

1 リニアックとは

1.1 リニアックの定義

「リニアック」は Linear Accelerator (リニア・アクセラレーター、線形加速器)の略称である。広義には、磁場中で回転軌道をさせながら粒子を加速するサイクロトロンやシンクロトロン、そしてマイクロトロンと区別して、粒子を直線的に加速する方式は全て線形加速器となる。ファンデ・グラーフ(VAN DE GRAFF)やタンデム(TANDEM)等は粒子を直線的に加速するが、これらの静電加速器は「リニアック」に属しない。

「リニアック」とは、周期構造を持つ長い加速管の中に作られた加速電場を利用して、粒子を直線的に高エネルギーまで加速する方式の加速器である。高周波を利用して周期構造内に加速電場を作るものを「RF リニアック」と呼び、直列に並べたトランスに短パルスの大電流を流して発生する誘導電場で加速するものを「Induction Linac (インダクション・リニアック)」と呼ぶ。

表1.1.1 リニアックの種類

a) 方式

- 1) RF リニアック
- 2) インダクションリニアック

b) 加速粒子

- 1) 電子リニアック
電子・陽電子
- 2) イオンリニアック
陽子・重陽子

「リニアック」は、加速する粒子の種類によって分類でき、陽子や重イオンを加速する「イオン・リニアック」と、電子や陽電子を加速する「電子リニアック」に大別される。電子は質量が軽いので、0.5 MeV程度の低エネルギーですでに光速に近づく相対論的領域に入るのに対して、陽子や重イオンは質量が大きいので、約 1 GeV になって相対論的領域に入る。「イオン・リニアック」では、

非相対論的粒子を加速することを取り扱うので、位相安定性、空間電荷効果等、イオン・リニアック特有の興味ある問題が多い。一方、「電子リニアック」では、相対論的粒子を加速することを取り扱うので、イオン・リニアックにはない興味深い問題が多い。

電子リニアックは低エネルギーの工業用リニアックや医療用リニアックから、高エネルギー物理学用の大型加速器まで、極めて広いエネルギー範囲のリニアックが利用されている。用途にあわせてそれぞれ特徴があるが、ここでは高エネルギー物理学実験のための RF 電子リニアックに限定して話を進めることにする。

1.2 電子リニアックの歴史

E. Rutherford が1922年に、放射性同位元素からの 5 MeV の α 線を N 原子核に衝突させて、人工的に原子核崩壊をさせてから、荷電粒子をより高いエネルギーまで加速する装置の研究開発の競争が始まった。当初は高電圧発生装置を用いた、静電加速器の開発に力が注がれ、より高電圧の発生装置が試作された。しかし、電圧が放電破壊の限界に到達したとき、静電加速器でさらに粒子を高エネルギーまで加速することは原理的に困難に思われた。

加速粒子の移動に伴って加速電場の位相を変化させ、移動中の粒子に加速電場をかけ続けることで、高いエネルギーまで加速する電子線形加速器(リニアック)の原理は G. Ising によって、1925年に初めて提案された。(Arkiv. Mat. Astron. Fysik. 18, (1925) 45)。円筒電極をシリーズに並べ、コンデンサーと放電ギャップを用いたパルサー間をそれぞれダイレイラインで接続し、電極間の高周波電場の位相を調節すると、電子を共鳴加速できるという案である。

R. Wideroe は 1928年に高周波を円筒状電極にかけて、Naイオンや Kイオンを高周波電場の約2倍ま

で加速させ、共鳴加速の原理を実証した。この論文でヒントを得た E. O. Lawrence は、磁場を利用した加速器に共鳴原理を応用し、サイクロトンを 1930年に完成させたのである。

その後、1931年には D.H. Sloan と E. O. Lawrence によって、直列に並べた円筒状電極を1つおきにつないで、約 30 MHz の高周波発生器と接続したりニアック(線形加速器)を試作し、速度の遅い H_g^+ イオンを約 1.2 MeV まで加速するのに成功している(Phys. Rev. 38 (1931) 2021)。一方、J.W.Beamsらはパルサーを使った電子線形加速器を用いて、電子を 1.3 MeV まで加速している(Phys. Rev. 44 (1933)784)。

レーダー開発に共ない、高い周波数の電力管が出現すると、重イオンより質量の小さい陽子の加速が可能となった。1946年には L. W. Alvarez が 200 MHz の電力管を用いた、いわゆる Alvarez 型の 32 MeV 陽子リニアックを完成させ、近代的な陽子リニアックの基礎を築いた。

一方、現在の電子リニアックは、1930年代の W. W. Hansen の基礎的な仕事に基づく。空洞共振器を直列に並べた加速管を使った電子リニアックが考案されたが、それに相応しい高周波源が当時なく、新しい方式の高周波源の開発が必要となった。それに答へ、バンチビームを利用したクライストロンが Varian 兄弟によって 1937年に開発され(Journal of Applied Physics, Feb. 1939)、その後の電子リニアックの開発にはずみがつく。

Hansen が 3 m 長の Stanford Mk-I リニアックで電子を 4.5 MeV まで加速させるのに成功した。1949年に 1 GeV Stanford Mk-III リニアックが提案され、そのプロトタイプとして 1955年に試作された Mark II では、20 MW の RF 出力を 4 m 長の加速管に入力して、電子を 40 MeV まで加速させた。Stanford Mk-III は建設過程でエネルギー増強が行われている。1951年には 75 MeV(10 m 長、8 MWクライストロン3台)、1953年には、600 MeV

(約 65 m)、1960年には 900 MeV(約100 m)、そして1964年には 1.2 GeV と。

Stanford MK-III の建設中に、全長 3 km の SLAC 計画が進められていた。建設直後のビームエネルギーを 15 GeV に設定し、その後のクライストロン増強によってエネルギーを 45 GeV までアップする計画であった。建設は1962年に始まり、1967年には当初の計画を上回る 20 GeV のリニアックが完成した。1970年に始まったクライストロンの出力増強により最終エネルギーを 30 GeV まで増強している。

その後、加速器を用いた高エネルギー物理学実験が、衝突型加速器を用いるのが主流になり始めると、SLACでは1台のリニアックで電子・陽電子衝突の物理実験を可能にするための改造計画が進められた。電子と陽電子を同方向に加速してそれぞれのアーク部で方向を偏向させた後、正面衝突させるリニアックを用いた衝突型加速器(Linear Collider)に改造し、同時にクライストロンを増強してエネルギーを 50 GeV までアップさせる SLC (Stanford Linear Collider)計画であった。TRISTAN や LEP のような電子・陽電子衝突型リング加速器では、バンチビームは光速でリング内を周回し続けるので、衝突回数は TRISTAN で $2 \times 10^4/\text{sec}$ である。それに比較して、SLCリニアックの繰り返し数は、60~120 Hz である。衝突型リング加速器と同様なルミノシティ(Luminosity)を得るために、ファイナルフォーカス系でバンチ・ビームを μm オーダーまで絞りこんで衝突させなければならない。SLCは、この技術的困難を克服した結果、1989年には Z^0 粒子の質量測定に成功し、将来の TeV 領域のリニアコライダーの可能性に明るい見通しをたてた。

日本でも電子リニアックに関しては古くからの伝統がある。低エネルギーから、高エネルギーまで、各種の研究用リニアックが数多く建設されてきた。高エネルギー物理学実験用の研究用リニアックとしては、2.5 GeVの高エ研電子・陽電子リニアック

クがTRISTAN入射器として活躍している。毎年開催されているリニアック研究会の最近のプロシードィングスから、研究用電子リニアックをリストアップしてみる。北大の45 MeVリニアック、東北大核理研の300 MeVリニアック、東大原子力施設の35 MeVと18 MeVのツインリニアック、原研の120 MeVリニアック、電総研の500 MeVリニアック、高エ研のリニアコライダーR&D用60 MeV試験リニアック、SORTECのVSOR入射器用40 MeVリニアック、東大核研のES入射器用電子リニアック、IHIのSOR入射器用45 MeVリニアック、日大のDSM入射器用5 MeVリニアック、阪大産研の35 MeV L-bandリニアックと145 MeV S-bandリニアック、京大原子炉のL-bandリニアックやその他の研究用リニアックが現在活躍している。

さらに、現在いくつかのリニアック建設計画がある。高エネルギー物理学実験用としては、TeV領域のエネルギーフロンティア物理を推進するための500 GeV + 500 GeVのJLC(Japan Linear Collider)計画が検討されており、さらにリニアコライダーのR&Dを進めるための試験加速器施設---ATF(Accelerator Test Facility)として、1.54 GeV ダンピングリング入射器用の1.54 GeV S-bandリニアック(全長50 m)と、1 GeV X-bandリニアック(全長16m)の設計と試作がKEKに於て進められている。PF-リニアックのB-Factory計画のためのエネルギー増強計画や、SPRING-8入射器用の1.5 GeVリニアックの建設計画、その他数多くの入射器リニアックの建設計画が練られている。また最近では

FEL(自由電子レーザー)用電子リニアックのR&Dも盛になりつつあり、電子リニアックの今後の発展が期待される。

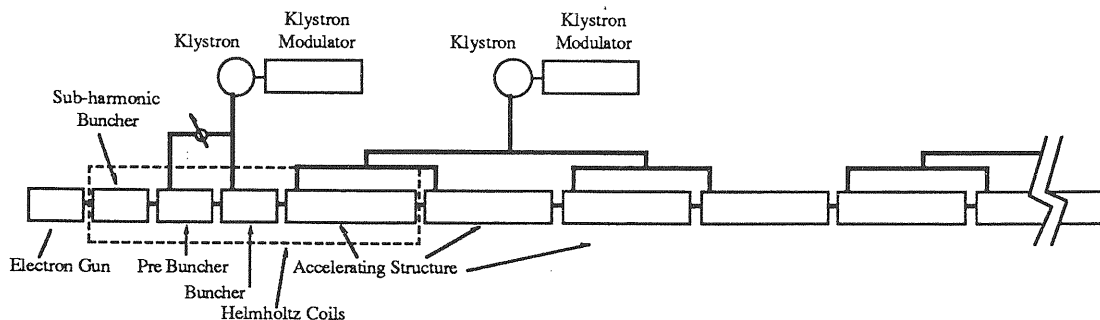
1.3 電子リニアックの構成

電子リニアックは、

- 1) 電子ビームを発生させるための電子銃、
- 2) ビームを速度変調してバンチに変換するバンチャー系、
- 3) バンチビームを高エネルギーまで加速するための加速管、
- 4) 加速されたビームを蓄積リングやビームダンプまで伝送するためのビームトランスポートライン、
- 5) 電子銃からビームダンプまでのビームの特性を測定するためのビームモニター、
- 6) RFパワーを発生させるためのクライストロンとモジュレーター電源
- 7) 制御室

から構成される。

1)から5)までは、高エネルギービーム電子の損失によって放射線レベルが上昇する恐れがあるので、トンネル内やコンクリートシールドで被った加速器室に設置する。6)のクライストロンとモジュレーター電源は、リニアック運転中でも保守が出来るように、加速器室とは独立に平行して建てられた電源室内に設置される。



1.3.1 電子銃

電子リニアックの電子銃は、任意のパルス幅のビームを発生させるため、グリッド付熱陰極の三極電子銃(Triode Gun)が一般に用いられる。陰極-陽極間の電圧は $-80 \sim -200$ kV が一般的で、高電圧電源としては、DC電源や、 $1 \sim$ 数 μ sのパルス電源が用いられる。グリッドには $-50 \sim -200$ V DCのバイアス電圧がかけられており、必要なパルス幅の電圧($+200$ V \sim +数kV)をグリッドに供給して、陰極からでた熱電子を陽極に向かって加速し、ビームとして取り出す。ピーク電流は最大のもので約20Aである。電子銃から取り出せるビーム電流はグリッド電圧とバイアス電圧の組み合わせで任意に調整できるが、5 ns以下のパルス幅では、パルサー自信の立ち上がり特性でグリッドパルサーの出力電圧が制限されたり、電子銃の周波数特性によって、ピーク電流が減少する。最近ではアバランシェトランジスタ等の半導体をグリッドパルサー回路に利用して立ち上がり特性を改善し、パルス幅 $1 \sim 2$ nsで約10Aの短パルスビームの発生が可能になった。

1.3.2 バンチャー系

1.3.2.1 プリバンチャー

電子銃から取り出された電子ビームは、プリバンチャーに入射される。プリバンチャーには加速管と同一基本周波数のリエントラント型低Qの単ギャップ空洞やTW(Traveling-Wave)型が良く用いられ、これらに必要とされるRFパワーは数kW \sim 20 kWである。プリバンチャー内でビームは、 $10 \sim 50$ kVのギャップ電圧で速度変調され、バンチャー入口までの距離を走行した後バンチビーム(バンチ長がRF波長対して $50 \sim 70^\circ$)となる。

1.3.2.2 サブハーモニック・バンチャー

大電流の単バンチを発生させるためには、プリバンチャーの基本周波数の約 $1/2$ 周期以内にパルス電子ビームを入射させなければならない。S-bandリニアックで単バンチを発生するには、全幅が175 ps以下のバンチビームをプリバンチャーに入射する必要があるが、熱陰極型電子銃で1 ns以下のパルス幅のビームを得ることは、現在のところ容易ではない。そこで、プリバンチャーの基本周波数の $1/n$ のサブハーモニックバンチャー(SHB)がプリバンチャーの前段に用いられる。電子銃で発生したビームのパルス幅が、サブハーモニック周波数の約 $1/2$ 周期内にあれば、ビームは速度変調され、或る距離を走行した後パルス幅は圧縮される。例えば、S-bandの $1/24$ のサブハーモニックバンチャー(119 MHz)を用いると、短パルス化可能なビームの全パルス幅は熱陰極型電子銃で充分可能な ~ 5 nsまで拡大できる。サブハーモニックバンチャーを用いると、電子銃からのビーム電流を増やさず、単バンチ内の電子数を増加することが可能となる。

バンチ間隔が、基本周波数の波長の n 倍であるマルチバンチを発生する場合も、単バンチ発生と同様に加速管の基本周波数の $1/n$ のサブハーモニックプリバンチャーをプリバンチャー前段に使用する。

1.3.2.3 バンチャー

プリバンチャーでバンチングされた電子ビームを、バンチャーで速度変調と追加速を同時におこない、さらにバンチング(バンチ長はRF波長の $10^\circ \sim 30^\circ$)する。バンチャーには数セル \sim 10数セルの $2\pi/3$ モードのTW(Traveling-Wave)型加速管が使用され、必要なRFパワーは $2 \sim 5$ MWである。バンチャー内でのビーム電子は、リニアックで異なるが、 300 kV \sim 2MeVまでの範囲のエネルギーまで追加速される。この間、電子の速度はプリバンチャー出口での速度($\beta \sim 0.5$)から $\beta = 0.75 \sim 0.99$ まで増加することになり、ディスク間隔を入口から出

口にかけて増加させ、電子の速度と高周波位相を一致させる。

1.3.3 加速管

光速近くになった電子をさらに高エネルギーまで加速するのが加速管の役目である。加速管の種類には、Standing-Wave(定在波)型と Traveling-Wave型の2種類があり、研究用の電子リニアックには後者(S-band 周波数、 $2\pi/3$ モード、全長2~3 m)が用いられる。2台または4台の加速管を1組にし、1台のクライストロンからパワーを分割してそれぞれの加速管に供給する方法が低コスト化の理由で良く採用される。しかし最近では、高加速勾配を得るために、加速管とクライストロンを1対1で接続する方法も採用され始めている。電子陽電子リニアコライダーでは、100 MeV/m の高加速勾配が必要となるが、S-band に比べてより高い周波数がRF-Breakdown Limitの点で有利である。従って、X-band 領域の周波数(S-band の4倍に相当する11.424 GHz)の加速管の開発が進められている。

1.3.4 RF源と電源

電子リニアックの加速管に供給するRF源として、大電力のRFパルスが発生可能なクライストロンが用いられる。電源としては、クライストロン変調器と呼ばれるPFNを用いたパルス電源が使用される。S-band クライストロンの電子銃のパービアンスは、 $2 \times 10^{-6} (A V^{-3/2})$ が一般的で、RF 出力パワーは電子銃の陰極電圧でほぼ決り、約270 kVで30 MW、約450 kVで100 MWとなる。

1.3.5 ビーム伝送系

リニアックのビームの伝送系には大別して、2種類ある。ひとつは、ビームを加速中にビームを収束させたり、進行方向を補正するための伝送系、も

うひとつはリニアックでビームを加速し終わったのち、ビームを希望する地点まで導く伝送系である。これらは、ステアリングコイルと収束用のQ-マグネットで構成されるが、後者ではビームの方向を変えるための偏向マグネットが用いられる。さらにビームのエネルギー分布を狭くするためのエネルギーコンプレッサー(ECS)マグネットやバンチ長を短縮するためのバンチコンプレッサー等が用いられることがあり、これらも伝送系の一部である。

1.3.6 ビームモニター

電子リニアックを運転制御するために必要とするビームの情報には次のものがある。リニアックで加速されるビームは、単バンチか、マルチバンチで構成されている。バンチの間隔は、プリバンチャーの周波数によって決定され、S-bandでは350 ps毎にバンチがモニターを通過する。1つのバンチの長さは数ps~20psで、この周波数領域でバンチ波形を電気信号としてモニターするのは技術的に容易ではない。リング加速器はビームが周回するので、周波数ドメインでの測定でビーム情報が得られる。しかしリニアックの場合は、単バンチまたはマルチバンチが、数Hzから数100Hzの繰り返しバーストでモニターを通過する。そのため、パルスビームとしての情報や、バンチ自信の情報をリアルタイム測定する必要が生じる。

1) ビームの波形

a) マルチバンチから構成されるビームのマクロなパルス電流波形を測定するためのコアーモニター。数nsから1 μ sまでのビームパルス幅で、最大ピーク電流が約10Aのパルスビームの波形モニターである。マルチバンチビームを測定すると、平均パルスビームとして観測され、バンチ構造(Fine Structure)をモニターすることはできない。アモルファスコアーを用いた周波数応答が良いものでは、S-band のバンチ構造が不完全ながら見える。

b) バンチ波形を光に変換すれば、時間分解能がサブpsのストリークカメラを利用して、バンチ波形のリアルタイム測定ができる。バンチが発生する放射光やチェレンコフ光を直接ストリークカメラで測定する方法が良く用いられる。また最近ではバンチが発生するコヒーレント光を利用したバンチ長の測定方法が進展しつつある。

2) ビームのプロファイル

a) ビームのプロファイルをリアルタイムで測定するには、光に変換する方法が一般的である。過去には、ZnSが塗られた金属箔が用いられたが、現在ではCrをドーブしたセラミックスが良く用いられる。セラミックスでは、ビーム電子が通過するとき電荷が蓄積し帯電するので、電子銃からの低エネルギーのビームの場合には特に影響を受けやすく正確なプロファイルの測定が容易でない。その他の光変換方式として、Al箔を電子が通過するときに発生するTransition Radiation を利用する方法、並びに合成石英板を電子が通過するときに発生するCerenkov光を測定する方法等がある。

b) ビームのプロファイルを測定するのに、ウィークバンドで発生する放射光を利用する方法がある。

3) ビームのポジション

a) ビームのポジションを測定するために、ボタン電極やストリップラインをビームダクト内の上下左右計4ヶ所に設けて、誘起信号の大小でビームのx、y方向の位置情報を得る方法がある。リング加速器ではバンチ周回周波数の情報が得られるので、周波数ドメインでの測定が可能であるが、リニアックではビームの繰り返し数が数10～数100 ppsと低く、そのためタイムドメインでしかも、リアルタイム測定が要求される。

b) 空洞共振器型ビームポジションモニター

ビームダクトに空洞を設置し、マルチバンチビーム(パルス幅が数100ns以上)が空洞内に励起するマイクロ波を検出して、ビームの位置を測定する方法である。TM₂₁₀モード矩形空洞共振器の中央にビームホールを開けて、リニアックの基本周波数の繰り返しで通過するマルチバンチの位置が測定できる。ビームの軸からのずれ(方向と距離)は、両端のカップリングアンテナで検出したRFの位相と出力電流で求める。

1.3.7 制御系

電子リニアックは、パルス運転するので、安定なビームを得るためには、リニアック全体をパルス毎に安定にできる制御システムが必要である。リニアックシステムの中で最もRF周波数が低いものを基準周波数とする。例えば、Sub-harmonic Buncherは加速周波数の1/nで運転されるので、マスタークロックをこの周波数に同期させたものを使用する。全てのTiming Delayのディジットはこのクロックによって行う。Klystron電源のPFNへの充電をPulse to Pulseで安定化するには、de-Q'ing回路に加えて、商用電源に同期させたタイミングで繰り返し運転するのが基本である。この場合は、マグネットの直流電源のリップルによる影響も減少する。各コンポーネントに独自のクロックを持たせず、システム共通のTimingクロックを持たせると、加速されるビームはパルス毎に安定化する。リニアックは、線形であるがために、システムの部分的な故障、例えば少数のクライストロンのdown等に対するFeed-back対策も重要である。Feed-back Routineが次パルスまでに終了できるなら、常に安定なビームが得られる。また、計算機ネットワークを有効に利用し、どこからでも、パルス波形が監視できるシステムが望ましい。良いリニアックは、良い制御システムによって実現出来るといっても過言ではない。

2 電子ビームとバンチビーム

電子銃で発生した非相対論的エネルギー領域(100 ~ 250 keV)の電子ビームは、バンチャー系でバンチされた後、第1加速管で相対論的エネルギー(数10 MeV)まで加速され、主リニアックの加速管で、高エネルギーまで加速される。電子銃から第1加速管(又は第1セクター)までを、リニアックの入射部と呼ぶ。入射部では、ビームが非相対論的エネルギー領域にあるので、Space Charge Effect(空間電荷効果)が問題となる。

電子銃は、空間電荷制限領域(Space Charge Limit)で動作しており、電子銃陽極から出た電子ビームは、空間電荷反発力のために発散する。し

かし、電子銃から出た直後のビームは、ビームウエストで層流になっている。この位置から外部磁場を用いて、ビームの層流状態を保ちながら相対論的エネルギーまで加速すると、エミッタンスを小さくすることができる。そのため、リニアック入射部では、ビームウエストに電磁シールドを設けた軸方向磁場中を Burillouin Flow させながら第1加速管まで導く。そして、第1加速管で相対論的エネルギーまで加速したビームを、磁場から取り出す方法がとられる。リニアコライダーR&Dを推進するための試験加速器施設 ATF(Accelerator Test Facility)の一部として、1.54 GeV S-band リニアックの入射部がTRISTAN 日光実験室で試作されている。第2.1図にその概略図を示す。

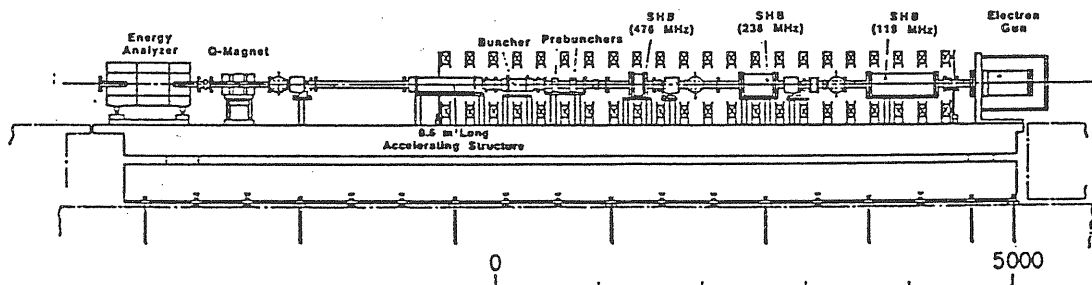


図2.1 ATF(Accelerator Test Facility—試験加速器施設)の1.54 GeV S-bandリニアックの入射部

第1加速管から出力される電子ビームは、相対論的エネルギーのバンチビームによって構成されている。リニアックで加速されたビームは、第2.2図のように、加速管RFの基本周波数で決まる時間間隔のマルチバンチで構成されている。さらにサブハーモニックバンチャーと、数nsの短パルス電子ビームが発生できる電子銃を用いると、第2.3図のように、たった一つのバンチ、すなわち単バンチ

の発生が可能である。バンチ長は1~3 mm(数ps ~ 10数ps)程度であり、1バンチ内の電子数は、マルチバンチ加速時は $10^8 \sim 10^9$ 、単バンチ加速では 10^{10} のオーダーで、瞬間ピーク電流にするとkAオーダーに達する。このような、大電流のバンチが加速管を通過するとき、空洞と相互作用した結果、過渡的電磁場であるWake Field(ウェークフィールド)が空洞内に誘起され、バンチ自信がこのWake Fieldの影響を受ける。これに関しては、

第6章にて考えることにしよう。ここでは、電子銃(100~200kV)で発生した非相対論的エネルギーの電子ビームが、主加速管で加速されるまでの入射部でどのような振舞いをするのかを見てみよう。具体的には、電子ビームの発散(Transverse Defocussing)、磁場中での運動(Brillouin Flow)、さらに Longitudinal Debunching について考える。

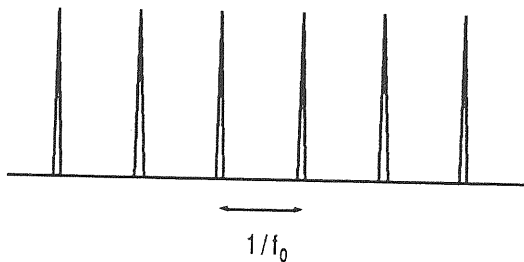


図2.2 Multi-Bunch (マルチバンチ)の波形。

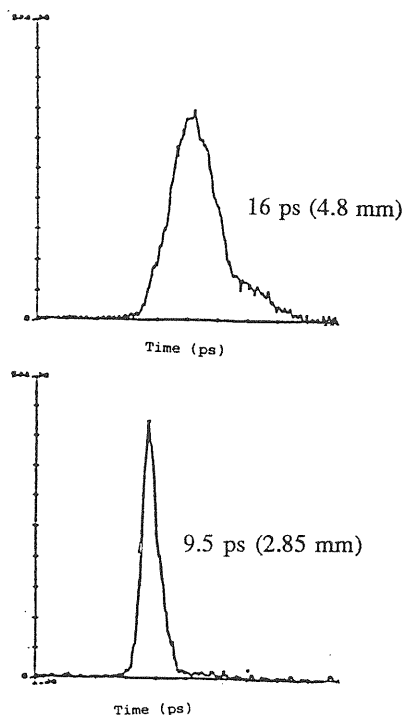


図2.3 Single Bunch (単バンチ)の波形。(Cerenkov 光をストリークカメラで測定)。バンチコンプレッサーを用いると、バンチ長(パルス幅)が圧縮できる。(S.Takeda, et.al., Proc. XIII HEPAC (Novosibirsk, 1986) p.315より)

2.1 電子のエネルギーと速度

粒子の速度 v は、

$$v = \beta C \tag{2a.1}$$

で表す。ここで、 β は光速 C (2.99793×10^8 m/s) に対する速度比である。

速度 βC の粒子の運動エネルギー(βC の粒子の運動エネルギー(Kinetic Energy) T は、全エネルギー(Total Energy)から静止エネルギーを引くことで求まる、

$$T = (\gamma - 1) m_0 C^2 \tag{2a.2}$$

ここで m_0 は粒子の静止質量で、 γ は全エネルギーと静止エネルギーの比で

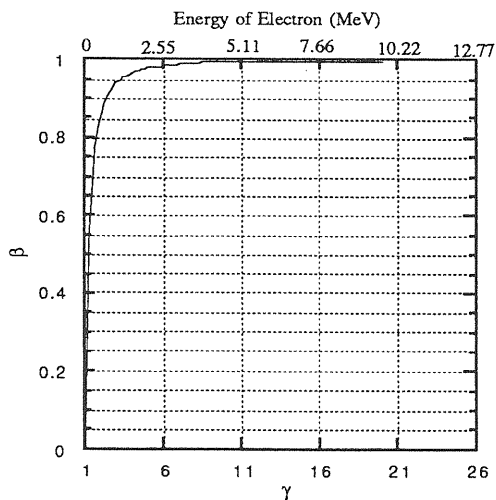
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{1a.3}$$

(2a.2)式、(2a.3)式から、運動エネルギー T である粒子の速度 βC は

$$\begin{aligned} \beta C &= \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} C \\ &= \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{T}{m_0 C^2} + 1\right)^2}\right)^{1/2} C \end{aligned} \tag{2a.4}$$

となる。

第2a.1図に粒子の速度と全エネルギー、並びに電子の速度と運動エネルギーの関係を示す。電子の静止エネルギー $m_0 C^2$ は、電子ボルト単位で 0.511 MeV である。電子は 3.1 MeV ($\gamma=7.1$) ですでに光速の 99.0% に達する。電子リニアックでは、バンチャーを通過し第 1 加速管に入射される電子のエネルギーは、数 MeV である。そのため、電子リニアックの加速管では相対論的速度の電子を加速することを取り扱う。



第2a.1図 電子の速度とエネルギー

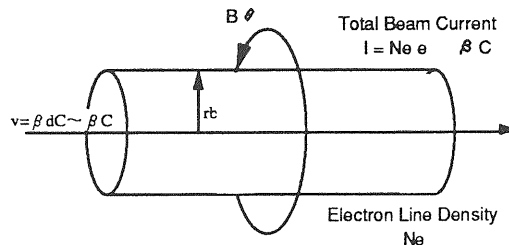
陽子と電子の静止質量の比は1836倍であり、陽子の静止エネルギーは、938.2 MeVとなる。同一速度の粒子の運動エネルギー比は、静止質量の比で表され、1 MeVの電子と1.836 GeVの陽子が同一速度であり、同様1.836 MeVの陽子は1 keVの電子と同一速度である。従って、陽子リニアックでは、電子リニアックとは異なり、非相対論的粒子の加速を取り扱う。

2.2. 円筒ビームの空間電荷効果による

Transverse Defocusing

Coasting Beamである直流電子ビームは空間電荷効果により Transverse Defocusing (発散)する。無限長で一様な円筒電子ビームが、外部磁場のない真空中にある場合を考える。第2.b.1図に示されるように、半径 r_b の円筒ビームを考え、 N_e は電子ビームの単位長当たりの電子数、 βC を電子の初期速度、 $\beta_d C$ を電子のドリフト速度、 $\beta_t C$ を電子の横方向速度、 r_e を電子の古典半径 ($r_e = e^2 / 4\pi \epsilon_0 m C^2$)、 v を $N_e r_e$ 、 γ を $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ とする。さらに残留気体がイオン化して単位長当たり N_i 個のイオンが電子ビーム内にトラップしている場合を考える。電子ビーム内の電場は E_r のみで、 $E_z = E_\theta = 0$ とし、電

子ビーム内の全ての電子について、軸方向の速度成分は一定であると仮定する。すなわち電子ビームの発散角は小さく、 $\beta_t \ll \beta_d$ 、 $\beta_d \equiv \beta$ となり、イオンはビーム軸に垂直にのみ運動する。



第2.b.1図 電子ビーム(Coasting Beam)のDefocusing

電子ビームの全電流 I は、

$$I = N_e e \beta C \quad (2.b.1)$$

で表される。無限長の円筒ビームを仮定したので、ガウスの公式

$$\int E dS = Q / \epsilon_0 \quad (2b.2)$$

より、ビーム内の r 点における E_r と B_θ は次のように求められる。

$$E_r = \frac{(N_e - N_i) e}{2\pi r \epsilon_0} \frac{r^2}{r_b^2} \quad (2b.3)$$

$$B_\theta = \mu_0 N_e e \beta C \frac{r^2}{r_b^2} \frac{1}{2\pi r} \quad (2b.4)$$

電子ビーム内の r 点での電子についての半径方向に関する運動方程式は、クーロン反発による外向きの力と B_θ による内向きの力とから求められる。

$$m \gamma \ddot{r} = e E_r - e \beta C B_\theta \\ = \frac{N_e e^2 (1 - \beta^2 - f) r}{2\pi r_b^2 \epsilon_0} \quad (2b.5)$$

ここで、 $f = N_i / N_e$ 、すなわちイオンによる電子ビームの電荷中性化率を表す。いま、

$\frac{d^2r}{dz^2} = \beta^2 C^2 \frac{d^2r}{dz^2}$ であるから、(2b.5)式は z に関

して表すと、

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{1}{m \gamma \beta^2 C^2} \frac{N_e e^2 (1 - \beta^2 - f) r}{2\pi r_b^2 \epsilon_0} \quad (2b.6)$$

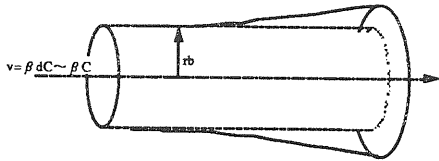
さて、 $v = N_e r_e = N_e e^2 / 4\pi \epsilon_0 m C^2$ であったから、(2b.6)式は、

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{2v}{\gamma} \frac{1}{\beta^2} (1 - \beta^2 - f) \frac{r}{r_b^2} \quad (2b.7)$$

となる。特に電子ビームのエッジでの電子に対する運動方程式は(2b.7)式に $r = r_b$ を代入して、

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{2v}{\gamma} \frac{1}{\beta^2 r_b} (1 - \beta^2 - f) \quad (2b.8)$$

電子ビームのエッジにある電子は、(2b.8)式が正のときビーム外部に向かって加速され、負のとき内部に向かって加速される。すなわち、 $(1 - \beta^2 - f)$ の正負でビームは Defocus するか収束する。



第2.b.2図 Defocus する電子ビーム

$f=0$ の場合には、 $0 < (1 - \beta^2) \leq 1$ になり、ビームは収束せず常に defocus する。相対論的領域の高エネルギーの電子ビームは $(1 - \beta^2) \sim 0$ となり、Defocussing Angle は小さくなる。

$(1 - \beta^2) \leq f \leq 1$ の場合は、電子ビームは部分的または完全に電荷中性化しており、この場合にはビーム電子に収束力が働く。このような状態は、電子リニアックにはないが、インダクション・リニアック等の大電流電子ビームを扱う加速器で問題となる。ここでは省略する。

2.3 Brillouin Flow

電子銃で発生した電子ビームは、充分相対論的な高エネルギーになるまでの区間、すなわち、リニアックの入射部 (電子銃の出口からプリバンチャー、バンチャー、そして第1加速管の出口まで) では、ビーム口径を一定に保つために、外部磁場中での回転運動 (Brillouin Flow) を含ませる。

座標系は第2c.1図に示すような円筒座標を考え、電子の密度が n で半径 r の円筒状の電子ビームが磁場の方向と同じ z 方向に進行する場合について考える。

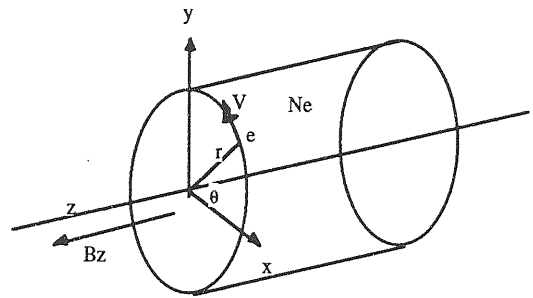


図2c.1 外部磁場中での電子ビーム

半径 r のところで、1個の電子をテスト粒子として、それに対するダランベールの原理を考えてみると、

$$\frac{m_e v^2}{r} - eE - evB_z = 0 \quad (2c.1)$$

ここで、 m_e 、 v はそれぞれ電子の質量と速度、 B_z は外部磁場を表す。一方、Gauss の定理より、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE) = - \frac{N_e e}{\epsilon_0} \quad (2c.2)$$

となり、これから電場 E が求まる。

$$E = - \frac{m_e}{2e} \omega_p^2 r \quad (2c.3)$$

ここで、 $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ で電子ビームのプラズマ周波数を表す。(2c.3)式を(2c.1)に代入して、 $\omega = v/r$ 、 $\omega_c = e B_z / m_e$ とすると ω に関する2次方程式

$$\omega^2 - \omega_c \omega + \frac{\omega_p^2}{2} = 0 \quad (2c.4)$$

が得られる。これより、

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega_c^2}} \right) \quad (2c.5)$$

となる。ここで、 ω/ω_c と $2\omega_p^2/\omega_c^2$ の関係は図2c.2に示す。

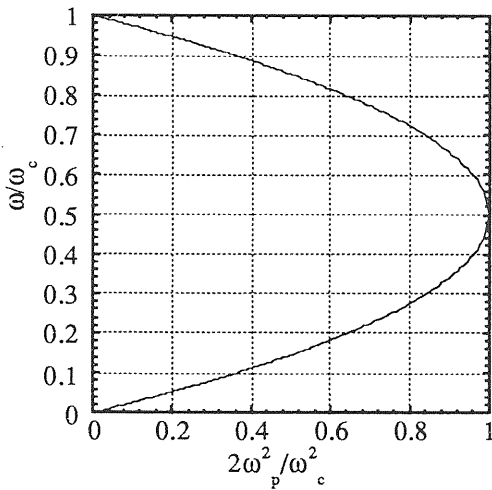


図2c.2 ω/ω_c と $2\omega_p^2/\omega_c^2$ の関係

$2\omega_p^2/\omega_c^2$ の各値に対して、2つの各周波数 ω が存在し、電子が小さいラーマ半径でかつ高周波で回転しながら、その回転中心がビーム軸を中心にゆっくりと回転していることを示している。

いま、

$$2\omega_p^2 = \omega_c^2 \quad (2c.6)$$

なる条件が満たされるとき、2つの角速度が一致して、

$$\omega = \omega_c / 2 \quad (2c.7)$$

となり、サイクロトロン周波数の半分の周波数でビーム軸を中心に回転する。この角周波数は半径 r に依存せず一定であるので、ビームはあたかも回転剛体のようにふるまう。このような状態の電子

ビームが Brillouin Flow である。(2c.6)式は、電子ビームの密度と外部磁場強度の関係を表す。

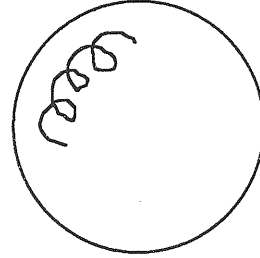


図2c.3 $\omega_c^2 > 2\omega_p^2$

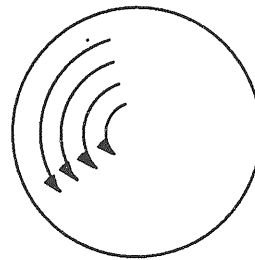


図2c.4 $2\omega_p^2 = \omega_c^2$ (Brillouin Flow)

(2c.1)式は、また

$$m_e r \omega^2 + e \frac{\partial V}{\partial r} - e B(r\omega) = 0 \quad (2c.8)$$

であるので、Brillouin Flow の角周波数 $\omega = \omega_c / 2$ を代入すると、

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{r e B^2}{4 m_e} \quad (2c.9)$$

となり、 V_0 をビーム軸上でのポテンシャルとすると、

$$V = V_0 + \frac{e B_z^2}{8 m_e} r^2 \quad (2c.10)$$

と半径 r の点でのポテンシャルが求まる。

一方、Poisson方程式は

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2c.11)$$

で、(2c.10)式を代入して解くと、

$$\rho = -\frac{\epsilon_0 e B_z^2}{2m_e} \quad (2c.12)$$

が得られる。即ち、電荷密度と磁場の強さとの関係が得られる。

非相対論領域の電子の運動エネルギーは

$$\dot{z} + (r\dot{\theta})^2 = \frac{2eV}{m_e} \quad (2c.14)$$

となり、これに $\dot{\theta} = \omega = \omega_c/2$ を代入すると、

$$\dot{z} = \left(\frac{2eV_0}{m_e} \right)^{1/2} \quad (2c.15)$$

と、磁場方向の電子の速度成分が求まる。

(2c.15)式は半径 r を含まないので、全電子が z 方向に同速度で運動していることになる。Brillouin Flow とは、まさにビーム剛体が軸を中心に回転しながら z 方向に進むことである。

Brillouin Flow をしているビームの全電流は、

(2c.12)、(2c.15)式から求められ、

$$\begin{aligned} I &= -\pi a^2 \rho \dot{z} \\ &= \pi \left(\frac{e}{m_e} \right)^{3/2} \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} B_z^2 a^2 V_0^{1/2} \end{aligned} \quad (2c.16)$$

となり、さらに(2c.10)式を代入すると、

$$I = \frac{8\pi\epsilon_0\eta^{1/2}}{\sqrt{2}} \frac{\eta B^2 a^2}{8} \left(V_a - \frac{\eta B^2 a^2}{8} \right)^{1/2} \quad (2c.17)$$

ここで、 V_a は $r=a$ の時のポテンシャルであり、 η は e/m_e である。

電流の最大値 I_m は

$$\frac{\eta B^2 a^2}{8} = \frac{2}{3} V_a \quad (2c.17)$$

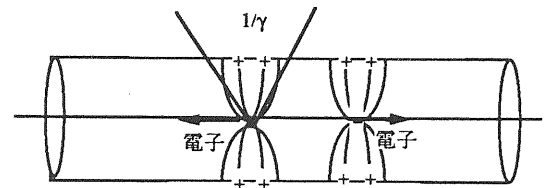
のとき求められ、

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{16}{3\sqrt{6}} \pi \epsilon_0 V_a^{3/2} \\ &= 25.4 \times 10^{-6} V_a^{3/2} \quad (A) \end{aligned} \quad (2c.18)$$

となる。

2.4 円筒ビームの空間電荷効果による Longitudinal Debunching

電子ビームに速度変調を与え、軸方向にバンチングするとき、空間電荷効果の影響で軸方向にディバンチする。電子銃で発生するビームエネルギーが 100~250 keV と非相対論領域にあるので、空間電荷効果が無視できない。リニアックでこの効果が重要になるのは、サブハーモニックバンチャーや、プリバンチャーである。



円筒ドリフトチューブ

図2d.1 円筒ドリフトチューブ内で空間電荷効果による反発力。

空間電荷効果による Debunching は、パルス電子ビームのエネルギー、パルス幅、ピーク電流、ビーム口径、ドリフトチューブ口径等種々のパラメータに依存する。ビームを効果的にサブハーモニックバンチャーでバンチするには、ギャップの相対位置、各ギャップにおける RF 電圧と位相に関して最適値を求めなければならず、計算機シミュレーションが必要となる。

計算を簡単にするために、パルス電子ビームのサブハーモニックバンチャー内における空間電荷効果を次のように簡略化する。

1) 半径方向に一樣に電子が分布している電子ビームは外部磁場中の円筒胴体内にあり、Brillouin Flow している。外部磁場の z 方向(ビーム方向)分布は、ビーム口径が一定になるようビームのバンチングに伴い強められる。

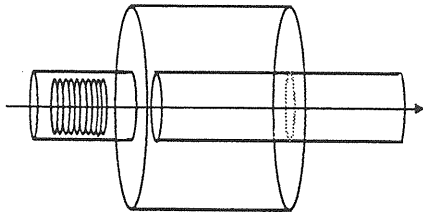


図2d.2 サブハーモニックバンチャー内に入射されるパルス電子ビーム(ディスク電荷で表す)。

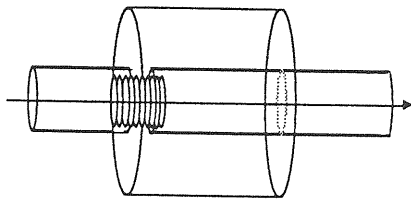


図2d.3 ギャップを通過中に速度変調を受けるパルス電子ビーム。

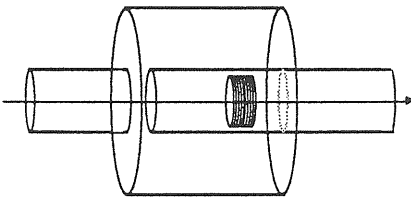


図2d.4 速度変調後バンチされるパルス電子ビーム。

2) ビームはギャップにおいても、円筒導体中を通過するものと仮定する。またビームがギャップを通過するとき、ビーム自身の self-field による空洞への励起も無視する。

3) ギャップにおける速度変調電圧はギャップ間のみ存在すると仮定する。

以上の仮定のもとで、円筒導体中のビームの空間電荷効果による軸方向のディバンチ力はディスクモデルを用いて解く。

口径 $2a$ の円筒内のディスク状電荷のポテンシャルは

$$\Phi = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 r} \sum_n \frac{J_1(j_{0n} \frac{b}{a}) J_0(j_{0n} \frac{r}{a})}{[j_{0n} J_1(j_{0n})]^2} e^{-j_{0n} \frac{z}{r}} \quad (2d.1)$$

で表される。ここで、 Q はディスクの電荷、 ϵ_0 は真空の誘電率、 $2b$ はディスクの口径、 $J_n(x)$ は第1種 n 次Bessel関数、 j_n は $J_n(x)$ の n 番目の根である。

従って、電場の成分は、 $E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ 、 $E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ であるので、

$$E_z = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 ab} \sum_n \frac{J_1(j_{0n} \frac{b}{a}) J_0(j_{0n} \frac{r}{a})}{j_{0n} J_1^2(j_{0n})} e^{-j_{0n} \frac{z}{r}} \quad (2d.2)$$

ここで、 $E_r(b) / E_z = b/2a$ であるので、

$$E_r = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 ab} \sum_n \frac{J_1(j_{0n} \frac{b}{a}) J_1(j_{0n} \frac{r}{a})}{j_{0n} J_1^2(j_{0n})} e^{-j_{0n} \frac{z}{r}} \quad (2d.3)$$

同一形状の他のディスク上に働く平均軸成分電場は次式で表される。

$$\overline{E_z} = \frac{2Q}{\pi\epsilon_0 b^2} \sum_n \left[\frac{J_1(j_{0n} \frac{b}{a})}{j_{0n} J_1(j_{0n})} \right]^2 e^{-j_{0n} \frac{z}{a}} \quad (2d.4)$$

パルス電子ビームを N 個の厚みのないディスクに分割すると、 j 番目のディスクによって i 番目のディスクに加えられる力は、それらの2つのディスクの電荷とディスク間の距離によって基本的に決定される。いま i 番目と j 番目のディスク間の距離 z_{ij} を

$$z_{ij} = |z_i - z_j| \quad (2d.5)$$

とすると、 i 番目のディスクに $N-1$ 個の他のディスクから働く全電場は、

$$E_i = \frac{2Q}{\pi \epsilon_0 b^2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(j_{0n} \frac{b}{a})}{j_{0n} J_1(j_{0n})} \right]^2 e^{-j_{0n} \frac{z}{a} \operatorname{sgn}(z_{ij})} \quad (2d.6)$$

となる。

軸方向電場 E_i によって、 i 番目のディスクのエネルギー γ_i は

$$\frac{d\gamma_i}{dz} = \frac{e}{m_0 C^2} E_i \quad (2d.7)$$

となる。ここで e は電子の電荷、 m_0 は電子の静止質量、 C は光速である。

ここで、各ディスクの位置を、RF 周波数 f 、波長 $\lambda = C/f$ 、位相速度 $V_{ph} = \beta_0 C$ のマイクロ波に対する相対位相で表し、相対論的補正すると、 i 番目のディスクと j 番目のディスク間の距離は

$$z_{ij} = \frac{(\gamma_i + \gamma_j)}{2} \beta_0 \lambda \frac{(\theta_i - \theta_j)}{2\pi} \quad (2d.8)$$

となる。

(2d.6)、(2d.7)、(2d.8) 式寄り i 番目のディスクのエネルギー変化は、

$$\frac{d\gamma_i}{dz} = \frac{2eQ}{\epsilon_0 m_0 \pi b^2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_1(j_{0n} \frac{b}{a})}{j_{0n} J_1(j_{0n})} \right]^2 \times e^{-\left| \frac{j_{0n} (\gamma_i + \gamma_j)}{2} \frac{(\theta_i - \theta_j)}{2\pi} \lambda \right|} \operatorname{sgn}(\theta_i - \theta_j) \quad (2d.9)$$

位相速度 β_0 の波に対するディスクの位置の変化は、

$$\frac{d\theta_i}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_i} \right) \quad (2d.10)$$

ここで $\beta_i C$ は i 番目のディスクの速度を表す。 $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - \beta_i^2}$ であるので、

$$\frac{d\theta_i}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_i^2 - 1}} \right) \quad (2d.11)$$

(2d.9) と (2d.11) 式は、ディスクがドリフト・チューブ内を通過しているときの空間電荷効果を表す。一方ディスクが空洞ギャップを通過しているとき、ディスクはギャップ間に存在する RF 電場により加速又は減速される。ディスクのエネルギー変化は、

$$\frac{d\gamma_i}{dz} \Big|_{\text{rf}} = \frac{e}{m_0 C^2} E_0 \sin \theta_i \quad (2d.12)$$

ここで、 $E_0 \sin \theta_i$ はディスクがギャップ中で受ける RF 電場を表す。(2d.9)、(2d.11) と (2d.12) 式で空洞ギャップ中に存在するディスクの空間電荷効果を表す。

SHB に入射するディスクの間隔、すなわち軸方向分布は、電子銃からのパルス電子ビームの電流波形から求まる。パルスビームの立ち上がり、立ち下がりでは、ビーム内の電子密度が低くなるので、ディスク間隔を広くする。例えば、単バンチ電子ビームを発生するには、SHB の 1 つのバケット内に電子ビームを入射しなければならない。S-band の 24th Subharmonic 周波数 (119 MHz) の SHB では、パルス幅が約 3 ns 以下の短パルス電子ビームを電子銃で発生する必要がある。この場合は、電子ビームのパルス電流波形は Gaussian 形状をしている。電流波形 $I(t)$ はピーク電流を I_0 とすると、

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (2d.13)$$

ここで、パルスの半値幅 $\tau_p = 2.36 \sigma$ である。パルス電子ビームを N 個のディスクに分割すると、ビームの全電荷は $N \cdot Q$ で、

$$NQ = 2\sqrt{\pi} \sigma I_0 \quad (2d.14)$$

となる。

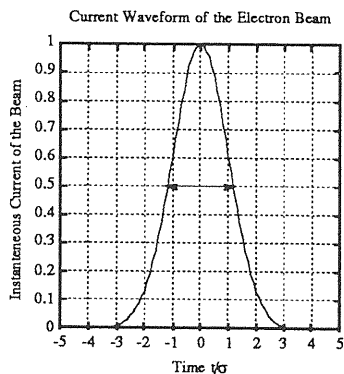


図2d.4 短パルス電子ビームの波形(Gaussian)

クライストロンの設計にディスクモデル用いたシミュレーションコードで、Coasting Beamの速度変調を取り扱う。単バンチビームを発生するには、数 ns のパルス幅の短パルスビームに速度変調をかけることになるので、クライストロン設計用のコードをそのまま利用することはできない。ここでは筆者が作成した Simulation Code -Super Disk-III (NEAC Ver.)を用いて、電子銃からの短パルスビームが SHB で速度変調する様子を、以下の仮定のもとでシミュレーションしてみる。

1) 電子銃からのビームパルス波形が Gaussian であるとし、等電荷の N 個のディスクが、電荷分布が Gaussian になるように軸上に分布している。従っ

て、電流値の高いパルス中心では、ディスクの間隔が最も狭くなり、パルスの裾野では、間隔が広がる。(ディスクを等間隔に分布させて、電荷に Weight をかける方法も考えられるが、計算を用意するためには等電荷の方が都合が良い。)

2) 電子銃からの電子ビームは、層流の条件を満たして、磁場中に入射される。ここで、バンチング中は、ビームの口径が一定に保たれるよう、磁場の軸上分布が選ばれているとする。

3) SHB空胴と短パルスビームの相互作用によって誘起される電磁場を無視する。

第2d5図に、1台の24th Sub-harmonic Buncher [119 (=2856/24)MHz]によって、ピーク電流が0.1 A から20 Aまでの電子ビームが、全長5 m のドリフトチューブ内を走行する間にバンチングしていく過程のシミュレーション結果を示す。ビームのエネルギーは120 kV、Gaussian 波形のビームのパルス幅は4.5 ns、ギャップ電圧は±20 kVで、RFとビームのパルス中心との位相差を0° とした。ビームの初期速度で伝播するRFからディスクを観測するので、横軸はRFのゼロクロス位置、縦軸はディスクのRFに対する位相を表す。

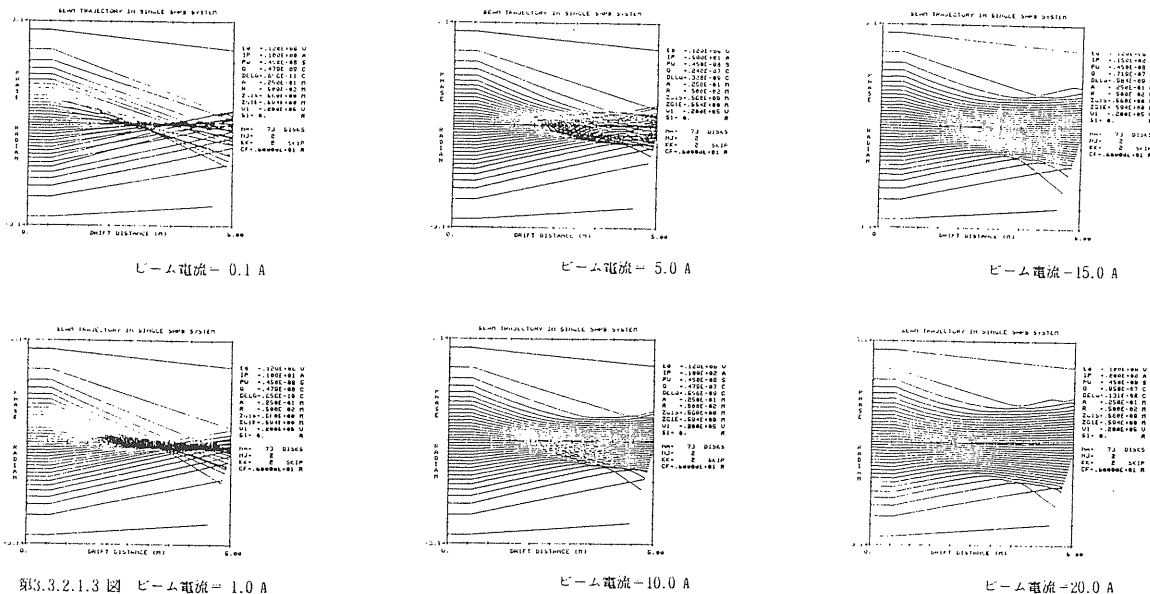


図2d5. 119 MHz のSub-harmonic Buncher によって速度変調された Gaussian Beam のバンチング。

これらの図から、次のことがわかる。

1) SHB のギャップで速度変調されたビームは、ドリフトチューブ内を走行するにつれてバンチングされる。2) ビーム電流が、0.1 A のときは、弱電流のため空間電荷効果による反発力が小さい。そのため、バンチングが進んだ後は、テール電子が先頭電子を追い越してデバンチングがはじまる。

2) ギャップでの速度変調によって、パルスビームの先頭電子の速度が減少し、テール電子の速度は増加する。その結果、ビーム電子のエネルギー分布幅が拡大する。しかし、ビーム電流が 5 A になると、空間電荷効果による反発力が増加して、先頭電子は加速され、テール電子は減速される。その結果、バンチングが最も進んだ時点、即ちパルス幅が最短になったとき、ビームの全電子のエネルギーが、入射時とほぼ等しいエネルギーに再びそろえることになる。

3) ビーム電流をさらに 20 A まで増加すると、空間電荷効果による反発力が大きくなり、パルス幅圧縮の効果が小さくなる。

4) パルス幅を短縮しようとして、ギャップ電圧 ΔV (kV) を増加しても、パルス幅が最小になるドリフト距離は短くなるが、高いバンチング効果は望めない。なぜなら、パルスビーム内の全電子が同時に速度変調されるのではなく、ギャップを通過している電子のみが変調される。そのため先頭電子は、テール電子に比べて早い時点で速度変調され速度が減少する。さらにビームエネルギーが 100 ~ 200 keV でも相対論的効果が現れ、パルスのテールにおける電子の速度増加に比べて、パルス先頭における電子の速度の減少は大きい。その結果、テール部分のバンチングが有効であっても、先頭部分は空間電荷効果の反発力で、すでに加速されてデバンチに移行している。

5 A ~ 20 A の大電流のパルスビームを、プリバンチャーのアクセプタンス内にバンチングするには、1台の SHB ではなく、複数の SHB を用いるのが有

効的である。第1番目のSHBによってバンチされエネルギーがそろったビームを、さらに SHB で速度変調をかけると、ビームパルス幅がさらに圧縮される。プリバンチャーのアクセプタンス内に全電子が入るまで、SHBの個数を増やすことで、有効的なバンチングが可能となる。後段の SHB では、パルス幅が短縮されているので、最大ギャップ電圧を下げるために、高い RF 周波数を選ぶ。1例として、KEK のリニアコライダー R&D 用試験リニアックでは、1段が 1/24、2段目は 1/12、3段目は 1/6 のサブハーモニック周波数の SHB で構成されている。第 2.d.6.図に3段SHBのバンチングのシミュレーション例を示す。

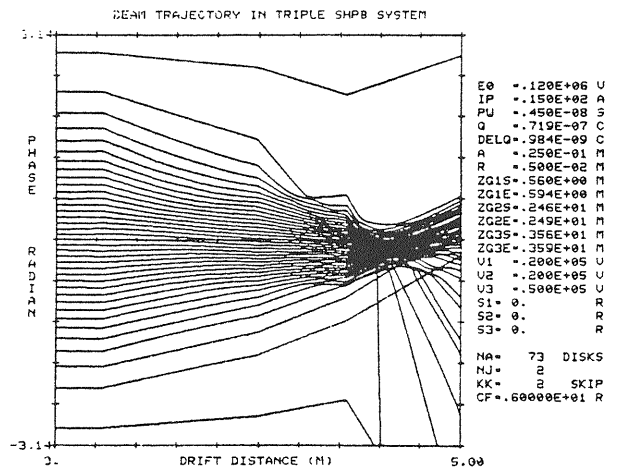


図2.6 3台のSHBを用いた場合のシミュレーション結果の1例

3. 加速管中の電磁場

3.1 円形導波管内を伝播する電磁場

電磁場は $E_z = 0$ で $B_z \neq 0$ の TE(Transverse Electric) Mode と $B_z = 0$ で $E_z \neq 0$ の TM(Transverse Magnetic) Mode の和で表される。円形導波管内では、これらの2つのモードは独立で、電子を加速できるのは、 $E_z \neq 0$ の TMモードである。

円形座標系 (r, θ, z) を用いて Maxwell 方程式から得られる波動方程式を E_z について表すと、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \quad (3a.1)$$

ここで、

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \omega^2 \epsilon \mu \quad (3a.2)$$

ここで、変数分離法 ($E_z = E_{zr} E_{z\theta} E_{zz}$) を用いると、(3a.1)式は

$$\frac{d^2 E_{zz}}{dz^2} = -k_z^2 E_{zz} \quad (3a.3)$$

$$\frac{d^2 E_{z\theta}}{d\theta^2} + m^2 E_{z\theta} = 0 \quad (3a.4)$$

$$\frac{d^2 E_{zr}}{d(k_c r)^2} + \frac{1}{k_c r} \frac{dE_{zr}}{d(k_c r)} + \left(1 - \frac{m^2}{(k_c r)^2} \right) E_{zr} = 0 \quad (3a.5)$$

ここで

$$k_c^2 = k_z^2 + k^2 \quad (3a.6)$$

(3a.3)式は

$$E_{zz} = C_1 e^{-k_z z} + C_2 e^{k_z z} \quad (3a.7)$$

(3a.4)式は、三角関数で表され、

$$E_{z\theta} = B_1 \cos m\theta + B_2 \sin m\theta \quad (3a.8)$$

(3a.5)式は Bessel 方程式で、解は $k_c r$ を変数とする第1種、第2種の m 次 Bessel 関数、 $J_m(k_c r)$ 、 $N_m(k_c r)$ で与えられる。

$$E_{zr} = A_1 J_m(k_c r) + A_2 N_m(k_c r) \quad (3a.9)$$

ここで、口径 $2a$ の円形導波管を考えると、TMモードの境界条件を考えると、

導波管内のどの場所においても

$$B_z = 0 \quad (0 \leq r \leq a) \quad (3a.10)$$

$$E_z = \text{有限} \quad (0 \leq r \leq a) \quad (3a.11)$$

で、かつ導波管内壁表面での $E_z|_s$ は

$$E_z|_s = 0 \quad (r=a) \quad (3a.12)$$

第2種 m 次 Bessel 関数は、 $N_m(0) = -\infty$ であるので、(3a.11)式より(3a.9)式の第2項は 0 でなくてはならない。従って、 $A_2 = 0$ であり、かつ(3a.12)式より

$$J_m(k_c a) = 0 \quad (3a.13)$$

となる。 $J_m(y_{mn}) = 0$ の根を y_{mn} とすると、

$$k_c = y_{mn}/a = 2\pi/\lambda_c \quad (3a.14)$$

(3a.6)式より

$$k_z = (k_c^2 - k^2)^{1/2} = \{ (y_{mn}/a)^2 - \omega^2 \epsilon \mu \}^{1/2} \quad (3a.15)$$

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$m = 0$	2.40	5.52	8.65
$m = 1$	3.83	7.02	10.17
$m = 2$	5.14	8.42	11.62

第3a.1表 $J_m(y_{mn}) = 0$ の根

$k_z = 0$ のとき、遮断波長 λ_c が求まり

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{y_{mn}} \quad (3a.16)$$

例えば、 TM_{01} モードに関する λ_c は、表1.1より $\lambda_{c01} = 2\pi a / 2.40 = 2.61a$ となる。

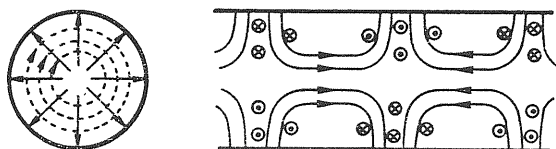
$kc > k$ ($\lambda > \lambda_c$) のとき、円形導波管内を伝播できない。 $kc < k$ ($\lambda < \lambda_c$) のとき、 $k_z = j\beta$ となり、

$$E_z = J_m\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \cos m\theta e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3a.17)$$

TM_{mn}モードの E_r 、 E_θ は、(3a.17)式で得られた E_z から求めることができる。

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{j\beta}{k^2 - \beta^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ &= -j \frac{\beta}{(y_{mn}/a)} J_m'\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \cos m\theta e^{-j(\omega t - \beta z)} \quad (3a.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= -\frac{j\beta}{k^2 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \\ &= j \frac{\beta m}{(y_{mn}/a)^2} J_m\left(\frac{y_{mn}}{a}r\right) \sin m\theta \frac{1}{r} e^{-j(\omega t - \beta z)} \quad (3a.19) \end{aligned}$$



第3a.2図 円形導波管内の電磁界分布

3.1.1 円筒導波管内のTM₀₁モードの位相速度と群速度

さて、ここで TM₀₁モードについて考えてみよう。縦軸に k ($=\omega/C$)、横軸に β をとり、(3a.6)式

$$k^2 = \beta^2 - k_c^2$$

をプロットすると、図3a.1のような分散図が得られる。

位相速度 v_p は

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (3a.20)$$

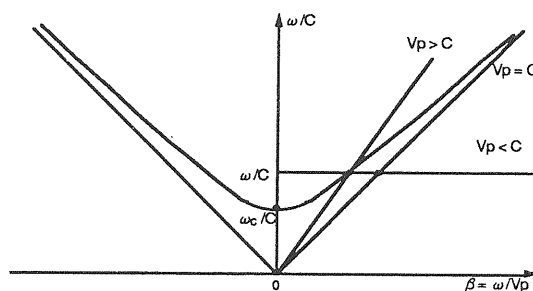


図3a.1 円形導波管内の分散図 (Brillouin Diagram)

図3a.1より、 $v_p/C > 1$ 、すなわち位相速度は光速より大である。従って、円形導波管の軸上に電子ビームを入射しても、加速することはできない。

群速度 v_g は、

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (3a.21)$$

$$v_p \cdot v_g = C^2 \quad (3a.22)$$

より、群速度 v_p は位相速度とは逆に $v_g < C$ となる。

3.2 周期構造(Periodic Structure)中の電磁場

前節で、加速に寄与すると期待された円形導波管の TMモードの位相速度が光速より大であることが解った。電子を光速以上にはできないので、円形導波管内を伝播する TMモードの位相速度を何らかの方法で、電子と同じ速度($\beta + 1$)まで下げる必要がある。円形導波管内に誘電体(ϵ_r)を充填させれば $1/\epsilon_r^{1/2}$ 倍に減少するが、ビーム電子のドリフトスペースが真空でなければならないことに反する。

内部が真空の円形導波管内に、ディスクを図3b.1のように周期的に並べると、ディスクは Capacitive Load に似た働きをし、位相速度が減少する。無限長の周期構造における波動方程式は、

$$E_r(r, \theta, z) = e^{-\gamma z} E_1(r, \theta, z) \quad (3b.1)$$

$$H(r, \theta, z) = e^{-\gamma z} H_1(r, \theta, z) \quad (3b.2)$$

ここで、 E_1 と H_1 は周期関数

$$E_1(r, \theta, z+d) = E_1(r, \theta, z) \quad (3b.3)$$

$$H_1(r, \theta, z+d) = H_1(r, \theta, z) \quad (3b.4)$$

である。隣接したセルに、間隔 d の2枚の Terminal Plane を仮定すると、電磁場は、セルからセルへ伝播する $e^{-j\beta_0 d}$ を除くと周期的である。周期関数は Fourier 級数展開でき、

$$E_1(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{1n}(r, \theta) e^{-j(2n\pi)z/d} \quad (3b.5)$$

となる。従って、電場は、

$$E(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{1n}(r, \theta) e^{-j\beta_n z} \quad (3b.5)$$

$$\beta_n = \beta_0 + 2\pi n/d \quad (3b.6)$$

ここで、 β_0 は基本空間高調波の伝播定数を表す。

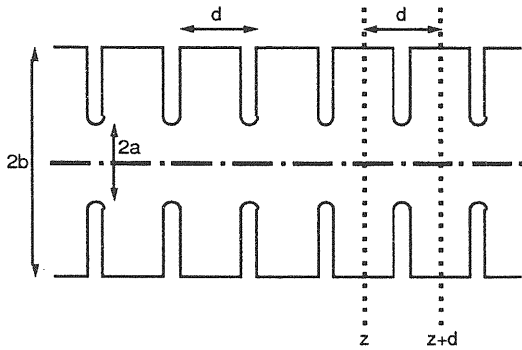


図3b.1 Disk-Loaded Structure.

円形導波管の境界条件を満足しなければ並ないので、

$$E_z = \sum_n E_{0n} J_0(k_{cn} r) e^{-j\beta_n z} \quad (3b.7)$$

$$E_r = j \sum_n \frac{\beta_n}{k_{cn}} E_{0n} J_1(k_{cn} r) e^{-j\beta_n z} \quad (3b.8)$$

$$H_\theta = \frac{j}{Z_0} \sum_n \frac{k_0}{k_{cn}} E_{0n} J_1(k_{cn} r) e^{-j\beta_n z} \quad (3b.8)$$

ここで、

$$\beta_n^2 = k_0^2 - k_{cn}^2 \quad (3b.9)$$

また、 $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon} = 377\Omega$ である。 ω における空間高調波の位相速度 v_{pn} は、(3b.6)式から明らかなように、

$$v_{pn} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_0 + \frac{2\pi n}{d}} \quad (3b.10)$$

群速度 v_{gn} は、

$$v_{gn} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \frac{d\omega}{d\beta_0} = v_g \quad (3b.11)$$

となる。

図(3b.2)に示す Disk-Loaded 加速管の分散図から明らかなように、或る周波数 ω に対して、伝播定数 β_n ($n=0 \sim \infty$) が決定され、それぞれの交点における勾配が同一であることから、群速度 v_g が同一であることがわかる。

また、 $\beta=0$ 、または $\beta=\pi/d$ のとき、それぞれパサバンドの lower と Upper Cutoff 周波数で群速度 $v_g=0$ となる。

基本空間高調波に関しては、

$$\beta_0 = \frac{\omega}{C} \quad (3b.12)$$

で、 $v_p=C$ であるがために光速のビーム電子の加速に寄与する。

Traveling Wave 型の加速管では、

$$\beta_0 d = \frac{2\pi}{3} \quad (3b.13)$$

のモードを採用する場合が多い。

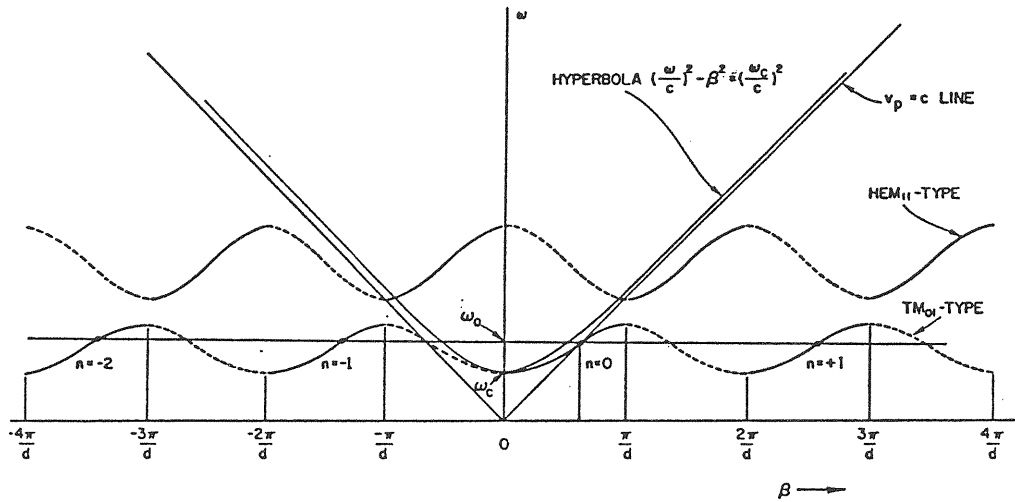


図3b.2 Disk-Loaded 加速管における Brillouin Diagram。(G.A.Loew and R.B.Neal: "Linear Accelerator", North-Holland,p.43 より)

3.3 周期構造 (Periodic Structure) 内を伝播するパルス電磁場

電子リニアックの加速管には、 μs オーダーのパルス RF を数10から数100 Hzの繰り返しで入力する。ここでは、Disk-Loaded 加速管をパルス RF がどのように伝播するかを考えてみよう。

Disk-Loaded 加速管を伝播するパルス RF については、J. Leissによる Filter Network モデルを使った解析と、R.H.Helmによる Coupled Resonator モデルを使った解析がある。ここでは、Coupled Resonator モデルに基づいて考える。

加速管が Band-Pass Filter の特性を持つが故に、有限の時間で立ち上がるパルス RF は、加速管内を伝播するにつれ振幅と位相の両方が振動する。RF の立ち上がり部分が基本周波数 F_0 に対して対称な Side-band $\pm \Delta f$ を作りだす。前節図3b.2 の定加速勾配型加速管(Constant Gradient Structure)の Brillouin Diagram が示すように、動作点は Diagram の中央付近にある。従って、図3c.1に示すように、2個の Side-band ベクトルは、Carrier ベク

トルの上で、それぞれ反対方向に $\pm \Delta f$ の速度で回転する。その結果、合成ベクトルの大きさや方向が振動する。この変調は、マルチビームを加速するとき、バンチのエネルギーゲインのバラツキを拡大することになる。

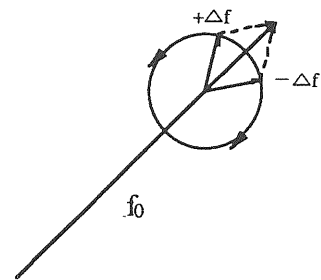


図3c.1 2個の Side-band ベクトルは、Carrier ベクトルの上で、それぞれ反対方向に $\pm \Delta f$ の速度で回転する。

R.H.Helm は図3c.2 のような Coupled Resonator を Vector Potential A の波動方程式を用いて解析している。n番目のセルについて A_n の波動方程式は次のように与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2\beta_n \frac{\partial}{\partial \tau} + \omega_n^2\right) A_n(\tau) - \omega_n \left\{ \Omega_{n-1/2} A_{n-1} \left(\tau + \frac{d}{v}\right) + \Omega_{n+1/2} A_{n+1} \left(\tau - \frac{d}{v}\right) \right\} = \frac{4\pi}{U_n} \int_{\text{cavity}} \Psi_{zn}^*(r') J_z(r', \tau - \frac{z'}{v}) d^3r' \quad (3c.1)$$

ここで、 $A_n(\tau)$ は n 番目のセルにおける Vector Potential、 $\Psi_n(r')$ は n 番目のセルにおける Vector Potential の Characteristic spatial distribution で

$$\Psi_{zn}(r')$$
はその z 成分、 $\tau = t - \int_0^{z_n} dz/v(z)$ で

電子の通過時間に関連した"Local"な時間、 ω_n は特性周波数パラメータ、 $\beta_n = \frac{1}{2}\omega_n/Q_n$ で損失係数、 $\Omega_{n\pm 1/2}$ はセル間のカップリング、 U_n は蓄積エネルギーに比例し、 $J_z(r', \tau)$ は v の速度の電流密度を表す。ともかく、(3c.1)式の左辺は、共鳴項と減衰項、そして空洞間の結合項を表し、右辺はビームとの結合項を表す。

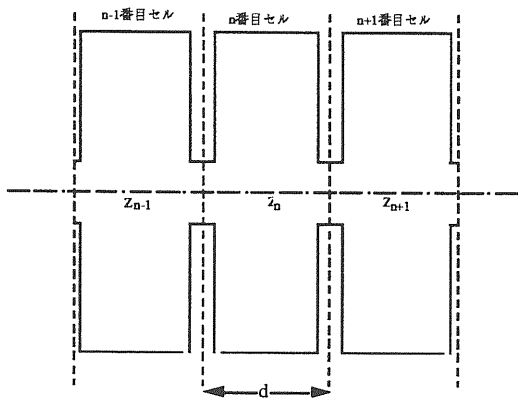


図3c.2 Coupled Resonator。ここでは、Disk-Loaded 加速管を考える。

ここで、 β_n 、 Ω_n の構造定数はセルごとに異なるとしているが、実際の加速管では隣接したセル間の変化は小さい。従って、 A_n について Froquet の定理が成立し、

$$A_n = A_{n-1} e^{-iknd} \quad (3c.2)$$

となる。そして、分散特性は

$$\omega_n^2 + 2i\beta_n\omega - \omega^2 \approx 2\omega_n\Omega_n \cos knd \quad (3c.3)$$

と与えられる。バンド幅が ω_n に比べて小さく、 Q が高いので、 $\Omega_n \ll \omega_n$ 、 $\beta_n \ll \omega_n$ であると仮定できるので、(3c.3)式は、

$$\omega_n + \beta_n - \omega \approx \Omega_n \cos knd \quad (3c.4)$$

と近似される。同様に(3c.1)式は1階の微分方程式、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta_n + i\omega_n\right) A_n(\tau) + \frac{i}{2} \left\{ \Omega_{n-1/2} A_{n-1} \left(\tau + \frac{d}{v}\right) + \Omega_{n+1/2} A_{n+1} \left(\tau - \frac{d}{v}\right) \right\} = \frac{2\pi}{i\omega U_n} \int_{\text{cavity}} \Psi_{zn}^*(r') J_z(r', \tau - \frac{z'}{v}) d^3r' \quad (3c.5)$$

となる。

加速モードは軸付近で、Transverse 方向に均一である。位相を含めた複素数量で表した電子のエネルギー利得 $W_n(\tau)$ は

$$W_n(\tau) = \int_{\text{cavity}} E_z \left(\tau + \frac{z'}{v}\right) dz' \quad (3c.6)$$

と定義できる。 E_z は(3c.5)の A_n から、 $E_z \approx -i\omega_n A z$ で与えられ、(3c.6)式より $W_n(\tau)$ は

$$W_n(\tau) \approx -i\omega_n F_n A_n(\tau) \quad (3c.7)$$

となる。ここで、 F_n は分布 Ψ の中から位相速度が光速($v=c$)となる空間波成分の Fourier 変換で、すべての空間高調波の中での基本波の含まる割合を表す。

$$F_n = \int_{\text{cavity}} \Psi_z(z') e^{i\omega_n z'/v} dz' \quad (3c.8)$$

波動方程式(3c.5)式は(3c.7)式を用いて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta_n + i\omega_n\right) W_n(\tau)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i}{2} \{ \Omega_{n-1/2}^* W_{n-1}(\tau) + \Omega_{n+1/2}^* W_{n+1}(\tau) \} \\
 & \approx \beta_n R_n I(\tau)
 \end{aligned}
 \tag{3c.9}$$

ここで $I(\tau)$ はビーム電流、

$$\Omega_{n\pm 1/2}^* = \Omega_{n\pm 1/2} e^{\pm i \omega_n d/v}
 \tag{3c.10}$$

セル当たりの Shunt Impedance R_n は、

$$\frac{R_n}{Q_n} = \frac{2\beta_n R_n}{\omega_n} = \frac{4\pi}{\omega} \frac{|F_n|^2}{U_n}
 \tag{3c.11}$$

と定義される。

Disk-Loaded 加速管を伝播するパルス RF の過渡現象は、(3c.9)式を計算機で数値積分すれば求められる。

R.H.HelmによってSLACの3m長 S-バンド定加速勾配型加速管がシミュレーションされている。その結果を図3c.3に示す。また、SLACで実際に測定された結果を図3c.4に示す

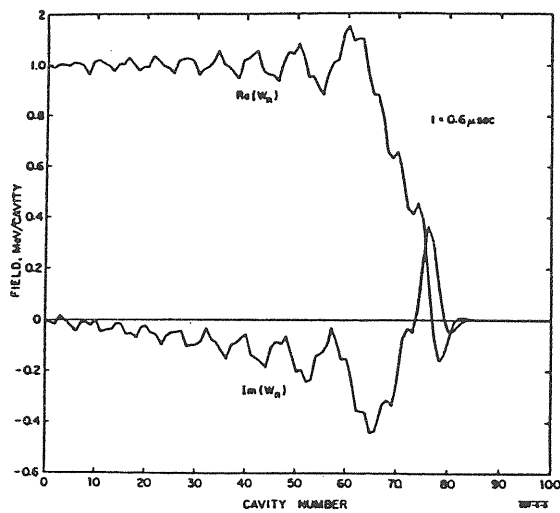


図3c.3 加速管入口から Step Function の RF が入力されてから 0.6 μ s後の加速管内の Field Distribution を示す。(The Stanford Two Mile Accelerator (1968)、P.123より)

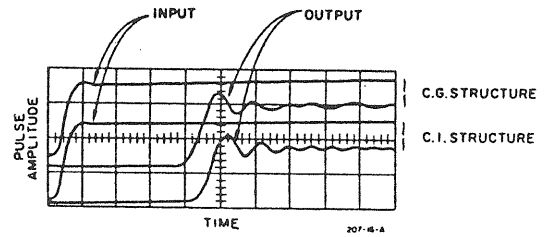


図3c.4 SLACで測定されたデータ。全長3 m、 $\tau=0.57$ 、 $2\pi/3$ モードの定加速勾配型加速管と定インピーダンス型加速管。

リニアックでは、ビームのエネルギー幅を狭めるために、RFパルスの立ち上がり部分が加速管最終セルを通過中にビームを入射させて、エネルギー補正をとる方法が良くとられる。図3c.3が示すように、電場のAmplitudeは、フロントピーク後も最大0.9~1.2の範囲で振動している。しかしRFの群速度は電子の速度(光速)の1%程度であるので、ビーム電子のエネルギーゲインの幅は積分効果で減少する。R.H.Helmのシミュレーションによると、図3c.5に示すように、ビームのエネルギーゲインの幅は上記の条件で、約1%である。

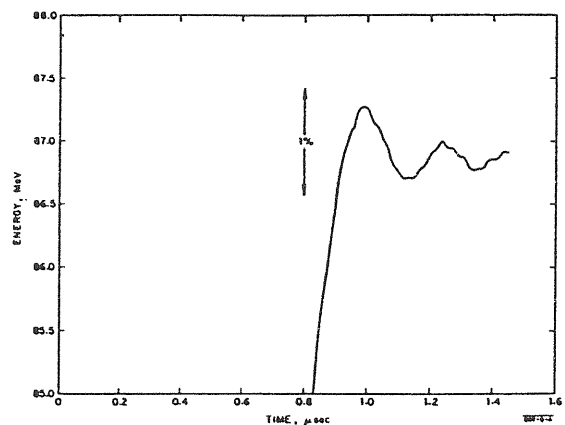


図3c.5 電子のエネルギーゲインの時間依存。(The Stanford Two Mile Accelerator (1968)、P.125より)

4 Traveling-Wave 型加速管のパラメータ

電子リニアックのTraveling-Wave型加速管に関するRFパラメータを理解しておこう。TW型リニアックの加速管は複数の空胴セル(数個～数10個)が連結されており、RFパワーの入出力は加速管両端でおこなう。RFパワーは入力カップラーを通して加速管の第1空胴セルに入力され、加速管内を群速度 v_g で伝播する。最終空胴セルに到達したRFパワーは出力カップラーを通じて加速管外に出力され、ダミー・ロードで熱エネルギーに変換される。加速管のパラメータとはPower Flow Theoryに基づくものでRFパワーの流れ方を表す。

4.1 シャント・インピーダンス r_0 (Shunt Impedance)

空胴又は加速管の単位長さ当たりのシャント・インピーダンス、 r_0 は、空胴又は加速管の加速電界発生効率を表すパラメータであり、次式で定義される。

$$r_0 = -\frac{E^2}{dP/dz} \quad (4a.1)$$

ここで、 E は加速管軸上での加速電場であり、 $-dP/dz$ は加速管壁で消費するRFパワーの単位長さ当たりの量である。シャント・インピーダンスが高い加速管は、加速管壁でのRF消費に対して高い加速電界が得られる。

4.2 Q値 (Factor of Merit Q)

Q値は共振器としてのRF空胴の質を評価するパラメータであり、次式で定義される。

$$Q = -\frac{\omega w}{dP/dz} \quad (4a.2)$$

ここで、 ω はRFの角周波数、 w は加速管内に蓄積されたRFエネルギーの単位長さ当たりの量である。

r_0/Q なるパラメータが次のように得られる

$$r_0/Q = \frac{E^2}{\omega w} \quad (4a.3)$$

4.3 群速度 v_g (Group Velocity)

加速管内を伝播するRFの群速度 v_g は、RFのエネルギーの流れの速度を表す。いま、加速管内の或る空胴セル(Cell)に注目すると、この空胴を通過するパワー P と、この空胴内の単位長さ当たりの蓄積エネルギー w の比で群速度が定義される。前式(4a.2)を用いると、

$$v_g = \frac{P}{w} = -\frac{\omega P}{QdP/dz} \quad (4a.4)$$

4.4 アテネーション・コンスタント τ (Attenuation Constant)

Q値と v_g の定義から、

$$dP/dz = -\frac{\omega P}{v_g Q} = -2\alpha P \quad (4a.5)$$

$$dE/dz = -\alpha E \quad (4a.6)$$

ここで、 α は加速管単位長さ当たりのネッパ (Neper) を単位とするアテネーション (Attenuation Coefficient) で、RFパワー P や加速電界 E の加速管に沿っての減衰率を表す。加速管の入口から z の点における加速電場 E とRFパワーは

$$E = E_0 \exp\left[-\int_0^z \alpha(z) dz\right] \quad (4a.7)$$

$$P = P_0 \exp\left[-2\int_0^z \alpha(z) dz\right] \quad (4a.8)$$

となる。ここで、 E_0 と P_0 は加速管の入口での加速電場とRFパワーである。

アテネーション・コンスタント τ は、全長 L の加速管の場合

$$\tau = \int_0^L \alpha(z) dz \quad (4a.9)$$

と定義され、加速管入口と出口での加速電界や RF パワーの減衰を示すパラメータとなる。

定インピーダンス型加速管(Constant Impedance Structure、略して CZ-Structure)では、加速管のどの部分をとっても形状が全て同じ空洞セルで構成されるので、 α は一定であり、RF パワーと加速電界は加速管に沿って一様に減衰する。従って第(4a.9)式から、

$$\tau = \alpha L = \frac{\omega L}{2v_g Q} \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (4a.10)$$

そして、加速管出口での加速電場と RF パワーは、それぞれ

$$E_L = E_0 e^{-\tau} \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (4a.11)$$

$$P_L = P_0 e^{-2\tau} \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (4a.12)$$

となる。また加速管入口から z の点での加速電場と RF パワーは

$$E(z) = E_0 e^{-\alpha z} = E_0 e^{-(\omega/2v_g Q)z} \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (4a.13)$$

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z} = P_0 e^{-(\omega/v_g Q)z} \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (4a.14)$$

である。

群速度 v_g は、ディスク穴の口径に大きく依存する。口径が小さくなると v_g は遅くなり、そのため α は大きくなる。一方、シャント・インピーダンス r_0 はディスク穴の口径に対して大きくは変化しない。

Traveling-Wave型加速管を通過する RF パワーは加速管出口に近くなるほど減衰する。定加速勾配型加速管(Constant Gradient Structure、略して CG-Structure)では、図4a.1 に示すように加速管出口に近づくにつれディスク穴の口径を小さくして α を大きくさせ、

$$dP/dz = -2\alpha(z)P = \text{constant} \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.15)$$

すなわち加速管内の単位長当たりの消費パワーを一定にさせることで、加速管内の加速電場は入口から出口まで一定になる。

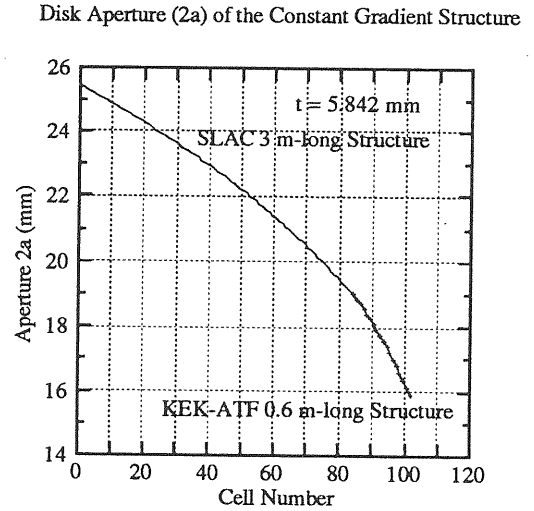


図4a.1 定加速勾配型加速管(CG-Structure)のディスク穴の口径(ディスク厚さ $t=5.842$ mm のS-バンド加速管、SLAC の3m管とKEK-JLC-ATF 0.6m管)

加速管内の消費パワーは、

$$dP/dz = -(P_0 - P_L)/L \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.16)$$

となり、加速管入口から z の点における通過パワーは、

$$P = P_0 - \frac{(P_0 - P_L)z}{L} \quad (4a.17)$$

となる。第(4a.9)式の τ の定義から、定加速勾配型加速管での入口と出口での RF パワーの関係は、

$$P_L = P_0 e^{-2\tau} \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.18)$$

となり、定インピーダンス型加速管の場合 [(4a.12)式] と同様になる。さらに τ を用いると、(4a.17)式は

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{(1 - e^{-2\tau})z}{L}\right) \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.19)$$

(4a.16)式は

$$dP/dz = -P_0 (1 - e^{-2\tau})/L \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.20)$$

となる。

4.5 Filling Time t_f

加速管に RF パワーが充満する時間、すなわち RF パワーを加速管に入力してから加速管出口に到達する時間を Filling Time t_f として定義する。

定加速勾配型加速管では、群速度を加速管に沿っての $P(z)$ の減少に合わせて減少させる。(4a.5)式と(4a.20)式から、

$$\omega P(z)/v_g(z) Q = P_0(1 - e^{-2\tau})/L \quad (4a.21)$$

これを、(4a.19)式に代入すると、

$$v_g(z) = \omega L/Q \left(1 - (1 - e^{-2\tau})z/L\right)/(1 - e^{-2\tau}) \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.22)$$

が求まる。

ここで、Filling Time t_f は、 $dt = dz/v_g$ を加速管全長に渡って積分すると求めることができる。

(4a.21)より、

$$t_f = [Q(1 - e^{-2\tau})/\omega L] \int_0^L \frac{1}{1 - (1 - e^{-2\tau})z/L} dz$$

$$t_f = 2Q\tau/\omega \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.23)$$

定インピーダンス型加速管の Filling Time t_f は、加速管内の群速度は一定であるので、(4a.10)式より、

$$t_f = L/v_g = 2Q\tau/\omega \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (4a.24)$$

となり、(4a.23)式の定加速勾配型加速管(CG-Structure)の場合と全く同一である。

実際の加速管を Design するにあたり、Attenuation Constnat τ と加速管の全長 L は完全に独立でないことに注意すべきである。まず或る τ 値を有する定加速勾配型加速管(CG-Structure)を考える。ディスク穴口径を大きくすると、全長 L は長くなる。従って、平均群速度の速い加速管を作る場合は、全長を長くしなければならない。

Group Velocity of Constant Gradient Structure

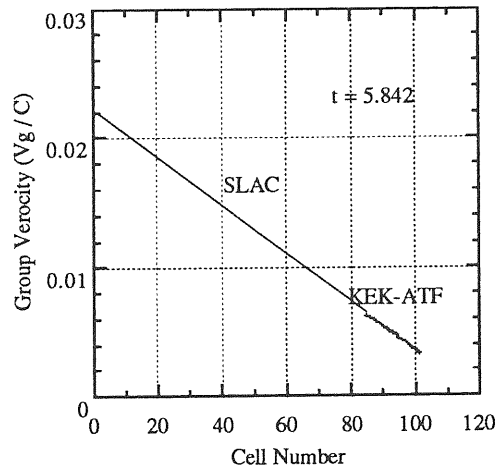


図4a.2 定加速勾配型加速管(CG-Structure)内の群速度。

4.6 RF の全蓄積エネルギー W

今、 τ が同じ、定インピーダンス型加速管と定加速勾配型加速管があるとすると、両者の Filling Time t_f は、(4a.23)式と(4a.24)式より同じである。出力が P_0 の RF を両者の加速管に入力し、 t_f 後に加速管全体に蓄積されている RF エネルギーを比較してみよう。蓄積エネルギーは(4a.5)式より、 $w = P/v_g$ で表せる。

定加速勾配型加速管(CG-Structure)の全蓄積エネルギー W は、(4a.19)式と(4a.22)式から w を加速管全長に渡って0からLまで積分して、

$$W = P_0 t_f [(1-e^{-2\tau})/2\tau] \quad (\text{CG-Structure}) \quad (4a.25)$$

となる。

定インピーダンス型加速管の全蓄積エネルギー W は、 $P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$ より、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^L w \, dz = \int_0^L (P_0 e^{-2\alpha z})/v_g \, dz \\ &= (P_0 L/v_g) [(1 - e^{-2\alpha L})/2\alpha L] \end{aligned}$$

従って

$$W = P_0 t_f [(1-e^{-2\tau})/2\tau] \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (4a.26)$$

(4a.25)式と(4a.26)式から、全蓄積エネルギーに関しても定加速勾配型加速管、定インピーダンス型加速管の両者とも同じとなる。

4.7 Structure Efficiency η

加速管全体に蓄積されているエネルギー W と、RF 源から加速管に入力した全エネルギーの比を Structure Efficiency η として表す。

$$\eta = W / P_0 t_f \quad (4a.27)$$

(4a.26)式から、

$$\eta = (1 - e^{-2\tau})/2\tau$$

$$(\text{CG-Structure} \ \& \ \text{CZ-Structure}) \quad (4a.28)$$

となり、これもまた定加速勾配型加速管、定インピーダンス型加速管で共通である。

第5章で考える、Structure Parameter η_s は、或る平均加速勾配を得るために必要な Structure の Parameter として定義されるもので、ここでの Structure Efficiency η とは異なるので、注意が必要である。

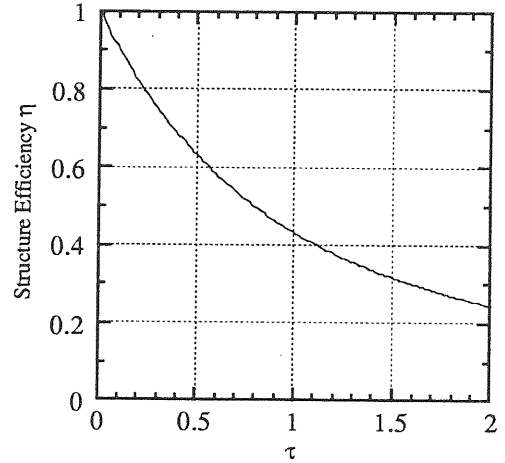


図4a.3 加速管の効率(Structure Efficiency) η と τ の関係。

4.8 エラスタンス s (Elastance)

エラスタンスとは、基本モードについての損失パラメータ(Loss Parameter)を表すパラメータで、加速電場の二乗と、単位長当たりの蓄積エネルギーの比で表される、

$$s = E^2/w \quad (4a.29)$$

(4a.3)式の $r_0/Q = E^2/\omega w$ から、

$$s = w(r_0/Q) = 4k_0 \quad (4a.30)$$

ここで、 k_0 は基本モードについての損失パラメータ(Loss Parameter)で、 s は周波数 f の二乗に比例する。

以上のように、Shunt Impedance r_0 と Q 値がディスク孔の口径に依存しないという仮定が成立する範囲では、Attenuation Constant τ は定加速勾配型加速管、並びに定インピーダンス型加速管に対して同一の RF 特性を示すパラメータとなる。この仮定が成立するとき、 τ が同じ異種の加速管を比べると、加速管入口出口間の RF の減衰、Filling Time t_f や全蓄積エネルギー W が同じことを意味している。

4.9 パラメータの周波数依存性

出力が 30 ~ 100 MW の S-band 大出力パルスクライストロンが現在入手できるので、この周波数(日米では 2.856 GHz、ヨーロッパでは 2.999 GHz)が研究用リニアックに広く採用されている。その他の周波数領域では、レーダー用大出力クライストロンを利用した L-band リニアック(1.3 GHz)が大電流のビームが加速できる利点があるため、少数ではあるが建設されている。現在開発研究が進められている TeV 領域のリニアコライダーでは、加速勾配を高めるために 11.424 GHz の X-band 領域の周波数が採用されようとしている。

さてここで、パラメータの周波数依存性について考えてみよう。モードが同じ(例えば $2\pi/3$ モード)で周波数の異なる加速管を比較するとき、Scaling Law が成立する。従って、加速管セルの Geometry を周波数に逆比例させて Scaling することは、図 3b.2 に示した Brillouin Diagram を縦軸と横軸に関してそれぞれ同じ割合で Zooming することと同じである。また Zooming によって位相速度と群速度は変化しないことがわかる。従って、

$$v_g = \frac{P}{w} = -\frac{\omega P}{QdP/dz} = \text{constant} \quad (4b.1)$$

である。いま、セル数即ち、加速管の全長を

$$\tau = \alpha L = \frac{\omega L}{2v_g Q} \quad (4b.2)$$

が同一になるように選択すると仮定すると、各パラメータの周波数依存は、次のようになる。

シャント・インピーダンス r_0 は

$$r_0 = -\frac{E^2}{dP/dz} \propto \omega^{1/2} \quad (4b.3)$$

Q値(Factor of Merit Q)

$$Q = -\frac{\omega w}{dP/dz} \propto \omega^{-1/2} \quad (4b.4)$$

従って、

$$r_0/Q = \frac{E^2}{\omega w} \propto \omega \quad (4b.5)$$

加速管の全長 L は τ が同一の加速管を比較しているので、

$$L = \frac{2v_g Q}{\omega} \tau \propto \omega^{-3/2} \quad (4b.6)$$

Filling Time t_f は、

$$t_f = 2Q\tau/\omega \propto \omega^{-3/2} \quad (4b.7)$$

となる。

5章の(5.2)式、(5.6)式で τ を固定すると、加速勾配 E_a は $(P_0 r_0/L)^{1/2}$ に比例する。従って同一 E_a を得るために必要な RF 入力 P_0 は、

$$P_0 \propto E_a \frac{L}{r_0} \propto \omega^{-2} \quad (4b.8)$$

従って、加速管1本当たりの Stored Energy W は、

$$W = P_0 t_f [(1-e^{-2\tau})/2\tau] \propto \omega^{-7/2} \quad (4b.9)$$

となる。

$L \propto \omega^{-3/2}$ であったので、単位長当たりの Stored Energy w は、

$$w \propto \omega^{-2} \quad (4b.10)$$

となる。

エラストランス s は

$$\begin{aligned} s &= E^2/w \\ &= \omega(r_0/Q) = 4k_0 \propto \omega^2 \end{aligned} \quad (4b.11)$$

である。

5 リニアックのエネルギー利得 (Energy Gain without Beam Loading)

ビーム・ローディングがない場合、すなわち加速する電子ビームが存在せず、ビームと加速管空洞との相互作用がない場合についての、エネルギー利得を考える。極めて弱い電流の電子ビームを加速したときのビーム電子のエネルギー利得は、相互作用が無視できるので、ここで求めるものと一致する。

定加速勾配型加速管(CG-Structure)における加速電場は、(4a.1)式と(4a.20)式から $r_0 = -E_a^2 / (dP/dz)$ 、 $dP/dz = -P_0(1 - e^{-2\tau})/L$ であったので、

$$r_0 = \frac{E_a^2}{P_0(1 - e^{-2\tau})/L} \quad (5.1)$$

すなわち、

$$E_a = (P_0 r_0 / L)^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2} \quad (\text{CG-Structure}) \quad (5.2)$$

加速管内のどの場所においても、軸上の電場が同じであるから、エネルギー利得 V は、

$$\begin{aligned} V_{CG} &= E_a L \\ &= (P_0 r_0 L)^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2} \quad (\text{CG-Structure}) \quad (5.3) \end{aligned}$$

一方、定インピーダンス型加速管においては、(4a.13)式、 $E(z) = E_0 e^{-(\omega/2vgQ)z}$ を加速管全長にわたって積分すると、(4a.10)式より $\alpha = \omega/2vgQ$ で、 $\tau = \alpha L$ であるので

$$\begin{aligned} V_{CZ} &= \int_0^L E(z) dz = E_0 \int_0^L e^{-\alpha z} dz \\ &= E_0 L (1 - e^{-\tau}) / \tau \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (5.4) \end{aligned}$$

(4a.1)より、 $E_0 = [-r_0 (dP/dz)]^{1/2}$ 、また、(4a.5)より、加速管内では、 $dP/dz = -2\alpha P = -2(\tau/L)P$ であったから、加速管入口でのRF入力を P_0 とすると、

$$\begin{aligned} E_0 &= [P_0 r_0 (2\tau/L)]^{1/2} \\ &= [P_0 r_0 / L]^{1/2} [2\tau]^{1/2} \quad (5.5) \end{aligned}$$

従って、定インピーダンス型加速管のエネルギー利得は、

$$V_{CZ} = (P_0 r_0 L)^{1/2} [(1 - e^{-\tau}) (2\tau)^{1/2}] \quad (\text{CZ-Structure}) \quad (5.6)$$

となる。

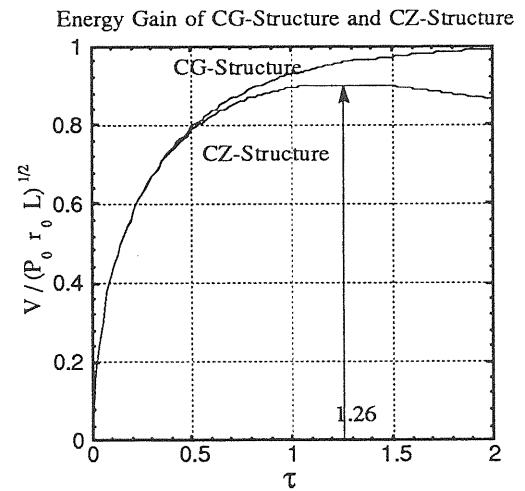


図5.1 CZ加速管とCG加速管の τ とエネルギー利得の関係。(5.3)式と(5.6)式を図示したもの。

(5.3)式と(5.6)式を τ についてプロットしたのが、第5.1図である。定加速勾配型加速管(CG-Structure)のエネルギー・ゲインは τ の増加につれて1に近づくが、定インピーダンス型加速管(CZ-Structure)のエネルギー・ゲインは $\tau = 1.26$ のとき最大となる。

6 ビームと空胴の相互作用(Beam-Cavity Interaction)

第2章では、非相対論的エネルギー領域における Coasting Beam の空間電荷効果について考えた。ここでは、相対論的エネルギーのバンチビーム (Bunched Beam) と空胴の相互作用について考えることにしよう。

バンチビームと空胴の相互作用に関する興味は、1960年代に研究が盛であった Collective Accelerator (集団加速器) に遡る。図6.1に示すように、大電流のパルス電子ビームを磁場中にドーナツ状にトラップし、磁気断熱圧縮で高密度の電子リングを作り、電子リングのポテンシャル内にイオンをトラップさせる。電子リングを RF リニアックを用いて、高エネルギーまで加速すると、電子と同速度のイオンが得られ、このときイオンのエネルギーは、電子に対する質量比倍に達する。高エネルギーのイオン加速器が小型で実現できるので、当時注目された。

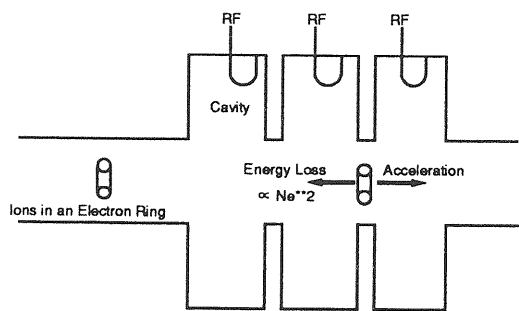


図6.1 ERA(Electron Ring Accelerator)。イオンを電子リング内にトラップさせ、電子リニアックで電子と共に加速しようとするけれども、空胴内への電磁場励起による損失のためリングを高エネルギーまで加速できない。

しかし、電子リングを RF リニアックで加速するとき、リングと空胴の相互作用による電磁場が空胴内に励起され、リング電子がエネルギーを失うことに気が付いた。リング内の電子数に比例して電磁場強度が増大するので、損失エネルギーも同

じく比例して大きくなる。イオンをトラップするのに必要な高密度の電子リングでは、リング電子の損失エネルギーがリニアックによる加速エネルギーを上廻るため、リングを高エネルギーまで加速できない。小さい電子リング(バンチでも同様)と空胴との相互作用が "Collective Effect (集団効果)" であった。それ以後、バンチ・ビームと空胴の相互作用は、大電流のバンチを蓄積するリング加速器においても重要課題となり研究が進むことになる。

リニアックで加速されるビームは、第2章で明らかのように、 $10^{10} \sim 10^{11}$ 個の電子が、狭い空間(バンチ長が 1 mm ~ 数 mm 以下、バンチ口径が 1 mm 以下)に集合しバンチで構成される。将来のリニアコライダーでは、X-band 主リニアック内で、バンチ長は数 100 μm 、バンチの口径は 100 μm のオーダーになる。現存のリニアックですら、バンチの瞬間ピーク電流は数 100 A ~ kA オーダーに達する。このような、大電流のバンチがリニアック加速管を通過するとき、空胴と相互作用した結果、過渡的電磁場である Wake Field (ウェークフィールド) が空胴内に誘起され、バンチ自身がこの Wake Field の影響を受ける。Wake Field の Longitudinal 成分は、バンチ内の電子にエネルギー変化を与え、結果的にバンチのエネルギー分布が変わる。また、Transverse 成分は、ビーム方向に対して横方向の力を与えて、結果的にビームのエミッタンスを悪化させる。Wake Field に関しては、周波数領域 (Frequency Domain) と、時間領域 (Time Domain) の 2 つのモデルがある。バンチが CW で周回するリング加速器では周波数領域のモデルが有効である。一方、リニアックではパルス運転され、バンチは特定の加速管を 1 度だけしか通過しない。単バンチや数少ないバンチを加速する場合には、特に時間領域のモデルが有効で、直感的に理解し易い。ここでは、時間領域で Wake Field について考えることにしよう。

6.1 自由空間における点電荷による電磁場

バンチが発生する電磁場は、個々の電子が発生する電磁場の重畳(Superimpose)によって求めることができる。静止系において、自由空間内の1点に置かれた電荷 q の荷電粒子が、距離 r の点に作るポテンシャル ϕ は、粒子を中心とした球面上で一定となる。従って、電気力線は図6a.1に示されるように、電荷から球面に向かって垂直方向かつ球対称である。

実験室系における電場は、静止系の電場を Lorentz 変換することで、求められ、静止系において球対称であった電気力線は、実験室系では、図6a.1に示すように荷電粒子の進行方向に垂直方向に $1/\gamma$ の割合で収縮される。

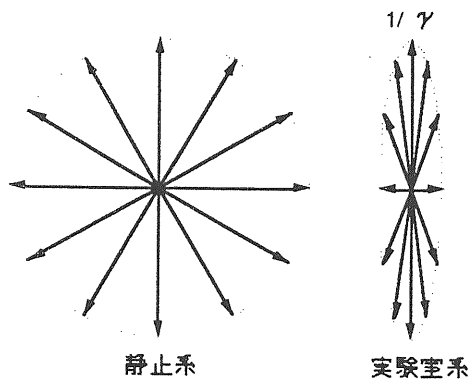


図6a.1 静止系並びに実験室系における電荷が作る電場

電子が光速 C に極めて近い速度で走行している場合、即ち $\beta \approx 1$ なる Ultrarelativistic Limit においては、 δ -Function の厚みにまで完全に収縮され、その電磁場は進行方向に対して横方向の成分のみの2次元場となる。Gauss の法則から、電場 E_r と磁場 B_θ

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r} \delta(z-ct) \quad (6a.1)$$

また、Ampere の法則から、

$$\begin{aligned} B_\theta &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2qc}{r} \delta(z-ct) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{2q}{r} \delta(z-ct) \end{aligned} \quad (6a.2)$$

6.2 チューブ内における点電荷による電磁場

図6b.1に示すように、電荷 q の相対論的エネルギーの電子が、口径 $2a$ のチューブ内の中心軸上を走行している場合について考える。チューブ内壁が電磁場の境界条件を与え、正電荷のイメージチャージ(Image Charge)がチューブ内壁に誘起され、電子と同方向に進む。チューブが完全導体(Perfect Conductor)で Lossless の場合は、内壁を流れる Image Charge に損失がなく、また電荷 q の電子の後方($d > a/\gamma$)を走行する Test Particle に対して作用しない。もし Test Particle が $d < a/\gamma$ なる距離を走行している場合は、空間電荷効果による反発力により、Test Particle は減速される。

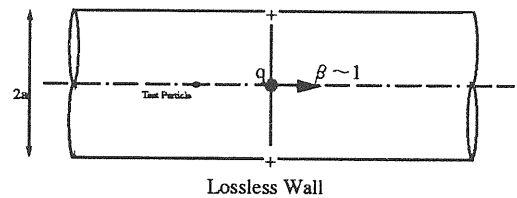


図6b.1 ドリフトチューブのLossless Wallに誘起されたイメージチャージ

一方、チューブ内壁が、Resistive で Lossy な場合には、図6b.2に示すような、Image Charge の移動による電場が内壁に生成され、軸上に於て、図6b.3に示されるような、軸方向電場 E_z が存在する。電荷 q の電子に対して、 $d < \sim \chi^{1/3} a$ 後方(ここで $\chi = c/4\pi\sigma a$ 、 $\sigma = \text{Conductivity}$)の軸上を走行する Test Particle に対しては減速作用を、 $\sim a/\chi > d > \sim \chi^{1/3} a$ 後方の軸上を走行する Test Particle に

対しては加速作用を与える。電荷 q が走行した後に残された電磁場を、舟の航跡に喩えて、"Wake" とする。詳細は、A.W.Chaoの論文を参照されたい。

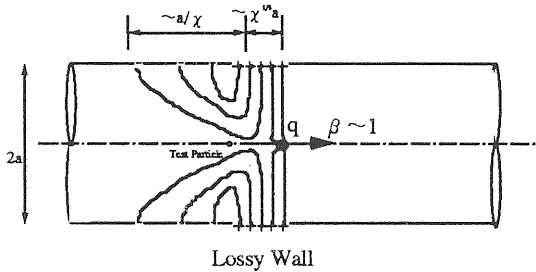


図6b.2 Lossy Wallに誘起されたイメージチャージと、作られる電気力線。

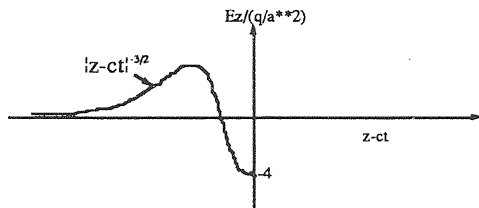


図6b.3 Lossy Wall に誘起された軸方向電場 E_z 。

6.3 急激な変化のある境界を通過する点電荷による電磁場

前節で、相対論的エネルギーの点電荷 q が、Lossless な完全導体(Peak Conductor) のチューブ内を走行している場合の電磁場について考えた。

ここでは、空洞入口等、半径方向に急激に変化している境界を、 $\beta \approx 1$ なる Ultrarelativistic Limit の点電荷が通過するとき形成される電磁場について考えてみよう。

図 6c.1に示されるように、空洞入口までのドリフトチューブ内を進行する点電荷が作る電磁場は、前節の図6b.1に示したのと同様である。

点電荷がドリフトチューブ内を進行してきて、急激な変化のある境界を通過すると、点電荷は軸上を進行し続けるが、Image Charge は進行方向を 90° 曲げて、空洞内壁を r 方向に進む。Image Charge が進行方向を変えると、過渡的に Dipole Radiation が発生し、空間を伝播する。この、ビーム電子と Image Charge による Dipole Radiation を "Wake Field" と呼ぶ。

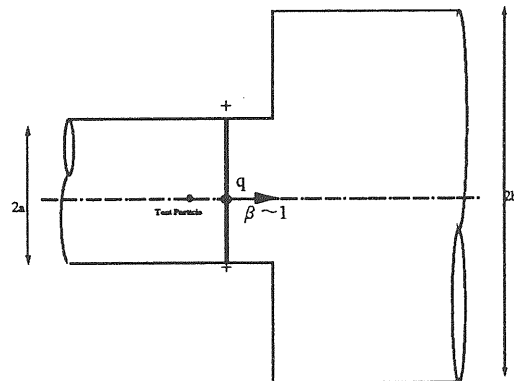


図6c.1 点電荷が急激な変化のある境界に入る前の電磁場。

点電荷がさらに、前方に進行すると、それに伴って、Wake Field も空間内を伝播する。点電荷もまた光速に近い速度で進行しているので、Wake Field は点電荷に追いつくことができない。しかしながら、点電荷後方を $\beta \approx 1$ なる速度で進行する Test Particle には追いつくことができる。このとき、Test Particle は、Wake Field の影響を受け、軸対称を考えていたので、 z -方向に減速される。

このように、発生した Wake Field から、Test Particle が直接影響を受ける場合、これを Short Range Wake とする。一方、Test Particle と点電荷との距離が、境界の Geometry に比べて充分長い場合には、境界内で Reflection した Wake Field に Test Particle は遭遇することになる。これを Long Range Wake とよぶ。

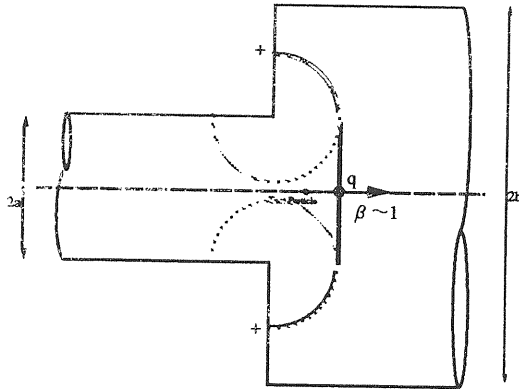


図6c.2 急激な変化のある境界を通過した点電荷による電磁場。点線は Dipole Radiation である "Wake Field" を表す。

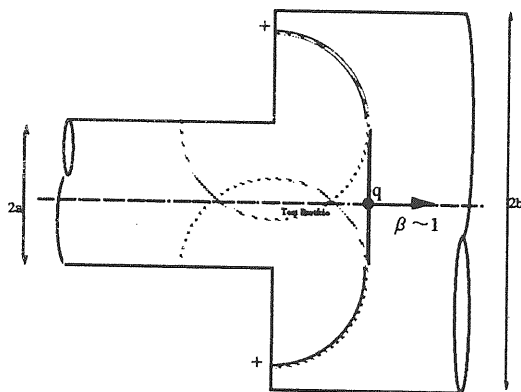


図6c.3 急激な変化のある境界を通過した点電荷による電磁場。点線は Dipole Radiation である "Wake Field" を表し、電荷後方の Test Particle に追いついている。

図6c.4は、電荷 q と Test Particle が急激な境界を通過した後、Wake Field が Test Particle に追いついたときの状態を示す。電荷 q の点電荷が軸上を進行する場合には、Test Particle は Wake Field の Longitudinal 成分 (Decelerating Field) の影響を受けて、エネルギーが変化する、この場合 Transverse 成分 ($m=0$ の Monopole Mode) はない。また、点電荷が軸からオフセットして進行する場合は、Longitudinal 成分 (Decelerating Field) に加え、Transverse 成分 ($m=1$ の Dipole Mode) による偏向が Test Particle に与えられる。また電荷が r 方向に伸

びている場合の Transverse 成分は $m=2$ の Quadrupole Mode で、Test Particle は Deflecting Field によって半径方向に偏向される。

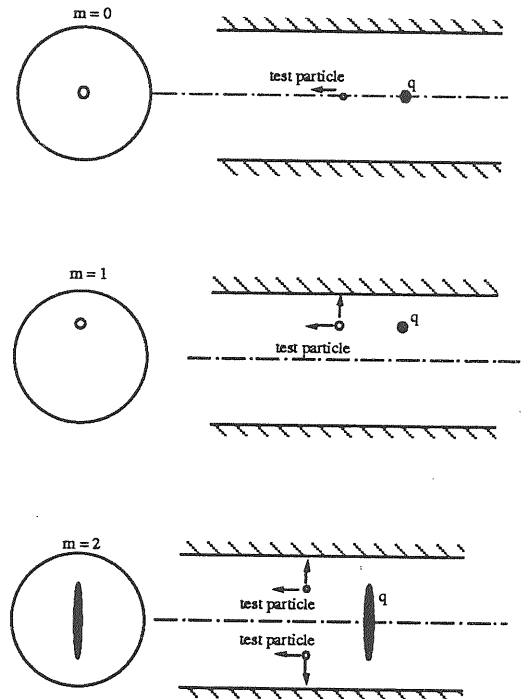


図6c.4 $m=0$ 、 $m=1$ 、 $m=2$ の Transverse Wake Field。

6.4 急激な変化のある境界を通過するバンチ・ビームによる Wake Field

バンチ・ビームが急激な変化のある境界を通過するとき励起される Wake Field は、点電荷で励起される Wake Field を、バンチ内に分布している全電子にわたって重畳することで求められる。時間領域でのシミュレーションコードには、T.Weiland による BCI-Code と Transverse Wake Field シミュレーション用の TBCI-Code、新竹 積氏による TWA-Code とクライストロン設計用 2.5 次元 FCI-Code、並びに筆者による単バンチビーム・ローディング・シミュレーション用の SBBL-Code がある。これらのコードは、バンチ・ビームが発生する電磁場を、境界条件を満足させながら Maxwell の方程式

を逐次時間領域で計算する手法を用いており、或る時刻における電磁場を求めることができる。

Gaussian バンチが、口径の異なるドリフトチューブを通過するとき、並びに Reentrant 型空洞を通過

するときに励起される電磁場について、SSBL-Code でシミュレーションした結果を、それぞれ図6d.1、図6d.2に示す。

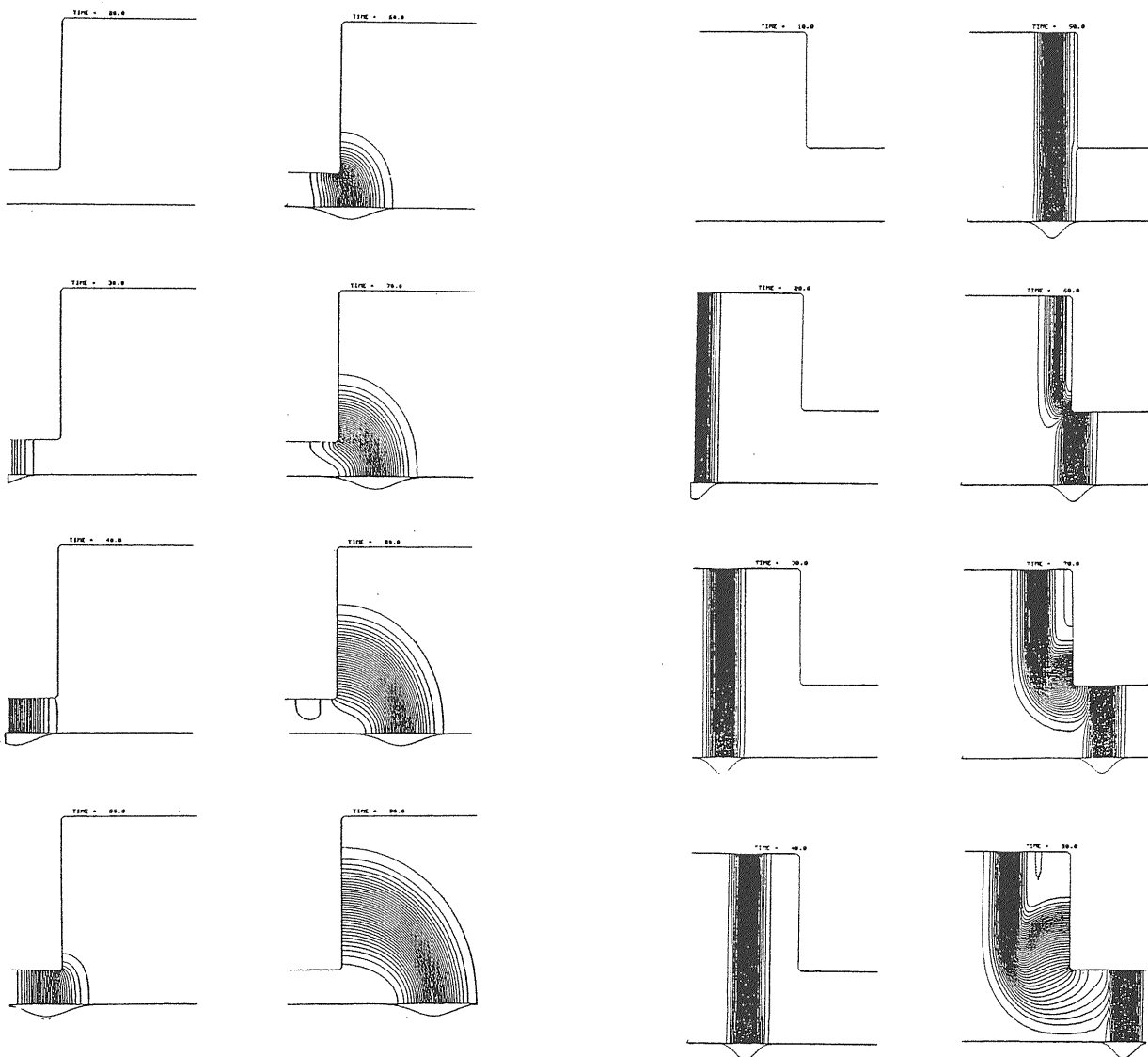


図6d.1 バンチが、口径の異なるチューブを通過するとき励起される電磁場(SSBL-Code/NEAC Ver.)。

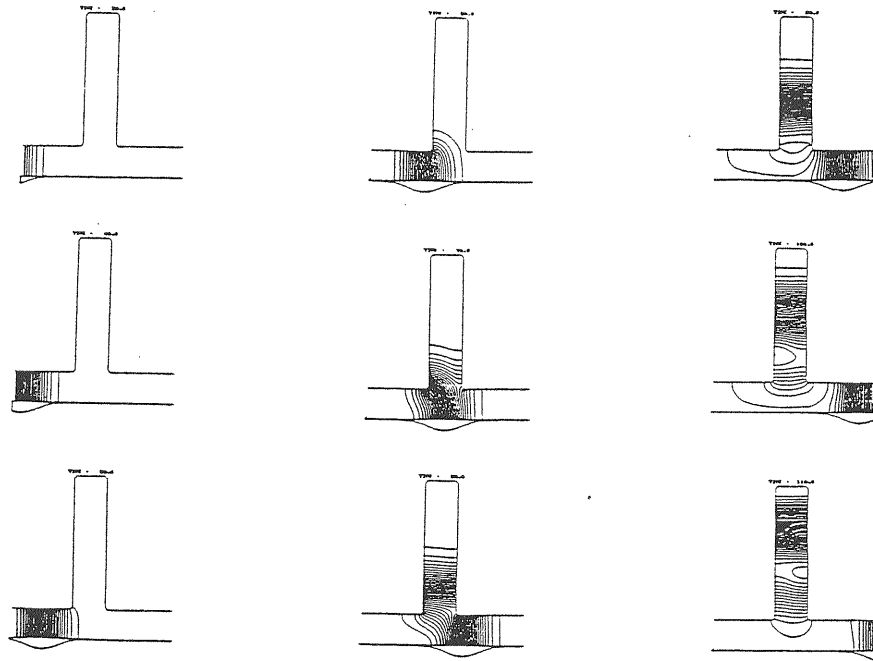


図6d.2 バンチが、Reentrant 型空洞を通過するときに励起される電磁場(SSBL-Code/NEAC Ver.)。

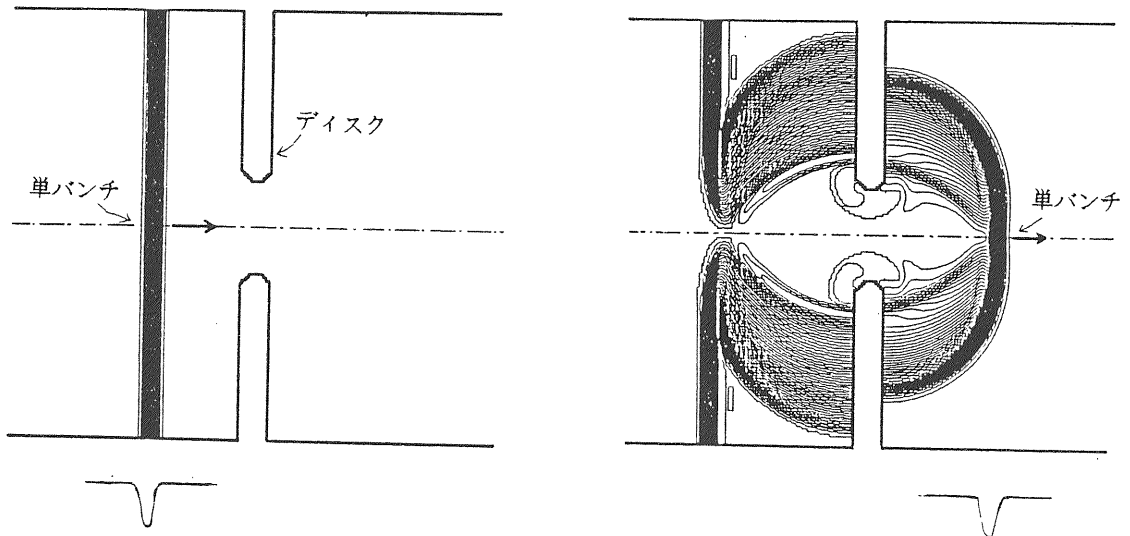


図6d.3 Gaussian Bunch が加速管のディスクを通過するときに励起される Wake Field。(TWA-Code / HITAC Ver.) (S.Takeda et. al.: Proc. 5th Symp. on Accel. Sci. and Tech. (1984) p.82 より)

Gaussian 波形の単バンチ・ビームがリアックのディスクを通過するときに励起される Wake Field をTWA-Codeを用いてシミュレーションし、電気

力線を詳細に示したのが、図6d.3である。バンチの後方に、ディスク穴のエッジで発生した Dipole Radiation が迫ってきているのがわかる。

6.5 単バンチによって Disk-Loaded Structure に励起される Wake Field

さて次に、長い加速管に励起される Wake Field について考えることにする。図6e.1 に示すような、リニアコライダー R&D 用に試作した X-band 加速管 ($f_0=11.4$ GHz、 $2\pi/3$ モード、64 Cell $\sim 21 \lambda$) を Gaussian 波形 ($\sigma_z=1$ mm) の単 Bunch が通過するとき、励起される Wake Field について TBCI-Code を用いてシミュレーションしてみよう。

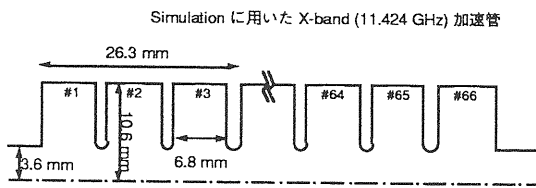


図6e.1 X-band Disk-Loaded 加速管のGeometry。

単バンチが加速管を通過し、加速管と同一長さのドリフトチューブを走行するまでの、Wake Field を逐次計算する。シミュレーションでは、開放端での反射の影響を除くため、加速管の前後に加速管と同一長さのドリフトチューブを接続した。バンチの先頭から後方に一列に並べられ、バンチと同速度で進行する Test Particle を考える。これらの Test Particle が加速管通過中に Wake Field から得た Wake Potential は、Wake Field を積分することで求められる。図6e.2 に Longitudinal Wake Potential、図6e.3 に Transverse Wake Potential を示す。各図の3つの図は、バンチ後方の Test Particle の位置を表す横軸を拡大したものである。 λ_0 は基本周波数 11.4 GHz の波長で、26.3 mm に相当する。下段に、単バンチ内の電子の分布と Wake Potential を示すが、Longitudinal Wake によるエネルギー損失、そして Transverse Wake による横方向のエネルギー増加が、バンチ内の電子の位置によって異なることが示されている。

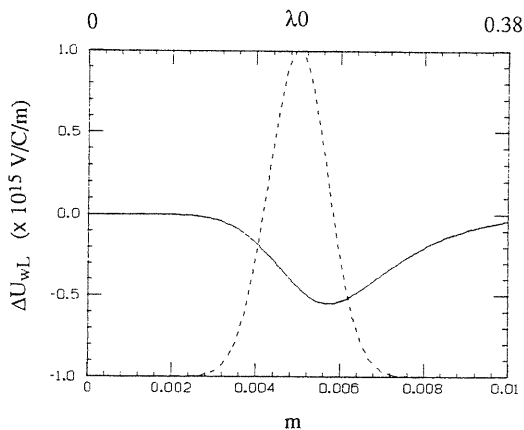
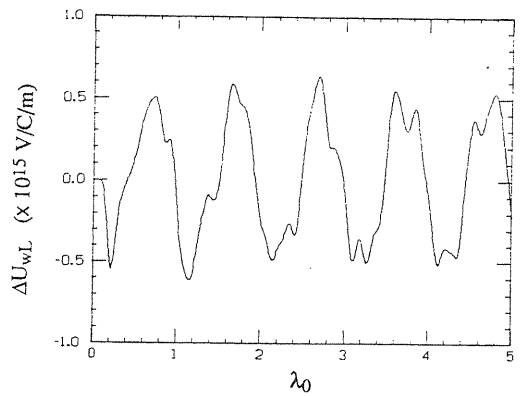
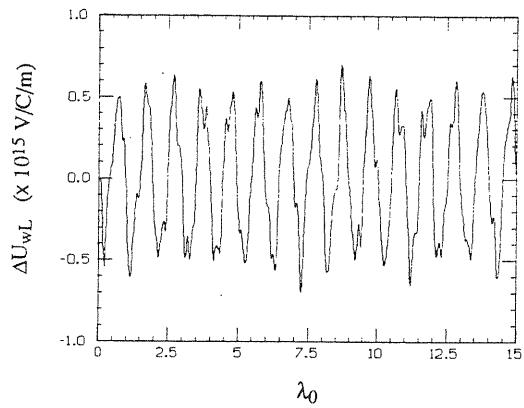


図6e.2 単バンチと X-band Disk-Loaded 加速管の相互作用による Longitudinal Wake Potential。下段の拡大図にバンチ形状を点線で表示。横軸は上から、 λ_0 ($1\lambda_0=26.3$ mm)、 λ_0 、m で、縦軸は $\times 10^{15}$ V/C/m である。(TBCI-Code を使用。高雄勝氏提供)

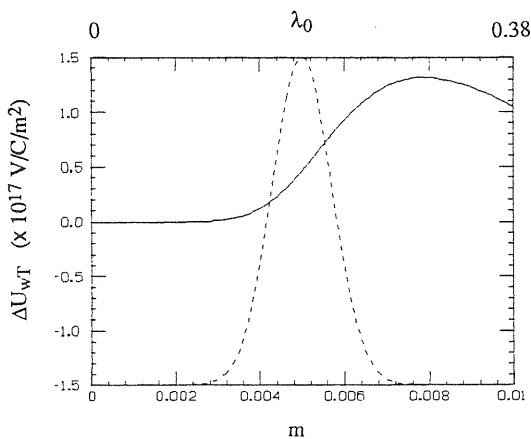
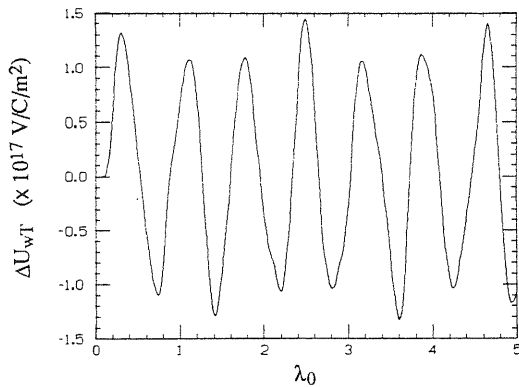
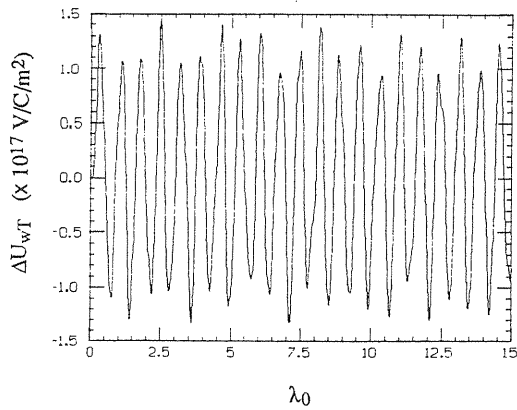


図6e.3 単バンチと X-band Disk-Loaded 加速管の相互作用による Transverse Wake Potential。下段の拡大図にバンチ形状を点線で表示。横軸は上から、 $\lambda_0 (=C/11.424 \times 10^9 \text{ m})$ 、 λ_0 、 m で、縦軸は $\times 10^{17} \text{ V/C/m}^2$ である。(TBCI-Codeを使用。高雄 勝氏提供)

時間領域(Time Domain)で求められた、Wake Field をフーリエ変換(FFT)すると、図6e.4 に示すように周波数領域(Frequency Domain)で見ることができる。ピークの周波数はそれぞれ 16、21、26、32、36、39 GHzで、図6e.5 の分散図の交点に相当する。図6e.4 の中で最大のピークを持つ Higher Order Mode は HEM_{11} モードで、大電流のマルチバンチビームを加速するときに問題となる Beam Blow-up (BBU) 現象の Source となる。

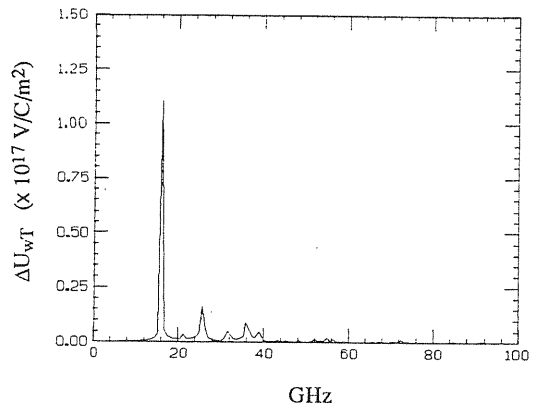


図6e.4 時間領域で求められた Transverse Wake Potential をフーリエ変換して得られた周波数領域での Transverse Wake Potential。横軸は GHz で、縦軸は $\times 10^{17} \text{ V/C/m}^2$ である。(TBCI-Codeを使用。高雄 勝氏提供)

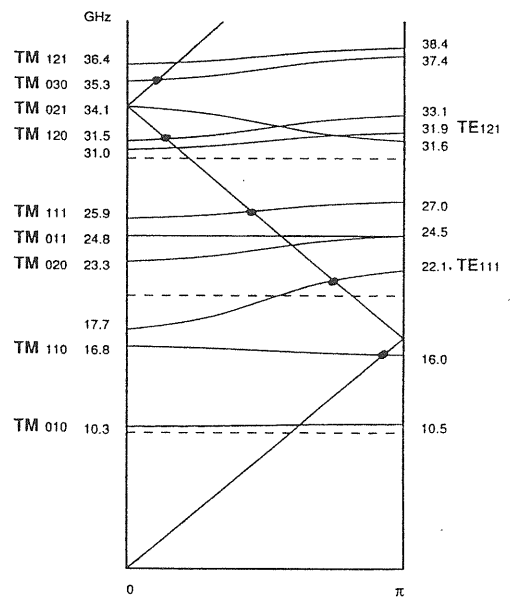


図6e.5 X-band 加速管の分散図 (ULMEL を使用。高雄 勝氏提供)

6.6 マルチバンチによって Disk-Loaded Structure に励起される Wake Field

前節で、単バンチによって励起された Wake Potential を時間領域で求めた。マルチバンチが加速管を通過するとき、第1バンチは自分自身の励起した Wake Field の影響を受けるが、第2バンチは自分自身が励起した Wake Field と第1バンチが残っていた Wake Field の影響を受ける。すなわち、 n 番目のバンチは、第1～ $n-1$ 番のバンチが残っていた Wake Field と、 n 番バンチ自身の励起した Wake Field の影響を受ける。電磁場は独立に取り扱えるので、 n 個のバンチの Wake Potential を加算することで、第 n 番目のバンチの Wake Potential が求まる。

前節で取り扱った Disk-Loaded 加速管内で、マルチバンチによって励起される Wake Potential を求めてみよう。加速管を通過するバンチの間隔は 26.3mm ($\lambda=C/f_0$) である。単バンチについて得られた Wake Potential を、1波長(λ_0)ずつ z 方向にシフトして重ね合わせると、マルチバンチによる Wake Potential が図6f.1と図6f.2のように求められる。

RF により作られた加速場と Wake Field も又独立である。従って、マルチバンチの単位長当たりのエネルギーゲイン ΔU は、

$$\Delta U = E_a + \Delta U_{WL} \quad (6f.1)$$

ここで、 E_a は加速勾配、 ΔU_{WL} は単位長当たりの Longitudinal Wake Potential を表す。図6f.1 から明らかのように、後方バンチになるほど Longitudinal Wake Potential ΔU_{WL} は負に増大する。そのため、(6f.1)式より明らかのように、バンチのエネルギーは後方になるほど減少する。これが、いわゆる "マルチバンチの Beam Loading" 現象である。第7章で Power Diffusion Equation に基づいて Beam Loading を考えることにするが、時間領域でも "マルチバンチの Beam Loading" が見えることが理解できた。

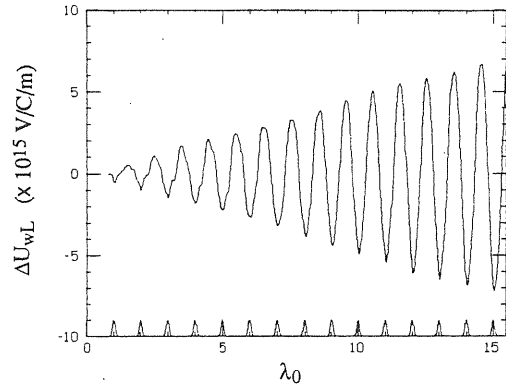


図6f.1 X-band の Disk-Loaded 加速管とマルチバンチの相互作用による Longitudinal Wake Potential (TBCI-Codeを使用。)

図6f.2 には、マルチバンチを加速したとき、それぞれのバンチが単位長当たり進行する間に Wake Field の Transverse 成分で横方向にキックされた結果得た Transverse Potential が示されている。

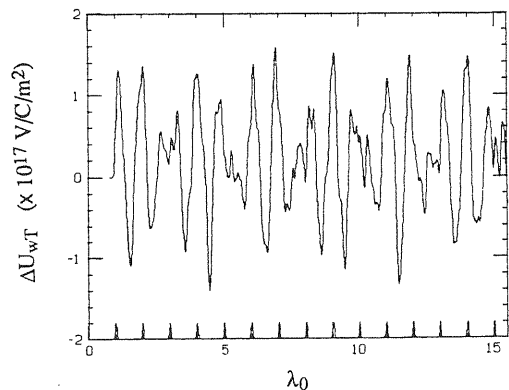


図6f.2 X-band の Disk-Loaded 加速管とマルチバンチの相互作用による Transverse Wake Potential (TBCI-Codeを使用。)

マルチバンチをリニアックで加速すると、加速管内に "HEM₁₁モード" のマイクロ波が帰還増幅されたり、定在波となって Build-up される。数1000個のバンチを加速するとき、バンチ内の電子数を増加していくと、後方バンチが横方向にキックされて加速管内のディスク衝突し始める。その結果、後方バンチは、リニアック出口に到達できず、ビ

ームのパルス幅が減少する。これは "Beam Breakup 又は Beam Blowup" と呼ばれている。

6.7 バンチのエネルギー分布と RF 加速位相

或る Structure における Longitudinal Wake Potential は、バンチの形状によって決定され、Potential の深さはバンチ内の電子数、即ち、バンチビームの Intensity に比例する。図6e.2 より Longitudinal Wake Potential の最深値 $\Delta U_{L_{max}}$ は 0.5×10^{15} V/C/m である。従って、電子数 $N_b = 10^{10}$ (1.6 nC) のバンチでは、0.8 MeV/m のエネルギー損失となる。 ω^2 と n で Scaling Law すると、S-band 加速管では、 $N_b = 10^{11}$ (16 nC) のバンチで 0.5 MeV/m になる。加速管内の加速勾配が一般に 10~20 MeV/m であるので、エネルギー損失の量としては、比較しても小さい。しかし、単バンチ内の電子のエネルギー分布が、Longitudinal Wake Potential の大きさで決定される。

しかしながら、バンチは、加速場と Longitudinal Wake の合成された場によって加速されるので、バンチのエネルギー分布は、バンチを加速する RF 位相に大きく依存する。単バンチの Longitudinal Wake Potential と RF 加速場を重畳した Net の加速場の位相との関係を図6g.1で見てみよう。

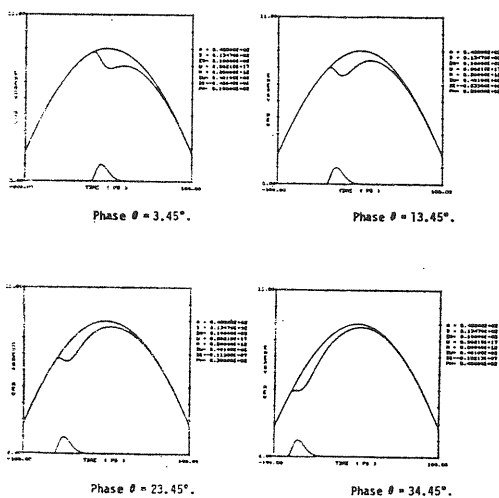


図6g.1 加速位相と Net の加速電場。(S.Takeda, KEK Report 84-16 (1984) p.93 より)

単バンチのエネルギー幅を最小にするには、Longitudinal Wake Potential の立ち下がりと加速場の立ち上がりをキャンセルさせるよう、図6g.2のようにバンチの加速位相を選択する。このとき、バンチのエネルギー幅を狭める代わりに、バンチ電子の平均エネルギーゲイン V/V_0 を犠牲にしなければならない。図6g.3には、SLAC 加速管 ($E_a = 17$ MeV/m) で、 $N_b = 5 \times 10^{10}$ 、 $\sigma_z = 1.0$ mm の単バンチを加速する場合について、シミュレーションした結果を示す。加速位相に対する平均エネルギーゲイン V/V_0 と、スペクトル幅 $\Delta V/V_0$ が示されている。

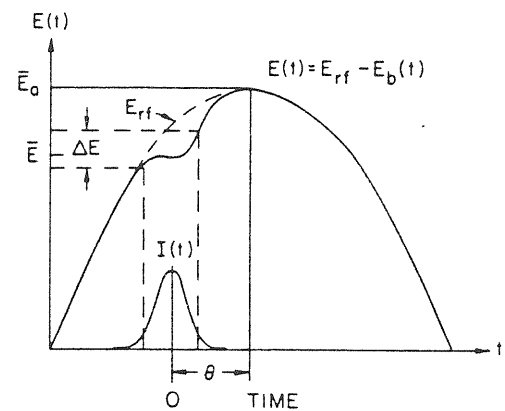


図6g.2 バンチの加速位相をクレスト前方に選択するとき、バンチのエネルギー幅を最小にすることができる。(P.B.Wilson, SLAC-PUB-2884 (1982) p.79 より)

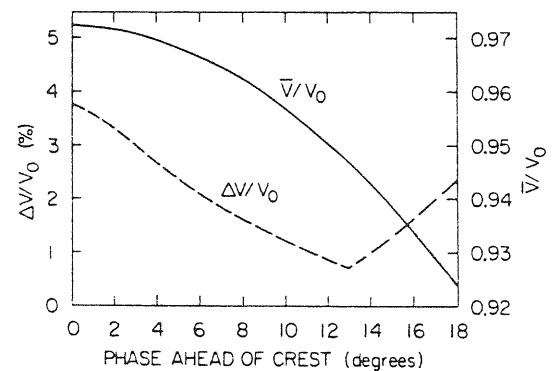


図6g.3...SLAC 加速管 ($E_a = 17$ MeV/m) で、 $N_b = 5 \times 10^{10}$ 、 $\sigma_z = 1.0$ mm の単バンチを加速する場合について、シミュレーションした結果。加速位相に対する平均エネルギーゲイン V/V_0 と、スペクトル幅 $\Delta V/V_0$ が示されている。(P.B.Wilson, SLAC-PUB-2884 (1982) p.79 より)

単バンチのエネルギースペクトル幅 $\Delta V/V$ は、クレスト(0°)上で加速すると3.7%であるが、クレスト前方 13° で加速すると、約1%まで減少できる。そのために、平均エネルギーは V/V_0 は、0.97から0.95まで減少することが示されている。

さてここで、以上のことを実験で証明してみよう。Longitudinal Wake Potential はバンチ内の電子数に比例する。単バンチをクレスト前方で加速したときに測定されたエネルギースペクトルと、シミュレーションによって得られた Longitudinal Wake Potential から求めた Net の加速場を図示したのが図6g.4である。バンチ波形は、単バンチが Xe ガス中を通過中に発生したチェレンコフ光をストリークカメラで測定して求めた。バンチの電子数を増加すると、比例して Longitudinal Wake Potential が深くなるため、 V/V_0 は減少する。測定された V/V_0 と電子数は線形であることが図6g.5に示され、この勾配から Longitudinal Wake Potential が実験的に求められる。

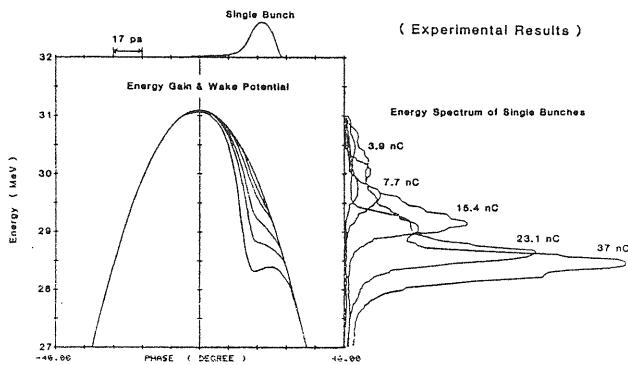


図6g.4 クレスト前方で加速した単バンチのエネルギースペクトル。

$\Delta V/V_0$ を最小にするには、加速場の立ち上がりと、Longitudinal Wake Potential の立ち下がり勾配が等しくなるよう、最適な加速位相を選ぶ。そのため、バンチ内電子数の増加に従って、クレスト前方で加速しなければならない。図6g.6は、スペクトル

幅を最小にするための最適加速位相とバンチ内電子数を示す。(測定に L-band Linac を使用, 3 m CG-Structure, $E_a=10$ MeV/m)

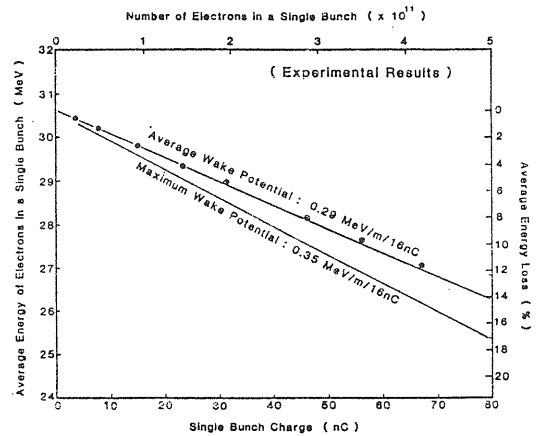


図6g.5 図6g.4で測定されたエネルギーゲイン V/V_0 とバンチ内電子数の関係。(測定に L-band Linac を使用, 3 m CG-Structure, $E_a=10$ MeV/m)

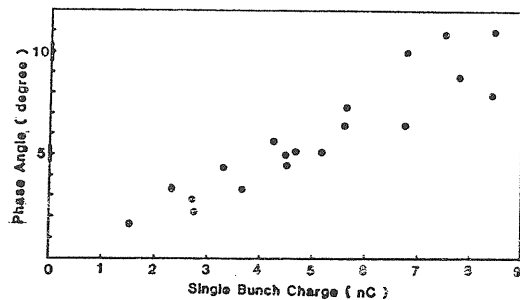


図6g.6 スペクトル幅を最小にするための最適加速位相とバンチ内電子数。(測定L-band Linacを使用, 3 m CG-Structure, $E_a=10$ MeV/m)

7 Power Diffusion Equation に基づく Beam Loading

6.6章で明らかになったように、ビーム・ローディング (Beam Loading) の概念は、バンチ・ビームと空洞との相互作用である。バンチが空洞を通過するとき励起する電磁場と空洞内に外部からの RF によって発生している電場との重畳 (Superimpose) によって、ビームが加速される。

本章では、Beam Loading を Power Diffusion Equation に基づいて考えることにする。バンチが加速管に蓄積されている RF エネルギーからエネルギーをもらって加速されると、加速管内に蓄積されている RF エネルギーが減少し、後続のバンチは減少した加速場の中で加速される。そのため、後続バンチのエネルギー利得は先行バンチに比較して減少する。加速ビームのパルス幅が Filling Time t_f より短いとき、後続バンチのエネルギーは先行バンチに比較して、低くなり続ける。これは、過渡状態 (Transient) におけるビーム・ローディングである。Filling Time t_f より長いパルス幅のビームを加速するとき、先頭バンチより t_f までのバンチは、過渡モードでエネルギーが減少するが、 t_f 以降のバンチは続けて入力される RF パワーとのエネルギーの収支が平衡する定常状態になるため、エネルギー利得は一定になる。これが、定常状態 (Steady State) におけるビーム・ローディングである。

7.1 定常ビームローディング (Steady State Beam Loading)

ビームが存在しない場合の単位長当たりの RF パワー損失は、(4a.5)式より、

$$dP/dz = -2\alpha P \quad (7a.1)$$

ここで、 α は Attenuation Coefficient で、 P は加速管内の RF パワー密度であった。

ビームを加速している場合の単位長当たりの RF パワー損失は、加速管壁での消費と、ビームに吸

収されるパワー (実際にはビームによって空洞内に励起される電磁場のパワー) の和となる。

$$dP/dz = (dP/dz)_{\text{wall}} + (dP/dz)_{\text{beam}} \quad (7a.2)$$

7.1.1 定インピーダンス型加速管 (CZ-Structure)

定インピーダンス型加速管 (CZ-Structure) においては、(7a.2)式は、

$$dP/dz = -2\alpha P - iE \quad (7a.3)$$

ここで E は加速管軸上のビーム電子に同期した電場で、 i はビームのピーク電流を表す。(4a.1)式のシャント・インピーダンスの定義は、(7a.1)式を用いると、

$$r_0 = -E^2/(dP/dz) = E^2/2\alpha P \quad (7a.4)$$

従って、(7a.4)式より

$$P = E^2/2\alpha r_0 \quad (7a.5)$$

(7a.5)式より、

$$\frac{dP}{dz} = \frac{E}{\alpha r_0} \frac{dE}{dz} \quad (7a.6)$$

(7a.5)式と(7a.6)式を用いて、(6a.3)式は電場についての式に変換される。

$$\begin{aligned} \frac{E}{\alpha r_0} \frac{dE}{dz} &= -\frac{E^2}{r_0} - iE \\ \frac{dE}{dz} &= -\alpha E - i\alpha r_0 \end{aligned} \quad (7a.7)$$

従って、電場 E は

$$E = E_0 e^{-\alpha z} - ir_0(1 - e^{-\alpha z}) \quad (7a.8)$$

ここで E_0 は、加速管入口での電場である。

ビーム・ローディングを含めたエネルギー・ゲインは、(7a.8)式を加速管全長にわたって積分すると求まる。

$$V = \int_0^L E dz$$

$$= \frac{E_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha L}) - i r_0 L \left(1 - \frac{(1 - e^{-\alpha L})}{\alpha L}\right) \quad (7a.9)$$

定インピーダンス型加速管(CZ-Structure)では、 α は加速管の全長にわたって一定で、Attenuation Constant τ は(4a.10)式より、

$$\tau = \alpha L \quad (7a.10)$$

であった。そして加速管入口での電圧 E_0 は、(5.5)式より

$$E_0 = [P_0 r_0 L]^{1/2} [2\tau]^{1/2} \quad (7a.11)$$

であった。

(7a.10)式と(7a.11)式を(7a.9)式に代入して

$$V = [P_0 r_0 L]^{1/2} [2\tau]^{1/2} \left(\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}\right) - i r_0 L \left(1 - \frac{(1 - e^{-\tau})}{\tau}\right) \quad (CZ-Structure) \quad (7a.12)$$

(7a.12)式の第1項がエネルギー・ゲイン、第2項がビーム・ローディングを表す。

$$i_{\max} = \frac{V_0}{r_0 L \left(1 - \frac{(1 - e^{-\tau})}{\tau}\right)} \quad (7a.13)$$

ここで、 V_0 はビーム・ローディングのない場合、すなわち電流 $i=0$ のときのエネルギーゲインを表す。

一方ビームのパワー P_b は iV で表されるので、(7a.12)式より、

$$P_b = i V_0 - i^2 r_0 L \left(1 - \frac{(1 - e^{-\tau})}{\tau}\right) \quad (7a.14)$$

P_b が最大となる $i_{p\max}$ は、 $dP_b/di = 0$ のとき、

$$i_{p\max} = \frac{V_0}{2r_0 L \left(1 - \frac{(1 - e^{-\tau})}{\tau}\right)} \quad (7a.14)$$

すなわち、

$$i_{p\max} = i_{\max} / 2 \quad (7a.15)$$

となる。

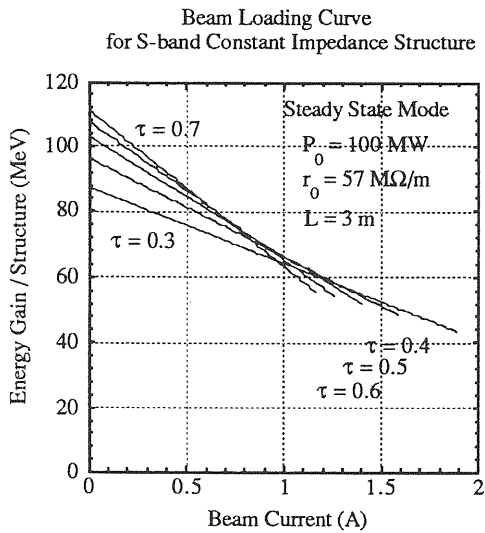


図7a.1 CZ-加速管での Beam Loading Curveの τ の依存性。

第1項と第2項が等しいとき、電流 i は最大となる。その値を i_{\max} とすると、

7.1.2 定加速勾配型加速管 (CG-Structure)

定加速勾配型加速管(CG-Structure)においては、加速管の全長にわたって加速電場が E_0 と一定である。そのために、(4a.15)式のように

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha(z)P = \text{constant} \quad (7b.1)$$

である。

今ビームによって誘起される電場が加速管中をどのように伝播するかを考えると、

$$\frac{dE}{dz} = -\alpha(z) i r_0 \quad (7b.2)$$

となる。全長 L の入力と出口での RF パワーを逸れぞれ、 P_0 、 P_L とすると、(4a.17)式より、

$$P = P_0 - (P_0 - P_L) \frac{z}{L} \quad (7b.3)$$

(4a.18)式のように、Attenuation Constant τ は

$$P_i/P_0 = e^{-2\tau} \quad (7b.4)$$

と定義され、 $\alpha(z)$ との関係は(4a.9)式のように

$$\tau = \int_0^L \alpha(z) dz \quad (7b.5)$$

であった。

したがって、(7b.4)式は、(7b.5)式を用いると、

$$e^{-2\tau} = e^{-2 \int_0^L \alpha(z) dz} = \frac{P_L}{P_0} \quad (7b.6)$$

となり、これより $\alpha(z)$ が求められる。

$$\alpha(z) = \frac{P_0 - P_L}{2L} \frac{1}{P_0 - (P_0 - P_L) \frac{z}{L}} \quad (7b.7)$$

または

$$= \frac{1 - e^{-2\tau}}{2L(1 - (1 - e^{-2\tau})z/L)} \quad (7b.7')$$

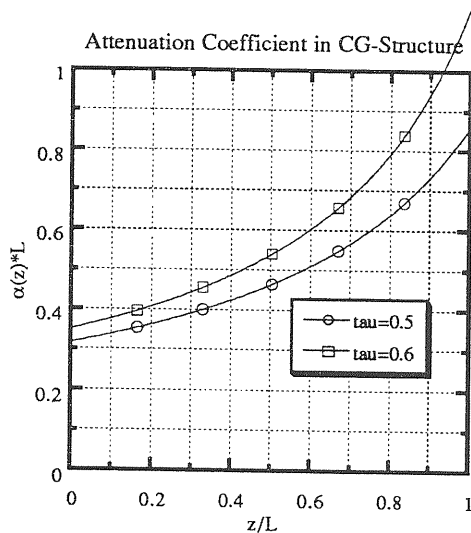


図7.b.1 定加速勾配型加速管(CG-Structure)のAttenuation Coefficient。

$\alpha(z)$ に関しては群速度からも求められる。定加速勾配型加速管(CG-Structure)の群速度 $v_g(z)$ は(4a.22)式より、

$$v_g(z) = \frac{\omega L}{Q} \frac{1 - (1 - e^{-2\tau})z/L}{1 - e^{-2\tau}} \quad (7b.8)$$

であった。(4a.4)式に示されるように、 v_g と α との関係は

$$v_g = \frac{-\omega P}{Q dP/dz} \quad (7b.9)$$

で $dP/dz = -2\alpha P$ であったから、

$$v_g(z) = \frac{\omega}{2Q\alpha(z)} \quad (7b.10)$$

(7b.10)式を(7b.8)に代入すると、

$$\alpha(z) = \frac{1 - e^{-2\tau}}{2L(1 - (1 - e^{-2\tau})z/L)} \quad (7b.11)$$

(4a.18)式での P_0 と P_L の関係

$$P_L = P_0 e^{-2\tau} \quad (7b.12)$$

より、(7b.11)式は

$$\alpha(z) = \frac{P_0 - P_L}{2L(P_0 - (P_0 - P_L)z/L)} \quad (7b.13)$$

と(7b.7)式と同様な結果が得られる。

加速管の入口での電場を E_0 とすると、(7b.2)式より、 z における電場が求まる。

$$E(z) = E_0 - i r_0 \int_0^z \alpha(z') dz' \quad (7b.14)$$

ここで(7b.8)式、並びに(7b.11)式を用いると、

$$\begin{aligned} \int_0^z \alpha(z') dz' &= \frac{1 - e^{-2\tau}}{2L} \int_0^z \frac{dz'}{1 - (1 - e^{-2\tau})z'/L} \\ &= -\frac{1}{2} \ln\{1 - (1 - e^{-2\tau})z/L\} \quad (7b.15) \end{aligned}$$

ビーム・ローディングを含めたエネルギー・ゲイン V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^L E dz \\
&= E_0 L + \frac{1}{2} i r_0 \int_0^L \int_0^z \alpha(z') dz' dz \\
&= E_0 L - \frac{1}{2} i r_0 L \left(1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}}\right) \quad (7b.16)
\end{aligned}$$

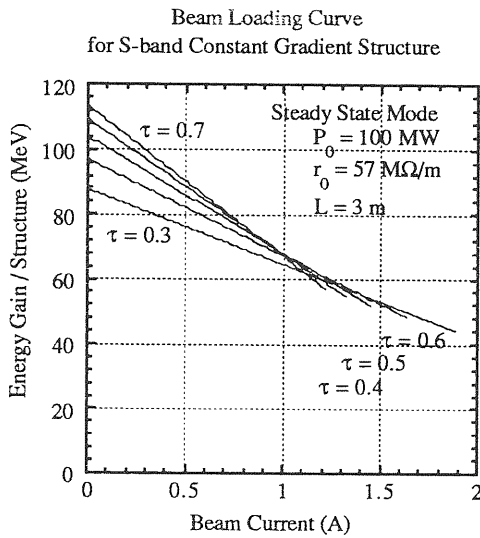


図7b.2 CG-加速管での Beam Loading Curve

ビーム・ローディングのない場合のエネルギーゲイン $V_0 = E_0 L$ は、(4a.1)式 $r_0 = -E_0^2 / dP/dz$ と(4a.20)式 $dP/dz = -P_0(1 - e^{-2\tau})/L$ と、(5.2)式

$$E_0 = \left(\frac{P_0 r_0 (1 - e^{-2\tau})}{L} \right)^{1/2} \quad (7b.17)$$

から、(5.3)式と同様

$$V_0 = E_0 L = \{P_0 r_0 L\}^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2} \quad (7b.18)$$

が求まる。従って、(7b.16)式は、

$$\begin{aligned}
V &= \{P_0 r_0 L\}^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2} - \frac{i r_0 L}{2} \left(1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}}\right) \\
&\quad \text{(CG-Structure)} \quad (7b.19)
\end{aligned}$$

ビームパワー P_0 が最大となる i_{pmax} は、(7a.13)式、(7a.14)式の定インピーダンス型加速管(CZ-Structure)と同様にして求められ、

$$i_{pmax} = \frac{V_0}{r_0 L \left(1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}}\right)} \quad (7b.20)$$

同様に

$$i_{pmax} = \frac{i_{max}}{2} \quad (7b.21)$$

となる。

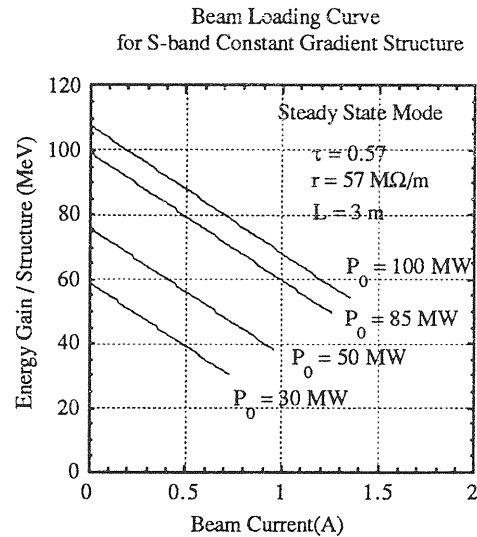


図7b.3 CG-加速管での Beam Loading CurveのRFパワー依存性。

7.2 過渡的ビームローディング (Transient Beam Loading)

6.6章でマルチバンチによる Longitudinal Wake Potential について考えた。そして、後続バンチになるにつれ、先行バンチが加速管内に残っていた Wake Field の影響を受け、Longitudinal 方向の負の Potential が大となり、減速されることを知った。加速場と Wake Field が独立であるので、加速管から出てくる後続バンチになるほどエネルギー

が低下する。これが過渡的ビームローディングである。

ビームが存在する場合、加速管にそっての単位長当たりの RF パワーの損失は、

$$\frac{dP}{dz} = \left(\frac{dP}{dz}\right)_{\text{wall}} + \left(\frac{dP}{dz}\right)_{\text{beam}} \quad (7c.1)$$

加速管壁とビームへの損失の和で表され、次のようになる。

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha(z) P(z,t) - i(t) E(z,t) \quad (7c.2)$$

ここで、 $E(z,t)$ は、加速管軸上 (z,t) における電場である。 z に関する全微分をとると、

$$\frac{dP(z,t)}{dz} = \frac{\partial P(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial P(z,t)}{\partial t} \frac{dt}{dz} \quad (7c.3)$$

また、

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_g(z)} \quad (7c.4)$$

であるので、(7c.2)式と(7c.3)式から

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{v_g(z)} \frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = -2\alpha(z) P(z,t) - i(t) E(z,t) \quad (7c.5)$$

7.2.1 定加速勾配型加速管 (CG-Structure)

定加速勾配型加速管(CG-Structure)においては、加速管の全長にわたって加速電場 E_0 が一定となるよう、 $\alpha(z)$ が加速管にそって変化しており、

$$\tau = \int_0^L \alpha(z) dz \quad (7d.1)$$

であった。ここで、単位長当たりの Shunt Impedance r_0 が加速管に沿って変化しないと仮定すると、(7c.5)式は電場の式に変換でき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{v_g(z)} \frac{\partial E(z,t)}{\partial t} + \left[\alpha(z) - \frac{1}{2\alpha(z)} \frac{d\alpha}{dz} \right] E(z,t) \\ = -\alpha(z) r i(t) \end{aligned} \quad (7d.2)$$

ここで、時間に関する Laplace 変換を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(z,s)}{\partial z} + \left[\frac{s}{v_g(z)} + \alpha(z) - \frac{1}{2\alpha(z)} \frac{d\alpha(z)}{dz} \right] E(z,s) \\ = -r \alpha(z) i(s) \end{aligned} \quad (7d.3)$$

が得られる。

定加速勾配型加速管(CG-Structure)の Attenuation Coefficient α に関しては、(4a.15)式、(4a.20)式より、

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha(z)P(z) = -P_0(1-e^{-2\tau})/L \quad (7d.4)$$

であった。また、(4a.19)式の

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{(1-e^{-2\tau})z}{L}\right) \quad (7d.5)$$

を(7d.4)式に代入して、 z に関して微分すると、

$$\frac{d\alpha(z)}{dz} = 2\alpha^2(z) \quad (7d.6)$$

となり、これを(7d.3)式に代入すると、

$$E(z,s) = E(0,s)e^{-stz} - e^{-stz} r_0 i(s) \int_0^z e^{stz} \alpha(z) dz \quad (7d.7)$$

ここで、 t_z は 0 から z まで RF が伝播するのに要する時間で、(4a.5)式より

$$dt_z = \frac{1}{v_g(z)} dz = \frac{2Q\alpha(z)}{\omega} dz \quad (7d.8)$$

これを用いると、(7d.7)式は、

$$E(z,s) = E(0,s)e^{-stz} - \frac{\omega r_0 i(s)}{2sQ} [1 - e^{-stz}] \quad (7d.9)$$

全長 L の加速管を通過する電子のエネルギーゲイン $V(t)$ は、

$$V(t) = \int_0^L E(z,t) dz \quad (7d.10)$$

で、この Laplace 変換は、

$$V(s) = \int_0^L E(z,s) dz \quad (7d.11)$$

である。さて、 z と t_z の関係は、(4a.22)式より、

$$\begin{aligned} t_z &= \int_0^z \frac{1}{v_g(z)} dz \\ &= \int_0^z \frac{Q}{\omega L} \frac{(1-e^{-2\tau})}{1-(1-e^{-2\tau})z/L} dz \\ &= -\frac{Q}{\omega} \ln[1-(1-e^{-2\tau})z/L] \end{aligned} \quad (7d.12)$$

であるので、

$$z = \frac{L}{1-e^{-2\tau}} (1-e^{-\omega t_z/Q}) \quad (7d.13)$$

$$dz = \frac{\omega L}{(1-e^{-2\tau})Q} e^{-\omega t_z/Q} dt_z \quad (7d.14)$$

(4a.23)式より $t_z(L) = t_f = 2Q\tau/\omega$ であった。従って、(7d.11)式は、

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{\omega L E(0,s)}{Q(1-e^{-2\tau})(s+\omega/Q)} [1-e^{-(s+\omega/Q)t_f}] \\ &\quad - \frac{\omega r_0 L i(s)}{2Q(1-e^{-2\tau})s} \\ &\quad \times \left[1 - e^{-(\omega/Q)t_f} - \frac{\omega(1-e^{-(s+\omega/Q)t_f})}{Q(s+\omega/Q)} \right] \end{aligned} \quad (7d.15)$$

ここで、ステップ関数 $U(t)$ の RF を加速管に入力するとし、時間 t_i 後にステップ関数のビームを加速管に入力するとする。加速管内の電場 $E(0,t)$ とビーム電流 $i(t)$ は、

$$E(0,t) = E_0 U(t) \quad (7d.16)$$

$$i(t) = i_0 U(t - t_i) \quad (7d.17)$$

(7d.16)と(7d.17)の両式の Laplace 変換は

$$E(0,s) = E_0 / s \quad (7d.18)$$

$$i(s) = (i_0/s) e^{-s t_i} \quad (7d.19)$$

(7d.9)式は、

$$E(z,s) = \frac{E_0}{s} e^{-st_z} - \frac{\omega r_0 i_0}{2Q} \left[\frac{e^{-st_i}}{s^2} - \frac{e^{-s(t_i+t_z)}}{s^2} \right] \quad (7d.20)$$

(7d.15)式は、

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{\omega L E_0}{Q(1-e^{-2\tau})(s+\omega/Q)s} [1-e^{-2\tau} e^{-st_f}] \\ &\quad - \frac{\omega r_0 L e^{-st_i}}{2Q s^2} \\ &\quad \times \left[1 - \frac{\omega}{Q(1-e^{-2\tau})(s+\omega/Q)} (1-e^{-2\tau} e^{-st_f}) \right] \end{aligned} \quad (7d.21)$$

逆変換によって、

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_0 U(t-t_z) \\ &\quad - \frac{\omega r_0 i_0}{2Q} [(t-t_i) U(t-t_i) + (t-t_i-t_z) U(t-t_i)] \end{aligned} \quad (7d.22)$$

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{E_0 L [1-e^{-(\omega/Q)t}]}{1-e^{-2\tau}} U(t) \\ &\quad - \frac{E_0 L e^{-2\tau}}{1-e^{-2\tau}} [1-e^{-(\omega/Q)(t-t_f)}] U(t-t_f) \\ &\quad + \frac{r_0 i_0 L}{2} \left[\frac{\omega e^{-2\tau}}{Q(1-e^{-2\tau})} (t-t_i) - \frac{1-e^{-(\omega/Q)(t-t_i)}}{(1-e^{-2\tau})} \right] U(t-t_i) \\ &\quad - \frac{r_0 i_0 L}{2} \left[\frac{\omega e^{-2\tau}}{Q(1-e^{-2\tau})} (t-t_i-t_f) - \frac{e^{-2\tau} (1-\frac{\omega}{Q}(t-t_i-t_f))}{(1-e^{-2\tau})} \right] \\ &\quad \times U(t-t_i-t_f) \end{aligned} \quad (7d.23)$$

加速管にステップ関数の RF を入力し t_f 後には、加速管に RF が充満する。このとき、ビームを入射すると、 $t_i = t_f$ であるので、

$$V(t) = \frac{E_0 L [1-e^{-(\omega/Q)t}]}{1-e^{-2\tau}} \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (7d.24)$$

ここで(5.5)式より、 $E_0 = (P_0 r_0/L)^{1/2} (1-e^{-2\tau})^{1/2}$ であったから、また(4a.23)式より、 $t_f = 2Q\tau/\omega$ であるので、(7d.24)式は、

$$V(t) = \frac{(P_0 r_0 L)^{1/2}}{(1 - e^{-2\tau})^{1/2}} \left[1 - e^{-2\tau(t/t_f)} \right] \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (7d.25)$$

ここで、 $t=t_f$ を(7d.25)式に代入すると、

$$V(t_f) = (P_0 r_0 L)^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2} \quad t=t_f \quad (7d.26)$$

となり、(5.3)式での定加速勾配型加速管(CG-Structure)のエネルギー利得 V_{CG} と一致する。

さて、ビームが $t_i = t_f$ で入射されると、 $t_f \leq t \leq 2t_f$ 間では過渡的ビームローディングとなる。(7d.23)式より、

$$V(t) = E_0 L + \frac{r_0 i_0 L}{2} \left[\frac{\omega e^{-2\tau}}{Q(1 - e^{-2\tau})} t - \frac{1 - e^{-\omega t/Q}}{1 - e^{-2\tau}} \right] \quad t_f \leq t \leq 2t_f \quad (7d.27)$$

ここで(5.5)式より、 $E_0 = (P_0 r_0 L)^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2}$ であったから、また(4a.23)式より、 $t_f = 2Q\tau/\omega$ であるので、(7d.27)式は、

$$V(t) = (P_0 r_0 L)^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2} + \frac{r_0 i_0 L}{2} \left[\frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \frac{(t - t_f)}{t_f} - \frac{1 - e^{-2\tau(t - t_f)/t_f}}{1 - e^{-2\tau}} \right] \quad t_f \leq t \leq 2t_f \quad (7d.28)$$

さて、 $V=V_0/2$ になる電流 i_{pmax} は

$$i_{pmax} = \frac{V_0}{r_0 L (1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}})}$$

であったので、

$$V(t) = V_0 + V_0 \frac{i_0}{2 i_{pmax}} \left[\frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \frac{(t - t_f)}{t_f} - 1 + e^{-2\tau(t - t_f)/t_f} \right] \quad (7d.29)$$

となる。

さて、 $2t_f \leq t$ においては、(7d.23)式は、

$$V(t) = E_0 L - \frac{r_0 i_0 L}{2} \left[1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \right]$$

$$= (P_0 r_0 L)^{1/2} (1 - e^{-2\tau})^{1/2} - \frac{r_0 i_0 L}{2} \left[1 - \frac{2\tau e^{-2\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \right] \quad 2t_f \leq t \quad (7d.30)$$

すなわち、ビームが入射されてから t_f 後は定常ビームローディング(Steady State Beam Loading)になり、(7b.19)式と一致する。

さて、ここで(7d.25)式、(7d.28)式、(7d.30)式から、 $0 \leq t \leq 3t_f$ 間での $V(t)$ を、 V_0 で規格化して、図7d.1にプロットしてみよう。

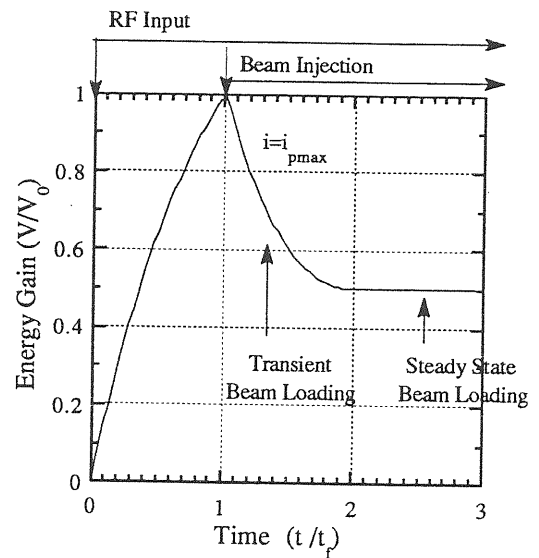


図7d.1 $i = i_{pmax}$ 時の Transient Beam Loading。

ビームエネルギーは、入射後 t_f の間、過渡的にエネルギーが減衰し、定常状態に入る。 $i = i_{pmax}$ であったので、定常状態でのビームのエネルギーゲインは、ビームローディングの無い場合の1/2である。

8. Beam Break-up (BBU)

リニアックで μs オーダーの Long Pulse Beam を加速するとき、ビーム電流を増加していくと、ある Threshold 電流を超えると、電流波形の後部から欠けはじめ、電流増加にしたがってパルス幅が短縮し、ついにはビーム電流の大半が失われる現象が 1960 年頃はじめに観測された。この現象は、ビームのパルス幅が短縮することから、Pulse Shortning とか、ビームが加速途上で失われることから、Beam Break-up 又は Beam Blow-up (略して BBU) と呼ばれる。BBU 現象が起りはじめる Threshold 電流が、Traveling-wave 型加速管では ω^{-3} に、Standing-wave 型加速管では ω^{-2} 比例することから、RF 周波数を下げて BBU を逃れる手段が選ばれ、大電流の L-band (1.3 GHz) リニアックがいくつか建設された。

また、BBU は、図 8a.1 に示すように加速管の TM_{11} -like モード(または HEM_{11} モードとか、 HEM Hybrid Mode)のマイクロ波と、ビームが相互作用し、群速度 $v_g/c < 0$ なる Backward Wave Oscillation が発生すると理解された。その結果、それまで一般的に用いられていた $\pi/2$ モードより、 $2\pi/3$ モードの加速管が BBU に対して有利であることが解り、それ以後の加速管は $2\pi/3$ モードが主流となる。また、定インピーダンス型加速管(CZ-Structure)に比べて、定加速勾配型加速管(CG-Structure)は、1本の加速管の中で各セル毎に Geometry が異なるため、BBU 対策に有利であると考えられている。

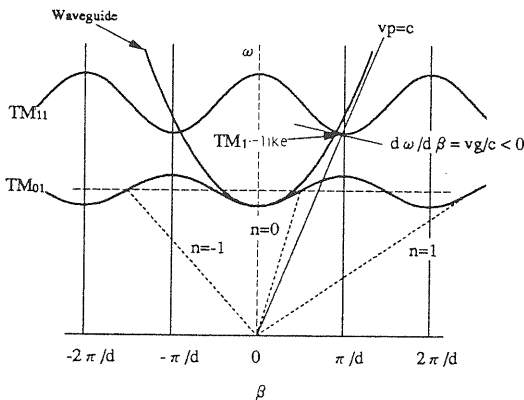


図 8a.1 Brillouin Diagram と TM_{11} -like モード

BBU には、1本の加速管内で発生する Regenerative Beam Break-up (R-BBU) と複数の加速管で発生する Cumulative Beam Break-up (C-BBU) の2種類が考えられる。ここでは、P.B.Wilson のモデルに基づいて BBU について考えてみよう。

8.1 Regenerative Beam Break-up (R-BBU)

1本の加速管の中で発生する R-BBU は、第6章で考えた Transverse Wake Field の Dipole モードとマルチバンチビームとの相互作用による振動である。先行バンチが励起した Wake Field の Transverse 成分によって、後続バンチが Transverse 方向にキックされ、ついには加速管内で失われる。

第6.5章において X-band の加速管における、Transverse Wake Potential を TBCI を用いてシミュレーションしたが、最大のピークを有する TM_{11} -like モードの周波数は 16 GHz であった。これは、11.424 GHz の基本周波数 f_0 の約 1.4 倍に相当する。一般に TM_{11} -like モードの周波数は、基本周波数の 1.4~1.5 倍で、S-band Disk-loaded 加速管では、4.0~4.3 GHz 帯にある。

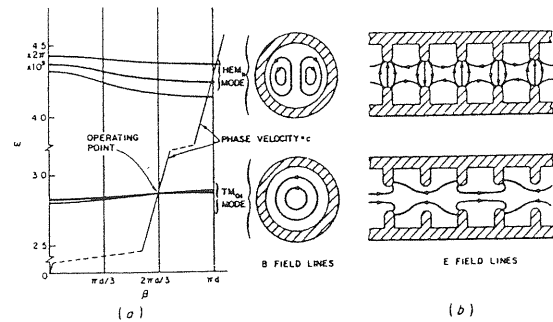


図 8a.2 Disk-loaded 加速管内の TM_{11} -like モード。

図 8a.2 に、Disk-loaded 加速管内での TM_{11} -like deflecting モードの電場と磁場を示す。電場の z 方向成分 E_z は、加速管軸からの距離 r に比例して

増大し、 θ 方向には $\cos \theta$ で変化する。パンチビームと、このDeflecting モードとの相互作用の強度は、単位長当たりの Transverse Impedance r_{\perp} で表される。

$$r_{\perp} = \frac{(1/k^2) (\partial E_z / \partial r)^2}{dP_s/dz} \quad (8a.1)$$

ここで、 $k=\omega/C$ 、 E_z は同期している Forward-wave の場の成分を表す。 dP_s/dz は単位長当たりの加速管壁での RF パワーの消費を表す。Disk-Loaded 加速管では、

$$\frac{r_{\perp}}{Q} \approx 100 \Omega / \lambda \quad (\Omega/m) \quad (8a.2)$$

である。11.424 GHz の λ は 26.24 mm であるので、これを(8a.2)式に代入すると、3.8 k Ω /m となる。第6.5章において考えたX-band Disk-loaded 加速管で URMEL を用いたシミュレーション結果では、 r_{\perp}/Q は π -mode、0-mode で、それぞれ 3.27 k Ω /m、3.52 k Ω /mと得られている。S-band では、約950 Ω /m 程度であることが推定される。

R-BBUでビームがどのように振舞うのかを見てみよう。Traveling Wave型加速管を考え、そこに加速管の軸上をCWの電子ビームが進行していると仮定する。Transverse 方向の磁場を横切る電子は偏向され、加速管を進行するにつれ、距離の二乗で横方向に変位する。偏向力は半波長毎に反対方向になるので、加速管の横から見ると、図8a.3に示すように、ビニールホースの先を振動させたときにホースから飛び出す水のような振舞いをし、場所と共に増大する振動となる。

電子と TM_{11} -like モードの結合度 $g_2(\delta)$ は、電子とマイクロ波の位相のずれを示すパラメータ δ の関数である。速度 $V_e \approx C$ の電子が距離 L を走行した後、マイクロ波との位相のずれ δ は、波の位相速度を V_p とすると、

$$\delta = \omega \left(\frac{L}{V_p} - \frac{L}{V_e} \right) \approx \beta_0 L \left(1 - \frac{V_p}{C} \right) \quad (8a.3)$$

偏向磁場の最大の領域に入った電子は、強く偏向され、波から位相がずれる。そのため、 E_z の減速成分の領域に入ることになる。加速管を電子が通過する間に、半波長ずれるときが、結合度が最大となる。結合度 $g_2(\delta)$ は図8a.4に示すように、 $\delta=2.65$ のとき最大1.04 となる。

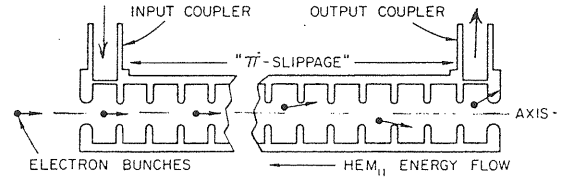


図8a.3 R-BBUにおける電子の軌道

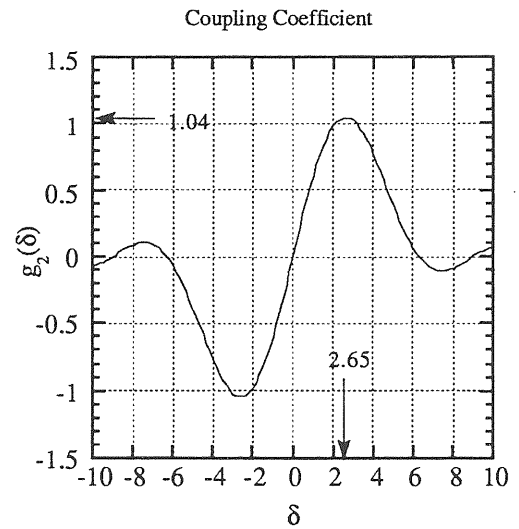


図8a.4 電子と TM_{11} -like モードの結合度 $g_2(\delta)$ 。

一方、ビームからマイクロ波へ与えられるパワーは、ビームの電流に比例し、Backward Waveであったから、加速管上流に向かって伝播する間に増幅される。R-BBU がはじまる Threshold 電流 I_s は、

$$I_s(TW) = \frac{V_0 \lambda^2 (v_g/C)}{8 g_2(\delta) L^3 (r_{\perp}/Q)} \quad (8a.4)$$

ここで、 eV_0 はビーム電子のエネルギー、 $g_2(\delta)$ は電子と TM_{11} -like モードの結合度を表す。

ここで、 $eV_0=500$ MeV、 $\lambda=0.105$ m、 $v_g/C=0.02$ 、 $g_2(2.65)=1.04$ 、 $L=3$ m、 $r_{\perp}/Q = 100 / 0.105 \Omega/m$ を (8a.4)式に代入すると、 $I_s(TW) = 0.515$ A となる。

(8a.4)式はビーム電子のエネルギーが一定として求めたもので、加速管のエネルギーゲイン ΔV に比較してビームのエネルギー V_0 が高いリニアック下流の加速管で有効である。リニアック上流の第1加速管では、ビームエネルギーは入射時は低く、 $\Delta V > V_{0i}$ である。この場合の Threshold 電流は、(8a.4)式の約1/3になる。加速管出口でのビーム電子のエネルギーを V_{0f} とすると、

$$I_s(TW) = \frac{V_{0f} \lambda^2 (v_g/C)}{25 L^3 (r_{\perp}/Q)} \quad (8a.5)$$

Backward-wave が加速管上流の入力カップラーで反射する場合は、このモードが加速管内にトラップされるので、ビームから与えられるパワーは最終的には加速管壁に消費される。このときの Threshold 電流 $I_s(SW)$ は、

$$I_s(SW) = \frac{\pi^2 V_0 \lambda}{4 g_{2max} r_{\perp} L^2} \quad (8a.6)$$

ここで、 $g_{2max}=1.04$ である。 $r_{\perp}/Q \sim 1/\lambda$ であるので、

$$I_s(TW) \propto (\lambda/L)^3 \quad (8a.7)$$

$$I_s(SW) \propto (\lambda/L)^2 \quad (8a.8)$$

以上は、CWビームについて考えたが、リニアックは、一般に数 μs 以下のパルスビームを加速するので、Threshold 電流はさらに増加する。ビームパルス幅が t_p のときは、

$$\frac{I_s(t_p)}{I_s(\infty)} = 1 + \frac{F_e t_f}{t_p}$$

ここで、 t_f は Filling Time で $t_f = 2Q/\omega$ であり、 $\exp(F_e)$ は noise level から R-BBU を発生させるまでの増幅度で、実験から10~20程度であることが知られている。従って、

$$t_p I_s(t_p) = F_e t_f I_s(\infty) = \text{constant} \quad (t_p < t_f) \quad (8a.9)$$

すなわち、ビームのパルス幅 t_p が、 t_f に比べて小さいときは、R-BBU の発生する Threshold はパルス幅と電流の積は一定となる。また、

$$I_s(t_p) \sim I_s(\infty) \quad (t_p > F_e t_f) \quad (8a.10)$$

すなわち、 t_f に比べてパルス幅が長いときは、CWビームによるR-BBUとみなせる。

8.2 Cumulative Beam Break-up (C-BBU)

数多くの加速管から構成されている高エネルギー物理実験用のリニアックでは、各加速管が増幅器の役割をし、数多くの加速管を通過したビームに振動を与える。このタイプのBBUをCumulative Beam Break-up (C-BBU)と呼ぶ。図8b.1にC-BBUにおける電子の軌道を示す。

1本当たりの加速管による増幅器としてのGainが1に近い値、すなわち $(1+\epsilon)$ であるとき、N本の加速管全体では $(1+\epsilon)^N$ となる。 F_e を増幅度(一般に10~20)とすると、次の条件が満たされるとき、BBUが発生する。

$$(1+\epsilon)^N > \exp(F_e) \quad (8b.1)$$

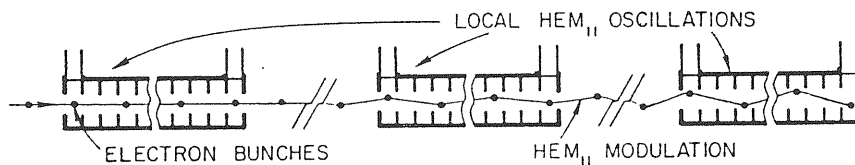


図8b.1 Cumulative Beam Break-up (C-BBU)における電子の軌道。

SLAC定加速勾配型加速管(CG-Structure)では、
 図8b.2に示すように、4139.4 MHz、4147.8 MHz、
 4154.5 MHz、4160.5 MHz、4165.7 MHzのTM₁₁-like
 モードが存在するが、この中で周波数の最も低い
 第1モードがBBUに寄与する。全長L=3 m管で、
 TN₁₁-likeモードのAmplitudeが高い部分は、加速
 管入口から第7セルまでである。この部分の長さ
 L_dは0.25 mに相当し、これは全長Lの1/10程度
 に相当する。また、R_⊥/Qの測定値は400 Ωである。

各加速管の入口付近で Transverse 方向の変位と運
 動量に変調がかけられる。変位が変調されると、
 Off-Axis E_z Field 成分と相互作用して空胴が励起
 され、その結果生じたH_φ成分でビームはキックさ
 れる。加速管から加速管へビームが移動する間に、
 変位はさらに増加する。

加速勾配 V' = dV/dz が一様なりニアックにおいて
 の e-holding factor F_e は、F_e >> 1 なる条件が満たさ
 れるときでは、

$$F_e(CW) = 3^{3/4} \left[\frac{\pi I_0 z R_{\perp}}{2 V' \lambda L} \right]^{1/2} \quad (8b.2)$$

ビームのパルス幅 t_p が Filling Time t_f に関して、
 t_p < F_e t_f のときは、

$$F_e(t) = \frac{3^{3/2}}{2} \left[\frac{\pi^2 I_0 z c t (R_{\perp}/Q)}{V' \lambda^2 L} \right]^{1/3} \quad (8b.3)$$

リニアック収束系の Betatron Wave Number を k_β
 とすると、

$$F_e'(CW) = F_e(CW) [1 - 0.5 k_{\beta}^2 z^2 / F_e(CW)^2] \quad (8b.4)$$

$$F_e'(t) = F_e(t) [1 - 0.75 k_{\beta}^2 z^2 / F_e(t)^2] \quad (8b.5)$$

となる。

BBUを防ぐには、定加速勾配型加速管(CG-
 Structure)を用い、さらにそれぞれの加速管セルの
 サイズを変えて、TM₁₁-likeモードの共振周波数を
 互いにずらすことでTM₁₁-likeモードのマイクロ波
 のパワーのビルドアップを防ぐ方法が効果的であ
 る。PFリニアックでは、準定加速勾配型加速管が
 採用されており、全数160本の加速管の寸法は、
 5種類のタイプに分けられている。そのため、300
 mAの大電流の Long Pulse Beam が加速できる。

SLACでは、加速管入口付近の空胴セルをチューニ
 ングし、セクター毎に +2 MHz や +4 MHz ずらす
 ことで、3種類のグループに分割した。しかし、全
 数が960本にもおよぶため、同一周波数の加速管
 が300本にもなる。たり、リニアック収束系の
 Qマグネットを増強し、BBU対策をしている。

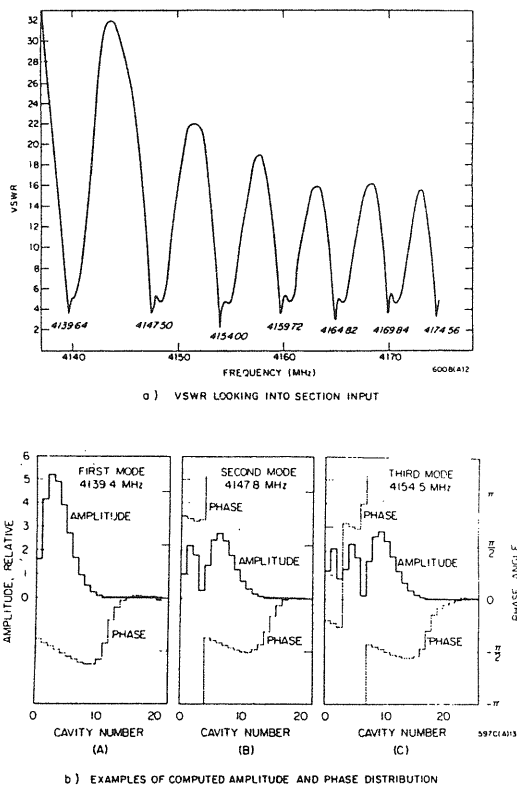


図8b.2 SLAC 加速管における TM₁₁-like モード。(R.B. Neal, "The Stanford Two-Mile Accelerator" (1968) p.222 より)

参考文献

- 1) "Linear Accelerators", edited by P.M.Lapostolle and A.L.Septier (North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1970).
- 2) "The Stanford Two-Mile Accelerator", edited by R.B.Neal (W.A.Benjamin, Inc. 1968).
- 3) P.B.Wilson, 'High Energy Electron Linac: Applications to Storage Ring RF Systems and Linear Collider', AIP Conference Proceedings No.87 'Physics of High Energy Particle Accelerators' AIP (1982) p450-563 or SLAC-PUB-2884 (1982).
- 4) G.A.Loew and R.Talman, 'Elementary Principles of Linear Accelerators', AIP Conference Proceedings No.105 'Physics of High Energy Particle Accelerators' AIP (1983) p1-91.
- 5) A.W.Chao, 'Coherent Instability of a Relativistic Bunched Beam', AIP Conference Proceedings No.105 'Physics of High Energy Particle Accelerators' AIP (1983) p353-525.
- 6) J.D.Lawson, "The Physics of Charged-particle Beams" (Clarendon Press, Oxford, 1977).
- 7) P.B.Wilson, 'A Study of Beam Blow-up in Electron Linac', HEPL-297 (Internal Memorandum) 1963.
- 8) P.B.Wilson, 'A Simple Analysis of Cumulative Beam Break-up for the Steady State Case' HEPL-TN-67-8.
- 9) R.B.Palmer, 'The Interdependence of Parameters for TeV Linear Colliders', SLAC-PUB-4295 (1987).

電子リニアックを理解するには、OHO'84～'89
にかけての教科書を熟読するのが良いでしょう。
それに加えて上記の書籍、文献を参照して下さい。