

I はじめに

KEKで毎夏開かれている加速器セミナーでシンクロトロンについての平易な解説をせよということをおおせつかった。果してこの要求にどの程度こたえ得るかははなはだ心もとない限りであるが、これからシンクロトロンの勉強をはじめようとされる方々に何らかのきっかけでも与えることができればと考え、浅学をもちかえりみずこの講義ノートを作成した。活発な御意見、御批判の出ることを期待している。尚、今年の加速器セミナーはハドロン加速器に重点をおくということのようでもあるので、標題に示した通りこの講義ノートは陽子に代表されるハドロンを加速するシンクロトロンを想定している。従って電子リング固有の問題は割愛したので、その点は御承知おきたい。

さて、シンクロトロンでは次節に述べるように高エネルギーの加速を扱うので、相対論的効果を見捨てるわけにいかない。ここでは加速器の設計においてよく使用される関係式を復習しておきたい。

まず粒子の全エネルギー(E)、運動量(p)と静止質量(m_0)の間には

$$E^2 = p^2 \cdot c^2 + m_0^2 c^4 \quad (1)$$

なる関係が存在する(cは光速)。全エネルギーから静止質量に等価なエネルギーを差し引いたものを運動学的エネルギー(T)と称しており、($T = E - m_0 c^2 = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$)、ハドロン加速器の場合、通常ビームエネルギーとして称せられるのはこの運動学的エネルギーが用いられるので留意されたい。

[演習問題1]

$p \cdot c \ll m_0 c^2$ の条件(非相対論的近似の成立する条件)の場合にTを表わす式を導け。

粒子の運動量はその速度 v を用いて、 $p = m_0 \gamma v$ (m は相対論的質量、 γ は Lorentz Factor) と表わせ、 $E = mc^2$ なる関係が存在するから、(1)式より $\gamma^2 = \gamma^2 \beta^2 + 1$ ($\beta = v/c$) なる関係が導かれ、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ となることわかる。又粒子の速度 v は、

$$\beta = \frac{p \cdot c}{E} = \frac{\sqrt{T^2 + 2Tm_0c^2}}{T + m_0c^2} \quad (2)$$

により、運動学的エネルギーと静止質量を用いて算出される。

ここで上にあげた式を使用する上で必要な物理定数を加速器を扱う上で頻りに使用するものとあわせて列挙しておく。

c : 光速	3×10^8 m/sec
e : 電気素量	1.6×10^{-19} Coulomb
m_p : 陽子質量	938.272 MeV/ c^2
m_e : 電子質量	0.511 MeV/ c^2
m_N : 原子質量単位	931.494 MeV/ c^2
μ_0 : 自由空間の透磁率	$4\pi \times 10^{-7}$ N·A ⁻² .
ϵ_0 : 自由空間の誘電率	

$$\frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \left(\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \right)$$

尚、質量数Aの原子核の質量は通常の加速器では $A m_N$ で近似して扱うことが多い。

上に示した定数の単位のうち MeV/ c^2 はなじみの薄い方もあると思われる。MeV (Million Electron Volt) = 1×10^6 eV で eV は 1 V の電位差で電気素量 e の電荷を加速した際に与えられるエネルギーである。MeV/ c^2 という質量の単位は $E = mc^2$ なる関係で等価になるエネルギーを MeV で表わす数値によりこの質量を表わす際の単位である。加速器ではエネルギーを表わす場合、専ら eV を用いる。高エネルギーの加速を行う場合大きな単位を使用した方が便利であるので、次のような単位がよく使用される。

$$\begin{aligned} \text{keV} &= 10^3 \text{ eV}, \quad \text{MeV} = 10^6 \text{ eV}, \quad \text{GeV} = 10^9 \text{ eV}, \\ \text{TeV} &= 10^{12} \text{ eV} \end{aligned}$$

[演習問題2]

陽子を 1 GeV まで加速した場合の速度を求めよ(光速に対する比で表わせ)。

[演習問題3]

陽子を 500 MeV から 12 GeV まで直径 108 m のシンクロトロンで加速した場合の回転周波数、 f (粒子の速度とリング周長の比で与えられる) の変化する範囲を算出せよ。

II 序論

Cockcroft 及び Walton により 1932 年に初めて人工的に加速された荷電粒子を用いて、原子核の変換が行われて以来、人類の好奇心はこの 60 年足らずの間に、加速可能な最高エネルギーを図 1 に示したように飛躍的に増大させ、素粒子・原子核の未知の情報を探り続けてきた。このエネルギーフロンティアを切り開いてきたのがシンクロトロンである。(現時点(1989年6月)で電子、陽電子衝突の重心系で利用可能な最高エネルギーは線型加速器による加速をベースにしたリニアコライダー(SLC)で実現されている¹⁾が、こ

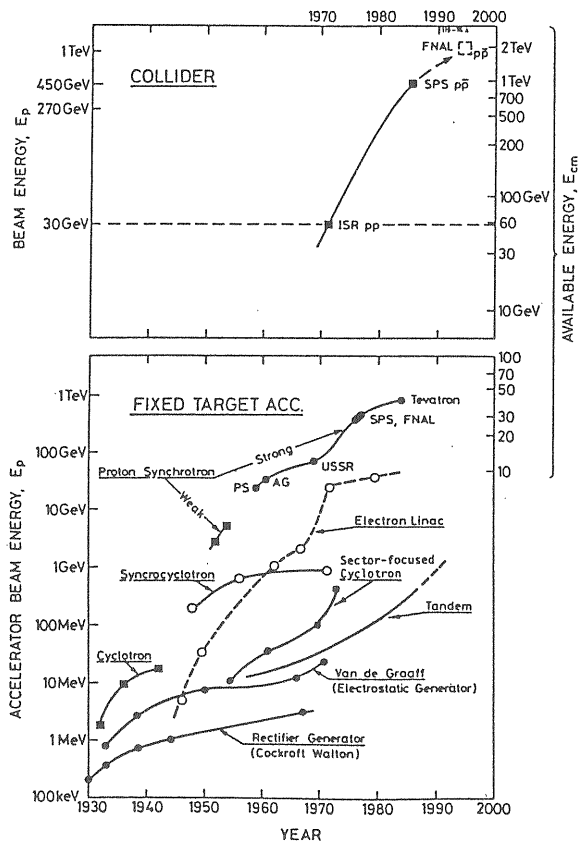


図1 リビングストーン ダイアグラム (Modified)
 (K. O. Nielsen, "Historical Introduction and Present-Day Accelerators", CERN 85-19 より借用)

これは電子、陽電子の質量が小さく、radiation loss が円形加速器では High Energy で飛躍的に増大するという特殊事情によっており、今回のメインテーマである陽子等のハドロン加速器では、High Energy Frontier を目指す限りはシンクロトロンによる加速は不可欠である。又、電子・陽電子衝突ととも、つい最近までは KEK のトリスタンが最高エネルギーをシンクロトロン加速により実現していたことは記憶に新しい。)これは線型加速器では粒子加速を行う電場をただ一度しか利用しないのに対して、円形加速器(最近はレーストラック型のリングの設計も珍しくないがこれらも含めて円形と総称する)であるシンクロトロンでは多数回の加速に使用することから、経済的効率よく高エネルギーへの加速が実現できるという事情によっている。(同じ円形加速器でもサイクロトロンの場合は静磁場(B₀)を使用している関係上、ビーム加速に伴ってその運動量(p)が増大するにつれて、 $p = qeB\rho$ (qはcharge state*, eは電気素量、 ρ は曲率半径)なる関係をみたして軌道半径が増大する為に、高エネルギーの加速には膨大な磁石を必要とすることになるので一

般には適さない。)シンクロトロンの場合には粒子の加速に同期(synchronize)して(シンクロトロンという名称はこの特徴に由来する)磁場強度を増大させてゆくので、軌道半径を一定に保つことが可能で、この軌道周辺の限られた領域にのみ磁石を配置すればよいので、経済効率が良いことになる。但し、このシンクロトロンの特徴は、以下に述べるような制約を生ずることを付言しておきたい。まず第1に、加速の最初から最高エネルギーの場合と同じ大きな軌道半径でビームを周回させる関係上、イオン源から出てくるビームをそのまま加速することは不可能で、線型加速器等の入射器によりある程度のエネルギーにまで加速して、入射時の磁場レベルが残留磁場の影響を受けない値になる条件にしてからシンクロトロンリングへ入射を行う必要が存在する。

第2に時間的に変化する磁場を用いているため、入射器からのビームはリングの磁場が入射レベルに下がっている限られた時間内でしかシンクロトロンリングに受けつけられないため、加速後実験に利用可能なビームの量は時間当りにすると必然的に少なくなる。従ってシンクロトロンを用いて大強度ビームを実現するためには、1)ラピッドサイクルにして時間当りの加速回数を増やす。2)シンクロトロンリング又は別に設けたストレージリングでビームの蓄積を行ったビームを加速する。等の様々な工夫がなされることになる。この際2)の方法でリング内に蓄積可能なビームの量には制限がある(Space Charge Limit)ので1)のラピッドサイクルとの組み合わせにより大強度の実現をはかることもある。この一例として図2にカナダのTRIUMFで計画されているKAON FACTORY²⁾のレイアウト及びオペレーションモードを示す。440 MeVにリングサイクロトロンにより加速されたH⁻ビームはAccumulator Ringに蓄積されたのち、Booster Ringへ入射され50 Hzの繰り返しで、3 GeVにまで加速される。これらはCollector Ringに入射して10 Hzの繰り返しで30 GeVにまで加速される。30 GeVに加速された粒子は同時計数実験のために遅い取り出しを行うためにExtender Ringに移される。この計画ではこうしたリングの組み合わせにより30 GeV、100 μ A(平均電流)のビーム強度の実現を目指している。この例によればシンクロトロンが高エネルギーへの加速に適しているが、そのパルス運転特性のために大強度ビームを実現するには種々の工夫をこらして克服しなければならない大きな制約を有していることが

* 陽子の場合にはq=1となる。本講義ノートでは重イオンを扱う場合も考えてqを入れているが、陽子シンクロトロンを考える場合にはqを省略して差しつかえない。

III イオン光学と軌道計算

荷電粒子の磁場中における運動

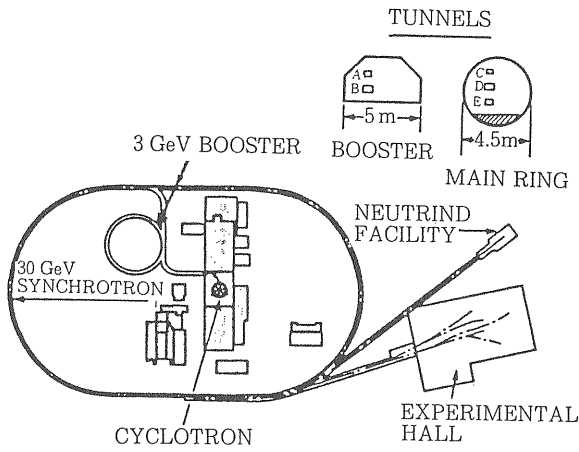


図2 (a) カナダ TRIUMF の KAO Factory 計画のレイアウト

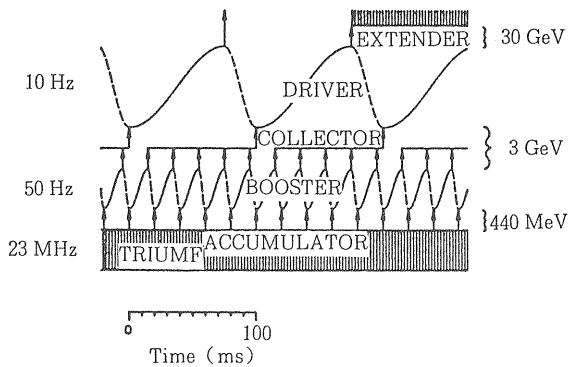


図2 (b) KAO Factory 計画の2台のシンクロトロンを含む5つのリングのオペレーションモード (図2(a)(b)は参考文献2)より借用)

よく理解できよう。

以上のような特徴をもつシンクロトロンの設計を考えるにあたって、まずシンクロトロンリングに要求される機能を考えると次の3つに大別される。1) 当然のことながらビームの加速を行うこと。2) 既に述べたように同一の加速電場を何度も使用するために、ビームを安定に円形軌道を周回させること。3) 前段の加速器からのビームをシンクロトロンリング内の安定軌道に入射し、加速されたビームを実験に使用するためにリング内の安定軌道から取り出すこと。(但し、衝突型加速器や Synchrotron Radiation を利用する電子リングの場合には取り出す必要はない。) 1) のビーム加速がシンクロトロン本来の目的であるが、説明の都合上、ビームの周回軌道にかかわる 2) から考えることとしたい。

まず荷電粒子の集団であるビームに円形軌道を描かせるには Lorentz 力を用いることになるので、荷電粒子の磁場中に於ける運動を記述することを考える。まず図3に示したような右手系座標 (x, s, z) を考え、磁場により水平面内で偏向を受けている場合を想定し、基準となる中心軌道からの水平及び垂直方向の変位をそれぞれ x 及び z で表わすものとする。荷電粒子は Lorentz 力により x 軸の負の方向に向心加速度を受けて円運動をしているから、荷電粒子にのった座標系で考えると x 軸の正の向きに慣性力を考えればよい。まず水平方向の運動を考え、中心軌道の曲率半径を ρ_0 とすると図の A 点を通過する粒子が水平方向に受ける力は図に示したように大きさ $\frac{m_0 r v^2}{\rho_0 + x}$ の慣性力と $qevB_z(x)$ で与えられる Lorentz 力であるから、運動方程式は

$$m_0 r \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m_0 r v^2}{\rho_0 + x} + qevB_z(x) \quad (3)$$

と書ける。シンクロトロンの場合、通常磁場中での加速減速は行われないので $v = \frac{ds}{dt}$ は一定と考えてよい。

従って $\frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2 x}{ds^2} = v^2 \frac{d^2 x}{ds^2}$ なる変換を行って独立変数を時間 t から粒子軌道に沿う変位 s に置き換える。又変位 x が小さい場合を考えて、 $\frac{1}{\rho_0 + x}$

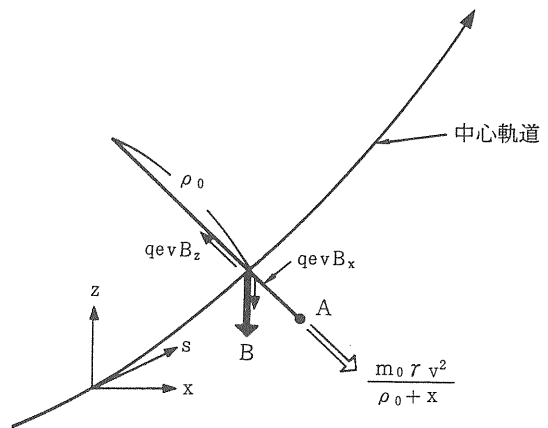


図3 荷電粒子の磁場中での運動を記述するための右手座標系

$\approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{x}{\rho_0}\right)$, $B_z(x) \approx B_z(0) + \frac{dB_z}{dx} x$ なる近似式を用い, 更に中心軌道については慣性力と Lorentz 力が釣り合うことから $\frac{m_0 r v^2}{\rho_0} + qevB_z(0) = 0$ が成立することをを用いると(3)式は

$$m_0 r v^2 \frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{m_0 r v^2}{\rho_0^2} x + qev \cdot \frac{dB_z}{dx} \cdot x \quad (3)'$$

と書ける。ここで $n = -\frac{\rho_0}{B_z(0)} \cdot \frac{dB_z}{dx}$ なる Field Gradient Index を定義するとこれは

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{1-n}{\rho_0^2} x \quad (4)$$

と書ける。次に垂直方向の運動を考える。運動方程式

$$m_0 r \frac{d^2 z}{dt^2} = -qevB_x(z) \quad (5)$$

に対して同様の変数変換を行い, 又 磁場は Median Plane に対して鏡映対称であることから $B_x(0) = 0$ が導けるので $B_x(z) \approx \frac{dB_x}{dz} \cdot z$ なる近似式が成り

立つことを用いる。ここで $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ から $\frac{dB_x}{dz} =$

$\frac{dB_z}{dx}$ が成り立つから $\frac{dB_x}{dz} = -\frac{B_z(0)}{\rho_0} n$ なる関係が導け(5)式は

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{n}{\rho_0^2} z \quad (6)$$

と書くことが出来る。(ここで $B_z(0) = -\frac{m_0 r v}{qe\rho_0} < 0$ 即ち図3に示したように中心軌道の曲率半径の中

心が x の負の領域に来るように正の荷電粒子を偏向するには z 軸の負の向き即ち下向きの磁場を励磁せねばならないことに留意されたい。)

(4)及び(6)式は共に2階微分方程式であり, 粒子の運動が水平・垂直両方向ともに発散することなく安定であるためには, 両式の解が振動解であることが要求される。この条件が $0 < n < 1$ であることは容易に理解出来るがこれがよく知られた弱収束の条件である。さて前に定義した Field Gradient Index, n は磁場の動径方向の変化を表す量であり, 磁場 B が動径 r のべき乗であらわされる ($B = \frac{k_0}{r^m}$, k_0 : constant) 場

合には指数 m を表わしていることが容易にわかる。従って水平方向の運動が $n < 1$ で安定で $n > 1$ で不安定であるという事実は図4から直観的に理解することができる。即ち動径方向の正の向きに作用する大きさ

$$\frac{m_0 r v^2}{r}$$

の Lorentz 力を考えた場合, 平衡点(中心軌道)で両者が等しくなっているから, 図4に示したように $n > 1$ の場合 Lorentz 力の radial dependence は $\frac{1}{r}$ に比例する慣性力の radial dependence より急峻で, $r > r_0$ では外向きの慣性力が勝ち, $r < r_0$ では内向きの Lorentz 力が dominate することになるから, 両者を合成した力は図に矢印で示した向きに働くことになり運動は不安定となる。 $n < 1$ の場合にはこれと逆の関係になるから合成した力の向きは図示したようになり運動が安定であることがわかる。

前述の(4)及び(6)式の $\frac{1-n}{\rho_0^2}$, $\frac{n}{\rho_0^2}$ は磁場による Focus の強さを表わす量でこれを $K(s)$ と総称することとすると, 両式はまとめて

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -K(s)y \quad (7)$$

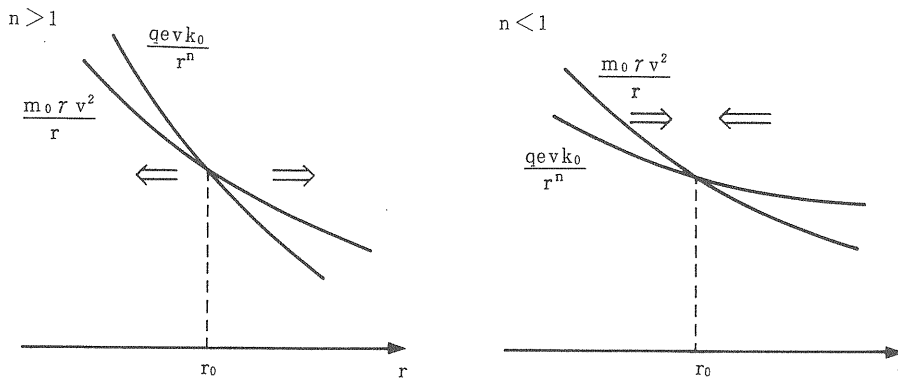


図4 動径 r のべき乗で表わされる磁場中での Lorentz 力と慣性力の大小関係

と表わせる。(y は x 又は z を表わす) リングの場合, Field Gradient Index は一周ごとに周期性をもっており, $K(s+C) = K(s)$ (C はリングの周長) なる周期性が存在し, (7) は Hill's Equation になっている。n が azimuthal angle 方向に一定である場合には前述のように水平・垂直両方向共に安定であるための条件は $0 < n < 1$ であった。次に n 即ち $K(s)$ が s とともに変化する場合について考える。方程式(7)は線型二階微分方程式であるから, 一般解 $y(s)$ を振幅と位相の2つのパラメータ, $w(s)$ 及び $\psi(s)$ を用いて, $y(s) = w(s)e^{i\psi(s)}$ と表わすと $w(s)$ 及び $\psi(s)$ の満すべき条件は,

$$w''(s) + K(s)w - \frac{1}{w^3} = 0 \quad (8)$$

$$\psi'(s) = \frac{1}{w^2} \quad (9)$$

となる。(〔演習問題4〕 (8), (9)の成り立つことを示せ。)

(7)の一般解は1次独立な2つの解 $w(s)e^{i\psi(s)}$, $w(s)e^{-i\psi(s)}$ の一次結合で表わせるからビーム軌道上の任意の点 s に於る解は $y(s) = c_1 w(s)e^{i\psi(s)} + c_2 w(s)e^{-i\psi(s)}$ (c_1, c_2 は定数) と表わせる。s = s_1 及び s_2 の点における解を y_1, y_2, w 及び ψ をそれぞれ w_1, ψ_1 とすると, y_2 及びその微係数 y_2' は y_1 及び y_1' を用いて次のような Matrix 表示で表わせる³⁾ (このような Matrix を Transfer Matrix と呼ぶ)。

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_2}{w_1} \cos(\psi_2 - \psi_1) - w_2 w_1' \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ -\frac{1 + w_1 w_1' w_2 w_2'}{w_1 w_2} \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ -\left(\frac{w_1'}{w_2} - \frac{w_2'}{w_1}\right) \cos(\psi_2 - \psi_1), \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 w_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ \frac{w_1}{w_2} \cos(\psi_2 - \psi_1) + w_1 w_2' \sin(\psi_2 - \psi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix}$$

(10)

[演習問題5]

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 w_1 e^{i\psi_1} + c_2 w_1 e^{-i\psi_1}, \\ y_1' &= c_1 (w_1' + i w_1 \psi_1') e^{i\psi_1} \\ &\quad + c_2 (w_1' - i w_1 \psi_1') e^{-i\psi_1} \end{aligned}$$

が成り立つことから c_1, c_2 を求めて(10)式を導け。

シンクロトロンのような circular machine の場合一周すると Focusing Structure は必ずくり返すから $s_2 - s_1 = C$ なる場合を想定する。 $K(s)$ は周期 C の周期性をもっているから $w(s)$ にも同様の周期性を仮定すると $w_2 = w_1, w_2' = w_1'$ となるから

$$w^2 = \beta \quad (11)$$

$$w w' = -\alpha \quad (12)$$

$$\frac{1 + (w w')^2}{w^2} = \gamma \quad (13)$$

$$\psi_2 - \psi_1 = \mu \quad (14)$$

なる notation を用いると(10)式は

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu, & \beta \sin \mu, \\ -\gamma \sin \mu, & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} \quad (15)$$

と表わせる。(11)式の β を Beta-function と定義する。又 (11)(12)(13) で定義される β, α, γ を Twiss Parameter と総称する。

ここでこれらの Twiss Parameter の物理的意味を考える。粒子の中心軌道に対する振動(これをベータトロン振動と称している)は既に述べたように $y(s) = c_1 w(s)e^{i\psi(s)} + c_2 w(s)e^{-i\psi(s)}$ と書けるがこれは一次独立な解 $w(s) \cos \psi(s)$ と $w(s) \sin \psi(s)$ の線型結合であるので

$$y(s) = c w(s) \cos(\psi(s) + \delta) \quad (16)$$

(c は定数) と表わすことができる。

[演習問題6]

$y(s)$ はリアルな物理量であるから実数であることにより c_2 は c_1 の複素共役量となることを用いて(16)式のように表現することが可能であることを示せ。

(16)式の微係数を求めると,

$$y'(s) = c w'(s) \cos(\psi(s) + \delta) - c w(s) \psi'(s) \sin(\psi(s) + \delta) \quad (17)$$

ここで $w'(s) = \frac{1}{2} \beta^{-\frac{1}{2}} \beta' = -\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$, $\psi'(s) = \frac{1}{\beta}$

を用いるとこれは

$$y'(s) = \frac{c}{\sqrt{\beta}} \left\{ -\alpha \cos(\psi(s) + \delta) - \sin(\psi(s) + \delta) \right\} \quad (18)$$

と書ける。(16), (18)より $\cos(\psi(s) + \delta)$, $\sin(\psi(s) + \delta)$

+ δ) を, y, y' で表わすと容易に

$$r y^2 + 2 \alpha y y' + \beta y'^2 = c^2 \quad (\text{一定}) \quad (19)$$

が導かれる。ここに c は s によらない定数であるから (19) 式の左辺 $w = r y^2 + 2 \alpha y y' + \beta y'^2$ は不変量であることがわかる。これを Courant Snyder の不変量と呼ぶ。さて (19) 式は図 5 に示すような y - y' 平面 (Transverse Phase Space, 或いは Betatron Phase Space と称する) 内の楕円を表わしている。この楕円の面積は πc^2 で与えられるから, (19) 式で y が, いま考えているビームの中で最大の振幅をもつ粒子のベータトロン振動を表わすと考えると c^2 はこのビームのエミッタンス (ϵ) を表わすことになる。(ここではエミッタンスを Transverse Phase Space におけるビームの面積を π でわったものと定義する。) 従って $c w(s) = \sqrt{\beta \epsilon}$ が軌道に沿う変位が s の点でのベータトロン振動の振幅を与える。即ち Beta-function はビームのエミッタンスとの積の平方根がベータトロン振動の振幅を与える量である。

次に (9) 式を積分すると

$$\psi(s_2) - \psi(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (20)$$

即ち Beta-function の逆数を s のある区間にわたって積分した量はその区間におけるベータトロン振動の位相の進みを与える。(この事情は low β の region では s の長さが同一でも high β region に比べて Phase の進みが大きいという結果をもたらすので留意されたい。) 次に $\alpha = -w w' = -\frac{1}{2} \beta'$ であるから α は Beta-function の微係数に比例する量である。このことからリングの中で光学系がその点に関して鏡映対称に

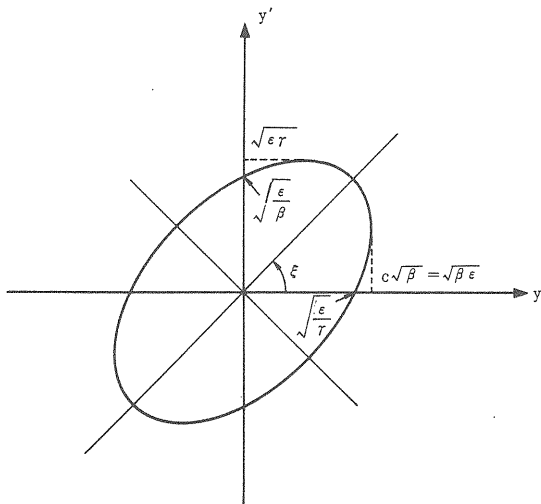


図 5 Transverse Phase Space に於る
ビームエミッタンスを表わす楕円

なっているような点では $\alpha = 0$ となっていることがわかる。図 5 において楕円の主軸と y, y' 軸との傾きを ξ とすると

$$\tan 2\xi = -\frac{2\alpha}{\beta - r} \quad (21)$$

と表わせる ([演習問題 7] これを示せ) から $\alpha = 0$ となるような点では楕円が正立していることがわかる。

さて (15) 式では $s_2 - s_1 = C$ なる場合を想定しているから右辺の Matrix 中の μ はリングを一周する間のベータトロン振動の位相の進みを与えている。これを 2π を単位として表わした量を ν 値と称している (ヨーロッパの文献では ν の代わりに Q を用いているものが多いので注意されたい)。従って (20) 式から次の式が得られる。

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)} \quad (22)$$

この ν 値はビームがリングを一周する間に何回ベータトロン振動をするかを表わす量であり, リングの光学系の動作点を定める重要な量である。

[演習問題 8]

(20) 式に於て $s_2 = s_1 + C$ とした積分 $\int_{s_1}^{s_1+C} \frac{ds}{\beta(s)}$ が s_1 dependence を持たないことを示し, (22) 式を導け。

ここで (15) 式の右辺の Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu, & \beta \sin \mu \\ -r \sin \mu, & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

について考えてみよう。

$$I = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ (unit matrix), } J = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ -r, & -\alpha \end{pmatrix}$$

なる Matrix を定義すると

$$M = I \cos \mu + J \sin \mu \quad (23)$$

と表記できる。 $I^2 = I, J^2 = -I$, 又任意の Matrix A に対して $AI = IA = I$ が成り立つから,

$$M^k = I \cos k \mu + J \sin k \mu \quad (24)$$

が導ける。これは一周のベータトロン振動の位相の進みが μ であれば k 周すれば位相の進みも k 倍になることを示しており極めて自然に理解出来る。

以上の議論ではリングの周長 C の周期性を仮定したが, 実際のリングでは 1 周の何分の一かで $K(s)$ が周期性をもつことが多い。 $K\left(s + \frac{C}{N_s}\right) = K(s)$ なる

周期条件が成り立つ場合には(15)で与えた Matrix 表示が $s_2 = s_1 + \frac{C}{N_s}$ に対しても可能である。この N_s をリングの超周期 (Superperiodicity) と称し、後述するように高周波加速空洞、入射・取り出し等の装置の挿入の為に必要となる長い直線部の必要性やベータトロン振動の共鳴条件等を考慮して決定される。

強収束の原理

ここで絶対値が1より大きい正 (n_1) 負 ($-n_2$) の Field Gradient Index n を有する電磁石が交互にリング全周にわたってそれぞれ N 個存在する場合を考える。 $n = n_1$ の電磁石は水平方向には発散作用を有しており、その Transfer Matrix は

$$\begin{bmatrix} \cos h \cdot \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N}, & \frac{R}{\sqrt{n_1-1}} \sinh \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \\ \frac{\sqrt{n_1-1}}{R} \sin h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N}, & \cos h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \end{bmatrix}$$

(25)

で与えられる。(R はリングの中心軌道の半径) $n = -n_2$ の磁石は水平方向には収束作用を及ぼし、Transfer Matrix は次のように記述できる。

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N}, & \frac{R}{\sqrt{n_2+1}} \sin \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \\ -\frac{\sqrt{n_2+1}}{R} \sin \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N}, & \cos \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \end{bmatrix}$$

(26)

[演習問題 9]

(25), (26) 式を導け。

従ってリングの $\frac{1}{N}$ 周 (これが前にのべた Superperiod になる) の Transfer Matrix は次のようになり、

$$\begin{bmatrix} \cos h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \cos \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \\ + \sqrt{\frac{n_1-1}{n_2+1}} \sin h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \sin \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N}, \\ \frac{\sqrt{n_1-1}}{R} \sin h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \cos \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \\ - \frac{\sqrt{n_2+1}}{R} \cos h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \sin \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{R}{\sqrt{n_1-1}} \sin h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \cos \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \\ & + \frac{R}{\sqrt{n_2+1}} \cos h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \sin \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \\ & \cos h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \cos \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \\ & - \sqrt{\frac{n_2+1}{n_1-1}} \sin h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \sin \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \end{aligned} \right] \quad (27)$$

$\frac{1}{N}$ 周の水平方向のベータトロン振動の Phase Advance を μ_x とすると (27) の Trace を求めて、

$$\begin{aligned} \cos \mu_x &= \cos h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \cos \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \\ & + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{n_1-1}{n_2+1}} - \sqrt{\frac{n_2+1}{n_1-1}} \right) \cdot \\ & \sin h \frac{\pi \sqrt{n_1-1}}{N} \sin \frac{\pi \sqrt{n_2+1}}{N} \end{aligned} \quad (28)$$

が成り立つ。同様に垂直方向の運動を考えると

$$\begin{aligned} \cos \mu_z &= \cos \frac{\pi \sqrt{n_1}}{N} \cos h \frac{\pi \sqrt{n_2}}{N} \\ & + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \right) \sin \frac{\pi \sqrt{n_1}}{N} \sin h \frac{\pi \sqrt{n_2}}{N} \end{aligned} \quad (29)$$

が得られる。(28), (29) 式より水平、垂直両方向の運動が共に安定であるための条件は

$$\begin{cases} |\cos \mu_x| \leq 1 \\ |\cos \mu_z| \leq 1 \end{cases} \quad (30)$$

であり、 $n_1 \gg 1$, $n_2 \gg 1$ の場合図6に斜線で示した領域が安定な領域となっている。この図をその形状からネクタイダイアグラムと称する。以上の結果から正と負の n を有する電磁石を交互に配置することにより、 $|n| > 1$ で個々の磁石では水平又は垂直方向に発散作用を有する場合でもリング全体としては両方ともに安定な振動解を有する条件が存在することがわかる。この場合 $0 < n < 1$ の弱収束の場合に比して強い収束作用を使用することが可能となるので上に述べたようなイオン光学系を強収束と称する。このような収束系は上に述べたように正、負の磁場勾配を有する磁石が交互に配置されるので Alternating Gradient Focusing と呼ばれることもある。

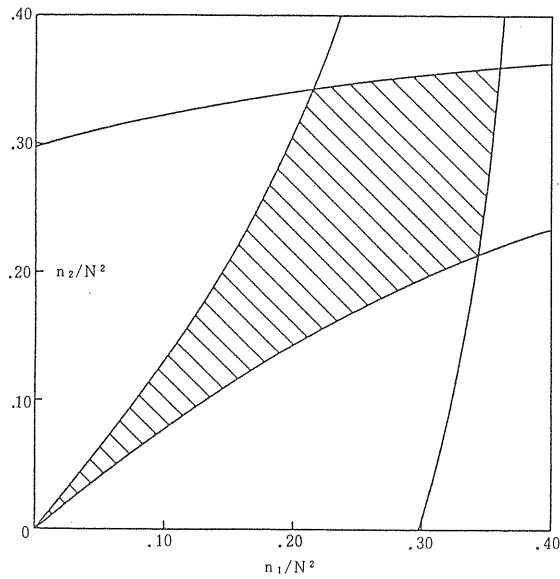


図6 ネクタイダイアグラム (参考文献3) より借用)

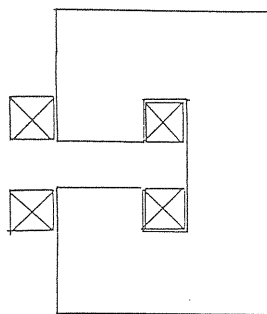
Combined Function と Separated Function

ここでイオン光学系が荷電粒子に対して及ぼす作用を直観的に考えてみることにすると、1) 荷電粒子を偏向して円形(に近い)軌道を描かせる(偏向)作用と、2) 荷電粒子を中心軌道のまわりに安定に振動させる(収束)作用の2つに分類出来ることがわかる。弱収束の場合には n は一定であるから必然的にこの2つの機能は同一の電磁石により実現されることになる(Combined Function Type)。又前に示した強収束の例も Combined Function Type になっている。しかし、近年、これら2つの作用を別々の電磁石に荷わせる Separated Function Type が多く用いられるようになった。これらは $n = 0$ の偏向電磁石(Bending Magnet と称する)により周回軌道を作成し、収束作用は中心軸上に磁場がなく一定の磁場勾配を有する四重極電磁石(Q Magnet と称する)により荷わせ

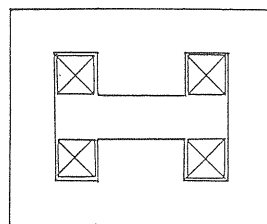
る仕組みになっている。偏向電磁石は幾何光学に於る反射鏡乃至プリズムのような役割を果すものであり、基本的なものは図7に示したような3通りの Type があり、それぞれ表1に示したような得失を有しており設計しようとするリングの要求に応じて使い分けられる。四重極電磁石は幾何光学の凸レンズ又は凹レンズのような役割を果すものであり、図8に示したような磁力線と磁場分布をもつ。但し、ここでイオン光学の場

表1. 各 Type の偏向電磁石の得失

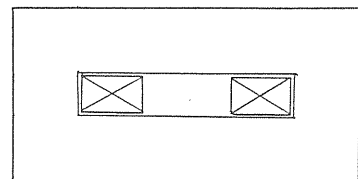
電磁石の Type	長 所	短 所
C-Type	<ul style="list-style-type: none"> 真空槽の挿入が容易 渦電流の効果は小さい。 ギャップの磁場はコイル位置の誤差に比較的敏感でない。 	<ul style="list-style-type: none"> 重量が大きくなる。 対称性がないので四極成分八極成分が出やすい。
H-Type	<ul style="list-style-type: none"> 対称性から四極、八極成分は出にくい。 渦電流の効果は小さい。 ギャップの磁場はコイル位置の誤差に比較的敏感でない。 	<ul style="list-style-type: none"> 真空槽の挿入に際して電磁石を2分割する必要がある。
Window-Frame Type	<ul style="list-style-type: none"> 重量が小さくコンパクトになる。 対称性から四極、八極成分は出にくい。 ギャップ磁場の一様性が良好である。 	<ul style="list-style-type: none"> 真空槽の挿入に際して電磁石を2分割する必要がある。 コイルの成形が複雑。 渦電流の効果が大い。 ギャップ磁場はコイル位置の誤差に比較的敏感である。



(a) C-Type



(b) H-Type



(c) Window-Frame Type

図7. 偏向電磁石の3つの Type

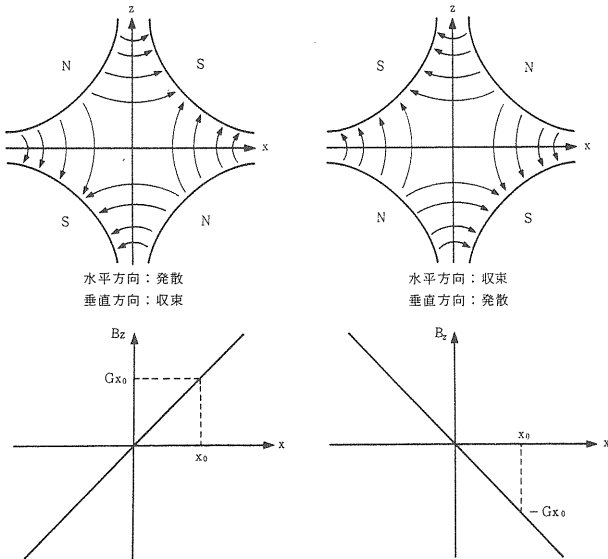


図8. 四重極電磁石の磁力線と磁場分布
(但し、正の荷電粒子が右手系 (x, s, z) の s の正方向つまり紙面の手前から向こう側に進む場合を想定している。)

合、水平方向に収束作用を有する四重極電磁石は垂直方向には必ず発散となり、水平方向に発散の場合には垂直方向に収束となる（[演習問題 10] この事実を(4), (6)を用いて導け。又図8を用いてこれを直観的に示せ）ことが幾何光学のレンズの場合と異なっている点に注意されたい。さてここで図9に示したように水平方向に収束及び発散作用を有する2台の四重極電磁石（それぞれを Q_F , Q_D と示すことにする）が距離 l だけ離れて配置されている場合を考える。水平方向のみを考え、 Q_F , Q_D の焦点距離をそれぞれ f_F , f_D とすると図9に示したシステムは複合レンズと考えることができ、よく知られた幾何光学の式より

$$\frac{1}{f_F} + \frac{1}{f_D} - \frac{1}{f_F f_D} = \frac{1}{F} \quad (31)$$

(F はこの複合レンズの焦点距離)が導かれる。今 Q_F と Q_D が磁場勾配の絶対値が等しく、極性のみ異なっている場合を考えると焦点距離は $f_F = -f_D (= f_0)$ となり、(31)式より

$$\frac{1}{F} = \frac{l}{f_0^2} \quad (> 0)$$

となり、複合レンズとしての機能は凸レンズと同じ収束作用を有することがわかる。垂直方向を考えても Q_F , Q_D の焦点距離の符号が入れかわるだけで全く同じことがいえるので、前に述べた強収束の原理が直観的に容易に理解できよう。

Combined Function Type は2つの機能を1つの電

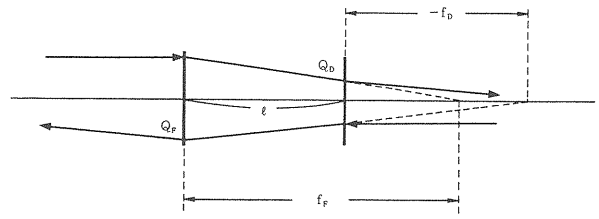


図9. Q_F , Q_D の組み合わせレンズ

磁石が果すので一般に周長を小さくできるという利点がある反面、Bending Radius を一定に保つ必要から、電磁石を製作してしまうと収束の強さも固定され、 ν 値を自由に選択することができない。一方、Separated Function Type は Combined Function に比して周長が長くなり電磁石の種類も増えるが、軌道を一定に保ったまま ν 値を自由に選べるという利点が存在し、最近ではリングのサイズを小さく抑える必要があるような特殊な場合を除いてこちらの Type が採用されることが多い。

Dispersion Function

ここまでは単一の運動量の粒子の運動を考えてきたが、次に運動量が中心値 p より Δp だけ異なる粒子の運動方程式を考える。(3)式に於て r, v をそれぞれ $r + \Delta r, v + \Delta v$ に置き換え、中心の運動量 p を持つ粒子に対して

$$\frac{m_0 r v^2}{\rho_0} + qevB_z(0) = 0$$

が成り立つことを用い、 $\Delta r, \Delta v$ の2次以上の項を無視すると

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1-n}{\rho_0^2} x = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad (32)$$

が導ける。（[演習問題 11] これを導け。）この

式は(4)式の Hill's Equation に $\frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\Delta p}{p}$ なる強制項がつけ加わった形となっている。今単一のイオン光学的エレメントを考え、 $K = \frac{1-n}{\rho_0^2}$ がこのエレメント内で s によらず一定である場合には $x = \frac{1}{\rho_0 K} \cdot \frac{\Delta p}{p}$ が(32)式の特解であるから、(32)式の一般解は $K > 0$ の場合、

$$x = c_1 \cos(\sqrt{K} \cdot s) + c_2 \sin(\sqrt{K} \cdot s) + \frac{1}{\rho_0 K} \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad (33)$$

と表わせる。ここで前に述べた2次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

の代わりに $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}$ なる3次元ベクトルを用いて Mat-

rix 表示を行うことを考える。s = 0 における初期値を x_1, x_1' とすると

$$c_1 = x_1 - \frac{1}{\rho_0 K} \frac{\Delta p}{p}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{K}} x_1'$$

となるから

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{K}s), & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s), \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s), & \cos(\sqrt{K}s), \\ 0, & 0, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_0 K} \{1 - \cos(\sqrt{K}s)\} \\ \frac{1}{\rho_0 \sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

が得られる。

([演習問題 12])

$K < 0$ の場合、同様にして3次元 Transfer Matrix が

$$\begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{|K|}s), & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}s), \\ \sqrt{|K|} \sinh(\sqrt{|K|}s), & \cosh(\sqrt{|K|}s), \\ 0, & 0, \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_0 |K|} \{ \cosh(\sqrt{|K|}s) - 1 \} \\ \frac{1}{\rho_0 \sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}s) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

で与えられることを示せ。)

四重極電磁石の場合には既に述べたようにその中心軸上での磁場が存在しないからその Transfer Matrix

は (34)(35) 式に於て $\rho_0 \rightarrow \infty$ と考えて $K = \frac{G}{B\rho}$

(Gは四重極電磁石の磁場勾配、但しGの符号は収束、

発散の場合にそれぞれ正、負となるようにとるものとす)とおくことにより求められる。n = 0の偏向電磁石はその偏向角を θ 、曲率半径を ρ_0 とすると、3次元 Transfer Matrix は

$$\text{(水平方向)} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho (1 - \cos \theta) \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36-a)$$

$$\text{(垂直方向)} \quad \begin{bmatrix} 1 & \rho \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36-b)$$

で与えられる。又、長さ l の自由空間 (Drift Space と称する) は水平、垂直両方向ともに

$$\begin{bmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

で表わすことができる。([演習問題 13] (36)(37) を導け。)

ここで(32)式に戻って、nがs dependence を有する一般の場合について考えてみよう。(32)式は(7)式と同様の notation を用いて一般化して

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K(s)y = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad (38)$$

と表わせる。ここで、

$$\eta(s) = \frac{y(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \quad (39)$$

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{d\tau}{\nu \beta(\tau)} \quad (40)$$

なる変数変換を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\phi} &= \frac{y' \sqrt{\beta} - y(\sqrt{\beta})'}{\beta(s)} \cdot \frac{ds}{d\phi} \\ &= \nu \{ y' \sqrt{\beta} - y(\sqrt{\beta})' \} \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} = \nu^2 \beta \{ y'' \sqrt{\beta} - y(\sqrt{\beta})'' \} \quad \text{が導かれ、} \sqrt{\beta}$$

が(8)式を満すことより

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = \nu^2 \beta^{3/2} \cdot \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{Ap}{p} \quad (41)$$

が得られる。(〔演習問題 14〕 (41) 式を導け。又同様の変数変換により齊次の式(7)は

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = 0$$

と単振動の式に変換できることを確かめよ。

$$\beta^{3/2} \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{Ap}{p} = f(\phi) \quad \text{なる notation を用い,}$$

(41)の一般解を

$$\eta(\phi) = c_1(\phi) \cos \nu \phi + c_2(\phi) \sin \nu \phi \quad (42)$$

と表わして、定数変化法により解を求めることを考えると、 $c_1'(\phi) = -\nu f(\phi) \sin \nu \phi$ 、 $c_2'(\phi) = \nu f(\phi) \cdot \cos \nu \phi$ が容易に得られるからこれらを積分して

$$\left. \begin{aligned} c_1(\phi) &= -\nu \int_0^\phi f(\psi) \sin \nu \psi d\psi + c_1^0 \quad (c_1^0 \text{は定数}) \\ c_2(\phi) &= \nu \int_0^\phi f(\psi) \cos \nu \psi d\psi + c_2^0 \quad (c_2^0 \text{は定数}) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

となり、

$$\eta(\phi) = \nu \int_0^\phi f(\psi) \sin \nu (\phi - \psi) d\psi + c_1^0 \cos \nu \phi + c_2^0 \sin \nu \phi \quad (44)$$

と書ける。ここで、(38)式は独立変数 s について C の周期性をもつから、(41)式の右辺は ϕ に関して 2π の周期関数になっている。そこで $\eta(\phi)$ として 2π の周期性をもつ解を求めると

$$c_1^0 = \frac{\nu}{2(1 - \cos 2\pi\nu)} \left\{ \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin \nu (2\pi - \psi) d\psi + \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin(\nu \psi) d\psi \right\}$$

$$c_2^0 = \frac{\nu}{2(1 - \cos 2\pi\nu)} \left\{ \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos \nu (2\pi - \psi) d\psi - \int_0^{2\pi} f(\psi) \cos(\nu \psi) d\psi \right\}$$

(45)

が得られ、(〔演習問題 15〕 (45)式の関係を導け) これらを(44)式に代入すると

$$\begin{aligned} \eta(\phi) &= \nu \int_0^\phi f(\psi) \sin \nu (\phi - \psi) d\psi \\ &+ \frac{\nu}{4 \sin^2 \pi \nu} \left\{ \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin \nu (2\pi + \phi - \psi) d\psi + \int_0^{2\pi} f(\psi) \sin \nu (\psi - \phi) d\psi \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

が得られ、若干の変形により

$$\eta(\phi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_\phi^{\phi+2\pi} f(\psi) \cos \nu (\pi + \phi - \psi) d\psi$$

(47)

が導かれる。(〔演習問題 16〕 (47) 式を導出せよ)

(47)式を(39)、(40)を用いて逆の変数変換をし、独立変数を s で表わすと $\frac{Ap}{p}$ をくくり出すことができ

て

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(s) &= \left[\frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+c} \frac{\sqrt{\beta(\tau)}}{\rho_0(\tau)} \cos \{ \nu \pi + \mu(s) - \mu(\tau) \} d\tau \right] \cdot \frac{Ap}{p} \end{aligned} \quad (48)$$

となる。前に $\eta(\phi)$ を求める際に 2π の周期性を仮定したから $\tilde{\eta}(s)$ は C の周期性を有しており、閉軌道 (Closed Orbit) を形成していることがわかる。 即ちこの $\tilde{\eta}(s)$ が運動量が中心値 p から Ap だけずれた粒子に対する平衡軌道となっている。(48)式の右辺の

$\frac{Ap}{p}$ を除いた部分を $D(s)$ と書き表わすと

$$\tilde{\eta}(s) = D(s) \frac{Ap}{p} \quad (49)$$

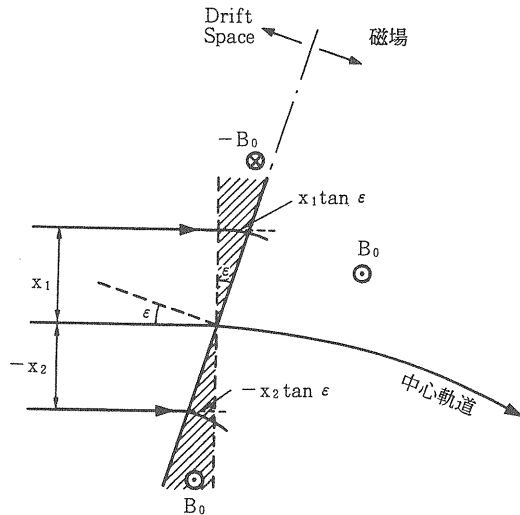
$$D(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+c} \frac{\sqrt{\beta(\tau)}}{\rho_0(\tau)} \cos \{ \nu \pi + \mu(s) - \mu(\tau) \} d\tau \quad (50)$$

と表わせる。この $D(s)$ を Dispersion Function と呼ぶ。この Dispersion Function がわかると運動量が $\frac{Ap}{p}$ だけずれた粒子の平衡軌道が(49)式により容易に求めることができ、シンクロトロンのような円形加速器を設計する上で Beta-Function と並

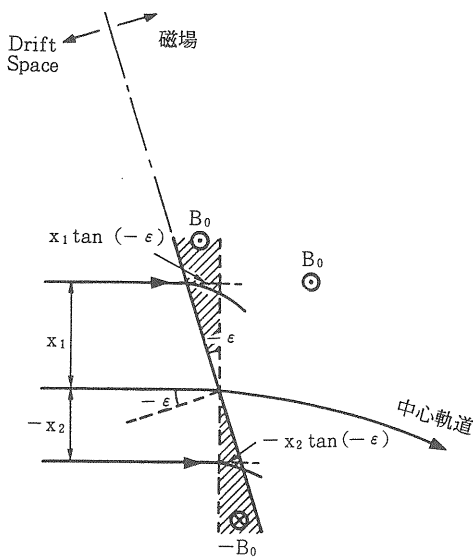
んで重要な量である。前に述べたベータトロン振動は運動量が $\frac{\Delta p}{p}$ だけ異なる粒子については (49) で与えられる平衡軌道のまわりの振動となる。

Edge Focusing

平衡軌道のまわりの収束作用は磁場勾配 n のみによって生ずるものではなく、 $n = 0$ の偏向電磁石の入射面の角度によっても生ずる。この効果について考察する。まず水平方向について考える。図10(a)に示したように電磁石の Field Boundary に対して角度 ϵ をもって入射する粒子を考える。図に破線で示したよう



(a) 水平方向に発散作用の場合



(b) 水平方向に収束作用の場合

図10. Magnet Edge において荷電粒子が受ける偏向の様子(水平方向)

な粒子の入射方向に直角な Field Boundary が存在する場合と比べて、図に斜線で示した領域に図中に示した極性の磁場が余計に存在すると考えてよい。まず平衡軌道に対して、 $x_1 (> 0)$ なる変位をもって入射する粒子を考える。edge angle が小さくこの斜線部分での曲率が小さいと考えると長さ $x_1 \tan \epsilon$ 、磁場強度 $-B_0$ の偏向磁場で Magnetic Rigidity $B_0 \rho$ の粒子が外側に偏向をうけることになるから斜線領域の通過により

$$\Delta x' = \frac{B_0 x_1 \tan \epsilon}{B_0 \rho} = \frac{x_1 \tan \epsilon}{\rho} (> 0)$$

なる角度の偏向を余分に受けることになる。 $x_2 (< 0)$ なる変位を有する粒子については破線で示す Boundary をもつ磁場の場合に比して、長さ $-x_2 \tan \epsilon$ 、磁場強度 $+B_0$ の磁場により内側に

$$\Delta x' = -\frac{B_0 (-x_2 \tan \epsilon)}{B_0 \rho} = \frac{x_2 \tan \epsilon}{\rho} (< 0)$$

なる偏向を受けることになる(発散作用)。従って x の正負によらず edge の効果は3次元 Transfer Matrix で表わすと

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tan \epsilon}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

と書けることがわかる。(ϵ の正の向きは Field Boundary の法線が粒子軌道の外側に来る方向(図10(a)の場合)と定義する。)

[演習問題 17]

図10(b)のように Field Boundary の法線が粒子軌道の内側を向く場合にも $\epsilon < 0$ と考えることにより edge angle の effect が (51) で表わされることを示せ。

次に垂直方向について考える。図11(a)に示したように Field Boundary の法線が粒子軌道から外側へ角度 ϵ だけ傾いている場合を考え、粒子が Median Plane より上へ z だけ変位して入射した場合を考える。この場合、Fringing Region に存在する Boundary に直角方向の磁場成分を B_σ と表わすと Fringing Field Region では $B_\sigma \cdot \sin \epsilon$ の大きさの磁場が粒子速度と直角方向に作用するから、垂直方向の運動方程式は

$$m_0 r \frac{d^2 z}{dt^2} = -qev B_\sigma \cdot \sin \epsilon \quad (52)$$

と書ける⁴⁾。独立変数を t から s に変換するとこれは

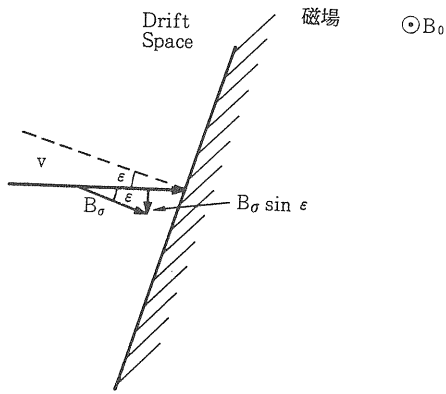


図 11. (a) 偏向電磁石の Field Boundary 付近の off Median Plane における Fringing Field の水平成分

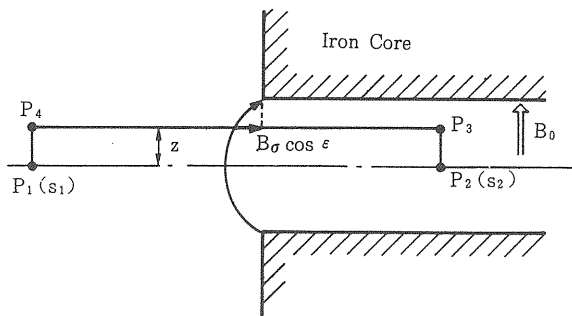


図 11. (b) 偏向電磁石の Field Boundary 付近の入射粒子の方向に沿う垂直断面

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{qeB_\sigma \sin \epsilon}{m_0 r v} \quad (53)$$

と表わせる。ここで B_σ を評価することを考える。図 11(b) を粒子の入射方向に沿った面で図 11(a) を垂直に切った断面と仮定する。図 11(b) の P_1, P_2, P_3, P_4 で構成される閉じたループに $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ を適用すると

$$\int_{s_1}^{s_2} B_\sigma \cos \epsilon ds - \int_0^z B_0 dz = 0$$

が成り立つ (ここで P_1, P_4 は field boundary から充分遠く fringing field の存在しない領域にあると考える。又、 P_2, P_3 は Magnet の充分内部で磁力線が完全に垂直方向を向いている場所と考える。更に Median Plane 上では磁場は垂直成分しか存在しないので $\int_{P_2}^{P_1} B_0 \cos \epsilon ds = 0$ が成り立つことを用いた。)

(53) 式を s について積分すると

$$\begin{aligned} \left. \frac{dz}{ds} \right|_{s_2} - \left. \frac{dz}{ds} \right|_{s_1} &= -\frac{qe \tan \epsilon}{m_0 r v} \int_{s_1}^{s_2} B_\sigma \cos \epsilon ds \\ &= -\frac{qe \tan \epsilon B_0 z}{m_0 r v} = -\frac{z \tan \epsilon}{\rho} \quad (54) \end{aligned}$$

が得られる。(54) 式は Matrix 表示では

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\tan \epsilon}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

と表わせる。

[演習問題 18]

$\epsilon < 0$ の場合にも (55) の Matrix 表示が導けることを示せ。

[演習問題 19]

図 12 に示したような互いに平行な入出射面を有する偏向電磁石 (Rectangular Magnet) は入出射面でそれぞれ $\epsilon = \frac{\theta}{2}$ の Edge Focusing が存在すると考えて、以下のような Transfer Matrix で表現できることを示せ。

水平方向

$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & \rho \sin \theta & \rho (1 - \cos \theta) \\ 0 & 1 & 2 \tan \frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$M_V =$

$$\begin{bmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & \rho \theta & 0 \\ \frac{\tan \frac{\theta}{2} (\theta \tan \frac{\theta}{2} - 2)}{\rho} & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

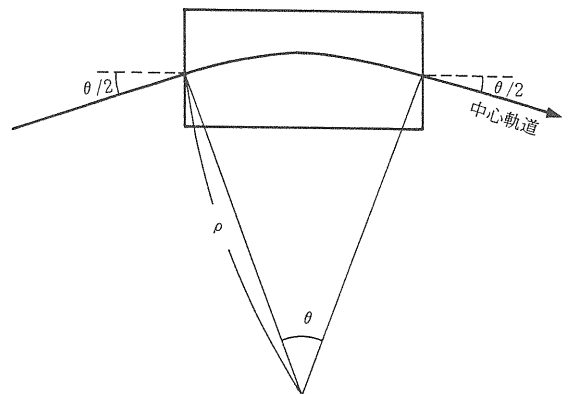


図 12. Rectangular Magnet (偏向角 θ , 曲率半径 ρ)

以上の議論は磁場が図13に破線で示したように急俊に変化する Sharp Edge を仮定しているが現実の磁場は有限の広がりをもつ fringing field region に於てなだらかに変化する。そこで図13に実線に示したような linear fringing field の edge focusing を考える。水平方向の場合には図14に斜線領域で示したような linear fringing field が存在したとしても変位 x の粒子は B 点に到達した時点から、中心軌道上を A 点に到達した粒子と同一の偏向をうけることになるから Edge の Focusing は Sharp Edge の場合と同様に (51) で記述できることがわかる。他方垂直方向の運動を考えた場合、図15の P 点に存在する粒子の垂直方向の運動方程式は (53) 式の ϵ を $\epsilon - \psi(s)$ ($\psi(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho(\tau)} d\tau$) とおきかえて

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = -\frac{qeB_\sigma \sin\{\epsilon - \psi(s)\}}{m_0 r v} \quad (58)$$

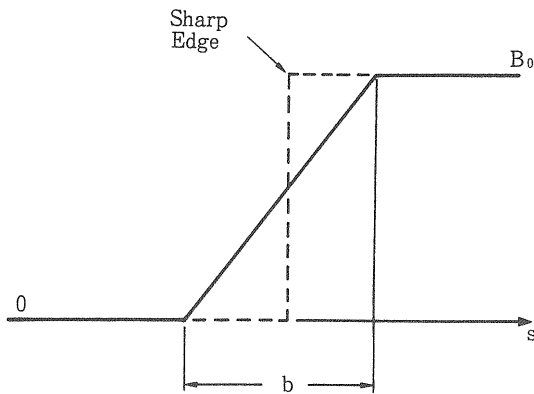


図13. Fringing Field Region の磁場の様子を与える 2つのモデル (実線: Linear Fringing Field, 破線: Sharp Edge)

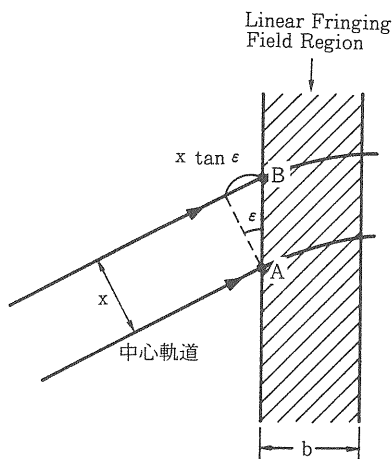


図14. Linear Fringing Field Region における水平方向の粒子の偏向の様子

で表わされる⁵⁾。ここで $\sin\{\epsilon - \psi(s)\} \approx \sin\epsilon - \psi(s) \cdot \cos\epsilon$ を用い、(58) 式を 0 から $\frac{b}{\cos\epsilon}$ まで積分すると

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} \Big|_{\frac{b}{\cos\epsilon}} - \frac{dz}{ds} \Big|_0 = & \\ -\frac{qe}{m_0 r v} \left[\tan\epsilon \int_0^{\frac{b}{\cos\epsilon}} B_\sigma \cos\epsilon ds \right. & \\ \left. - \int_0^{\frac{b}{\cos\epsilon}} B_\sigma \cos\epsilon \int_0^s \frac{1}{\rho(\tau)} d\tau ds \right] & \quad (59) \end{aligned}$$

が得られる。linear fringing field を仮定している今の場合、曲率は s に linear に変化するから

$$\frac{1}{\rho(\tau)} = \frac{\tau}{\left(\frac{b}{\cos\epsilon}\right)} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (60)$$

と書ける (ここで ρ は内部の一定磁場における曲率半径 (一定) を表わすものとする)。(59) 式の第一項は

Sharp Edge の所で述べたように $-\frac{z \tan\epsilon}{\rho}$ となる。

又、 $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ から $\frac{dB_\sigma}{dz} = \frac{dB_z}{d\sigma} = \frac{B_0}{b}$ が得られ、 $z = 0$ では $B_\sigma = 0$ であるから

$$B_\sigma(z) = \frac{B_0}{b} z \quad (61)$$

となる。(60), (61) を代入すると (59) 式の第2項は

$\frac{z}{6\rho^2} \left(\frac{b}{\cos\epsilon}\right)$ となるから次式が得られる。

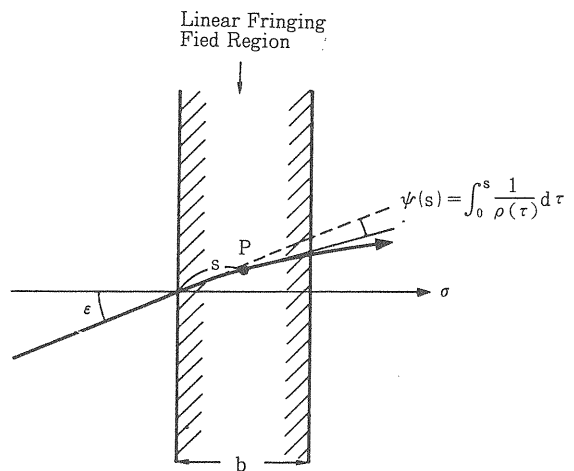


図15. Linear Fringing Field Region における粒子軌道の偏向角の変化の様子

$$\left. \frac{dz}{ds} \right|_{\frac{b}{\cos \epsilon}} - \left. \frac{dz}{ds} \right|_0 = -\frac{z}{\rho} \left(\tan \epsilon - \frac{b}{6\rho \cos \epsilon} \right) \quad (62)$$

これを Matrix で表示すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \left(\tan \epsilon - \frac{b}{6\rho \cos \epsilon} \right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

となる。ここで Fringing Field の Structure が Edge Focusing に及ぼす影響を東大・核研の TARN II を例として示そう⁶⁾。TARN II は図16に示したように24台の偏向電磁石(B)と18台の四重極電磁石 (12台の Q_F と6台の Q_D)より構成されており、水平方向の Focusing は12台の Q_F が、垂直方向の Focusing は6台の Q_D と24台の偏向電磁石の両端の Edge Focusing (Edge Angle 7.5°) が荷う設計となっている。図17にこのリングの水平・垂直両方向の ν 値と Q_F 、 Q_D の

Focusing Strength $k \left(\frac{dB_z}{dx} \right)$ の間の相関関係を

示す。図の破線は Sharp Edge を仮定した計算、実線は磁場測定により得られた real な Fringing Field Structure を考慮に入れた計算の結果をそれぞれ示す。(1.75, 1.25)の動作点を実現するのにreal boundary の場合には、sharp edge を仮定した場合に比して6割以上も強い Focusing Strength が要求され、偏向電磁石両端における Vertical Focusing の効果が(62)

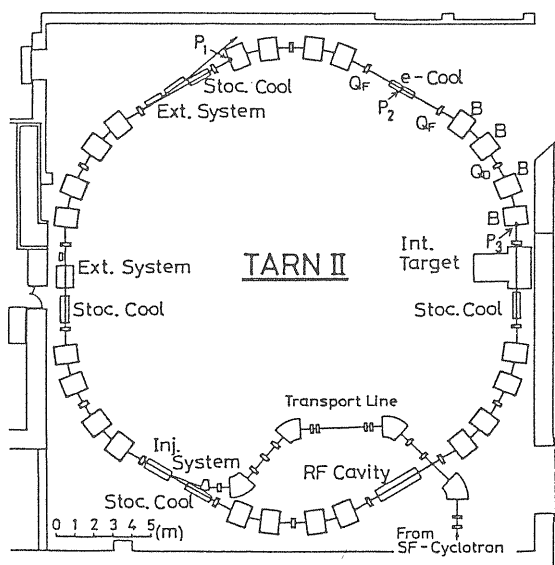


図16. 重イオンシンクロトロン/クーラーリング TARN II のレイアウト

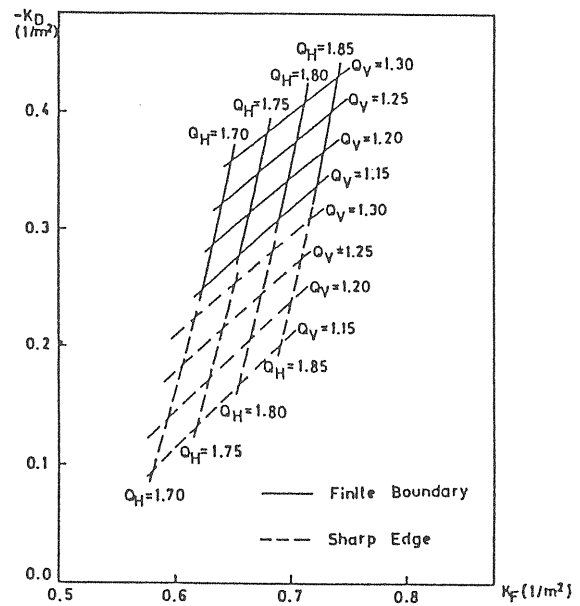


図17. TARN II の Q Magnet の Focusing Strength ($k = \frac{G}{B\rho}$) と水平、垂直両方向のベータトロン振動数 (Q_H , Q_V) の相関関係 (実線: 実測値の Fringing Field Structure を使用, 破線: Sharp Edge Model) (参考文献 6) より転載)

式の第2項に起因する効果が弱くなっている様子がよく理解できよう。この例から明らかのように Edge Focusing を用いたイオン光学系を設計する場合には、Fringing Field の Structure について十分な配慮を払う必要がある。(63)式から明らかのようにこの事情は ρ が小さい場合に特に顕著になるので注意されたい。逆に ρ が充分大きいリングを扱う場合にはこのような効果はあまり問題とならない。)

IV シンクロトロン加速

高周波電場による荷電粒子の加速

シンクロトロンでは粒子は円軌道を周回するので、静電場によっては1周した場合に energy gain を与えることができないので、荷電粒子の進行方向に高周波 (RF) 電場を印加することにより加速がおこなわれる。荷電粒子はこのRF電場による加速を受けたのち、前節で示したようなイオン光学系により、円形の周回軌道を描いて再びこのRF電場に到達する。この時RF電場がやはり加速の位相になっていることが必要であるから、RF電場の位相は粒子がリングを一回転する

間に 2π の整数 (h) 倍だけ変化する必要がある。この h を harmonic number と称しており、この RF 電場の Frequency, f_{RF} は、

$$f_{RF} = hf = h \frac{\beta c}{2\pi R} \quad (64)$$

で与えられる。ここに $f = \frac{\beta c}{2\pi R}$ は粒子の回転周波数 (revolution frequency) R はリングの平均半径である。シンクロトロンの場合 R は一定に保たれることは最初に述べたが、粒子の加速につれて β が変化してゆくので f_{RF} を変化させる必要がある。(電子シンクロトロンの場合には電子の質量が $0.511 \text{ MeV}/c^2$ と小さく、通常入射エネルギーは既にこれに比して充分大きくなっているので、 β は充分 1 に近い値となっている。……東大・核研の 1.3 GeV ES の場合、 15 MeV で入射されるので β は入射時で既に 0.9995 になっている……従って加速に伴う周波数の変化は小さく、RF 系としては固定周波数のシステムと考えてよい。この点が陽子のようなハドロンを加速するシンクロトロンとは大きく異なっている。) この f_{RF} の変化幅は重イオンのように質量が大きく、入射のエネルギーを高くすることが経済効率上困難な粒子をシンクロトロン加速する場合は必然的に大きくなる。例えば前に述べた TARN II の場合、 ϵ (charge to mass ratio) $= \frac{1}{2}$ のイオンの加速を考えると $7 \text{ MeV}/u$ で入射し、最高 $350 \text{ MeV}/u$ まで加速する設計になっているので f_{RF} は 0.94 MHz から 5.3 MHz まで ($h = 2$ を採用している) 5.6 倍変化する。こうした周波数変調は空洞内に装荷したフェライトの円板と鎖交するバイアス電流を変化させ、フェライトの透磁率を変化させることにより、加速空洞の共振周波数を変化させて実現される。従って harmonic number は使用するフェライトの使用可能な周波数帯に f_{RF} をもってくるように設定される。又 KEK 12 GeV PS の場合は主リング (直径 108 m) とブースター (直径 12 m) の周長比が 9 倍に設定されており、ブースター及び主リングの harmonic number をそれぞれ 1 及び 9 にとっている。こうすることによりブースターから主リングへビームを 9 回入射して、図 18 に模式的に示したように主リングの周上に 9 つのビームのかたまり (これをビームバンチと称する) を形成することができる。このように前段のリングから後段のリングへ入射を行う場合には、それぞれのリングの周長比を考慮して harmonic number が決定される。又、同じエネルギーのビームを同一リングで周回させている条件でも harmonic number を高くするとビームバンチの長さを短かくできるので、後

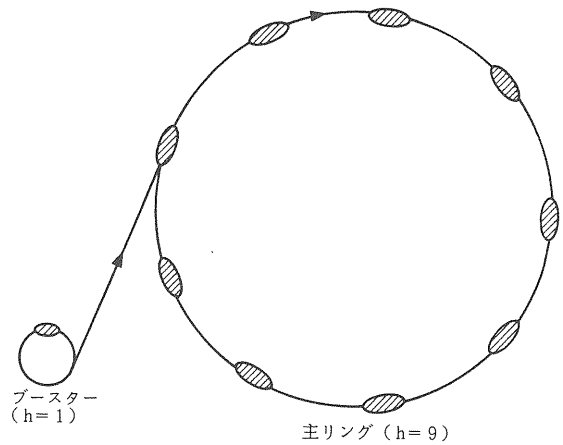


図 18. KEK 12 GeV PS のブースターから主リングへのビーム入射の模式図

に述べる Fast Extraction で RF 加速されたビームを 1 ターンで取り出して実験に使用するような場合には、取り出しビームの Time Structure を調整する目的から harmonic number が決定されることもある。

位相安定性 (Phase Stability)

シンクロトロンリング内を周回しているビームには運動量の拡がり $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)$ が存在するからビームの revolution frequency にも拡がり $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)$ が存在する。これは $f = \frac{\beta c}{2\pi R} = \frac{\beta c}{C}$ (C はリングの周長) なる関係から

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta \beta}{\beta} - \frac{\Delta C}{C} \quad (65)$$

と表わせる。ここで $\frac{\Delta \beta}{\beta} = \frac{1}{r^2} \frac{\Delta p}{p}$ と表わすことができ ([演習問題 20] これを示せ。), 又 $\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta R}{R}$ は前節で述べた Dispersion Function $D(s)$ のリング全周にわたる平均を $\langle D \rangle$ と表わすと $\Delta R = \langle D \rangle \frac{\Delta p}{p}$ と書けるから $\frac{\Delta C}{C} = \frac{\langle D \rangle}{R} \cdot \frac{\Delta p}{p}$ と表わせる。 $\frac{\langle D \rangle}{R} = \frac{\Delta C/C}{\Delta p/p}$ は Momentum Compaction Factor と呼ばれ α と記される。 $\frac{\Delta \beta}{\beta}$ の表現と形をそろえるために $\alpha = \frac{1}{r_t^2}$ と表わす $\left(r_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{R}{\langle D \rangle}}\right)$ と (65) 式は

$$\frac{\Delta f}{f} = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_t^2} \right) \frac{\Delta p}{p} \quad (66)$$

となる。(66)式の第1項は運動量大きい粒子は速度が速いため回転周波数が増す効果を、第2項は運動量の大きい粒子は外側を回転するため軌道長が長くなり回転周波数が減少する効果をそれぞれ表わすと直観的に理解できる。また粒子の回転周期Tはfの逆数であるからその拡がりは

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{1}{r_t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{\Delta p}{p} \quad (67)$$

と表わせる。(67)式から明らかのように $r > r_t$ の条件では $\tilde{\eta} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_t^2}$ は正となる。今RF加速空洞をRFの位相が φ_s の時点で同時に通過する粒子の集団を考える。RFの周波数はこの粒子集団の運動量分布の中心値 p_s を有する粒子に同期するように設定されるから、運動量 p_s ($\frac{\Delta p}{p} = 0$) の粒子は図19(a)に示したように1周後も同じ位相 φ_s でRF加速を受ける。(簡単のため $h = 1$ の場合について図示することにする。) これに対し、 $\frac{\Delta p}{p} > 0$ の運動量 p_1 を持つ粒子は(67)式より $\frac{\Delta T}{T} > 0$ となるから、その回転

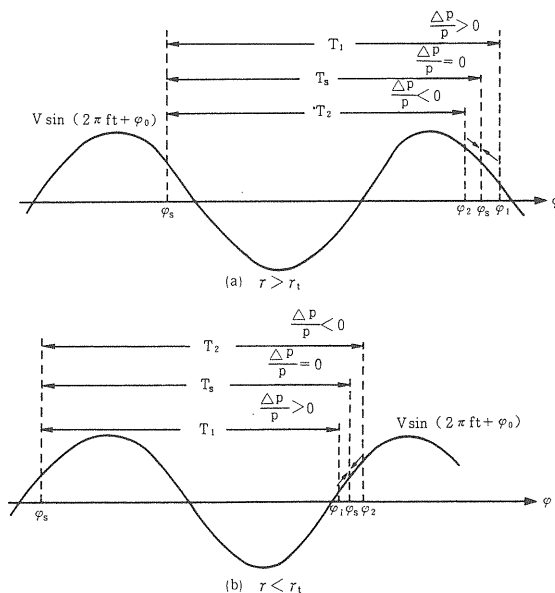


図19. 高周波電場とビームの位相関係

($\frac{\Delta p}{p} > 0$, $\frac{\Delta p}{p} = 0$, $\frac{\Delta p}{p} < 0$ の3通りについて示す)

周期 T_1 は運動量 p_s の粒子の周期 T_s より大となり、1周後は図に示した φ_1 のRF位相で加速を受けることになる。他方 $\frac{\Delta p}{p} < 0$ の運動量を持つ粒子は $\frac{\Delta T}{T} < 0$ より回転周期 T_2 は T_s より小で一週後のRF位相は φ_2 となる。ここで φ_s を図19(a)に示したように、 $2m\pi + \frac{\pi}{2} < \varphi_s < (2m+1)\pi$ (m は整数)の領域にとったとすると、 $\sin \varphi_1 < \sin \varphi_s < \sin \varphi_2$ が成り立つ。ピーク電圧がVのRF電場を位相 φ で通過する粒子のEnergy Gain ΔE は

$$\Delta E = qeV \sin \varphi \quad (68)$$

で与えられるから、運動量 p_s, p_1, p_2 の粒子のEnergy Gainをそれぞれ $\Delta E_s, \Delta E_1, \Delta E_2$ とすると、 $\Delta E_2 > \Delta E_s > \Delta E_1$ なる大小関係が成り立つ。従って、 $\frac{\Delta p}{p} > 0$ の運動量 p_1 をもつ粒子は p_s の運動量をもつ粒子に比してEnergy Gainが小さく、中心値の方へ近づいていくことになり、次の1周後にRF加速を受ける位相は図の矢印の方向にshiftしていく。 $\frac{\Delta p}{p} < 0$ の運動量 p_2 をもつ粒子はEnergy Gainが運動量 p_s の粒子より大きく、やはり中心値の方へ近づいていくことになるから次の1周後のRF位相はやはり φ_s の方へshiftしていくことになる。即ちビームの運動量に拡がり存在してもRFの中心位相 φ_s を図19(a)

のように $2m\pi + \frac{\pi}{2} < \varphi_s < (2m+1)\pi$ とれば運動量 p 及び加速を受ける際のRF位相 φ はその中心値のまわりに安定に振動を続ける。これを位相安定性(Phase Stability)と称しており、この振動を位相振動(Phase Oscillation)と呼ぶ。(上に述べた φ_s の範囲は加速という条件も同時に課しており、位相安定性自身は $2m\pi + \frac{\pi}{2} < \varphi_s < 2m\pi + \frac{3}{2}\pi$ の範囲で成り立つ。)この p 及び φ の中心値 p_s 及び φ_s をそれぞれ平衡運動量(Synchronous Momentum)及び平衡位相(Synchronous Phase)と呼び、運動量 p_s の粒子を平衡粒子(Synchronous Particle)と呼ぶ。

[演習問題 21]

φ_s を $2m\pi - \frac{\pi}{2} < \varphi_s < 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ に選んだ場合、位相の安定性は成り立たないことを図示して示せ。

次に $r < r_t$ の条件を考えると $\tilde{\eta} < 0$ となるから、 $\frac{\Delta p}{p}$ の正負と $\frac{\Delta T}{T}$ の正負は逆転する。従って運動量

$p_1\left(\frac{d\mathbf{p}}{p} > 0\right)$, $p_s\left(\frac{d\mathbf{p}}{p} = 0\right)$, $p_2\left(\frac{d\mathbf{p}}{p} < 0\right)$ の粒子の周期 T_1 , T_s , T_2 の大小関係は $T_1 < T_s < T_2$ となるから図19(b)に示したように φ_s を $2m\pi < \varphi_s < 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ にとっておくと、これらの粒子の1周後のRF位相 φ_1 , φ_s , φ_2 の位置関係は図示したようになり、やはり $\sin\varphi_1 < \sin\varphi_s < \sin\varphi_2$ が成り立つ。従って、Higher Momentum の粒子の Energy Gain は小さく、Lower Momentum の粒子の Energy Gain が大きいという関係が成り立ち、同様に位相安定性が存在する。

このように $r < r_t$ では $2m\pi - \frac{\pi}{2} < \varphi_s < 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ で位相安定性が成り立ち、 $r > r_t$ では $2m\pi + \frac{\pi}{2} < \varphi_s < 2m\pi + \frac{3}{2}\pi$ で安定となる。即ち $r = r_t$ を境として位相振動の安定領域が遷移するのでこの r_t を Transition r と称する。 $r_t > 1$ の場合、 r が r_t に一致する場合がありますが、この時 $(r_t - 1)m_0c^2$ を Transition Energy と称し、安定位相領域が遷移するビームの Kinetic Energy を表わしている。ビーム加速の途中で Transition Energy を通過する際には平衡位相を $2m\pi + \frac{\pi}{2}$ の下側から上側へ Jump させねばならないので制御に特別の注意を要する。前に述べた様に r_t は $\sqrt{\frac{R}{\langle D \rangle}}$ で表わされるから、dispersion function のリング1周にわたる平均値 $\langle D \rangle$ が小さくなるイオン光学系を用いれば r_t を大きくすることができ、加速最高エネルギーの r を r_{\max} とする時、 $r_t > r_{\max}$ なる条件を満たすと Transition Energy の通過を避けることができる。

位相振動の方程式

ここで上に述べた位相振動 (Synchrotron Oscillation とも称する) を記述する方程式を考えよう。粒子の運動量: p , 全エネルギー: E , 回転周波数: f , 加速空洞通過時のRF位相: φ , 粒子の軌道上の方位角: θ の基準を Synchronous Particle にとり, Synchronous Particle の値, p_s , E_s , f_s , φ_s , θ_s からのずれをそれぞれ Δp , ΔE , Δf , $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ で表わすことにする。加速空洞 (RF cavity) を位相 φ の時点で通過した粒子は $qeV \sin\varphi$ の Energy Gain を受ける。

$$\text{これは } \Delta p = m_0c \Delta(\beta r) = m_0c \cdot \frac{\Delta r}{\beta} = \frac{\Delta E}{\beta c} = \frac{\Delta E}{2\pi f R} = \frac{\Delta E}{\omega R} \quad (\omega = 2\pi f) \text{ より 1 回転当りの運動}$$

量変化になおすと $\frac{qeV}{\omega R} \sin\varphi$ と表わせる。これを粒

子の回転の周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ でわると運動量の時間変化 $\dot{\mathbf{p}}$ に

対応するから、 $\dot{\mathbf{p}} = \frac{qeV}{2\pi R} \sin\varphi$ が得られ、これは

$$R_s \dot{\mathbf{p}} = \frac{qeV}{2\pi} \sin\varphi \quad (69)$$

と書き直すことができる。Synchronous Particle についても同様に

$$R_s \dot{\mathbf{p}}_s = \frac{qeV}{2\pi} \sin\varphi_s \quad (70)$$

なる関係が得られるから、両者を差し引いて

$$\Delta(R_s \dot{\mathbf{p}}) = \frac{qeV}{2\pi} (\sin\varphi - \sin\varphi_s) \quad (71)$$

が導かれる。ここで、 ΔR 及び Δp の一次の項までを

$$\text{とると } \Delta(R_s \dot{\mathbf{p}}) = R_s \Delta \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}_s \cdot \Delta R = R_s \Delta \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}_s \left(\frac{dR}{d\mathbf{p}}\right)_s \cdot \Delta p = R_s \Delta \dot{\mathbf{p}} + \dot{R}_s \Delta p = \frac{d}{dt} (R_s \Delta p)$$

ここで $R_s \Delta p = \frac{\Delta E}{\omega_s}$ ゆえ

$$\Delta(R_s \dot{\mathbf{p}}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right), \quad (72)$$

これを(71)に代入して

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = \frac{qeV}{2\pi} (\sin\varphi - \sin\varphi_s) \quad (73)$$

が得られる。

次に θ の正方向を粒子の進行方向にとると、方位角が Synchronous Particle と $\Delta\theta$ だけずれている粒子は RF cavity を位相角で $h\Delta\theta$ (h は harmonic number) だけ早い時点で通過するから、 $\Delta\varphi = -h\Delta\theta$,

ここで $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ であるから $\Delta\omega = \frac{d}{dt}(\Delta\theta) = -\frac{1}{h}$

$$\frac{d}{dt}(\Delta\varphi) = -\frac{1}{h} \frac{d}{dt}(\varphi - \varphi_s) = -\frac{1}{h} \frac{d\varphi}{dt} \quad (\varphi_s =$$

const. と考える。) 一方(66)式より $\Delta\omega = -\tilde{\eta} \omega \frac{\Delta p}{p}$

であるから、これらの式より $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h\tilde{\eta}\omega_s}{p_s} \cdot \Delta p$,

これに $\Delta p = \frac{\Delta E}{R_s \omega_s}$ を代入して次式を得る。

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h\tilde{\eta}\omega_s}{p_s R_s} \cdot \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) \quad (74)$$

(73), (74) の2つの1階微分方程式は次の2階微分方程式にまとめることができる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_s R_s}{h \tilde{\eta} \omega_s} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) - \frac{qeV}{2\pi} (\sin \varphi - \sin \varphi_s) = 0$$

(75)

ここで、 $\Delta \varphi \ll 1$ をみたく small oscillation のみを考え、係数を一定と考える近似を用いると

$$\frac{d^2(\Delta \varphi)}{dt^2} - \frac{qeVh \tilde{\eta} \omega_s \cos \varphi_s}{2\pi p_s R_s} \Delta \varphi = 0 \quad (76)$$

(76)式より $r > r_t$ (above Transition Energy) では $\tilde{\eta} > 0$ ゆえ、 $\cos \varphi_s < 0$ 即ち $2m\pi + \frac{\pi}{2} < \varphi_s < 2m\pi + \frac{3\pi}{2}$ (m は整数) の範囲で $\Delta \varphi$ は振動解となり、前節で直観的に説明した位相安定性が成り立っていることがわかる。この時、この位相振動の角周波数 Ω_0 は

$$\Omega_0 = \sqrt{-\frac{qeVh \tilde{\eta} \omega_s \cos \varphi_s}{2\pi p_s R_s}} \quad (77)$$

で与えられる。 $r < r_t$ では $\tilde{\eta} < 0$ であるから $\cos \varphi_s > 0$ となる $2m\pi - \frac{\pi}{2} < \varphi_s < 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ なる φ_s の領域で位相安定性が成り立ち、(77)も同様に成立することがわかる。

次に φ に canonical 共役な変数 $W = \frac{\Delta E}{\omega_s}$ を用いる

と、(73), (74)式は Hamiltonian

$$H(\varphi, W) = \frac{h \tilde{\eta} \omega_s}{2 p_s R_s} W^2 + \frac{qeV}{2\pi} [\cos \varphi - \cos \varphi_s + (\varphi - \varphi_s) \sin \varphi_s] \quad (78)$$

を用いて、 $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial W}$, $\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$ より導く

ことが容易にわかる。ここで一般には係数、 $\tilde{\eta}$, ω_s , p_s , R_s , φ_s 及び V は時間的に変化するが、その変化が Synchrotron Oscillation に比して充分遅い adiabatic (断熱的) 変化をする場合には Synchrotron 振動を考えるにあたって、これらの係数の時間変化を無視する近似が成り立ち、 $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \approx 0$ より、この

Hamiltonian は時間変化をしないと考えてよい。従って、今ある特定の粒子を考えた場合、その φ 及び W は位相振動に伴って変化するが、(78)式で与えられる Hamiltonian, $H(\varphi, W)$ は一定値を保つ。これを粒子の Synchrotron 振動を表わす際によく使用する (φ, W) 座標 (Longitudinal Phase Space 又は Synchrotron Phase Space と称する) で示すと、粒子は図20の矢印のように $H(\varphi, W)$ の等高線上を移動することになる。

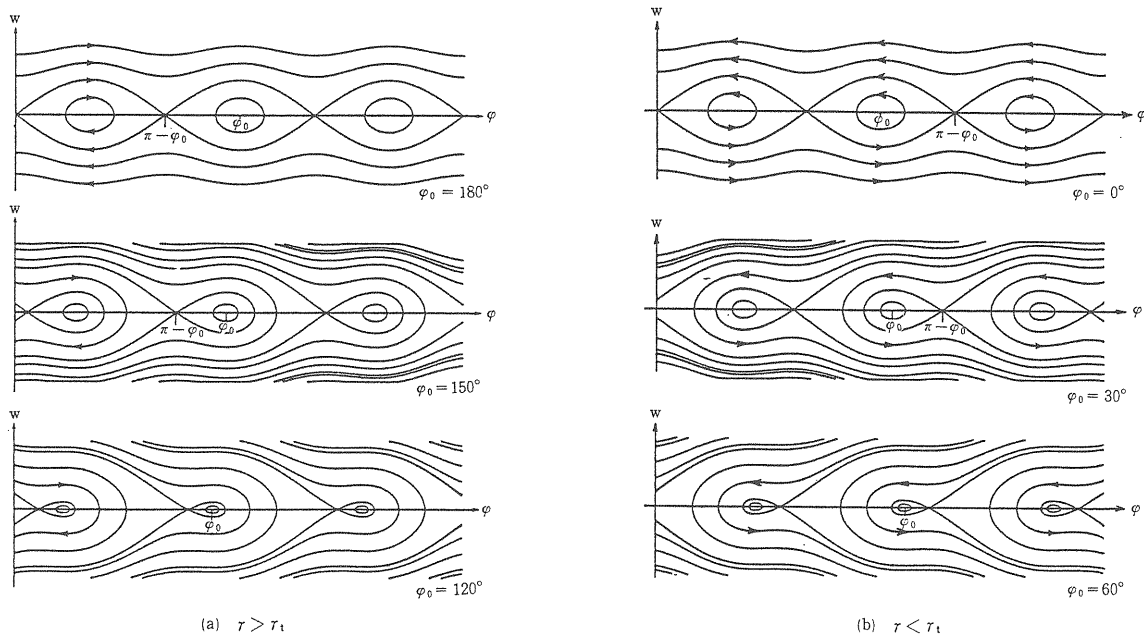


図20. Longitudinal Phase Space 上の Separatrix 及び粒子 Trajectory
 (a) $r > r_t$, (b) $r < r_t$ (B. W. Montague, "Single-Particle Dynamics-RF Acceleration", CERN 77-13 (1977) pp.63-81 から借用)

[演習問題 22]

(74)式より $r > r_t$, $r < r_t$ のそれぞれの場合について、粒子の Longitudinal Phase Space 上での運動の方向が図20の矢印の向きとなることを示せ。

ここで $\frac{d\phi}{dt} = 0$, $\frac{dW}{dt} = 0$ なる条件をみたす Longitudinal Phase Space 上の点 (Fixed Point) を考えよう。最初の条件から $W = 0$, 第2の条件から $\phi = \varphi_s$ 及び $\phi = \pi - \varphi_s$ が得られる。($0 \leq \phi \leq 2\pi$ の範囲で考える) $W = 0$, $\phi = \varphi_s$ なる点は Synchronous Particle に対応しており、安定領域 (Bucket と称する) の中心に位置して移動しないので stable fixed point と呼ばれる。 $W = 0$, $\phi = \pi - \varphi_s$ なる点は安定領域と不安定領域の境界線 (Separatrix と称する) 上にあり、Unstable Fixed Point と呼ばれる。この点上では $\frac{d\phi}{dt} = \frac{dW}{dt} = 0$ が成り立つから粒子の運動はこの点の近傍で限りなくゆるやかなものとなる。ここで Separatrix について考えよう。 $W = 0$, $\phi_u = \pi - \varphi_s$ なる点は Separatrix 上にあるから、この Separatrix 上での W の最大値を W_m と表わすと(78)の Hamiltonian が保存することより、

$$\frac{h\tilde{\eta}\omega_s}{2p_s R_s} W_m^2 = \frac{qeV}{2\pi} [-2\cos\varphi_s + (\pi - 2\varphi_s)\sin\varphi_s] \quad (79)$$

が導かれ

$$W_m = \sqrt{\frac{qeV p_s R_s}{\pi h \tilde{\eta} \omega_s} [(\pi - 2\varphi_s)\sin\varphi_s - 2\cos\varphi_s]} \quad (80)$$

が (W, ϕ) Phase Space での Separatrix Half Height を与える。これを $(\Delta E, \phi)$ Phase Space の Height に直すと $p_s = \frac{\beta}{c} E_s$, $R_s = \frac{\beta c}{\omega_s}$ より

$$\Delta E_m = \beta \sqrt{\frac{qeV E_s}{\pi h \tilde{\eta}} [(\pi - 2\varphi_s)\sin\varphi_s - 2\cos\varphi_s]} \quad (81)$$

で表わされることがわかる。

[演習問題 23]

入射器からのビームエネルギーの拡がり $\pm \Delta E_L$ の場合、adiabatic trapping を行うための最小 Bucket Height (Half) は $\Delta E = \frac{\pi}{2} \Delta E_L$ であることを用いて、入射器ライナックで 40MeV に加速された陽子

が $\frac{\Delta T}{T} = \pm 0.15\%$ の Energy の拡がりをもつ場合に、これを $\tilde{\eta} = -0.7$ のリング内の RF cavity で $\varphi_s = 0^\circ$ で capture するための最小電圧を求めよ。但し、 $h = 1$ と考えよ。又、1 GeV, $\frac{\Delta T}{T} = \pm 0.1\%$ のライナックからのビームを $\tilde{\eta} = -0.17$ のリング中の $h = 2$ の RF 電場で $\varphi_s = 0^\circ$ で Capture するのに必要な最小電圧を求めよ。

ϕ のもう一方の境界点 ϕ_e は次のように求められる。即ち(78)式の Hamiltonian が Conserve することから導かれる

$$\frac{h\tilde{\eta}\omega_s}{2p_s R_s} W_m^2 = \frac{h\tilde{\eta}\omega_s}{2p_s R_s} W^2 + \frac{qeV}{2\pi} [\cos\phi - \cos\varphi_s + (\phi - \varphi_s)\sin\varphi_s] \quad (82)$$

に $W = 0$, $\phi = \phi_e$ 及び(79)式を代入して次式が得られる。

$$\cos\phi_e + \phi_e \sin\varphi_s = (\pi - \varphi_s)\sin\varphi_s - \cos\varphi_s \quad (83)$$

この(83)式が ϕ_e の満すべき条件である。 φ_s が 0 及び π の場合、 $\cos\phi_e = -1$ 及び $+1$ となるから $\phi_e = \pi$ 及び 0 となり、Stationary Bucket は $\pm\pi$ に拡がっていることがわかる。次に $\varphi_s = \frac{\pi}{3}$ について(83)式をとくと $\phi_e = 29.1^\circ$ が得られ、 $\phi_u = \pi - \varphi_s = \frac{2}{3}\pi$ であるから、この場合 Bucket の拡がりは約 90° に縮まっていることがわかる (図20参照)。

シンクロトン加速の条件

さて今までは Synchronous Condition に対する粒子の位相振動を扱ってきたが、ここで本題の Synchronous Particle を加速するための条件を考えよう。冒頭に述べたようにシンクロトンでは磁場とビームエネルギーを同期して変化させることにより曲率半径が加速の期間を通じて変化しない条件を作成する。既に述べたようにビームの運動量と磁場強度 B , 曲率半径 ρ の間には

$$p = qeB\rho \quad (84)$$

なる関係が存在するから、 ρ を一定に保つとすると

$$\frac{dp}{dt} = qe \frac{dB}{dt} \cdot \rho \quad (85)$$

が得られる。これを1ターンでの変化 $(\Delta p)_{\text{turn}}$ に直すには Synchronous Particle の周期 $\frac{2\pi R}{\beta c}$ をかければよい。即ち

$$(\Delta p)_{\text{turn}} = qe \frac{dB}{dt} \rho \cdot \frac{2\pi R}{\beta c} \quad (86)$$

を得る。これを $\Delta p = m_0 c \Delta(\beta r) = \frac{m_0 c^2}{\beta c} \Delta r = \frac{\Delta E}{\beta c}$ を使って1ターン当りの Energy Gain, $(\Delta E)_{\text{turn}}$ に直すと

$$(\Delta E)_{\text{turn}} = qe \frac{dB}{dt} \rho \cdot 2\pi R \quad (87)$$

が得られる。一方既に述べたようにこれを RF cavity の Peak Voltage: V と Synchronous Phase: φ_s で表わすと

$$(\Delta E)_{\text{turn}} = qeV \sin \varphi_s \quad (88)$$

となるから, (87), (88) 式より

$$\boxed{V \sin \varphi_s = 2\pi R \rho \frac{dB}{dt}} \quad (89)$$

なる関係式を導くことが出来る。単位系を MKS で考えると R, ρ を [m], $\frac{dB}{dt}$ を [T/sec] で表わした場合, V の単位は [Volt] となる。加速器では V の単位として [kV] を用いることが多いので, 次の公式を単位を含めて覚えておくと便利である。

$$\boxed{V \sin \varphi_s [\text{kV}] = 10^{-3} \left[2\pi R \rho \cdot \frac{dB}{dt} \right] [\text{m}^2 \cdot \text{T/sec}]} \quad (90)$$

[演習問題 24]

平均半径 54 m, 曲率半径 24.5 m の Synchrotron により, 陽子を 500 MeV から 12 GeV まで直線的に (即ち入射時から最高エネルギーまで $\frac{dB}{dt}$ を一定に保って) 加速することを考えた場合に必要な 1 ターン Gain を求めよ。又これを (Transition Energy の通過がないと仮定して) $\varphi_s = 30^\circ$ に保って実現出来たと仮定した場合の必要電圧を求めよ。) この問題を解くに当たっては (84) 式を用いて入射時及び加速終了時の運動量を

磁場強度に対応させる必要があるから (84) 式を実際の数値計算の用に供し得る形に変更しておこう。ここで (84) 式の両辺に光速 c を乗ずると

$$p \cdot c = qe c B \rho \quad (91)$$

式を得る。右辺の $qecB\rho$ の dimension を MKS 単位系で評価してみると [Coulomb \cdot m \cdot sec $^{-1}$ \cdot Tesla \cdot m] となるが Lorentz 力の式 $\vec{F} = e [\vec{v} \times \vec{B}]$ より [Coulomb \cdot m \cdot sec $^{-1}$ \cdot Tesla] = [N] が成り立つことがわかるからこれは [N \cdot m] = [Joule] の dimension となっている。従って $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb, $c = 3 \times 10^8$ m/sec なる数値を代入すると

$$p \cdot c [\text{Joule}] = 1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8 \cdot qB [\text{Tesla}] \cdot \rho [\text{m}] \quad (92)$$

が成り立つ。さてこの講義ノートの最初に述べたように 1 eV とは 1.6×10^{-19} Coulomb の電気素量を 1 V の電位差で加速した時に与えられるエネルギーであったから

$1 [\text{eV}] = 1.6 \times 10^{-19} [\text{Coulomb} \cdot \text{Volt}] = 1.6 \times 10^{-19} [\text{Joule}]$ (電場の強さを与える単位は [Volt/m] = [N/Coulomb] であったことを想起せよ。) なる関係が存在する。従って $p \cdot c [\text{eV}] = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} p \cdot c [\text{Joule}]$ となり (92) 式は

$$p \cdot c [\text{eV}] = 3 \times 10^8 qB [\text{Tesla}] \cdot \rho [\text{m}] \quad (93)$$

となる。 $p \cdot c$ の単位を高エネルギー加速器でよく使用される [GeV] に変換すると

$$\boxed{p \cdot c [\text{GeV}] = 0.3 qB [\text{Tesla}] \cdot \rho [\text{m}]} \quad (94)$$

が導かれる。この (94) 式は加速器の設計に於てよく使用されるのみでなく, 磁場を用いて運動量分析をする場合にも基本となる大事な式であるから, 単位系も含めて覚えておく と便利である。尚この式は

$$\boxed{p \cdot c [\text{MeV}] = 0.3 qB [\text{kG}] \cdot \rho [\text{cm}]} \quad (95)$$

とも表わされるので, 自分のよく使う Energy 範囲に応じて, (94), (95) 式の使い易い方のいずれか一方を記憶しておくことをお勧めする。さてここで出て来た $p \cdot c = m_0 r \beta c^2$ は Energy の dimension をもっているため, MeV, GeV といった単位で表わすことが出

来る。そこで p の単位として $p \cdot c$ が MeV (又は GeV) の dimension になるものを MeV/c (又は GeV/c) と表わすことが通常行われている。又(94)或いは(95)式により運動量と関係づけられる $B \cdot \rho$ なる量を Magnetic Rigidity と称し ビームの曲げられにくさを表わす量として、イオン光学ではしばしば用いられる。

さて本題に戻って、(89)式をみると粒子の charge state q が cancel out して無くなっていることに気付く。これは、guiding magnetic field による Lorentz 力と RF 加速 Gap の高周波電場がともに q に比例していることによる。従って加速に必要な 1 ターンゲインはリングのパラメータと $\frac{dB}{dt}$ のみに依存し、粒子の charge state によらない。これに反して前に述べた RF capture するに要する電圧 ((81)式から求められる) は q に依存するので、重イオンのような charge state を考慮せねばならない粒子を扱う場合には注意を要する。

V Lattice 設計

前節までで Synchrotron の設計に際して必要となる基本的な事柄を Survey したので、具体的なリングを設計する手順についてふれてみたいが、ここでは近年よく使用される Separated Function Type について考えることにする。

周回の条件

粒子に閉じた周回軌道を描かせるためにはリング一周にわたる Bending Magnet の偏向角の総和が 2π である必要がある。軌道長が L_i 、曲率半径 ρ_i の Bending Magnet の偏向角 θ_i は $\theta_i = \frac{L_i}{\rho_i}$ で与えられるから、リング中に m 種類の Bending Magnet が存在する場合、長さ L_i 、曲率半径 ρ_i の Bending Magnet の個数を N_i とすると

$$\sum_{i=1}^m \frac{L_i N_i}{\rho_i} = 2\pi \quad (96)$$

なる条件をみたしている必要がある。普通の場合、一種類の Bending Magnet が使用されることが多いから、その軌道長、曲率半径、及び個数をそれぞれ L_B 、 ρ 、 N_B で表わすと(96)式は

$$N_B \cdot L_B = 2\pi\rho \quad (97)$$

となる。曲率半径 ρ はこのリングで扱う最高エネルギーがわかり、Bending Magnet の最大磁場強度を実用上 reasonable な値に選ぶと決定されるから $N_B \cdot L_B$ が算出できる。 N_B は前に述べた 1 Superperiod 中の Bending Magnet の個数を n とすると、 $N_B = n \cdot N_s$ (N_s は Superperiodicity) で与えられる。この N_B の決定に際しては、(97)式から求められる L_B が実用上妥当な値になっていることを確認しておく必要がある。特に Bending Magnet を Straight で製作する場合には、図21に示したように

$$d = \frac{\rho}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_B}{2\rho} \right)^2} \right] \quad (98)$$

で与えられる d (これを sagitta と称する) だけ偏向方向 (通常は水平方向) の Aperture が半幅で余分に必要となる。(98)式は $L_B \ll \rho$ の条件では

$$d = \frac{L_B^2}{16\rho} \quad (99)$$

で表わされる。従って ρ の小さいリングを設計する際にはこの sagitta が tolerable な値におさまるように L_B の長さをおさえるか、又は sagitta の効かない curved aperture の Bending Magnet を用いる等の配慮が必要である。

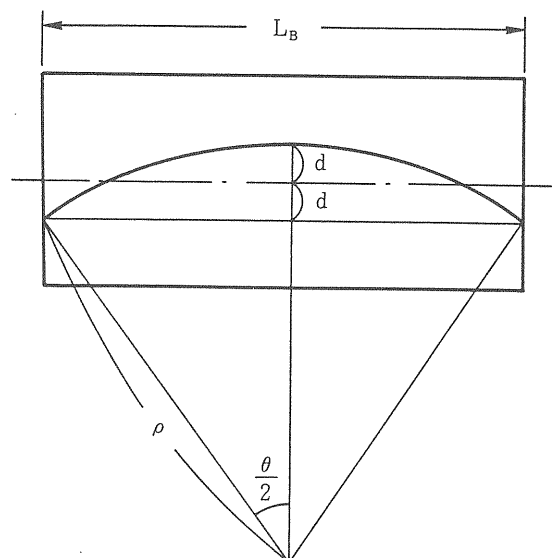


図21. Rectangular Bending Magnet の Sagitta

荷電粒子ビームの収束系

次に粒子の収束系を考える。簡単のために Singlet を考え、 Q_F と Q_D が等間隔 L で配置しており、その中間に Bending Magnet が存在する図22に示したような Lattice を想定する。(Synchrotron や Storage Ring のリングに於ては、規則正しい Magnet の配置を用いることが多く、これを結晶の格子構造になぞらえて、Lattice と呼ぶ。) 図22に示したような Lattice は FODO Lattice と呼ばれ、Simple で計算上の取り扱いが簡単なのと、他の doublet や triplet に比して、周長に占める Bending Magnet の比を大きくとれるので、同一周長で最高エネルギーを高くとれるという利点があり High Energy Machine ではよく使用される。そこでこの Lattice について簡単な近以計算を行い Twiss Parameter と Dispersion Function の振る舞いを調べることを試みる。 ρ が充分大きい場合を考え、Bending Magnet 一台当りの偏向角 θ が小さい ($\theta \ll 1$) と仮定して (36) で θ の一次までの項を考える。更に Q_F 、 Q_D について thin lens 近似を行うと図22の点 P_1 から P_2 までの水平方向の Transfer Matrix M_0 は

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\delta}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho\theta & \frac{\rho\theta^2}{2} \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\delta}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (100)$$

と表わすことができる。ここで $\delta = \frac{|G| l_Q}{B \rho}$ (G は Q の Field Gradient, l_Q は Q の長さ, $B \rho$ は扱うビームの Magnetic Rigidity をそれぞれ表わす。

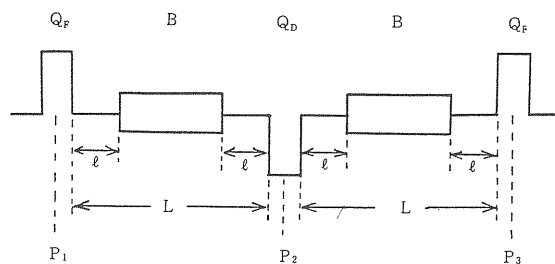


図22. FODO Cell

[演習問題 25]

$\theta \ll 1$, $|K| \cdot l_Q = \frac{|G| l_Q}{B \rho} \ll 1$, $\rho \gg 1$ なる条件が成り立つと仮定し、(34)~(37) 式に近似式を用いて、(100)が導かれることを示せ。

(100)式の右辺の Matrix の乗算を実行すると

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta}{2}(\rho\theta + 2l) & \rho\theta + 2l \\ -\frac{\delta^2}{4}(\rho\theta + 2l) & 1 + \frac{\delta}{2}(\rho\theta + 2l) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\theta + \frac{\rho\theta^2}{2} \\ \theta + \frac{\delta}{2}\left(l\theta + \frac{\rho\theta^2}{2}\right) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta L}{2} & L & \frac{L\theta}{2} \\ -\frac{\delta^2 L}{4} & 1 + \frac{\delta L}{2} & \theta\left(1 + \frac{\delta L}{4}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (101)$$

が得られる (ここで $\rho\theta + 2l = L$ なる関係を用いた)。さて図22の点 P_2 から P_3 までの配置は P_1 から P_2 までに対して、 P_2 に関して鏡映対称な構造になっている。ここで互いに鏡映対称な関係になっているイオン光学系の Transfer Matrices 間の関係式を導こう。図23(a)のように中心の B 点に関して鏡映対称なイオン光学系 $e_1, e_2, \dots, e_n, e_n, \dots, e_2, e_1$ を考える。点 A から B に至る Matrix を M とし、A, B 点に於る変位及びその傾きを表わすベクトルをそれぞれ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \end{pmatrix}$ とすると (表記を簡単にするため 2次元で示す。)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (102)$$

なる関係が存在する。ここで、B 点から A 点へ粒子が逆方向に進む場合 (磁場の極性は反転しているとする) の Transfer Matrix を M_B で表わすと、粒子の進行方向にとった座標 s の向きが逆転しているから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1' \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} x_n \\ -x_n' \end{pmatrix} \quad (103)$$

が成り立つ (図23(b))。さて点BからCに至るイオン光学系は e_n, \dots, e_2, e_1 であるから この Transfer Matrix, M_R は M_B に等しい。

([演習問題 26])

この事実を粒子の進行方向を逆転させた場合に働く Lorentz 力の向きを考えることによって示せ。

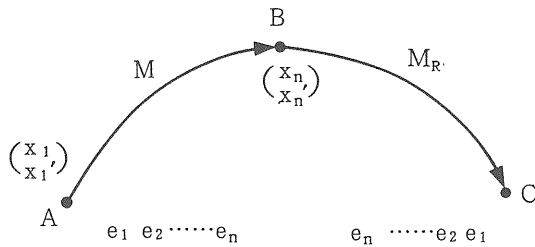
従って $\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1' \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_n \\ -x_n' \end{pmatrix}$ の関係式は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1' \end{pmatrix} = M_R \begin{pmatrix} x_n \\ -x_n' \end{pmatrix} \quad (104)$$

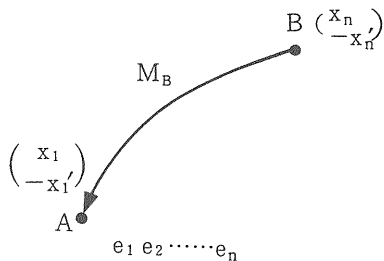
と表わされる。ここで $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ なる Matrix を定義すると $\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ -x_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \end{pmatrix}$ が成り立つから (104) 式より

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_R A \begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \end{pmatrix} \quad (105)$$

が得られる。これと (102) を用いると



(a) 鏡映対称性をもつイオン光学系



(b) 点BからAへ逆進する場合
(磁場の Polarity は(a)の場合と反転している)

図 23

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_R A M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (106)$$

が導けるがこれは任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ に対して成り立つから

$$A = M_R A M \quad (107)$$

が得られる。容易にわかるように $A^{-1} = A$ であるから, (107) は

$$M_R = A M^{-1} A \quad (108)$$

と変形できる。以上の議論は3次元 Transfer Matrix に対しても同様に成り立つ。そこで

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (109)$$

と表わすと

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} e & -b & bf-ce \\ -d & a & cd-af \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (110)$$

であるから, ([演習問題 27] $\det(M) = 1$ を用いて (110) を示せ。) M_R は次のように表わせることがわかる。

$$M_R = \begin{pmatrix} e & b & bf-ce \\ d & a & af-cd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (111)$$

従って図23(a)の点AからCに至る全系の Transfer Matrix M_T は

$$M_T = M_R \cdot M = \begin{pmatrix} ae+bd, & 2be & 2bf \\ 2ad & ae+bd & 2af \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (112)$$

と書ける。⁷⁾

以上の結果を図22の場合に適用すると, 点 P_1 から P_3 に至る全系 (これを unit cell 又は cell と称する) の Transfer Matrix M_T^F は

$$M_T^F = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta^2 L^2}{2} & , & 2L + \delta L^2 & , \\ -\frac{\delta^2 L}{2} \left(1 - \frac{\delta L}{2}\right) & , & 1 - \frac{\delta^2 L^2}{2} & , \\ 0 & & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{c} 2L\theta \left(1 + \frac{\delta L}{4}\right) \\ 2\theta \left(1 - \frac{\delta L}{2}\right) \left(1 + \frac{\delta L}{4}\right) \\ 1 \end{array} \right\} \quad (113)$$

となる。図22の点P₁からP₃の配置がくり返す Lattice 構造を考えると点P₁とP₃に周期性の条件が成り立ち、この点での Twiss Parameter を α_F , β_F , r_F , 点P₁からP₃のベータatron振動の位相の進みを μ とすると(15)式より、

$$\left. \begin{array}{l} \cos \mu + \alpha_F \sin \mu = 1 - \frac{\delta^2 L^2}{2} \\ \beta_F \sin \mu = 2L + \delta L^2 \\ r_F \sin \mu = \frac{\delta^2 L}{2} \left(1 - \frac{\delta L}{2}\right) \\ \cos \mu - \alpha_F \sin \mu = 1 - \frac{\delta^2 L^2}{2} \end{array} \right\} \quad (114)$$

を得る。これより次の関係式を容易に導くことができる。

$$\boxed{\sin \frac{\mu}{2} = \frac{\delta L}{2}} \quad (115)$$

$$\beta_F = 2L \frac{1 + \sin \frac{\mu}{2}}{\sin \mu} \quad (116)$$

$$\alpha_F = 0 \quad (117)$$

又、点P₂から次のQ_Dの中心までの Transfer Matrix M_T^Dは図22より(113)式において δ を $-\delta$ におきかえれば得られることが容易にわかるから次式が得られる。

$$M_T^D = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta^2 L^2}{2} & , & 2L - \delta L^2 & , \\ -\frac{\delta^2 L}{2} \left(1 + \frac{\delta L}{2}\right) & , & 1 - \frac{\delta^2 L^2}{2} & , \\ 0 & & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{c} 2L\theta \left(1 - \frac{\delta L}{4}\right) \\ 2\theta \left(1 + \frac{\delta L}{2}\right) \left(1 - \frac{\delta L}{4}\right) \\ 1 \end{array} \right\} \quad (118)$$

これから β_D , α_D の場合と同様にして

$$\boxed{\beta_D = 2L \frac{1 - \sin \frac{\mu}{2}}{\sin \mu}} \quad (119)$$

$$\alpha_D = 0 \quad (120)$$

が導ける。(この場合のベータatron振動の Phase Advance がM_T^Fの場合と同一であることは自明であり、又(118)からも(115)を導くことができる。)さて(117)及び(120)の $\alpha_F = \alpha_D = 0$ はイオン光学系が点P₁及びP₂に関して鏡映対称になっていることから直観的にも自明である。この鏡映対称性から点P₁, P₂における dispersion function 及びそのsに関する微係数をそれぞれD_F, D_F', D_D, D_D'と表わすことにするとD_F' = D_D' = 0がいえ。そこで(101)式を用いると

$$\begin{pmatrix} D_C \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta L}{2} & , & L & , \\ -\frac{\delta^2 L}{4} & , & 1 + \frac{\delta L}{2} & , \\ 0 & & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{L\theta}{2} \\ \theta \left(1 + \frac{\delta L}{4}\right) \\ 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} D_F \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (121)$$

が成り立つ。これをD_F, D_Dについて解くと

$$D_F = L \theta \frac{1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\mu}{2}}{\sin^2 \frac{\mu}{2}} \quad (122)$$

$$D_D = L \theta \frac{1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\mu}{2}}{\sin^2 \frac{\mu}{2}} \quad (123)$$

但しここで(115)の関係式を用いた。垂直方向については $\theta = 0$ (ここでは通常の水平方向の Bending Magnet のみが存在している場合を想定している。) であるから, dispersion は存在しない。又, β -function については Q_F, Q_D の focus, defocus の役割が入れかわるだけであるから (116) 及び (119) において, F, D の suffix を入れかえると垂直方向の β -function の表現を得る。さて (115) 式によれば $\sin \frac{\mu}{2}$ は $\frac{\delta L}{2}$ で与えられる。 $\delta = \frac{|G| l_Q}{B \rho}$ は Q Magnet の焦点距離 f の逆数であるから, これは $\frac{L}{2f}$ と

表わされる。従って $|\sin \frac{\mu}{2}| \leq 1$ から $f \geq \frac{L}{2}$ が得られるから, 上に述べたような FODO Cell で安定な解が得られるためには Q Magnet の焦点距離は Cell Length ($\sim 2L$ と考えてよい) の $\frac{1}{4}$ 以上でなければならない。これより強い Focusing Strength の Q Magnet を用いるといわゆる over focusing の状態になり光学系は安定でなくなる。(116) (119) より β_F, β_D を cell length で normalize した値は cell 当りの phase advance μ のみに依存していることがわかる。同様に (122), (123) より D_F, D_D を cell length と bending angle の積で normalize した量も μ のみの函数となる (図24)。ここで Magnet の Aperture を小さく抑えるために, β -function が cell 中で最大となる β_F を minimize することを考える。(116)式の右辺を μ に関して微分したものを0とおいて, $\sin^3 \frac{\mu}{2} + 2 \sin^2 \frac{\mu}{2} - 1 = 0$ が導かれるがこれを解くと $\sin \frac{\mu}{2} = 0.618$ が得られるから $\mu = 76.3^\circ$ で β_F が最小となることがわかる。1 cell 当りの Phase Advance を 90° ちょうどにとると Cell 数は偶数にとることが多いから, Integer, 又は Half Integer にひっかかるので, μ としては $70^\circ \sim 110^\circ$ 位の範囲内で 90° から若干離れた値を採用することが多い。(図24からこのあたりでの β_F, β_D の μ dependence は小さいので, β_F minimum の点から多少離れても問

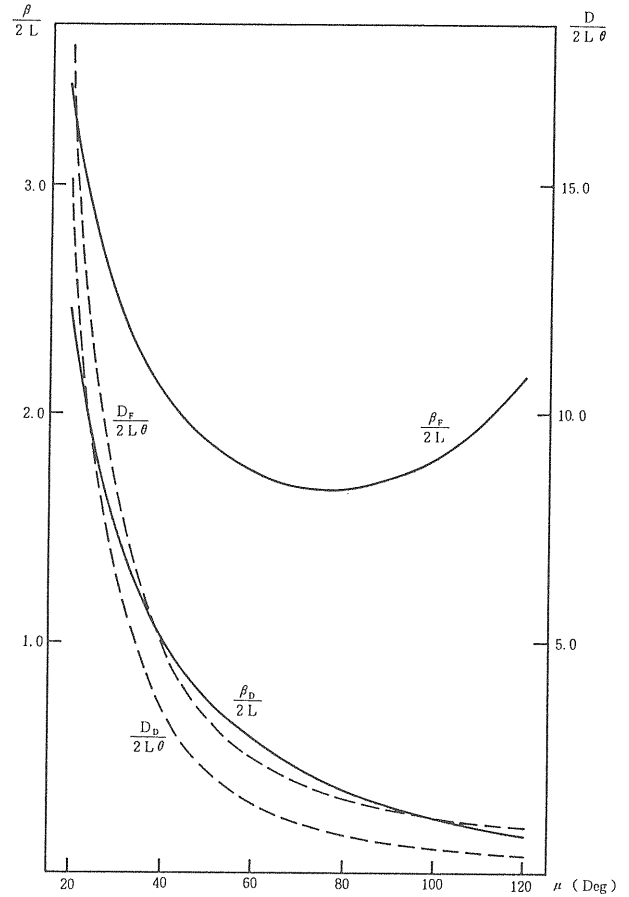


図24. FODO Cell の Phase Advance と Normalized β and Dispersion Function の関係

題がないことがわかる。)

Unit cell 中の 1 点 ($s = s_1$) における Twiss Parameter α_1, β_1, r_1 がわかると他の点 ($s = s_2$) での Twiss Parameter α_2, β_2, r_2 は $s = s_1$ から $s = s_2$ に至る 2 次元 Transfer Matrix を $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} m_{22} + m_{12} m_{21} \\ -2 m_{11} m_{12} \\ -2 m_{21} m_{22} \\ -m_{11} m_{21} & -m_{12} m_{22} \\ m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ r_1 \end{pmatrix} \quad (124)$$

で表わされるから cell 中の任意の点の Twiss Parameter が Transfer Matrix の element を用いて算出できる。

[演習問題 28]

$s = s_1$ から s_2 に至る Transfer Matrix が(10)式の右辺のようにかけることを用いて, (124)式が成り立つことを示せ。又, s_1 から s_2 までの Phase Advance $\Delta\mu$ は

$$\tan \Delta\mu = \frac{m_{12}}{\beta_1 m_{11} - \alpha_1 m_{12}} \quad (125)$$

で与えられることを導け。

また, 点 s_1, s_2 における dispersion function 及びその微係数の間には

$$\begin{pmatrix} D(s_2) \\ D'(s_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(s_1) \\ D'(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (126)$$

なる関係が存在する (但し, 右辺の Matrix は点 s_1 から s_2 に至る 3次元 Transfer Matrix) から, これを用いて cell 中の任意の点の dispersion function 及びその微係数も算出できる。

[演習問題 29]

図25に示したような FODO lattice に於て, 1 cell 当りの Phase Advance を 95.6° に選んだ場合に要求される Q Magnet の焦点距離 ($\frac{1}{\rho}$) を(115)式より算出せよ。又(116), (119), (122) (123) を用いて, Q_F, Q_D の中心での β_x, β_z, D を計算せよ。

以上の結果を定性的にまとめると β_x, D は Q_F で最大, Q_D で最小となり, β_z はこの逆となる。又鏡映対称となる点は Q_F, Q_D の中心のみであるから α_x, α_z が 0 となるのはこれらの点のみであり, Q_F と Q_D の中間では α_x, α_z は 0 ではない有限の値をとることになり, (21)式から Transverse Phase Space における楕円は正立しない。従って FODO cell の Straight Section に於ては Beam の Emittance Ellipse は正立しないことになるが, これは入射・取り出し時の Beam の Handling を多少複雑にする。従ってこの性質は

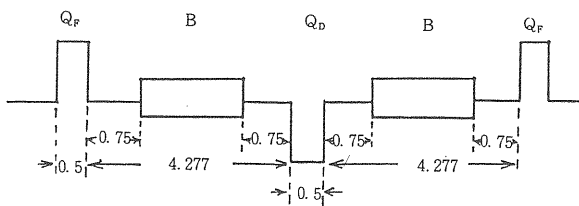


図 25. FODO Lattice の具体例

FODO cell の有する 1つの制約といえる。

さて上では FODO Lattice を例にとり Twiss Parameters 及び Dispersion Function を算出したが, ここでこれを一般化した式を与えておこう。Unit cell 中の任意の点 s から始まる 1 cell 分の Transfer Matrix, M_T を $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と表わすと, 2×2 Matrix についてはこれが (15) の右辺の Matrix の形になることを用いて,

$$\cos \mu = \frac{t_{11} + t_{22}}{2} \quad (127)$$

$$\beta \sin \mu = t_{12} \quad (128)$$

$$\alpha \sin \mu = \frac{t_{11} - t_{22}}{2} \quad (129)$$

が導けるからこれより s における Twiss Parameter を求めることができる。これから cell 中の他の点での値を求める Process は FODO Cell の場合に既に一般化して与えられている ((124)式)。次に Dispersion Function $D(s)$ 及びその微係数 $D'(s)$ はその周期性を考慮すると,

$$\begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (130)$$

が成り立つから, M_T の固有値 1 の固有ベクトルを求めて,

$$D(s) = \frac{t_{13} + t_{12} \cdot t_{23} - t_{13} \cdot t_{22}}{2 - (t_{11} + t_{22})} \quad (131)$$

$$D'(s) = \frac{t_{23} + t_{13} \cdot t_{21} - t_{11} \cdot t_{23}}{2 - (t_{11} + t_{22})} \quad (132)$$

を得る。 $D(s), D'(s)$ から (126)式を用いて cell 中の他の点へつないでいく手法は先に FODO cell に対して述べた通りである。

以上のような方法により Twiss Parameters 及び Dispersion Function を計算することができるが, 現在ではこうしたパラメータの算出を行う計算機コードが多数開発されており, 実際の Lattice 設計を行うにあたってはこうしたコードを用いるのが効率が良い。主なものを挙げると SYNCH⁸⁾, MAGIC⁹⁾, MAD¹⁰⁾

等が存在する。この中、前の2つは1st OrderのFormalismに基づいており、MADは2nd Orderの扱いも可能である。巻末の参考文献にこれらのコードの使用法を記述したManualを掲げておくのでその使用法を修得しておくとう便利である。

長い直線部の作成

以上で荷電粒子ビームの周回軌道を形成し、そのまわりに安定な振動解をもつようにすることができるが、図22に示したようなunit cellのみをつないだだけでは、シンクロトロンとして動作させるのには不十分で、ビームの入射、取り出しや高周波加速を行う為の装置を挿入する為の長い直線部が必要となる。こうした長い直線部を実現する方法として一番簡単なのはFODO cellのようなunit cell中のBending Magnetを除いてdrift spaceにおきかえる手法が考えられる(この方法はMissing Magnetと呼ばれる)。この場合作りたいLong Straight Sectionの数： N_s に応じて $\frac{1}{N_s}$ 周毎に通常のunit cell(normal cellと称す)の間に上に述べたBending Magnetをdrift spaceでおきかえたcellを挿入すればよいことになる。大きなリングを考えた場合でBending Magnetの曲率半径が充分大きく、Bending MagnetのFocusingの効果が無視し得るような場合には、Missing Magnet Structureを導入しても、Twiss Parameterの規制性は失われない。これに対して、FODO cellの場合、(122)(123)で与えられる Q_F 、 Q_D のcenterに於るDispersion FunctionsがBending Magnetの偏向角 θ に比例していることからわかるようにMissing MagnetによってDispersion Functionの規則性は失われてしまう。即ちBending Magnetを取り除くことはDispersion Functionに対するperturbationと考えることができる。このDispersion Functionに対するperturbationのeffectはBatatron振動の位相が π だけ離れた位置に存在する2つのBending Magnetを除くことによりその外側には影響を与えないようにすることができる。これらの場合、残りのBending Magnetのみの個数 N_B が周回の条件(97)を満たしている必要があり、平衡軌道の幾何学的形状はRegular Cellのみをつないだ場合と若干異なった形になることに注意を要する。

さてFODO cellにMissing Magnetの手法を適用してLong Straight Sectionを実現しているLatticeの1例として、現在東大・核研の将来計画として、KEKと共同で検討が進められている大型ハドロン計画(Japanese Hadron Projectを略してJHPと記す)のRing I-Aを挙げておこう。¹¹⁾但し、JHP I-A

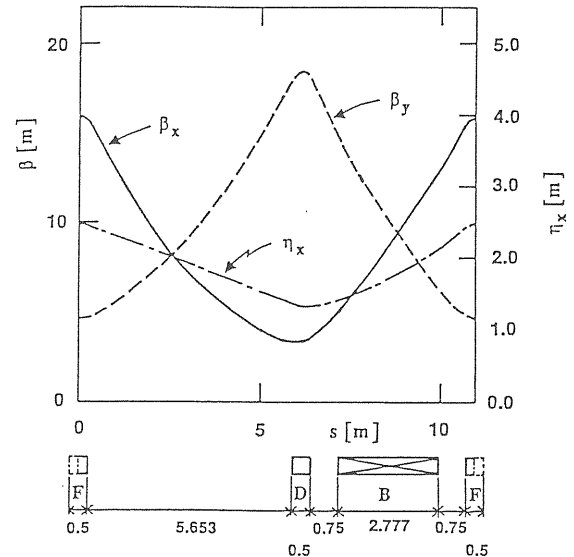


図26. JHP リング I-A の1 cell の β -function と Dispersion Function (参考文献11) から借用)

リングでは1 GeV、200 μ Aも大強度ビームのHandlingを目指しているので、全てのcellに於て、一方のBending MagnetをDrift Spaceにおきかえて、Superperiodが1 cellと一致するようなLatticeとし、Superperiodicityを16と高くしている点、通常のHigh Energy Machineの大きなリングの場合とは異なっている。図26にこのLatticeの1 cell中の β -functionsとdispersion functionの様子を示す。この例では水平、垂直方向のベータatron振動数を4.25及び3.25に選んでおり、Long Straight Sectionも単なるMissing Magnetより少し長くするなど先に演習問題29で与えた条件とは若干異なるが、(116)～(123)の近似式でも β -functionやDispersion Functionのglobalな特徴はつかむことができることがわかる。Lattice設計に当っては、詳細な数値計算を実行するに先立って、簡単な近似式を用いて、Latticeの振る舞いの特徴をつかんでおくと、効率的に作業が進められることが多い。

Matched Insertion

上に述べた方法は簡便ではあるが、High Energy ColliderのようにLuminosityをあげるためにIntersection Regionで β -functionの値を非常に小さくしたり、Dispersion Functionを0にしたいといった要請にはこたえることができない。こうした目的のためには、Matched Insertionと呼ばれる次のような方法が用いられる。まずRegular CellのみでRingを構成し、次に必要とされるLong Straight Sectionの

数： N_s に応じてこのリングを N_s に分割する。この分割点（図27の点Aに相当する）での Twiss Parameters を $\beta_x^0, \alpha_x^0, (r_x^0), \beta_z^0, \alpha_z^0, (r_z^0)$, Dispersion Function 及びその微係数を D^0, D'^0 とするとき図27の点AからCに至るイオン光学系を用いて、点Cでこれらの値が Lattice 設計上要求されている値 $\beta_x^*, \alpha_x^*, (r_x^*), \beta_z^*, \alpha_z^*, (r_z^*), D^*, D'^*$ となる条件を求めると点AからCに至る系をCに関して鏡映対称におり返したものをC-A' とするとA'点では自動的にもとのリングのパラメータと Matching がとれていることになる。（この際鏡映対称性から $\alpha_x^* = \alpha_z^* = 0, D'^* = 0$ となる。）点AからCに至るイオン光学系の水平、垂直方向のベータatron振動の位相の進みを $\Delta\mu_x, \Delta\mu_z$ とし、もとの regular cell のみからなるリングのチューンを (ν_x, ν_z) とするとき、 N_s 箇所A-C-A'なる

系を挿入したリングは動作点 $\left(\nu_x + \frac{N_s \Delta\mu_x}{\pi}, \nu_z + \frac{N_s \Delta\mu_z}{\pi} \right)$ のリングとなっており、点Cでは要求され

るパラメータの特徴をみだしていることになる。この例では点Bにおいて、 $D=D'=0$ （この条件を満たす光学系を Doubly Achromatic と称する）になっているのでAからBに至る系を Dispersion Suppressor と称する。 $\beta_x, \alpha_x, \beta_z, \alpha_z$ の Matching は(124)の関係からQ Magnet の Field Gradient を adjust することにより実現する。この際 Matching の条件として課した constraint の数と同じだけの Free Parameter が必要となることはいうまでもない。

さて図27の例では点Cに関して鏡映対称になって

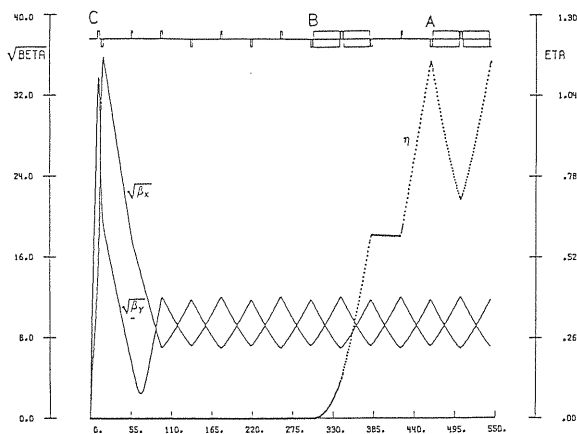


図27. Dispersion Suppressor を用いた low- β (Matched) Insertion の例 (E. Keil, "Single-Particle Dynamics-Linear Machine Lattices", CERN 77-13 (1977) pp.22-36 より借用)

いるがこの場合、Cに最も近い Magnet までの距離を s とするとこの点での β -function $\beta(s)$ は点Cに於る β -function を β^* として、

$$\beta(s) = \beta^* + \frac{s^2}{\beta^*} \quad (133)$$

と表わされる。（〔演習問題 30〕 この drift space の Matrix Element が $m_{11} = 1, m_{12} = s, m_{21} = 0, m_{22} = 1$ となることを用いて(124)式からこの式を導け。）従って low β insertion により β^* を小さな値にする場合には近接する Q-Magnet までの drift space の距離が長いとこの Magnet の入口での β -function の値が非常に大きな値となり、Q Magnet の Aperture が大きくなる。Collision Point 等で low β section を設計するに当たっては、(133)式の関係念頭において、要求される β^* の値と自由空間の長さを両サイドの Q Magnet が製作可能な範囲内において必要とされる low β を実現するように注意を払う必要がある。なおこの(133)式は鏡映対称点を含む drift space における β -function の振る舞いを簡単に知ることができるので覚えておくと便利である。

Collins Insertion

T. L. Collins は図28に示したような簡単な Insertion により、Long Straight Section が作成できることを示した。¹²⁾ Insertion を行う点に於るリングの Twiss Parameter を α, β, r とするとき、

$$s_1 = \frac{1}{r} \quad (134)$$

$$s_2 = \frac{\alpha^2}{r} \quad (135)$$

に選び、Q Magnet の Focusing Strength $\delta = \frac{Gl}{B\rho}$ を $-\frac{\alpha}{r}$ に選ぶとこの Insertion によるベータatron振動

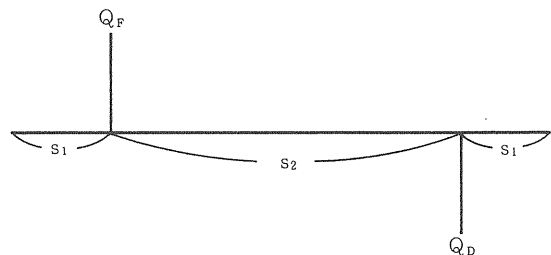


図28. Collins Insertion

の位相の進みは $\frac{\pi}{2}$ となり、この Section の両端で、 α ,

β の Matching がとれている。〔演習問題 31〕 この Insertion Section の Transfer Matrix の積を求めて (134) (135) 及び $\delta = -\frac{\alpha}{r}$ を用いるとこれが

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -r & \alpha \end{pmatrix}$ となることを示して、この Insertion により Twiss Parameter が変化しないことを (124) 式を用いて確認せよ。又この Insertion の Phase Advance が $\pi/2$ になることも確かめよ。この Collins Insertion の Matching 条件が水平、垂直両方向とも

にみたされるためには、Insertion Position の Twiss Parameters が $\alpha_x = -\alpha_z$, $r_x = r_z$ (従って $\beta_x = \beta_z$) を満している必要がある。この条件は FODO cell では Q_F と Q_D の中点で満されている。なおこの Collins Insertion は Bending Magnet を含んでいないので、Doubly Achromatic な点で Insertion を行うと Dispersion Function の Matching 条件は自動的に満たされるが、有限の Dispersion Function 又はその微係数を有する点で Insertion を行うと Dispersion の Matching は満たされないので注意を要する。

Doubly Achromatic な条件

ここでは前節でしばしば現れた Doubly Achromatic な条件を満すためにイオン光学系に要求される条件を考えてみよう。簡単のために前に図23(a)に示したような鏡映対称な光学系を考える。図の点AからCに至る系の Transfer Matrix は (112)式で与えられるから、点AからBに至る系の Transfer Matrix を (109) 式のように $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表わした場合、

$$f = 0 \quad (136)$$

なる条件が満たされていると、点AからCに至る全系の Transfer Matrix の 1 行 3 列及び 2 行 3 列成分が共に 0 となり、点AとCの外側の領域で Doubly Achromatic になることがわかる。⁷⁾

〔演習問題 32〕

図29に示したようなイオン光学系が Doubly Achromatic となるための条件は $\sqrt{K} \tan\left(\sqrt{K} \cdot \frac{L_Q}{2}\right) =$

$$\frac{1}{\rho \tan \frac{\theta}{2} + L_1}$$

で与えられることを示せ ($K = \frac{G}{B\rho}$)。

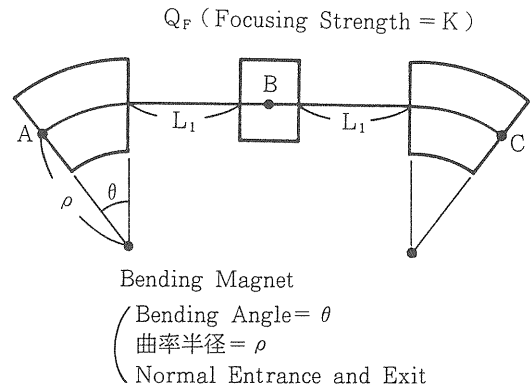


図 29. 鏡映対称なイオン光学系の例

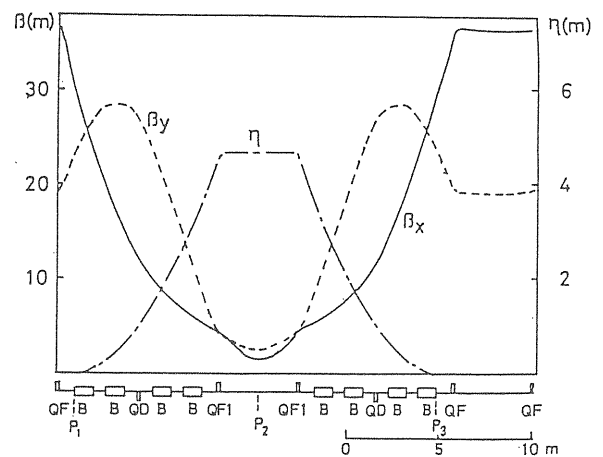


図 30. TARN II クーラーリングモードの β -function と Dispersion Function ($\nu_x = 1.75$, $\nu_z = 1.25$) 点 P_2 に関する鏡映対称性を利用して、点 P_1 , P_3 の外側で Doubly Achromatic になる Optics となっている。

先に図16に示した東大・核研の TARN II に於ては、通常のシンクロトロン加速を行う際は Superperiodicity 6 で、すべての cell が同一に励起される (Synchrotron Mode) が、電子ビーム冷却を行う際には、図の点 P_1 から P_2 に至る Transfer Matrix に (136) の条件を課すことによって、Superperiodicity は 3 として、1 つおきの Long Straight Section を Doubly Achromatic にする Structure (Cooler Ring Mode) を実現している。¹³⁾ 図30にこの場合の β -function と Dispersion function を 1/3 周にわたって示した。

次に図31に示したような中心の点Bに関して 180° の回転対称性をもつイオン光学系を考える。図32から容易にわかるように点Bを原点にとった座標系において、原点のまわりの 180° の回転を行うと (x, y) なる座標は $(-x, -y)$ に変換される。従って、平衡軌道

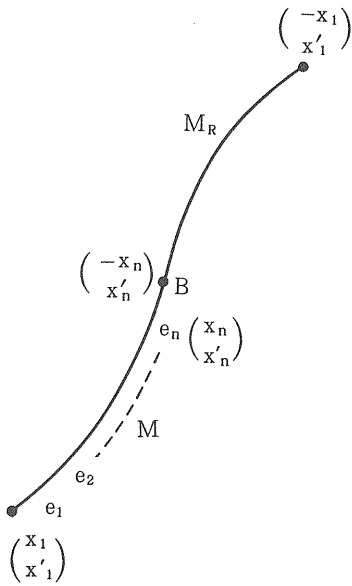


図 31. 点Bに関する180°回転対称性を有するイオン光学系

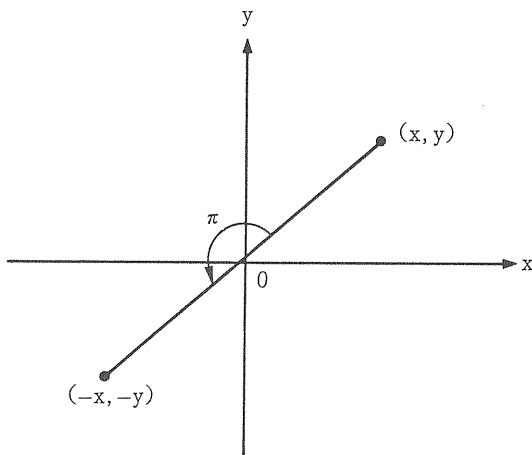


図 32. 原点のまわりの180°回転
点(x, y)は点(-x, -y)に移る。

からの変位 x_i もこの変換によって $-x_i$ に変換される。又位置座標が $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$ なる変換を受けるとビームの平衡軌道に沿う変位 s も $s \rightarrow -s$ なる変換を受ける。従って $x_i' = \frac{dx_i}{ds}$ はこの変換によって変化を受けない。従って点AからBの Matrix 表示が(102)式のように書けるとすると、点BからCに至る系の Transfer Matrix を M_R とすると

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_R \begin{pmatrix} -x_n \\ x_n' \end{pmatrix} \quad (137)$$

と書ける。ここで $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なる Matrix を定義すると、 $\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -x_n \\ x_n' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \end{pmatrix}$ が成り立つことから

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_R B \begin{pmatrix} x_n \\ x_n' \end{pmatrix} \quad (138)$$

が得られ、これと(102)式から

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M_R B M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (139)$$

を得る。これが任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ に対して成り立つことと $B^{-1} = B$ を用いると

$$M_R = B M^{-1} B \quad (140)$$

と表わせる。従ってMを(109)と同じく $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と

表わしたとすると

$$M_R = \begin{pmatrix} e & b & ce - bf \\ d & a & cd - af \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (141)$$

となり、点AからCに至る全系を記述する Transfer Matrix M_T は

$$M_T = M_R M = \begin{pmatrix} ae + bd, & 2be & 2ce \\ 2ad & ae + bd, & 2cd \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (142)$$

で与えられる。これをみると、点AからCに至る系を Doubly Achromatic にするための条件は

$$c = 0 \quad (143)$$

で満たされることがわかる。このようなある点に関して180°の回転対称性をもつようなイオン光学系はビーム輸送系においてしばしば用いられる。

(〔演習問題 33〕)

図33に示すような点Bに関して180°回転対称性を有するイオン光学系が Doubly Achromatic となる条件は

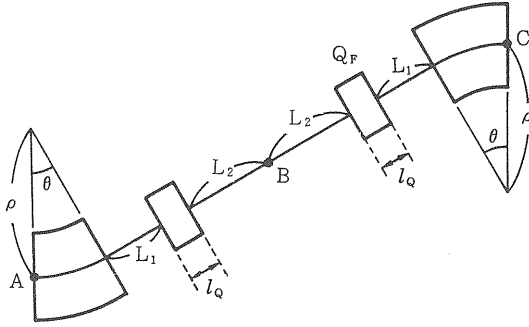


図 33. 中心点Bに関して180°回転対称なイオン光学系〇具体例

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\tan(\sqrt{K} l_Q) + \sqrt{K} L_2}{\sqrt{K} L_2 \tan(\sqrt{K} l_Q) - 1} = \rho \tan \frac{\theta}{2} + L_1$$

で与えられることを示せ。

誤差磁場の影響

以上の議論は全て理想的な誤差のない磁場の存在を仮定していた。ここで誤差磁場の効果について考える。周回軌道に ΔB なる誤差磁場の存在するとき、荷電粒子の運動を記述する方程式は

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + K(s)y = \frac{\Delta B}{B\rho} \quad (144)$$

と書ける。(144)の右辺は周期C (Cはリングの周長)

の周期性をもつから、 $F(s) = \frac{\Delta B}{B\rho}$ とおき、(39),

(40)の変数変換を行って得られる

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = \nu^2 \beta^{3/2} F(s) \quad (145)$$

の周期 2π の解を求めると (41) 式の場合と同様にして、

$$\eta(\phi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\psi) \cos \nu(\pi + \phi - \psi) d\psi \quad (146)$$

を得る。(但し、 $f(\phi) = \beta^{3/2} F(s)$) これは独立変数を s で表わすと次のようになる。

$$\tilde{\eta}(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+C} \sqrt{\beta(\tau)} \cos \{ \nu \pi + \mu(s) - \mu(\tau) \} \frac{\Delta B}{B\rho} \cdot d\tau \quad (147)$$

(147) 式は (144) の周期Cの解であるから、 $\frac{\Delta B}{B\rho}$ なる誤差磁場が存在する場合の Closed Orbit を与えていることがわかる。これから整数の ν 値に対しては磁場の誤差の影響がベータトロン振動と共鳴し、Closed Orbit のずれが発散してしまうことがわかる。 $f(\phi) = \beta^{3/2} F(s)$ は $F(s)$ がCの周期をもつことから、 ϕ について周期 2π の周期函数となるから

$$f(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\phi} \quad (148)$$

と Fourier 展開できる。ここで

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \quad (149)$$

である。従って (145) の周期 2π の解は

$$\eta(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\nu^2 f_k}{\nu^2 - k^2} e^{ik\phi} \quad (150)$$

となる。これから $k = \nu$ の近辺での Resonance 特性がみとれる。従って Closed Orbit のずれに対する誤差磁場の寄与を小さく抑えるためには、 ν 値に近い整数値を k_0 とする時、その k_0 次の harmonic component を小さくするような配置にすればよい。製作された電磁石の磁場測定データに基づき、Magnet の配置を決める際にはこのことに留意する必要がある。

さて周上のN箇所の Localize した位置 $(s_i - \frac{l_i}{2}, s_i + \frac{l_i}{2})$ に $\frac{\Delta B_i}{B\rho}$ なる誤差磁場が存在する場合を考えると (147) 式より、Closed Orbit のずれは

$$\tilde{\eta}(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \sum_{i=1}^N \sqrt{\beta_i} \cos \{ \nu \pi + \mu(s) - \mu_i \} \frac{\Delta B_i l_i}{B\rho} \quad (151)$$

で与えられる。(但し、この誤差磁場の長さ l_i はベータトロン振動の波長に比して充分短かいと考えて、この間で β -function 及び位相は一定と考えて $\beta_i = \beta(s_i)$, $\mu_i = \mu(s_i)$ と表わした。) 一般にこれらN個の誤差磁場は correlation を持たないのが普通であるから root mean square を求めると

$$\langle \tilde{\eta}(s) \rangle = \frac{\sqrt{\beta(s) \langle \beta \rangle}}{2\sqrt{2} \sin \pi \nu} \sqrt{N} \left(\frac{\Delta B \cdot l}{B\rho} \right)_{rms} \quad (152)$$

と表わせる。但し、 $\langle \beta \rangle$ はリング一周にわたっての β -function の平均で $\frac{R}{L}$ でおきかえることができる。さてこのような Closed Orbit のずれを与える要因としては表 2 にあげたものが考えられる。¹⁴⁾ (Gradient Magnet の Displacement や Bending Magnet の Length Error は直接的には磁場の誤差ではないが、空間のある特定の位置に存在すべき理想的な磁場に対して差異があると考えて (152) 式を同様に適用することができる。

磁場勾配の誤差

リングの Focusing Strength が理想的な値 $K_0(s)$ から $k(s)$ なる微少な誤差を有する場合を考えると、(7) 式の Hill's Equation は

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + [K_0(s) + k(s)] y = 0 \quad (153)$$

と書ける。今 $k = 0$ の理想的な場合の ν 値を ν_0 、点 s における Twiss Parameters を $\alpha(s)$ 、 $\beta(s)$ 、 $\gamma(s)$ とすると、この点を始点とするリング一周の Transfer Matrix $M_0(s)$ は

$$M_0(s) = \begin{bmatrix} \cos \mu_0 + \alpha(s) \sin \mu_0, & \beta(s) \sin \mu_0 \\ -\gamma(s) \sin \mu_0, & \cos \mu_0 - \alpha(s) \sin \mu_0 \end{bmatrix} \quad (154)$$

(但し、 $\mu_0 = 2\pi\nu_0$) と表わせる。さて $[s_1, s_1 + ds_1]$ なる区間に non-zero の $k(s)$ が存在する場合、この部分の Transfer Matrix, m は

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -[K_0(s_1) + k(s_1)] ds_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (155)$$

と表わされる。1 周のうち、この区間を除いた残りの部分の Matrix を M_R と表わすとこの場合 s_1 を始点とする一周の Transfer Matrix $M(s_1)$ は $M(s_1) = M_R \cdot m$ とかける。一方 $M_0(s_1)$ は (155) 式で $k(s_1) = 0$ とした場合の Matrix を m_0 、即ち

$$m_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -K_0(s_1) ds_1, & 1 \end{bmatrix} \quad (156)$$

とした場合、 $M_0(s_1) = M_R \cdot m_0$ と表わすことができる。従って $M(s_1)$ と $M_0(s_1)$ の関係を求めると $M(s_1) = M_R \cdot m = M_R \cdot m_0 \cdot m_0^{-1} m = M_0(s_1) m_0^{-1} m$ となる。ここで

$$m_0^{-1} m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1) ds_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (157)$$

となるから

$$M(s_1) = \begin{bmatrix} \cos \mu_0 + \alpha(s_1) \sin \mu_0 & & & \\ & -k(s_1) \beta(s_1) \sin \mu_0 ds_1 & & \\ -\gamma(s_1) \sin \mu_0 - k(s_1) \{ \cos \mu_0 & & & \\ & & -\alpha(s_1) \sin \mu_0 \} ds_1, & \\ & \beta(s_1) \sin \mu_0 & & \\ \cos \mu_0 - \alpha(s_1) \sin \mu_0 & & & \end{bmatrix} \quad (158)$$

表 2. Source of Closed Orbit Distortion

Type of Optical Element	Source of Kick	r.m.s.value	$\left(\frac{\Delta B l}{B \rho}\right)$ rms	Directions
Gradient Magnet (Focusing Strength : k_i length : l_i)	Displacement	$\langle \Delta y \rangle$	$k_i l_i \langle \Delta y \rangle$	x and z
Bending Magnet (Bending Angle : θ_i)	Tilt	$\langle \Delta \theta_e \rangle$	$\theta_i \langle \Delta \theta_e \rangle$	z
	Field Error	$\langle \frac{\Delta B}{B} \rangle$	$\theta_i \langle \frac{\Delta B}{B} \rangle$	x
	Length Error	$\langle \frac{\Delta L}{L} \rangle$	$\theta_i \langle \frac{\Delta L}{L} \rangle$	x
Straight Section (length : d_i)	Stray Field	$\langle \Delta B_s \rangle$	$d_i \frac{\langle \Delta B_s \rangle}{\rho B_{inj}}$	x and z

(E. Wilson, "Transverse Beam Dynamics", CERN
85-19(1985) p.p. 64-95 より借用)

が得られる。従って $k(s_1) (\neq 0)$ が存在する場合の ν 値を ν とすると (158) の Matrix の Trace を求めて

$$2 \cos \mu = 2 \cos \mu_0 - k(s_1) \beta(s_1) \sin \mu_0 ds_1 \quad (159)$$

(但し, $\mu = 2\pi\nu$) が導ける。これから $\Delta\nu = \frac{\Delta\mu}{2\pi} = \frac{\mu - \mu_0}{2\pi}$ を求めると

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} k(s_1) \beta(s_1) ds_1 \quad (160)$$

となる。リング1周にわたって存在するすべての Focusing Strength の誤差について積分するとこれらの寄与による Tune Shift 量 $\Delta\nu$ が

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^C k(s) \beta(s) ds \quad (161)$$

で与えられることがわかる。この (161) 式によれば, Q Magnet の Focusing Strength を k だけ変化させた場合の ν 値の変化 $\Delta\nu$ を測定すればこの Q Magnet の位置における β -function の値を実測することができる。米国のインディアナ大学の IUCF COOLER RING ではこの方法により, β -function の測定を行っている¹⁵(図34)。さて (159) 式から (160) 式を導くにあたっては $\sin \mu_0 \neq 0$ を仮定していた。しかし, ν_0 が Integer 又は Half Integer 近辺では $\sin \mu_0$ が 0 に近い値をとるので, 2nd order の項を評価する必要がある。そこで $[s_1, s_1 + ds_1]$ 及び $[s_2, s_2 + ds_2]$ なる区間にそれぞれ, $k_1 = k(s_1)$, $k_2 = k(s_2)$ なる Field Gradient Error が存在する場合を仮定し, s_1 から s_2 ,

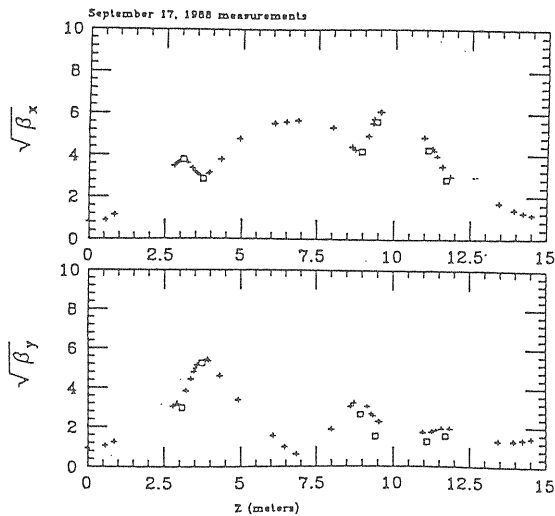


図 34. 米国インディアナ大学 IUCF のクーラーリングにおける β -function の実測例 (□: 実測値, +: 計算値) (参考文献 15) から借用

s_2 から $s_1 + C$ に至るリングの Transfer Matrix をそれぞれ, A, B とあらわすと, この場合の s_1 を始点とするリング一周の Transfer Matrix $M(s_1)$ は

$$M(s_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_1 ds_1 & 1 \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_2 ds_2 & 1 \end{bmatrix} A \quad (162)$$

とかける。ここで $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ なる Matrix を定義すると, これと Unit Matrix $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_i ds_i & 1 \end{bmatrix} = I - k_i ds_i R \quad (163)$$

($i = 1, 2$) と表わすことができるから, (162) 式より

$$M(s_1) = M_0(s_1) - (RBA) k_1 ds_1 - (BRA) k_2 ds_2 + (RBRA) k_1 k_2 ds_1 ds_2 \quad (164)$$

が導びける。この両辺の Trace を求めることにより,

$$2 \cos \mu = 2 \cos \mu_0 - (k_1 \beta_1 ds_1 + k_2 \beta_2 ds_2) \sin \mu_0 + b_{12} \cdot a_{12} k_1 k_2 ds_1 ds_2 \quad (165)$$

を得る。

([演習問題 34])

$\text{TR}(RBA) = \text{TR}(RM_0(s_1))$, $\text{TR}(BRA) = \text{TR}(RAB) = \text{TR}(RM_0(s_2))$ なる事実を用いて (165) 式が成り立つことを示せ。ここに b_{12} , a_{12} はそれぞれ Matrix B, A の 1 行 2 列成分であるが, これらは (10) 式より

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin(\mu_2 - \mu_1) \\ b_{12} &= \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin(\mu_1 + \mu_0 - \mu_2) \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

と表わすことができるから (165) 式は

$$\begin{aligned} \cos \mu - \cos \mu_0 &= -\frac{1}{2} (k_1 \beta_1 ds_1 + k_2 \beta_2 ds_2) \sin \mu_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 \sin(\mu_2 - \mu_1) \sin(\mu_1 \\ &\quad + \mu_0 - \mu_2) ds_1 ds_2 \quad (167) \end{aligned}$$

となる。ここで Field Gradient Error の効果を全周にわたって積分すると

$$\begin{aligned} \cos \mu - \cos \mu_0 &= -\frac{1}{2} \sin \mu_0 \int_0^C k(s) \beta(s) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^C ds \int_s^C d\tau \beta(s) \beta(\tau) k(s) k(\tau) \\ &\cdot \sin \{ \mu(\tau) - \mu(s) \} \sin \{ \mu(s) + \mu_0 \\ &\quad - \mu(\tau) \} \end{aligned} \quad (168)$$

が得られる。ここで先に述べた $\sin \mu_0$ が 0 に近い場合を想定し、Field Gradient Error の存在する場合の運動が不安定になる条件を考慮する。 $\mu_0 = 2\pi\nu_0$ より $\nu_0 = \frac{m}{2}$ (m : integer) の近傍で $\sin \mu_0 \approx 0$ となるから、 ν_0 の $\frac{m}{2}$ からのずれを $\delta\nu$ と表わす。即ち

$$\nu_0 = \frac{m}{2} + \delta\nu \quad (169)$$

とすると、 $\mu_0 = 2\pi\nu_0 = \pi m + 2\pi(\delta\nu)$ となるから、 $\sin \mu_0 \approx 2\pi(\delta\nu)$ 、 $\cos \mu_0 \approx (-1)^m \{ 1 - 2\pi^2(\delta\nu)^2 \}$ なる近似式が成り立つ。(168)式の右辺の第2項は微小な Field Gradient Error の2次の項の Factor を含んでいるから Higher Order を無視することとすると、この第2項は $-\frac{1}{4} \int_0^C ds \int_s^C d\tau \beta(s) \beta(\tau) k(s) k(\tau) [\cos \pi m - \cos \{ 2\mu(\tau) - 2\mu(s) - \pi m \}] = -\frac{(-1)^m}{4} \int_0^C ds \int_s^C d\tau \beta(s) \beta(\tau) k(s) k(\tau) [1 - \cos \{ 2\mu(\tau) - 2\mu(s) \}]$ と表わせる。さてこの積分の Integrand は τ と s を交換しても不変であるから、この項は二重積分の積分領域を s, τ ともに 0 から C とした場合の $\frac{1}{2}$ になる。よって (168) 式右辺の第2項は

$$\begin{aligned} &-\frac{(-1)^m}{8} \left[\left(\int_0^C \beta(s) k(s) ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^C ds \int_s^C d\tau \beta(s) \beta(\tau) k(s) k(\tau) \{ e^{2i\mu(\tau) - 2i\mu(s)} \right. \\ &\quad \left. + e^{-2i\mu(\tau) + 2i\mu(s)} \} \right] \\ &= -\frac{(-1)^m}{8} \left[\left(\int_0^C \beta(s) k(s) ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^C \beta(s) k(s) e^{-im\phi(s)} ds \cdot \int_0^C \beta(\tau) k(\tau) e^{im\phi(\tau)} \right] \\ &\quad (\because \mu(s) = \nu_0 \phi(s) = \frac{m}{2} \phi(s)) \end{aligned}$$

と表わせる。ここで $J_n = \int_0^C \beta(s) k(s) e^{-in\phi(s)} ds$ なる

積分を導入するとこれは $-\frac{(-1)^m}{8} (J_0^2 - |J_m|^2)$ となるから、(168)式は

$$\begin{aligned} &\cos \mu - (-1)^m \{ 1 - 2\pi^2(\delta\nu)^2 \} \\ &= -\pi(\delta\nu) J_0 - \frac{(-1)^m}{8} (J_0^2 - |J_m|^2) \end{aligned} \quad (170)$$

と変形できる。

ここで m の偶奇性を考える。

i) $m = 2p$ (p : integer) の場合、即ち $\nu_0 = p + \delta\nu$ となるから、Integer Resonance の近傍を考えた場合、Field Gradient Error が存在する場合の運動が不安定になるのは $|\cos \mu| > 1$ の場合であるから、安定解との境界条件を考えて $\cos \mu - 1 = 0$ とおくと (170) 式より

$$2\pi^2(\delta\nu)^2 + \pi J_0(\delta\nu) + \frac{1}{8} (J_0^2 - |J_{2p}|^2) = 0 \quad (171)$$

を得る。この解は $\delta\nu = -\frac{J_0 \pm |J_{2p}|}{4\pi}$ で与えられるから、ベータトロン振動が不安定になるような ν -region の幅 (これをこの Resonance の Stopband と称する) は $\frac{|J_{2p}|}{2\pi}$ で与えられる。

ii) $m = 2p + 1$ (p : integer) の場合、即ち $\nu_0 = p + \frac{1}{2} + \delta\nu$ なる Half Integer Resonance の近傍では、 $\cos \mu + 1 = 0$ で不安定解の境界が与えられ、

$$2\pi^2(\delta\nu)^2 - \pi J_0(\delta\nu) + \frac{1}{8} (J_0^2 - |J_{2p+1}|^2) = 0 \quad (172)$$

を得る。この2つの解 $\delta\nu = \frac{J_0 \pm |J_{2p+1}|}{4\pi}$ の間隔を求めて、Stopband は $\frac{|J_{2p+1}|}{2\pi}$ で与えられることがわかる。

次にこうした Resonance 近傍で β -function の受けの変化について調べてみる。(15)式の右辺の Matrix の形から、 $s = s_1$ の点における β -function の変化 $\Delta\beta(s_1)$ は (164) で与えられる Matrix, $M(s_1)$ の1行2列成分を m_{12} と書くと

$$\Delta m_{12} = \Delta\beta(s_1) \sin \mu_0 + \beta(s_1) \cos \mu_0 \cdot \Delta\mu \quad (173)$$

で与えられることがわかる。Resonance から少し離れた条件で考えると $\sin \mu_0 \approx 0$ が成り立ち $\Delta\mu$ は (161)

式で与えられる。一方 (164) 式をみると Matrix R の形から RBA, RBRA は 1 行 2 列成分が 0 となること
が容易にわかり, $M_0(s_1)$ は unperturbed motion の Transfer Matrix であったから, Δm_{12} は BRA の 1 行 2 列成分が $b_{12} \cdot a_{12}$ であることより次のように表わせる。

$$\Delta m_{12} = - \int_{s_1}^{s_1+C} k(s_2) a_{12} \cdot b_{12} \cdot ds_2 \quad (174)$$

ここで (166) 式を用いるとこれは

$$\begin{aligned} \Delta m_{12} = & -\beta(s_1) \int_{s_1}^{s_1+C} k(s_2) \beta(s_2) \sin(\mu_2 - \mu_1) \\ & \cdot \sin(\mu_1 + \mu_0 - \mu_2) ds_2 \end{aligned} \quad (175)$$

となる。(173), (175) 両式より $\Delta\beta(s_1)$ を求めると

$$\begin{aligned} \Delta\beta(s_1) = & - \frac{\beta(s_1)}{2 \sin 2\pi\nu_0} \int_{s_1}^{s_1+C} k(s_2) \beta(s_2) \\ & \cdot \cos\{2\pi\nu_0 - 2\mu(s_2) + 2\mu(s_1)\} ds_2 \end{aligned} \quad (176)$$

を得ることができる。これは(40)の変数変換を行って独立変数を ϕ に直すと,

$$\begin{aligned} \Delta\beta = & \\ & - \frac{\nu_0 \beta}{2 \sin 2\pi\nu_0} \int_{\phi_1}^{\phi_1+2\pi} k \beta^2 \cos 2\nu_0(\pi - \phi_2 + \phi_1) d\phi_2 \end{aligned} \quad (177)$$

と書ける。これを (146) 式に見比べてみると $\frac{\Delta\beta}{\beta}$ は

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right) + (2\nu_0)^2 \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} \right) = -2\nu_0^2 k \beta^2 \quad (178)$$

の周期 2π の解になっていることが容易にわかる。(178)の周期 2π (右辺の $k(s)\{\beta(s)\}^2$ は s に対して C の周期性をもっているから独立変数 ϕ に関する周期は 2π である)の解は Fourier 級数で表わすこともできる。(178)の右辺を $\sum_{p=-\infty}^{\infty} f_p e^{ip\phi}$ と展開したとすると,

$$\begin{aligned} f_p = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2\nu_0^2) k \beta^2 e^{-ip\phi} d\phi \\ = & \frac{-2\nu_0^2}{2\pi\nu_0} \int_0^C k(s) \beta(s) e^{-ip\phi} ds \\ = & - \frac{\nu_0}{\pi} J_p \end{aligned}$$

ゆえ, (178)の解は,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta}{\beta} = & \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{-\frac{\nu_0}{\pi} J_p}{4\nu_0^2 - p^2} e^{ip\phi} \\ = & - \frac{\nu_0}{4\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{J_p}{\nu_0^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2} e^{ip\phi} \end{aligned} \quad (179)$$

と表わされる。これから β -function は $\beta^2 k$ の $2\nu_0$ に近い harmonic component が大きいと大きく変化を受けることがわかる。従って Q Magnet の配置に際しては, 磁場測定データと想定する ν 値を考慮して, こうした Harmonics を Suppress するような配置とすることがある。

Coupling Resonance と Higher Order Resonance

上では Integer Resonance と Half Integer Resonance について, Courant and Snyder の Formalism³⁾に従って, 式の derivation も含めてかなり詳細に論じたが, これ以外にも Coupling Resonance と呼ばれる水平・垂直方向の運動が correlate する resonance や Higher Order の non linear Resonance が存在する。これらについては, G. Guignard による解説¹⁶⁾があるので興味ある読者には巻末に挙げた参考文献を参照頂くことにして, ここでは動作点の決定に際して考慮すべき事柄を簡単に記すにとどめたい。

水平及び垂直方向の ν 値をそれぞれ ν_x, ν_z とするとき

$$l\nu_x + m\nu_z = n \quad (180)$$

(l, m, n は integer)なる条件のもとで Resonance が生じ, Beam Size の Blow Up ($l \cdot m \geq 0$ …… Sum Resonance) や水平・垂直両方向の運動の Coupling ($l \cdot m < 0$ …… Difference Resonance) が発生する。この時, $k = |l| + |m|$ をこの resonance の order (次数) と称する。Difference Resonance は粒子の運動そのものは振動解で Sum Resonance ほど Harmful ではないが, 加速器では Bending Magnet の Gap を小さく抑えるために垂直方向の Aperture を水平方向に比して小さくとることが多いから, このような

Coupling が起ると Beam Loss につながる事が多い。一般に Resonance の強さは次数の低いほど強く, Higher Order になるほど弱くなると考えてよいが, Beam がリング中を周回する時間が長くなると高次の Resonance の効果も表われてくる。この 1 例として, 図 35(a) に東大・核研で 1985 年迄稼動していた重イオン蓄積リング (TARN) で観測された蓄積ビームの Schottky Signal を示した。この場合の蓄積ビームの Tune Diagram 上の Working Line は図 35(b) の D に示したものであり, 図 35(a) の矢印の所に観測される Schottky Signal の dip は数分間のビーム蓄積の間に $3\nu_H + 2\nu_V = 11$ なる 5 次の Resonance で Beam が失われていく効果を表わしている。この例からもわかるように動作点 (又は線) を決定するにあたっては, そのリングに於るビ

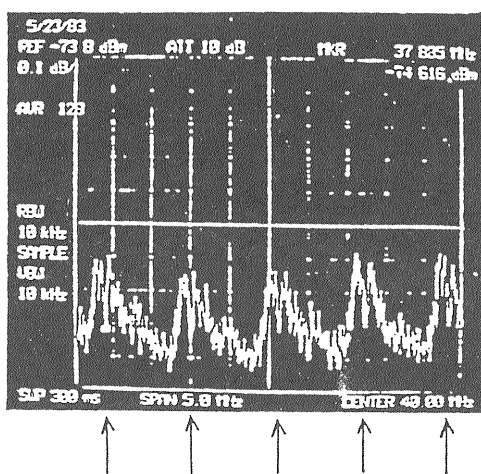


図 35. (a) 重イオン蓄積リング TARN で観測された蓄積ビームの Schottky Signal. 蓄積時間が数分以上に及ぶと図中に矢印で示した位置に 5 次の Resonance によるビームロスが観測される。

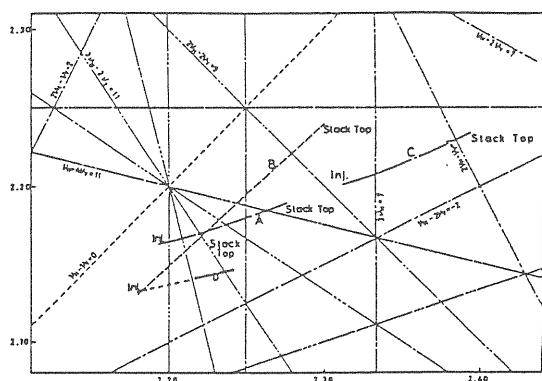


図 35. (b) TARN の Working Line. 図 35(a) の Data は Working Line D で観測されたものであり, 5 次の Resonance $3\nu_H + 2\nu_V = 11$ にかかっていることがわかる。

ームのハンドリング時間と近隣に存在する Resonance の Stopband を充分考慮しておく必要がある。

Superperiodicity と Structure Resonance

リングの Superperiodicity を N_s するとき, (180) 式の右辺が N_s の整数倍になるものを Structure Resonance と称しており, これは一般に Stopband が大きく, 危険性が高いので, 通常は動作点はこの近傍を避けて選ばれることが多い。この理由は次のように考えることができる。今, 1 方向の運動のみの Resonance (即ち $l=0$ 又は $m=0$ の場合) を考えると $n\nu = s$ (n, s : integer) なる Resonance は $B^{(n-1)}(\theta)$ (θ はリングの azimuthal angle) の harmonics s の component で励起される (先に述べた linear resonance の場合にも, $2\nu = p$ なる Resonance は Field Gradient 即ち $B'(\theta)$ の p 次の harmonics で drive されていたことを想起せよ)。今 $B^{(n-1)}(\theta)$ は周期 2π の周期関数であるから

$$B^{(n-1)}(\theta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \cos(s\theta) \quad (181)$$

と Fourier 展開できる。ここでリングの Superperiodicity N_s を仮定すると図 36 に示したように, $B^{(n-1)}(\theta)$ は個々の電磁石の個性差を無視すると リング中心のまわりの $\frac{2\pi}{N_s}$ なる回転に対して不変である。従って,

$$B^{(n-1)}\left(\theta + \frac{2\pi}{N_s}\right) = B^{(n-1)}(\theta) \quad (182)$$

が成り立つ。(181) をこれに代入すると

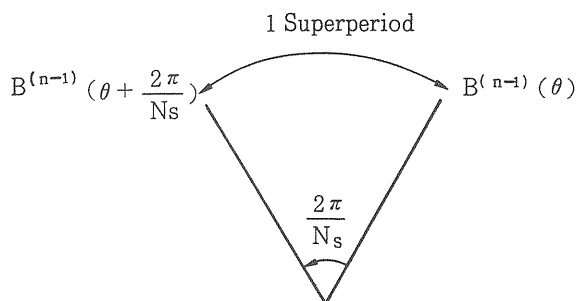


図 36. Superperiodicity によるリング中心のまわりの回転不変性。Magnet の個性差や Alignment Error がない場合にはリング中心のまわりの $\frac{2\pi}{N_s}$ (N_s は Superperiodicity) なる回転に対して不変性が成り立つ。

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s \sin \left\{ \left(\theta + \frac{\pi}{N_s} \right) s \right\} \cdot \sin \left(\frac{\pi s}{N_s} \right) = 0 \quad (183)$$

が得られるが、(182)の回転不変性は任意の θ に対して成り立つから(183)も任意の θ について成立する。

これより b_s が non-zero でありうるのは $\sin\left(\frac{\pi s}{N_s}\right)$ が0となる s が N_s の整数倍である場合に限られる。従って s が N_s の整数倍の場合には、Magnet の設計上や Fringing Field Region から表われる $B^{(n-1)}(\theta)$ が s 次の Harmonics を生じることがあるが、 s が N_s の整数倍でない Harmonic Component は個々の電磁石の製作上の個性差や Alignment Error のみから発生し、これは一般に前者と比較して小さいと考えてよい。先に述べた JHP I-A リングが Superperiodicity を16と高い値に設定しているのは、1つにはこうした Structure Resonance の Density を下げて、Resonance による Beam Loss を避けるという観点に基づいている。

Chromaticity の補正

シンクロトロンリング中を周回しているビームは運動量の拡がりをもつ。これは入射器からのビーム自身のもつ運動量の拡がりとも、リング内での RF 電場によるシンクロトロン振動に起因している。さてⅢで述べた Hill's Equation の Focusing Strength $K(s)$ は磁場中での曲率半径の自乗に逆比例していたが、磁場が同一でも粒子の運動量が異なると曲率半径が異なるから Focusing の強さが変化する。1例として、Q Magnet の焦点距離 f を考えると、thin lens 近似では $\frac{1}{f} = \frac{Gl_Q}{B\rho}$ と表わされるが、運動量が中心値 p_0 より $\frac{\Delta p}{p}$ だけずれた粒子を考えるとその Magnetic Rigidity は中心値を $(B\rho)_0$ と表わした場合、 $(B\rho)_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right)$ となる。従ってこの momentum のずれに起因する焦点距離のずれを Δf とすると

$$\frac{1}{f + \Delta f} = \frac{G \cdot l_Q}{(B\rho)_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right)} \quad (184)$$

となり、

$$\Delta f = f \cdot \frac{\Delta p}{p} \quad (185)$$

を得る。即ち Q Magnet の焦点距離は扱う粒子の運

動量の差に比例して変化する。この事実は光学レンズの焦点距離が光の波長により異なる色収差と対応して考えることができるので、イオン光学系においても Chromatic Aberration と称している。さてこのように Focusing の強さが運動量によって変化すると、リング1周当りのベータatron振動数 (ν 値) も変化する。この ν 値の momentum dependence $\frac{\partial \nu}{\partial \left(\frac{\Delta p}{p}\right)}$ を

Chromaticity と称している ($\frac{\partial \nu}{\nu \partial \left(\frac{\Delta p}{p}\right)}$ を Chromaticity と定義する場合もあるので注意を要する)。

さてリング中の Q Magnet の Focusing Strength $k (= \frac{1}{f})$ の momentum の差に起因する差 Δk は(185)式より

$$\frac{\Delta k}{k} = - \frac{\Delta p}{p} \quad (186)$$

と表わされることがわかるから、(161)式を用いてこれを ν 値の差に直すと

$$\Delta \nu = \left[- \frac{1}{4\pi} \int_0^c k(s) \beta(s) ds \right] \frac{\Delta p}{p} \quad (187)$$

と書けることがわかる。Chromaticity は nonlinear field の存在によっても生ずるが、理想的な linear field しか存在しない場合にも生ずる Chromaticity をこれと区別して Natural Chromaticity と称している。Chromaticity の存在は運動量の拡がりによる Tune Spread をもたらしめるので、前節に述べた Resonance を避けるために Chromaticity の補正を要することがある。この補正は六極電磁石を用いて行うことができる。今リング中の $s = s_1$ なる位置に強さ B'' の六極電磁石を設置したとすると運動量が中心値より $\frac{\Delta p}{p}$ だけずれた粒子は Dispersion Function により $D(s_1) \frac{\Delta p}{p}$ だけ変位するからこの六極電磁石の存在によりリングの Focusing Strength は $\frac{1}{B\rho} B'' D(s_1) \frac{\Delta p}{p}$ だけ変化する。(161)式よりこれによる ν 値の変化は

$$\Delta \nu = \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^c \frac{B''(s_1) \beta(s_1) D(s_1)}{B\rho} ds_1 \right] \frac{\Delta p}{p} \quad (188)$$

と表わせることがわかる。従って、水平及び垂直方向の Chromaticity をそれぞれ ξ_x, ξ_z ($\xi_y \equiv \frac{\partial \nu_y}{\partial \left(\frac{\Delta p}{p}\right)}$)

と表わし、六極電磁石を励磁しない場合のこれらの値を ξ_x^0, ξ_z^0 とすると、

$$\xi_y = \xi_y^0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^c \frac{B''(s) \beta_y(s) D(s)}{B\rho} ds$$

(y = x or z) (189)

となる。ここで ξ_x, ξ_z をある値に補正するには2つの Free Parameters が必要となる。今、 β_x, β_z, D の値の異なる2つの点 s_1, s_2 にそれぞれ強さ B_1'', B_2'' の六極電磁石を設置したとすると、(189)式より

$$\begin{aligned} \xi_x &= \xi_x^0 + \frac{1}{4\pi} \int_{s_1 - \frac{l}{2}}^{s_1 + \frac{l}{2}} \frac{B_1''(s) \beta_x(s) D(s)}{B\rho} ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{s_2 - \frac{l}{2}}^{s_2 + \frac{l}{2}} \frac{B_2''(s) \beta_x(s) D(s)}{B\rho} ds \\ \xi_z &= \xi_z^0 + \frac{1}{4\pi} \int_{s_1 - \frac{l}{2}}^{s_1 + \frac{l}{2}} \frac{B_1''(s) \beta_z(s) D(s)}{B\rho} ds \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{s_2 - \frac{l}{2}}^{s_2 + \frac{l}{2}} \frac{B_2''(s) \beta_z(s) D(s)}{B\rho} ds \end{aligned}$$

(190)

(但し、 l は六極電磁石の長さを表わす) が得られ、一般に六極電磁石の長さ l はベータトロン振動の波長に比して充分短いから、(190)の右辺の積分は

$$\frac{B_i'' l \beta_y(s_i) D(s_i)}{B\rho} \quad (i = 1 \text{ or } 2, y = x \text{ or } z)$$

におきかえることができ、望ましい補正後のChromaticity ξ_x, ξ_z から B_1'', B_2'' を求めることは連立一次方程式を解く問題に帰着する。

VI ビームの入射・取り出し

ビームの入射

入射器からのビームを円形に近いリング内の平衡軌道のまわりに安定に周回させるには、図37に示したように入射ビームを何らかの方法で偏向してリング内の安定軌道に取り込んでやる必要がある。このための方法として、電磁場を使用する方法と入射粒子の荷電状態を変化させる方法の2通りが考えられる。¹⁷⁾

i) 電磁場を用いる方法

この方法の場合、静的電磁場のみを用いたのでは、入射されたビームはリングの ν 値で定まる回数 (高々

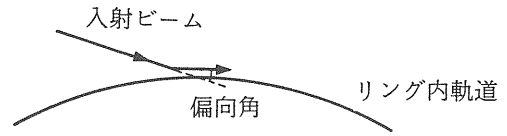


図37. リング内へのビーム入射の概念図

数回) だけ回転したのちに、もとの入射位置に戻ってきてしまうから、インфлекター電極等に衝突して失われてしまう。これを避けるためには時間的に変化する電場又は磁場を用いて、入射し終った周回ビームが数ターンしてもとの位置に戻る前に周回ビームの軌道を電極等に当らぬ位置まで移動しておく必要がある。この目的の為に、図38に示したように入射用インфлекター電極の近くで変位が最大になるように平衡軌道にバンプを作成しておき、これを時間的に変化させる方法がとられることが多い。この場合、図38に示した Bump Magnet 1, 2 及びインфлекターの電極の位置をそれぞれ s_1, s_2, s_0 とし、これらの位置におけるベータトロン振動の位相を $\mu(s_1), \mu(s_2), \mu(s_0)$ と表わすと、Bump Magnet 1, 2 による Deflection Angle をそれぞれ ψ_1, ψ_2 としたとき、Bump Magnet i ($i = 1$ or 2) による Closed Orbit のずれは(147)式より

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_i(s) &= \\ &= \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \sqrt{\beta(s_i)} \cos \{ \nu \pi - | \mu(s) - \mu(s_i) | \} \psi_i \end{aligned}$$

(191)

と表わすことができる。〔演習問題 35〕(147)式の積分領域が $s \leq \tau \leq s + C$ であることに注意して、 $s < s_i$ (従って $\mu(s) < \mu(s_i)$) の場合には

$$\tilde{\eta}_i(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \sqrt{\beta(s_i)} \cos \{ \nu \pi + \mu(s) - \mu(s_i) \} \psi_i$$

が成り立ち、 $s \geq s_i$ (従って $\mu(s) \geq \mu(s_i)$) の場合には、 $\beta(\tau)$ の周期 C なる周期性と $\mu(\tau + C) = \mu(\tau) + 2\pi\nu$ が成り立つことから

$$\tilde{\eta}_i(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \sqrt{\beta(s_i)} \cos \{ \nu \pi + \mu(s) - \mu(s_i) - 2\pi\nu \}$$

が成り立つことを示して(191)式を導け。)

従って今、図38のように $s_1 < s_0 < s_2$ なる位置関係にある場合を想定すると、Bump Magnet 1, 2 を同時に励磁した場合の平衡軌道のずれは $\tilde{\eta}_1(s)$ と $\tilde{\eta}_2(s)$

の重ね合わせで与えられ、 $\psi_2 = \sqrt{\frac{\beta(s_1)}{\beta(s_2)}} \psi_1$ なる関

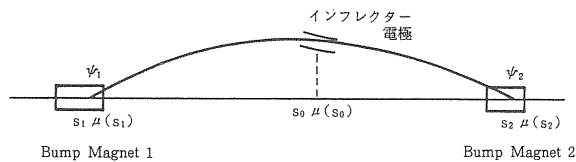


図38. 2つのBump MagnetによるBump軌道の作成

係を保つようにBump Magnet 1, 2の励磁を行うと、これは

$$\tilde{\eta}(s) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_1)}}{\sin \pi \nu} \psi_1 \cdot \cos \left\{ \nu \pi + \frac{\mu(s_1) - \mu(s_2)}{2} \right\} \\ \cdot \cos \left\{ \mu(s) - \frac{\mu(s_1) + \mu(s_2)}{2} \right\} & (s_1 \leq s \leq s_2) \\ \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_1)}}{\sin \pi \nu} \psi_1 \cdot \cos \left\{ \nu \pi - \mu(s) \right. \\ \left. + \frac{\mu(s_1) + \mu(s_2)}{2} \right\} \cos \left\{ \frac{\mu(s_2) - \mu(s_1)}{2} \right\} & (s < s_1 \text{ or } s > s_2) \end{cases} \quad (192)$$

となる。〔演習問題 36〕 (192)式を導け。従って $\mu(s_2) - \mu(s_1) = \pi$ となる位置関係にBump Magnet 1, 2を配置すると、Bump Magnetの外側におけるClosed Orbitには影響を及ぼさないでこれらの間の平衡軌道のみを曲げることができる。この場合 $\mu(s_2) = \mu(s_1) + \pi$ を代入すると $s_1 \leq s \leq s_2$ における平衡軌道のずれは

$$\tilde{\eta}(s) = \sqrt{\beta(s)\beta(s_1)} \psi_1 \sin \{ \mu(s) - \mu(s_1) \} \quad (193)$$

と表わせるから、インフレクター電極の位置 s_0 を $\mu(s_0) - \mu(s_1) = \frac{\pi}{2}$ となるように選ぶとバンプ軌道の変位をこの点で最大にすることができる。

さて、リングの ν 値を整数値 $\pm \frac{1}{4}$ に選んだ場合を考え、Bump Magnet 1, 2をビームがリングを1周する時間に比して充分短い立ち上り、立ち下り時間でビームの回転周期の4倍の時間だけ励磁すると、ビームはインフレクター電極位置での横方向位相空間で考えると、図39のように4回転分入射することができる。このような入射法を4回転入射と称しており、図39からわかるように入射後のエミッタンスは悪くなる

が、ビーム強度を4倍に上げることができ、立ち上り、立ち下り時間を充分短かくとれば、入射時のビーム損失も小さいという利点がある。Bump MagnetのDurationをビームの回転周期に等しくとり、Bump励磁中のClosed Orbitを入射ビームの中心に重ねる条件にすれば1回転の入射が可能で、これは入射ビームラインとリングの光学系のMatchingをうまくとれば入射後のビームのエミッタンスを増大させることがないというMeritがあり、リングからリングへのビームのTransferの場合に使用されることが多い。入射ビームのインフレクター位置での全幅を w とするとき、バンプ軌道のビームの回転周期当りの移動量を $\frac{w}{4}$ に近くとると図40に示したようにリング内の横方向位相空間内のアクセプタンスに、原理的にはインフレクター電極の影を除いてぎっしりとビームをつめ込むことがで

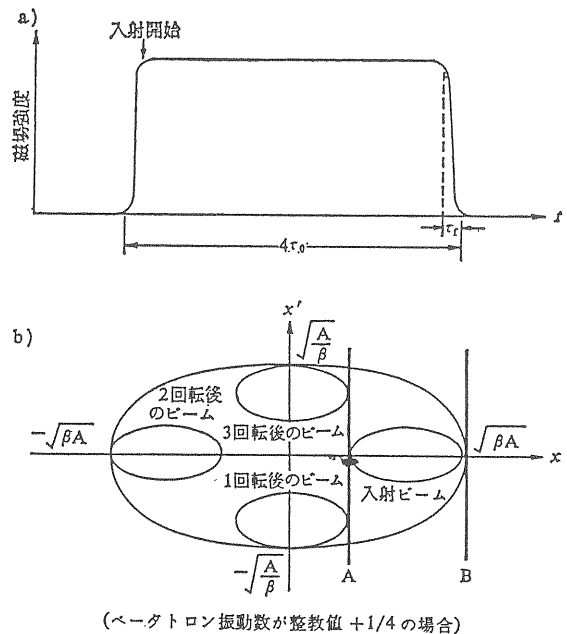


図39. a) 4回転入射のパルス磁場波形, b) 4回転入射の横方向位相空間でのビームとインフレクターの電極の関係(参考文献17)から転載)

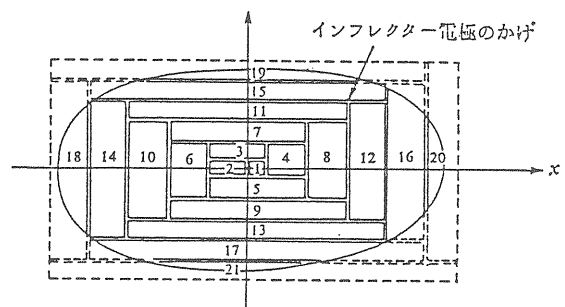


図40. 多重入射後の横方向位相空間内におけるビームの様子(参考文献17)から転載)

きる。このような方法を多重入射と呼び入射後のビームの Phase Space Density の減少が少なく抑えられるという利点があるが、入射の初期のビームは大半がインフレクター電極に衝突して失われてしまうという難点があり、ビームパワーの大きい場合や High Energy Beam の入射には適さない。

さて以上に述べた方法はいずれも保存力場を用いており、Liouville の定理に従っている。勿論実際の入射にあたっては、以上の説明からもわかる通り、Phase Space Density は大なり小なり減少するが、Phase Space Density を増大させることはこれらの方法では原理的に不可能である。

ii) 荷電状態の変化を利用する方法

入射ビームはリング中で薄膜等を通してることにより荷電状態を変化させることによっても安定な周回軌道にとり込むことができる。Budker と Dimov によって提唱されたこの方法¹⁸⁾はインフレクターを用いる必要がないだけでなく、荷電状態の変化という非可逆過程を用いて、ビームを平衡軌道にのせるので、Liouville の定理はあてはまらず、Phase Space Density を高めることが可能である。 1 例として JHP I-A リングにおける 1 GeV Proton の H⁰ 入射の Scheme を図 41 に示す。¹⁹⁾ ここでは 1 GeV Linac で加速された H⁻ ビームをリング直前の Stripping Magnet によって H⁰ に変換し、これをリング中におかれた薄膜 (Stripping Foil) により H⁺ に更に変換して、リングの平衡軌道に取り込む方式を採用している。JHP の場合扱うビームの平均電流が 200 μA と極めて高いのでビームロスの割合を小さく抑えることが重要な課題となるが、入射後リング内を周回し始めた H⁺ ビームが Stripping Foil を何度も通過すると、multiple coulomb scattering の影響で、周回ビームのエミッタンスの増大が起り、ビームロスにつながる。従って JHP I-A リングでは前に述べたような Bump Magnet によるバンパ軌道を変化させて、入射後の Beam の Foil Passage の回数を小さく抑える工夫を行っている。¹⁹⁾

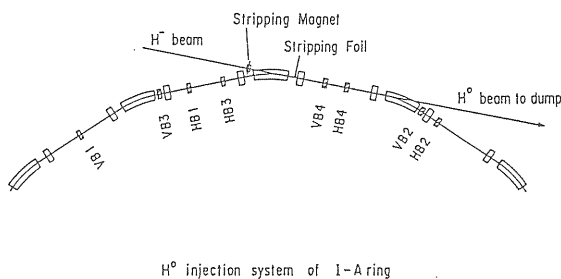


図 41. 大型ハドロン計画 Ring I-A への H⁰ 入射システム (参考文献 19) から借用)

ビームの取り出し

シンクロトロンで Top Energy まで加速したビームをリング外に取り出す方法は Fast Extraction と Slow Extraction の 2 つに大別される。前者の Fast Extraction は平衡軌道上に設置された Fast Kicker Magnet を用いて、ビームがリングを 1 周する間にすべてのビームを取り出してしまふもので、取り出したビームの duration はビームの revolution time をこえることはないから μsec の order で、短い時間内にピーク強度の高いビームが取り出されてくる。この方法は KEK の 500 MeV Booster から 12 GeV Main Ring への Transfer の場合のように、1 つのリングから他のリングへビームを移す際に使用される他、泡箱実験や、Time of Flight を用いた測定を行う場合に使用される。この方法の場合、Kicker Magnet の Field が Transient な状態にある時点で Kicker Magnet を通過するビームは正規の取り出し軌道に乗ることが出来ず失われてしまうので、ビームのバンチとバンチの間で Kicker Magnet を立ち上げる必要があり、高圧を用いた Pulsing System により、~100ns の rising time が実現され実用に供されている。この方法による取り出しビームは前にも述べたように duration が短かく Peak 強度が高いので、同時計数を行うような実験の場合には accidental coincidence の確率が高く適していない。このような目的のためには次に述べる Slow Extraction が用いられる。これには i) リング内の周回軌道上に設置された Absorber によるビームの Energy Loss に伴う平衡軌道のずれを利用する方法 (Absorption Method 又は Piccioni Method と称する) と ii) V で述べたベータatron 振動の Resonance を用いて振幅を増大させて取り出す方法 (Resonance Extraction) の 2 通りがある。前者の方法は Weak Focusing の陽子シンクロトロンで、初期に用いられたが、引き出しビームの Energy が高くなると Absorber の厚みを増す必要があり、Absorber 中での Coulomb Scattering や Nuclear Interaction によるビームのロスが増大し、取り出し効率が低くなるのと、Strong Focusing Machine では Weak Focus の場合に比して Dispersion Function の値が小さいので、充分な平衡軌道のずれが得られないため、近年は専ら ii) の Resonance Extraction が使用される。さてリング内を安定に周回しているビームは、

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = 0 \quad (194)$$

と単振動の式で表わされる。今これに Resonance を Excite する Non Linear Field ΔB を励磁すると粒子

の運動を記述する方程式は(145)で与えられる Forced Oscillation になる。これは直観的に考えると Non-linear Field の存在しない場合、図 42 に実線で示したような Harmonic Potential に閉じ込められていたビームの感じる Potential が図の破線のように歪められることを意味している。従って、振幅の大きな粒子は右側の極大点をこえて、振幅が更に増大しはじめる。これを図の x_s の位置に存在する 1st Septum により、更に外側に偏向することにより、リング外へ取り出すことができる。

ここで 3rd Order Resonance を例にとってこのプロセスを考えてみる。簡単のためリング中の $s = s_0$ なる位置に長さ l 、強さ B'' の単一の六極電磁石 (Sextupole Magnet) が存在する場合を考えると、これにより粒子の受ける磁場 ΔB は

$$\Delta B = \frac{B''(s_0)}{2} x^2 \quad (195)$$

で与えられ、これにより、 $\Delta x' = \frac{\Delta B l}{B \rho} = \frac{B''(s_0)l}{2B\rho} x^2$

なる Kick を受ける。さて (16) 及び (18) 式より $x = \sqrt{\beta \epsilon} \cos\{\psi(s) + \delta\}$ と表わすとき、

$$x' = \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} [-\alpha \cos\{\psi(s) + \delta\} - \sin\{\psi(s) + \delta\}]$$

と表わせることがわかるからベータatron振動の振幅 $\sqrt{\beta \epsilon}$ を a とおき、水平方向の ν 値を ν_x とすると、 $\psi(s) + \delta = \nu_x \theta + \phi_0$ (ϕ_0 は constant factor) と表わせることを使うと、

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos(\nu_x \theta + \phi_0) \\ x' &= \frac{1}{\beta} \{-\alpha x - a \sin(\nu_x \theta + \phi_0)\} \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

なる関係が得られる。ここで $p = \alpha x + \beta x'$ なる変数を定義すると

$$p = -a \sin(\nu_x \theta + \phi_0) \quad (197)$$

なる関係が得られ、 (x, p) 座標では unperturbed motion は半径 a の円を描くことがわかる。前に述べた Sextupole Field による kick は

$$\Delta p = \beta \Delta x' = \frac{\beta B''(s_0)l}{2B\rho} a^2 \cos^2(\nu_x \theta + \phi_0)$$

なる jump を p にもたらすが、図 43 から、これが振幅 a とベータatron振動の位相 ϕ に及ぼす影響は

$$\left. \begin{aligned} \Delta a &= -\Delta p \sin(\nu_x \theta + \phi_0) \\ \Delta \phi &= \frac{\Delta p}{a} \cos(\nu_x \theta + \phi_0) \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

で与えられることが容易にわかるから、

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\beta B'' l}{2B\rho} a \cos^2(\nu_x \theta + \phi_0) \sin(\nu_x \theta + \phi_0)$$

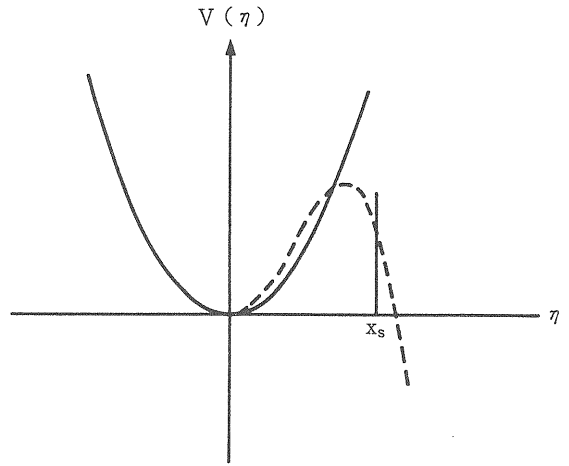


図 42. Non linear Field の存在しない場合に粒子の感じる平衡軌道のまわりの Harmonic Potential (実線) と Nonlinear Field の存在によりゆがめられた Potential (破線)。

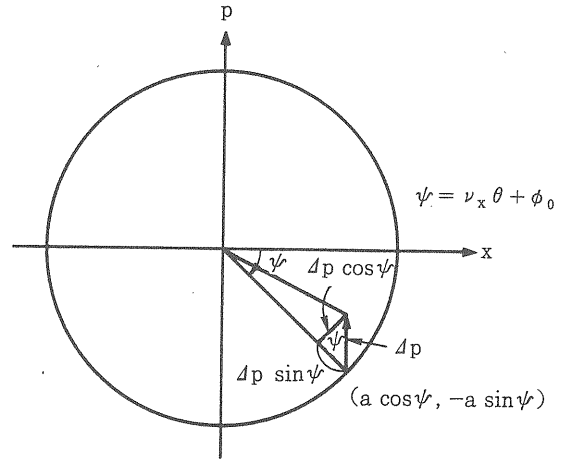


図 43. Normalized Phase Space における kick ΔP の Δa , $\Delta \phi$ への効果

$$= \frac{-\beta B'' l a}{8B\rho} \{\sin(3\nu_x \theta + 3\phi_0) + \sin(\nu_x \theta + \phi_0)\} \quad (199)$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\beta B'' l}{2B\rho} a \cos^3(\nu_x \theta + \phi_0) \\ &= \frac{\beta B'' l a}{8B\rho} \{\cos(3\nu_x \theta + 3\phi_0) \\ &\quad + 3 \cos(\nu_x \theta + \phi_0)\} \end{aligned} \quad (200)$$

ここで ν_x が integer $\pm \frac{1}{3}$ に近い場合を考えると(199) (200) の第 2 項はいずれも、3turn の contribution が cancell out してしまうので、第 1 項の効果のみがのこる。従って Tune shift $\Delta \nu_x$ は

$$\Delta\nu_x = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\beta B'' l a}{16\pi B\rho} \cos(3\nu_x\theta + 3\phi_0) \quad (201)$$

で与えられる。これは integer $\pm \frac{1}{3}$ の Resonance 値を ν_R としたとき ν_x の値が

$$\nu_R - \frac{\beta|B''|la}{16\pi B\rho} < \nu_x < \nu_R + \frac{\beta|B''|la}{16\pi B\rho} \quad (202)$$

で与えられる Region に入ると Sextupole Field による Perturbation によって振幅 a の粒子が Resonance 上にくることがあることを意味しており、一たん Resonance 上にくると (199) で与えられる振幅の増大が additive に効くからますます振幅が大きくなっていく。この (202) で表わされる Region の幅が Third Order Resonance の Stopband, $\delta\nu$ を与えている。即ち

$$\delta\nu = \frac{\beta|B''|la}{8\pi B\rho} \quad (203)$$

が成り立つ²⁰⁾。これは振幅依存性をもっており、この点が先に述べた Integer, Half Integer の Linear Resonance の Stopband の場合と異なっている。

リングの六極の効果を含まない場合の ν_x の値が、 ν_R から $\Delta\nu$ だけ離れている場合には

$$a < \frac{16\pi B\rho}{\beta|B''|l} \Delta\nu \quad (204)$$

なる条件をみたま振幅の比較的小さいビームはリング中を安定に振動しながら周回しており、取り出しの進行につれて、リングのチェーンが更に Resonance に近づいて $\Delta\nu$ が小さくなり、 a が (204) の右辺を越える条件になったときに、この粒子の運動が発散解となり、振幅が増大して粒子がリング外にとり出されてくることになる。このように Third Resonance による Extraction では振幅 (即ちエミッタンス) の大きい粒子から徐々にあたかも果物の皮をはぐかのようにビームを取り出していくので、数 100 msec にわたってゆっくりとビームを供給し続けることができる。 a が (204) 式の右辺と等しくなる場合は Stable Region と Unstable Region の境界に対応している。リングの ν_x 値が Resonance に上の方から近づいていく場合を考えると、(202) の右側の項と ν_x が等しくなることから (201) 式より $\cos(3\nu_x\theta + 3\phi_0) = 1$ となり、 $\nu_x\theta + \phi_0 = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ (但し、 2π の整数倍の差を無視する) でこの条件がみたされる。この時、(199)式から $\Delta a = 0$ となることがわかり、これらの点上では粒子の Phase Space 上の移動は無限に遅くなるので Unstable Fixed Point と呼ばれる。図 44 に横方向の位相空間における Separatrix (Stable Region と Unstable Region の境界をこう呼ぶ) と Unstable Fixed Point を示す。〔演習問題 37〕 リングの ν_x の値が下から ν_R に近

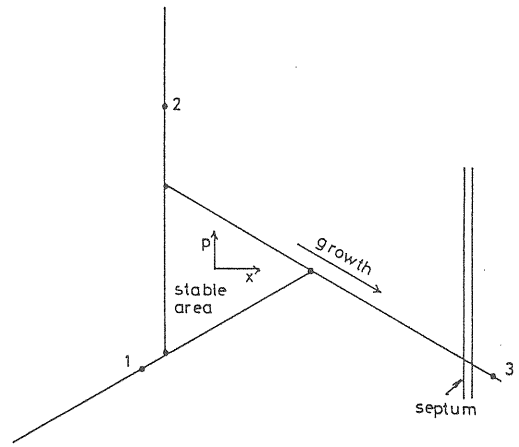


図 44. Third Order Resonance の Separatrix と Unstable Fixed Point ($\nu_x > \nu_R$ の場合) (参考文献20)より借用)

づく場合には図44の Separatrix の向きが逆転することを示せ。)

このようにして Unstable Region に出てきたビームは3ターン毎に Phase Space 上の Separatrix 延長線の上によって外へ出てくるのでこれを前に述べたように 1st Septum で偏向することになる。この際 1st Septum の厚みを t とし、ビームの変位の3ターン毎の増大を Δx (これをターンセパレーションと称する) とするとき、ビームの取り出し効率 η は原理的にも

$$\eta \leq \frac{\Delta x - t}{\Delta x} \quad (205)$$

で与えられる上限を越えることはできない。従ってビームの取り出し効率を高めるにはターンセパレーションを大きくするとともにセプタム厚 t を小さく抑えることが重要である。最近はこの目的の為、直径 100 μm 程度のワイヤーを張った静電高圧による偏向を与えるものを 1st septum として使用し、Septum の厚みを小さくする努力がなされている。

謝 辞

今年の高エネルギー加速器セミナーの開催に当たり、このような講義ノートを作成する好い機会を与えて下さった高エネルギー物理学研究所の木村嘉孝、山根功の両氏に深く感謝致します。又、講義ノート作成の段階で、加速器奨励会及び加速器セミナーの世話人の方々にも御世話になりました。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) "New Stanford collider starts at Z", CERN Courier, Vol. 29, No.5, June, 1989, pp 1-2.
- 2) M.K. Craddock et al., "Recent Developments on the TRIUMF KAON Factory Proposal", Proc. of European Particle Accelerator Conference, Rome (1988) pp 320-322.
- 3) E.D. Courant and H.S. Snyder, "Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron", Annals of Physics 3 (1958) pp 1-48.
- 4) J.J. Livingood, "Principles of Cyclic Particle Accelerators", D. Van Nostrand Company, Inc., (1961) pp 55-61.
- 5) K.G. Steffen, "High Energy Beam Optics", John Wiley & Sons, Inc., (1965) pp 97-101.
- 6) A. Noda et al., "Evaluation of the Dynamic Aperture of TARN II", Proc. of European Particle Accelerator Conference, Rome (1988) pp 806-808.
- 7) J.J. Livingood, "The Optics of Dipole Magnets", Academic Press (1969) pp 148-151.
- 8) A. A. Garren and J. W. Eusebio, "SYNCH A Computer System for Synchrotron Design and Orbit Analysis", Lawrence Radiation Laboratory, Report UCID-10153 (1965)
A. A. Garren and K. Chiba, "SYNCH Synchrotron Design, Orbit Analysis, and Beam Transport Program I. N. S. FACOM M180 II AD Version 79-4", INS-T-459 (1986).
- 9) M. J. Lee, W. W. Lee and L. C. Teng, "Magnet Insertion Code", National Accelerator Laboratory Report, TM-447-0106 (1973).
- 10) F. C. Iselin, "The MAD Program (Methodical Accelerator Design) Reference Manual", CERN-LEP-TH/85-15 (1985).
- 11) 神谷幸秀, "大型ハドロン計画 リング・デザイン・グループ (RDG) 報告 I, 1. 全体設計", JHP-11/KEK Internal 88-9 (1988) pp 1-104.
- 12) T. L. Collins, "Long Straight Section for A. G. Synchrotrons", Cambridge Electron Accelerator, Harvard University, Report CEA-86 (1961).
- 13) A. Noda et al., "Characteristics of Lattice and Magnet System of TARN II," IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-32, No. 5 (1985) pp 2684-2687.
- 14) C. Bovey et al., "A Selection of Formulae and Data Useful for the Design of A. G. Synchrotrons", CERN/MPS-SI/Int. DL/70/4 (1970) p 24.
- 15) T. J. Ellison, "Progress in Commissioning the IUCF Cooler", Contribution Paper to 1989 Particle Accelerator Conference, Chicago, U.S.A.
- 16) G. Guignard, "A General Treatment of Resonances in Accelerators", CERN 78-11 (1978).
G. Guignard, "The General Theory of All Sum and Difference Resonances in a Three-Dimensional Magnetic Field in a Synchrotron", CERN 76-06 (1976).
- 17) 野田 章, "ビーム入射・蓄積", 月刊フィジクス Vol. 6, No. 1 (1985) pp 4-13.
- 18) G. I. Budker and G. I. Dimov, "On the Charge Exchange Injection of Protons into Ring Accelerators", Proc. of International Conference on High Energy Accelerators (1963) pp 993-996.
- 19) I. Yamane et al., "Injection of 1 GeV H⁻ beam into the I-A ring", 大型ハドロン計画, リング・デザイングループ (RDG) 報告 I. JHP-11/KEK Internal 88-9 (1988) pp 153-189.
- 20) E. J. N. Wilson, "The Importance of Non-linearities in Modern Proton Synchrotrons", CERN 77-13 (1977) pp 111-138.