

# 1. 序

加速器およびビーム輸送路において、すべての四極磁石の中心を通る軌道を中心軌道という。円形加速器では、偏向磁石を適当に配置して、中心軌道が閉じる様にする。この閉じた中心軌道は粒子の運動方程式の周期解(つまり閉軌道)になっており、ビームの重心は、中心軌道に一致する。ところが、加速器内に、余分な偏向磁場(以下誤差磁場という)があったとすると、もはや、閉軌道は中心軌道に一致しなくなる。このずれを閉軌道のずれ(closed orbit distortion : 略してC.O.D)という。

C.O.Dは加速器を運転するとき、色々な不都合を引き起こす。まず、加速器の物理的な口径が減ることによって、ビームの寿命が短くなる。極端な場合、ビームが、真空チェンバに当たって、全く回らなくなる。また、ビームの入射・取り出し、シンクロトロン放射光のビーム位置調整、衝突型加速器での物理実験用測定器に入るノイズ落とし等、ビームの位置および角度を細かくコントロールする必要がある場合、それが困難になる。

C.O.Dは、誤差磁場の原因(偏向磁石の磁場のばらつき、四局磁石の設置誤差等)を減らして小さくすることができるが、それには限界があるので、補正システムが必要になる。

この講義では、C.O.Dの性質を調べた後、3つの代表的なC.O.D補正法(ベスト・コレクタ法、フーリエ解析による方法、ローカル・バンプ法)について説明する。更に、C.O.D補正とよく似ているディスパージョンの補正についても簡単に触れる。他の講義との重複をさけるため、運動方程式、トゥイスパラメータ、トランスファ行列等、軌道理論の基礎については説明を略す。

## 2. 閉軌道のずれ(C.O.D)

### 2.1 座標系

この講義で使う座標系を図2-1に示す。粒子の位置は、図2-1の(x,z,s)で表わす。x,z座標は中心軌道のおおの点で中心軌道に垂直な面内にとる。s座標は、中心軌道のある点oを原点にしたときの中心軌道に

沿った長さで表わす。図2-1で $\rho(s)$ はs点での中心軌道の曲率半径である。

以下では、xとzを総称する記号としてyを使う。

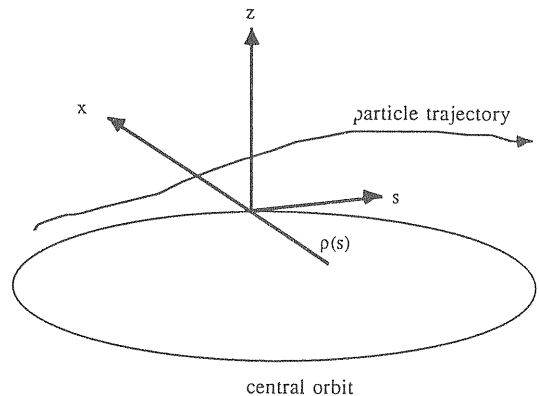


図2-1 座標系

### 2.2 C.O.Dの表現

序で述べた様に、加速器中に誤差磁場があるとC.O.Dが生じる。この節では、C.O.Dを表わす式を導く。

誤差磁場 $\Delta B(s)$ がある時の運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K(s)y = -\frac{\Delta B(s)}{B\rho} \equiv F(s) \quad (2.2.1)$$

ここで $K(s)$ は、水平(x)方向に対して、

$$K(s) = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{B\rho} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_{x=z=0}$$

垂直(z)方向に対して、

$$K(s) = -\frac{1}{B\rho} \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_{x=z=0}$$

で与えられる。(2.2.1)を解くために次の変換(クーラン・シュナイダ変換)を導入する。

$$\eta(s) = \frac{y}{\sqrt{\beta}} \quad (2.2.2)$$

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\nu\beta} \quad (2.2.3)$$

ここで、 $\beta$ 、 $\nu$ はそれぞれ $\beta$ 関数、ベータトロン振動数である。(2.2.2)、(2.2.3)を(2.2.1)に代入し、

$$\frac{1}{2} \beta \beta'' - \frac{1}{4} \beta'^2 + K \beta^2 = 1 \quad (2.2.4)$$

なる式を使うと、(2.2.1)は、

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = \nu^2 \beta^{3/2} F(s) \equiv \nu^2 f(\phi(s)) \quad (2.2.5)$$

になる。

(2.2.4)は、(2.2.1)で $F(s)=0$ とおいたベータトロロン振動の方程式に、その解  $y(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos\left(\int_0^s \frac{1}{\beta(s)} ds + \delta\right)$  を代入して得られる。

求めようとしているC.O.Dは(2.2.5)の周期解である。周期解の出し方は色々あるが、ここでは文献1)に従う。まず、解を次の様に仮定する。

$$\eta(\phi) = \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \nu^2 f(\vartheta) u(\vartheta, \phi) d\vartheta. \quad (2.2.6)$$

関数

$$G(\phi) = \int_{a(\phi)}^{b(\phi)} g(\vartheta, \phi) d\vartheta$$

に対して、

$$\begin{aligned} \frac{dG(\phi)}{d\phi} &= g(b, \phi) \frac{db(\phi)}{d\phi} - g(a, \phi) \frac{da(\phi)}{d\phi} \\ &+ \int_{a(\phi)}^{b(\phi)} F(\phi) \frac{du}{d\phi} d\vartheta \end{aligned}$$

という公式を使って、 $\eta(\phi)$  ( $\cdot$ は $\phi$ についての微分)を求めて(2.2.5)に代入し、

$$f(\phi+2\pi) = f(\phi)$$

の条件を使うと、 $u(\theta, \phi)$ の満たすべき関係式、

$$u(\phi+2\pi, \phi) = u(\phi, \phi) \quad (2.2.7)$$

$$\dot{u}(\phi+2\pi, \phi) - \dot{u}(\phi, \phi) = 1 \quad (2.2.8)$$

$$\ddot{u}(\vartheta, \phi) + \nu^2 u(\vartheta, \phi) = 0 \quad (2.2.9)$$

が得られる。ただし、 $\cdot$ は第2引数についての微分である。 $u(\theta, \phi)$ を求めるために、(2.2.9)を満たす解

$$u(\vartheta, \phi) = A(\vartheta) \sin \nu \phi + B(\vartheta) \cos \nu \phi \quad (2.2.10)$$

を仮定すると、(2.2.7)、(2.2.8)から

$$A(\vartheta+2\pi) - A(\vartheta) = \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu}$$

$$B(\vartheta+2\pi) - B(\vartheta) = -\frac{\sin \nu \vartheta}{\nu}$$

の関係が出てくるので、 $A(\theta)$ 、 $B(\theta)$ は

$$A(\vartheta) = \frac{\sin \nu(\vartheta - \pi)}{2\nu \sin \pi \nu}$$

$$B(\vartheta) = \frac{\cos \nu(\vartheta - \pi)}{2\nu \sin \pi \nu}$$

となり、(2.2.10)より、

$$u(\vartheta, \phi) = \frac{1}{2\nu \sin \pi \nu} \cos \nu(\vartheta - \pi - \phi)$$

が得られる。求める $\eta(\phi)$ は $u(\theta, \phi)$ を(2.2.6)に代入して、

$$\eta(\phi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\vartheta) \cos \nu(\vartheta - \pi - \phi) d\vartheta \quad (2.2.11)$$

となる。(2.2.2)および(2.2.3)を使って(2.2.11)を通常の座標 $y(s)$ で表わすと、C.O.Dを与える式は、

$$y(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+c} \left\{ \sqrt{\beta(\sigma)} \cos(\pi \nu - \mu(\sigma) + \mu(s)) \right\} F(\sigma) d\sigma \quad (2.2.12)$$

$$\mu(s) = \int_0^s \frac{1}{\beta(s)} ds$$

となる。 $y(s)$ は、分母に $\sin \pi \nu$ があるので、ベータトロロン振動数 $\nu$ が整数に近づくにつれて大きくなる。この現象は整数共鳴と呼ばれており、加速器を運転するとき $\nu$ を整数にとつてはならないことがわかる。また、加速器に初めてビームを入射するとき、C.O.Dを小さくしてビームを回り易くするため、(他の共鳴にかからない範囲で)できるだけ $\nu$ を整数から遠ざけて運転することも行なわれている。

### 2.3 誤差磁場の原因

C.O.Dを作る誤差磁場には主として以下のものがある。

(1) 偏向電磁石の誤差磁場

偏向電磁石の磁場は、使用する鉄材の磁気特性の違いや製作上の寸法誤差のせいで電磁石毎にばらつきを持つ。偏向電磁石は通常1台の電源によって励磁されるので、磁場のばらつきは誤差磁場になる。この誤差磁場 $\Delta B$ によるビームの偏向角(通称キック角と呼ばれる) $\psi$ は

$$\psi = +F(s) \ell = -\frac{\Delta B \ell}{B \rho} \quad (\ell \text{ は磁石の長さ}) \quad (2.3.1)$$

である。

(2) 四極電磁石の設置誤差

磁場勾配  $g = \left. \frac{\partial B_z}{\partial x} \right|_{x=z=0}$  をもつ四極電磁石の中心が中心軌道に対して、水平あるいは垂直方向に $\Delta y$ ずれているとすれば $g \Delta y$ の誤差磁場が生じる。水平あるいは垂直方向のキック角 $\psi$ は

$$\psi = -\frac{g \ell}{B \rho} \Delta y \quad (2.3.2)$$

となる。

(3) 偏向電磁石の回転誤差

偏向電磁石が中心軌道に対して回転しているとビームに対して垂直方向のキックを与える。回転角を $\theta$ とすると

$$\psi = -\frac{B \theta \ell}{B \rho} \quad (2.3.3)$$

である。

(1)は水平方向、(2)は水平・垂直両方向、(3)は垂直方向のC.O.Dの原因となる。

TRISTAN ARを例にとってキック角の標準偏差 $\psi_{r.m.s}$ を求めてみると、(1)については、

$$\left\langle \frac{\Delta B \ell}{B \rho} \right\rangle_{r.m.s} \sim 4 \times 10^{-4}, \quad \frac{\ell}{\rho} = 0.1122 \quad \text{だから}$$

$$\psi_{r.m.s} = \frac{\ell}{\rho} \left\langle \frac{\Delta B \ell}{B \rho} \right\rangle_{r.m.s} = 0.04 \text{ mr},$$

(2)については、四極磁石の種類によって $\psi_{r.m.s}$ が異なるが、ノーマル・セルのQF磁石を例にとって垂直方向の $\psi_{r.m.s}$ を求めると、

$$\frac{g \ell}{B \rho} = 0.334, \quad \langle \Delta z \rangle_{r.m.s} \sim 0.25 \text{ mm} \quad \text{なので}$$

$$\psi_{r.m.s} = \frac{g \ell}{B \rho} \langle \Delta z \rangle_{r.m.s} = 0.08 \text{ mr},$$

(3)については、

$$\langle \vartheta \rangle_{r.m.s} \sim 0.05 \text{ mr} \quad \text{より},$$

$$\psi_{r.m.s} = \frac{\ell}{\rho} \langle \vartheta \rangle_{r.m.s} = 0.006 \text{ mr},$$

となる。

## 2.4 シングル・キック<sup>2),3)</sup>

(2.2.12)で $F(s)$ つまり誤差磁場が1ヶ所 $s_1$ に局在化している場合、誤差磁場のある領域を $l$ とするとC.O.Dは、

$$y(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)} \sqrt{\beta(s_1)}}{2 \sin \pi \nu} \cos(\pi \nu + \mu(s) - \mu(s_1)) \vartheta_1 \quad (2.4.1)$$

$$\vartheta_1 = F(s_1) \ell = -\frac{\Delta B l}{B \rho}$$

で与えられる。もし $\mu(s)$ がリングのある点を原点として $0 \leq \mu(s) < 2\pi \nu$ の範囲で与えられているなら、 $\cos$ の位相は、

$$\begin{aligned} s \leq s_1 (\mu(s) \leq \mu(s_1)) \quad \text{のとき} \\ \pi \nu + \mu(s) - \mu(s_1), \\ s > s_1 (\mu(s) > \mu(s_1)) \quad \text{のとき} \\ \pi \nu + \mu(s) - (\mu(s_1) + 2\pi \nu) \\ = \pi \nu - \mu(s) + \mu(s_1), \end{aligned}$$

だから(2.4.1)は

$$y(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)} \sqrt{\beta(s_1)}}{2 \sin \pi \nu} \cos(\pi \nu - |\mu(s) - \mu(s_1)|) \cdot \vartheta_1 \quad (2.4.2)$$

になる。(2.4.1)あるいは(2.4.2)はリング上の一ヶ所でビームをキックしたとき生じるC.O.Dなので'シングル・キックによるC.O.Dの式'と呼ばれている。 $\theta_1$ は例えばステアリング磁石で与えることができる。

(2.4.1)からわかることを挙げてみると、

(1)キックを与える場所での $\beta$ 関数 $\beta(s_1)$ の平方根に比例してC.O.Dが大きくなる。このことから $\beta$ の大きい所(例えば衝突型加速器の衝突点付近)にある四極磁石は高精度で設置しなければならないことがわかる。またC.O.D補正に使うステアリング磁石は $\beta$ の大きい

所(水平方向については, focusing四極磁石の付近, 垂直方向については, defocusing四極磁石の付近)に置いた方が効果大きい。

(2)シングルキックのC.O.Dを観測するとベータトロン振動数 $\nu$ の整数部を知ることができる。また $\nu$ の小数部が, 0.5より上か下かを決定できる。まずキックした点 $s_1$ でのC.O.Dを求めると, (2.4.1)より

$$y(s_1) = \frac{1}{2} \beta(s_1) \cot \pi \nu \cdot \vartheta_1$$

$$= \frac{1}{2} \beta(s_1) \cot \pi \Delta \nu \cdot \vartheta_1 \quad (2.4.3)$$

となる。ただし $\Delta \nu$ は $\nu$ の小数部である。  
 $0 < \Delta \nu < 0.5$ のとき  $\cot \pi \nu < 0$ ,  $0.5 < \Delta \nu < 1$ のとき  $\cot \pi \nu < 0$ であり,  $\beta(s_1) > 0$ だから,  
 $\theta_1 > 0$ のとき

$$0 < \Delta \nu < 0.5 \text{ なら } y(s_1) > 0,$$

$$0.5 < \Delta \nu < 1 \text{ なら } y(s_1) < 0$$

となる。このことと(2.4.1)から,  $\theta_1 > 0$ のとき  
 $0 < \Delta \nu < 0.5$ ならキックした点でのC.O.Dが正になり, C.O.Dの山の数は $\nu$ の整数部に等しくなることが

わかる。また,  $0.5 < \Delta \nu < 1$ ならキックした点でのC.O.Dが負になり, C.O.Dの山の数は $\nu$ の整数部+1になる。例えば $\nu = 4.25$ と $4.75$ の場合, 横軸に(2.2.3)の $\phi(s)$ をとり,  $y(s)/\sqrt{\beta}$ を図示すると図2-2のようになる。

シングル・キックによるC.O.Dを測定するには, キックした後のC.O.D測定値からキックする前のC.O.D測定値を引けば良い。TRISTAN ARで観測した垂直方向シングルキックの様子を図2-3に示す。

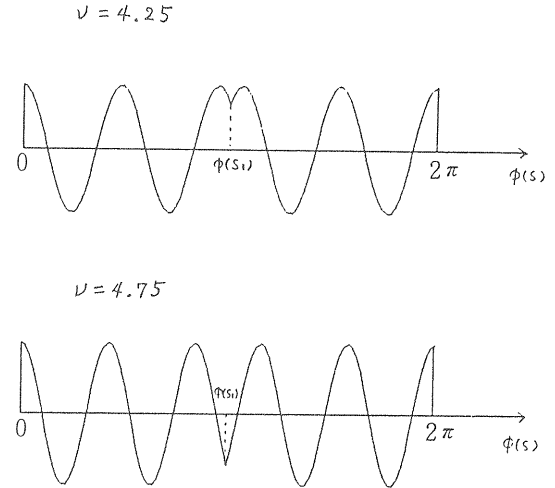


図2-2 シングル・キックによるC.O.D

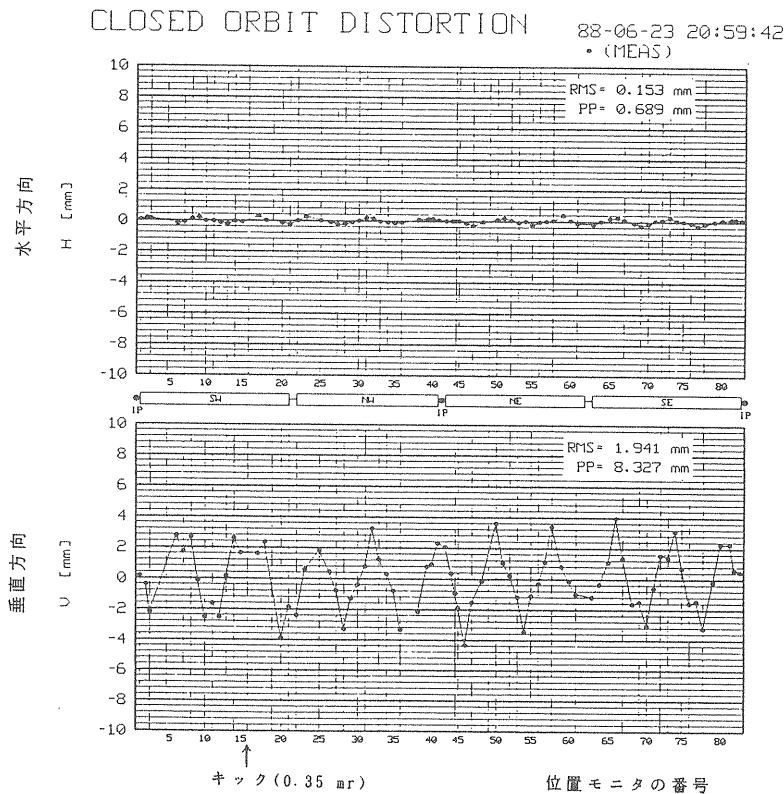


図2-3 TRISTAN ARで観測した垂直方向シングルキックによるC.O.D.

矢印の点で0.35mrのキックがある。垂直方向のベータトロン振動数は10.15である。

## 2.5 C.O.Dのフーリエ解析

(2.2.5)の $\eta(\phi)$ と $f(\phi)$ は周期 $2\pi$ の周期関数なので、以下の様にフーリエ分解できる。

$$\eta(\phi) = u_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [u_p \cos p\phi + v_p \sin p\phi] \quad (2.5.1)$$

$$f(\phi) = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [a_p \cos p\phi + b_p \sin p\phi] \quad (2.5.2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\phi) d\phi & a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi \\ u_p &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\phi) \cos p\phi d\phi & a_p &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos p\phi d\phi \\ v_p &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\phi) \sin p\phi d\phi & b_p &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin p\phi d\phi \end{aligned} \right\} \quad (2.5.3)$$

である。(2.5.1), (2.5.2)を(2.2.5)に代入すると次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} u_0 &= a_0 \\ u_p &= \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} a_p \\ v_p &= \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} b_p \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

(2.5.4)を(2.5.1)に代入すると

$$\eta(\phi) = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} [a_p \cos p\phi + b_p \sin p\phi] \quad (2.5.5)$$

となる。

(2.5.5)より、前節で述べた様に、 $\nu$ が整数のとき $\eta$ は発散する。また $\nu^2/(\nu^2 - p^2)$ の項があるせいで、誤差磁場成分 $a_p, b_p$ のうち $\nu$ に近い次数の成分がC.O.Dに大きく寄与することがわかる。磁石の設置をする際、 $\nu$ に近い次数の誤差磁場成分を極力減らす様にしなければならない。

## 2.6 C.O.Dの統計的な扱い方<sup>2),3)</sup>

すべての誤差磁場がわかっているならば、原理的には(2.2.12)からC.O.Dを計算することができる。しかし、加速器の設計段階では誤差磁場がきちんとわかってい

ないことがほとんどである。また、稼働中の加速器についても、C.O.Dの大雑把な見積りが必要なことがある。この様な場合、誤差磁場がリング一周にわたってランダムに分布していると仮定し、C.O.Dを推定する方法が有効である。

今、

$$W(\phi) = \eta(\phi)^2 + \left( \frac{1}{\nu} \frac{d\eta(\phi)}{d\phi} \right)^2 \quad (2.6.1)$$

で定義される量 $W(\phi)$ を考える。 $\eta(\phi)$ がベータatron振動を表しているとき、(2.2.5)で $f=0$ において、

$$\begin{aligned} \eta(\phi) &= A \cos(\nu\phi + \delta) = \frac{y}{\sqrt{\beta}} \\ \frac{1}{\nu} \frac{d\eta(\phi)}{d\phi} &= -\nu A \sin(\nu\phi + \delta) \\ &= \frac{1}{\nu} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right) = \frac{1}{\nu} \frac{d}{ds} \left( \frac{y}{\sqrt{\beta}} \right) \nu\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} (\beta y' + \alpha y) \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} W(\phi) &= A^2 = r y^2 + 2\alpha y y' + \beta y'^2 \\ & \quad (\alpha, \beta, r \text{ はツイスパラメータ}) \end{aligned}$$

となる。 $W(\phi)$ は、クーラン・シュナイダ不変量と呼ばれる量でこの場合は保存量である。しかし、 $\eta(\phi)$ がC.O.Dを表しているとき、(2.2.11)より

$$\begin{aligned} \eta(\phi) &= \frac{\nu}{2\sin\pi\nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\vartheta) \cos \nu(\vartheta - \pi - \phi) d\vartheta \\ \frac{1}{\nu} \frac{d\eta(\phi)}{d\phi} &= -\frac{\nu}{2\sin\pi\nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\vartheta) \sin \nu(\vartheta - \pi - \phi) d\vartheta \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \frac{\nu^2}{4\sin^2\pi\nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\vartheta_1) f(\vartheta_2) \\ & \quad \cos \nu(\vartheta_1 - \vartheta_2) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

となり、 $W(\phi)$ は保存量にならない。そこで、誤差磁場がランダムに分布していると仮定し $W(\phi)$ のアンサ

ンプル平均を求めてみる。まず、(2.6.2)の積分を和に書換えると、

$$\begin{aligned}
 W(\phi) &= \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \sum_j f_i f_j \cos \nu (\vartheta_i - \vartheta_j) \Delta \phi_i \Delta \phi_j \\
 &= \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \sum_j \sqrt{\beta_i} \sqrt{\beta_j} \\
 &\quad \cdot \left( \frac{\Delta B_i}{B \rho} \right) \left( \frac{\Delta B_j}{B \rho} \right) \cos \nu (\phi_i - \phi_j) l_i l_j
 \end{aligned}$$

になる。ただし、 $l_i$ は誤差磁場がある領域の長さである。ここで、たくさんの加速器を作ったとした場合の $W(\phi)$ のアンサンブル平均をとると、異なる磁石での誤差磁場には相関がないと考えると、

$$\begin{aligned}
 \langle W(\phi) \rangle &= \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \beta_i \left\langle \left( \frac{\Delta B_i l_i}{B \rho} \right)^2 \right\rangle \\
 &\equiv \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_i \beta_i \langle \psi_i^2 \rangle
 \end{aligned}$$

が得られる。結局、C.O.Dの期待値の振幅  $y$  は

$$\begin{aligned}
 y(s) &= \sqrt{\langle W(\phi) \rangle \beta(s)} \\
 &= \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \sqrt{\sum_i \beta_i \langle \psi_i^2 \rangle}
 \end{aligned}$$

となる。 $\langle \psi_i^2 \rangle$  は(2.3.1), (2.3.2), (2.3.3)から計算できる。

## 2.7 コンピュータによるC.O.Dの計算法<sup>4)</sup>

誤差磁場がわかっている場合、コンピュータを使うと、逐次近似法でC.O.Dを見つけることができる。具体的には次の様にする。

- (1) 中心軌道上のある点 $S_0$ に粒子を置き、その座標を $Y_0=(y_0, y'_0)$ とする。('は $s$ についての微分)
- (2) この粒子がリングを一周するときの軌跡 $T(s)$ (中心軌道を基準にして測った位置座標)と一周後のベクトル $Y_f$ を求める。もちろん誤差磁場も考慮して計算する。

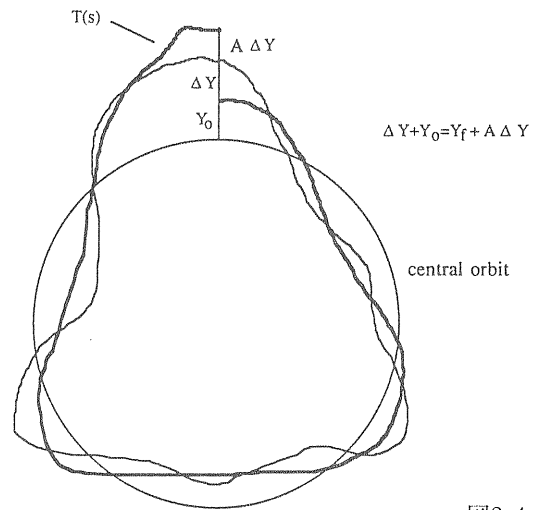


図2-4

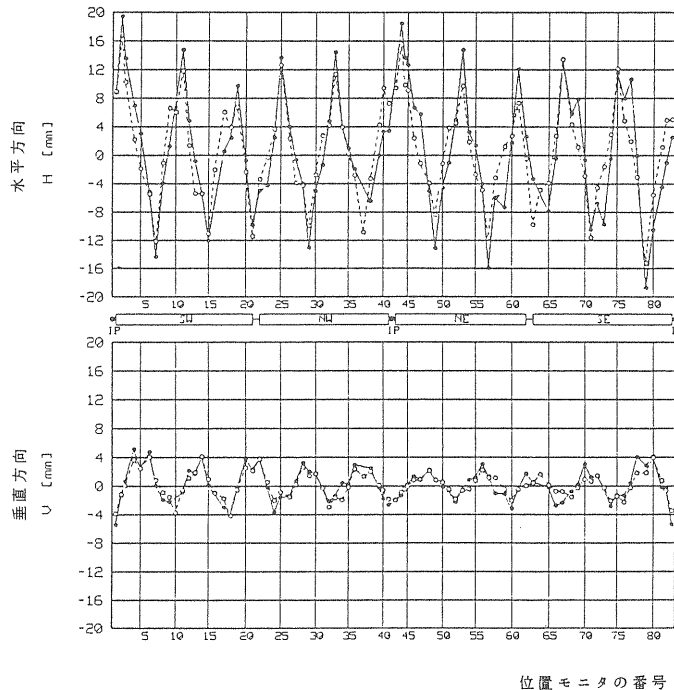


図2-5 TRISTAN ARでの補正なしのC.O.D。○印は計算値で、●印は測定値である。

(3)軌跡T(s)の回りで展開した磁場を使い、T(s)を基準座標にとったときのリング一周にわたるトランスファ行列Aを求める。

(4)軌道が閉じる条件、

$$Y_0 + \Delta Y = Y_f + A \Delta Y$$

を満たす $\Delta Y (= (I - A)^{-1}(Y_f - Y_0))$ を求め(図2-4を参照)、

$Y_0 = Y_0 + \Delta Y$  と置く。

(5)(1)~(4)を $|Y_f - Y_0|$ がある基準値より小さくなるまで続ける。

以上の様にして、計算したTRISTAN ARのC.O.Dを図2-5示す。誤差磁場として、四極磁石の設置誤差、偏向磁石の磁場のばらつき、ビーム入射用バンパ磁石の残留磁場、の実測値が入力してある。図2-5にはC.O.Dの実測値も示してある。

### 3. 閉軌道の補正

この章では、代表的なC.O.D補正法であるベスト・コレクタ法、フーリエ解析による方法、ローカル・バンパ法を紹介する。

C.O.D補正には、ビームの重心の位置を測るビーム位置モニター(以下では単に位置モニターという)とビームにキックを与えるコレクタが必要である。位置モニターについては文献5)に詳しい説明がある。コレクタには、普通ステアリング磁石と呼ばれる小さな偏向磁石が使われる。水平方向のステアリング磁石の一部は、主偏向磁石のヨークに巻いた銅線(バックレグ巻線と呼ばれる)で代用されることが多い。まれではあるが、四極磁石をずらして、コレクタとすることもある。位置モニター、コレクタ共に加速器一周にわたって分散して置かれている。例えばTRISTAN ARでは83ヶ所の位置モニター、44ヶの垂直方向ステアリング磁石、10ヶの水平方向ステアリング磁石、56ヶのバックレグ巻線が設置されている。

#### 3.1 ベスト・コレクタ法<sup>(6),1)</sup>

2.5で述べた様に、C.O.Dのフーリエ成分は、ベータatron振動数 $\nu$ のまわりのものが最も大きい。また、(2.4.1)からシングル・キックで作られる軌道も $\nu$ に近い振動数で振動している。そこで、もしコレクタがリング全体にわたって多数配置されているなら、C.O.Dをほとんど打ち消す様な軌道を発生するコレクタを選びだせるはずである。また残りのC.O.Dも比較的少数のコレクタで補正できることが期待される。このように、C.O.D補正に最も効果的なコレクタを次々と選び出し、iterationによってなるべく少数のコレクタで、C.O.D補正を完成させる方法をベスト・コレクタ法と呼ぶ。コレクタのキック角は最小二乗法で決める。使用するコレクタが少なければ、コレクタ電源の故障に対するシステム全体の信頼性が増す。この方法は、CERNで考案されTRISTAN、PEP等で使われている。

今、 $m$ ヶの位置モニターと $n$ ヶのコレクタから成るC.O.D補正システムを考え、C.O.Dの観測値 $b_i (i=1, 2, \dots, m)$ とコレクタのキック角 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ をベクトル

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

で表す。

まず、 $b$ を第1番目のコレクタのみで補正するとすればコレクタによって作られる位置モニターでのC.O.Dは(2.4.2)から明らかな様に、

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかける。

ただし、Aの $i$ - $j$ 要素は、

$$a_{ij} = \frac{\sqrt{\beta_i} \sqrt{\beta_j}}{2 \sin \pi \nu} \cos(\pi \nu - |\mu_i - \mu_j|) \quad (3.1.1)$$

である( $i$ のついた量は位置モニターでの値を表わし、 $j$ のついた量はコレクタ位置での値を表わす)。よって、

bを補正するには、残差ベクトル、

$$r = b + Ax \quad (3.1.2)$$

のノルム  $|r|$  を最小にする様に  $x$  を決めればよい (最小二乗法)。

ここで、Householder変換と呼ばれる直交変換Pを導入する。Pはあるベクトル  $a$  に対して、

$$P^T P = I \quad (\text{直交変換の性質}) \quad (3.1.3)$$

$$Pa = \pm |a| e_1 \quad (3.1.4)$$

を満たす変換で、具体的には、

$$P = I - r u u^T \quad (3.1.5)$$

$$r = \frac{1}{|a| (|a| + \text{sgn}(a_1) a_1)} \quad (3.1.6)$$

$$u = a + \text{sgn}(a_1) |a| e_1 \quad (3.1.7)$$

で表わされる。ただし、 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$  であり、 $a_1$  はベクトル  $a$  の第1要素である。また、 $\text{sgn}(a_1)$  は  $a_1$  の分母が0にならない様につけてある。Pは直交変換だから、あるベクトル  $y$  に対し、

$$|Py|^2 = (Py)^T (Py) = y^T (P^T P) y = y^T y = |y|^2$$

となる。つまり直交変換Pに対して  $y$  のノルムが保存される。

さて、行列Aの第1列から作ったベクトル  $(a_{11} a_{21} \dots a_{m1})^T$  によって定義したHouseholder変換  $P^{(1)}$  を(3.1.2)の両辺に施してみる。

すると、

$$P^{(1)} = P^{(1)} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sgn}(a_{11}) |a| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|a| = \sqrt{\sum_{k=1}^m a_{k1}^2}$$

だから、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m \\ P^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} P^{(1)} \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \frac{b_1^{(1)}}{b_2^{(1)}} \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix}_{m-1} + \begin{pmatrix} R^{(1)} & A_1^{(1)} \\ 0 & A_2^{(1)} \end{pmatrix}_{m-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \frac{b_1^{(1)} + R^{(1)} x_1}{b_2^{(1)}} \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix}_{m-1}, \quad R^{(1)} = -\text{sgn}(a_{11}) |a| \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

となる。

よって  $|r|^2 (= |P^{(1)} r|^2)$  は、

$$b_1^{(1)} + R^{(1)} x_1 = 0 \quad (3.1.9)$$

のとき最小となり、このときの残差ベクトルのノルムは

$$|r|^2 = |b_2^{(1)}|^2$$

となる。 $|b_2^{(1)}|^2$  の具体的な形で求めるために、

$$\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix} = P^{(1)} b$$

を使うと、

$$\begin{aligned} |b_2^{(1)}|^2 &= |P^{(1)} b|^2 - |b_1^{(1)}|^2 \\ &= |b|^2 - |e_1^T P^{(1)} b|^2. \end{aligned}$$

となる。更に、 $|P^{(1)} a|^T = -\text{sgn}(a_{11}) |a| e_1^T$  の両辺に右から  $P^{(1)}$  と  $b$  をかけて整理すると、

$$|e_1^T P^{(1)} b|^2 = \frac{(a^T \cdot b)^2}{|a|^2} \equiv \rho^{(1)2} \quad (3.1.10)$$

となり

$$|r|^2 = |b_2^{(1)}|^2 = |b|^2 - \rho^{(1)2} \quad (3.1.11)$$



となる。

ここまではxの第1要素に対応するコレクタを使うことを仮定してきたが、このコレクタがベスト・コレクタとは限らない。おのおののコレクタに対して $\rho^{(1)2}$ を計算することができ、 $\rho^{(1)2}$ が最大(つまり $|r|^2$ が最小)になるコレクタがベストコレクタとして選ばれる。今、 $k_1$ 番目のコレクタが選ばれたとすると、キック角は(3.1.9)から求まり、

$$x_{k_1} = - \frac{\sum_{i=1}^n a_{i k_1} b_i}{\sum_{i=1}^n |a_{i k_1}|^2}$$

となる。また、Aを

$$\left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{matrix} & \begin{matrix} & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \end{matrix} \\ \hline \end{array} \right)_{m-1}^1$$

の形にしておくため、Aの1列目と $k_1$ 列目を入れ換えておく。以上でiterationの第1段目が終了した。

同様の操作を、補正に使うコレクタの数を1つつ増やしながら繰り返していくと第 $l$ 段目での残差ベクトル $r^{(l)}$ は、

$$r^{(l)} = b^{(l)} + A^{(l)} x^{(l)} \quad (3.1.12)$$

とかける。ただし、

$$\begin{aligned} r^{(l)} &= Q^{(l)} Q^{(l-1)} \dots Q^{(1)} r \\ b^{(l)} &= Q^{(l)} Q^{(l-1)} \dots Q^{(1)} b \\ A^{(l)} &= Q^{(l)} Q^{(l-1)} \dots Q^{(1)} A \end{aligned}$$

$$x^{(l)} = \left( \begin{array}{c} \left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{matrix} \right\} \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \end{array} \right)_{m-l+1}^l$$

$$Q^{(l)} = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} I^{l-1} & 0 \\ \hline 0 & P^{(l)} \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \hline \end{array} \right)_{m-l+1}^{m-l+1}$$

である。 $A^{(l)}$ は、Aの列に対して次々とHouseholder変換を施した結果、次の形になる。

$$A^{(l)} = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} R^{(l)} & A_1^{(l)} \\ \hline 0 & A_2^{(l)} \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \hline \end{array} \right)_{m-l}^l, \quad R^{(l)} = \left( \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)_{l-1}^l$$

よって(3.1.12)は

$$\begin{aligned} r^{(l)} &= \left( \begin{array}{c} b_1^{(l)} + R^{(l)} x^{(l)} \\ \hline b_2^{(l)} \end{array} \right)_{m-l}^l \\ b^{(l)} &\equiv \left( \begin{array}{c} b_1^{(l)} \\ \hline b_2^{(l)} \end{array} \right)_{m-l}^l \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

とかけ、 $|r^{(l)}|^2 (= |r|^2)$ は、

$$b_1^{(l)} + R^{(l)} x^{(l)} = 0 \quad (3.1.14)$$

かつ

$|b_2^{(l)}|^2$ が最小  
のとき最小になる。 $|b_2^{(l)}|^2$ は、

$$b^{(l)} = Q^{(l)} b^{(l-1)} = \left( \begin{array}{c} b_1^{(l-1)} \\ \hline P^{(l)} b_2^{(l-1)} \end{array} \right)_{m-l+1}^{l-1}$$

と、(3.1.13)より

$$\begin{aligned} |b_2^{(l)}|^2 &= |P^{(l)} b_2^{(l-1)}|^2 - |e_1^T P^{(l)} b_2^{(l-1)}|^2 \\ &= |b_2^{(l-1)}|^2 - |e_1^T P^{(l)} b_2^{(l-1)}|^2 \\ &\equiv |b_2^{(l-1)}|^2 - \rho^{(l)2} \end{aligned}$$

となる。今、 $A_2^{(l-1)}$ を

$$A_2^{(l-1)} = \left[ \left( \begin{array}{c} a_1^{(l-1)} \\ \vdots \\ a_{n-l+1}^{(l-1)} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} a_2^{(l-1)} \\ \vdots \\ a_{n-l+1}^{(l-1)} \end{array} \right) \dots \left( \begin{array}{c} a_{n-l+1}^{(l-1)} \\ \vdots \\ a_{n-l+1}^{(l-1)} \end{array} \right) \right]_{m-l+1}^{n-l+1}$$

とかき、 $P^{(l)}$ を $a_j^{(l-1)}$ から作ったとすれば

$$P^{(l)} a_j^{(l-1)} = -\text{sgn}(a_{1j}) |a_j^{(l-1)}| e_1 \quad (3.1.15)$$

だから、(3.1.15)の両辺の転置をとり右から $P^{(l)}$ と $b_2^{(l-1)}$ をかけると、

$$\rho^{(l)2} = \frac{(a_j^{(l-1)T} b_2^{(l-1)})^2}{|a_j^{(l-1)}|^2} \quad (3.1.16)$$

# CLOSED ORBIT DISTORTION

88-07-15 21:47:43  
• (MEAS)

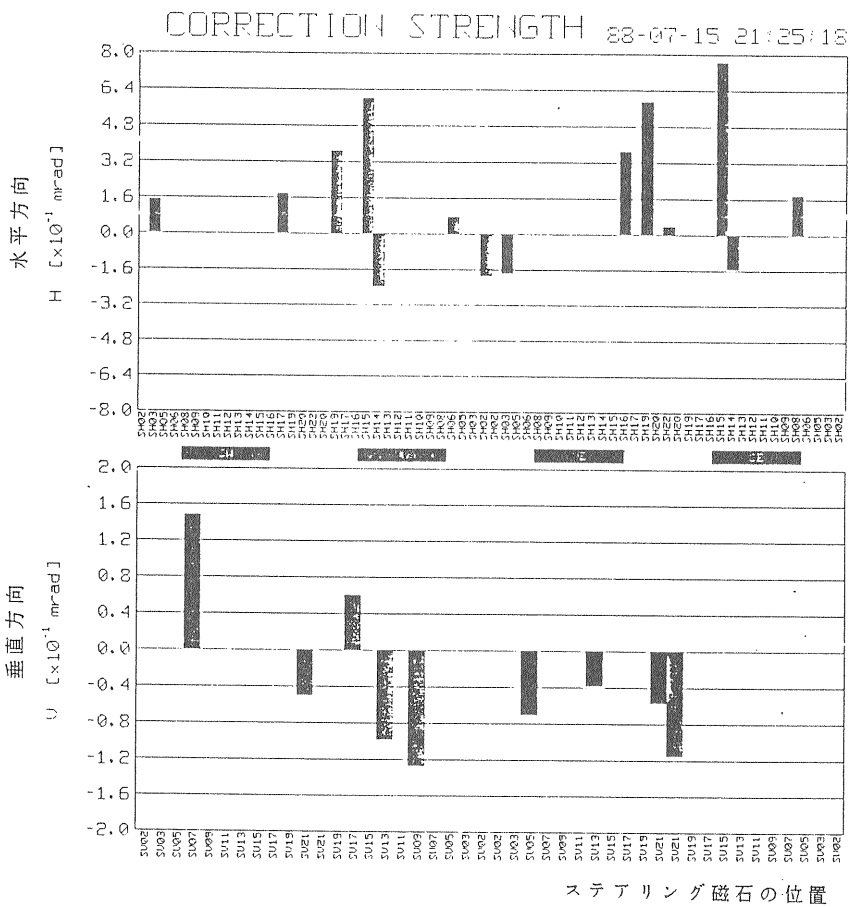
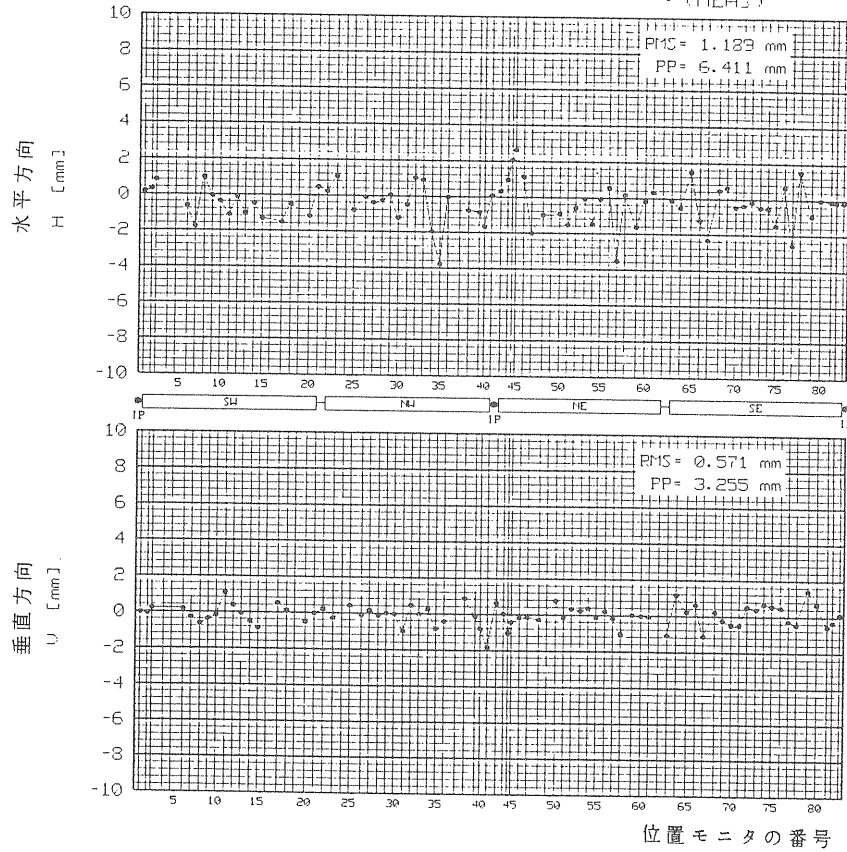


図3-1 ベスト・コレクタ法によるC.O.D補正。

となる。列ベクトル $a_j^{(l-1)}$ ( $j=1,2,\dots,n-l+1$ )のうち $\rho^{(l)2}$ を最大にするものに対応するコレクタが1番目のベスト・コレクタである。 $a_1^{(l-1)}$ とベストコレクタに対応する列ベクトル $a_k^{(l-1)}$ を入れかえ、(3.1.14)を解けばコレクタのキック角 $x^{(l)}$ が求まる。(3.1.14)の $R^{(l)}$ は、Householder変換のおかげで三角行列になっているので後退代入によって容易に解ける。

以上の手続きを繰り返し $|r|^2$ が目標値より小さくなったら、計算を止める。

図3-1にベスト・コレクタ法によって補正したTRISTAN ARのC.O.Dと、使用したコレクタのキック角を示す。

### 3.2 フーリエ解析による方法<sup>7)</sup>

2.5で述べた様に、C.O.Dの周波数スペクトルはベータatron振動数 $\nu$ に近い次数でピークを持つ。そこで、コレクタによって作られる軌道の周波数成分が、C.O.Dの $\nu$ に近い次数の周波数成分を打ち消す様にすれば、効果的なC.O.D補正ができる。

フーリエ解析による方法は、(1)位置モニタから得られた情報を使って、C.O.Dをフーリエ解析すること、(2)(1)で求めたフーリエ成分を打ち消す様に、コレクタのキック角を決めることの2ステップに分けて考えることができる。

#### (1)C.O.Dのフーリエ解析

まず、加速器全体に分布している $m$ ヶの位置モニタで観測したビーム位置 $x_i$ ( $i=1,2,\dots,m$ )から $\eta_i = x_i / \sqrt{\beta_i}$ ( $i=1,2,\dots,m$ )を計算する。(2.5.1)より、

$$\eta(\phi) = \sum_{p=0}^{\infty} [u_p \cos p\phi + v_p \sin p\phi]$$

だから、 $\eta$ のフーリエ成分 $u_p, v_p$ は

$$S = \sum_{i=1}^m \left[ \eta_i - \sum_{p=0}^{\infty} (u_p \cos p\phi_i + v_p \sin p\phi_i) \right]^2 \quad (3.2.1)$$

を最小にする様に決めればよい。(3.2.1)で、 $p$ についての和は0から $\infty$ までとなっているが、実際には、 $\nu$ の近傍の次数(仮りに $p_1, p_1+1, \dots, p_2$ とする)のみを考慮すれば十分なので、

$$S = \sum_{i=1}^m \left[ \eta_i - \sum_{p=p_1}^{p_2} (u_p \cos p\phi_i + v_p \sin p\phi_i) \right]^2 \quad (3.2.2)$$

を(3.2.1)の代りに使い、 $S$ を最小にする条件を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u_q} &= 0 \quad (q=p_1, p_1+1, \dots, p_2) \text{ から} \\ \sum_{p=p_1}^{p_2} \left( u_p \sum_{i=1}^m \cos p\phi_i \cdot \cos q\phi_i + v_p \sum_{i=1}^m \sin p\phi_i \cdot \cos q\phi_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \eta_i \cos q\phi_i \\ (q=p_1, p_1+1, \dots, p_2) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

が得られ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial v_q} &= 0 \quad (q=p_1, p_1+1, \dots, p_2) \text{ から} \\ \sum_{p=p_1}^{p_2} \left( u_p \sum_{i=1}^m \cos p\phi_i \sin q\phi_i + v_p \sum_{i=1}^m \sin p\phi_i \sin q\phi_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \eta_i \sin q\phi_i \\ (q=p_1, p_1+1, \dots, p_2) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

が得られる。 $u_p, v_p$ は(3.2.3), (3.2.4)の連立一次方程式の解として求まる。

#### (2)キック角の決定

総数 $n$ ヶのコレクタを励磁したとき生ずる軌道のフーリエ成分 $u_p^c$ は、(2.5.1), (2.5.2), (2.5.3), (2.5.4)より

$$\begin{aligned} u_p^c &= \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} a_p \\ &= \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos p\phi d\phi \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

となる。 $j$ 番目のコレクタの位置 $s_j$ での値に $j$ をつけて表わせば、

$$\begin{aligned} f(\phi_j) \Delta\phi_j &= \beta_j^{3/2} F(s_j) \frac{1}{\nu \beta_j} \Delta s_j \\ &= \frac{\beta_j^{1/2}}{\nu} \vartheta_j \quad (\vartheta_j \text{はキック角}) \end{aligned}$$

となるからthin lens近似を使って(3.2.5)の積分を和で表わすと、

$$u_p^c = \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} \frac{1}{\pi \nu} \sum_{j=1}^n \beta_j^{1/2} \vartheta_j \cos p\phi_j \quad (3.2.6)$$

が得られる。同様にして  $v_p^c$  は

$$v_p^c = \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} \frac{1}{\pi \nu} \sum_{j=1}^n \beta_j^{1/2} \vartheta_j \sin p \phi_j \quad (3.2.7)$$

となる。コレクタで作ったフーリエ成分  $u_p^c$ ,  $v_p^c$  が (1) で求めた C.O.D のフーリエ成分  $u_p$ ,  $v_p$  を打ち消すには、

$$\begin{aligned} u_p^c &= -u_p \\ v_p^c &= -v_p \end{aligned}$$

であればよいから、次の連立一次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} \frac{1}{\pi \nu} \sum_{j=1}^n \beta_j^{1/2} \cos p \phi_j \cdot \theta_j &= -u_p \\ \frac{\nu^2}{\nu^2 - p^2} \frac{1}{\pi \nu} \sum_{j=1}^n \beta_j^{1/2} \sin p \phi_j \cdot \theta_j &= -v_p \quad (3.2.8) \end{aligned}$$

( $p = p_1, p_1 + 1, \dots, p_2$ )

$\theta_j (j=1, 2, \dots, n)$  は連立一次方程式 (3.2.8) を解くことによって求まる。

### 3.3 ローカル・バンブ法<sup>8)</sup>

3.1, 3.2 で述べた大局的な C.O.D 補正では補正しきれなかった C.O.D を消したい場合、あるいは加速器のある特定の領域(例えばビームの入射・出射点付近や衝突型加速器の衝突点近傍)の C.O.D を消したい場合に用いられる手段がローカルバンブ法である。原理は簡単で、測定したビーム位置の中心軌道からのずれを打ち消す様な軌道を、コレクタで作ってやれば良い。ただし C.O.D を消したい領域以外での軌道は乱さない様にしておく必要がある。このことをバンブ軌道が閉じているという。

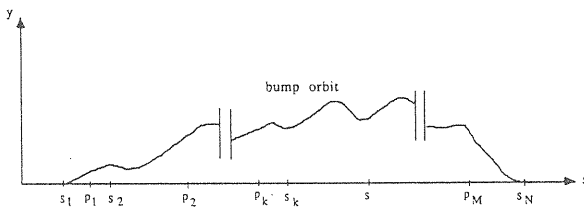


図3-2 ローカル・バンブ

今、図3-2の様に  $s_1, s_2 \dots s_N$  の点に置かれている  $N$  個のコレクタのうち  $k$  番目までを励磁したとき、 $s$  点での軌道  $(y(s), y'(s))^T$  ( $'$  は  $s$  についての微分) を求めよう。ただし、 $s_1$  でキックされる前の軌道は  $(0, 0)^T$  とする。まず  $s_2$  での軌道  $(y(s_2), y'(s_2))^T$  は

$$\begin{bmatrix} y(s_2) \\ y'(s_2) \end{bmatrix} = M(s_2 | s_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_1} \end{bmatrix}$$

となる。ここで  $\theta_{s_1}$  は  $s_1$  でのコレクタによるキック角であり、 $M(s_2 | s_1)$  は  $s_1$  から  $s_2$  へのトランスファ行列である。 $M(s_2 | s_1)$  の具体的な形は

$$\begin{aligned} M(s_2 | s_1) &= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi_{12} + \alpha_1 \sin \psi_{12}), \\ -\left[ \frac{(1 + \alpha_1 \alpha_2) \sin \psi_{12} + (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \psi_{12}}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \right] \\ \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi_{12} \\ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \psi_{12} - \alpha_2 \sin \psi_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.3.1) \\ \psi_{12} &= \psi_2 - \psi_1 \end{aligned}$$

(1, 2 のついた量は  $s_1, s_2$  での値を表わす。)

で与えられる。

次に  $s_3$  での軌道を求めると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(s_3) \\ y'(s_3) \end{bmatrix} &= M(s_3 | s_2) \begin{bmatrix} y(s_2) \\ y'(s_2) + \theta_{s_2} \end{bmatrix} \\ &= M(s_3 | s_2) \begin{bmatrix} y(s_2) \\ y'(s_2) \end{bmatrix} + M(s_3 | s_2) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_2} \end{bmatrix} \\ &= M(s_3 | s_2) M(s_2 | s_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_1} \end{bmatrix} \\ &\quad + M(s_3 | s_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_2} \end{bmatrix} \\ &= M(s_3 | s_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_1} \end{bmatrix} + M(s_3 | s_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。以下同様にして  $s$  での軌道は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{bmatrix} &= M(s | s_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_1} \end{bmatrix} + M(s | s_2) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_2} \end{bmatrix} \\ &\quad + \dots + M(s | s_k) \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{s_k} \end{bmatrix} \quad (3.3.2) \end{aligned}$$

になる。(3.3.1)を使って、(3.3.2)を書き直すと、

$$y(s) = \sqrt{\beta(s)} \sum_{i=1}^k \sqrt{\beta_{s_i}} \sin(\psi(s) - \psi_{s_i}) \theta_{s_i} \quad (3.3.3)$$

$$y'(s) = \sum_{i=1}^k \sqrt{\frac{\beta_{s_i}}{\beta(s)}} \cos(\psi(s) - \psi_{s_i}) \cdot \theta_{s_i} \\ - \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \sum_{i=1}^k \sqrt{\beta_{s_i}} \sin(\psi(s) - \psi_{s_i}) \theta_{s_i} \\ = \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} \sum_{i=1}^k \sqrt{\beta_{s_i}} \cos(\psi(s) - \psi_{s_i}) \cdot \theta_{s_i} \\ - \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} y(s) \quad (3.3.4)$$

となる。

以上で準備ができたので、まずバンプ軌道が  $s_1 \leftrightarrow s_N$  間で閉じるための条件を求めると、 $y(s_N) = 0$ ,  $y'(s_N) = 0$  になればよいから、(3.3.3), (3.3.4)より

$$\sum_{i=1}^N \sqrt{\beta_{s_i}} \sin(\psi_{s_N} - \psi_{s_i}) \theta_{s_i} = 0 \quad (3.3.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \sqrt{\beta_{s_i}} \cos(\psi_{s_N} - \psi_{s_i}) \theta_{s_i} = 0 \quad (3.3.6)$$

になる。またビーム観測点  $P_j (j=1, \dots, M)$  での位置が  $y_{P_j} (j=1, \dots, M)$  になるための条件は

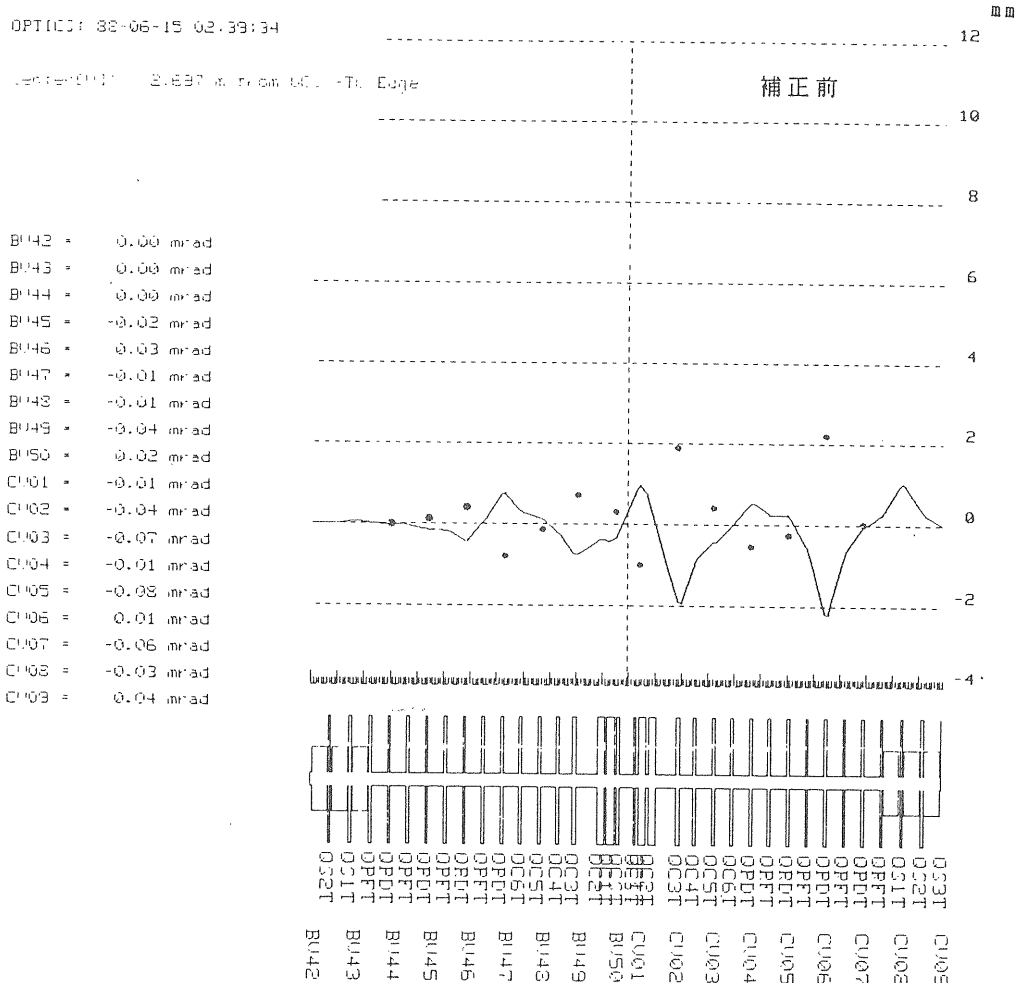
$$\sqrt{\beta_{P_j}} \sum_{i < P_j} \sqrt{\beta_{s_i}} \sin(\psi_{P_j} - \psi_{s_i}) \theta_{s_i} = y_{P_j} \quad (3.3.7) \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

となる。

よって  $s_1 \leftrightarrow s_N$  の領域内の  $P_j (j=1, \dots, M)$  点で測定した C.O.D.  $C_{P_j} (j=1, \dots, M)$  を消すには、(3.3.7)で  $y_{P_j} = -C_{P_j}$  と置いた M 個の式と(3.3.5), (3.3.6)で作られる連立一次方程式を解いて、 $\theta_{s_j} (j=1, 2, \dots, N)$  を決めればよい。

図3-3にTRISTAN MRの衝突点付近で行ったローカル・バンプ法による垂直方向C.O.D補正の例を示す。

ローカル・バンプ法を加速器一周にわたってつぎつぎに実行すれば、リング全体のC.O.D補正をすることもできる。



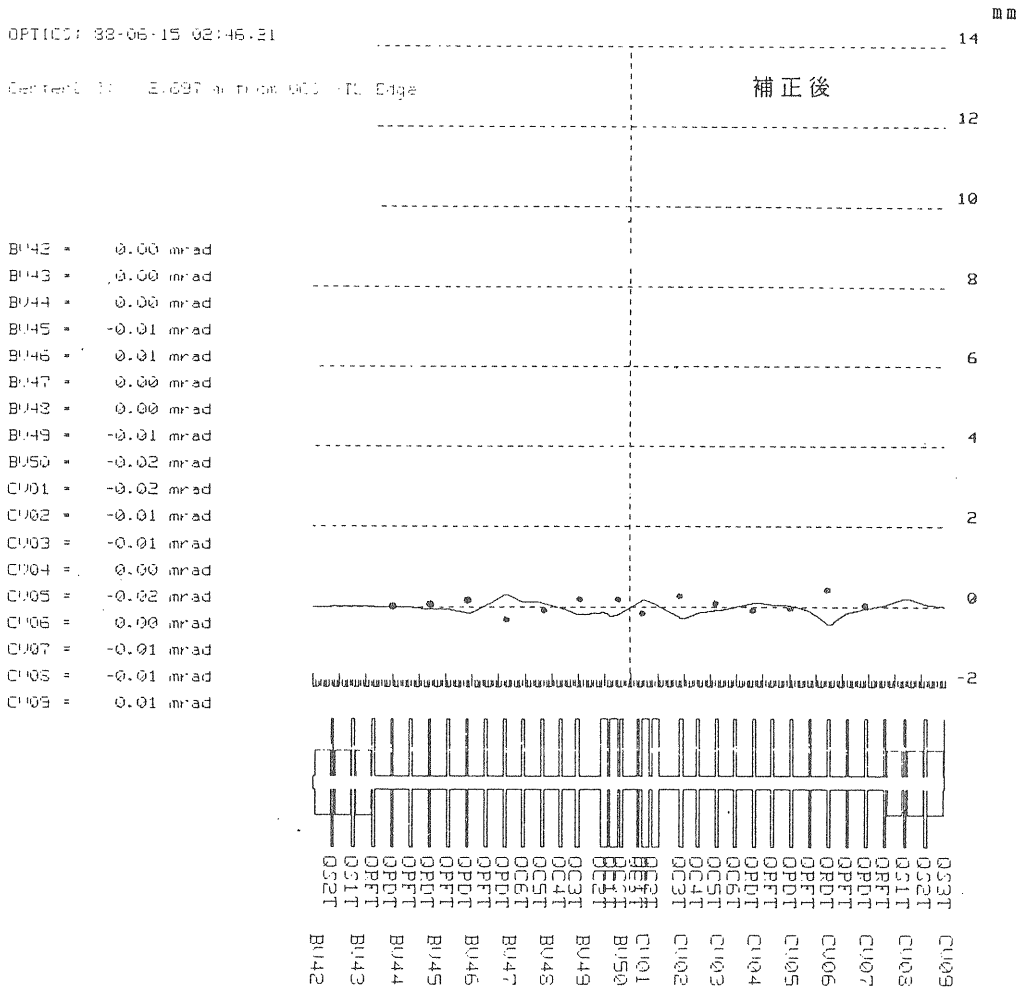


図3-3 ローカル・バンブ法によるC.O.D 補正。

黒丸は測定したビーム位置，実線はC.O.Dをうち消すために作るバンブ軌道を表わす。

#### 4. ディスパーションの補正<sup>9),10)</sup>

ディスパーションは運動量 $p=p_0+\Delta p$ ( $p_0$ は中心運動量， $\Delta p$ は $P_0$ からの運動量のずれ)を持つ粒子の閉軌道が運動量 $p=p_0$ の粒子の閉軌道に対してどれだけずれるかを表わす量であり，次の様に書ける。

$$\eta_y = \frac{y_c(p=p_0+\Delta p) - y_c(p=p_0)}{\Delta p}$$

$$= p_0 \frac{dy_c}{dp} \Big|_{p=p_0} \quad (4.1)$$

ここで， $y_c(p=p_0)$ は中心運動量をもつ粒子の閉軌道である。

ディスパーションは，偏向磁石によって生じるから，理想的な加速器では，垂直方向のディスパーション

$\eta_z$ は0のはずだが，加速器内の誤差磁場(例えば四極あるいは六極磁石の設置誤差による磁場，C.O.D補正用垂直方向ステアリング磁石の磁場等)によって，一般には $\eta_z \neq 0$ になる。同様に，水平方向のディスパーションも主偏向磁石によるディスパーション $\eta_{x_0}$ からずれてしまう。(以下このずれを $\eta_x$ で表わす。)

この $\eta_z$ ， $\eta_x$ は加速器に悪影響をおよぼすことが知られている。例えば，衝突型加速器では，衝突点に $\eta_z$ があるとビームの高さが増えてルミノシティが減少する。また加速空洞の場所にディスパーションがあるとシンクロベータトロン共鳴と呼ばれる共鳴が起こる。

そこで， $\eta_y$ をコレクタによって補正する方法を考えよう。まず， $j$ 番目のコレクタによって $i$ 番目の位置モニタの場所に作られるディスパーション $\eta_y^{(i)}$ を求める。この場合， $y_c^{(i)}(p=p_0)$ と $y_c^{(i)}(p=p_0+\Delta p)$ はシングルキックの式(2.4.2)を使って，次の様に書ける。

$$y_c^{(i)}(p=p_0) = a_{ij} \theta_j \quad (4.2)$$

$$y_c^{(i)}(p=p_0 + \Delta p) = \left[ a_{ij} + p_0 \frac{da_{ij}}{dp} \Big|_{p=p_0} \frac{\Delta p}{p_0} \right] \cdot \theta_j \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) \quad (4.3)$$

ただし、 $\theta_j$ はj番目のコレクタによるキック角であり、

$$a_{ij} = \frac{\sqrt{\beta_i} \sqrt{\beta_j}}{2 \sin \pi \nu} \cos(\pi \nu - |\mu_i - \mu_j|) \quad (4.4)$$

である。よって、ディスパージョン $\eta_y^{(i)}$ は(4.2)、(4.3)を(4.1)に代入して、

$$\eta_y^{(i)} = \left[ p_0 \frac{da_{ij}}{dp} \Big|_{p=p_0} - a_{ij} \right] \theta_j \quad (4.5)$$

となる。

$p_0 \frac{da_{ij}}{dp} \Big|_{p=p_0}$  は、コンピュータを使って、以下の様に求めることができる。

(1)  $p=p_0 + \Delta p$ の粒子の閉軌道を求め、そのまわりで展開した磁場を使って求めた $\beta(s)$ 、 $\mu(s)$ 、 $\nu$ から $a_{ij}$ を計算し、 $a_{ij}(p=p_0 + \Delta p)$ とする。

(2) (1)と同様にして、 $a_{ij}(p=p_0 - \Delta p)$ を求める。

(3)

$$p_0 \frac{da_{ij}}{dp} = \frac{a_{ij}(p=p_0 + \Delta p) - a_{ij}(p=p_0)}{2 \frac{\Delta p}{p_0}}$$

を計算する。

$\eta_y^{(i)}$ は、次の様に考えて、計算することもできる。つまり、粒子は偏向磁場を通過するとキックを受けるが、運動量が違うとキックされる量が異なる。このキックの差から生じるC.O.Dを運動量のずれ $\Delta p/p_0$ で正規化するとディスパージョンになるはずである。まず $\eta_z^{(i)}$ を考えると、粒子をシングル・キックした場合、垂直方向のキックの差 $\Delta \theta$ が生じる原因には次のものがある。

### (1)四極磁石

シングルキックによるC.O.Dは四極磁石の中心から垂直方向にはずれた点を通るから、粒子は偏向磁場を感じる。この磁場によって生じるキックの差 $\Delta \theta_Q$ は

$$\begin{aligned} \Delta \theta_Q &= \frac{e}{p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)} g l z_c - \frac{e}{p_0} g l z_c = -\frac{e}{p_0} g l z_c \frac{\Delta p}{p_0} \\ &= -\frac{g l}{B \rho} z_c \frac{\Delta p}{p_0} \quad \left( g = \frac{\partial B_z}{\partial x} \Big|_{x=z=0} \right) \end{aligned}$$

になる。ただし、 $z_c$ は四極磁石中での垂直方向C.O.Dであり、 $l$ は磁石長である。

### (2)六極磁石

六極磁石の磁場は

$$B_x = S x z$$

$$B_z = \frac{S}{2} (x^2 - z^2) \quad \left( S = \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \Big|_{x=z=0} \right)$$

とかけるから、 $p=p_0$ のときのキックは

$$\frac{e}{p_0} B_x l = \frac{e}{p_0} S \cdot 0 \cdot z_c \cdot l = 0.$$

次に $p=p_0 + \Delta p$ のときのキックは、粒子が水平方向のディスパージョン $\eta_{x_0}$ によって $\eta_{x_0} \frac{\Delta p}{p_0}$ だけ水平方向に変位することを考えて、

$$\begin{aligned} \frac{e}{p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)} S \cdot \eta_{x_0} \frac{\Delta p}{p_0} \cdot z_c \cdot l &= \frac{e}{p_0} S l z_c \eta_{x_0} \frac{\Delta p}{p_0} \\ &= \frac{1}{B \rho} S l z_c \eta_{x_0} \frac{\Delta p}{p_0} \end{aligned}$$

となる。よってキックの差 $\Delta \theta_s$ は

$$\Delta \theta_s = \frac{S l}{B \rho} z_c \eta_{x_0} \frac{\Delta p}{p_0}$$

となる。

### (3)ステアリング磁石

シングルキックを与えるステアリング磁石自身からもキック差 $\Delta \theta_c$ が出る。 $\Delta \theta_c$ は

$$\begin{aligned} \Delta \theta_c &= \frac{e}{p_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p_0}\right)} \Delta B l - \frac{e}{p_0} \Delta B l = -\frac{e}{p_0} \Delta B l \frac{\Delta p}{p_0} \\ &= -\frac{\Delta B l}{B \rho} \frac{\Delta p}{p_0} = -\theta_j \frac{\Delta p}{p_0} \end{aligned}$$

となる。

この他、 $\eta_{x_0}$ がある所にスキュー四極磁石があると $\eta_z$ が生じるが、ここでは略した。

以上求めた $\Delta\theta_Q$ ,  $\Delta\theta_S$ ,  $\Delta\theta_C$ によってできるC.O.D つまり  $\eta_z^{(i)} \frac{dp}{p_0}$  はシングルキックの式(2.4.2)の重ね合わせで表わして、

$$\begin{aligned} \eta_z^{(i)} \frac{dp}{p_0} = & \left[ \frac{\sqrt{\beta_i}}{2 \sin \pi \nu} \sum_k \sqrt{\beta_k} \cos(\pi \nu - |\mu_i - \mu_k|) \right. \\ & \left. \left( \frac{Sl}{B\rho} \right)_k \eta_{x_0}^{(k)} z_c^{(k)} \right. \\ & - \frac{\sqrt{\beta_i}}{2 \sin \pi \nu} \sum_l \sqrt{\beta_l} \cos(\pi \nu - |\mu_i - \mu_l|) \left( \frac{gl}{B\rho} \right)_l z_c^{(l)} \\ & \left. - \frac{\sqrt{\beta_i} \sqrt{\beta_j}}{2 \sin \pi \nu} \cos(\pi \nu - |\mu_i - \mu_j|) \theta_j \right] \frac{dp}{p_0} \\ = & \left[ \sum_k a_{ik} \left( \frac{Sl}{B\rho} \right)_k \eta_{x_0}^{(k)} z_c^{(k)} - \sum_l a_{il} \left( \frac{gl}{B\rho} \right)_l z_c^{(l)} \right. \\ & \left. - a_{ij} \theta_j \right] \frac{dp}{p_0} \quad (4.6) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $k, l$ の和はそれぞれすべての四極磁石と六極磁石にわたってとる。(4.6)の $z_c^{(i)}$ は(4.2)で与えられるから、結局、

$$\begin{aligned} \eta_z^{(i)} = & \left[ \sum_k a_{ik} \left( \frac{Sl}{B\rho} \right)_k \eta_{x_0}^{(k)} a_{kj} \right. \\ & \left. - \sum_l a_{il} \left( \frac{gl}{B\rho} \right)_l a_{lj} - a_{ij} \right] \theta_j \quad (4.7) \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned} \eta_x^{(i)} = & \left[ - \sum_k a_{ik} \left( \frac{Sl}{B\rho} \right)_k \eta_{x_0}^{(k)} a_{kj} \right. \\ & \left. + \sum_l a_{il} \left( \frac{gl}{B\rho} \right)_l a_{lj} - a_{ij} \right] \theta_j \quad (4.8) \end{aligned}$$

が求まる。

以上より

$$\eta_y^{(i)} = d_{ij} \theta_j$$

と書いたときの $d_{ij}$ が求まった。従ってディスパージョン補正は3.1で述べたベスト・コレクタ法で実行できる。

ディスパージョンは、高エネルギー電子加速器の場

合、異なるRF周波数で測定した2組のC.O.Dの差から求めることができる。今、RF周波数が $f_{RF}$ のときの、同期粒子(synchronous particle)の運動量を $p_0$ とし、RF周波数が $f_{RF} + \Delta f_{RF}$ のときの同期粒子の運動量を $p$ とすると、

$$\frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} = \frac{\Delta f_{rev}}{f_{rev}} = - \frac{\Delta t_{rev}}{t_{rev}} = - \alpha \frac{\Delta p}{p_0}$$

の関係がある。ただし、 $f_{rev}$ は粒子の1秒当たりの周回数、 $t_{rev}$ は周回時間、 $\alpha$ はモメンタム、コンパクションファクタである。よって、RF周波数が $f_{RF} + \Delta f_{RF}$ ,  $f_{RF} - \Delta f_{RF}$ のとき測定したC.O.Dをそれぞれ $y_+$ ,  $y_-$ とすると、ディスパージョン $\eta_y$ は

$$\eta_y = (y_- - y_+) \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} \right)^{-1}$$

となる。

#### Appendix 一般逆行列<sup>11)</sup>

本文中で、連立一次方程式を解く機会が多かったので、解き方の一方法を紹介する。

連立一次方程式

$$Ax = b \quad (A \cdot 1)$$

を解くことを考える。ただし、 $A$ は $m \times n$ 行列、 $x$ は $n$ 次元ベクトル、 $b$ は $m$ 次元ベクトルとする。

(1)  $m \geq n$ のとき

この場合、条件の数が未知の数より多いので、一般に解は存在しない。そこで、 $r = b - AX$ のノルム $|r|$ が最小になる解 $x$ を探す(最小二乗法)。

まず、 $m \times m$ 直交行列 $U$ と $n \times n$ 直交行列 $V$ を適当に選んで、

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \sigma_n \\ 0 & & & \\ \hline & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ m-n \end{matrix} = U^T A V \quad (A \cdot 2)$$

を作る。

すると、直交変換はノルムを不変に保つから、

$$\begin{aligned} |r|^2 &= |U^T(Ax - b)|^2 = |U^T(AVV^T x - b)|^2 \\ &= |\Sigma z - d|^2 \quad (A \cdot 3) \end{aligned}$$



となる。ただし,

$$z = V^T x \quad (\text{A.4})$$

$$d = U^T b \quad (\text{A.5})$$

である。ここで  $|r|^2$  は  $\partial |r|^2 / \partial z_i = 0 (i=1, 2, \dots, m)$  のとき最小になるという条件を使うと, 正規方程式

$$\Sigma^T \Sigma z - \Sigma^T d = 0 \quad (\text{A.6})$$

が得られる。(A.6)を具体的に書くと,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

となるので, (A.6)の解は

$$z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \equiv \Sigma^+ d$$

となる。(A.4),(A.5)を使うと,

$$x = Vz = V \Sigma^+ d = V \Sigma^+ U^T b \equiv A^+ b$$

より,  $x$  が求まる。 $A^+$ をAの一般逆行列という。

(2)  $m < n$  のとき

この場合, 解は一意に定まらないので,  $|x|^2$  が最小になる解を探す。(1)と同様にして,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_m \end{bmatrix} = U^T \Sigma V$$

を作り, 正規方程式を求めると,

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}$$

となる。この解は,

$$z_i = \begin{cases} \frac{d_i}{\sigma_i} & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \text{任意} & (i = m+1, m+2, \dots, n) \end{cases}$$

であるが,  $z_{m+1} = z_{m+2} = \dots = z_n = 0$  の解が  $|z|^2$  を最小するものである。(A.4)より

$$|x|^2 = |Vz|^2 = |z|^2$$

だから,  $|z|^2$  を最小にする解が,  $|x|^2$  を最小にする解になる。 $z$  を具体的に書くと,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_m} \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \equiv \Sigma^+ d$$

となり, (A.4), (A.5)から

$$x = Vz = V \Sigma^+ d = V \Sigma^+ U^T b = A^+ b$$

となる。

(1), (2)の場合共に,  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  とも書けるが証明は略す。

#### 参考文献

- 1) B. Autin, "Lattice Perturbations", Physics of High Energy Particle Accelerators, AIP Conference Proceedings No.127, 1983
- 2) 神谷幸秀, "加速器の原理", OHO'84テキスト
- 3) 鎌田 進, "加速器の原理と設計", OHO'85テキスト
- 4) 計算コードPETROK (DESYで作られた計算コードPETROSのKEK版)  
本文(2章6節)では, 簡単のため  $Y = (y, y_0')$  としたが, 実際には, PETROKは5次元ベクトル  $Y = (x, x', z, z', \frac{\Delta P}{P_0})$  を使って計算を行う。
- 5) 木代純逸, "シンクロトロン of the ビーム・モニタ" OHO'86テキスト
- 6) B. Autin and Y. Marti, "CLOSED ORBIT CORRECTION OF A.G. MACHINES USING A SMALL NUMBER OF MAGNETS" < CERN ISR-MA/73-1

- 7) E. Gianfelice and R. Giannini, "CONTRIBUTION TO THE STUDY OF CLOSED-ORBIT CORRECTION IN PARTICLE STORAGE RINGS WITH UNEQUALLY SPACED MONITORS AND CORRECTORS-APPLICATION TO LEAR", CERN/PS 85-42(LEA), 1985
- 8) 生出勝宣, TRISTAN MR コントロールプログラム
- 9) 鎌田 進, 計算機コードPETROKのサブプログラム
- 10) A. Chao et al., "ON-LINE ORBIT AND DISPERSION CORRECTION SCHEMES FOR PEP", PEP-Note 318, 1979
- 11) 森正武 他, 「数値計算」, 岩波講座 情報科学 -18