではなくランダムな力について平均したものである。確率変数 ξ の平均値およびそのゆらぎを

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle = \lambda \delta(t_1 - t_2) \quad (2.51)$$

とすると、 $\psi(t)$ の平均値およびその自乗の期待値は、

$$\langle \varepsilon(t) \rangle = \varepsilon_0 e^{-\frac{2}{\tau}t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

$$\langle \varepsilon^2(t) \rangle = \varepsilon_0^2 e^{-\frac{4}{\tau}t}$$

$$+ \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 e^{-\frac{2}{\tau}(2t-t_1-t_2)} \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle$$

$$= \varepsilon_0^2 e^{-\frac{4}{\tau}t} + \frac{\tau \lambda}{4} (1 - e^{-\frac{4}{\tau}t})$$

$$\rightarrow \frac{\tau \lambda}{4} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.52)$$

となる。これは、十分時間が経過した後には、 ψ の分布は平均が0、分散が $\tau \lambda / 4$ に近付くことを示している。

このモデルで $t=0$ に $\psi = \psi_0$ の位置にいた粒子が $t=t$ に $\psi = \psi$ にいる確率を $f(\psi, t; \psi_0, 0)$ と書こう。

確率の保存から

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(-\frac{2}{\tau}x + \xi \right) f \right] = 0$$

である。確率変数についての平均をとると。

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{2}{\tau}x \langle f \rangle + \langle \xi f \rangle \right] = 0$$

平衡分布を考えると $\langle \xi f \rangle$ は近似的に $(2/\tau)x f_0$ で置換えることが出来る。ここで f_0 は $t \rightarrow \infty$ での平衡分布である。

さて次に運動は $X=x_m$ にある壁で制限されているとして見よう。この壁は到達した粒子を全て吸収してしまうものであるとする。したがって $x > x_m$ では、 $f = 0$ である。壁に吸収されてしまう寿命 τ_q は、単位時間あたりに壁の外側にしみ出してしまう粒子数を勘定して

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_q} &= \int_{x_{\max}}^{\infty} \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} dx \\ &= -\frac{2}{\tau} \int_{x_{\max}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (x f_0) dx \\ &= \frac{2}{\tau} x_{\max} f_0(x_{\max}) \end{aligned}$$

と求められる。

以上の結果を上で議論したベータトロン振動及びシンクロトロン振動のシンクロトロン放射による励起に適用すると、一周あたりのエミッタンス変化の自乗平均は、

$$\begin{aligned} \langle \Delta \varepsilon_x^2 \rangle &= 4 \int ds \frac{\langle \varepsilon_r^2 \xi \rangle}{(c^2 p_0)^2} C \left\{ \eta_x'^2 \langle (\beta_x p_{\beta x} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_x x_{\beta})^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + 2 \eta_x \eta_x' \langle (\beta_x p_{\beta x} + \alpha_x x_{\beta}) \right. \\ &\quad \left. (\alpha p_{\beta x} + r_x x_{\beta}) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \eta_x^2 \langle (\alpha_x p_{\beta} + r_x x_{\beta})^2 \rangle \right\} \quad (2.53) \end{aligned}$$

となる。これより平衡状態のエミッタンス、

$$\varepsilon_x = \frac{55}{32\sqrt{3}} \left(\frac{\hbar}{mc} \right) \frac{r^2}{J_x} \frac{\oint \frac{1}{\rho^3} H(s) ds}{\oint \frac{1}{\rho^2} ds} \quad (2.54)$$

$$\text{ここで } H(s) = r_x \eta_x^2 + 2 \alpha_x \eta_x \eta_x' + \beta_x \eta_x'^2$$

が導かれる。垂直方向のベータatron振動およびシンクロtron振動についても同様に

$$\langle p_z^2 \rangle = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \frac{r^2}{J_z} \frac{\oint \frac{1}{\rho^3} ds}{\oint \frac{1}{\rho^2} ds} \quad (2.55)$$

となる。

エミッタンスの最大値が何らかの理由によって制限されていればビームは寿命、

$$\frac{1}{\tau_q} = \frac{2}{\tau_x} \cdot \left(\frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_x} \right) e^{-\frac{\epsilon_{\max}}{2\epsilon_x}} \quad (2.56)$$

を持つ。電子リングではエネルギー振動の最大値による寿命がこの種の寿命では問題になる。

3. 低エミッタンスラティースとダンピングウィグラー

3.1 抵エミッタンスラティース

前節までの結果をまとめると、ビームのエミッタンスは

$$\epsilon_x = \left(\frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \right) \cdot \frac{\oint \frac{1}{\rho^3} H ds}{\oint \frac{1}{\rho^2} ds} \times \frac{r^2}{J_x} \quad (3.1)$$

ただし $J_x = 1 - D$

$$D = \frac{\oint \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho^2} + 2k \right) ds}{\oint \frac{1}{\rho^2} ds}$$

である。エミッタンスを小さくするためには、

- 1.) $\langle H \rangle$ をラティースを工夫して小さくする。
- 2.) 減衰分配率 J_x を制御する。
- 3.) ウィグラーによる放射減衰の増加によって減衰時間を短くする。

と言う方法が考えられる。

最初に標準的なラティースであるFODOラティースと抵エミッタンスの加速器のために考え出されたChasman-Greenラティースについてそのエミッタンスを考察する。

3.2 FODOラティース

FODOラティースは図-4に示したように、一対の四重極磁石からなる周期的な構造である。トリスタン加速器もこのFODO構造が基本的な構造になっている。一ユニット(セル)あたりの長さを $2\pi R$ 、ベータatron振動の位相の進みを ν とすると平均的なベータ関数の大きさを

$$\bar{\beta} = \frac{R}{\nu} \quad (3.2)$$

と定義する。H は分散関数の表式(2.25) をもちいると、

$$H = \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \int_s^{s+2\pi R} ds_1 \int_s^{s+2\pi R} ds_2 \frac{\sqrt{\beta(s_1)\beta(s_2)} \cos(\phi(s_1) - \phi(s_2))}{\rho(s_1)\rho(s_2)} \quad (3.3)$$

とかける。積分のなかのベータ関数を平均値で置換えると、

$$H = \frac{\bar{\beta}^3}{\rho_0^2} = \rho_0 \left(\frac{\theta_B}{\nu} \right)^3 \quad (3.4)$$

となる。ここで θ_B は二重極磁石の偏向角度、 ρ_0 は曲率半径である。エミッタンスに直すと、

$$\epsilon_x = C_q \frac{r^2}{J_x} \left(\frac{\theta_B}{\nu} \right)^3, \quad C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \quad (3.5)$$

この式からFODOラティースでエミッタンスを小さくするためには、セルあたりの偏向角を小さく、チューンを大きくすればよいことが解る。図-5にエミッタンスのセルあたりのチューン依存性の例を示す。セルあたりのチューンが小さいところでは、(3.5)式がよい近似であることが解る。 $\nu=0.5$ ではHが発散してしまうからエミッタンスを最小にするチューンが存在する。この最小値を与えるチューンはラティースの構造に

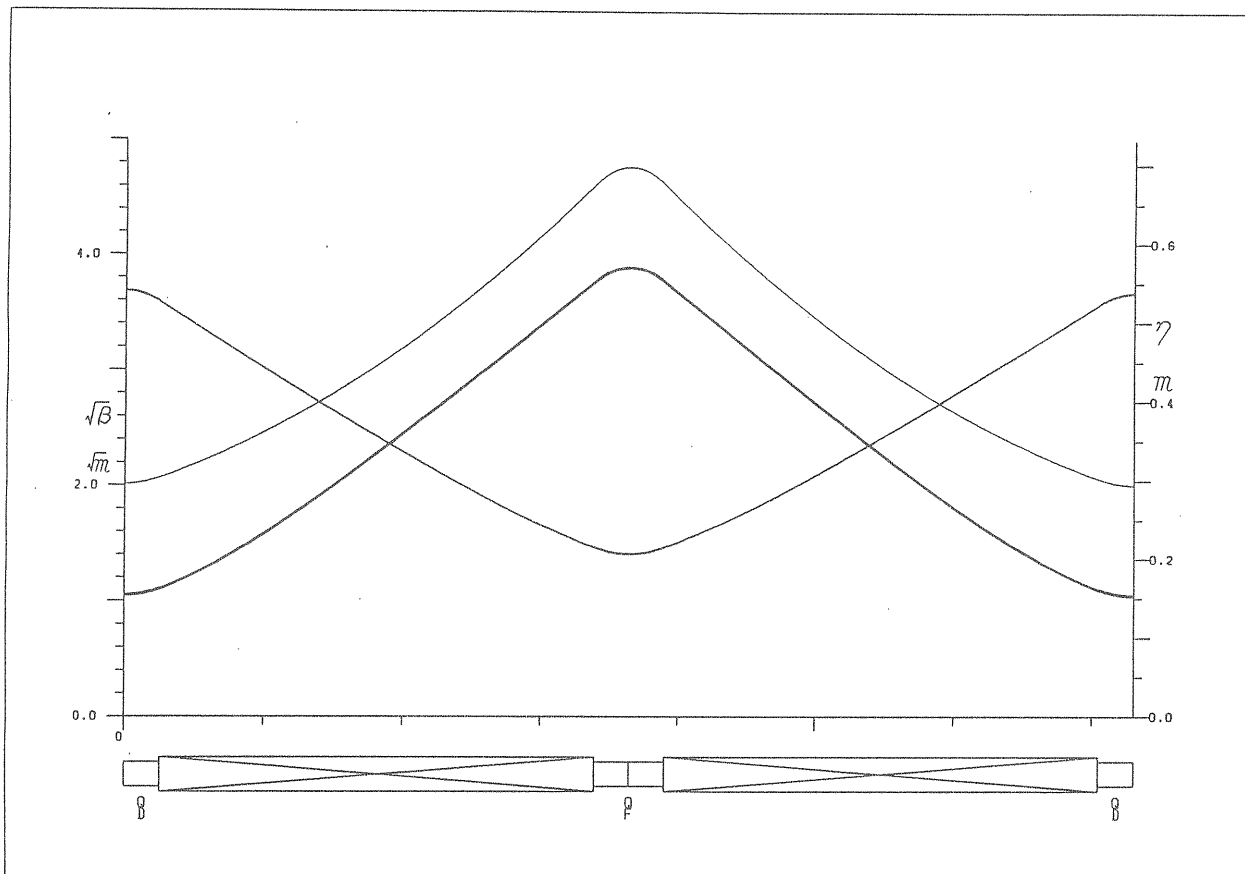


图-4(a)

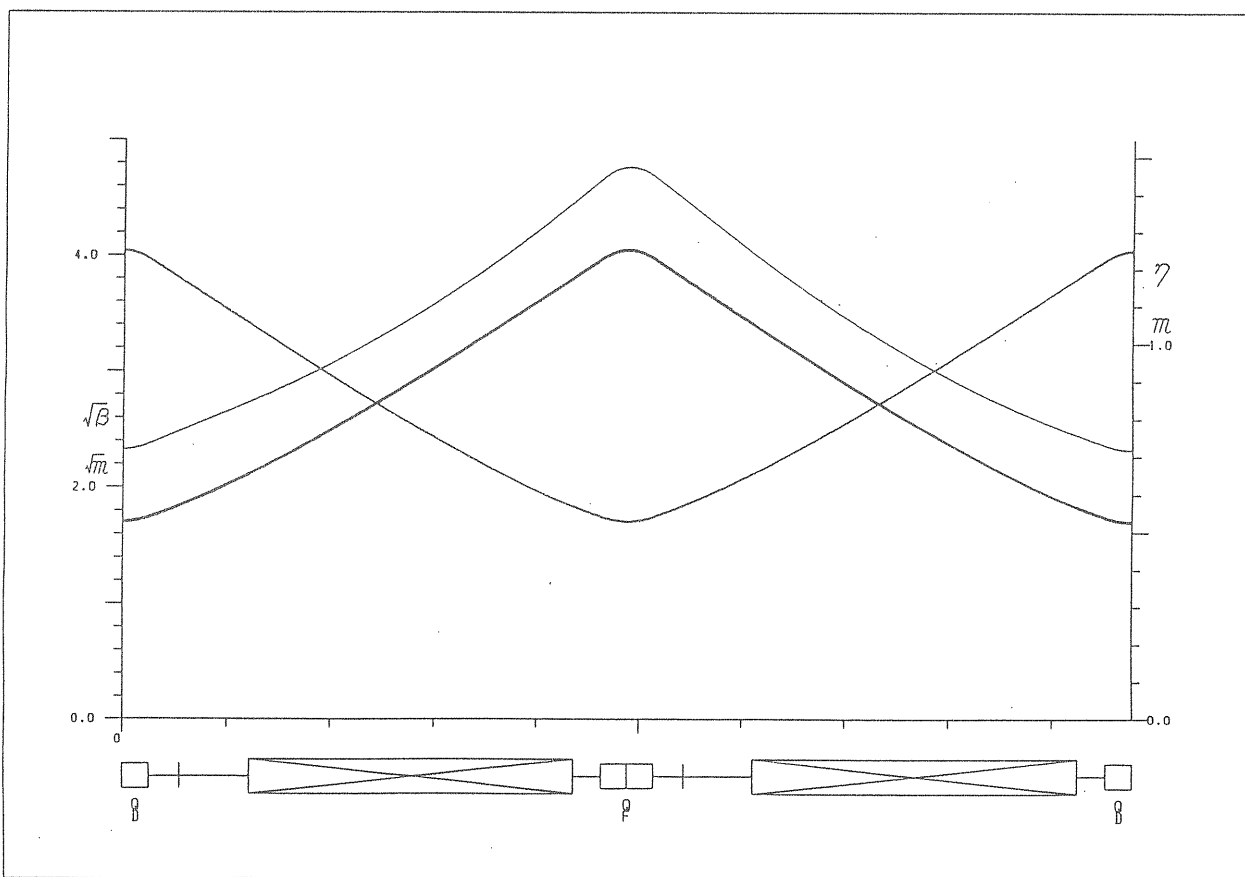


图-4(b)

依存するが、大体エミッタンスはセルあたりの位相の進みが100°-150°付近で最小になる。

3.3 Chasman-Green ラティス(Double Focusing Achromat)

ラティスの低エミッタンス化のためには二重極磁

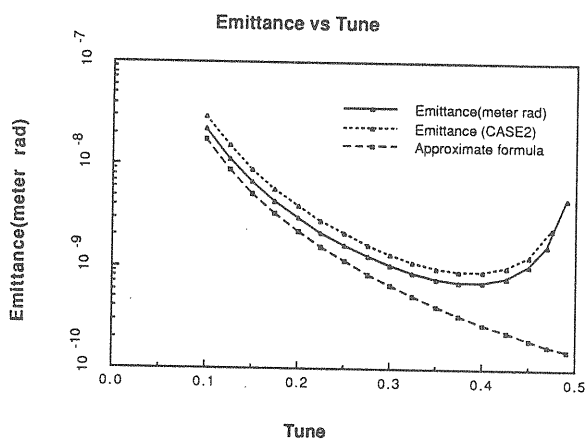


図-5

石中の H 従って分散関数 η_x が小さいことが必要である。Chaman-Green ラティスの基本的な構造は図-6に示されるように二つの二重極磁石によって生じる分散は中央に置かれた四重極磁石によってお互いに打ち消しあい他の部分に影響を与えない。また二重極磁石は分散が最小の所に置かれている。二重極磁石中の分散関数は、分散が0の側からの距離を s とすると、

$$\eta_x(s) = \rho \left(1 - \cos \frac{s}{\rho} \right) \approx \frac{s^2}{2\rho}$$

$$\eta'(s) = \sin \left(\frac{s}{\rho} \right) \approx \frac{s}{\rho} \quad (3.7)$$

となる。偏向磁石中でベータ関数が最小になる点を s^* ; その点でのベータ関数の値を β^* とすると、このラティスの H の平均値は

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{1}{l_B} \int_0^{l_B} H ds \\ &= \frac{l_B^2}{3\rho^2} \left\{ \frac{1}{\beta^*} \left(s^* - \frac{3}{8}s \right)^2 + \beta^* \right\} \end{aligned}$$

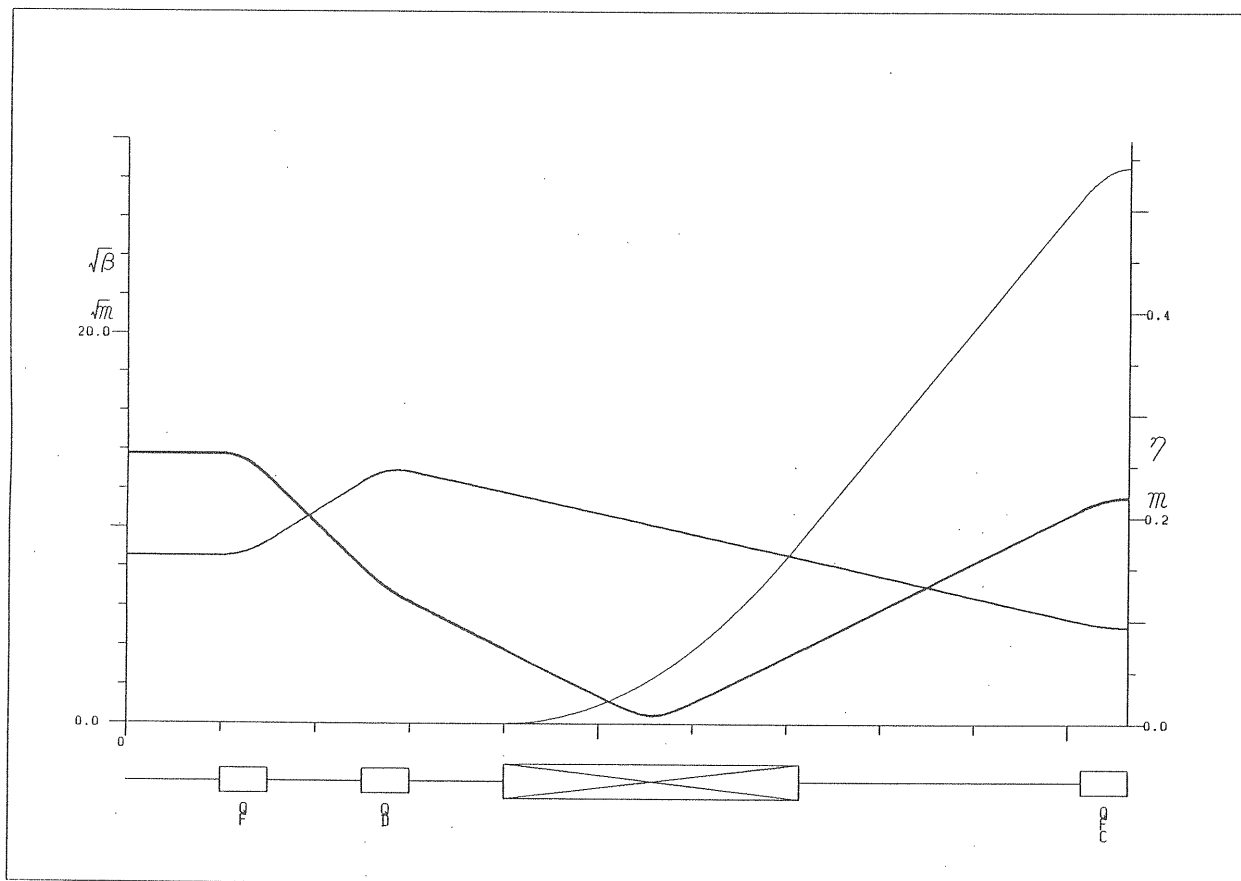


図-6

$$+ \frac{3}{320} \frac{s^2}{\beta^*} \} \quad (3.8)$$

従って $s' = 3/8 s$, $\beta^* = \frac{3}{8\sqrt{5}} \beta$ のときに $\langle H \rangle$ は最小値,

$$\langle H \rangle = \frac{\rho_0}{4\sqrt{15}} \phi_B^3 \quad (3.9)$$

を取る。このときのエミッタンスは,

$$\epsilon_{x \text{ min}} = C_q \cdot \frac{r^2}{J_x} \frac{\phi_B^3}{4\sqrt{15}} \quad (3.10)$$

である。これをFODOラティスのそれと比べて見ると

$$\frac{\epsilon_{C-G}}{\epsilon_{FODO}} = \frac{\nu^3}{4\sqrt{15}} \sim \frac{1}{20} \quad (3.11)$$

とC-G ラティスによるエミッタンスの改善の効果がわかる。

FODO, C-Gどちらのラティスの場合にも通常のラティスにくらべ四重極磁石による収束力が強くなる。クロマチシティを補正する六重極磁石も同時に強くすることになるが、これはベータatron振動の運動に大きな非線形な力をもたらす。このようなクロマチシティ補正とそれによるベータatron振動の安定性の変化についてはこの連続講義の佐藤氏による講義がある。

3.4 高周波加速装置の周波数と減衰分配率。

最初に述べたように減衰分配率 J_x を変化させることによってエミッタンスを制御することができる。 $J_x=1-D$ を制御する方法として高周波加速装置の周波数を設計値から偏りさせる方法がある。周波数偏移を $\Delta f/f_0$ とするとビームの運動量は,

$$\frac{\Delta f_{rf}}{f_{rf}} = -\alpha \frac{\Delta P}{P} \quad (3.12)$$

に従って変化する。これによって水平方向の軌道は分散関数 η_x によって

$$\Delta x = \eta_x \cdot \frac{\Delta P}{P_0} = -\eta_x \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta f_{rf}}{f_{rf}} \quad (3.13)$$

だけ偏移する。この軌道のズレは四重極磁石での二重極成分

$$\Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) = K_x \cdot \Delta x = -\eta_x \frac{\Delta f_{rf}}{\alpha f_{rf}} \quad (3.14)$$

を生ずる。此の結果減衰分配率は,

$$\begin{aligned} \Delta J_x &= -\Delta D \\ &= \oint \frac{2K_x^2 \eta_x^2 ds}{\rho^2} \frac{\Delta f}{\alpha f} \end{aligned} \quad (3.15)$$

だけ変化する。此の方法はトリスタン MR での運転で実際に利用されている。 $\Delta f=1.5\text{kHz}$ で,

$$\frac{\epsilon_{x'}}{\epsilon_{x0}} = \frac{1.60 \times 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{rad}}{1.05 \times 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{rad}} = 0.66 \quad (3.16)$$

を得ている。

此の方法では横方向のエミッタンスの減少と同時に起きるエネルギー振動の増加をさけることが出来ない。エネルギー振動による量子寿命は,

$$\frac{1}{\tau_q} = \frac{2}{\tau_z} \frac{1}{2} \frac{P_z \text{ max}^2}{\langle P_z^2 \rangle} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{P_z \text{ max}}{\langle P^2 \rangle} \right)} \quad (3.17)$$

で決められる。高周波電圧 V_c および減衰分配率 J_e の依存性は

$$\frac{1}{\tau_q} \propto J_z^2 \cdot V_0 e^{-\text{const}(J \cdot v_0)} \quad (3.18)$$

であるから、 J_e の減少に対抗して寿命を保つには高周波加速電圧を増やすことが必要となる。

3.5 ダンピングウィグラー

リング一周あたりのシンクロtron放射の量を増やすことによって振動の減衰率を早くすることができる。このためには図-7に示したような互いに逆向きの偏向角を持つ偏向磁石を一行に並べた装置、ウィグラー、をラティスに挿入してやればよい。一般には放射の増加はそれによる量子励起の増加も意味するから、エミッタンスは減少するとは限らない。ウィグラーのあ

るときエミッタンスは

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= C_q \frac{r^2}{J_x} \frac{\oint \frac{1}{\rho^3} H ds}{\oint \frac{ds}{\rho^2}} \\ &= C_q \frac{r^2}{J_x} \frac{\langle \frac{1}{\rho_o^2} H \rangle_o + \langle \frac{1}{\rho_w^3} H_w \rangle_w}{\langle \frac{1}{\rho_o^2} \rangle_o + \langle \frac{1}{\rho_w^2} \rangle_w} \end{aligned} \quad (3.19)$$

となるから、ウィグラーを H が 0 即ち分散関数 η_x とその微分係数 η_x' がともに 0 となる場所に設置すれば、量子励起の増加を押えたまま放射減衰時間を短くすることができる。

ウィグラーによるベータトロン振動の励起が 0 であれば理想的ではあるが、分散関数 η_x とその微分係数 η_x' が 0 の場所にウィグラーを置いたとしても、自らが生み出す分散のため、ウィグラー磁石の中では量 H はゼロでない値を持つ。図-5に示した様なウィグラーでは、

$$\frac{\epsilon_{xw}}{\epsilon_{x0}} = \frac{1 + \frac{5}{6\pi} N_w \frac{\bar{\beta}_x}{\langle H \rangle_o} \frac{\rho_o}{R} \left(\frac{\rho_o}{\rho_w} \right)^2 \theta_w^3}{1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\rho_o}{\rho_w} \right) N_w \theta_w} \quad (3.20)$$

と近似的にあらわすことが出来る。ここでは、ウィグラーのなかでは β 関数は一定であると近似している。また N_w はリング一周中にあるウィグラーの数である。ダンピングウィグラーがエミッタンス減少に有効であるためには、 $\epsilon_{xw}/\epsilon_{x0}$ が 1 以下でなければならないから、

$$\frac{5}{12} \frac{\bar{\beta}_x}{\langle H \rangle_o} \frac{\rho_o}{R} \left(\frac{\rho_o}{\rho_w} \right) \theta_w^2 < 1 \quad (3.21)$$

あるいは、

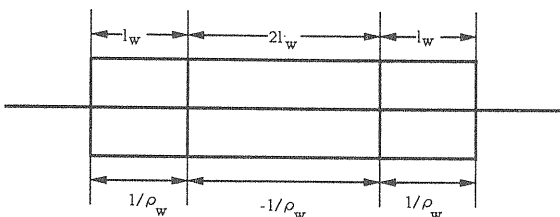


図-7

$$\frac{5}{12} C_q \bar{\beta}_x \frac{r^2}{J_x} \cdot \frac{\theta_w}{\rho_w} < \epsilon_{x0} \quad (3.22)$$

が成り立つ必要がある。

(3.20)式で N_w を大きくする、即ち一周当たりのウィグラーの設置台数をふやしてゆくと $N_w \rightarrow \infty$ では、

$$\epsilon_{xw} \rightarrow \frac{5}{12} C_q \frac{\bar{\beta}_x}{J_x} r^2 \frac{1_w^2}{\rho_w^3} \quad (3.23)$$

となりエミッタンスはウィグラーだけで決まってしまう。また、ウィグラーの長さの和 $N_w l_w$ とウィグラー中の曲率半径 ρ_w を一定に保ちながら $N_w \rightarrow \infty$ とした極限は

$$\frac{1 + \frac{1}{N_w^2} \times \frac{5}{6\pi} \frac{\bar{\beta}_x}{\langle H \rangle_o} \frac{\rho_o}{R} \left(\frac{\rho_o}{\rho_w} \right)^2 \left(\frac{N_w l_w}{\rho_w} \right)^3}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{\rho_o}{\rho_w} \frac{N_w l_w}{\rho_w}} \quad (3.24)$$

である。これから解るようにダンピングウィグラーの分割数を増やした全体での長さを増やすほどエミッタンスは小さくなる。トリスタンMRにダンピングウィグラーを設置した場合の計算例を図-8に示す。これに見られるように、ダンピングウィグラーによって 0.5-0.1のエミッタンスのリダクションを実現する可能性がある。

3.6 その他

この講義では著者の力量不足と怠慢で触れることが出来なかったが、考慮すべきいくつかの問題がのこされている。その問題点の幾つかをここに上げておく。

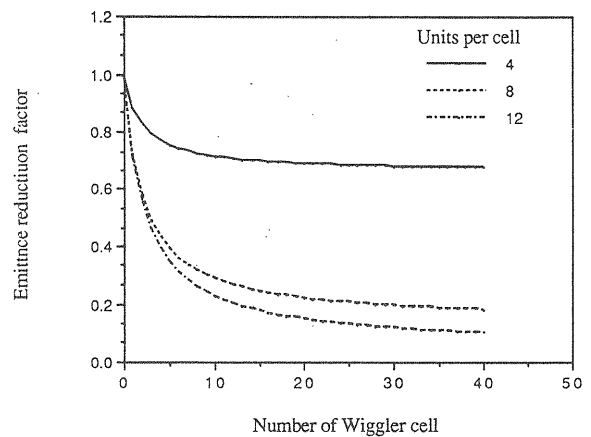


図-8

まず、抵エミッタンスのラティスでは四極磁石による強い収束力が必要となる。これによるクロマチシティを補正する六極磁石の強さも大きくなるため、非線形力によるビームの不安定性が増大すると予想される。

周波数を変化させる方法では、平衡軌道が設計軌道から離れるために、六極磁石が四重極成分を持ち、平衡軌道についての β 関数等が設計値から大きくことになってしまう。このために周波数を変化させたことによるエミッタンスの改善率は予想より悪くなってしまう。最適の効果をj得るためには、このことを考慮した加速器の光学系を設計しなければならない。

この講義ではエミッタンスを作り出す要因としてはシンクロトロン放射による励起だけを考えたが、抵エミッタンスのリングでは

ビーム内の粒子間の相互作用、
残留ガスとの衝突、
等の要因も考慮する必要がある。

現実の加速器には磁石の設置精度や磁場の精度等多くの誤差がある。これらの誤差についてエミッタンスへの影響を評価し、誤差の許容範囲を定めることも現

実的な設計の中では必要となる。

最後に、この講義の機会を与えていただいた、加速器奨励会と木村嘉孝先生及び講義の準備中にいつも励ましていただいた鎌田進先生に感謝します。

参考文献

この講義を準備するのに参考とした文献および標準的な加速器物理への入門のためのテキストを上げておく。

M.Sands "The physics of electron storage rings An introduction" E. Courand & H. Snyder Ann. Phys. (N.Y. vol. 3, 1(1958)).

鎌田進, OHO' 85 テキスト

神谷, OHO' 84 テキスト

CERN Accelerator School '84, '85 Text.

H. Wiedemann "PEP Electron Positron Projects as a High Brightness Synchrotron Radiation Source"

J. Safrajek, H. Wiedemann, W. Xie, and S. Okuda "Tolerances in Diffraction limited Synchrotron Light Sources"