

第1章 はじめに

高エネルギー物理学研究所が設置(1971年4月1日)されて、もう満18年になります。毎年9月15日(祝日)に研究所の一般公開があります。研究所を見学される方は、一冊のパンフレットを受け取ります。そのパンフレットの終わり頃に“技術開発及び産業発展への貢献”というページを見つめます。そのページを逆の発想で見ると、加速器製造には、どの分野を勉強し、研究する必要があるか分かります。図1-1にそのパンフレットから拝借した図を示す。加速器に関連する分野を列举すると、即ち、電磁石、コントロール、高電圧、真空、高周波、電源、放射線、トンネル建設、計算法等、非常に多岐に渡っている。加速器の製造には、これらの知識が必要であるということです。また、最近の加速器製造では、それぞれの分野の深い専門的知識が要求されるようになり、且つ、それぞれの分野が

密接に関連している。陽子リニアックにおいても、例外でなく、これらの分野の技術が複雑にからんでいる。当然この広範囲な分野を一人の人が、担当することは不可能だと思われる。だからと言って、機械担当者は機械のみを考え、電気担当者は電気のみ、加速器理論担当者は理論のみでよいと言えない。各担当者は、別の担当者の仕事に関心を持つ必要があります。これを“気配り”と言います。

例えば、真空パイプを固定することを考えてみてください。確かに、真空漏れは生じません。ここでちょっと“気配り”をします。いま固定した所に高周波電流が流れるのだろうか。これだけ考えただけで固定する力が違うかも知れませんし、真空パイプの構造さえ変わるかも知れません。

“気配り”とはそれだけでありません。各担当分野内でも必要です。

例えば、回路の製作を考えてみます。

このインダクタンスの位置は何処にすれば十分な働き

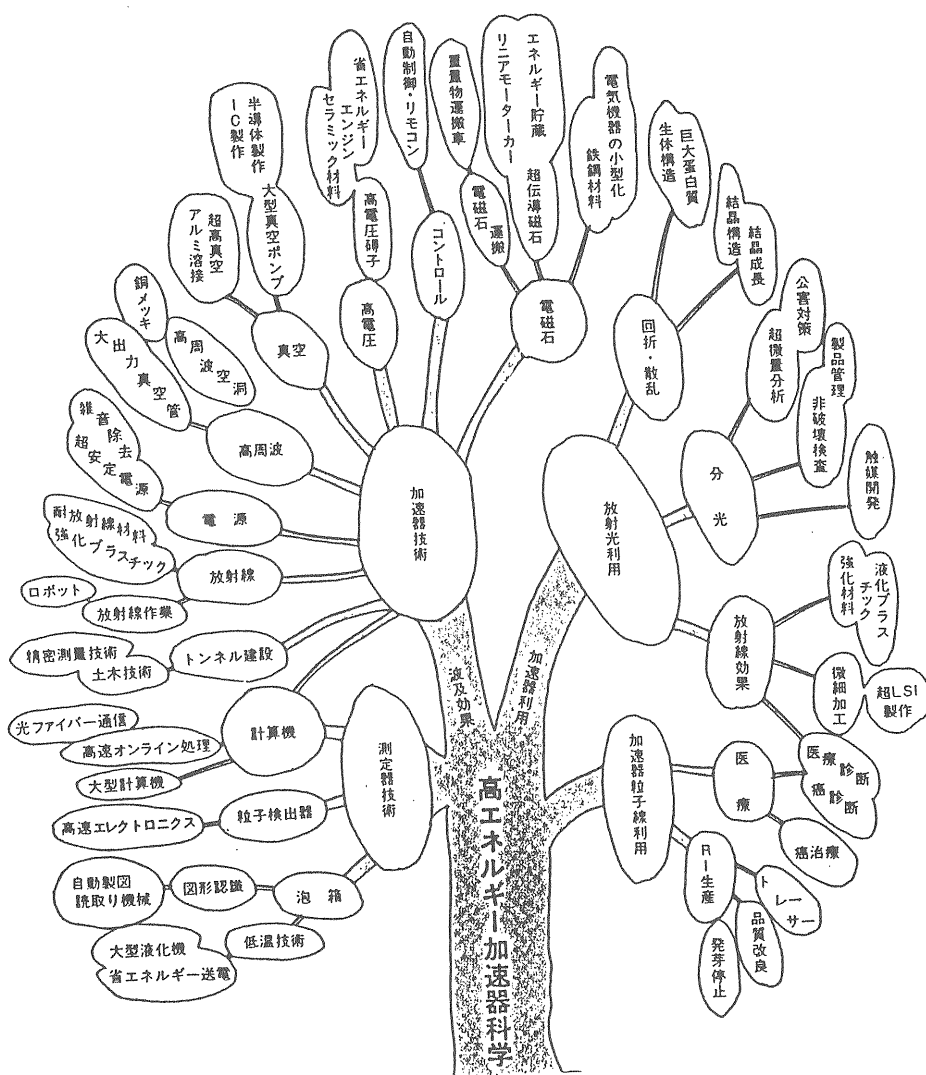


図1-1 高エネルギー加速器科学と応用

をするのだろうか、アースもこの位置で回路の働きに十分なのだろうか。ちょっと気を配れば良いものが出来ます。ちょっとした“気配り”が加速器製造に大切です。

“気配り”には、方向性と階層があります。

方向性を間違えると、ものが壊れます。例えば、こんなことはないと思いますが、ヒューズが切れた時、ヒューズが切れないように容量の大きいヒューズに交換する（設計ミスの時もあります）。 “気配り”の方向性の間違いです。

階層を間違えると、無用の長物または心配のし過ぎとなります。即ち“気配り”の重要性の判断間違いを生じます。

例えば、動作中の機器では、インタロックの殺し違いとして、階層の間違いが表れます。

我々は、この“気配り”の不足を毎日のように、色々な現象を通じて学んでいる。

この講義は、陽子リニアック製造の際に、“気配り”のために必要な基礎的な知識並びにその相互関係をまとめるつもりで書こうと思いました。結果は思わしくありません。私自身の勉強不足のため、足りない部分が多くなりました。各自、不足箇所を補足して下さいようお願いします。

第2章 陽子リニアック及び周辺の構成例と用語

まず、陽子リニアックとその周辺には、どのような装置が配置され、それらはなんと呼ばれ、どのような

働きをする装置であるかを知るために、KEK 40 MeV 陽子リニアックの例を図2-1に示す。

図2-1から、リニアックの周辺の構成物を取り出してみる。コックロフトで750 keVに加速された負水素イオンをリニアックへ輸送するライン、20 MeVタンク、20 MeVビーム輸送ライン、40 MeVタンク、40 MeVビーム輸送ラインから構成されている。

各構成要素をさらに詳細に見ると、

750 keVビームラインは、チョッパ、コリメータ、プリバンチャー、ビームモニター、四極電磁石、真空路で構成されている。

20 MeVタンク及び40 MeVタンクは、高周波空洞、ドリフトチューブ（その中に四極電磁石または永久磁石式四極磁石が入っている）、高周波電力源で構成されている。

20 MeVと40 MeVビームラインは、ビームモニター、ステアリング電磁石、四極電磁石、トランスファ電磁石、デバンチャー、パルス電磁石、ビーム運動量解析電磁石（アナライザーマグネット）から構成されている。

ここに出てきた各装置の働きを述べる。

チョッパ；長いビームを必要な長さに切る装置です。イオン源から取り出されたビームを、後段の加速器に受け入れやすいビームの部分のみを作る働きをする。KEKでは、ビームの幅（長さ）を数十 μ sの幅（長さ）にする。別の使い方の例をあげれば、円形加速器ビームを加速するために数MHzの高周波が使用されている。その高周波で受け入れられるビーム幅に、ビームを間引くための装置として使われることも考えられている。

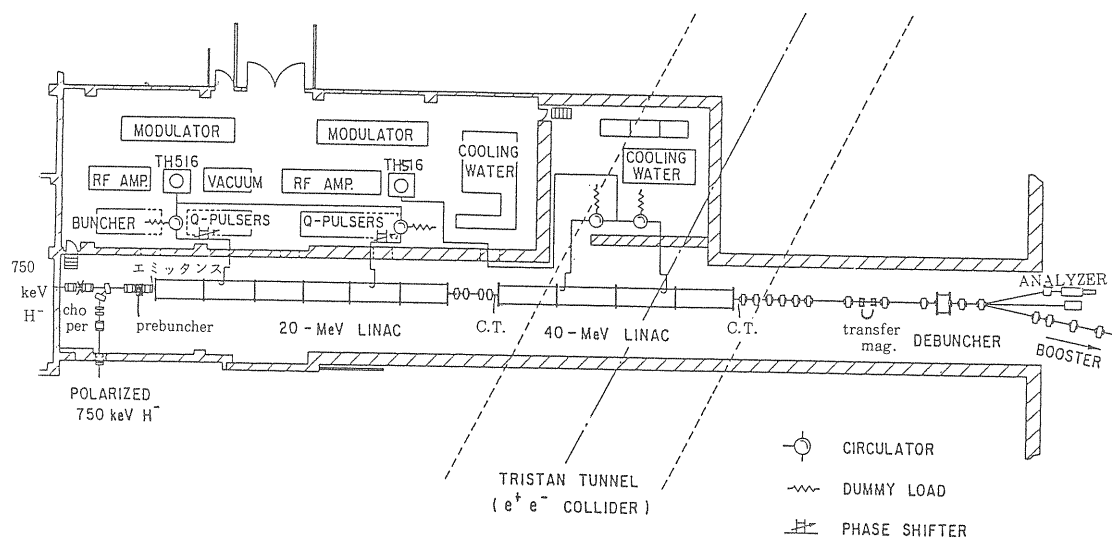


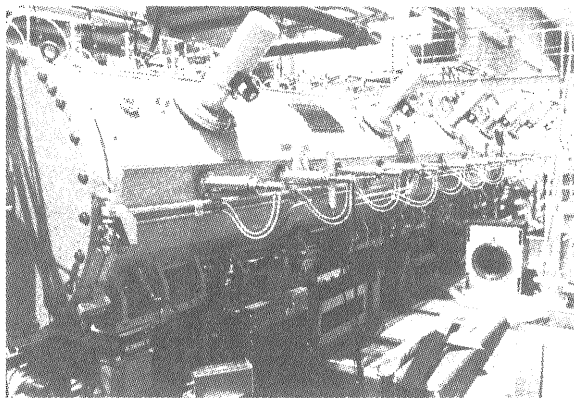
図2-1 KEK陽子リニアックと周辺

コリメータ；チョッパで蹴られたビームは、どこへいくのでしょうか？ 不必要なビームを止める物があります。保守のことを考えると、ビームを止める場所を決めた方がよいことは、自明です。その場所がコリメータの場所です。コリメータは、チョッパで横方向に蹴られたビームを止める働きをする。

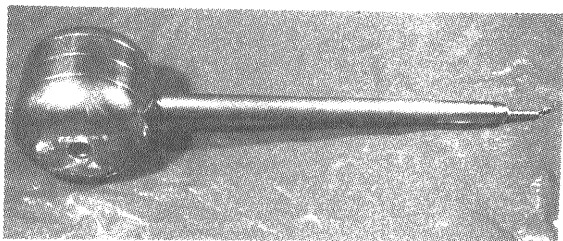
後段の加速器が受け入れるビームの大きさを制限することにも使う。

プリバンチャー；次段のリニアックは、全てのエネルギーを持った陽子を加速することはできません。決まったエネルギーで且つあるエネルギーの広がり（範囲）の粒子（陽子）で、その上決まった位相（高周波と粒子の関係）の範囲の粒子しか受け入れられません。（これを縦方向のアクセプタンスといいます。）この装置は陽子の集団を加速減速する装置です。そして、できるだけ多くの粒子がアクセプタンス内に入るように働きます。

ビームモニター；加速器の運転には、ビームの特性を知ることは非常に重要です。当然、製造された加速器が十分な性能をだしているかどうかを調べるためにも必要です。少なくともビーム強度を知る事が大事です。一方、陽子集団の中心の運動（位置、運動量）、集団内の陽子がどのような運動をしているのか（エミッタンス、運動量の広がり等）も重要な要素です。モ



40 MeV タンク



ドリフトチューブ

ニターからの信号は、これらの情報を加速器運転者に教えてくれます。色々な種類のビームモニターを作らなければなりません。

四極電磁石；この装置の働きは、光で言えば凸レンズと、凹レンズの働きによく似ている。数個の四極電磁石を組にして使うことが多い。

真空路；加速された陽子は、管理された電磁場以外の作用により経路を乱されると、それは色々な問題を生じる。ビームが他の粒子と衝突すると、ビームが飛ばされ何処かにぶつかり、それを放射化する。そのため残留粒子を少なくした状態、即ち真空状態になった真空路を加速陽子が通過するようにする。真空チェンバーあるいは真空ダクトと称する中を陽子は通る。

高周波空洞；リニアックの本体である。高周波電力が蓄えられ、ビームに加速用エネルギーを与える。色々な構造があるが、KEKでは、アルバレ型加速空洞を使用している。

ドリフトチューブ；高周波空洞の中に取り付けられている。これと高周波空洞が一体となった装置で、陽子を加速する。この装置をアルバレ型リニアックと言う。ドリフトチューブの中には、四極電磁石が組み込まれている。

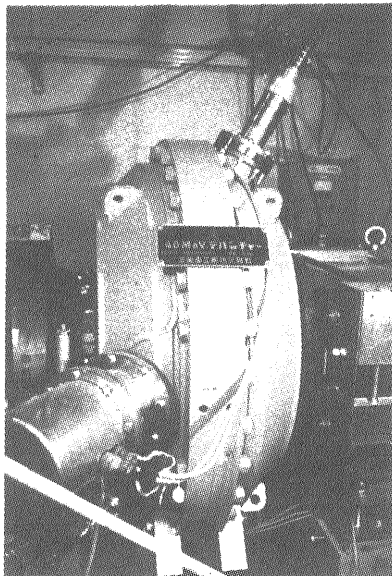
ステアリング電磁石；ビームの輸送経路には、色々な装置が据え付けられる。その装置の取り付け誤差、及び不必要な磁場によるビームの軌道（ビームが通過する道）の歪みを補正する電磁石である。

トランスファ電磁石；特にビームの軌道を平行に移動するための電磁石である。

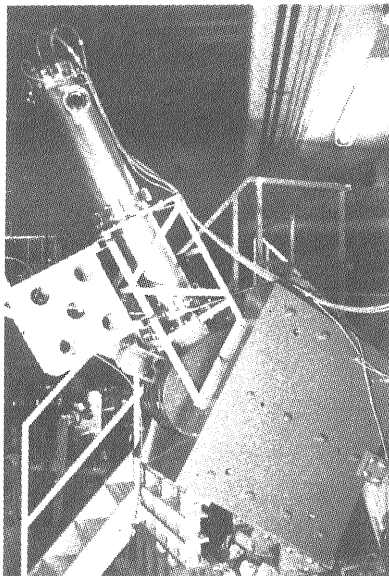
デバンチャー；リニアックで加速された陽子は、あるエネルギー幅を持っている。このエネルギー幅が後段の加速器で受け入れられないエネルギー幅である時、特にデバンチャーが使われる。即ち、エネルギー幅を次の加速器に十分受け付けられるように狭くするための装置である。

パルス電磁石；ビームがこの電磁石を通過する時に磁場を発生し、ビームの進行方向を曲げる。

ビーム運動量解析電磁石；ビームモニターの一つである。リニアックで加速された粒子の運動量を測定し、



デバンチャー



運動量解析電磁石

且つ、粒子の運動量の広がり測定するために使われる。

冷却水系；空洞並びにドリフトチューブは、温度制御が必要である。KEK 陽子リニアックでは、 $\pm 0.1^{\circ}\text{C}$ の範囲で温度制御した冷却水が使用されている。

例えば、20 MeV タンクでは、温度と共振周波数の関係は、

タンク（空洞）； $-0.5 \text{ kHz}/^{\circ}\text{C}$

ドリフトチューブ； $-2.5 \text{ kHz}/^{\circ}\text{C}$

である。

真空排気系；タンクは 0.9 m ϕ 、 15 m 長であり、非常に大きな体積である。又長期間一気圧に晒さないよう常に働いている。特に高周波の大電力が供給される為、真空度には注意する。一年中 $1 \times 10^{-7} \text{ torr}$ 以下の真空度に保たれている。

次の例は、大型ハドロン計画の陽子リニアックである。基本スキームを図 2-2 に示す。これは、 1 GeV まで陽子を加速する。前例と異なる構成装置は、高周波四極リニアック（RFQ）と結合空洞リニアックである。

RFQ；この加速装置は、高周波の電場により四極磁石の代わりをさせ、なお且つ、加速機構を持つ装置である。最近の RFQ は、 50 keV から $2-3 \text{ MeV}$ まで、粒子を加速する。粒子の捕獲効率は 95% 以上にも達するものもある。

結合空洞型リニアック；アルバレ型リニアックは約 150 MeV まで粒子を加速する。しかし、それより高いエネルギーへ粒子を加速するには、加速効率が良く

1 GeV 陽子リニアック

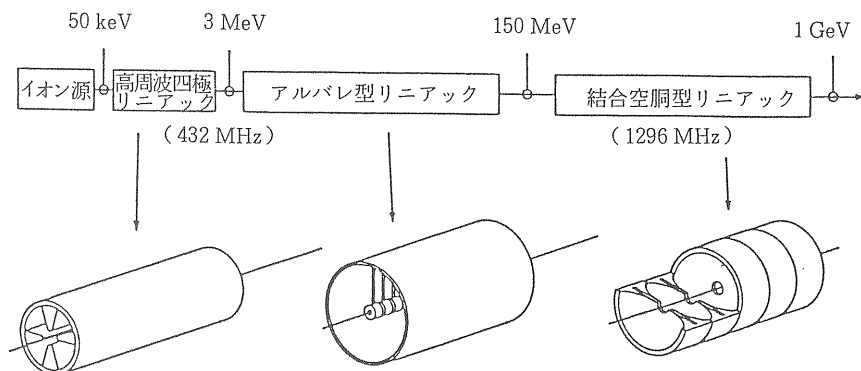


図 2-2 陽子リニアックの基本スキーム

ない。そこで、この型のリニアックが適用される。加速効率を示す重要なパラメータ（ZTT，シャントインピーダンス，これは、加速電場の二乗と消費される電力の割合である。）を図2-3に示す。明らかに加速効率は良くなっている。この空洞はアルバレ型と全く違う。

このリニアックのために、開発された空洞の型を図2-4に示す。

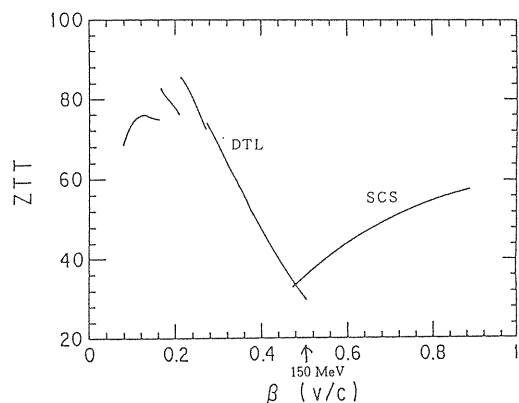


図2-3 シャント・インピーダンス(加速効率)

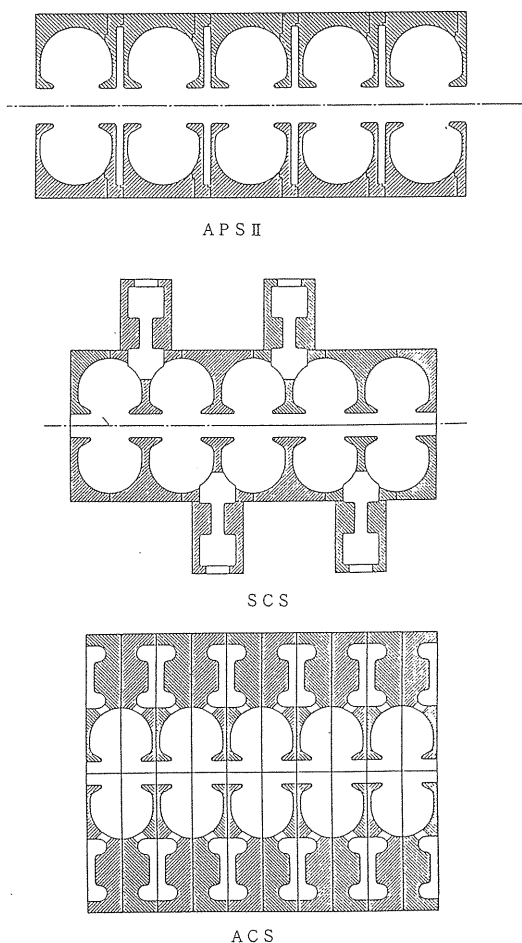


図2-4 結合空洞型リニアック用空洞

第3章 電磁気学の復習と応用 (縦方向の運動)

加速器の話をするときには、電磁場の話を避けて通れません。何故ならば、自然界に存在している力で、一番取扱やすそうなのが電磁力だからです。身の周りで見慣れているのは、重力です。りんごが落ちるのもそうですし、百円玉をポケットから落とすのも重力（不注意もありますが）です。しかし、我々は、この重力を自由に制御できる能力を持っていません。

荷電粒子を加速すること、中性子をため込むことも、spinの運動を支配すること、プラズマの運動を支配すること、いろいろありますが、全て電磁力が関係する。

荷電粒子の加速装置に必要なと思われる電磁気学の復習をする。

1. マクスウェルの方程式

1) クーロンの法則

電荷が存在すると、その周囲に電場（E）を生ずる。電場の大きさは、

$$\text{積分形では、} \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv$$

$$\text{微分形では、} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

と書ける。図3-1に見られるように、電力線の湧き出し口及び吸い込み口には、必ず電荷が存在する。

$$\mathbf{D} (\text{C/m}^2) = \epsilon \mathbf{E} (\text{V/m})$$

ϵ ; 誘電率

ρ ; 電荷密度 (C/m³)

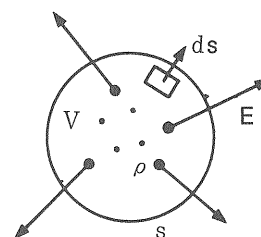


図3-1 クーロンの法則

2) ガウスの法則

磁荷が単独で存在しないため（N極またはS極が単独で存在しない。）、磁場に関しては、クーロンの法則と異なり、磁力線の湧き出し口、吸い込み口が存在しない。そのため、図3-2に示すように、磁力線は閉じていなければならない。

磁場について、

積分形では、 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$

微分形では、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$

と書ける。

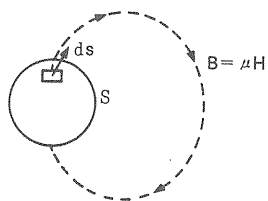


図3-2 ガウスの法則

1), 2) の式で、電場と磁場の対称性が破れている。何故でしょうか？ 即ち、電荷は、単独で存在し、磁荷と言うものが単独で存在しないからです。自然界はこの差別をいつから起こしたのでしょうか？ わかりません。

3) アンペールの法則（ビオ・サバールの法則）と拡張

電流が流れていると、その周りに磁場を生ずる。その磁場の強さは、

積分形では、 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$

微分形では、 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$

と書ける。この式の div をとると $\text{div}(\mathbf{J}) = 0$ となる。これは \mathbf{J} が閉じている（電流は閉じた線上を流れる。）ことを意味している。一方、我々は、コンデンサーを充電する時、電流が流れたと言う。この現象は、電流が時間と共に変わる時の例である。このように電流が時間と共に変わる状態を含む自然界で、電荷が保存されていることを、我々はよく知っている。これを電荷不滅と言う。（これが破られたと言う実験を知りません。）電荷不滅に対して、次の式が成り立つ。

積分形では、 $-\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$

微分形では、 $\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

そこで、この電荷不滅の条件の式を使用し、1) の式の時間微分を取り、式を作りなおすと、

$$\text{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

上の式が得られる。ここで $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ を新たにアンペールの法則の \mathbf{J} と置き換える。アンペールの法則を拡張しました。

積分形では、

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$$

微分形では、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ここで、 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ を変位電流と言う。ここで述べたことを図3-3に示す。

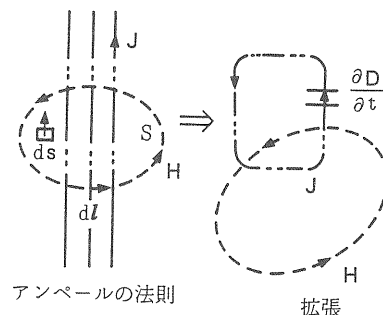


図3-3 アンペールの法則と拡張

4) ファラデーの法則

電場を作る機構は、1) のクーロンの法則だけではありません。磁場の変化によってもできる。これをファラデーの法則（電磁誘導の法則）と言う。図3-4にこの関係を示す。

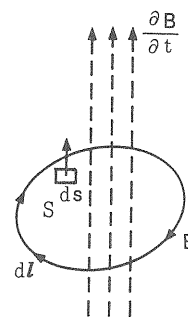


図3-4 ファラデーの法則

積分形では

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

微分形では

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

と書ける。

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

μ ; 誘磁率

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

ϵ ; 誘電率

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \text{ (オームの法則)}$$

σ ; 導電率

これら三式は、物質の特性を表すのに使用される。

以上四式をマクスウェルの方程式と言います。

2. 境界条件について

ある物質中の電磁界は、上のマクスウェルの方程式を満足しなければならない。しかし、異なる物質の境界においては、電磁界はある条件で関係づけられている。この関係を境界条件という。簡単に図3-5で示す。

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$D_{n2} - D_{n1} = q_s$$

t ; 接線方向 n ; 法線方向

1, 2 ; 二種類の物質

q_s ; 表面電荷密度

$$H_{t1} - H_{t2} = J_s$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

J_s ; 表面電流密度

各人これらの式を導き出すこと（微小空間を考え、マクスウェルの方程式の積分形を使えば容易にできる。）

2の物質が完全導体である場合、我々はよく近似として使う。即ち導電率が無限に大きい場合です。また後の関心であるところの変化する電磁場を考えると、オームの法則により、電流が有限値を持つために、完全導体の内部では、電場がゼロでなければならない。一方、変化する磁場を考えているのであるから、ファ

ラディの法則により完全導体中に電場ができる。これは上に述べたこと相反するので、完全導体中には、変化する磁場もゼロでなければならない。すなわち完全導体での境界条件は、

$$\begin{aligned} E_{t1} &= 0, & D_{n1} &= -q_s \\ H_{t1} &= J_s, & B_{n1} &= 0 \end{aligned}$$

となる。

ワープロを打つのに疲れました。ひと休み

a) 完全導体中に磁場がないと言われていますが、地球磁場を防ぐのに導体で囲んだ良いか悪いか？

ダメ

b) 周りからのノイズを防ぐのに、回路を導体で囲んだ良いか悪いか？

自分の回路に自信のある人は良い。

下手な人は、ダメ

c) 高周波のリップルの多い直流電源をつくった。おかげで高周波のリップルを含んだ磁場が出来た（浮遊容量で流れることがある）。周りを導体で囲んでなんとかしたい。

良いときもある。良い電源を作りなさい。

但し、導体を冷やす必要があるかもしれない。

SCRの点灯ノイズは防ぐかもしれない。

3. マクスウェルの応力

電磁場の中で物体に働く力を取り扱ってみよう。応力テンソル T_{ik} とする。

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \epsilon E_i E_k - \frac{\epsilon}{2} E^2 \delta_{ik} + \mu H_i H_k \\ &\quad - \frac{\mu}{2} H^2 \delta_{ik} \end{aligned}$$

ここで、 E_i , H_i は電場, 磁場の成分である。

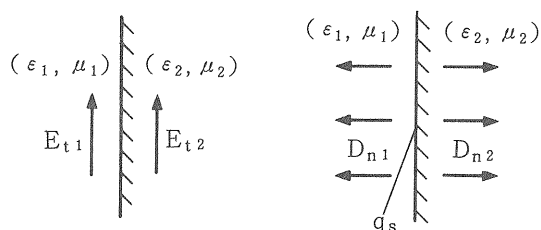
$i = k$ のとき $\delta_{ik} = 1$

$i \neq k$ のとき $\delta_{ik} = 0$

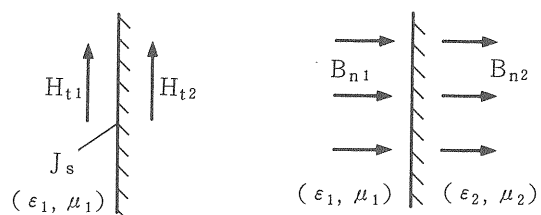
で表される。

このテンソルから物体の受ける力

$$f_i = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$



電界の境界条件



磁界の境界条件

図3-5 電磁界の境界条件

を求めると

$$f_i = \rho E_i - \frac{E^2}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} - \frac{H^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \epsilon \mu \left(\mathbf{E} \times \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)_i \\ + \epsilon \mu \left(\frac{d\mathbf{E}}{dt} \times \mathbf{H} \right)_i + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i$$

となり、ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ を導入すると

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{E^2}{2} \text{grad } \epsilon - \frac{H^2}{2} \text{grad } \mu \\ + \epsilon \mu \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

と書ける。

第一項 $\rho \mathbf{E}$ は静電力、

第二項 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ は電磁力

第三項 $E^2/2 \text{grad } (\epsilon)$ は

誘電率の変化による力

第四項 $H^2/2 \text{grad } (\mu)$ は

透磁率の変化による力

第五項 $\epsilon \mu d\mathbf{S}/dt$ は

電磁波のもつ運動量の変化

である。

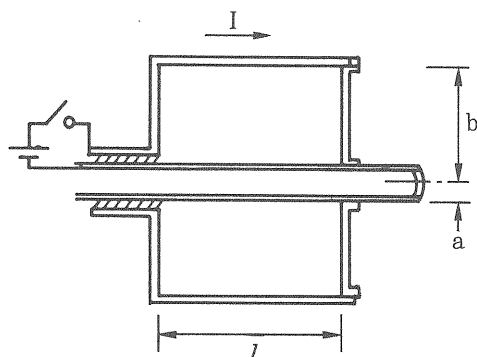
各自この式を導け（マクスウェルの方程式を使う）。

力の計算にはこの式を使う。プログラム“TRIM”では、この式を使って計算したと記憶している。

一般に、力を求めるために、エネルギーの微分を使うが、手慣れた方を使えばよい。

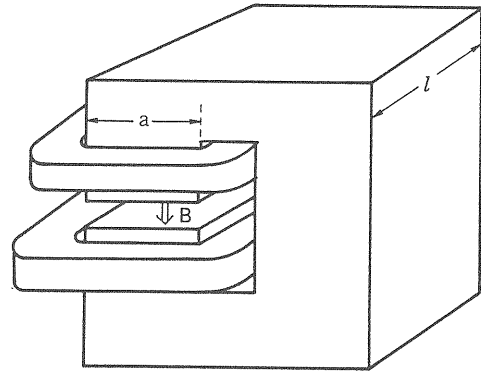
!! 宿題

図のような同軸の空洞に電流 I を流したとき右端の端板はどれだけの力をうけるか？



!! 宿題

図のようなサイズの電磁石のギャップに2テスラの磁場を発生させた。ギャップ間の吸引力はどれだけか？

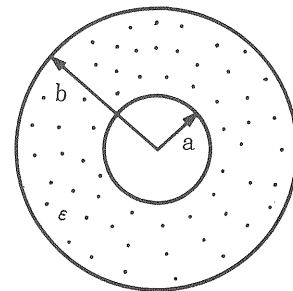


!! 宿題

誘電率 ϵ_1, ϵ_2 の二個の誘電体の境界面に働く力を、電界が境界面に垂直の場合と平行の場合について求めよ。（前述した面での境界条件に注意すること）

!! 宿題

図のような内外半径 a, b の同軸円筒コンデンサー（同軸ケーブル）の途中に誘電率 ϵ の誘電体を固定してある。両電極間に電圧 V を与えた時、誘電体に働く力を求めよ。



ここからの問題は力に関係ありません。

!! 宿題

電位 V_1, V_2 の平行導体板の間を誘電率 ϵ_1, ϵ_2 厚さ d_1, d_2 の誘電体で充すとき、任意の点の電位を求めよ。もし $\epsilon_1 = 8.5 \epsilon_0, d_1 + d_2 = 45 \text{ mm}$ のとき電場が 10 kV/mm になる d_2 を求めよ。但し $\epsilon_2 = \epsilon_0, V_1 - V_2 = 14 \times 45 \text{ kボルト}$ とする。ほぼ $13 - 15 \text{ kV/mm}$ は、アルミナの絶縁破壊電圧である。

!! 宿題

強さ P に分極した誘電体から、半径 a の球形の穴をくり抜いた。内面に表れる分極により、穴の中央にできる電界の強さを求めよ？

4. 導波管，同軸管

ここでは、時間的変化が正弦波であるとする。即ち

時間微分は、 $j\omega$ と置き換えることが出来る。波の進行方向を z 軸にとる。 z 軸方向の関数形を $\exp(-r)$ で表す。

1) 同軸管

同軸管内では電界も磁界も軸に沿って正弦波的に変化している。電界と磁界の方向は直角で、且つ波の進行方向に対しても直角になっている。電界も磁界も z 軸方向（進行方向）の成分を持たない平面波である。これを電磁的横波または TEM 波と言う。

電場 (E_r) の式

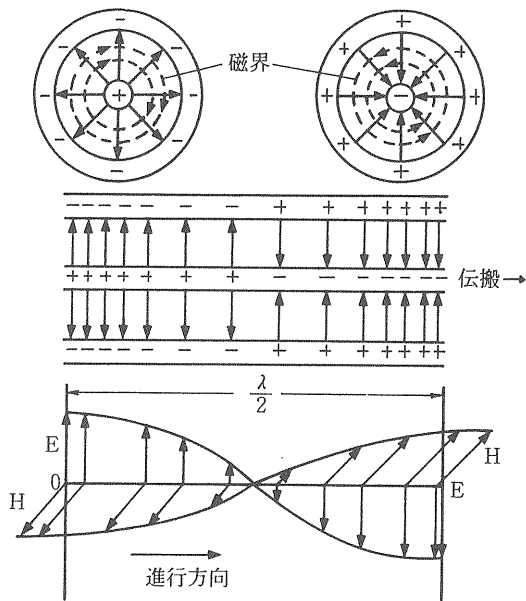
$$E_r = \frac{A}{r} e^{-jkz}$$

磁場 (H_θ) の式

$$H_\theta = \frac{1}{Z_i} \frac{A}{r} e^{-jkz}$$

$$Z_i = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

同軸線路内の電磁界の分布及び進行方向との関係を図 3-6 に示す。



電磁界分布と平面波の進行

図 3-6 同軸管

TEM 波の減衰定数

$$\alpha = \frac{R_s}{2Z_i} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \log \frac{b}{a}$$

$$R_s = \sqrt{\omega \mu_2 / 2 \sigma}$$

電磁界の減衰は $\exp(-\alpha z)$ の形である。

電力の減衰は $\exp(-2\alpha z)$ の形である。

同軸管にも高次のモードがあり、遮断周波数は、およそ、同軸の半径方向の間隔が半波長以上であれば、半径方向に変化のある高次の波形が出来る。又同軸の平均の円周方向の長さが一波長以上であれば、円周方向に変化のある高次の波形が伝搬する。

同軸管の等価回路を考える。図 3-7 に示すように、外管にインダクタンス L (H) (磁気エネルギーの保存), 抵抗 R (Ω) (電流の流れ), 内管と外管の間には、両者でコンデンサー C (F) を作りまた内部物質の漏れを考えコンダクタンス G (\mathcal{U}) を入れる。同軸管のサイズを図 3-7 に示したようにすると、それぞれの値が求まる。

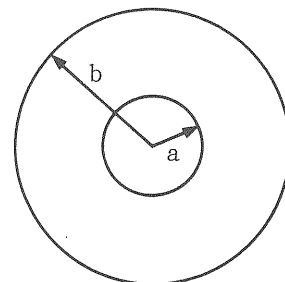
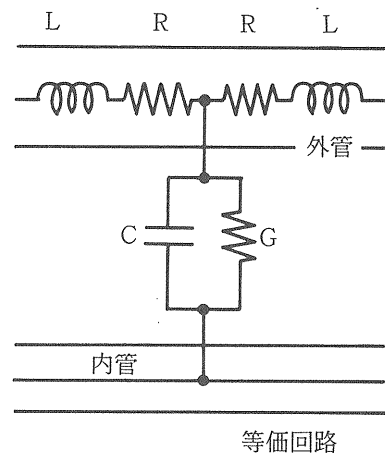
この等価回路の単位長当りの

直列インピーダンスは

$$Z = R + j\omega L$$

並列アドミッタンスは

$$Y = G + j\omega C$$



同軸管の寸法

図 3-7 等価回路

で与えられる。又

直列抵抗 R は

$$R = \sqrt{\frac{\mu f \rho}{4\pi}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (\Omega/\text{m})$$

直列インダクタンス L は

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log b/a \quad (\text{H/m})$$

並列キャパシタンス C は

$$C = 2\pi\epsilon / \log b/a \quad (\text{F/m})$$

並列アドミッタンス G は

$$G = \omega C \tan \delta \quad (\square/\text{m})$$

で表される。

同軸管を分布定数平行線と等価的に考える。線路上の任意の点での電圧及び電流は次のように表現できる。

$$V = Ae^{-\sqrt{ZY}z} + Be^{\sqrt{ZY}z}$$

$$I = \sqrt{\frac{Y}{Z}} \left(Ae^{-\sqrt{ZY}z} - Be^{\sqrt{ZY}z} \right)$$

ここで z は電源からの距離である。定数 A 及び B は未定であり、条件（電圧、電流、インピーダンス等）により決まる。ここで

$$r = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$Z_0 = R_0 + jX_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

r を伝搬定数、 Z_0 を特性インピーダンス、 α を減衰定数、 β を位相定数 という。

通常、高周波では $R \ll \omega L$ 、 $G \ll \omega C$ であるから、二次以上の項を無視すると

$$r = \omega\sqrt{LC} \left(j + \frac{R}{2\omega L} + \frac{G}{2\omega C} + \dots \right)$$

となり、

$$\alpha \doteq \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\beta \doteq \omega\sqrt{LC}$$

をえる。

参考として

$b/a = 2.7$; 電界が強くなることが出来る。

$b/a = 1.65$; 伝送電力が最大になる。

$b/a = 3.6$; 減衰が最小になる。

図3-8のように受端側に Z_b なるインピーダンスを接続したとき電源側からみたインピーダンス Z_a を求めてみる。いま $\alpha = 0$ 、 $z = \ell$ とする。

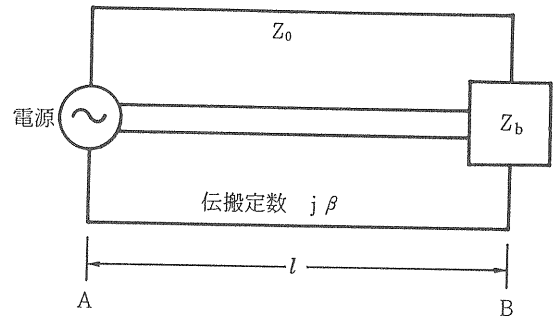


図3-8 同軸線路

$$Z_a = Z_0 \frac{Z_b + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + jZ_b \tan \beta \ell}$$

となる。

a) $Z_b = 0$ (短絡のとき)

$Z_a = jZ_0 \tan(\beta \ell)$ となる。

$\ell < \lambda/4$, $\lambda/2 < \ell < 3\lambda/4$ のとき

誘導性リアクタンス L

$\ell = \lambda/4$ のとき

無限大

$\lambda/4 < \ell < \lambda/2$ のとき

容量性リアクタンス C

$\ell = \lambda/2$, λ , $3\lambda/2$ のとき

ゼロ

b) $Z_b = \infty$ (開放) のとき

$Z_a = -jZ_0 \cot(\beta \ell)$ となる。

$\ell < \lambda/4$ のとき

容量性リアクタンス C

$\ell = \lambda/4$ のとき

ゼロ

$\lambda/4 < \ell < \lambda/2$ のとき

誘導性リアクタンス L

$\ell = m\lambda/2$ のとき

無限大

これらの性質はよく利用される。

2) 方形導波管

方形導波管の座標及び寸法を図3-9のようにとる。

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad \text{とおく。}$$

マクスウェルの方程式をそれぞれの条件（無損失等）

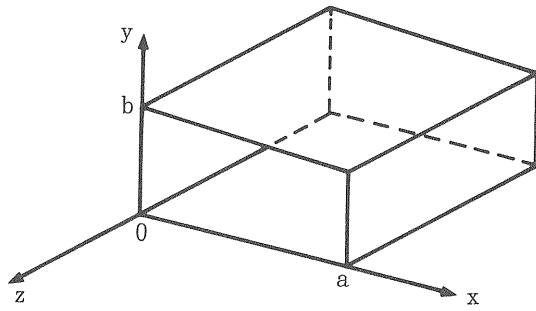


図3-9 方形導波管の座標

で解く。

以下のような結果を得る。

2-1) TM波形 ($H_z = 0$, $E_z \neq 0$)

微分方程式

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

を解く。結果は、 TM_{mn} 波と書く。

$$E_x = \frac{j\beta}{-k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = \frac{j\beta}{-k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = 0$$

但し、 m, n ; 正の整数 (0 を含まないことに注意)

$$k_c = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$$

$$\beta = 2\pi/\lambda_g = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$= \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}$$

$k > k_c$ ** 電波は電搬する。

$k < k_c$ ** 電波は減衰する。

$k = k_c$ ** 遮断周波数

インピーダンス Z は、

$$(\lambda/\lambda_g) \sqrt{(\mu/\epsilon)} \quad \text{である。}$$

減衰定数は、

$$\alpha = \frac{R_s}{60\pi b} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[\frac{m^2(b/a)^3 + n^2}{m^2(b/a)^2 + n^2} \right]$$

$$R_s = \sqrt{\omega \mu_2 / 2 \sigma}$$

μ_2, σ は導波管の導体の透磁率と導電率である。

f_c は遮断周波数である。

2-2) TE波形 ($H_z \neq 0$, $E_z = 0$)

微分方程式

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

を解く。結果は、 TE_{mn} 波と書く。

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_y = \frac{j\beta}{k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

但し、 m, n ; 正の整数または 0

(但し同時に 0 はとらない)

$$k_c = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$$

$$\beta = 2\pi/\lambda_g = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$= \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}$$

インピーダンス Z は、

$$(\lambda_g/\lambda) \sqrt{(\mu/\epsilon)} \quad \text{である。}$$

減衰定数は、

$$\alpha = \frac{R_s}{60\pi b} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[\frac{(b/a) \{ m^2(b/a) + n^2 \}}{m^2(b/a)^2 + n^2} \right]$$

$$\times \left\{ 1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right\} + \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right]$$

$$R_s = \sqrt{\omega \mu_2 / 2 \sigma}$$

μ_2, σ は導波管の導体の透磁率と導電率である。
 f_c は遮断周波数である。
 但し TE_{m0} 波に関して、

$$\alpha = \frac{R_s}{60\pi b} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \left[1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{f_c}{f} \right) \right]$$

である。

3) 円形導波管

円形導波管の問題を解くには、円柱座標を使う。

3-1) TM 波形 ($H_z = 0, E_z \neq 0$)

微分方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + k_c^2 E_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

を解く。明らかに、ベッセル関数の形である。

ベッセル関数

$J_m(y_{mn}) = 0$ の根 および

$J'_m(y'_{mn}) = 0$ の根 の表

y_{mn} の表

m \ n	1	2	3
0	2.40	5.52	8.65
1	3.83	7.02	10.17
2	5.14	8.42	11.62

y'_{mn} の表

m \ n	1	2	3
0	3.83	7.02	10.17
1	1.84	5.33	8.54
2	3.05	6.71	9.97

結果は、TM_{mn} 波と書く。

$$E_r = -j \frac{\beta}{(y_{mn}/a)} \cos m \theta J'_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_\theta = j \frac{\beta m}{(y_{mn}/a)^2} \sin m \theta \frac{1}{r} J_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = \cos m \theta J_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_r = -j \frac{\omega \epsilon m}{(y_{mn}/a)^2} \sin m \theta \frac{1}{r} J_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_\theta = -j \frac{\omega \epsilon}{(y_{mn}/a)} \cos m \theta J'_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = 0$$

但し、m, n; 正の整数または 0

$$k_c = y_{mn}/a$$

$$\beta = 2\pi/\lambda_g = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - (y_{mn}/a)^2}$$

である。

減衰定数は、

$$\alpha = \frac{R_s}{120\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

$$R_s = \sqrt{\omega \mu_2 / 2 \sigma}$$

μ_2, σ は導波管の導体の透磁率と導電率である。
 f_c は遮断周波数である。

3-2) TE 波形 ($H_z \neq 0, E_z = 0$)

微分方程式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + k_c^2 H_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

を解く。結果は、TE_{mn} 波と書く。

$$E_r = \frac{j \omega \mu m}{(y'_{mn}/a)^2} \sin m \theta \frac{1}{r} J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_\theta = \frac{j \omega \mu m}{(y'_{mn}/a)} \cos m \theta J'_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0$$

$$H_r = -\frac{j \beta}{(y'_{mn}/a)} \cos m \theta J'_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_\theta = \frac{j \beta m}{(y'_{mn}/a)^2} \sin m \theta \frac{1}{r} J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_z = \cos m \theta J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right) e^{-j\beta z}$$

但し、m, n; 正の整数または 0

$$k_c = y'_{mn}/a$$

$$\beta = 2\pi/\lambda_g = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - (y'_{mn}/a)^2}$$

である。

減衰定数は、

$$\alpha = \frac{R_s}{120\pi a} \left[\left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{(m/y'_{mn})^2}{1 - (m/y'_{mn})^2} \right]$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

$$R_s = \sqrt{\omega \mu_2 / 2 \sigma}$$

μ_2 , σ は導波管の導体の透磁率と導電率である。

f_c は遮断周波数である。

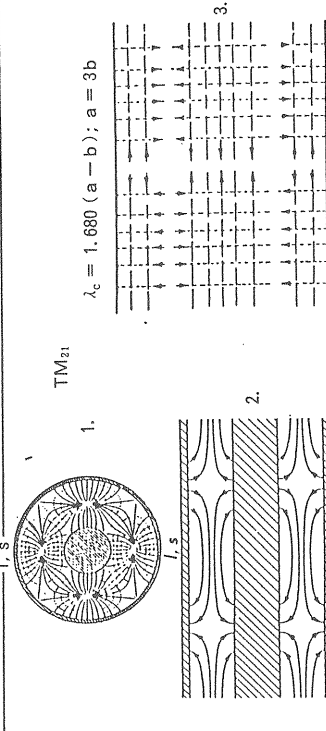
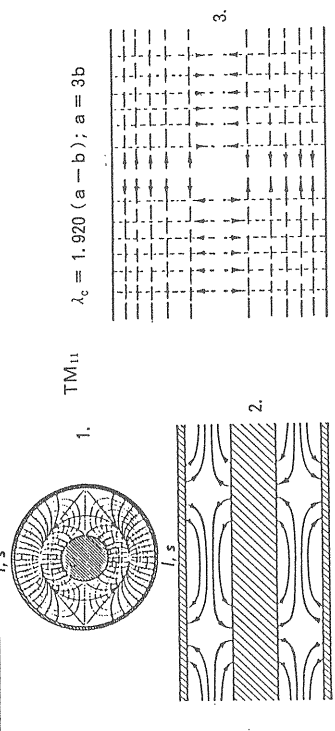
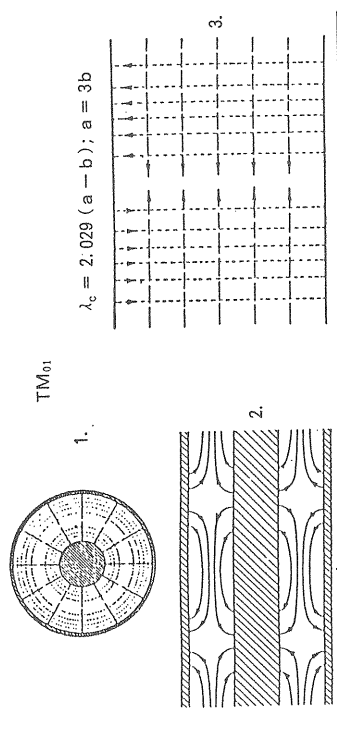
但し TE_{0n} 波に関して、

$$\alpha = \frac{R_s}{120 \pi a} \frac{(f_c/f)^2}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

である。

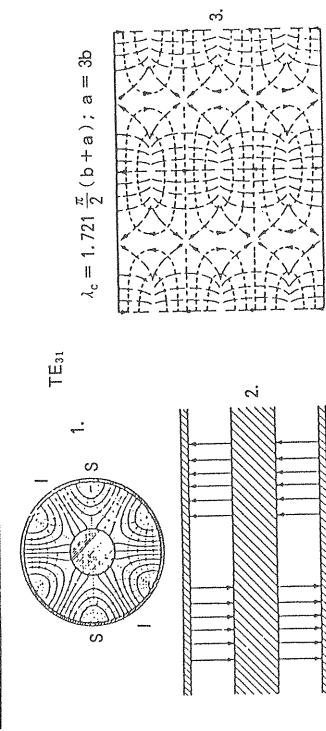
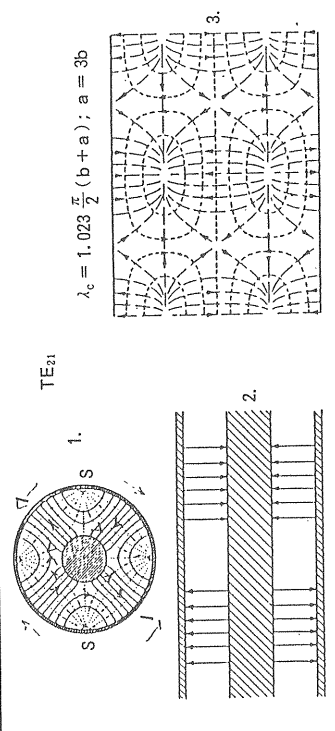
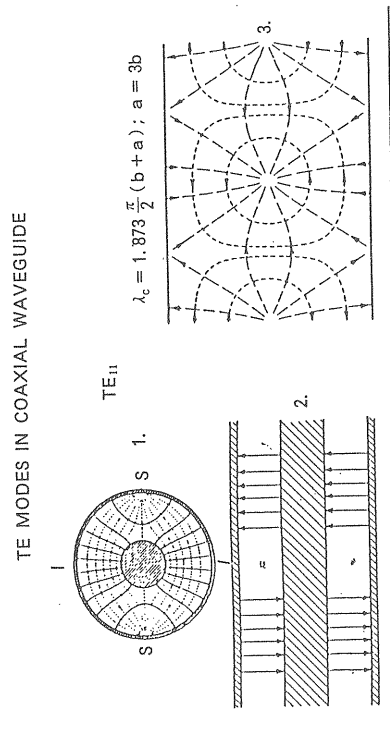
円形導波管は、曲がり部で、円からの変形等により高次のモードを誘発するため、多くは方形導波管を使用する。特に、基本波形 TE_{10} モードを使う。色々なモードの波形を示す。これによりどの様なモードが励起されるか考える資料になればよい。

TM MODES IN COAXIAL WAVEGUIDE



1. Cross-sectional view
2. Longitudinal view through plane l-l
3. Surface view from s-s

a. Inside Radius of Outer Conductor
b. Outside Radius of Inner Conductor

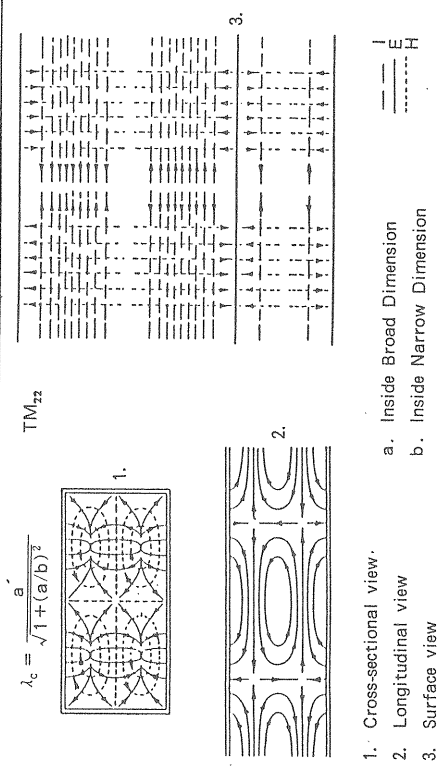
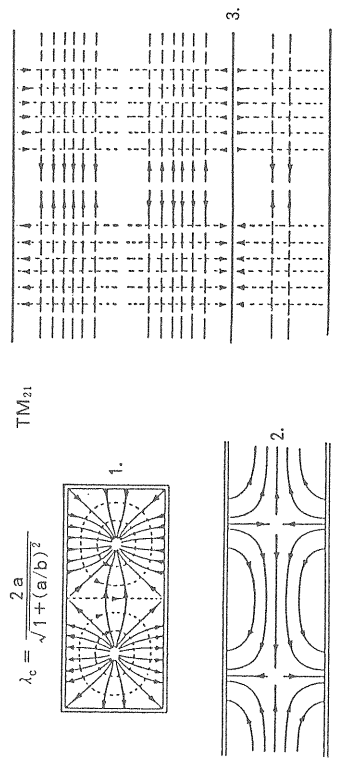
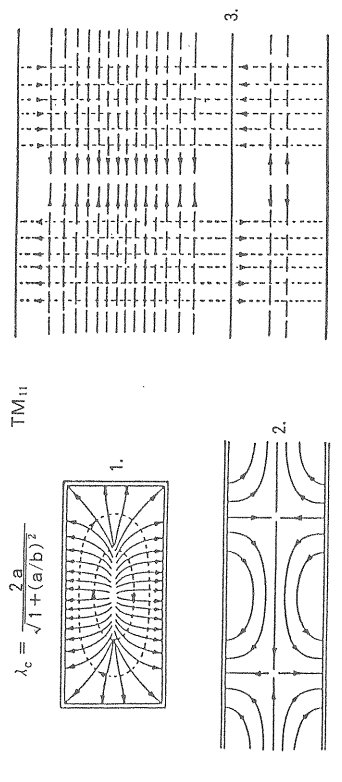


1. Cross-sectional view
2. Longitudinal view through plane l-l
3. Surface view from s-s

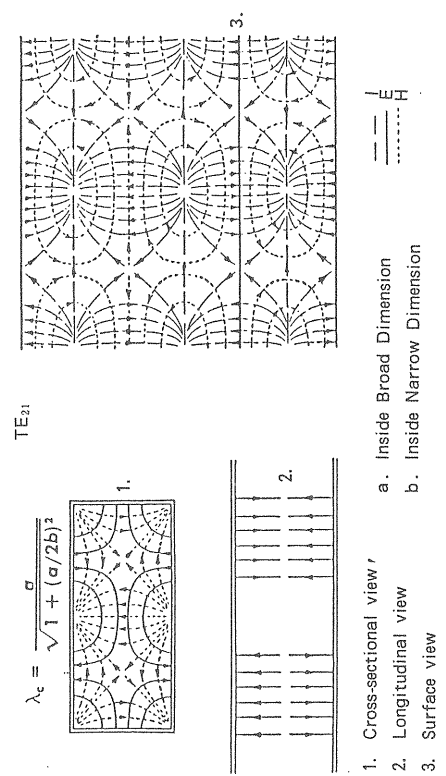
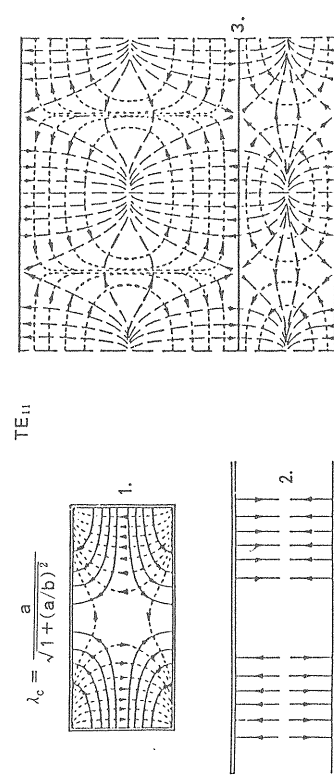
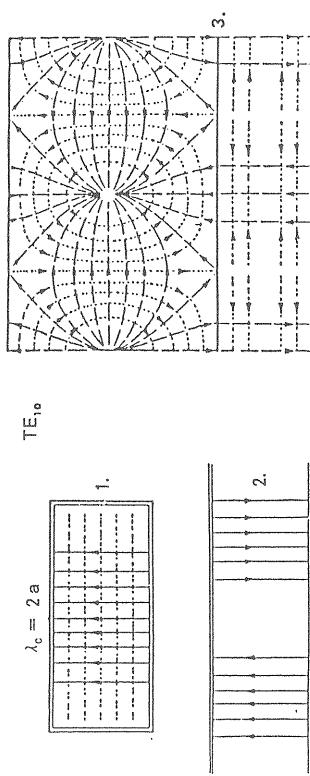
a. Inside Radius of Outer Conductor
b. Outside Radius of Inner Conductor

文献 15) より

TM MODES IN RECTANGULAR WAVEGUIDE

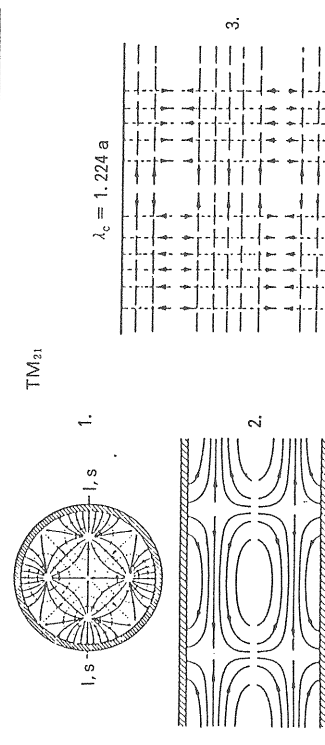
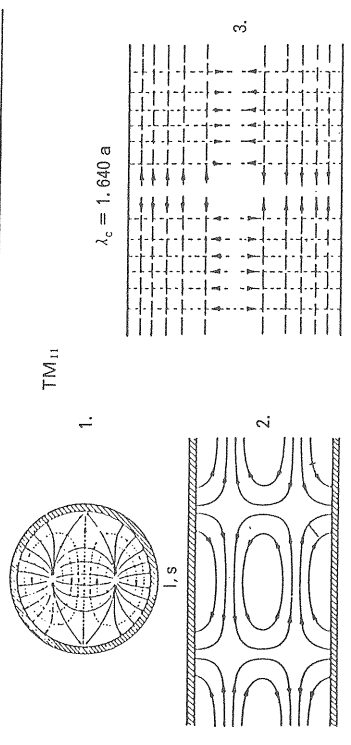
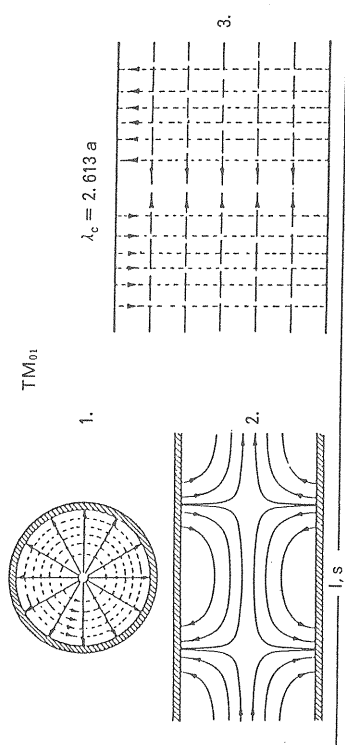


TE MODES IN RECTANGULAR WAVEGUIDE

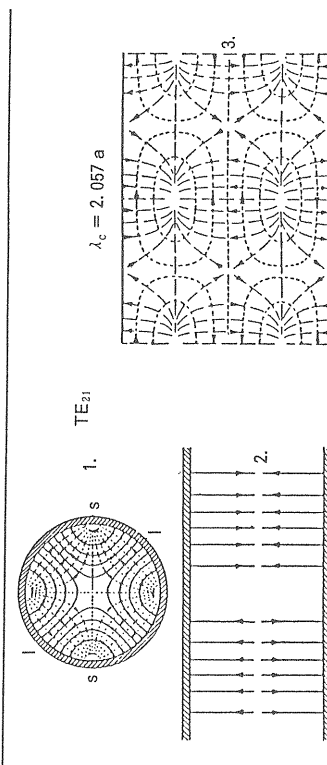
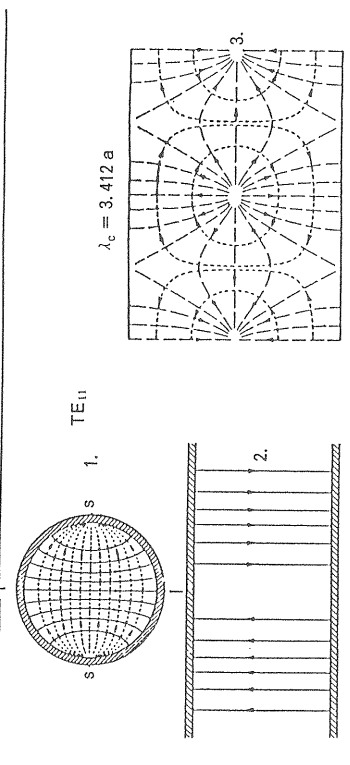
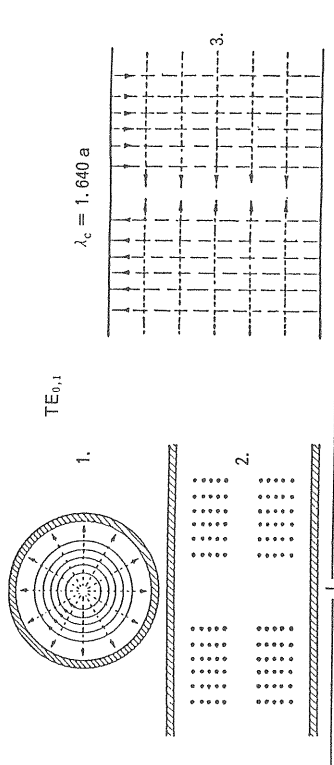


文献15) より

TE MODES IN CIRCULAR WAVEGUIDE



TM MODES IN CIRCULAR WAVEGUIDE



5. 空洞共振器

Q 値について

$$\omega \frac{\text{空洞に蓄積されているエネルギー}}{\text{空洞内で消費される電力}} \\ = 2\pi \frac{\text{空洞に蓄積されているエネルギー}}{\text{一周期の間に消費されるエネルギー}} = \frac{\omega W}{P}$$

である。

5-1) 同軸共振器

図3-10のように、 $z=0$ 、 $z=L$ で短絡されている同軸空洞を考える。

前述した伝送線の式に、この条件をつけて、電圧、電流を求める。

$$V = -j A 2 \sin kz$$

$$I = \frac{1}{Z_0} A 2 \cos kz$$

となる。

ここで、 $kL = m\pi$ 、 $L = m\lambda/2$ である。

m ；正の整数

同様に同軸管も考えると、電磁界の分布は次の式のようなになる。

$$E_r = -j E_1 \frac{1}{r} \sin kz$$

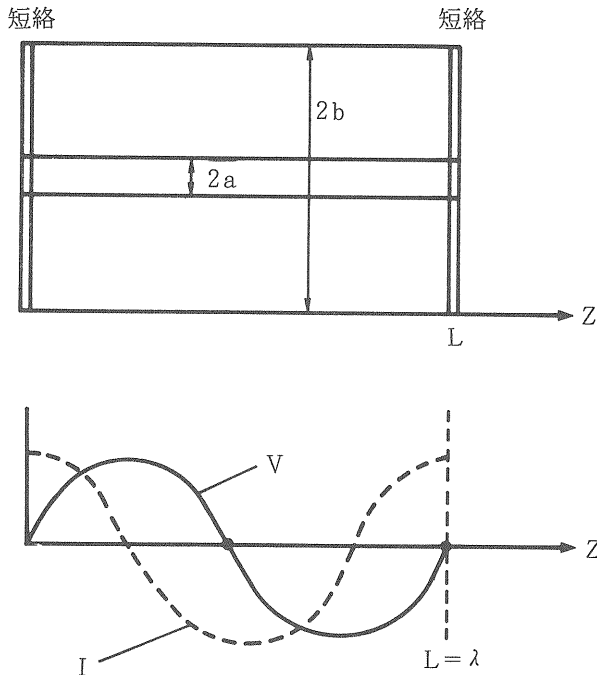


図3-10 同軸共振器

$$H_\theta = E_1 \frac{1}{Z_i} \frac{1}{r} \cos kz$$

$$Z_i = \sqrt{\mu/\epsilon} \text{ である。}$$

最大共振波長は $2L$ である。

Q 値の計算は、

$$\text{電気エネルギー} = \int_V \frac{\epsilon}{2} |E|^2 dV$$

$$\text{磁気エネルギー} = \int_V \frac{\mu}{2} |H|^2 dV$$

を計算し、

$$\text{空洞の壁面での損失} = \frac{1}{2} \int_s R_s |H_t|^2 ds$$

を計算する。

$$Q = \frac{\omega W}{P} = \frac{2L}{\delta \left[4 + \left(\frac{L}{a} + \frac{L}{b} \right) / \log \left(\frac{b}{a} \right) \right]}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

Qは、大体 $f^{-(3/2)}$ に比例して小さくなる。

5-2) 矩形空洞共振器

矩形空洞の場合も、 $z=0$ 、 $z=c$ で短絡する。

空洞導波管の TE_{mn} 、 TM_{mn} 波の $z=0$ 、 $z=c$ の短絡条件により共振波長が決まる。

$$\left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{m}{2a} \right)^2 + \left(\frac{n}{2b} \right)^2 + \left(\frac{l}{2c} \right)^2$$

m 、 n 、 l は任意の整数である。

共振波形を TE_{mnl} 、 TM_{mnl} 波形という。

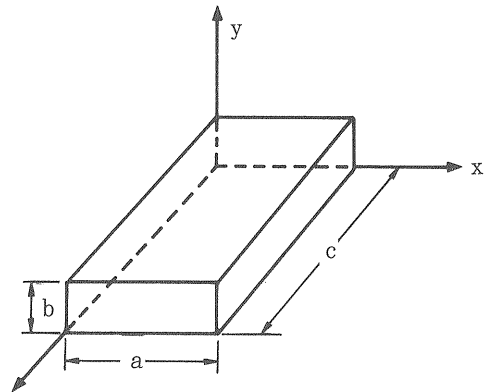


図3-11 矩形空洞の座標

Q 値は,

TE_{mn1} 波形

$$Q = \frac{\lambda \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{\ell^2}{c^2} \right)^{3/2}}{2\delta \left[\left(\frac{2}{a} + \frac{\epsilon_n}{b} \right) \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) + \frac{\ell^2}{c^2} \left\{ \left(\frac{\epsilon_n}{b} + \frac{2}{c} \right) \frac{m^2}{a^2} + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) \frac{n^2}{b^2} \right\} \right]}$$

TM_{mn1} 波形

$$Q = \frac{\lambda \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{\ell^2}{c^2} \right)^{1/2}}{2\delta \left[\frac{m^2}{a^2} \left(\frac{2}{a} + \frac{\epsilon_l}{c} \right) + \frac{n^2}{b^2} \left(\frac{2}{b} + \frac{\epsilon_l}{c} \right) \right]}$$

TE₁₀₁ 波形

$$Q = \frac{2}{\delta \lambda^2 \left[\frac{1}{a^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{2}{b \lambda^2} \right]}$$

$$\begin{array}{llll} \epsilon_n = 1 & n = 0 & \epsilon_l = 1 & l = 0 \\ = 2 & n \neq 0 & = 2 & l \neq 0 \end{array}$$

5-3) 円筒空洞共振器

共振軸長をLとする。共振波長は次の式で与えられ

る。

TM 波形

$$\left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{l}{2L} \right)^2 + \left(\frac{y_{mn}}{2\pi a} \right)^2,$$

TE 波形

$$\left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{l}{2L} \right)^2 + \left(\frac{y'_{mn}}{2\pi a} \right)^2$$

Q 値は

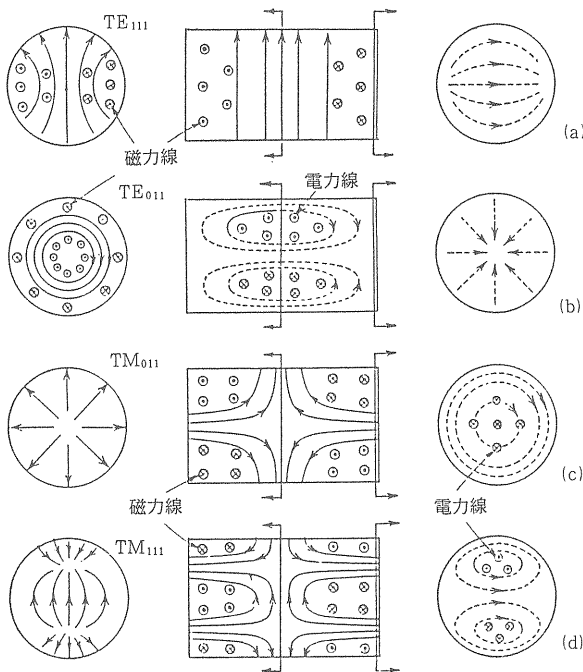
TM_{mn1} 波形

$$Q = \frac{a}{\delta (1 + \epsilon_l a/L)}$$

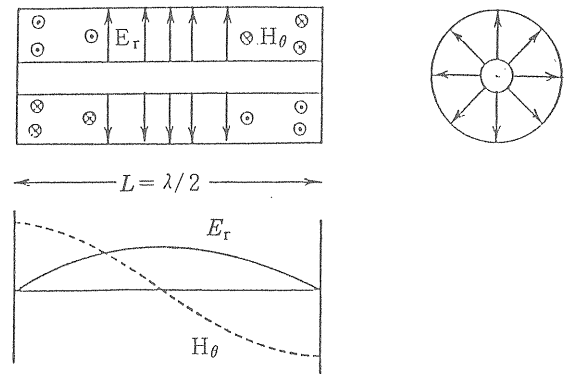
TE_{mn1} 波形

$$Q = \frac{\lambda (y'_{mn^2} - m^2) \left[y'_{mn^2} + \left(\frac{\ell \pi a}{L} \right)^2 \right]^{3/2}}{\delta 2\pi \left[y'_{mn^4} + 2\pi^2 \ell^2 y'_{mn^2} \frac{a^3}{L^3} + \left(\frac{\pi m \ell a}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{2a}{L} \right) \right]}$$

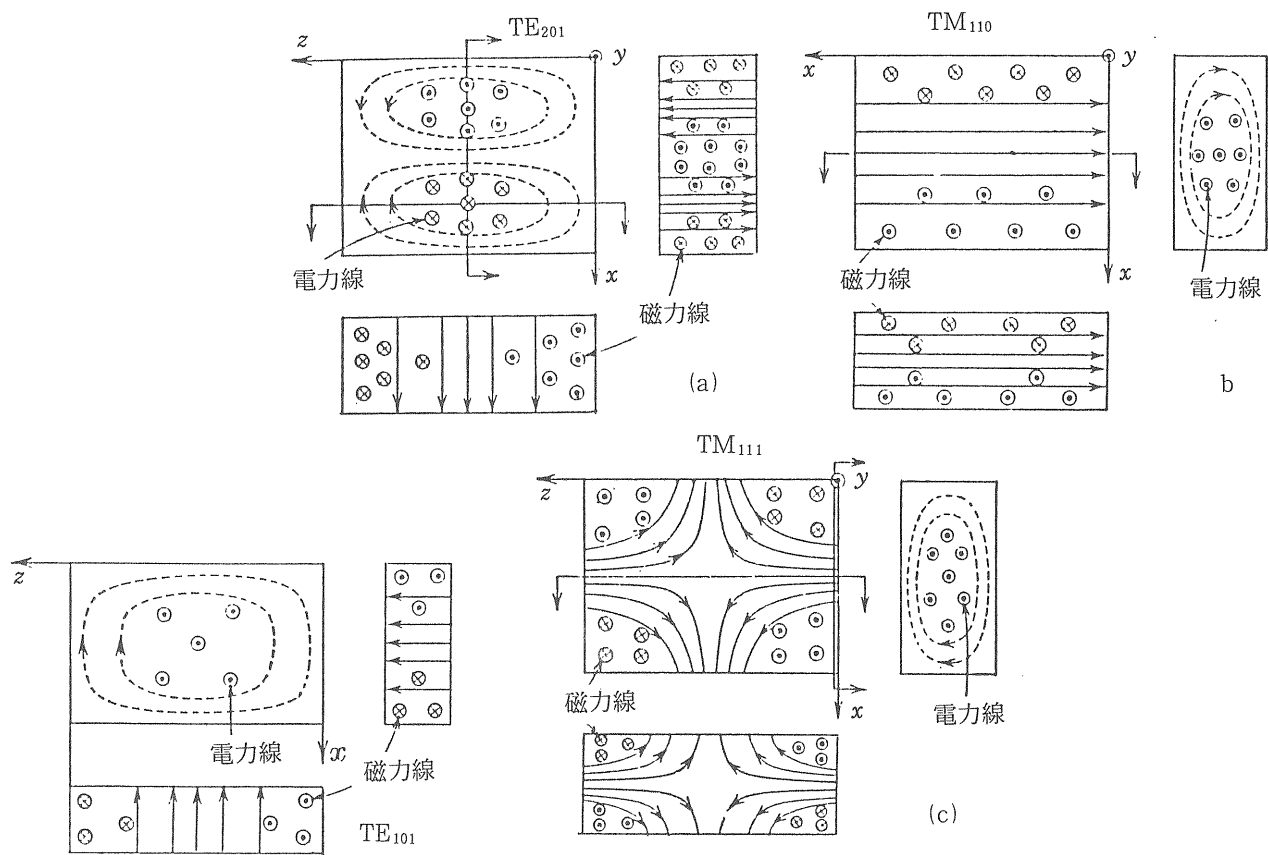
色々な共振器の電磁界分布をしめす。



円筒空洞共振器の電磁界分布



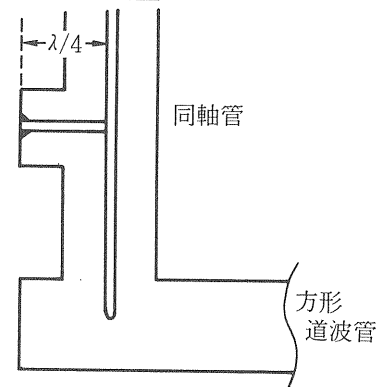
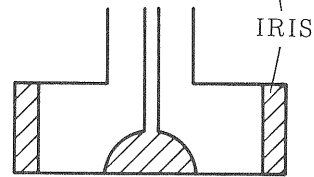
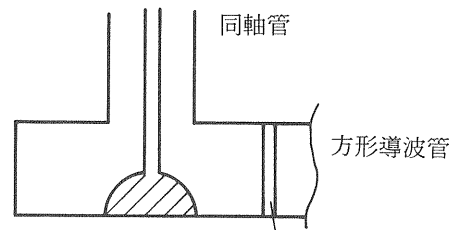
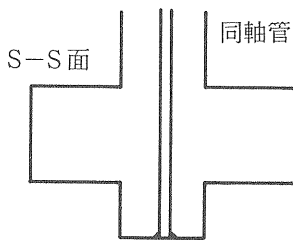
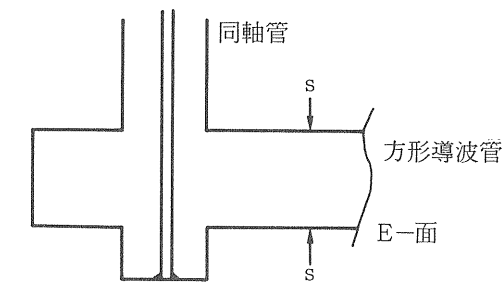
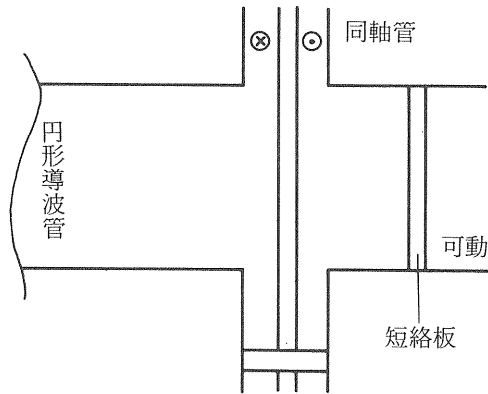
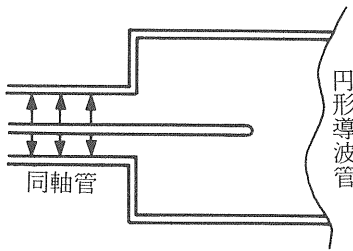
同軸共振器の電磁界分布



矩形空洞共振器の電磁界分布

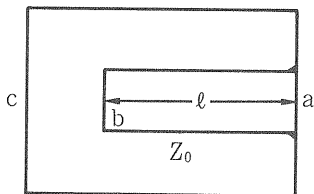
5-4) 導波管及び空洞の色々な結合 (宿題)

同軸管と導波管 (電場又は磁場を図示せよ。)
(実線)



蛇足；

半同軸共振器について



電場を図示せよ。

$l = \frac{\lambda}{4}$ に選んだ時 λ の波長で共振するか？



同軸管に TEM 波が伝播された
導波管側のモードを書け。

bc 間の容量を C とすると

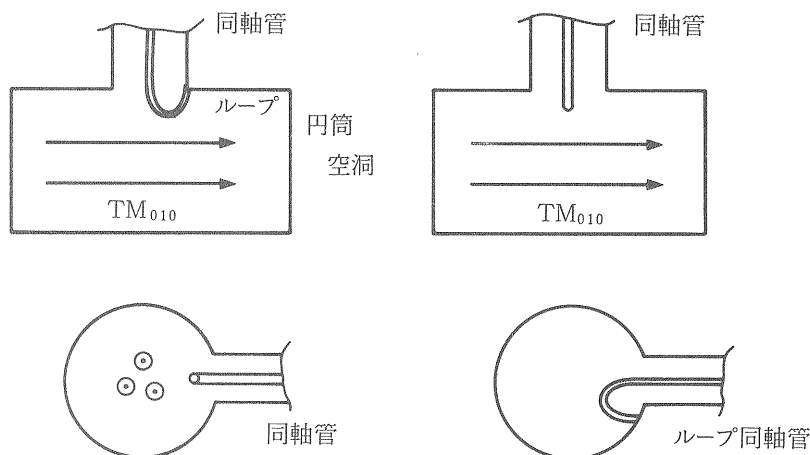
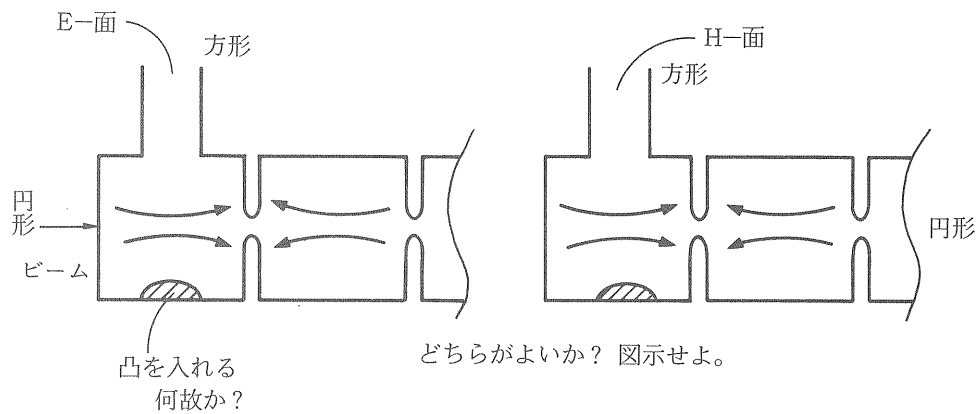
$$\frac{1}{\omega C} = Z_0 \tan \beta l_t$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{at } b$$

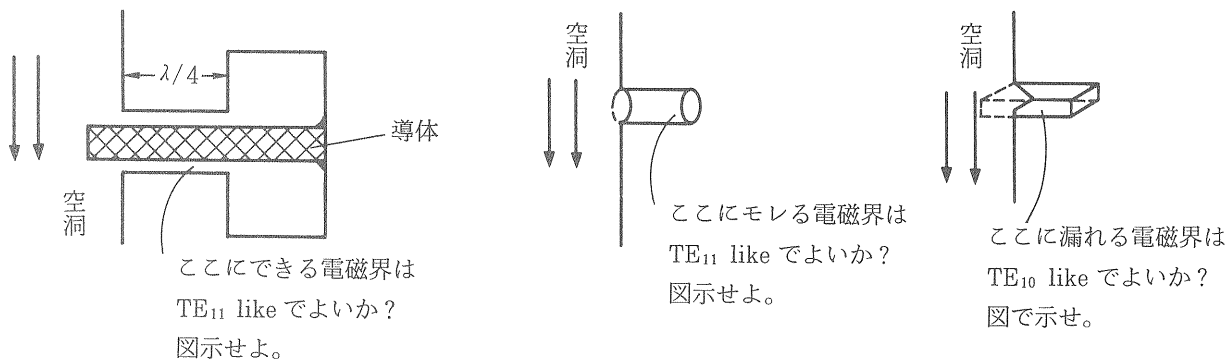
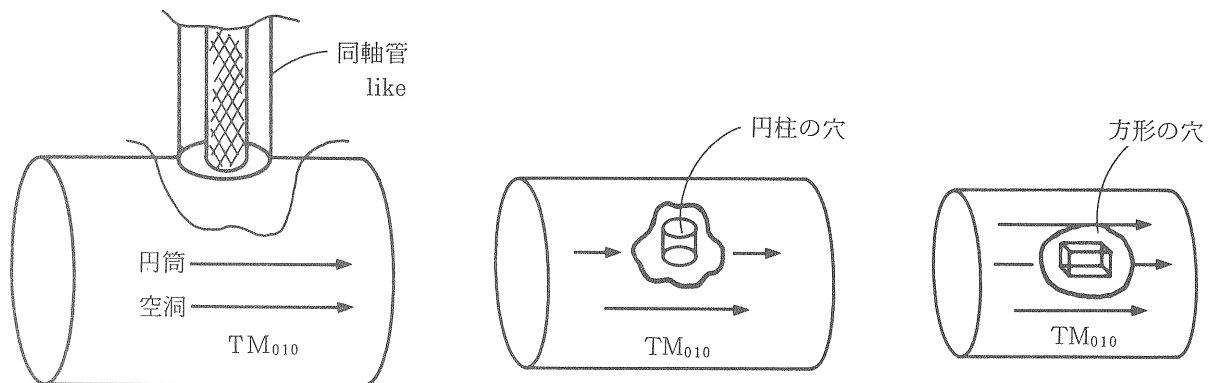
$$l_t + l \approx \frac{\lambda}{4} \quad \text{に選ぶ。}$$

注；実際の機器は，大電力であるが故に，
更に詳細に計算する。

高周波源の増巾器の構造と比較し，考察せよ。



どちらがよい？ 図示せよ。



6. 空洞共振器の応用

円筒空洞共振器の TM_{010} モードをとりだしてみる。
電磁界の分布は図3-12のようにになっている。

この円筒空洞共振器の円筒部を、図3-13のように凸にする。ギャップ g に電場（加速電場）が集中する。ギャップ内の最大電圧を V とすると、加速電場は次のようになる。

$$E_z = (V/g) \cos(\omega t)$$

この電場の z -軸 方向の分布を図3-13のように仮定する。速度 v を持ち、 $t = 0$ でギャップの中央を通る粒子を考える。

その粒子がギャップで得られるエネルギーは、

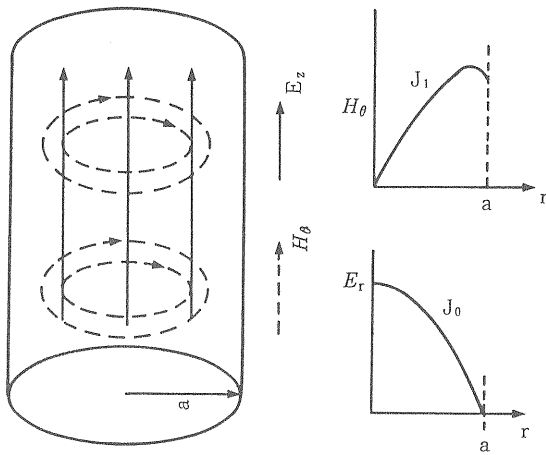


図3-12 TM_{010} モード

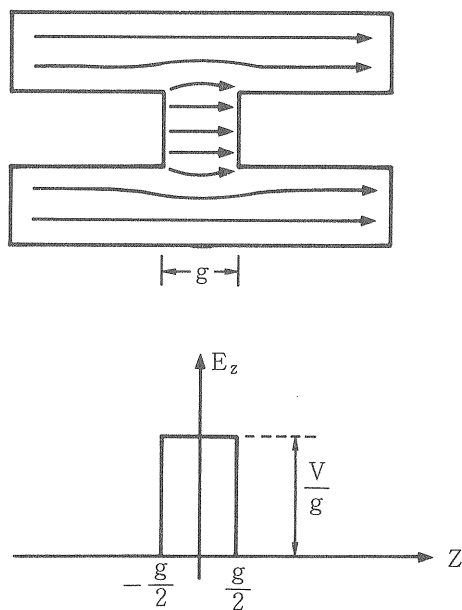


図3-13 シングルギャップ

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int_{-g/2}^{g/2} \frac{qV}{g} \cos \omega \frac{z}{v} dz = qV \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} \\ &= qVT \end{aligned}$$

ここで、 $\theta = \omega g/v$ を transit angle と呼び、 $T = \sin(\theta/2)/(\theta/2)$ を transit time factor と言う。

V は加速電圧であり、通常、次のように表す。

$$V = E_0 L = \int_0^L E_z(r=0, z) dz$$

E_0 を平均加速電場と言う。

$E_z(r=0, z)$ は加速電場の最大値である。

又 transit time factor は、

$$T = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) \cos \frac{2\pi z}{L} dz}{\int_{-L/2}^{L/2} E_z(z) dz}$$

である。故にギャップでの加速エネルギーは、通常

$$\Delta W = q E_0 L T \cos(\phi)$$

と書く。ここで ϕ は、位相上の安定性を考慮して考える。上の式と比較すれば、 ϕ は、最高エネルギーを得る位相に対する粒子の位相である。同期粒子に対して ϕ を ϕ_s と書く。

加速器の分野で、加速の効率を表すのにシャントインピーダンス Z を使う。

$$Z = E_0^2 / (P_c / L)$$

P_c ; 空洞の消費電力、 L ; 空洞の長さ

空洞の消費電力を、加速エネルギー一定の条件のもとで、最小にすることを考えれば、 ZTT を最適化することに相当する。なぜならば、

$$P_c \propto (\Delta W)^2 / (ZTT)$$

である。

空洞の話に戻ろう。前述した空洞を二個隣会って並べてみよう。組合せは図3-14のように二通りある。左側の図を π モードと言う。右側を 2π モードと言う。 2π モードでは、共通の壁では電流がゼロとなり、必要でない。そして全てのギャップに同じ位相関係で電場がある。位相が 180 度進んだとき、電場のない空間

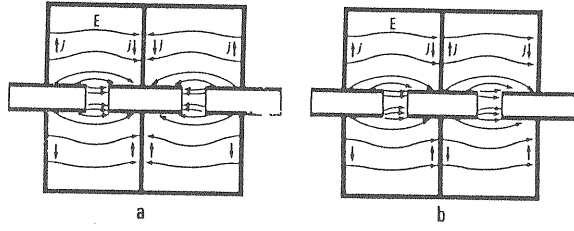


図3-14 シングルギャップの合成

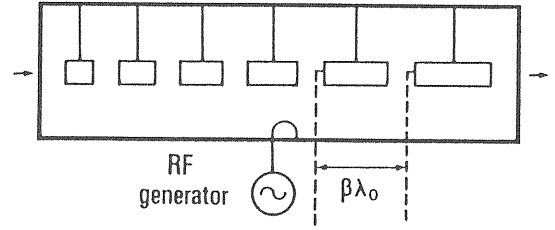


図3-15 アルバレ型空洞

を粒子が走れば、減速されない。これを発展させた型がアルバレ型構造である。図3-15に示す。

このような空洞での粒子の加速について考える。

まず、

$$\Delta W = q E_0 T L \cos(\phi)$$

を満足するように、一個の cell の長さ ($L = \beta \lambda$) を決める。これを何回も (必要なエネルギーまで) 計算する。この関係を満足する粒子を同期粒子と言う。そして、この手続きがリニアックの設計である。この時、波の位相と同期粒子の位相の差が ϕ_s である。

$$\phi_s = \omega t_s - \frac{2\pi}{\lambda} \int \frac{dz}{\beta_s}$$

同期粒子とその他の粒子のエネルギー及び位相の関係を式に表す。 $w = W - W_s$, $\psi = \phi - \phi_s$ とおく。

エネルギーに関して

$$\frac{dw}{dz} = q E_0 T [\cos(\phi_s + \psi) - \cos \phi_s]$$

位相に関して

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dz} &= \omega \left(\frac{dt}{dz} - \frac{dt_s}{dz} \right) = \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_s} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{w}{\beta_s^3 r_s^3 m_0 c^2} \end{aligned}$$

となる。

この式は明らかに非線形である。 β_s の変化がゆっくりであると言う近似において、位相に関する方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dz^2} &= -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{q}{\beta_s^3 r_s^3 m_0 c^2} E_0 T [\cos(\phi_s + \psi) \\ &\quad - \cos \phi_s] \end{aligned}$$

この effective な力 (右辺) を積分して、potential にする。この結果を図3-16に示す。この図が位相の安定領域を決める。

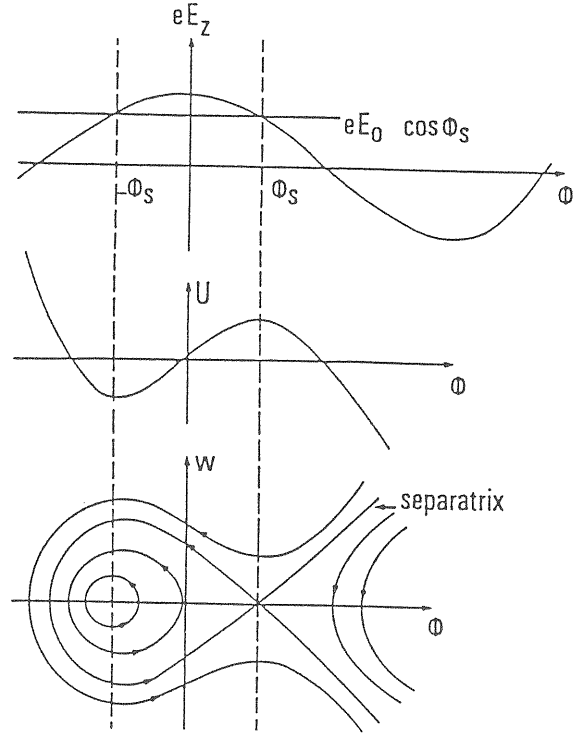


図3-16 位 相

ψ_{\max} が約 $3|\phi_s|$ である。

この運動の式を導く hamiltonian H は

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\pi}{\lambda} \frac{W^2}{\beta_s^3 r_s^3 m_0 c^2} - q E_0 T [\sin(\phi_s + \psi) \\ &\quad - \psi \cos \phi_s] \end{aligned}$$

となる。

$w=0$ のとき ψ_{\max} を、 $\psi=0$ のとき w_{\max} をえる。故に

$$\frac{w_{\max}}{\psi_{\max}} = \left[\frac{-\lambda}{2\pi} \beta_s^3 r_s^3 m_0 c^2 q E_0 T \sin \phi_s \right]^{1/2}$$

の関係を得る。また Liouville の定理により、

$$w_{\max} \times \psi_{\max} = \text{const.}$$

であるから、

$$w_{\max} = \text{const.} \left[-\frac{\lambda}{2\pi} \beta_s^3 r_s^3 m_0 c^2 q E_0 T \sin \phi_s \right]^{1/4}$$

$$\psi_{\max} = \text{const.} \left[-\frac{\lambda}{2\pi} \beta_s^3 r_s^3 m_0 c^2 q E_0 T \sin \phi_s \right]^{-1/4}$$

をえる。

これは、 ψ_{\max} が加速と共に減少すること、 w_{\max} が逆に増加することを示す。しかしエネルギー広がり(%)では減少する。

これら二個の量が次の加速器に整合取れるようにして、次段のリニアックは設計される。

7. r f defocussing について (横方向の運動への加速電場の影響)

ドリフトチューブ間を荷電粒子が通過する時、加速されるだけでなく、横方向にも力を受ける。この力を r f defocussing 力という。

図3-17に示すように、ギャップ間の電場分布は、横方向の成分をもつ。しかし、もしこの電場が静電場であれば、ギャップの入口と出口では、加速されるため横方向の力は、全体として focussing 力となる。しかし r f で加速される場合、事情が少し違う。別の項で述べたように、位相の安定性から、 $\sin(\text{位相}) < 0$ でなければならない。即ち時間がたつと電場が増加することになる。言い換えればギャップの出口に近づけば、電場が強くなる。defocussing 力が強くなる。

円筒空洞の場合の電磁場の式を思いだして下さい。軸からの横方向へのずれが小さいと仮定し、ベッセル関数の1次までをとると、電磁場の式は下のように与えられる。

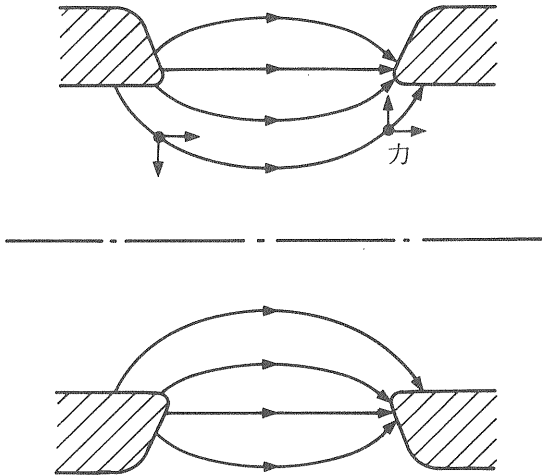


図3-17 ギャップの電場

$$E_r = \frac{\pi}{\lambda} \frac{E_0 T}{\beta_p} r \cos \left(\omega t - \int \frac{dz}{v_p} \right)$$

$$B_\theta = \frac{\pi}{\lambda} \frac{E_0 T}{c} r \cos \left(\omega t - \int \frac{dz}{v_p} \right)$$

この式から横方向のローレンツ力を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m \dot{r}) &= q E_r - q v B_\theta \\ &= -\frac{\pi}{\lambda} q E_0 T \frac{1}{\beta_p} (1 - \beta \beta_p) r \cos \left(\omega t - \int \frac{dz}{v_p} \right) \end{aligned}$$

同期のとれた粒子を考えると、 $v = v_p$ と $(\omega t - \int dz/v_p) = \phi_s + \pi/2$ (リニアックではこのような条件になるようギャップ間の距離を設計する。) となり、下の式になる。

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{\pi}{m_0 c^2 \lambda} \frac{q E_0 T}{\beta_s^3 r_s^3} \sin \phi_s x$$

この式の右辺の符号を考えてみてください。位相の安定性のため $\sin(\phi_s)$ は、負になり、全体として、右辺は正となる。即ち、この微分方程式の解は exponentially に発散する。なにもしなければ、ビームが壁にあたることになる。そこで、通常ドリフトチューブ内に四極磁石を組み込み、磁場による力でビームを安定な運動状態に保つ (別の項を参照のこと)。

r f defocussing 力について付け加えて置きますと

1) 速度が大きくなれば (粒子のエネルギーが高くなれば), この力は弱くなる。

2) E_0 (加速電場の強さ) が大きいと力が強い。

3) 周波数が高ければ高いほど、力が強くなる。

高周波による横方向の力は、これだけではありません。ここでは述べませんが、空洞が軸対称からずれていた場合の効果も考えなければなりません。その上ビームが軸からずれていた時は、影響が増える。これらの影響は難しくここでは考えない。しかし、頭の片隅にとどめておいて下さい。空洞の電場を測定し (最近では、3次元の電磁場のプログラムがある。) simulation により、この影響を計算する。

この r f defocussing 力を、次の項で述べる Thin Lens 近似では、matrix 表示を使い、次のように書く。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_{rf}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{f_{rf}} = \frac{-\pi}{m_0 c^2 \lambda} \frac{q E_0 T}{\beta_s^3 \gamma_s^3} (\sin \phi_s) L$$

この matrix 表示を使い、ビームの運動の安定性を計算する。

第4章 横方向の運動について

荷電粒子が、磁場の存在する空間で、どのような運動をするか調べよう。この粒子には、ローレンツ力が働くから、運動の方程式は次のように書ける。

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{P} = m_0 \gamma \mathbf{v}$$

この方程式を解くために、座標系を導入する。一般に、ビームは多くの粒子から成り立っている。その中の代表的な粒子が通過する軌道を中心軌道とする。例えば、磁場の上下対称な面 (median plane) 上に中心軌道があり、四極磁場中では、磁場の強さがゼロの所を中心軌道とする。個々の粒子の軌道は、この中心軌道と垂直な面 ($x-y$ 面) 上の位置、及びその面に対する傾きとして表す。即ち (x, x', y, y') と表現する。また、荷電粒子の x, y 方向の運動量を p_x, p_y とし、中心軌道に沿った運動量を p_s とする。

x', y' は、

$$x' = \frac{dx}{ds} = \frac{p_x}{p_s}$$

$$y' = \frac{dy}{ds} = \frac{p_y}{p_s}$$

と書ける。

運動量に関しては、

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_s^2$$

と書ける。

我々が取り扱う粒子は、通常 $|x'| \ll 1, |y'| \ll 1$ であるから

$$p = p_s$$

と考えてよい。

色々な磁場での荷電粒子の運動を調べよう。

1) 磁場のない空間

粒子が磁場のない空間を通過する場合、即ち、外部からの力を受けない場合、方程式は、非常に簡単になる。

$s = 0$ の場所で、 (x_0, x_0') の粒子は、 $s = L$ の点で、 (x, x') となる。

式で表現すると、

$$x = x_0 + L x_0'$$

$$x' = x_0'$$

となる。

これは、 $x_0' \neq 0$ (一般的にそうであるが) の粒子は、どんどん中心軌道から離れていき、どこか制限された壁にぶつかる。このようなことでは、ビームを遠くまで輸送できない。上の関係を matrix 表示で書き直すと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

この matrix を transfer matrix という。

図4-1で示す。

2) 四極磁石

四極磁石は、磁場の強さがゼロとなる線 (磁場中心

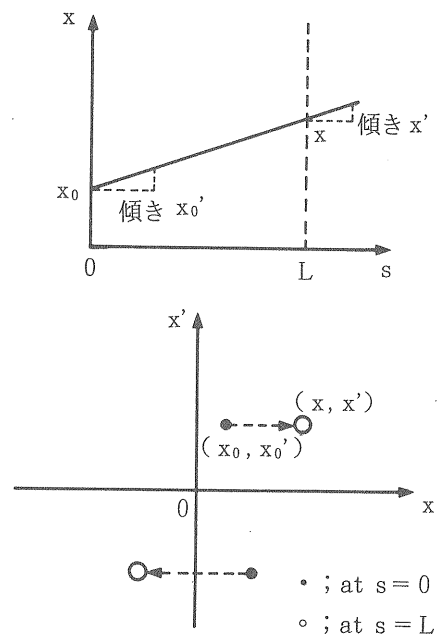


図4-1 自由空間

と言う)を持ち, x, y 軸上での磁場の強さが中心からの距離に比例し強くなる磁石である。このゼロになる線を中心軌道に選ぶ。

磁場は,

$$B_x = Gy, \quad B_y = Gx \quad B_s = 0$$

と書く。

ここで, G を磁場勾配と言う。

四極磁石の中での荷電粒子が受ける力を図4-2に示す。

図4-2から明かなように, x 軸と y 軸では, 力の向きが異なる。即ち一方の力が内側に向いている(収束力)と, 必ず他方は反対になる(発散力)。

運動の方程式を書くと, 次のようになる。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q(v_y B_s - v_s B_y) = -q v_s B_y \\ m\ddot{y} &= q(v_s B_x - v_x B_s) = q v_s B_x \end{aligned}$$

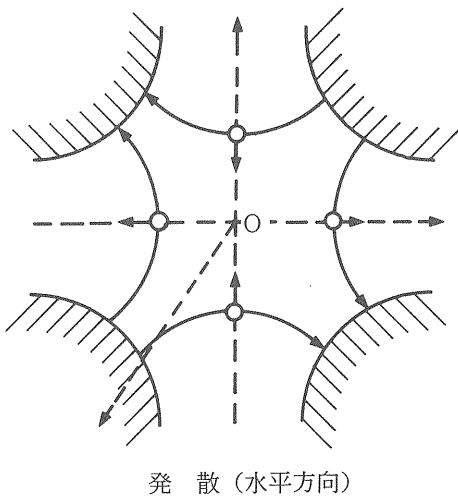
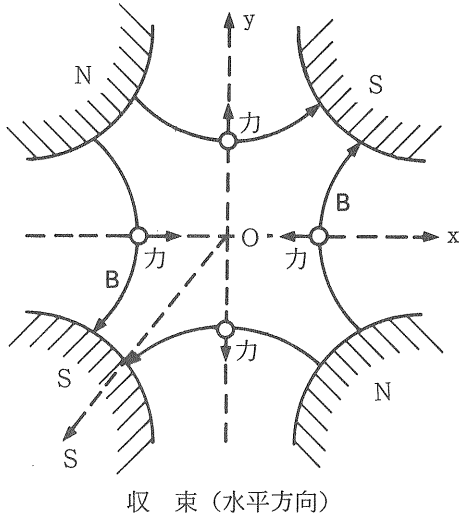


図4-2 四極磁石の力

・ ; 時間微分である。

$B_s = 0$ を使用した。

この方程式を s - 方向の微分に変換する。

$$x'' = -\frac{qG}{p_s} x$$

$$y'' = \frac{qG}{p_s} y$$

' ; d/ds である。

図4-2で示したように, x 軸と y 軸で力の向きが違ふことがわかる。この微分方程式は, 係数が常数であれば, 容易に解くことが出来る。磁石の中では, この条件は充される。

初期条件

$$\begin{aligned} s=0 \text{ で } \quad x &= x_0, \quad x' = x_0' \\ y &= y_0, \quad y' = y_0' \end{aligned}$$

のもとで, 微分方程式を解く。

ここで, magnetic rigidity (磁気剛性)

$$\begin{aligned} p/q &= B_0 \rho \quad (\text{テスラ m}) \\ &= 3.1297 \beta r \quad (\text{陽子}) \\ &= 3.3356 p \quad (\text{GeV/c}) \end{aligned}$$

を導入する。リニアックの場合, この言葉はたいして使用されない。何故ならば, p_s がいつも変化するからである。

$$k = \frac{qG}{p_s} = \frac{G}{B_0 \rho}$$

とおく。

$k > 0$ のとき $s = L$ での答えを求める。

x - 軸では,

$$x = x_0 \cos \sqrt{k} L + \frac{x_0'}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} L$$

$$x' = -\sqrt{k} x_0 \sin \sqrt{k} L + x_0' \cos \sqrt{k} L$$

y - 軸では,

$$y = y_0 \cosh \sqrt{k} L + \frac{y_0'}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{k} L$$

$$y' = \sqrt{k} y_0 \sinh \sqrt{k} L + y_0' \cosh \sqrt{k} L$$

となる。

この解は, x 方向については, 振動をするだけで振動が大きくなることを示している。これを四極磁石の収束作用という。一方, y 方向に関しては, x -

方向と違い、振幅は exponentially に大きくなる。この場合を発散作用という。

四極磁石でのこの解を matrix 表示で書くことが出来る。

収束作用の場合

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k} L & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} L \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k} L & \cos \sqrt{k} L \end{pmatrix}$$

発散作用の場合

$$M_D = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k} L & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{k} L \\ \sqrt{k} \sinh \sqrt{k} L & \cosh \sqrt{k} L \end{pmatrix}$$

この matrix を使用すれば、微分方程式を解かずに粒子の運動を考えることができる。

例えば、図 4-3 のように、粒子が磁場のない空間（自由空間、ドリフトスペース）、次に、四極磁石を通過する場合を考える。

これを matrix 表示で表現すれば、

自由空間では、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

四極磁石では、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k} L & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} L \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k} L & \cos \sqrt{k} L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

全体として

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k} L & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} L \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k} L & \cos \sqrt{k} L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

となる。

このように、matrix のかけ算をすればよい。この手続きを matrix の合成と言う。

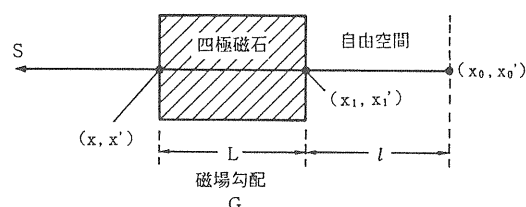


図 4-3 自由空間と磁石

最近では、パソコンが手に入りやすくなり、このような matrix 計算プログラムは、簡単に作れる。各人以下に述べることも参考にプログラムを作ってみてください。ついでに述べますと、加速器で使用されているプログラムの多くは、パソコンで働いている。計算時間に制限がなければ（急いでいなければ）、加速器の設計は、パソコンでできるようになりました。

例えば、SUPERFISH, PARMILA, PARTEQ, FSPICE, 私が現在使用している。その他、EGUN, PARMELA, TCBI, POISSON, PANDIRA, AIRCORE, TRANSPORT, TRACE3D, LIBRA, RAYTRACE et al. がある。

Thin Lens 近似

この近似は、四極磁石の働きを一ヶ所に集中させ、ビームがその場所でのみ作用を受けるようにすることです。四極磁石の場合、matrix の中でてくる kL を一定にして、 L を無限小にします。この操作により、transfer matrix は、次のようになります。

$$M_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad M_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

但し、操作とは、

$$\begin{aligned} \cos \sqrt{k} L &\longrightarrow 1 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k} L &\longrightarrow 0 \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k} L &\longrightarrow -kL = -\frac{1}{f} \end{aligned}$$

である。

!! 宿題；この変換が正しいことを考えよ。

ここで f は、焦点距離と呼ばれている。

!! 宿題；何故，焦点距離と言われるか図示せよ。
 (s 軸に平行な運動をしている粒子を $x_0' = 0$ と書ける。)

ここで，四極磁石の作用による粒子の動きを $x-x'$ 系で図 4-4 に書いてみる。

四極磁石の後に自由空間がある場合を図に書き加えてみてください。

実際の四極磁石中での粒子の運動を計算する場合，事情が違う。Thin Lens 近似は，前に述べたように，四極磁石の働き（作用）を示しているだけです。本当の四極磁石は，この作用が働く前後に自由空間を付け加えなければならない。図 4-5 に示す。

四極磁石全体の transfer matrix は，

(自由空間 2) \times (Lens) \times (自由空間 1)

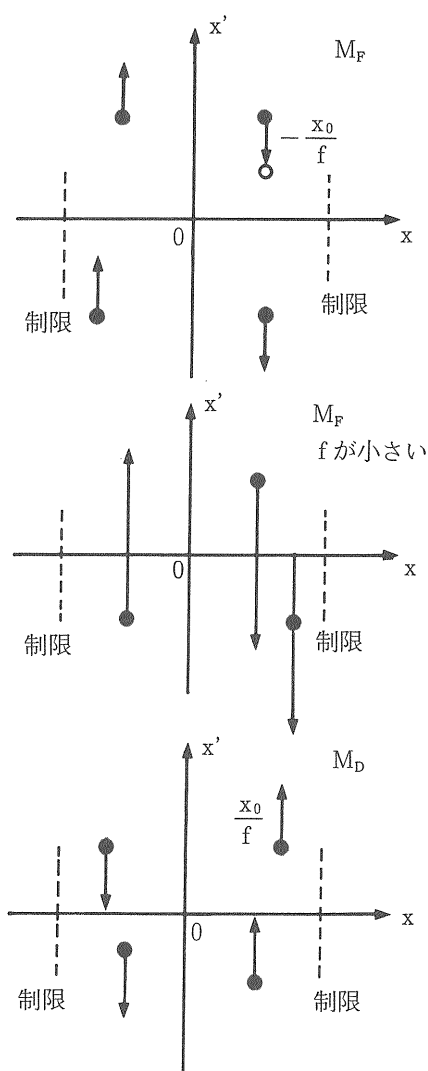


図 4-4 四極磁石の作用

となる。matrix のかけ算を行うと，結果は下の式のようなになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{2f} & L \left(1 - \frac{L}{4f} \right) \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{L}{2f} \end{pmatrix}$$

これが，Thin Lens 近似での四極磁石の matrix である。四極磁石による粒子の動きを $x-x'$ 系で図 4-6 に書いてみる。

私は，この Thin Lens 近似を，手計算のとき，または order 予測のときによく使う。

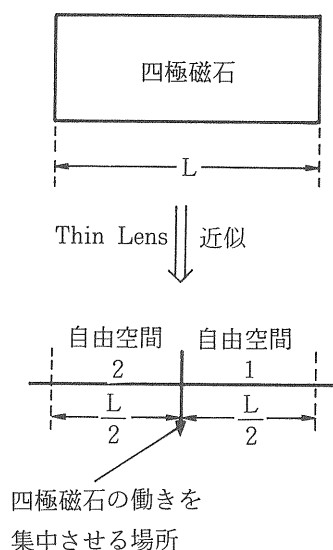


図 4-5 四極磁石

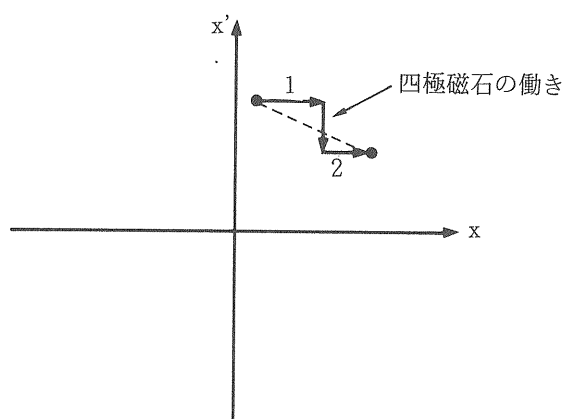


図 4-6 位相空間での四極

!! 疑問 1 ; 四極磁石には、収束作用があると同時に発散作用がある。発散作用でビームがどこかへ行ってしまうのですか？

簡単な場合として、二個の四極磁石（x-方向に収束作用する磁石、発散作用する磁石）を、距離 L 離して据え付けます。二個の磁石の焦点距離を、それぞれ f_f 、 f_d とする。Transfer matrix の合成により、各軸方向の matrix は、次のように書ける。

x-軸には、

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{f_d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_f} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_f} & L \\ -\frac{1}{f_f} + \frac{1}{f_d} - \frac{L}{f_f f_d} & 1 + \frac{L}{f_d} \end{pmatrix}$$

y-軸には、

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_f} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{L}{f_f} & L \\ \frac{1}{f_f} - \frac{1}{f_d} - \frac{L}{f_f f_d} & 1 - \frac{L}{f_d} \end{pmatrix}$$

ここで、収束作用を表す matrix の要素 (2, 1) に注目する。それらは、それぞれ次のように書くことができる。

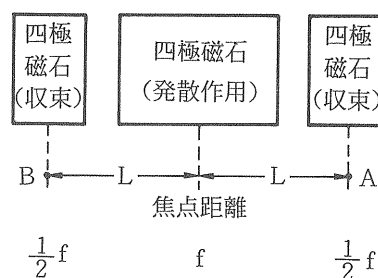
$$(M_x)_{2,1} = -\frac{1}{f_f} + \frac{1}{f_d} - \frac{L}{f_f f_d}$$

$$(M_y)_{2,1} = \frac{1}{f_f} - \frac{1}{f_d} - \frac{L}{f_f f_d}$$

二個の磁石の焦点距離が同じとする ($f_f = f_d = f$)。両方の (2, 1) 要素は、 $-1/f < 0$ となり、収束作用を持つことが分かる。

四極磁石を少なくとも二個（但し磁場の向きが反対である。）組み合わせれば、全体として収束作用を作り出すことが出来る。

!! 宿題； 図のように、三個の磁石を並べた。それ



ぞれの磁石の焦点距離を、図に示したように仮定する。磁石間の距離を L とする。点 A から点 B までの transfer matrix を計算し、この系の収束作用について調べよ？

***** 休憩 *****

!! 疑問 2 ; 四極磁石を二個組み合わせれば、収束作用がうみだされた。では、この二個の磁石の据え付けは、どこを基準にしておこなうか？

原理的には、運動方程式では、s-軸を四極磁石の磁場ゼロになる線に選んでいる。そのため二個の磁石の磁場ゼロになる線を同一直線上にのるようにすればよい。具体的には、磁場ゼロになる線を、磁石の外側へ移し（機械的線と言う）、機械的線を基準に磁石を取り付ける。通常、磁石製造時に、磁石の対称性及び加工精度を考え、機械的線（ターゲットとも言う）を加工する。例えば外側が円であれば、円筒の中心線が磁場中心になるように、磁石を製造する。しかし、全ての磁石の磁場中心と機械的線の間隔を、磁場測定により確認し、ずれが大きいときは、磁石を据え付ける時、そのずれを補正する。その精度は、使用場所により、simulation 等の計算により決定する。ほぼ、補正磁石では 1 mm 以下、重要な磁石(主磁石)では 0.1-0.01 mm 以下となる。

!! 疑問 3 ; 四極磁石が上下、左右にずれたとき、どのような影響が起きるか？

ずれた方向により、本来の磁場による力より余分の力を受ける。そのため、ビームの中心軌道が歪む。Simulation の計算をする場合、図 4-7 のように磁石がずれていたとする。即ち、磁石 2 の中心が (x, y, s) 系で (a, b, s') であったとする。磁石 2 の入り口で、(X, Y, S') 系の座標に変換する。

$$X_0 = x_0 - a, \quad Y_0 = y_0 - b \quad \text{とし、}$$

その後、通常のビームの運動の計算をし、磁石 2 の出口で元の座標系に戻し、次に新たな matrix をかけて

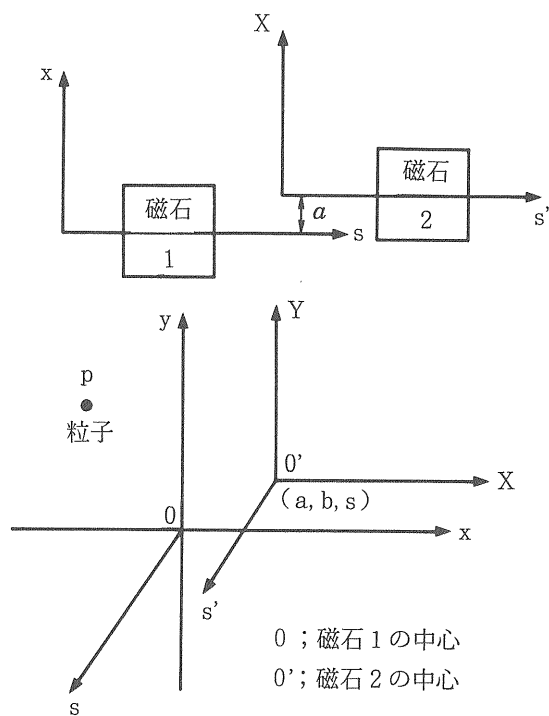


図 4-7 x, y 軸のずれ

いく。

!! 疑問 4 ; s 一軸の周りに磁石が回転していたときは、どうか？

x, y の運動が結合し、計算は複雑になる。図 4-8 のような場合、simulation の計算は、前問と同じ手続き（座標変換）で行う。

$$X_0 = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$

$$Y_0 = -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta$$

と座標変換して、計算する。当然 x' , y' も変換される。計算後、座標系をもどす。

リニアックでは、x, y 一軸ともほぼ同じアクセプタンスであり、それほど大きな問題とならない。しかし、円形加速器では、偏向磁石の構造上、x 一軸のアクセプタンスが y 一軸のものより大きい。故に、x, y 一軸の運動の結合は、重要な問題となる。

!! 宿題 ; 磁石の軸が傾いているとき、どうか？

図 4-9 のように、s 一軸が傾いているとして、座標を今までと同じように変換して、simulation の計算をすればよい。計算は計算機がすると思えば、近似する必要はない。

s 一軸の傾きを生じないように、磁石を据え付けるため、s 一軸を磁場の上下対称な面上にとる。これに

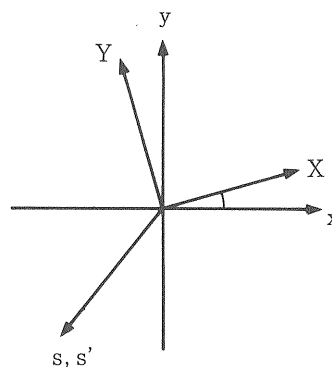


図 4-8 磁石の回転

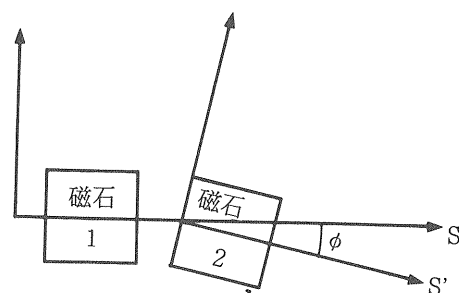
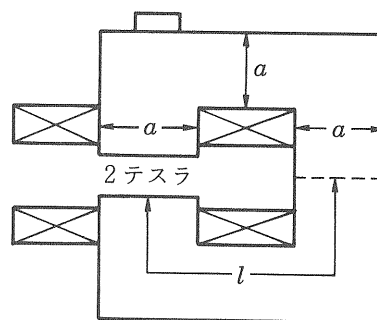


図 4-9 s 軸の回転

より、s 一軸の傾きを面の傾きに転換する。磁石製造時、磁石の対称性を考え、磁石の外側に基準面を設ける。この基準面の水平度を確認しながら、磁石を据え付ける。問題は、加工時、精度よくこの基準面をいかに加工するかである。

ここで、もう一つ宿題を出します。

!! 宿題 ; 図のような磁石を製造した。ギャップに磁場の強さ 2 テスラを得た。前の宿題で、この時ギャップ間の引き合う力を求めた。磁石のサイズは図に示した通りである。ギャップの変形及び上面の傾きを求めよ。



!! 疑問 5 ; 個々の粒子の運動量が違いますが, その場合の取扱かたは?

Magnetic rigidity (p/q) を $((p + \Delta p)/q)$ とおいて, focussing 力を計算しなおす。その後 transfer matrix を計算する。磁場勾配及び磁石の磁場長の違いの場合も同じ手続きで, 計算出来る。運動量の違いによる焦点距離の違いを色収差といいます。平行ビームを考えた時の結果を図 4-10 に示す。

各人は, Thin Lens 近似で確認してください。

!! 疑問 6 ; 磁石の間で, 粒子が加速された時も, 上の疑問と同じように計算すればよいのですか?

加速のみならば, それで充分だと思います。しかし, 加速の方法によっては, 横方向の力を受けることがある ($r f$ defocussing 力)。注意して下さい。

リニアックの加速の場合,
同期粒子のみを考える時

$$\text{エネルギー利得} = q E_0 T L \cos(\phi_s)$$

とし, Δp を求めます。

ここで, E_0 ; 平均加速電場 (軸上)

T ; transit time factor

非同期粒子を考える時

速度の違いによる位相差を計算し, エネルギー利得を求めます。

T の計算 (補正) が難物で, 横方向 (r), 及び, 位相差 (速度) に関係する。計算の精度, 目的に応じて考える。

加速の話ができましたので, 断熱減衰について定性的に話を進めます。 x' の元の式に戻りますと

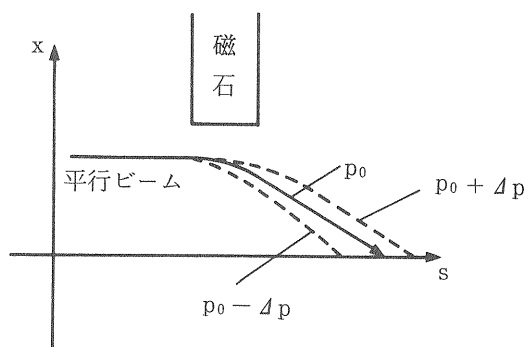


図 4-10 運動量の違い

$$x_0' = p_x / p_s$$

と書ける。

加速をするということは, p_s を $p_s + \Delta p$ に変換することです。即ち, 加速後の x' (y') は

$$\begin{aligned} x' &= p_x / (p_s + \Delta p) \\ &= p_x / p_s (1 - \Delta p / p_s) \\ &= x_0' (1 - \Delta p / p_s) \end{aligned}$$

となり, x' が $x' \times (\Delta p / p_s)$ 減少します。このことを図 4-11 に示します。

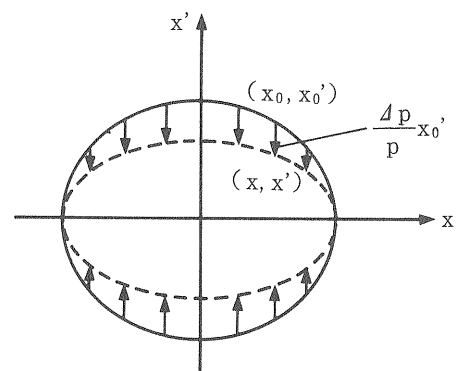
$x - x'$ 面上の楕円の面積 (エミッタンス ϵ と言う) が減少する。このエミッタンスの減少率が $\Delta p / p_s$ ということである。いいかえれば, エミッタンス ϵ は, $1/p$ に比例して変化する。そこで $x \times p_x$ を考えると,

$$x \times p_x = x \times x' \times p = \text{一定}$$

となり, エネルギー変化にたいして不変です。このことは物理での重要な不変量からくる自明のことです。我々はここで $\epsilon_0 = \epsilon \beta \gamma$ なる量を導入します。この ϵ_0 を規格化エミッタンスと呼び, 不変量です。

!! 疑問 8 ; $B_s = 0$ と考えましたが, 磁石の両端には, B_s 成分が表れる。この成分については, どのようにしますか?

$B_s = dG/ds$ xy と書けます。 dG/ds の軸方向の積分値は, G となる。運動方程式に戻ってみると, 両端で step 状にキックを受けたと考えればよいことがわかる。そこで,



この楕円の面積 $\pi \epsilon$ である。

図 4-11

$$\begin{aligned}x &= x_0 \\x' &= x_0' + k y_0' x_0 y_0 \\y &= y_0 \\y' &= y_0' - k x_0' x_0 y_0\end{aligned}$$

と変換すればよい。(符号に注意せよ。上の式は間違っている。各人調べること)。出口では、符号が違ふことに注意すると、あまり効かないことになる。1960年代には、この効果を調べた論文がたくさんあります。もっと精密なビームの運動が議論されるときに、また表れるでしょう。思いだしたことがあるので、一言付け加えておきます。偏極ビームの加速、輸送が最初に議論された時、この磁場で、偏極ビームが輸送されないと騒いだことがありました。暇な時にでも考えて下さい。

!! 宿題; 運動方程式の s -成分について調べよ。
エネルギー保存に関係しているはずです。

ちょっと気分を変えて見ましょう!

Alvarez 型のリニアックの加速機構は、図 4-12 に示したようになっている。

図 4-12 に示したように、加速電場、四極磁石の磁場による力、空間電荷による力等を荷電粒子は受ける。 rf defocussing 力は、磁場による力の十分の一ぐらいであり、無視する。空間電荷による力も考えないとする。図 4-12 は更に簡単化され、図 4-13 の系を考えればよい。

図 4-13 に示す点 A と点 B 間の transfer matrix を Thin Lens 近似で計算してみる。Transfer matrix の合成により、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{L^2}{2f^2} & L \left(2 + \frac{L}{f} \right) \\ -\frac{L}{4f^2} \left(2 - \frac{L}{f} \right) & 1 - \frac{L^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

円形加速器によく出てくる Twiss parameter (速度の β , r と間違わないように) α_0 β_0 r_0 及びベータトロン位相 μ を導入する。これらの parameter については、別の稿で勉強して下さい。

$$\begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha_0 \sin \mu & \beta_0 \sin \mu \\ -r_0 \sin \mu & \cos \mu - \alpha_0 \sin \mu \end{pmatrix}$$

と置く。但し、 $\beta_0 \times r_0 - \alpha_0^2 = 1$ である。

次の関係式が得られる。

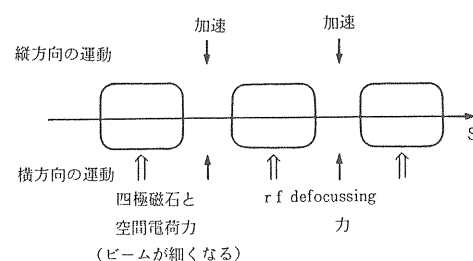
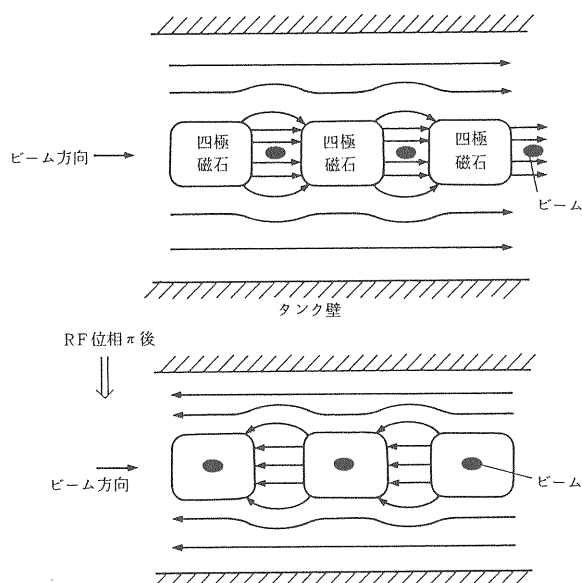


図 4-12 タンクの中にある D/T の効果

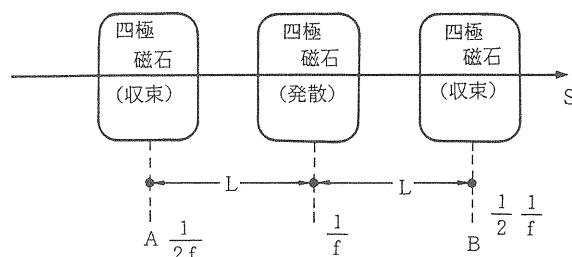


図 4-13 磁石の配置

$$\cos \mu = 1 - \frac{L^2}{2f^2}, \quad \sin \frac{\mu}{2} = \frac{1}{2} \frac{L}{f}$$

$$\beta_F = 2f \sqrt{\frac{2f+L}{2f-L}}, \quad \beta_D = 2f \sqrt{\frac{2f-L}{2f+L}}$$

ここで、リニアックで使われる parameter を考えてみる。

$$L = \beta \lambda, \quad f = \frac{m_0 \beta r}{q G l_q}$$

である。

円形加速器では、 L は定数であり、 f がいつも一定になるように電磁石を運転する。この操作を四極磁石と偏向磁石の tracking と業界では言う。この式を

ニアックに適用する時、加速による影響、空間電荷の影響は考慮されていないことを忘れてはいけない。しかし、おおよその予測をするには、この式で充分である。詳細なことは、プログラムを作り、計算すれば良い。

三角関数は1より小さいので、 $f > L/2$ でなければならない。これは四極磁石の強さ (Gl_q) に制限を与える。このことは、Thin Lens 近似を使用する場合の限界と解釈すればよい。振動系自身が壊れるのではない。

以下で、簡単に、この式を使った例を示そう。
例えば、 $\mu = \pi/2$ とする。(通常 60–90度にする。)

$$\frac{L}{f} = \sqrt{2} = \frac{\beta \lambda}{\frac{m_0 \beta r}{q G l_q}} = \frac{q \lambda G l_q}{m_0 r}$$

$$G l_q \propto \frac{r}{\lambda}$$

となる。即ち、四極磁石の強さは r に比例し、高周波源の周波数に比例する(波長に反比例する)。 r の変化が小さく、ほぼ1であるので、400 MHzでは、 $Gl_q = 5.9$ テスラである。この場合、 Gl_q の制限値は、8.345 テスラになることを付け加えておく。もう一度言えば、 μ を一定にすると、四極磁石の強さは、 r の変化に応じて変えれば良い。 r の変化が小さいので、四極磁石の製造は(特に永久磁石)容易になる。

$$\beta_0 - \text{function max} = 3.41 \beta \lambda$$

となり速度に比例し、高周波の波長にも比例する。

$$\beta_0 - \text{max} / \beta_0 - \text{min} = 5.8$$

となる。ビームサイズに2.4 ぐらいのモジュレーションがかかる。エミッタンスと $\beta_0 - \text{function}$ の関係を図4-14に示す。

この図を参考にして、ビームサイズを計算する。

$$\begin{aligned} \text{ビームサイズ} &= \sqrt{\beta_0 - \text{max} \times \epsilon} \\ &= \sqrt{\beta_0 - \text{max} \times \epsilon_0 / \beta r} \\ &= \sqrt{3.4 \beta \lambda \epsilon_0 / \beta r} \\ &= \sqrt{3.4 \epsilon_0 \lambda / r} \end{aligned}$$

ここで、 ϵ ; エミッタンス

ϵ_0 ; 規格化エミッタンス である。

規格化エミッタンスは前に述べたように保存されるので、ビームサイズは、周波数が決まれば、 r のみで決

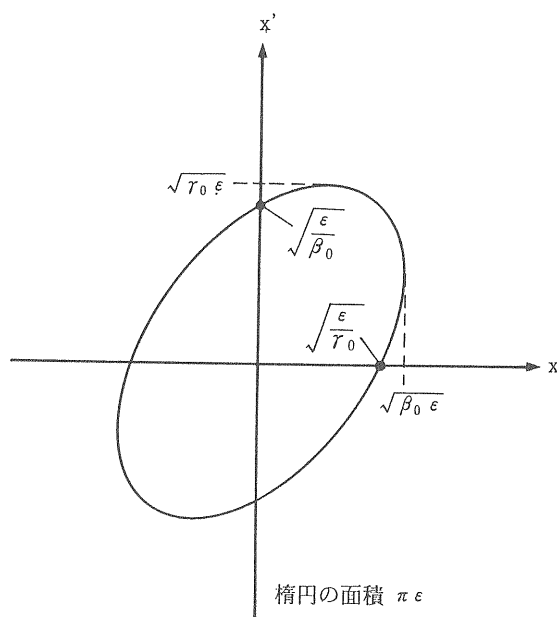


図4-14 エミッタンス

まる。リニアックの場合、 r (150 MeV の粒子では、 $r = 1.16$ である。) はそれほど大きくならないから、ビームサイズはほぼ一定となる。例をあげると、

$\epsilon_0 = 2\pi \text{ mm} \cdot \text{mrad}$, 400 MHz ではビームサイズは、2.1 mm となる。

どの加速器でもそうであるが、エミッタンスの増加という現象が、必ず起きる。リニアックだけでなく、多くの加速器では、入射時のミスで最初にエミッタンスの増加が生じる。この増加を考慮して、リニアックでは、後段の部分では、ビーム通過部の領域(ドリフトチューブの内径)を広くしている。

以上のように、簡単な Thin Lens 近似で、ライナックのおおよその横方向の運動の特徴をつかむことが出来る。四極磁石の強さ、ビームサイズの目安ができる。

また、話題を変えよう。いま、小さな磁場によりビームが蹴られたとする。円形加速器では、軌道の歪みを生じる(C. O. D. という)。円形加速器で使われる式を適用する。

$$X_p(s) = \frac{\sqrt{\beta_p(s) \beta_0(s_1)}}{2 \sin \mu/2} \theta \cos\left(\frac{\mu}{2} - |\psi_p - \psi(s)|\right)$$

ここで θ は、位置 s_1 でのキック量である。

$$\theta = q \Delta B l_B / p$$

l_B ; キックする磁石の長さ

上の式を導くことは、本稿ではやらない。ワープロで

疲れたこと、及び、締切に間に合わないためである。

例1 入射時の error ; Δx だけ s-軸からずれて入射したとする。

$\mu = 90$ 度 とする。

キック量 ; $\theta = G l_q \Delta x / (p/q)$

2 MeV 入射とすると、最初の磁石によるキック量は、

$\theta = 29 \Delta x$ となる。

$$X_p(\max) = 0.5 \times 3.4 \lambda \sqrt{\beta_1 \times \beta_2} \theta$$

$$\beta_1 = 0.065 \quad \text{at} \quad 2 \text{ MeV}$$

$$\beta_2 = 0.507 \quad \text{at} \quad 150 \text{ MeV}$$

$$X_p(\max) = 9.0 \Delta x$$

$\Delta x = 0.1 \text{ mm}$ で $X_p = 0.9 \text{ mm}$ となる。

同様に、 x_0' のエラがあった時も計算できる。

ここで、キック量を統計的に取り扱うことを考える。

Unit 数 (cell 数) を n とし、 i 番目の unit β_0 -function を β_{fi} 、 β_{di} とし、キック量を θ_{fi} 、 θ_{di} とする。

ずれは

$$X_p = \frac{\sqrt{\beta_p}}{2 \sin \frac{\mu}{2}} \sum_i \left[\sqrt{\beta_{fi}} \theta_{fi} \cos \left(\frac{\mu}{2} - |\psi_p - \psi_{fi}| \right) + \sqrt{\beta_{di}} \theta_{di} \cos \left(\frac{\mu}{2} - |\psi_p - \psi_{di}| \right) \right]$$

と書ける。二乗平均をとり、 $\theta = \langle \theta_{fi} \rangle = \langle \theta_{di} \rangle$ とすると、

$$\langle X_p \rangle = \frac{\sqrt{\beta_p \beta_0}}{2 \left| \sin \frac{\mu}{2} \right|} \langle \theta \rangle \sqrt{n \pi}$$

ここで、 β_0 を平均値として

$$\beta_0 = 1.2 \times (\beta_{0i} + \beta_{0f}) / 2 \quad \text{とおく。}$$

β_{0i} ; 入り口の β_0 β_{0f} ; 出口の β_0 とする。

1.2 は β -function の modulation を 5 としたときの β_d からの寄与である。

例2 ; $\mu = 90$ 度、ビームが $\langle X_p \rangle = 1 \text{ mm}$ ぐらいのずれにしたい時、 Δx はどれくらいでなければならないか？ 但し $n = 150$ エネルギーは 2 - 150 MeV とする。

$$1 \text{ mm} = 16 \langle \theta \rangle$$

$$\langle \theta \rangle = \langle q G l_q / m \beta r \rangle \Delta x = 6.7 \Delta x$$

故に $\Delta x = 0.01 \text{ mm}$

ほぼ $\Delta x = \text{十数 } \mu\text{m}$ にする必要がある。これはかなり難しい。

ちょっと待て、使った式は、c. o. d の式に対応するから、エネルギーを 2-15 MeV とし、出口で軌道を

補正する。Unit 数が減る。 $n = 15$ とする。

$$\begin{aligned} 2 \langle \theta \rangle &= 2 \langle q G l_q / m \beta r \rangle \Delta x \\ &= 31 \Delta x \\ &= 1 \text{ mm} \end{aligned}$$

故に $\Delta x = 0.032 \text{ mm}$

これも難しい。このような計算をし、四極磁石のずれをほぼ $20 \mu\text{m}$ 以下にすることが望ましいことが分かる。

1985年に製作した 40 MeV タンクの四極磁石のずれは、 $\langle \Delta x \rangle = 25 \mu\text{m}$ ぐらいである。据え付け誤差も含めて $50 \mu\text{m}$ 以下であろう。但し周波数は 201 MHz、ドリフトチューブの内径は 30ϕ である。

ここまでで、四極磁石のずれは、二十数 μm 以下にしなければならないと想像された。注意しなければならないことは、unit 数 n であるが、円形加速器と違い完全な周期性でなく、エネルギーの低い部分 (n が大きい数になる) の影響が大きい。その上焦点距離が β に比例して長くなるということである。

もう一度、リニアックで使用される制限を加えて、 $\langle X_p \rangle$ 、ビームサイズの式を整理すると、

$$\langle X_p \rangle = \frac{\sqrt{\beta_p \beta_0}}{2 \left| \sin \frac{\mu}{2} \right|} \sqrt{n \pi} \langle \theta \rangle$$

$$\text{ビームサイズ} = \sqrt{\frac{\beta_p \epsilon_0}{\beta \lambda}} + \langle X_p \rangle$$

明らかなように、リニアックでは、 $L = \beta \lambda$ とするため、 $\mu (L/f)$ を決めれば、ほとんどの横方向の制限が決まる。 β -function もほぼ決まるという意味において、円形加速器との違いがここにあると思われる。

リニアックでは、高周波源の周波数の決定は、ほとんどのことを決定することを付け加えておく。なぜならば、 f も L も λ (高周波の波長) に密接に関係している。

!! 宿題 ; μ を色々変えて調べてみなさい。

!! 宿題 ; f を一定 ($G l_q$ の変化に注意) にしたとき、なにか有利なことがあるか調べよ。磁石のエラの効果を一定にするためである。

四極磁石のエラの効果を調べるために、キック量 θ の出し方について、まとめておく。

a) 磁石の上下、左右方向のずれ ; Δx

$$\theta = \frac{q G l_q}{m_0 \beta r} \Delta x = \frac{\Delta x}{f}$$

b) s 軸周りの回転; $\Delta\psi$

$$\theta = \frac{qG l_q}{m_0 \beta r} 2y(x) \Delta\psi$$

x-軸の時 y (y-方向の振動振幅) を使用する。

c) s 軸の傾き; ϕ

$$\Delta x = \phi (\text{磁石の長さ}) = \phi l_q$$

として, a) に代入すると,

$$\theta = \frac{qG l_q}{m_0 \beta r} (l_q \phi)$$

となる。

a), b), c) の効果の大きさを, 例を示して, 計算する。

y = 5 mm (これ以上だとドリフトチューブにあたる) とする。

磁石の長さ (l_q) = 32.5 mm とする。

$\Delta x = 10 \mu\text{m}$ に等価な量

$\psi = 1.5 \text{ m rad}$ (0.1度以下)

30 mm 離れて $40 \mu\text{m}$ の位置精度で位置加工をする。

$\phi = 0.3 \text{ m rad}$

施盤加工において, 送り 30 mm で $9 \mu\text{m}$ 以下のずれにしなければならない。

真円度 $4.5 \mu\text{m}$ 以下

以上の話は, 最終部品の組立後, 四極磁石の据え付け時に於ける精度のことである。故に, 個々の部品精度は更に厳しいものになる。難しくなる。

磁場勾配 (G), 磁石の長さ (l_q), 磁石間の距離 (L) の誤差は, μ の違いとして表れる。ビームサイズのバラツキとして反映する。リニアックでは, この影響は小さい。

$$\text{ビームサイズ} \left(1 + \frac{|\Delta f|}{2f} \right)$$

$\Delta f/f = 5\%$ としても, 5 mm のビームサイズが 5.1 mm になるぐらいである。

しかし, μ の変動 (磁石の parameter だけでなく, 運動量によるもの, rf-defocussing, ビーム強度等による) は, 円形加速器でのチューンの変動にあたり, 変動幅 (チューン幅) を大きくしている。入射ミスの影響が大きく効く理由になる。

ビームの通過領域は,

エミッタンスによるビームサイズ

と 色々な誤差によるビームのふらつきの和となる。

第二項は, 円形加速器での軌道の歪みに対応する項であるから, 必ず補正する機器, モニターする装置及び管理が必要である。

第一項については, 縦横の運動の結合の影響だと思われる。前述した入射時のミスが効いていることは, KEEK でも調べられたし, simulation の計算でも表れている。著者は, 低エネルギー領域でのビーム強度 (space charge) だけでなく, 強度と入射ミスの関係も効いていると思っている。

* これらについては, 原稿の締切に間に合えば, 別の項で述べたい。外野で無理と言う声がある。反論の余地無し*

今まで簡単に述べたことは, リニアックの設計の初期の parameter を調べる方法であり, 40 MeV タンク製造時この近似でおおよそのビームの特徴を計算した。その後 simulation プログラムを作り (現在 PARMILA, 等), ビーム損失, 強度 (ここでは, まだビーム強度からの制限について述べていないが), 据え付け誤差等を考慮しながら, 何回も計算する。

3) 偏向磁石

リニアックでは, 偏向磁石を使うことはあまりない。軌道修正用磁石 (steering magnet) として使用することはある。また, 輸送路においては, 必ずこの磁石を使用する。

ここでは, simulation の計算に必要な transfer matrix を示す。

一様な磁場中を荷電粒子が運動すると, 粒子は円運動をする。その円の半径 (曲率半径) を ρ とする。

中心軌道 (s-軸) を粒子の進行方向にとっているので, $s = v t = \rho \theta$ と書ける。ここで θ は回転角度である。x-軸は, 曲率半径の方向にとり, y-軸は磁場方向 (s-軸, x-軸が決り, 右手系を作るようにする) とする。図 4-15 に示す。

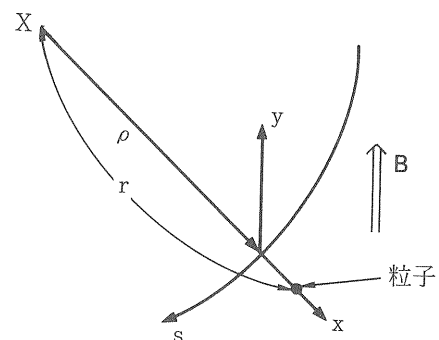


図 4-15 座 標

運動の方程式を円筒座標 (x, y, s) で表す方が便利である。粒子の運動量の違いが曲率半径に反映するので、基準粒子の運動量を p_0 とすれば、運動量の違う粒子 ($p = p_0 + \Delta p$) も取り扱うことが出来る。基準粒子の運動量と曲率半径の関係は、次のようになる。

$$p_0 = qB\rho \quad B; \text{磁場の強さ}$$

運動量の違いは、 x 軸の運動として表現できる。

運動方程式は、

$$m\ddot{r} - \frac{mv^2}{r} = -qvB$$

$$r = \rho + x$$

時間微分を s 軸での微分に変換すると、

$$x'' + \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

と書ける。この微分方程式の解は、 x_0, x_0' を初期値とすると、次のように書ける。

$$x = x_0 \cos \theta + \rho x_0' \sin \theta + \rho (1 - \cos \theta) \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$x' = -\frac{x_0}{\rho} \sin \theta + x_0' \cos \theta + \sin \theta \frac{\Delta p}{p_0}$$

四極磁石の場合と同じように transfer matrix で表現する。偏向磁石の場合、運動量の違いも考え、 3×3 matrix で表わす。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho (1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y 軸については、transfer matrix は

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

四極磁石の両端では、磁場のしみだしは、六極磁場のような効果をうみだした。偏向磁石の場合、磁場のしみだしは、 y 軸の運動に影響する。一次上の四極磁場のような働きをする。これ自身の粒子への影響は小さい。 x 軸には、磁場の対称性から粒子への影響

はない。

!! 宿題； 偏向磁石の磁場のしみだし部での運動方程式を導け。

通常、中心軌道が偏向磁石の端面と垂直になっていないことが多い (斜め入射, 斜め出射という)。理由は、磁石の製造の容易さのためである。斜め入射のような場合の端面の効果を調べる。図 4-16 に、 x 軸の場合と y 軸の場合を示す。

図 4-16 に示すような角度 ϵ を正にとる。

粒子の x 軸の運動には、磁石の有無の違いによる曲げ角の差から端面の影響が表れる。

y 軸の運動は、磁石の端面に垂直な軸 (n) と中心軌道 (s 軸) とのずれにより B_x 成分が生じ、この B_x によるキックのためである。結果を transfer matrix の形に書く。

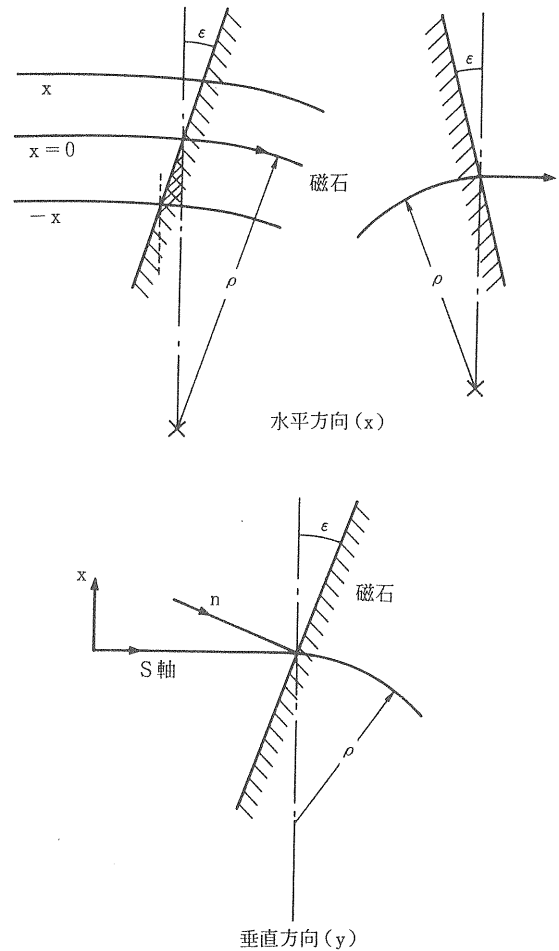


図 4-16 fringing field

x-軸について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tan \epsilon}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y-軸について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\tan \epsilon}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x-軸方向（水平方向）では、発散作用を示し、y-軸（垂直方向）では収束作用である。偏向磁石は、起磁力（アンペア・ターン）の低減のため、y-軸方向に狭いギャップをもつ。そのため、斜め入射による収束作用を積極的に利用することもある。

!! 宿題； 偏向磁石の端面への斜め入射及び出射の式を、図4-16を参考にして、各自導き出せ！（20点）

応用例を示そう。図4-17のように、偏向磁石と自由空間の組合せを考える。偏向磁石に直角にビームは入射する。曲げ角を θ 、曲率半径を ρ 、自由空間の距離をそれぞれ l_1 、 l_2 とする。

各々の transfer matrix の合成を考える。

$$\begin{pmatrix} 1 & l_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & l_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

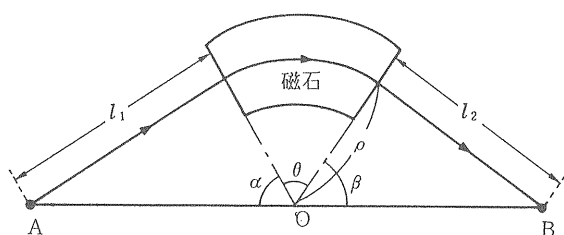


図4-17 バーバーの法則

合成後の matrix は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta - \frac{l_2 \sin \theta}{\rho} & l_1 \cos \theta + \rho \sin \theta + l_2 \cos \theta - \frac{l_1 l_2}{\rho} \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta - \frac{l_1 \sin \theta}{\rho} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \rho - \rho \cos \theta + l_2 \sin \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

ここで、matrix の（1，2）要素をゼロになるという条件を加える。この条件により、出発点、曲率半径の中心点、到達点（A，O，B）は同一線上にある。（Barber の法則と言う）これを証明せよ。図4-17を参考にすればよい。

出発点を $x_0 = 0$ とすると、到達点も $x = 0$ である。即ち、s-軸上に出発点、到達点がある。そこで、出発点を出た粒子に運動量の広がり（ Δp ）があるとする。合成 matrix の（1，3）要素により、到達点では、この運動量の広がりに対応して、x-軸上に広がりをもつ。即ち、x-軸上の分布を測定することにより、粒子の運動量の広がりを測定できる。

この原理で作られた磁石系を運動量分析装置という。当然 y-軸上では、長い自由空間があることに注意しなければならない。このことは、粒子の受け入れ領域（アクセプタンス）を狭くする。壁等の散乱により、x-軸上の分布に、運動量の広がりを正しく反映しない。そこで、前述した斜め入射による収束作用を使う。

偏向磁石をもちいた系を計算する時、座標に注意してください。図4-18に示すように、進行方向に向かって右に曲がるか、左に曲がるかにより、x，y-軸向きが違ふ。符号に気を付けて使うことを忘れないで下さい。

そこで宿題をだします。

!! 宿題； 偏向磁石が二個あります。二つの系を考えます。ひとつは、磁場の向きが同じものを使った時、他方は磁場の向きが反対のものを使った系です。運動量の広がりのみがあるとする。 $+\Delta p$ 、 $-\Delta p$ 及び Δp

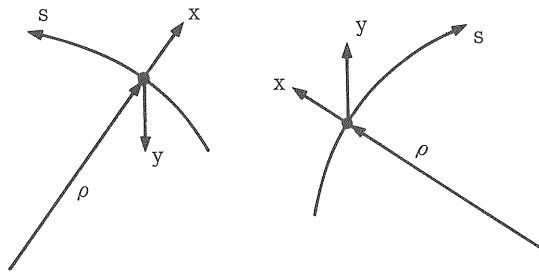
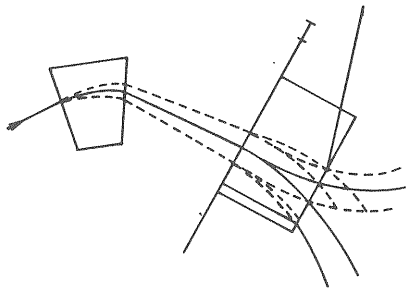


図 4— 18

= 0 の粒子の水平方向の軌道を図に示せ。

二個目の磁石では、水平方向のビーム幅に違いができるはず。これは、運動量による効果（これを表現するために、円形加速器では、分散関数というものを導入する。）を考えていないためです。



二個めの偏向磁石内でビームの幅が変わらないようにするために、どのようにすれば、改良されるか考えよ。 $\Delta p/p$ の matching をとるということです。

後半の宿題は難しいかもしれません。KEK 見学の時、偏向磁石の曲がり方に注意して、見て下さい。円形加速器の入射系に多いに関係する。

4) 高次の磁場をつくる磁石

私の知る限り、リニアックでは、このような磁石を使ったことはない。RFQ の論文が多量に発表された時、RFO という加速器が提案されたことはある。これは、八極電場を使う加速器である。

円形加速器では、色収差 (chromaticity) を補正したり、エラ磁場の補正等に、高次の磁場の磁石をよく使う。故に、詳細は円形加速器の講義で聞いて下さい。今まで simulation の計算について述べてきたので、それに関係することのみを述べる。

Thin Lens 近似で

六極磁石の場合

$$\begin{aligned}x &= x_0 + L x_0' \\x' &= x_0' + A_3 (x_0^2 - y_0^2) \\y &= y_0 + L y_0' \\y' &= y_0' + 2 A_3 x_0 y_0\end{aligned}$$

八極磁石の場合

$$\begin{aligned}x &= x_0 + L x_0' \\x' &= x_0' + A_4 (x_0^3 - 3 y_0^2 x_0) \\y &= y_0 + L y_0' \\y' &= y_0' + A_4 (3 x_0^2 y_0 - y_0^3)\end{aligned}$$

として計算する。

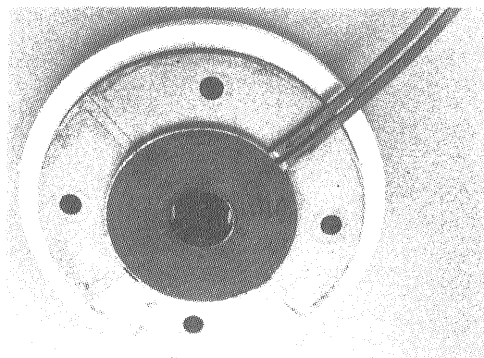
5) その他（磁石とビームの関係、雑学）

a) 負水素イオンの輸送では、電子の結合エネルギーが低い (0.775 eV) ので高速で磁場中を通過するとき、 $E_s = r v_s B_y$ に相当する電場を受け、この電場により、負水素イオンが中性水素に変換されることがある。この現象をローレンツ・ストリッピングと言う。磁石中で、変換が生じ、輸送ができなくなり、ビームは失われる。磁場の強さに制限があることになる。

b) 磁石のギャップをビームが通過することは、ギャップに電流が流れたことになる。ビームは立派な定電流電源から供給された電流と同じである。もし早い応答の磁石があれば、それはビーム (パルス) 電流に反応する。この反応を位置モニターとして使用している例もある。またビームの運動に影響を与え、運動を不安定な状態にすることもある。

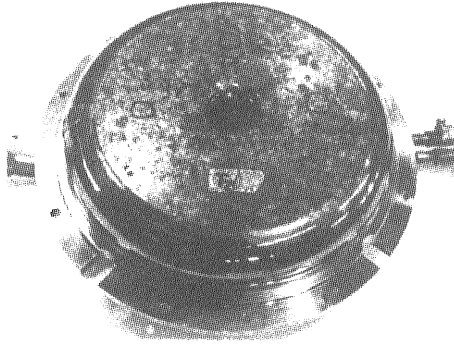
第 5 章 横方向の運動の為の機器

KEK陽子リニアックでは、20MeVタンクのドリフトチューブ内に四極電磁石が据え付けられている。タンク入射直後に据え付けられる電磁石と端板のドリフトチューブの写真を示す。



電磁石

1. 電磁石及び電源



端板用ドリフトチューブ

電磁石一般に関しては別の稿に詳しく述べられているので本稿では書かない。KEKで写真の電磁石を励磁している電源について述べる。この電源は、パルス電源としては古くから加速器関係者間では、使用されているtypeの電源である。

回路のブロック図及び代表的波形を図5-1に示す。

この電源の規格は、

繰り返し；20Hz

励磁電流パルス幅；約1.3 ms

平坦部の幅；120 μ s

電流安定度；0.1 %以下

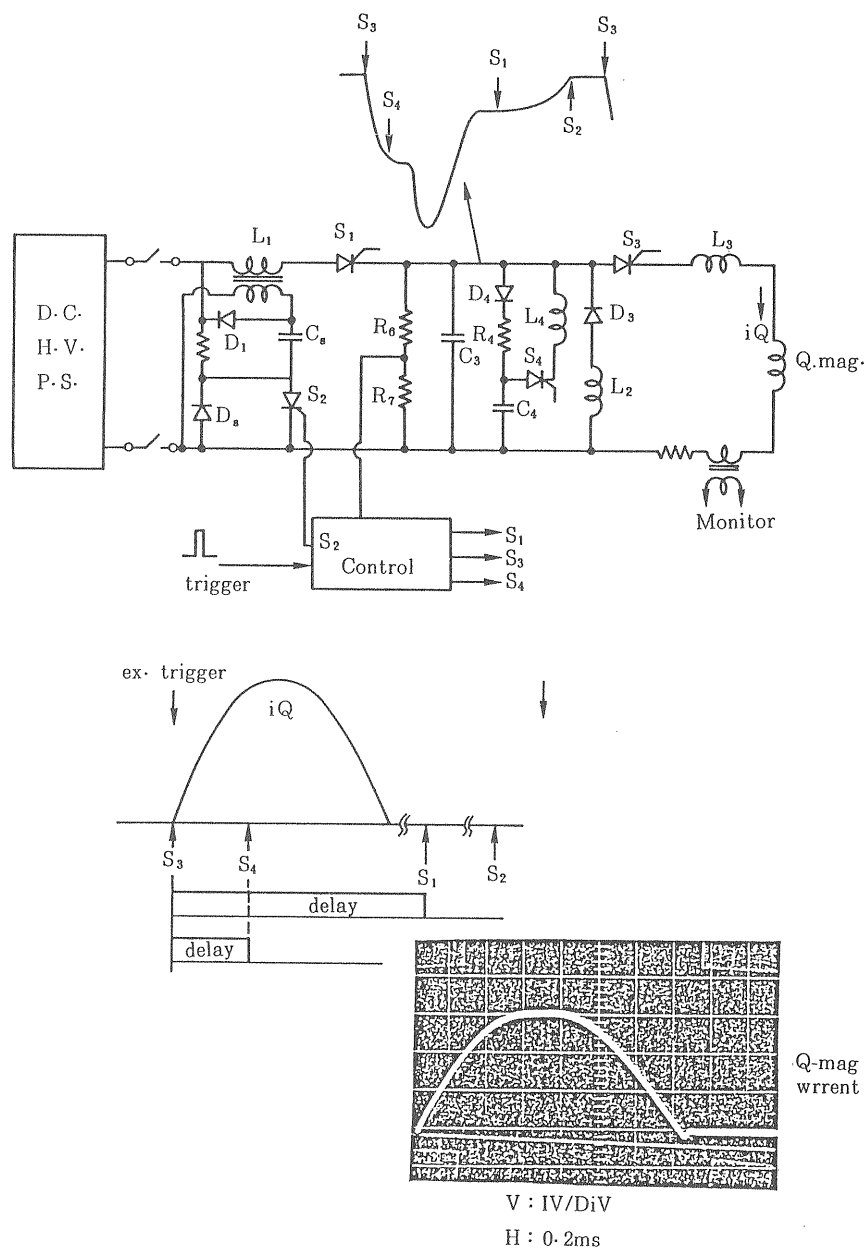


図5-1 パルス電源

である。

この電源は、 C_3 と L_3+QM インダクタンスとの共振電流波形のピーク付近で、 C_4 の放電により平坦部を作る電源である。

a) 直流電源電圧を e 、コンデンサーの充電電圧を V_c 、帰還電圧を V_n とする。 S_1 がターンオンした後、コンデンサー電圧、充電電流は、下の式で表される。

コンデンサー電圧

$$V_c = e - (e - V_n) \cos \omega_1 t$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 (C_3 + C_4)}}$$

充電電流

$$I_c = (e - V_n) \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \omega_1 t$$

$$C = C_3 + C_4$$

上の式で、充電されたコンデンサーの電圧が所定の電圧 E_p に達したとき S_2 が点弧され S_1 に逆バイアスがかかる。即ち S_2 がオンすると、 L_1 、 C_5 によって S_1 のアノードはゼロVになる。転流直前 L_1 に残っていたエネルギーを電源に帰還する。

b) 放電

C_3 、 C_4 の電荷を決められた時間で、 S_3 、 S_4 により放電する。即ち C_3 の放電が C_4 の放電により止められて S_3 のアノード対アース間の電圧がある期間、一定になりフラットな電流部を作る。最初の起動時間には、 C_3 、 C_4 は共に電荷がないので、充電時間を有する。そのため適当な期間初期充電を行う。

負荷電流は、次式により与えられる。

$$I_Q \div E_p \sqrt{\frac{C_3}{L}} \sin \omega_3 t$$

$$L = L_3 + Q.M.$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{LC_3}}$$

負荷電流の設定は、 E_p の比較電圧を変えることにより行う。

2. 四極磁石

a) アルニコ製四極永久磁石

40MeVタンクに使われている四極磁石及び20 MeVタンクの一部には、アルニコ製永久磁石式四極磁石が取り付けられている。福本教授の提案で永久磁石を使うことになり、これが世界で最初にリニアックで実用

化された永久磁石式四極磁石である。

この磁石の規格は次のように与えられる。

ボア半径 17 mm

コア長さ 160 mm

最大磁場勾配 25 T/m

但し、電子溶接時、永久磁石を消磁出来る。

この但し書により消磁可能な永久磁石アルニコ9の材料を使用することに決まった。図5-2に断面図を示す。

図5-2に見られるように、着磁、消磁、減磁用コイルがアルニコ磁石の周りに巻いてある。ポールチップ及びリターンヨークは純鉄で作られている。ポールチップの型は円弧であり、ポールの半径は、ボア半径の1.18倍に選ばれた。これは、12%成分を小さくするためである。アルニコ磁石の着磁には、コイルの発熱の問題からパルス電流により行われた。電流波形を図5-3に示す。コイルの巻数はポール当たり25ターンで

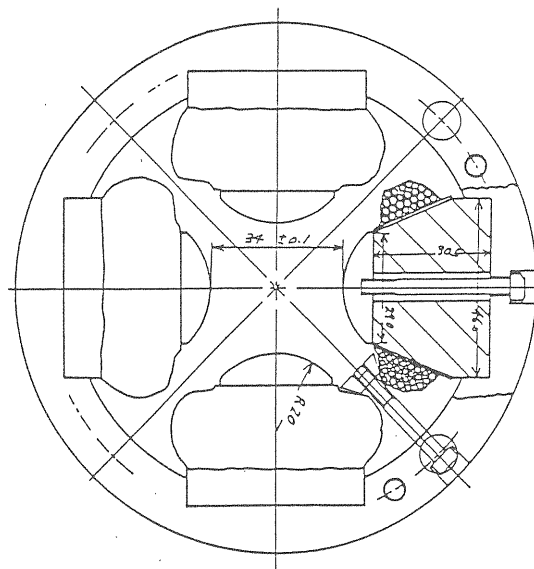


図5-2 アルニコ製四極磁石

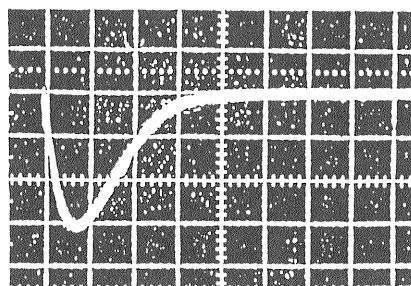


図5-3 着磁電流

ある。着磁の時、注意したことは、図5-3に見られるようなパルス電流では、インダクタンスの変化及び磁気余効、渦電流により、一度の励磁で着磁出来ないことである。通常の鉄心の電磁石においても、パルス励磁の時、残留磁場が励磁電流の波形により変化することから、この現象は想像される。(熊谷氏のOHO84をみなさい。)

磁場測定は、20Hzで回転されたサーチコイルにより行われた。

永久磁石の特性は、通常の使用では±5%以上のばらつきである。しかし、加速器で使用される磁石ではこのような大きなばらつきは許されない。160mmの永久磁石は16個に分割され、個々の特性を揃え、且つ統計による効果を期待し、大きなサイズに組み上げられた。一台の四極磁石に使用される4個の永久磁石のばらつきは2%ぐらいになった。フル着磁の後、減磁により磁場勾配を変えて、磁場中心と機械中心のずれを測定した。代表的結果を図5-4に示す。この結果では、そのまま加速器の磁石として使うことはできない。35台製造した中で2/3は調整作業を行った。調整作業とは、ポールと永久磁石の間に薄い純鉄をいれ、磁場中心、機械中心のずれをrmsで20μm(最大50μm)以下にすることである。調整以前と調整後のばらつきの違いを図5-5に示す。

b) Sm-Co系とNd-Fe-B系

永久磁石による四極磁石

Halbachによる永久磁石式四極磁石の提案後、多くの研究所で四極磁石の製造が試みられた。それは磁場勾配の強さを争うものであった。彼の提案した構造に従えば、磁場勾配の強さは使用する永久磁石により決まる。問題は、多くの磁石を如何に製造すれば、加速器で使用可能な性能の磁石が製造できるかである。2-3年前、ロスアラモスで、リニアックで初めてこの種類の四極磁石を使用し、ビーム加速に成功した。これは、別の項で述べたように、磁場中心をリニアックの使用できる範囲に据え付けることが可能であることを示している。しかし、四極磁石の磁場中心と機械中心(据え付け時に使う場所)とのずれは、最大値100μmぐらいであった。据え付け時にこのずれを補正している。

400MHzの周波数のリニアックを製造しようと思えば、横方向の運動の所で述べたように、磁場中心のずれが20μmほどであることが要求される。

KEKで、試作された永久磁石式四極磁石について簡単に述べ、結果を報告する。Halbachの提案の一つに、磁場勾配の大きい磁石を製造する時の磁石の構造が与えられている。図5-6に例を示す。図には、8個の

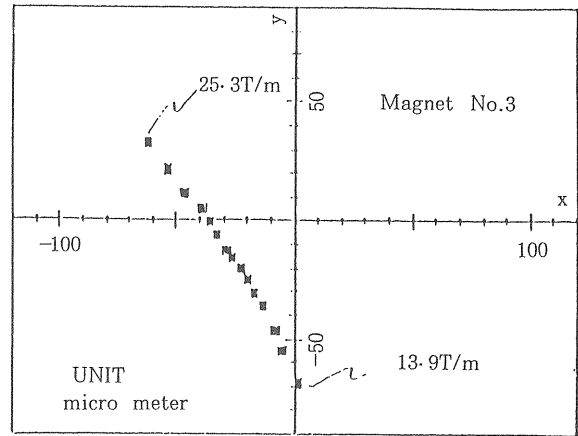
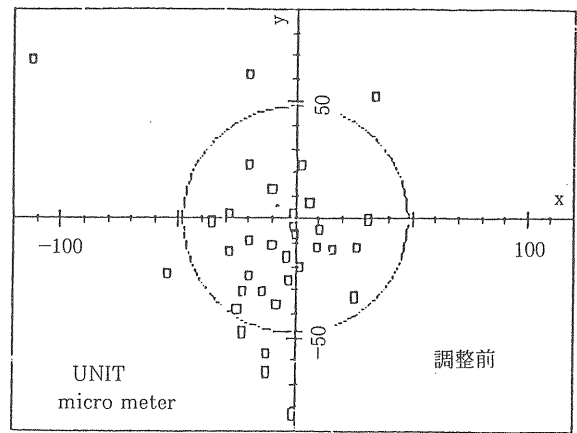
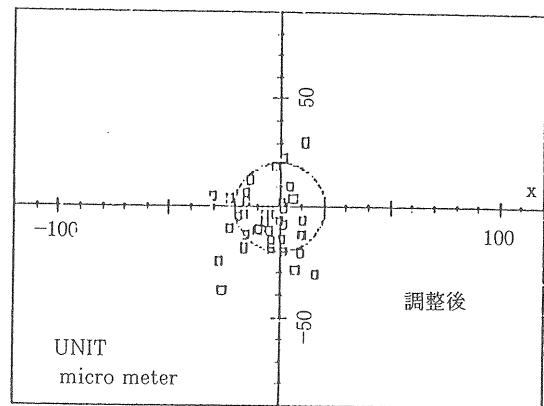


図5-4 磁場中心のずれ



FIELD GR. G # 22.00(T/M)



FIELD GR. G # 22.00(T/M)

図5-5 磁場中心のばらつき

永久磁石を使ったときの磁場の向き、16個の場合の磁場の向きを示す。又、それぞれの得られる磁場の強さを示す。

$$B_0 = B_r \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \times 2 \times \cos^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{M}\right) /$$

$$(2\pi/M)$$

by. K. Halbach

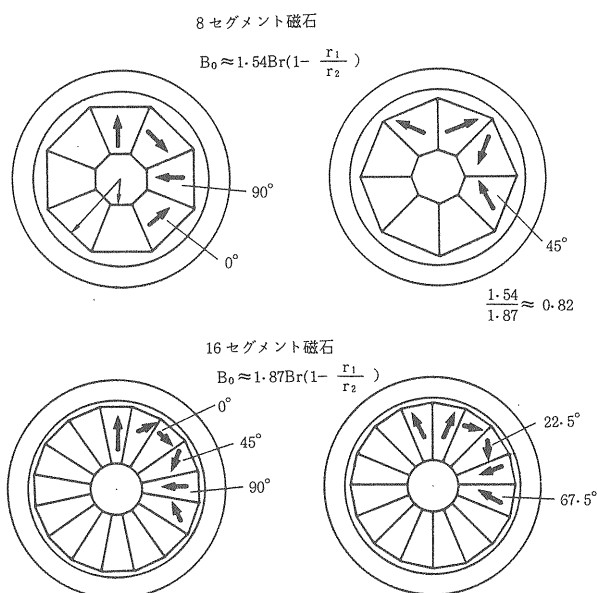


図 5 - 6 セグメント磁石の色々

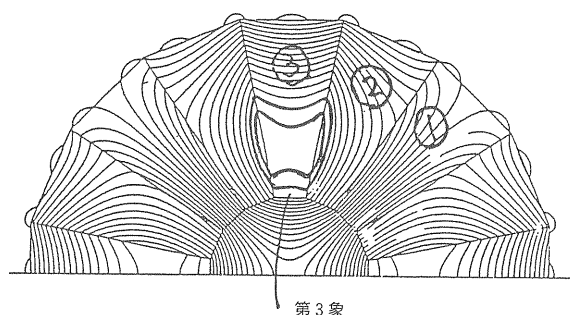


図 5 - 7 磁場分布

KEKでは、16個の磁片を使った四極磁石の試作を行った。それぞれの磁片の中の磁場の向きを、プログラム”PANDIRA”で計算した。結果を図5-7に示す。磁片1, 2, 3の磁化状態の位置を、B-H曲線上に示すと次のようになっていると思われる。図5-8中*で示したところは、磁片単体を着磁した時のB-H曲線上の位置である。磁石に組み込んだ後、磁片の動作点が移動する。これは、組み込む途中にも動作点が移動し、もしB-H曲線が直線でないとすると、組み込む手順によっては、非可逆部分にはいる危険があることを示す。

試作四極磁石を図5-9に示す。

各磁片のr方向の寸法誤差による磁場中心のずれを測定した。結果は、約40 μm/mmである。図5-10に測定結果を示す。

磁片の磁気特性（特に B_r ）のずれによる磁場中心のずれも測定され、計算された。約35 μm/%であった。これらの結果から、永久磁石式四極磁石の寸法精度、

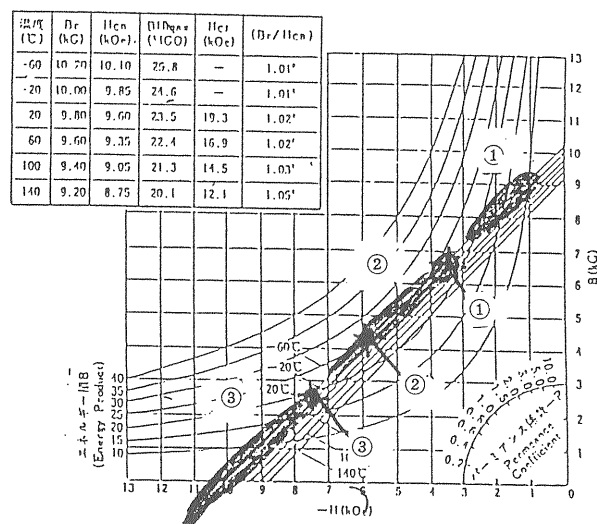


図 5 - 8 B-H曲線

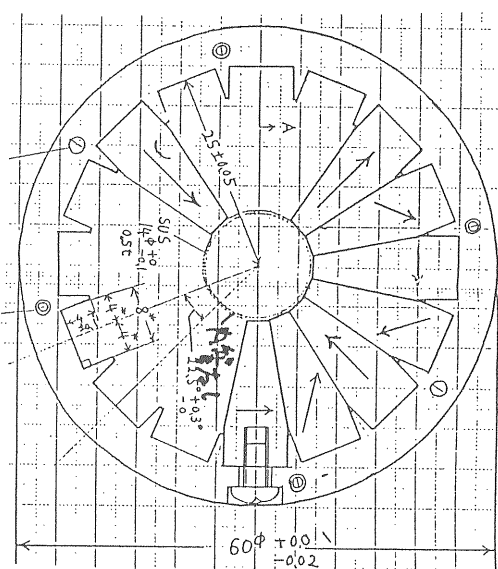


図 5 - 9 試作四極磁石

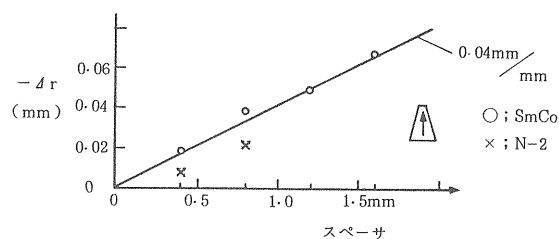
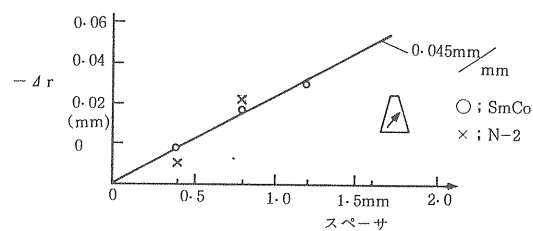


図 5 - 10 セグメントと磁場中心のずれ

組立精度、磁気特性がどれくらいの時、磁場中心のずれがいくつか予測できる。

その他留意しなければならない点を挙げる。

b-1) 経年変化

使用年数と磁石を据え付ける環境による腐食の問題

b-2) 温度による変化

リニアックのタンクには、高周波電力が供給されドリフトチューブを暖めている。そのため、タンク内面及びドリフトチューブの温度を一定にする必要がある。もし温度を一定にするための冷却水が止まったとき、永久磁石はどうなるだろうか？

b-3) 放射線による変化

リニアックはビームを加速する装置であり、設計では、ビーム損失がゼロに近いようにする。しかし、万が一、高周波電力電源等が故障すれば、何処かでビームを失う。当然、放射能を発生する。放射線により磁気特性がどれだけ変化するか問題となる。

これらについては、講義で報告します。

第6章 高周波源について

高周波源に関しては、別の稿で詳細に取り扱われるので、ここでは、KEK陽子リニアックで使用されている

高周波源について、簡単に述べる。

KEK陽子リニアックの高周波電源回路のブロック図6-1を示す。この図には、プリバンチャー及びデバンチャー用高周波源も示してある。

1. どのような回路でなければならないか

a) タンクの表面は、導電性の良い材料(銅メッキ)で製作されているため、201MHzで Q_0 値は約65000である。タンクを励振する給電管(203D同軸管、入力はL結合である。)をつないでも Q_i 値は約36000と大きい値である。リニアックはパルス運転でビームをブースタへ供給しているので、矩形波の高周波電力でタンクを励振している。そのため、LC共振回路の過度現象と同じように、タンクの高周波電場は、exponentiallyで増加する。時定数 $\tau = Q_i / \omega$ である。このことは、パルスの立ち上がり立ち下がり時には、タンクからの反射電力が、高周波源の方に戻ってくる。これの対策が問題となる。

KEKでは、2.5 MWサーキュレータを開発し、タンクと増幅器の間に設置してある。

b) ビームを加速することは、ビームにエネルギーを与えることになる。ビームは、そのエネルギーを、タンクを励振している高周波電力から奪っていく。ビーム電流×加速電圧である。例えば、ビームがタンク

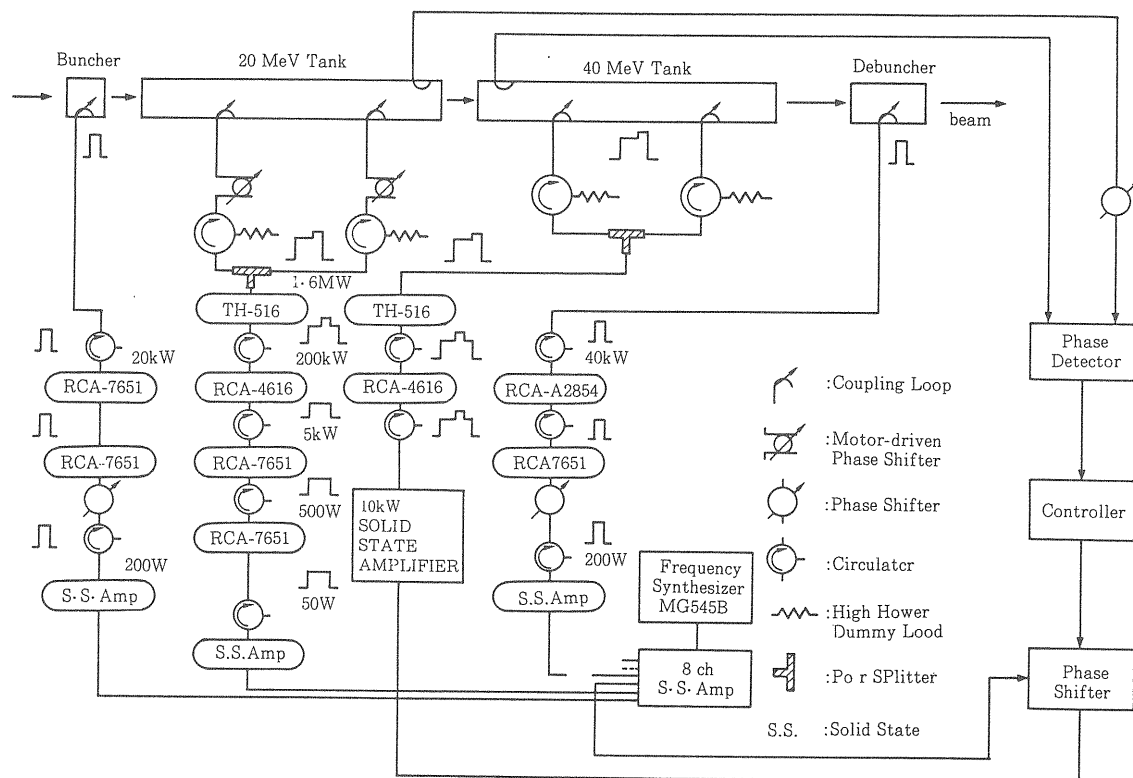


図6-1 KEK高周波源のブロック図

を励振しているエネルギーの1/5を奪っていったとする。ビームの初めと終わりでは、加速電場が10%減少したことになる。(エネルギー $=k \times \text{加速電場}^2$)。これは、ビームの運動量に広がりを与え、また加速可能の位相範囲も狭くする。この現象をbeam loading という。この電場の減少を補うために、ビームのある時間帯に高周波電力を補給しなければならない。この補給をcompensationと言う。タンク内の励振電場とビームにより誘起される電場との関係を図6-2で示す。

KEKでは、電力の補償を行なっている。

c) リニアックが数個のタンクで構成されている時、各々のタンクを励振している高周波間の位相も制御しなければならない。位相のずれは、後段のタンク内のビームの運動をより複雑にし、ビーム損失の大きな原因ともなる。当然、タンク励振の高周波電力の安定な供給も重要である。b) で述べたbeam loading による位相のずれ(図6-2中の $\Delta\phi$)も留意しなければならない。特にこれは、ビーム強度に関係するため、制御は難しい。

KEKでは、タンク間の距離と粒子の速度による位相のずれを、40MeV ビームラインの透過率、二台目タンクのビーム透過率及びブースタービーム捕獲率を観測しながら、補正している。

2. KEK陽子リニアック用高周波源について

高周波源は、数段の増幅器から構成されている。まず、シンセサイザー(信号純度のよい物、スプリアスの少ない信号源)からの高周波は、1W solid state 増幅器で、必要な個数に分割される。次に、中電力増幅器へ導かれ、最終段増幅器につながる。中電力増幅器には、RCA7651増幅器二段と4616増幅器から構成されている系統とRCA7651の代わりに10kW 固体増幅器が使われている系統の二種類ある。最終段増幅器には、出力管として、TH516の三極管が使われている。

出力電力は、タンク励振用として、約1.1MW、ビーム補償用として、200~300kWである。ビーム補償用パルスは、中電力増幅器で作られている。

二系統の高周波電力は、1W増幅器の後で、位相制

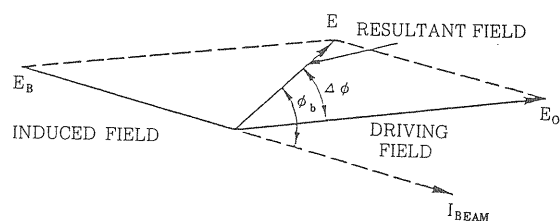


図6-2 ビーム・ローディング

御されている。現在、出力電力の安定は、個々の増幅器の安定さに頼っている。近い将来feedback系を作ろうと思っている。

個々の増幅器の出力には、サーキュレータが設置され、ミスマッチング等による反射電力の影響を避けている。

RCA4616及びTH516 増幅器用キャビティの模式図6-3, 4を示す。これらのキャビティは半同軸型タンク回路で構成されている。高周波入出力部は、コンデンサー結合となっており、50Ωになるよう調整可能になっている。このタンク回路では、短絡板を移動することにより、201MHzの同調点を捜す。特にTH516のアノード電圧導入部は、パルス電圧 $e_p = 35kV$ と高圧であり、かつ、高周波の漏れ込みによりさらに高圧になる危険があるため、図6-4に示したように201MHzの節になるような位置で球につながっている。また電圧給電管には、フィルタ(201MHz用)が入っており、高圧発生電源(大電力電源)への高周波の漏れをできるだけ小さくするよう、気を付けている。

この増幅器のアースは、電子管のグリッドです。即ちヒータ電源は、耐地電圧に耐えられる物に作られている。

このような大電力高周波電源の注意すべき点は、高圧であり、アース回路であり、かつ、高周波の漏れで

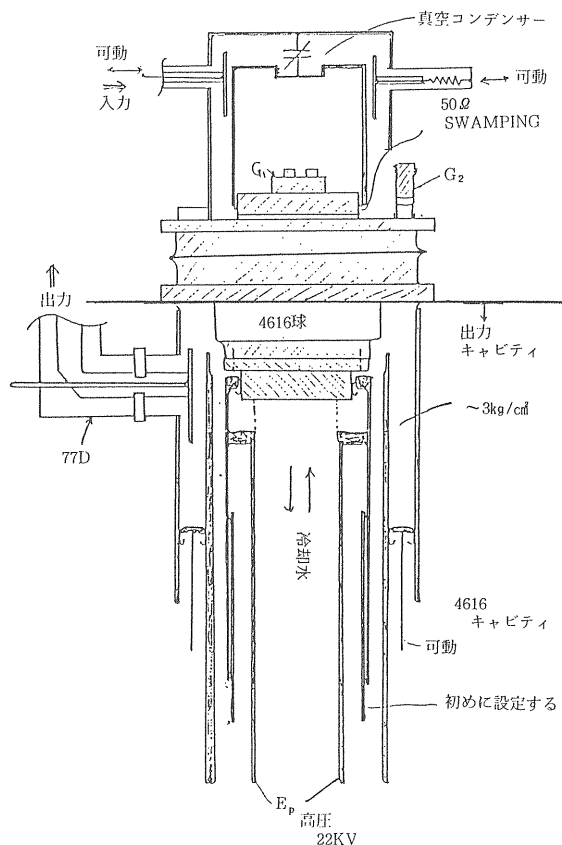


図6-3 4616増幅器

す。この漏れ及び未対策は、色々なモニター（タンク励振電力のモニター等）のノイズ源となり、精度のよいモニターを難しくする。充分な対策が要求される。高圧部品の管理、定期的な保守維持作業、そして、電子管のわずかな特性変化に対する増幅器の調節等、いつも高周波源を監視しなければならない。

3. TH516 アノード電圧発生器について

KEKで使用されている高圧発生器を大電力電源と云っている。

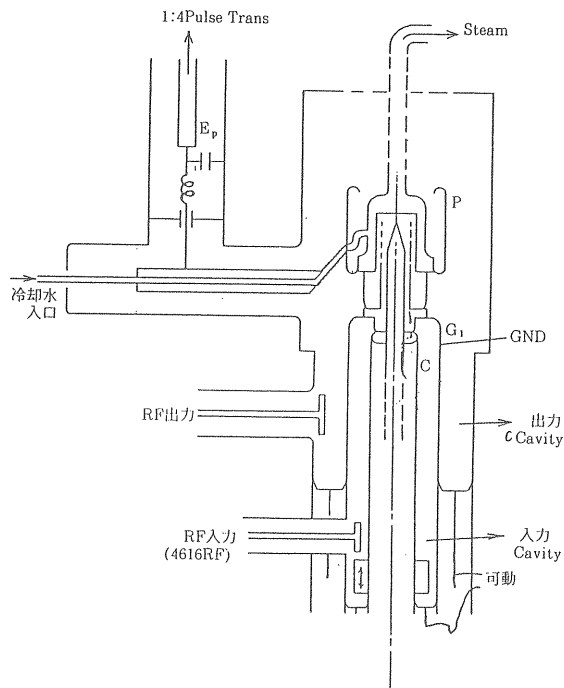


図 6-4 516増巾器

最大定格	パルス幅	275 μ s
	電圧	37.5 kV
	電流	125 A

この電源は、PFN型変調器である。ブロック図6-5を示します。大きな部品名を上げておく。AVR (高圧電圧の安定を200Vの安定化で置き換えている), IVR (ここで二次側の電圧を上下する), 整流用ダイオード, 平滑インダクタ, 平滑コンデンサ, 充電チョーク (二次側には, デキューイングのために, SCR, 抵抗がある), ホールドオフダイオード, シャントダイオード, PFN (33段, $L=77 \mu$ H, $C=0.225 \mu$ F), 主サイラトロン (KU275またはF175), クローバ用サイラトロン (ITT 1257), 昇圧パルストランス (1:4) で構成されている。各部の動作の詳細については, この稿で述べません。

第7章 プリバンチャーとデバンチャー

1. プリバンチャー

プリバンチャーの働きは, もともと, クライストロンの速度変調を作る装置と同じである。

リニアックの加速周波数と同じ周波数の高周波電力を空洞に供給し, 速度変調を作り出す。即ち, 今ある決まった粒子を基準に取る。その粒子は, 空洞のギャップを通過する時, 高周波電圧がゼロであるとする。(reference particle, 同期粒子という。) この粒子より遅れてギャップに到達した粒子は, 加速され, 以前に到

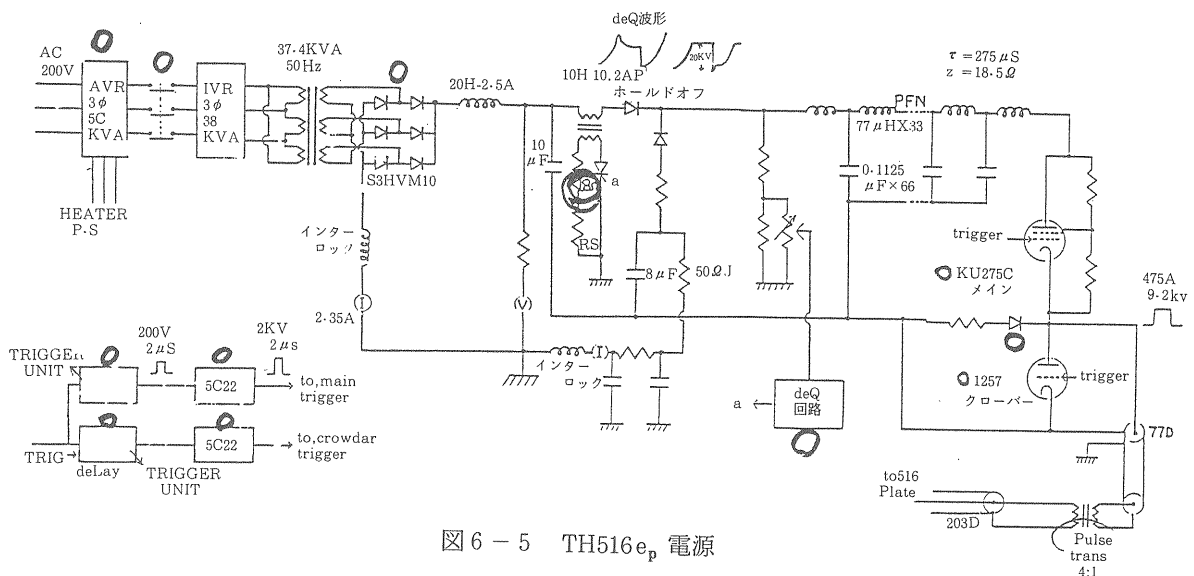


図 6-5 TH516e_p 電源

達していた粒子は、減速される。空洞よりある距離進んだ点で、これらの粒子群を見ると、reference particle の周りにグループができることになる。空洞に遅くきた粒子は、加速され、前の粒子に追いつくためである。

空洞に来た粒子の運動エネルギーを

$$qV_0$$

とする。

粒子がギャップを通過した時、供給された高周波電圧の位相を

$$\theta$$

とする。

空洞を出た粒子のエネルギーは

$$qV_1 = qV_0 - qV\sin(\theta) \pm q\Delta V_0$$

となる。

但し V ; 高周波電圧の最高値

$q\Delta V_0$; 入射粒子のエネルギーのバラツキ

$V \ll V_0$ を仮定し、運動エネルギーが相対論で取り扱う必要がないくらい低いとすると、

速度のバラツキは

$$\Delta v/v = -V\sin(\theta)/V_0/2 \pm \Delta V_0/V_0/2$$

となる。

一方、距離 s までの到達時間のバラツキは、

$$\Delta t/t = \Delta v/v$$

であり、これを位相の違いにおきなおすと

$$\omega \Delta t = \Delta v(t/v) \omega$$

$$= [-V\sin(\theta)/V_0/2 \pm \Delta V_0/V_0/2]$$

$$\times (\omega s/v)$$

リニアックの入口での加速高周波との位相差は、

$$\phi = \phi_r - \theta - \omega \Delta t$$

$$= \phi_r - \theta - (\pi s/\beta \lambda)$$

$$\times [-(V/V_0)\sin(\theta) \pm (\Delta V_0/V_0)]$$

但し、 ϕ_r ; reference particle の位相

プリバンチャーの働きを図 7-1 で示す。

プリバンチャーは、空洞に入ってくる粒子の元々のエ

ネルギーの広がりに関係なく、空洞での加減速により、タンクの入り口で位相を短くするのが目的であるから、次式をゼロにすればよいことになる。

$$\theta - (\pi s/\beta \lambda)(V/V_0)\sin(\theta) = 0$$

$\theta = 0$ の近傍では、

$$1 = (\pi s/\beta \lambda)(V/V_0)$$

である。ところが、実質的效果は、最大加減速時に、reference particle と同時にリニアックの入口に到達すればよい。即ち、次の式を満足する方がよいと思われる。

$$(\pi/2) = (\pi s/\beta \lambda)(V/V_0)$$

ここで、 V と s に明らかな制限がある。それは、後段のリニアックで受け付けられるエネルギーの広がり と プリバンチャーの効果を出すために入射粒子のエネルギーの広がりからくる制限である。前者は、加速エネルギーの最大値の制限を与え、後者は最小値を与える。例えば、受付可能エネルギーの広がり が $\pm 50\text{keV}$ ならば、 20keV までならよいとし、入射ビームのエネルギーの広がり が $\pm 2\text{keV}$ ならば、5 倍ぐらいのエネルギー 10keV 以上を使うとよいだろうといった制限である。

$V = 15\text{kV}$ (空洞のインピーダンスが 50Ω であれば、要求される電力は、ほぼ 2.25kW である。高周波電力としては、 $4 - 5\text{kW}$ ぐらいほしい。) とすれば、

$V_0 = 750\text{keV}$, $\beta = 0.04$, $\lambda = 1.49\text{m}$ とすると、 $s = 1.49\text{m}$ となる。

多くの加速器では、プリバンチャーによる、リニアックの捕獲効率は、 $55 \sim 65\%$ ぐらいである。図 7-1 から明らかなように、原理的に 100% の捕獲はできない。当然捕獲出来ない粒子は、リニアックでビーム損失となる。

高周波電力源としては、今までの簡単な設計では、 50Ω 負荷で $4 - 5\text{kW}$ の電力源を作ればよいことになる。注意することは、空洞への電力供給であるから、振幅変調の立ち上がり立ち下がり時の電力の反射を考慮すればよい。この程度の電力ならばサーキュレータを途中入れて置けば充分である。また、数百 MHz で数 kW の電力増幅器は、最近では、半導体増幅器の合成により容易に製作できる。空洞の調整後、リニアックの捕獲効率を見ながら、位相と電力を調整すればよい。

KEK で使用されているプリバンチャーの構造を図 7-2 に示す。同軸型 2-ギャップの空洞である。プリバンチャーとタンクの距離は、ほぼ 0.94m である。また RF による発散力 (r f defocussing) を補正するため、内導体に電圧をかけ、レンズ効果を出している。要求される電力等の計算は、電場分布を測定し、 $E_0 T(r)$ を V に変換して行う。T は transit time factor であ

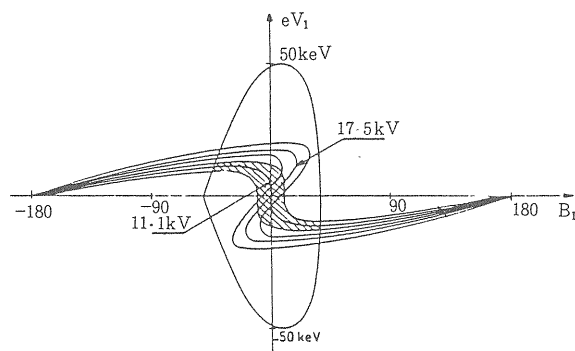


図 7-1 CERN の例

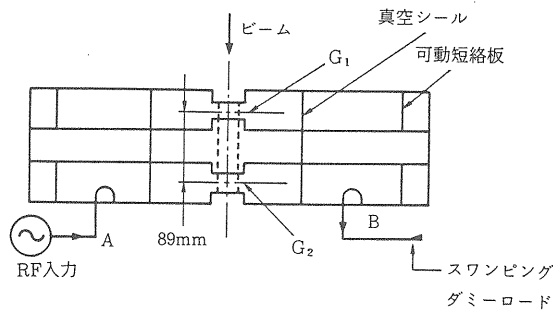


図7-2 KEKプリバンチャー

る。

2. デバンチャー

リニアックから出射した粒子は、同期粒子の位相の周りにある広がり($\Delta\phi$)を持ってバンチし、出力エネルギーに対しても広がり(Δw)がある。

後段の加速器(円形加速器)にも受け入れ可能なエネルギーの広さがあり、それが Δw より小さい時、粒子のエネルギー広がりをおさくしなければならない。一方、位相の方は、円形加速器のRFの周波数が数MHzであり、リニアックのバンチをそのまま受け入れるのでないから、それほど重要でない。

デバンチャーの働きを3個の図7-3に示す。最初はリニアックの出口、次は、距離L後、最後は、RFギャップを出た後に対応する。

図7-3から明らかなように、自由空間とRFギャップが必要である。図中の粒子Bを考える。距離L後の位相の広がり、

$$\delta\phi = 2\pi(\Delta v/v)(L/\beta\lambda)$$

である。

ここで、 Δv は、同期粒子との速度の差である。

RFギャップにかかる電圧(周波数はリニアックの周波数と同じ)を

$$U\sin(\omega t + \phi)$$

とする。

同期粒子がこのギャップを通過しても、そのエネルギーが変わらないように、RFの位相を調整する。

その結果、粒子Bの加速エネルギーは

$$\Delta w_1 = \Delta w - qU\sin(\delta\phi)$$

となる。

故に、 Δv が負の粒子は加速され、 Δv が正の粒子は減速される。図中の粒子Bにおいて、右辺がゼロ近くになるように電圧を調整する。(三番目の図)しかし、図7-3から分かるように、縦軸のOD(δw)の二倍よりエネルギーの全幅は小さくならない。即ち、図より近

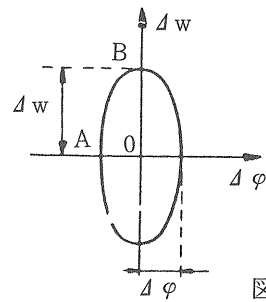


図7-3 リニアック出口

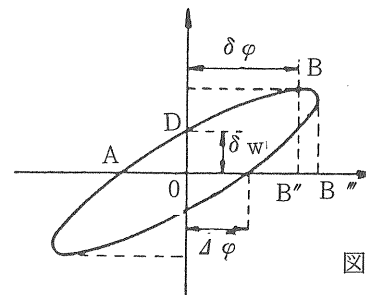


図7-3 RFギャップ

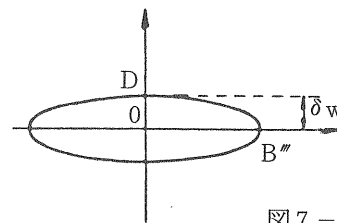


図7-3 ギャップを出た後

似的に、最小エネルギー幅(δw)は、

$$\delta w = (\Delta\phi / \delta\phi) \Delta w \propto (1/L)$$

となる。

以上のことから、リニアックの出口とデバンチャーとの距離が重要な要素であることが分かる。

同期粒子とRFの位相調整が不十分である時、即ち、同期粒子が図7-4のように早くRFギャップに到達した時には、(遅い時は逆に)デバンチャーを出た後エネルギーは減速(加速)される。図7-4に示すように、位相のエラーを α とする。RFと同期する点は、 ϕ' になる。この図から、エネルギーのシフト量(δw_1)は、

$$\delta w_1 = \alpha(\delta w / \Delta\phi)$$

となる。これもタンクとデバンチャーの距離が重要な要素になっている。

KEKのデバンチャーの図7-5を参考に示す。

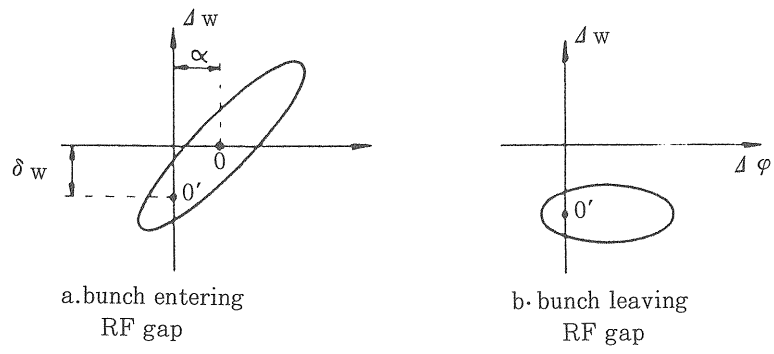


図7-4 位相がずれた時

40 MeV デバンチャー

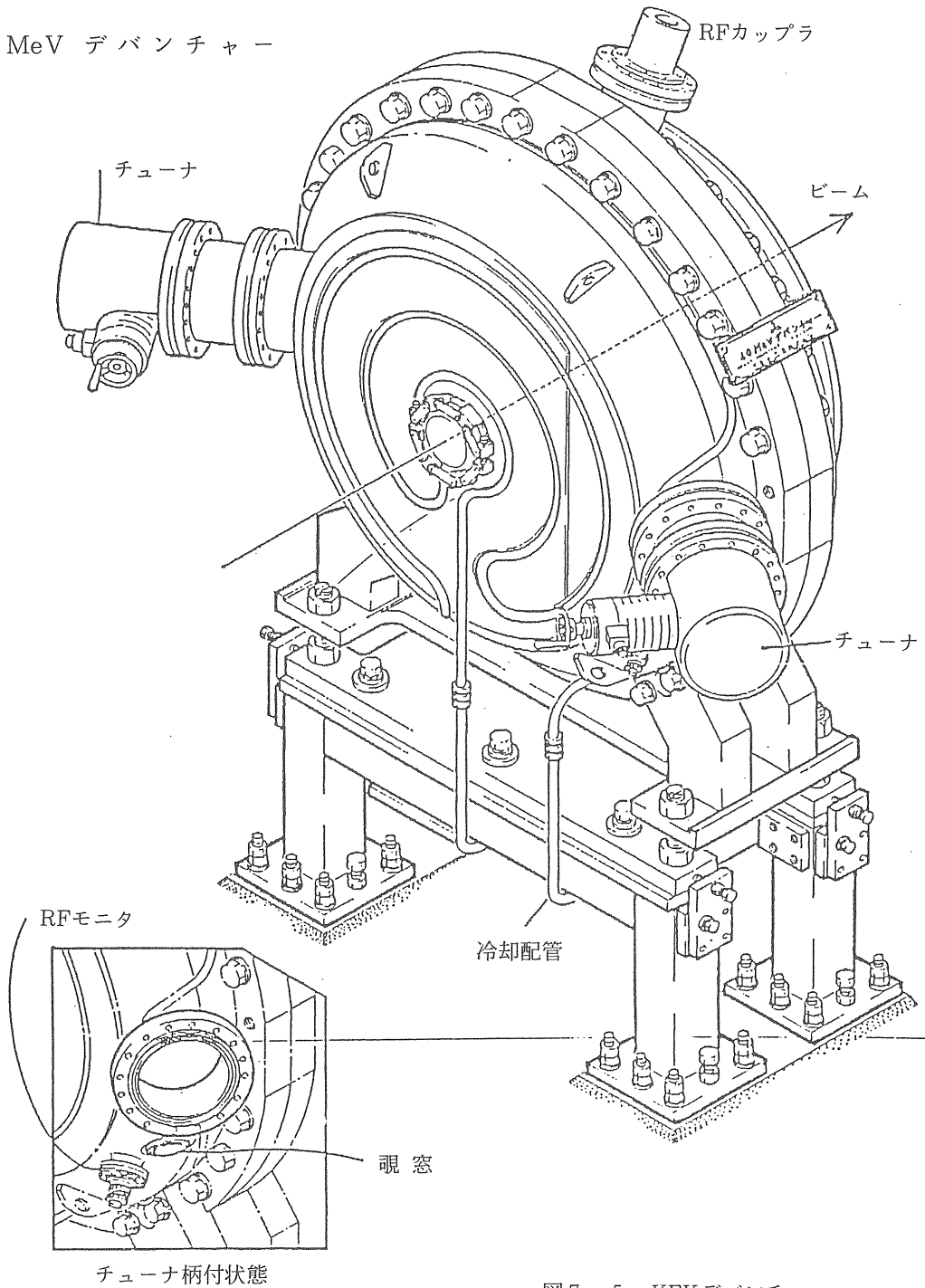


図7-5 KEKデバンチャー

第8章 ビームを曲げること (チョッパ)

電磁場中で、電荷(q)を持ち運動量(p)を持つ荷電粒子を曲げることを考えてみる。但し、実際の電磁場を作る装置は、装置の端の部分では、一様な電磁場を作ることとは出来ない(fringing effect)。ここでは、一様な電磁場のみを考える。

1. 磁場による曲げ (偏向磁石)

磁場の強さをB(T, テスラ)とする。

一様な磁場中、粒子の通過する長さをL(m)とする。

曲げ角度を θ (rad)とする。

ここで円形加速器にもよく使われる、ビーム剛性 (beam rigidity; $B_0 \rho$)を導入する。

$$B_0 \rho = 3.3356 p (\text{GeV}/c)$$

$$= 3.1297 \beta r \quad \text{陽子のみに適用する。}$$

但し c; 光速

β = 粒子の速度/光速

$$r = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

曲げ角度は、次式で与えられる。

$$\theta = BL/(B_0 \rho)$$

$$= 0.2997925 BL/p$$

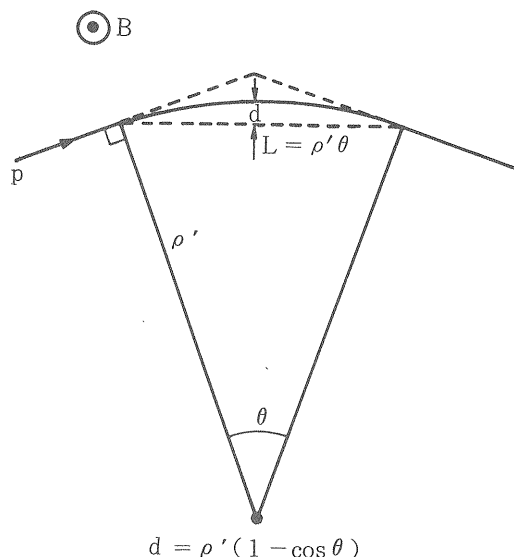


図 8-1

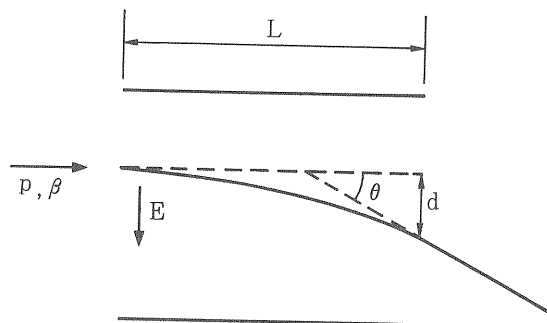
2. 電場による曲げ

電場の強さをE(V/m; ボルト/メートル)とする。

一様な電場がある領域の長さをL(m)とする。

曲げ角度は、次式で与えられる。

$$\theta = \arctan(EL/p\beta) (10^9 \text{V}/(\text{GeV}/c))$$



$$d = \frac{EL^2}{2\beta p} (10^9 \text{Vm}/(\text{GeV}/c))$$

図 8-2

気分転換のため、次のことを考える。

a) 曲げ角度が小さい時

$\theta = \sin(\theta) = \tan(\theta)$ と考えられる時

電場と磁場の強さを比較する。

上の式で両方の θ が同じとする。有効領域は同じ長さとしている。

$$0.2997925 BL/p = EL/(p\beta \times 10^9)$$

即ち

$$B(\text{T}) = E/(300\beta) (\text{MV}/\text{m}) \text{である。}$$

数値例 1)

$$B = 0.1(\text{T})$$

1k Gauss; 早い磁場変化時、この程度の磁場の強さが多い。

$$E = 2\text{kV}/\text{mm}$$

真空中では、10kV/mmぐらいが上限と考えてよいので、装置製作の可能性からこの値にする。

$$\beta = 2/0.1/300 = 1/15$$

陽子の運動エネルギー 2 MeVに相当する。

即ち、100kHzぐらいで2MeVのビームを曲げたい時は、電場による方が、装置製造の点からよいことを示している。

実際の装置で得られている磁場の強さは、

$$B = 0.05(\text{T}); \text{数MHzの磁場変化時 (立ち上がり } 80 \text{ ns)である。}$$

KEK-PSキッカ磁石はこれくらいの磁場の強さであろう。

一方、電場の方では、放電限界は、周波数に関係する。

$$E = 13\text{MV}/\text{m} \text{は、} 200\text{MHz} \text{の電場限界に近い(Kilpatrick field limit)値である。}$$

これら限界値を上式に適用すれば、

$$\beta = 13/0.05/300 = 1/1.15$$

非常に高いエネルギーまで、電場の方が優位に見える。即ち電場により粒子を曲げることは、高いエネルギーでも使用できる。

電場を作る装置（空洞）を考えると、実際問題としては、簡単でなく、空洞にできるどのモードの電磁場を使うか決める必要がある。1960年代に色々な研究所で作られたRFセパレータが、このような電磁場を使っている。これに対して直流電場で、粒子を曲げる装置（1960年以前から製造されている）をDCセパレータと言う。トリスタンでは、超高真空で且つ大強度ビームのもとで運転する装置が開発された。

数値例2)

B = 2. (T) *** 直流磁場の場合

E = 10kV/mm *** はば真空中の直流電場

限界

この条件下では、

$$\beta = 10/2/300 = 1/60$$

陽子の運動エネルギー0.13MeVに相当する。

即ち、直流状態の運転では、磁場の方が、0.13MeV以上では優位であることを示している。

b) 粒子の運動量は、磁場の強さにより求めることが出来る。また、a) に書いたことより磁場と電場を適当な関係に保つことにより、粒子の速度がわかる。

即ち、 p と β より

$$E_0 = cp / \beta \gamma$$

但し、 $E_0 = m_0 c^2 \gamma$ m_0 ; 静止質量

上の式を使い、粒子の質量を得ることができる。

この原理を使って、粒子分別装置が開発され、実用化された。

数値例1) に述べたように、高周波を使い、電場の強さの上限を上げ、開発されたのが、RF粒子分別装置と言われる物です。

3. 応用例 (チョッパ)

この荷電粒子を曲げることを応用したものがチョッパです。計算例で示したように、高いエネルギーの粒子も電場で曲げることができる。

問題は、いかにして要求された電場を作るかになる。

例1 平行板による電場

図8-3のような回路を構成する。平行板のCにより、立ち上がり時間等が遅くなる。100kHzぐらいの応答である。KEKのチョッパの原理はこの回路である。

例2 traveling-wave 型チョッパ

最近、円形加速器のRF周波数と同期したチョッパが

要求されている。RFのアクセプタンス内のビームを円形加速器へ輸送するためである。ビームの損失を小さくするためである。図8-4 (ロスアラモスで開発された。一部著者の想像も入っている。) のような構成になる。チョップ部が、図8-4に示されているように、ストリップラインで作られ、特性インピーダスの整合が取られている。又、ピッチは、入射粒子のエネルギーを考慮して作られる。

例3 空洞型チョッパ

限界電場を上げるため、RFセパレータと同じで、高周波の空洞を使う。例2と同じように円形加速器のRF周波数でビームをチョップする時、loaded Qを下げるなければならない。RFQ (出射エネルギーが数MeV) の後に設置し、RFQ 励振周波数と同じにし、適当に位相を合わせればチョッパとして十分働く。簡単な図8-5を示す、注; 殆ど想像図です。

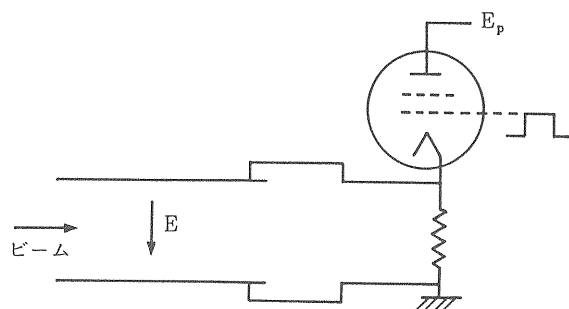


図8-3 平行板

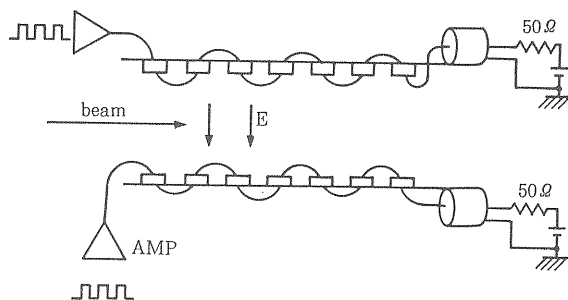
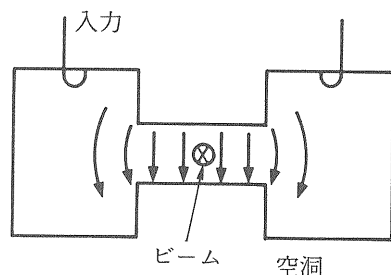


図8-4 traveling-wave



TE₁₀₁ like にする。

図8-5 空洞型

第9章 RFQについて

Alvarezによりドリフトチューブをもった加速管構造が作られて以来, rf defocussing 力が大きな問題であったと思われる。その一つの解決策として, 昔昔(20年以上前), RFQというレンズ機構が考えられた。

図9-1に見られるように, これらは, ドリフトチューブのギャップに工夫をし, rf defocussing力を補償し, 粒子の運動を安定化するものです。しかし1970年に, KapchinskiiとTepliyakovが新たな考えを示した。

円筒空洞内の電磁場, TE_{21} モード(図9-2)を見て下さい。但しこのモードは, z 方向の電場 (E_z)がない。

この図9-2の電場を示す線を見ると, 四極電場らしいものがみえる。この電場により粒子のfocussing力を生み出すことができる。そこで四枚の電極を使い, 軸付近に四極電場を作る。また, このモードでは存在しない E_z を作るために図9-3に示すように z -方向にうねり(modulation)を作る。

このうねりは, 対抗するvaneには同相で作る, 90度ずれた隣のvaneには, 逆相で作る。うねりの間隔は, $\beta\lambda/2$ とする。また, うねりの大きさを m とし, 加速電場を決める。この m をmodulation factorと呼ぶ。このような構造で構成される電場のpotential を次の様に仮定し, 二人は, RFQの基本式を導いた。

1979年に, Los Alamos のCrandall et al.によりRFQの実用化の道が開かれた。その後, 全世界のリニアック加速器研究者に広がった。彼のnotationで基本式を書けば, 以下ようになる。

$$U_0 = \frac{V}{2} \left[X \left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos 2\phi + A I_0(kr) \cos kz \right]$$

$$k = \frac{2\pi}{\beta\lambda}$$

$$A = \frac{m^2 - 1}{m^2 I_0(ka) + I_0(ma)}$$

$$X = 1 - A I_0(ka)$$

$$E_r = -\frac{XV}{a^2} r \cos 2\phi - \frac{kAV}{2} I_1(kr) \cos kz$$

$$E_\phi = \frac{XV}{a^2} r \sin 2\phi$$

$$E_z = \frac{kAV}{2} I_0(kr) \sin kz$$

V はvaneにかけるrf電圧である。

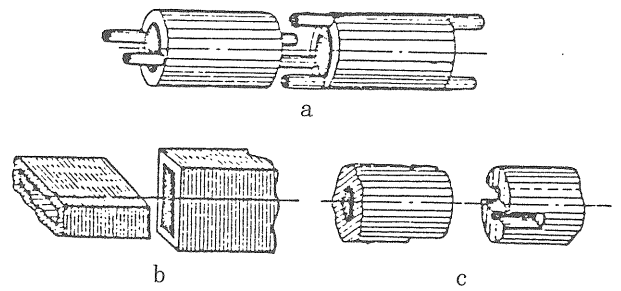
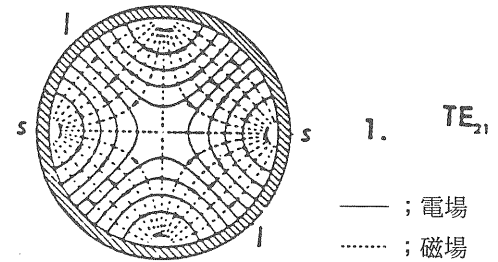


図9-1 昔のRFQ



$$\lambda_c = 2.057 a$$

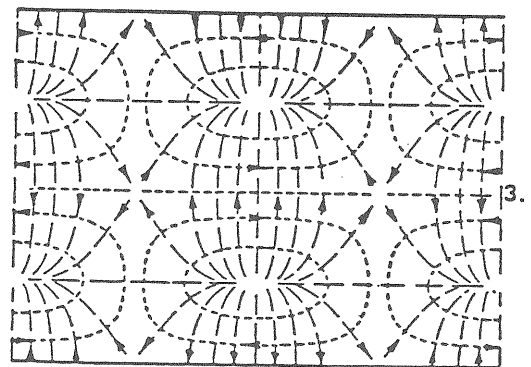


図9-2 TE_{21} モード

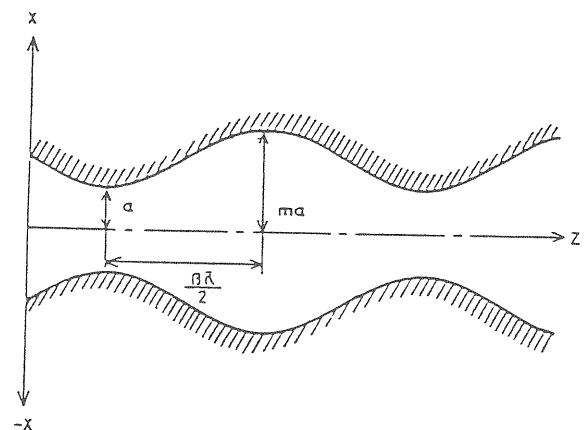


図9-3 Vane の modulation

nuit cell ($\beta\lambda/2$)通過する粒子のエネルギーを計算してみる。

$$\Delta W = q \int_0^{\beta\lambda} E_z \sin \omega t dz$$

但し、 $\omega t = kz + \phi_s$ である。

$$\Delta W = \frac{\pi}{4} q A V I_0(kr) \cos \phi_s$$

となる。

加速の平均電場は

$$E_0 = \frac{2}{\beta \lambda} \int \frac{\beta \lambda}{2} E_z dz = \frac{2AV}{\beta \lambda} I_0(kr)$$

となる。

一方、横方向の運動方程式は

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -qV \left\{ \frac{Xx}{a^2} \sin \omega t + \frac{AkI_1(kx)}{2} \cos kz \sin \omega t \right\}$$

これらの式を使いRFQを設計する。例えば以下に書くように、

1) $A = 0$, $X = 1$ の条件は m (modulation factor) = 1 に対応する。運動の方程式は、

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{qV}{a^2} x \sin \omega t$$

となる。rf quadrupole 中でのビームの運動方程式となる。図9-3の a を変数として、rf focussing 力を、適当な形で強くしていく。radial matching section と呼ぶ。この時通常 $\phi_s = -90$ 度と一定にする。

2) radial matching section の後、通常 shaper, gentle buncher section と呼ばれる section へ続く。

ここでは modulation factor (m), a , ϕ_s を変数として、要求される加速特性が得られるよう何回も計算する。この section の出口では、 m は次の section の modulation factor に等しくし、又 ϕ_s は、ほぼ -30 度近くの値にする。 a は、ビームの通過領域を物理的に制限するだけでなく、focussing 力に直接反映する。

例えば m のみを 1 から増やして行くと、 E_z は大きくなるが、 X の項 (rf defocussing) は小さくなる。横方向の運動で言えば、rf defocussing 力 (運動方程式の右辺第二項) が増えることになる。バンチ化が進めば、空間電荷による力も増加する。そこで ϕ_s 並びに a の変化を考える必要がある。

図9-4に432MHzRFQ (大型ハドロン用RFQ) の色々なパラメータの変化を図に示す。

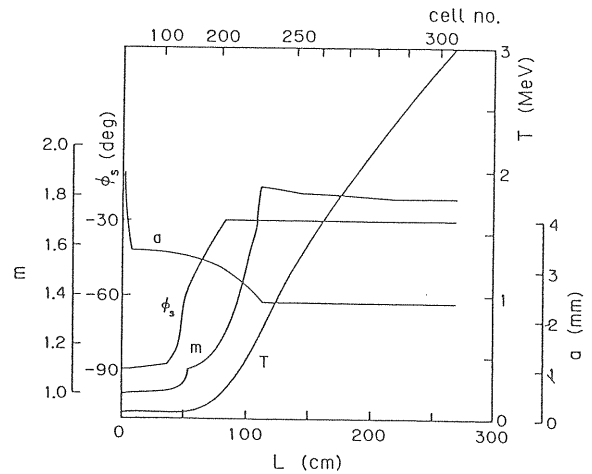


図9-4 RFQ 設計例
(デザインレポートより)

3. accelerator section

ここでは、 ϕ_s , m , a も一定の値となり、設計の加速エネルギーまで加速される。このsectionの入口では、ほぼ、ビームのバンチ (位相の広がり) も決まり、空間電荷による力もエネルギーの高い分だけ弱くなる。また rf defocussing 力も同様な理由で弱くなることから、運動方程式から考えられる。

2) で述べた計算のために、プログラム "GENRFQ", "PARMTEQ" が使われていると言っても言い過ぎでない。我々の仲間 (加藤) が作ったプログラム "QKEK" も同様の計算をする。

RFQのビームdynamicsを勉強しようと思う人は、入力データの作り方、出力データの見方を勉強する (プログラムを動かせた) だけでなく、これらのプログラムの中味を解読することを勧めたい。例えば昔のプログラムに欠点があり、正しい結果を出しません。空間電荷の計算はよいのだろうか、特にビーム軸 (粒子の重心) と RFQ の軸がずれたときの計算、ビームへの物理的制限のおきかた等はよいのか、その時、電場はベッセル関数と一致するか等色々あると思います。KEKの仲間は、修正しながらこれらのプログラムを使っている。

実際のRFQは、four vane typeと言われるものが多い。それを図9-5に示す。

前述した電場を作るために色々な型のRFQが提案されている。

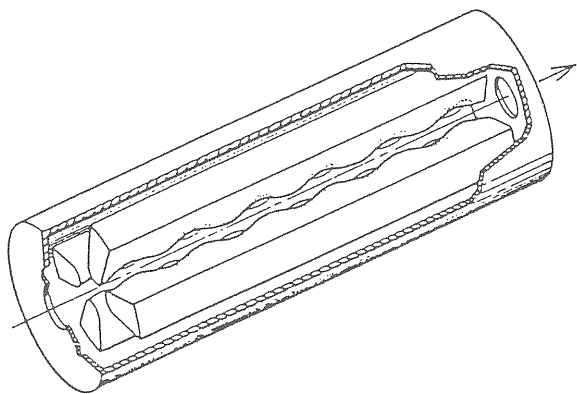


図9-5 four vane RFQ

第10章 結 語

陽子リニアックの設計で、重要なパラメータは、使用する高周波源の周波数である。周波数と加速効率を良くすると言う条件を入れると、空洞のサイズ、四極磁石の特性、並びにビームの特性等に厳しい制限が付け加わる。多くの場合、リニアックの製造は高価である（技術上難しい点が多い）故に、イオン源にもっと質の良いビームを送れと言う要求が出る。逆に、イオン源からのビームの特性が決まっていると、そのビームの損失を少なく、且つ効率よく加速するために、リニアックの高周波源の周波数の上限が決まる。それ故、この上限に近い周波数で設計することを決めた時は、加速効率を犠牲にするか、イオン源に注文をつけるか、どこかにしわ寄せがいく場合が多い。

イオン源とリニアックは非常に深い関係にあることを忘れてはいけない。

本稿は、陽子リニアックを製造する時、“気配り”に必要な基礎的知識について書いたつもりである。しかし実際の機器における“気配り”とは、“know-how”に関係してと思われたので、本稿では意識的に省きました。結果、15年以上稼働しているKEK陽子リニアックの話になりました。

本稿で、明らかに抜けている点は、結合型リニアック、空間電荷、冷却水制御、真空システム、ビームモニター及び運転、据え付け等広い分野です。申し訳ありませんが、不足分は、各自補って下さい。

蛇足；

- a) 結合型リニアック——文献10)に詳細説明がある。
- b) 空間電荷——リニアックに関しては、文献8)を見

ること。KEKPS(円形加速器)の経験では、共鳴点がある程度補正すればよい(共鳴点の滞在時間の問題である)。空間電荷によりビームは広がる。しかし空間電荷により(非線形の効果と思われるが)ビームの不安定性が弱くなる。即ち空間電荷の影響のために、アパーチャを広く取る必要がある。円形加速器の講義を聞くこと。

c) 冷却水制御——最初に高周波のパワーを空洞に供給するとき、空洞の温度制御が問題となる。可動の周波数チューナを使用するが、高周波源の出力電力は直ちに上昇するが、チューナの駆動が遅い。当然空洞の温度制御は更に遅い。故にRFの反射に気をつけなければならない。負荷(空洞)の熱変動に関係しないほど、大きな熱源で温度制御すれば、問題は減る。

d) 真空システム——空洞が真空漏れした時、いかに早く漏れ場所を認定できるかどうかを、装置製造時から考える。

e) ビームモニター等——リニアックのビーム調整の目である。故に特性がはっきりし短時間で情報が得られることが重要である。

f) 据え付け——精密に空洞を据え付けることは当然であるが、諸々の振動に対する配慮が必要である。例えば、地震、パルス運転、地面の振動、冷却水の流れ等によりいつでも周囲は振動している。

参考文献

- 1) A.D.Vlasov: Theory of Linear Accelerators (1965)
- 2) L.Smith: Handbuch de Physik Band XLIV p.341 (1979)
- 3) J.Le Duff: CERN Accelerator School CERN85-19 p.144
以上は教科書である。
- 4) R.Regensstreif: CERN Proton Synchrotron CERN60-26
CERN 入射器関係のまとめ
- 5) P.M.Lapostolle and A.L.Septier: Linear Accelerators
DTLの構造, beam loading 等色々な分野
- 6) I.M.Kapchinskii and V.A.Tepliyakov: Prib.Tech. Ek sp.No.2. p.19(1970)
RFQの原論文
- 7) K.R.Crandall, R.H.Stokes and T.P.Wangler; 1979 Linear Accel.Conf.p.205
RFQの製造
- 8) T.P.Wangler: Space- Charge Limits in Linear Accelerators LA-8388

この論文は必ず読んで下さい。

- 9) 熊谷寛夫 加速器 p.197
- 10) 大型ハドロン計画陽子リニアック ワーキング・グループ報告 I
- 11) OHO 84, 85, 86, 87, 88 KEKの加速器セミナー
- 12) R. E. Collin : Foundation for Microwave Engineering
- 13) J. C. Slater : Microwave Electronics
- 14) G. L. Ragan : Microwave Transmission Circuits
- 15) The Microwave Engineer's Handbook and buyers' guide(1966) horizon house
- 16) S. Seely : Electron-tube circuits
- 17) 後藤憲一と山崎修一郎
電磁気学演習 (共立出版)
- 18) 牧本利夫と松尾幸人
マイクロ波工学の基礎 (広川書店)
- 19) 高橋秀俊
電磁気学 (裳華房)
- 20) R. J. Roark and W. C. Young ; Formulas for Stress and Strain

上記文献から適時図面及び式を転用させて頂きました。

参考文献は、K氏、Y氏両氏にOHOの講師をするように依頼されてから読み直し又は目を通した文献です。特に文献11)、10)を全て読むことを望みます。本稿に書かれたことは、ほとんど文献11)と重なっていますが、陽子リニアックの設計において、最初にしなければならないこと及び知らなければならないことをまとめました。故に本稿で書かれたことは、KEKの誰もが(特に陽子リニアックを製作しようとしている人)知っており、疑問があれば、いつでも近くににいるKEKの人に質問して下さい。

陽子リニアックの実際の機器についての知識は、田中・馬場両先生の製造した20MeV陽子リニアックに集約されています。これは非常に多くの気配りにより製造されています。時々、陽子リニアックを見学し、“know-how”を知ることが重要だと思います。