

1.はじめに

電子銃は電子ビームの供給源であり、電子ビームを必要とするあらゆる場合に使用されている。その用途は広範で、様々な種類の電子銃が開発されている。しかしここでは、電子リニアックに直接関係のある電子銃に話を限ることにする。

電子リニアックのビームは通常パルス状で、1 ns から 1 μ s の時間幅のビームがよく使用されている。ビーム電流はパルス幅によって異なるが、ピーク値で 20 mA から 10 A の範囲であることが多い。

電子銃の構成は、極めて簡単にいうと、陰極、グリッド、ウエネルト電極、及び陽極から成る。電子ビームは、高電圧（ ~ 100 kV 程度）の印加された陰極から放出されるが、その際のビーム電流とパルス幅は、グリッドと陰極間に印加されるパルスによって制御される。また、陰極に高圧を印加しても、必要のないときにはビームが出ないようにするために、陰極とグリッドの間には逆バイアス（ ~ 100 V）が印加されている。グリッドメッシュを通り抜けたビームは、陽極に向かって加速された後、陽極にあけられた穴を通して加速管側へ供給される。

電子銃を実際に運転する場合には、このほかに勿論、高圧電源を初めとした各種電源、絶縁管、真空系、集束系及び制御系等が必要になり、関係する装置は数多い。しかし、以下の議論ではビームに直接関係する部分に話を限ることにする。

電子銃を設計する場合には、まず陰極の選定と、これにグリッドとヒーターを加えた全体の構成が問題となる。最大ビーム電流と寿命は陰極によって決まる、といっても言い過ぎではないであろう。また、短パルスビームを取り出すために、グリッドと陰極間の距離（ ~ 0.2 mm）を極めて短くすることが必要になる。このほかに陰極を加熱するためのヒーターがあり、電気的な絶縁と断熱の問題がある。これらには真空管の最新の技術が生かされており、極めてコンパクトで信頼性の高い製品が開発されている。

次に、ウエネルト電極と陽極の形状と配置を決めることが必要になる。ビームが平行にな

るようにこれらを決める Pierce 型の電子銃が一般によく使われている。この型の電極の形状は、特別な場合に限って解析的な解が得られている。しかし最近では数値計算コードが発達しており、ビーム軌道をシミュレーションするによって電極の形状を決定することが出来るようになっており、実際に利用されている。

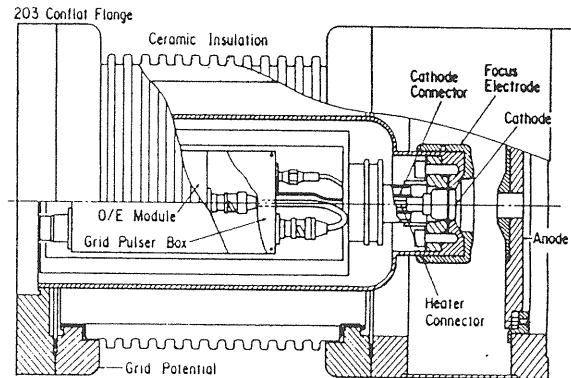


図 1.1 電子銃の断面と構成

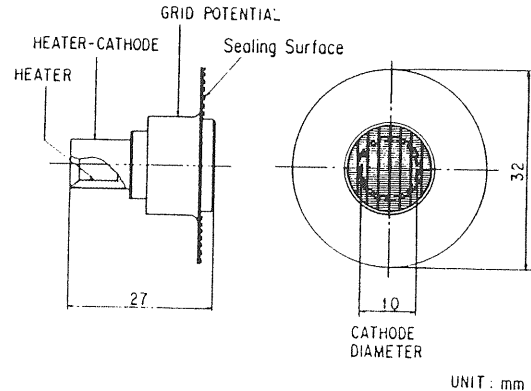


図 1.2 酸化物陰極とグリッド・ヒーターアセンブリー

Pierce 型の電子銃はクライストロンでも使用しており、“加速器セミナー”ではそのセクションで一昨年この型の電子銃について詳しい解説が成されている。また同年の“電子線形加速器”のセクションでも電子銃全般について説明されている。共通する部分も多いので重複を避ける意味もあって、以下では電子放出を中心にして、電子銃に関する基礎的な事柄を考察す

る。従って、電子銃について説明するときには必ず述べなければならないことも、場合によっては除いてある。

ビームの質を問われるようになった昨今、源である電子銃のビームから検討を始めることが必要であろう。そこで電子放出から始めて空間電荷による二乗平均エミッタンスの増大及び関係する何種類かの実際の電子銃について説明する予定であったが、筆者の力量不足で時間を使い果たし、後者の説明まで至らなかった。心苦しいかぎりである。エミッタンスの増大については、今年の”加速器セミナー”にまとまった解説があるのでそちらを見ていただきたい。

なお加速器では、電子放出は電子銃に限らずいろいろな所で放電等の問題となって現われる。高電界や放射光、放射線等が必ず関係するためであるが、これらの概念的理解に少しでも役に立つことがあればと思って、あえて電子放出の問題を取り上げた。

2. 電子放出

一般に金属中の電子を外に取り出すにはいくつかの方法がある。金属表面にあるポテンシャル障壁を飛び越えるのに必要なエネルギー（仕事関数に相当する）を金属中の電子に与える方法（熱電子放出、光電子放出、二次電子放出）と、金属表面に強電界を掛けていわゆるトンネル効果で放出させる方法（電界電子放出）とがある。二次電子放出は通常電子銃には利用されないの、それ以外の場合について考察し、放出電流密度等を具体的に計算する。

金属中の伝導電子が外界に対して $-w$ のポテンシャルエネルギーを持ち、 0°K におけるFermi準位 μ_0 が外界よりも ϕ だけ低いとする（図2.1参照）。金属が高温の場合には、電子のFermi分布の縮退が解けて、ポテンシャル障壁を飛び越えるのに十分な高いエネルギーを持った電子が存在する。この電子は、金属を陰極として適当に電位差を与えると、表面から真空中に逃れ出ることができる。これが熱電子放出である。又、金属が低温であっても、十分なエネルギーを持つ光を金属表面に照射すると、金属内電子が光子を表面付近で吸収し、外部に逃

れ出るのに必要なエネルギーを得て放出される。これを光電子放出という。一方、 0°K でFermi分布が完全に縮退している場合でも、外界に電子を引きだす方向に強電界が存在する場合には、外界のポテンシャルが図2.1よりも更に急速に下がるためにトンネル効果が顕著になり、電子が表面から放出される。この現象が電界電子放出と呼ばれているものである。

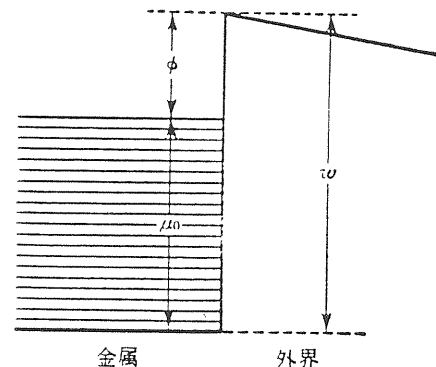


図2.1 表面のポテンシャル障壁と伝導電子のエネルギー準位

2.1 金属の電子放出の基礎

最初に金属の電子放出について一般的な議論をし、後に次の3つの具体的な場合について計算を行なう。

- 1) 熱電子放出 (Richardson-Dushmanの式)
- 2) 電界電子放出 (Fowler-Nordheimの式)
- 3) 光電子放出

まず金属の表面から真空中に放出される伝導電子の数について考察する。以下では、金属内の伝導電子を理想Fermi気体とするモデルに基づいて議論する。金属の表面に垂直でかつ真空側を z 軸の正の方向にとった座標系を考えよう。初めに、金属の内部に存在する電子のうち、単位表面に到達することの出来る伝導電子について計算する。単位時間内に単位表面に到達する電子の内、 z 方向の運動量成分 P_z を持つ電子の

数を $n(P_z)$ とする。 P_z の電子が表面のエネルギー障壁を通過する確率を $P(P_z)$ とすれば、金属の表面から真空側へ単位時間に放出される伝導電子の数 N は、次のようになる。

$$N = \int P(p_z) dn(p_z) \quad (1.1)$$

$P_z \sim P_z + \Delta P_z$ の間に z 方向の運動量成分を持つ電子の数 $\Delta n'(P_z)$ は、この量子状態の密度 $D(P_z)$ と各量子状態に存在する粒子数の平均値をあらわす分布関数 $f(\varepsilon)$ の積で、次のように与えられる。

$$\Delta n' = D(p_z) f(\varepsilon) \Delta p_z \quad (1.2)$$

(ここで $D(p_z)\Delta p_z$ は、 z 方向の運動量が $P_z \sim P_z + \Delta P_z$ の範囲にあるにある量子状態の数である。

電子はスピン $1/2$ の Fermi 粒子であるから、 $f(\varepsilon)$ は次の Fermi の分布関数で与えられる。

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\{(\varepsilon - \mu)/kT\} + 1} \quad (1.3)$$

ここで、 μ は Fermi 準位で、 k は Boltzmann 定数、 T は絶対温度、 ε は電子の運動エネルギーである。これは、金属内の電子の質量 (有効質量) を m とすると

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (1.4)$$

である。

次に運動量が $P_z \sim P_z + \Delta P_z$ の範囲にある量子状態の数 $D(p_z)\Delta p_z$ を求めよう。自由電子の場合は、電子系が位相空間に占める体積要素を $\Delta\Gamma$ とすると、この中に存在する量子状態の数は $2\Delta\Gamma/h^3$ で与えられる。実空間の自由度が 3 であるので、プランクの定数 h の 3 乗で割ってある。因子 2 はスピンの自由度で、スピンの自由度が $1/2$ であるために同一のエネルギー状態に 2 個までは入れることの反映である。一方、位相空間の体積要素 $\Delta\Gamma$ は

$$\Delta\Gamma = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \quad (1.5)$$

である。したがって、 $P_z \sim P_z + \Delta P_z$ の範囲にあるある量子状態の数 $D(p_z)\Delta p_z$ は次のようになる。

$$D(p_z) \Delta p_z = \frac{2}{h^3} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z \quad (1.6)$$

(1.6) に (1.2) を代入すれば $P_z \sim P_z + \Delta P_z$ の範囲に運動量成分を持つ電子の数がもとまる。しかし、(1.1) の $\Delta n(P_z)$ は単位時間に金属の単位表面まで到達する電子の数であるから、 Δz の大きさは P_z によって次のような制限を受ける。

$$\Delta z \leq v_z \Delta t = \frac{p_z}{m} \Delta t \quad (1.7)$$

($\Delta z > \Delta t p_z / m$ に存在する電子は、 Δt 後に金属の表面まで到達しない。)

(1.7) の条件を満たす電子の数を $\Delta n''(P_z)$ とすると、(1.2)、(1.5)、(1.6)、(1.7) より $\Delta n''(P_z)$ は

$$\Delta n''(p_z) = \frac{2}{h^3} \frac{p_z}{m} \Delta x \Delta y \Delta t \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z f(\varepsilon) \quad (1.8)$$

となる。 $\Delta n''(P_z)$ は、 Δt 時間内に、金属の表面積 $\Delta x \Delta y$ の場所に到達する電子数であるから、単位面積、単位時間当たりになると、金属の表面に到達する電子数 $\Delta n(P_z)$ は、

$$\Delta n(p_z) = \frac{2}{h^3} \frac{p_z}{m} \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z f(\varepsilon) \quad (1.9)$$

となる。(1.9) を (1.1) に代入して、 P_x 、 P_y 、 P_z について積分すると

$$N = \frac{2}{h^3} \int_0^\infty dp_z \frac{p_z}{m} \int_{-\infty}^\infty dp_x \int_{-\infty}^\infty dp_y f(\varepsilon) P(p_z) \quad (1.10)$$

(P_z については、表面に向かう電子についての

み積分していることに注意)。ここで表面に平行な方向の運動量成分を P' とすると

$$p_x^2 + p_y^2 = p'^2 \quad (1.11)$$

となり、(1.10) は次の様に表される。

$$N = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp_z \frac{p_z}{m} \int_0^\infty p' dp' \frac{P(p_z)}{\exp\left\{\left(\frac{p_z^2 + p'^2}{2m} - \mu\right)/kT\right\} + 1} \quad (1.12)$$

これが金属の単位表面から単位時間に真空中に放出される電子の数である。これまでの議論では、電子が金属表面のエネルギー障壁を通過する確率である $P(p_z)$ の関数形については具体的な形を与えていない。以下では、この関数形を具体例について決定し、真空中に放出される伝導電子の電流密度を計算する。

尚、自由電子の状態密度をエネルギー ε の関数としてあらわすと、(1.6) より

$$D(\varepsilon) = 2 \frac{4\pi V}{h^3} p^2 \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{8\pi V}{h^3} (2m^3 \varepsilon)^{1/2} \quad (1.13)$$

となり、 ε について放物線となる。(ここで、 P は電子の全運動量であり、 $\varepsilon = p^2/2m$ の関係式を使った。)

しかし、固体の中にある電子は一般には結晶の周期性の影響をうけ、そのため状態密度 $D(\varepsilon)$ はいくつかの群に分れる。その形は結晶内電子のバンド構造と呼ばれ、個々の物質の特性である。このように自由電子以外では状態密度が複雑な形をしている。金属の場合にもバンド構造が見られるが、金属内の伝導電子については近似的に理想 Fermi 気体として議論することができる。

2.2 熱電子放出

まず最初に熱電子放出の場合について考察する。具体的に計算を初める前に結果を与えてお

こう。熱電子放出は基本的には Richardson-Dushman の式で特徴づけられ、Schottky 効果と表面での電子の透過率を考慮すると、単位面積当たりの放出電流密度は

$$I = \eta A T^2 \exp\left(-\frac{\phi - \beta F^{1/2}}{kT}\right) \quad (1.14)$$

で与えられる。ここで、 η はポテンシャル障壁に対する電子の平均的な透過率、 A は熱電子放出定数、 T は陰極の絶対温度、 ϕ は仕事関数、 β は Schottky 効果の係数、 F は外部から印加する電界強度である。この電流表式の中で、最も大きく影響するものは、仕事関数 ϕ である。これは物質によって値が異なる。

さて金属表面から脱出することの出来る電子は、ポテンシャル障壁の高さ w よりも大きな z 方向の運動エネルギーを持った状態にある電子の中で、表面に向かって運動している電子だけである。この条件を満たす電子は必ず表面から脱出すると仮定する。つまり、電子がエネルギー障壁を通過する確率を

$$p(\varepsilon_z) = \begin{cases} 1 & , (\varepsilon_z > w) \\ 0 & , (\varepsilon_z < w) \end{cases} \quad (1.15)$$

とする。量子力学では後で説明するように、ポテンシャル障壁 w よりも大きな運動エネルギーをもった電子でも、確率の流れの密度がポテンシャル障壁の所で一部分反射されるために、透過率は一般には 1 よりも小さいが、ここでは簡単のために式 (1.15) のようにこの透過率を 1 とする。この場合、金属表面の単位面積から単位時間に放出される電子数 N は、(1.15) を (1.12) に代入して積分することにより

$$N = \frac{4\pi}{h^3} \int_{\sqrt{2mw}}^\infty dp_z \frac{p_z}{m} \int_0^\infty p' dp' \frac{1}{\exp\left\{\left(\frac{p_z^2 + p'^2}{2m} - \mu\right)/kT\right\} + 1} \\ = \frac{4\pi}{h^3} \int_w^\infty d\varepsilon_z \int_0^\infty p' dp' \frac{\exp\left\{-\left(\frac{p_z^2 + p'^2}{2m} - \mu\right)/kT\right\}}{1 + \exp\left\{-\left(\frac{p_z^2 + p'^2}{2m} - \mu\right)/kT\right\}} \quad (1.16)$$

$$= \frac{4\pi mkT}{h^3} \int_w^\infty d\varepsilon_z \left[-\log \left(1 + \exp \left\{ -\frac{(\varepsilon_z^2 + p^2) - \mu}{kT} \right\} \right) \right]_0^\infty$$

$$= \frac{4\pi mkT}{h^3} \int_w^\infty d\varepsilon_z \log \left[1 + \exp \left(-\frac{\varepsilon_z - \mu}{kT} \right) \right] \quad (1.17)$$

となる。ここで $\mu(T) \approx \mu_0$ とおき、 $w - \mu_0 = \phi \gg kT$ とすると、 $e^{(\mu - \varepsilon_z)/kT} \ll 1$ となるから、 $\log(1+x) \sim x$ なる近似をすると

$$N = \frac{4\pi mkT}{h^3} \int_w^\infty d\varepsilon_z \exp \left(-\frac{\varepsilon_z - \mu_0}{kT} \right) \quad (1.18)$$

$$= \frac{4\pi m(kT)^2}{h^3} e^{-\phi/kT} \quad (1.19)$$

従って、単位面積当たりの熱電子放出の電流密度は、

$$I = eN = \frac{4\pi mek^2}{h^3} T^2 e^{-\phi/kT}$$

$$= A T^2 e^{-\phi/kT} \quad (1.20)$$

となる。これが、Richardson - Dushman の式と呼ばれているものである。ここで使用している各記号の意味は次のようなものである。

m	: 電子の質量	0.5110 MeV/c ²
e	: 素電荷	1.602x10 ⁻¹⁹ coulomb
k	: ボルツマン定数	8.617x10 ⁻⁵ eV K ⁻¹
h	: プランク定数	4.135x10 ⁻²¹ MeV s
T	: 絶対温度 (° K)	
φ	: 仕事関数 (eV)	

数値を代入すると、式 (1.20) の係数 A は

$$A = 120.4 \text{ (Amp cm}^{-2} \text{ K}^{-2}) \quad (1.21)$$

となる。A は熱電子放出定数と呼ばれる。I は熱陰極の最大放出電流密度を与えるものであって、飽和電流密度ともいう。これはポテンシ

ヤル障壁の透過率を 1 とした場合の値であるから、次に述べるように透過率が 1 にならない実際の場合には、放出定数 A は一般にこの値よりも小さくなる。

ポテンシャル障壁の透過率

次にこのポテンシャル障壁の透過率の問題について考えてみよう。量子力学によると、図 2.2 の様な形の階段型ポテンシャル中では、電子がポテンシャル障壁よりも大きな運動エネルギーを持っている場合でも、電子がポテンシャル障壁を透過する割合 (透過率) は、次式で与えられるように、一般には 1 よりも小さい。

$$p(\varepsilon_z) = \begin{cases} \frac{4[(\varepsilon_z - w)\varepsilon_z]^{1/2}}{[\varepsilon_z^{1/2} + (\varepsilon_z - w)^{1/2}]^2} & , (\varepsilon_z > w) \\ 0 & , (\varepsilon_z < w) \end{cases} \quad (1.22)$$

(この式を導出するには、シュレーディンガー方程式を解いて階段型ポテンシャル中での電子の波動関数を求め、確率の流れの密度を計算して透過率を出せばよい。これは本論から外れるので、ここでは議論しないが、興味をお持ちの方は、量子力学の教科書を見ていただきたい。)

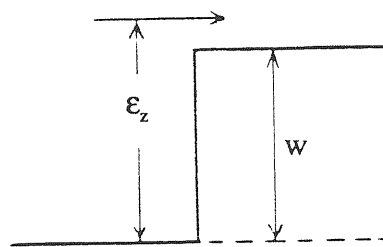


図 2.2 階段型ポテンシャル

式 (1.22) から分かるように、電子の z 方向の運動エネルギー ε_z が、ポテンシャル障壁の高さ w よりも極くわずかに大きくない場合には透過率が小さく、 ε_z が大きくなるにつれて透過率は次第に 1 に近づく。電子の透過率として、古典力学的な式 (1.15) の代わりに量子力学の式 (1.22) を使う場合は、表面の単位面積から

態ではなく、何らかの膜ができてることが多い。このような場合には、表面付近にポテンシャルの山が出来ると考えられる。この状態を最も単純化したのが図2.4のポテンシャルである。この場合にも電子の透過率が量子力学により解析的に求められる。式が図2.2の場合よりも複雑になるのでここでは省略するが、平均的な透過率の方は近似的に次のように簡単な式で与えられる。

$$\eta = 2\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{kT} w}{H} e^{-2\kappa(H-w)^{1/2}} \quad (1.30)$$

ここで $\kappa^2 = 8\pi^2 m/h^2$ である。例として、 $w = 5 \text{ eV}$ でポテンシャルの山の幅 l が2オングストロームの場合について、 $H - w$ をパラメータにして計算した η 値を図示する。 $H - w$ が1eV以上になると、 η の値は1よりもかなり小さな値になる。 l が大きくなっても同様である。このことは表面付近に膜等によりポテンシャルの山ができると、熱電子放出が大きく抑制されることを意味している。

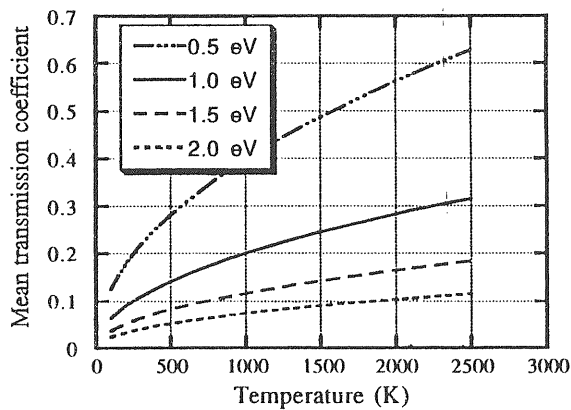


図2.5 H-w をパラメータにして場合の η 値の変化

熱電子のエネルギー分布

さて次に放出された熱電子のエネルギースペクトルについて考えてみよう。金属表面に垂直な方向のエネルギースペクトルは、式(1.23)の被積分関数で与えられることは明らかである。電流密度のスペクトル $i(\epsilon_z)$ は、この被積

分関数に素電荷 e をかけて

$$i(\epsilon_z) = \frac{4\pi m e k T}{h^3} \exp\left\{-\frac{\epsilon_z - \mu}{kT}\right\} P(\epsilon_z) \quad (1.31)$$

となる。この関数の形は $\epsilon_z - w \approx 0$ を除くと、ほとんど指数関数的に減少する。

なお、金属表面に平行な方向の平均エネルギーについては、セクション5.1でエミッタンスと関連させて議論する。

Schottky効果

式(1.20)の飽和電流密度は、陰極面での電界には関係しない量である。しかし二極管の温度制限領域ではかなりの高電界が陰極面に加わり、陽極電流も電界によって増加する。この現象は、Schottky効果と呼ばれる。この場合の電界強度は、後に述べる電界電子放出の場合ほど大きくなく、トンネル電流はゼロと見なせる。

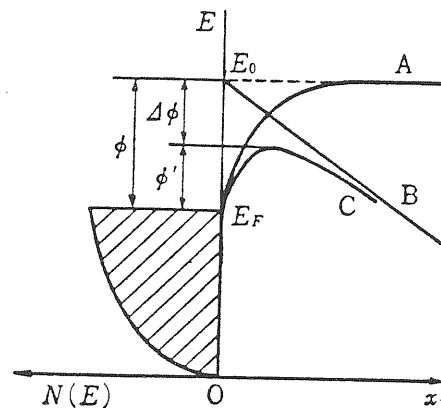


図2.6 強い印加電界による陰極面のポテンシャル変化

熱電子放出に及ぼす電界の効果の問題を考えるにはまず、陰極面近傍のポテンシャル配置を考える必要がある。金属面から電子が放出されると、その電荷の影像が金属面に生じ、電子とその影像電荷との間にクーロン力が働く。この力に対するポテンシャルは

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_z^\infty \frac{e^2}{(2z)^2} dz = -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z} \quad (1.32)$$

である。ここで z は電子と金属面との距離、 ϵ_0 は真空の誘電率である。電界が印加されないときのポテンシャル障壁は、図2.6の実線Aであらわされる。この陰極に電界 F が加えられると、印加電界による点 z でのポテンシャルは直線 B で示される $-eFz$ となる。それゆえ

$$V(z) = w - \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 z} - eFz \quad (1.33)$$

が、電界及び映像力を考慮したときの障壁の形となる。これは図の曲線 C である。

曲線 C は z が

$$z_m = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{e}{\pi\epsilon_0 F}} \quad (1.34)$$

で、最大値

$$V_m = w - \frac{e}{2} \sqrt{\frac{eF}{\pi\epsilon_0}} \quad (1.35)$$

をとる。この時ポテンシャル障壁は上式の第二項に相当する値だけ低下していることになり、電子放出の実効的工作関数 ϕ' は

$$\phi' = \phi - \frac{e}{2} \sqrt{\frac{eF}{\pi\epsilon_0}} \quad (1.36)$$

となる。結局、この式を用いて Richardson-Dushman の式を補正すると

$$\begin{aligned} I &= A T^2 e^{-\phi/kT} \exp\left(\frac{e}{2kT} \sqrt{\frac{eF}{\pi\epsilon_0}}\right) \\ &= A T^2 \exp\left(-\frac{\phi - \beta F^{1/2}}{kT}\right) \end{aligned} \quad (1.37)$$

が得られる。Schottky効果の係数 β は

$$\beta = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{e}{\pi\epsilon_0}} \quad (1.38)$$

である。式 (1.37) から $\log I$ と $F^{1/2}$ の関係は右上がりの直線となることが分かる。

2.3 電界電子放出

次に、金属の外部に高電界が存在する場合について考察する。電界の方向が電子を引きだす方向である場合は、外界のポテンシャルが図2.1のように下がるために、金属内の伝導電子がトンネル効果を起こし、ポテンシャル障壁を通り抜けて表面から放出される。この現象は金属が低温でも、電界 ($\sim 10^7$ V/cm 以上) が十分に強ければ発生するもので、Cold Emission と呼ばれている。

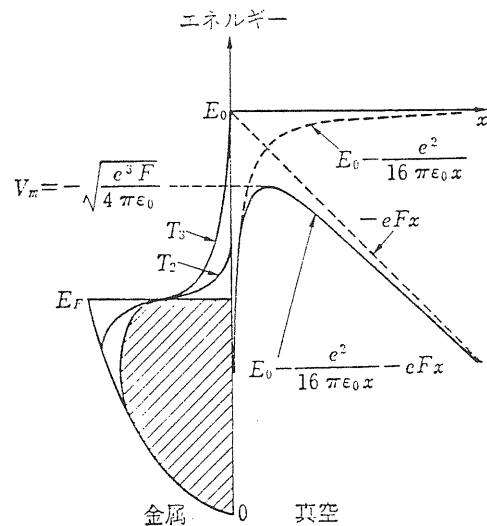


図2.7 熱電界電子放出陰極のエネルギー準位図

以下では簡単のために、もっぱら温度が $T=0$ °K である場合について考察する。このとき、Fermi の分布関数は式 (1.3) より

$$f(\epsilon) = \begin{cases} 1 & , (\epsilon < \mu) \\ 0 & , (\epsilon > \mu) \end{cases} \quad (2.1)$$

となる。電子は完全に縮退していて、 $\epsilon < \mu$ の量子状態は全て電子で満たされており、 $\epsilon > \mu$ の状態は完全に空である。したがって $\epsilon < \mu$ の

状態のみを考えればよい。このとき、金属の単位表面から単位時間に真空中に放出される伝導電子の数Nは、(1.12)より次のようになる。

$$N = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\sqrt{2m\mu_0}} dp_z \frac{p_z}{m} \int_0^{\sqrt{2m\mu_0 - p_z^2}} p' dp' P(p_z) \quad (2.2)$$

$$= \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{\sqrt{2m\mu_0}} dp_z \frac{p_z}{m} P(p_z) \frac{1}{2} [p'^2]_0^{\sqrt{2m\mu_0 - p_z^2}}$$

$$= \frac{4m\pi}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon_z (\epsilon_F - \epsilon_z) P(\epsilon_z) \quad (2.3)$$

上式の変形の途中で、フェルミ準位とz方向のエネルギーの、次の関係式を使った。

$$\frac{1}{2} (p_z^2 + p_{\max}^2) = \epsilon_F = \mu_0 \quad (2.4)$$

$$\epsilon_z = \frac{p_z^2}{2m}$$

電子がポテンシャル障壁をトンネル効果で通過する確率 $P(\epsilon_z)$ は、量子力学のWKB近似によると次のようになる。

$$P(\epsilon_z) = \exp\left(-2 \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(z) - \epsilon_z)} dz\right) \quad (2.5)$$

ここで $V(z)$ は、外界のポテンシャルである。これは、電界が一様である場合は、電界の強さを F とすると、

$$V(z) = w - eFz \quad (2.6)$$

と近似される。ここでは簡単のために、Schottky効果のところまで考慮した影像電荷の効果は無視する。このとき、式(2.5)の指数部の積分は

$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (w - \epsilon_z - eFz)} dz =$$

$$= \left[\left(\frac{2m}{\hbar^2} (w - \epsilon_z - eFz) \right)^{3/2} \left(-\frac{3m}{\hbar^2} eF \right)^{-1} \right]_{z_0}^{z_1}$$

$$\approx \left(\frac{2m}{\hbar^2} (w - \epsilon_z) \right)^{3/2} \frac{\hbar^2}{3m eF}$$

$$= \exp\left(\frac{2\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} (w - \epsilon_z)^{3/2} \right)$$

よって、トンネル確率は

$$P(\epsilon_z) = \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} (w - \epsilon_z)^{3/2} \right) \quad (2.7)$$

となる。これを(2.3)に代入すると

$$N = \frac{4m\pi}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon_z (\epsilon_F - \epsilon_z) \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{(w - \epsilon_z)^{3/2}}{eF} \right) \quad (2.8)$$

$\epsilon_F - \epsilon_z = x$ と置くと $x \ll w$ の領域が積分の主要な部分となるから、 x についてTaylor展開して近似し、仕事関数の関係式 $\phi = w - \epsilon_F$ を使うと

$$N \approx \frac{4m\pi}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} dx x \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} \left(\phi^2 + \frac{3}{2} \phi x \right) \right) \quad (2.9)$$

となる。ここで更に部分積分の公式

$$\int x e^{ax+b} dx = x \frac{e^{ax+b}}{a} - \int \frac{e^{ax+b}}{a} dx$$

$$= x \frac{e^{ax+b}}{a} - \frac{e^{ax+b}}{a^2} \quad (2.10)$$

を使うと、金属の単位表面から単位時間に真空中に電界放出される伝導電子の数Nは

$$N \approx \frac{(eF)^2}{8h\pi\phi} \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} \phi^{\frac{3}{2}}\right) \quad (2.11)$$

となる。

従って、金属の単位表面から単位時間に電界放出される電流密度 I は

$$I = eN = \frac{e^3 F^2}{8h\pi\phi} \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} \phi^{\frac{3}{2}}\right) \quad (2.12)$$

となる。これが、Fowler - Nordheim のトンネル電流の式と呼ばれているものである。これまでに使用して記号の意味については、熱電子放出の項を参照のこと。電流密度と電界強度をそれぞれ I (Amp/cm²), F (V/cm) で表して係数を計算すると

$$I = 1.54 \times 10^{-6} \frac{F^2}{\phi} \exp\left(-6.83 \times 10^7 \frac{\phi^{\frac{3}{2}}}{F}\right) \quad (2.13)$$

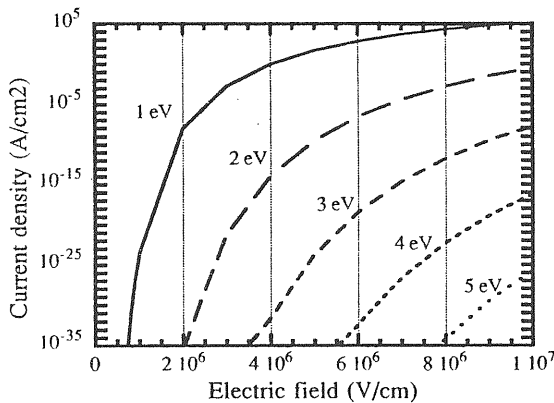


図 2.8 電界電子放出の電流密度

図 2.8 にこの電流密度を図示する。図中の数字は仕事関数を表す。金属の仕事関数は数 eV であるから、トンネル電流が顕著になるのは電界強度が 10 MV/cm 以上の場合であることがわ

かる。このような強電界を得るために先端の尖った金属を陰極として使用するのが一般的である。

電界強度によっては極めて高い電流密度が得られるので、数千アンペア以上の大電流を必要とする場合に使用されることが多い。但し電界放出電流は動作が不安定である上に、繰り返し使用するうちに金属の先端が丸くなり、電流密度が減少するという寿命に難点があるようである。

電界放出電子のエネルギースペクトル

さて次に電界放出された電子のエネルギー分布について考えてみよう。式 (2.8) では、電子の z 方向のエネルギーで積分して単位表面から単位時間に真空中に放出される電子の全数を求めた。従って積分する前の被積分関数が、放出された電子の金属表面に垂直方向のエネルギー分布を与えることになる。但し、これは金属の温度が $T = 0^\circ\text{K}$ の場合の分布である。有限な温度では Fermi の分布関数は式 (2.1) ではなく (1.3) で与えられる。従って電界放出電流の金属表面に垂直方向のエネルギースペクトルを $i(\epsilon_z)$ とすると、式 (1.12) と (2.7) より、 $i(\epsilon_z)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} i(\epsilon_z) &= \frac{4\pi m e}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon' \frac{\exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}(w - \epsilon_z)^{3/2}}{3\hbar eF}\right)}{\exp\{(\epsilon_z + \epsilon' - \mu)/kT\} + 1} \\ &= \frac{4\pi m e k T}{h^3} \log\left[1 + \left(\frac{\epsilon_z - \mu}{kT}\right)\right] \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}(w - \epsilon_z)^{3/2}}{3\hbar eF}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

これは当然のことながら温度の関数である。尚、電界放出電流の金属面に平行な方向の平均エネルギーについては、セクション 5.3 で議論する。

温度が有限な場合の電界放射電流密度は、式 (2.14) を表面に垂直方向のエネルギー ϵ_z で積分すれば得られ、結果は次のようになる。

$$I(T) \approx I \left\{ \left(\frac{\pi k T}{d} \right) / \sin\left(\frac{\pi k T}{d} \right) \right\} \quad (2.15)$$

ここで、 $d \approx \hbar e F / 2(2mw)^{1/2}$ である。式 (2.15) の $\{ \}$ 内の値は一般に 1 よりも大きい
が、温度が上がると共にこの項は次第に大き
くなる。つまり温度が高くなると電界放出電流は、
Fowler - Nordheim の式で与えられる値よりも大
きくなる。

2.4 光電子放出

次に、金属に振動数 ν の光を照射した場合の
光電効果による電子放出について考察する。こ
の現象は、前にも述べたように、金属内電子が
エネルギー $h\nu$ の光子を表面付近で吸収し、 z
方向のエネルギーがポテンシャル障壁よりも高
い状態に励起されることによって起こる。励起
されたこの電子の運動が真空側に向かっていれ
ば、当然それは表面から放出されてくるのであ
る。

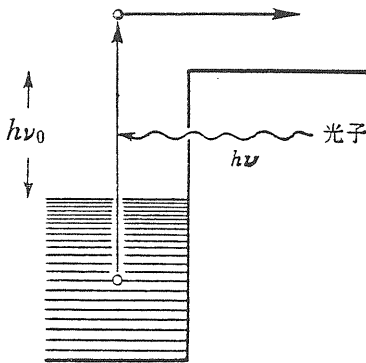


図 2.9 光電子放出

励起前の電子の運動量を (p_x, p_y, p_z) 、励起
後に表面から放出された電子の運動量を $(p_x,$
 $p_y, p'_z)$ とすると、エネルギー保存則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + h\nu \\ = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p'_z{}^2) + w \end{aligned}$$

(3.1)

が成立している。表面に平行な方向では並進対
称性があるので運動量は変わらないとしている。

式 (3.1) から励起後の電子が金属表面から脱
出できるためには、 $p'_z > 0$ であり、したがって

$$\frac{p_z^2}{2m} + h\nu = \varepsilon_z + h\nu > w \quad (3.2)$$

ここで ε_z は、励起される前の電子の z 方向の運
動エネルギーである。

よって、光電子がエネルギー障壁を通過する
確率とエネルギーの関係は

$$p(\varepsilon_z) = \begin{cases} 1 & ,(\varepsilon_z > w - h\nu) \\ 0 & ,(\varepsilon_z < w - h\nu) \end{cases} \quad (3.3)$$

となる。ここでは、量子力学の効果（ポテンシ
ヤル障壁による反射）を、簡単のために無視し
ている。

この透過率が 1 となるエネルギーの範囲が異
なる以外は、熱電子放出の場合と全く同じであ
る。従って、表面の単位面積から単位時間に放
出される光電子の数 N は、(3.3) を (1.12) に
代入して、

$$N = \frac{4\pi m}{h^3} \int_{w-h\nu}^{\infty} d\varepsilon_z \int_0^{\infty} d\varepsilon' \frac{1}{\exp(\varepsilon_z + \varepsilon' - \mu)/kT + 1}$$

(3.4)

$$= \frac{4\pi m k T}{h^3} \int_{w-h\nu}^{\infty} d\varepsilon_z \log \left[1 + \exp \left(-\frac{\varepsilon_z - \mu}{kT} \right) \right]$$

となる。上式は熱電子放出の式 (1.17) と積分
範囲が異なるだけである。積分の下限を 0 にす
るために、積分変数を $y = (\varepsilon_z - w + h\nu) / kT$
に変え、仕事関数を $h\nu_0$ とあらわせば、表面の
単位面積から単位時間に放出される光電子の数

N は、

$$N = \frac{4\pi m(kT)^2}{h^3} \int_0^\infty dy \times \log \left[1 + \exp \left(\frac{h(\nu - \nu_0)}{kT} - y \right) \right]$$

$$= A'' T^2 f(\delta) \quad (3.5)$$

となる。ここで、

$$A'' = \frac{4\pi m k^2}{h^3} \quad (3.6)$$

$$\delta = h(\nu - \nu_0) / kT \quad (3.7)$$

$$f(\delta) = \int_0^\infty dy \log [1 + \exp(\delta - y)]$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} e^{n\delta} = e^\delta - \frac{e^{2\delta}}{2^2} + \frac{e^{3\delta}}{3^2} - \dots, & (\delta \leq 0) \\ \frac{\pi^2}{6} + \frac{\delta^2}{2} - \left(e^{-\delta} - \frac{e^{-2\delta}}{2^2} + \frac{e^{-3\delta}}{3^2} - \dots \right), & (\delta \geq 0) \end{cases} \quad (3.8)$$

である。

従って、振動数 ν の光を金属に照射した場合に、表面の単位面積から単位時間に放出される光電子の電流密度 I は、 N に電子の電荷 e と光子吸収による電子の遷移確率 α を掛けて

$$I = \alpha e N = \alpha A T^2 f(\delta) \quad (3.9)$$

となる。 A は定数で、熱電子放出の Richardson-Dushman の式のものと同じものである。ただし、遷移確率 α は簡単のためにここでは定数であるとした。これまでに使用して記号の意味については、熱電子放出の項を参照のこと。

さて遷移確率 α は、量子力学により

$$\alpha = \frac{1}{h} \left(\frac{2\pi e}{mc} \right)^2 |A_0 \cdot \langle n|P|m \rangle|^2 \delta(\epsilon_n - \epsilon_m - h\nu) \quad (3.10)$$

で与えられる。ただし

$$\langle n|P|m \rangle = \int \varphi_n^* \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_m dx \quad (3.11)$$

である。式 (3.10) の δ 関数は、消滅した光子の持っていたエネルギーが、電子の励起エネルギーに等しいことを意味している。 A_0 は光のベクトルポテンシャルであるから、遷移確率は光子の密度、従って光の強度に比例することがわかる。

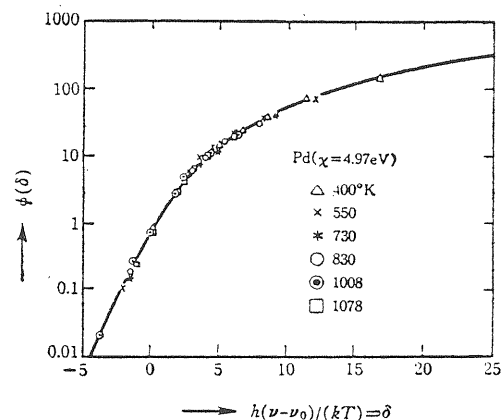


図 2.10 光電子電流の光子エネルギー依存性

図 2.10 に $f(\delta)$ のグラフを示そう。金属の光電効果の限界振動数 ν_0 の付近での様子はこの理論によく合う。 $\log(I/AT^2)$ と $h(\nu - \nu_0)/kT$ の関係の曲線を Fowler プロットという。実測値をこの曲線に合わせ、 ν_0 従って仕事関数 $h\nu_0$ を求める。

3 熱陰極と放出特性

さて式 (1.20), (1.29), (1.37) によれば、いずれにしても放出電流密度を大きくするには、仕事関数の小さい材料で、温度を高くすることが望ましい。即ち、融点の高い材料が必要となる。しかし純粋な金属では融点の高いものは、概ね仕事関数も大きい。以下代表的な熱陰極について説明する。

3.1 純金属陰極

実用上良く使われるものは、W, Ta, Mo 等である。これらはいずれも仕事関数は必ずしも低くはないが、融点が高くて高温で使用できるうえに、飽和蒸気圧もあまり高くないという特長を持っている。また材料の加工性も比較的良い。W の場合、仕事関数は 4.5 eV で、融点は 3665 K である。この使用温度は 2400~2600 K で、このときの電流密度は 100~400 mA/cm² (DC) である。大型送信管や電子顕微鏡などの高電圧で動作する装置で使用されているようである。

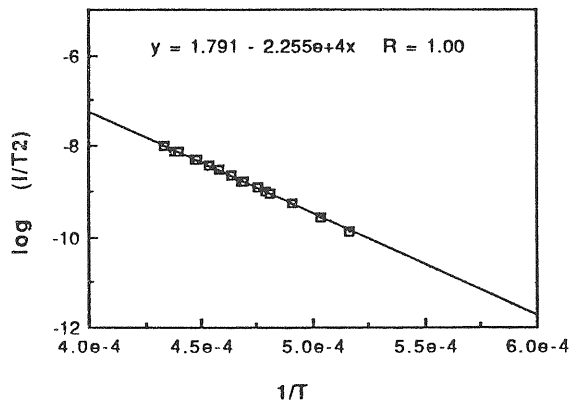


図3.1 タングステンのRichardson線。この実測値からは $A=61.80$ ($\text{Acm}^{-2}\text{deg}^{-2}$) と $\phi=4.47$ eV が得られる。

表1 熱電子放出定数

Element	χ volts	A amp./cm. ² deg. ²
(i) Clean metals		
Cs	1.81	162
Ba	2.11	60
Zr	4.12	330
Hf	3.53	14.5
Th	3.38	70
Ta	4.12	60
Mo	4.15	55
W	4.54	60-100
Re	5.1	200
Ni	5.03	1380
Pd	4.99	60
Pt*	5.40	170*
(ii) Monomolecular films		
Th on W	2.63	3.0
Th on Mo	2.58	1.5
Zr on W	3.14	5.0
La, Ce on W	2.71	8.0
Cs on W	1.36	3.2
O on W†	9.2†	5×10^{11} †
Cs on O on W	0.72	0.003
Ba on W	1.56	1.5
Ba on O on W	1.34	0.18

3.2 単原子層陰極

金属表面に陽電性原子が吸着した場合、表面に電気二重層が形成されるために実効的な仕事関数が減少する。この現象を利用した代表的なものはトリウムタングステン陰極である。ThO₂ を1~2%含んだW線を2800Kで数秒間フラッシュさせると、ThO₂ がWにより還元され、Th がWの表面に拡散して単原子層を形成する。その結果、仕事関数がタングステンとトリウムのいずれよりも低い2.6 eVとなり、電流放出密度もタングステンに比べて1けた以上大きくなる。

この陰極の仕事関数については次のように説明されている。タングステンの仕事関数がトリウムのイオン化エネルギーよりも大きいので、トリウム原子はタングステンに電子を与えて正イオンとなる。従って、タングステン側に負の影像電荷が生じ、電気二重層が形成されて、エネルギー障壁が低くなる。しかし、放出電子は依然としてトリウムの仕事関数で制限されているはずで、かつトリウムは表面を部分的に覆っているに過ぎないから、仕事関数の部分的に異なる表面からの電子放出として解釈されているが、まだ明確ではないようである。

単原子層陰極として実用化され重要なものに含浸型陰極がある。これについては改めて説明

する。

3.3 酸化物被覆陰極

熱陰極のうちで最も広範囲に使用されてきた陰極である。基体金属 (Ni, W) の上にアルカリ土類金属の酸化物の層を作ったもので、仕事関数は1.0~1.5 eV という低い値になる。炭酸塩は空気中でも化学的に安定なので、まず炭酸塩の固溶体の粉末に結合剤を加えて基体金属に塗布する。これを真空中で加熱すると、炭酸塩が分解して酸化物となる。



この分解の課程を conversion とよんでいる。筆者のところで使用している図 1.2 に示した陰極の場合は、この課程に 50 分ほどを要する。この間にかなりの量のガスが発生するので、粗排気系で外に排出している。

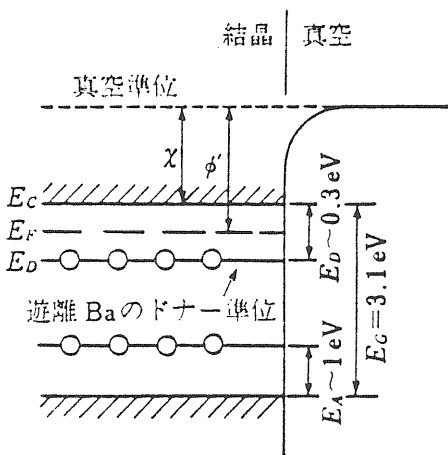
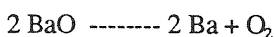


図 3.2 高温での BaO 結晶のエネルギー準位

この陰極は動作温度に加熱すると



の様に分解し、酸化物中に遊離バリウム原子が生じ、これが酸化物中にドナー準位を形成して放出電子の供給源となる。一方、バリウム空位はアクセプター準位を形成する。この様に酸化物は半導体であるので、電子のエネルギー分布

は金属の場合と明らかに異なり、熱電子放出電流密度は

$$I = A' T^{5/4} n_d \exp \frac{\phi'}{kT} \quad (1.39)$$

となるが、指数関数の変化が著しく大きいので、式 (1.20) との差は実際には問題にならず、半導体に対しても (1.20) を便宜上使ってもさしつかえない。ここに A' は定数、 n_d は遊離バリウムの密度 (ドナー密度)、 ϕ' は

$$\phi' = \chi + \frac{1}{2} E_D \quad (1.40)$$

である。 χ は酸化物の電子親和力、 E_D は電導帯の底とドナー準位とのエネルギー差である。 ϕ' はかなり低くなるので、低温で高密度の放出電流が得られる。

しかし、被覆層の抵抗が高いため、高密度 (~1 A) の直流電流を流すとジュール熱のために破壊されるほかに、CaO, SrO, BaO は化学的に活性で水蒸気や酸素に触れると反応して (水蒸気の場合、水酸化物に変わる)、陰極の熱電子放出能が著しく劣化するという欠点をもつ。加速器のビームはパルスであることが多いため、前者は普通あまり問題とならないが、後者は加速器全体がかなり大きなものであり、全てをベーキングすることが出来ないため、真空系が弱い場合など、時として問題となることがある。特に真空のリークがあると、スローリークであっても場所によっては放出電流が著しく低下する。

また、conversion 後の陰極を一気圧の空気にさらす必要が生じることがある。この場合の放出電流特性の変化は、陰極の種類によっても異なるかもしれないが、筆者のところで使用している陰極について言えば、数時間であるが数回一気圧の空気にさらした後でも、電流は完全にはもとの状態に戻らないものの、かなりの電流が取り出せたという経験がある。ただし、営業運転に使用する場合には、安全のため、一気圧の空気にさらした後では陰極を必ず交換するようにしている。

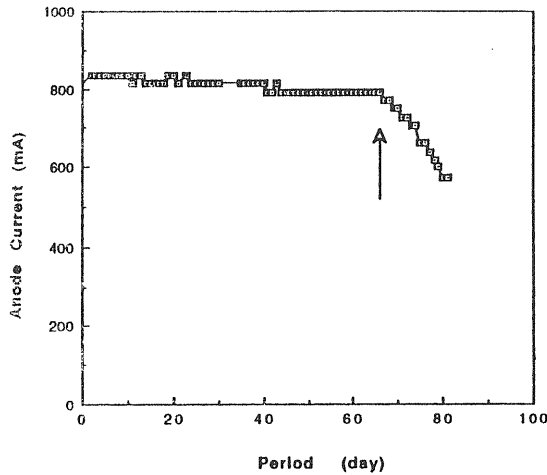


図3.3 酸化物陰極(図1.2)の放出電流変化。陰極に -100 kV を印加して、 2.5 GeV リニアックで電子銃として使用。矢印のところで真空のローリークが発生。電子銃の真空槽の圧力が $3\times 10^{-9}\text{ Torr}$ から 4.5×10^{-9} まで悪化した。

3.4 含浸型陰極

これは酸化物陰極の欠点を補って長寿命でかつ堅牢な陰極として開発されたもので、蒸発やイオン衝撃によって失われたBaを熱拡散によって補給して、金属表面に常にBaの単原子層を維持するタイプの陰極(Dispenser Cathode)である。

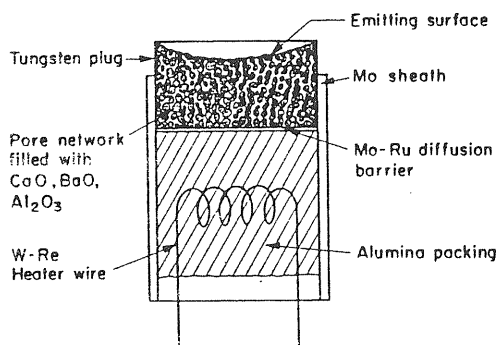


図3.4 含浸補給型陰極の構造

これには空洞貯蔵補給型(L-Cathode)と含浸補給型(Ba Impregnated Dispenser Cathode)がある。前者は容器の接合部からBaが漏れやすいため、今日では後者がよく用いられる。含浸

補給型陰極は、多孔質Wに直接BaOを含浸したり、W(or Ni)粒子にBaOを還元剤と共に混合して焼結したものである。Baはこの陰極の中に貯蔵され、熱拡散によって陰極の表面に補給される。

実際には放出電流密度を高めるためにいろいろな工夫がなされており、BaO, CaO, Al_2O_3 の混合物を含浸している。その混合比にも種類があり、S型(4:1:1)やB型(5:3:2)とよばれているようである。さらにOs/Ruをコーティングして仕事関数とBa+BaOの蒸発率を下げたり、B型陰極に Sc_2O_3 を混合して含浸するなどの改善がなされている。

動作が安定で寿命が長いこと、加速器の電子銃はこのタイプに変わりつつある。この陰極も周囲の真空の状態によって影響されるが、寿命は酸化物陰極よりも明らかに長い。

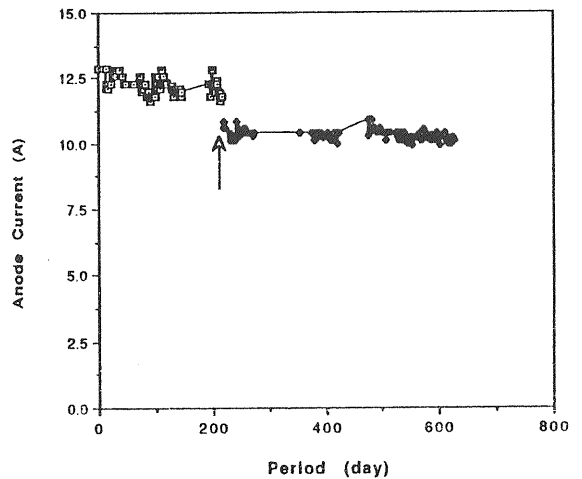


図3.5 陽電子発生装置で使用中の含浸補給型陰極の電流変化。パルス幅は 4 ns 。矢印のところで電流が変化しているのは、バイアス電圧をかえたためである。

3.5 LaB_6 陰極

この陰極は仕事関数と電気抵抗が低いために早くから注目されていたが、近年 LaB_6 の単結晶成長技術が確立し、 LaB_6 を加熱したときに、ボロンが金属端子を侵食する問題もグラファイトを端子として使用することで電子銃に

利用されるようになった。

4. 高パービアンズ型電子銃

次に印加電圧に対して、取り出す陽極電流の大きな、いわゆる、高パービアンズ型電子銃について考察する。この場合には、空間電荷の効果が大きい。

4.1 空間電荷伝導

陰極から放出される電流密度が大きい場合には、電子の持つ電荷によって空間の電界分布が変わってくる。電子が定常的に流れている時は、空間のそれぞれの場所にいつも一定密度の電子があるので、そこには静止した電荷があるのと同じことになる。このような電荷を空間電荷という。

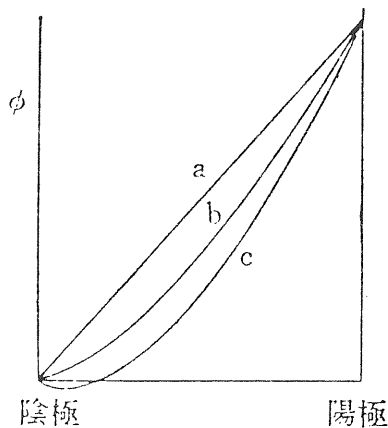


図4.1 二極管内の電位分布

陰極から放出される電流密度は、当然この空間電荷の影響を受けることになる。まずこの問題について考えてみよう。簡単のために、陰極と陽極を平行平板とすると、空間電荷がなければ電界は一様で、電位は図4.1のaに示すように直線的に変化している。しかし空間電荷があるとその陽極側では電界が強くなり、陰極側では弱くなる。そのために電位を示す曲線は図4.1のbのように下がってくる。更に空間電荷が大きくなると、電位曲線はcのようになる。このようになると、陰極の近くにある電子は陰極

に引き戻されるような力を受ける。

陰極から放出される電流密度が小さいときには、電極間の電位分布は図4.1のaに近い分布になり、陰極を出た電子は全て陽極に流れ込む。このような場合は陽極電流が陰極の温度によって変化するので、温度制限の状態といい、このときの電流を温度制限電流という。ところが、陰極から放出される電流密度が高くなると、空間電荷の効果が大きくなり、電位分布は図4.1のbからcのような状態になる。このようになると、陰極の温度を上げて熱電子放出を増やそうとしても空間電荷のために電子が反発されて、ある値以上は陰極から流れ出さなくなる。この状態を空間電荷制限といい、この時の電流を空間電荷制限電流という。空間電荷制限電流は陰極の温度には無関係で、電極間の距離と電圧によって決まる。上に述べた陽極電流と陰極の温度の関係を図に示すと、図4.2のようになる。

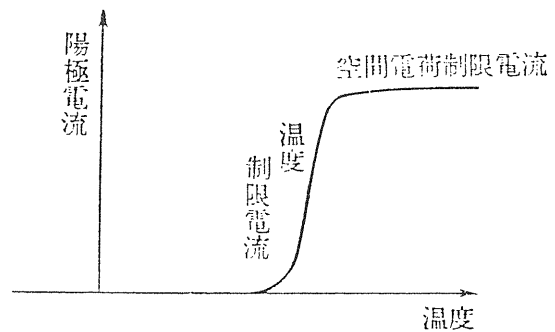


図4.2 温度による陽極電流の変化

通常、加速器では電子銃を空間電荷制限の状態で使用しており、グリッドの電圧を調整することにより陽極電流を制御している。これは陰極の温度を制御するよりも、グリッドの電圧を制御するほうが技術的にはるかに容易で、精度も高いためである。

(1) 平行板電極

次に空間電荷制限電流と印加電圧の関係を調べてみよう。簡単のために各電極が平行板で、陰極を出るときの電子の初速度が0の場合をまず考える。陰極から放出される電流が次第に増加すると、陰極面に近い所のポテンシャルが下がり、陰極面の電界は減少する。放出電流が更

に増えると陰極面の電界はさらに減少してついには0となり、完全な空間電荷制限の状態となる。

いま陰極から陽極の方向にx軸を取れば、空間電荷密度 ρ 、電子の速度 v 、電位 ϕ は皆xの関数であるが、

$$i = \rho(x) v(x) \quad (4.1)$$

で与えられる電流密度 i はxによらないはずである。また電位 ϕ と電荷密度 ρ との関係は次のPoissonの方程式で与えられる。

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\rho(x) \quad (4.2)$$

$x=0$ で $v=0$ である場合には、電位 ϕ のところにある電子のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2} mv^2 = e\phi \quad (4.3)$$

が成り立つ。(4.1), (4.2), (4.3) から v と ρ を消去すると

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\sqrt{\frac{m}{2e\phi}} i \quad (4.4)$$

となる。両辺に $d\phi/dx$ を掛けて積分すると

$$\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = -\sqrt{\frac{2m\phi}{e}} i + \text{const.} \quad (4.5)$$

が得られる。完全な空間電荷制限の状態では前に述べたように、 $x=0$ で $d\phi/dx=0$ となる。 $x=0$ で電位が $\phi=0$ となるようにすると、(4.5)式の定数は0となる。よって(4.5)より

$$\phi^{-\frac{1}{4}} \frac{d\phi}{dx} = \left(-\frac{2i}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m}{e} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.6)$$

を得る。上式の両辺を更にxで積分し、 $x=0$ で $\phi=0$ となる条件を用いると

$$\frac{4}{3} \phi^{\frac{3}{4}} = \left(-\frac{2i}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m}{e} \right)^{\frac{1}{4}} x \quad (4.7)$$

となる。従って

$$\phi(x) = \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{4}{3}} \left(-\frac{2i}{\epsilon_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2m}{e} \right)^{\frac{1}{3}} x^{4/3} \quad (4.8)$$

がもたまる。電子は陰極から陽極へ向かって流れるから、 $i < 0$ である。一方電流密度 i は(4.7)より

$$-i = \left(\frac{8}{9} \right) \epsilon_0 (\phi)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{e}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} \quad (4.9)$$

となる。従って、陽極の位置を $x=d$ とし、その電位を $\phi = V_a$ とすると空間電荷制限電流の密度は次のようになる。

$$-i = \left(\frac{8}{9} \right) \epsilon_0 \left(\frac{e}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{V_a^{3/2}}{d^2} \quad (4.10)$$

上式がChild-Langmuirの式または $3/2$ 乗の式とよばれているものである。電流が陰極から陽極の向かう方向を正の方向にしたために電流値 i が負になっていることに注意。

(4.10)式は、陽極電位をボルト、 d をメートルで表せば

$$-i = 2.33 \times 10^{-6} \frac{V_a^{3/2}}{d^2}, \quad (\text{A/m}^2)$$

となる。

さて電位分布は(4.8)に(4.10)を代入して i を消去すると

$$\phi(x) = V_a \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3} \quad (4.11)$$

となる。よって電界分布は

$$E(x) = -\frac{d\phi}{dx} = -\frac{4}{3} \frac{V_a}{d^{4/3}} x^{1/3} \quad (4.12)$$

が成り立つ。(4.1), (4.2), (4.3) から v と ρ を消去すると

$$\epsilon_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\sqrt{\frac{m}{2e\phi}} i \quad (4.4)$$

となる。両辺に $d\phi/dx$ を掛けて積分すると

$$\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = -\sqrt{\frac{2m\phi}{e}} i + \text{const.} \quad (4.5)$$

が得られる。完全な空間電荷制限の状態では前に述べたように、 $x=0$ で $d\phi/dx=0$ となる。 $x=0$ で電位が $\phi=0$ となるようにすると、(4.5) 式の定数は 0 となる。よって (4.5) より

$$\phi^{-1/4} \frac{d\phi}{dx} = \left(-\frac{2i}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{2m}{e} \right)^{1/4} \quad (4.6)$$

を得る。上式の両辺を更に x で積分し、 $x=0$ で $\phi=0$ となる条件を用いると

$$\frac{4}{3} \phi^{3/4} = \left(-\frac{2i}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{2m}{e} \right)^{1/4} x \quad (4.7)$$

となる。従って

$$\phi(x) = \left(\frac{3}{4} \right)^{4/3} \left(-\frac{2i}{\epsilon_0} \right)^{2/3} \left(\frac{2m}{e} \right)^{1/3} x^{4/3} \quad (4.8)$$

がもとまる。電子は陰極から陽極へ向かって流れるから、 $i < 0$ である。一方電流密度 i は (4.7) より

$$-i = \left(\frac{8}{9} \right) \epsilon_0 (\phi)^{3/2} \left(\frac{e}{2m} \right)^{1/2} \frac{1}{x^2} \quad (4.9)$$

となる。従って、陽極の位置を $x=d$ とし、その電位を $\phi = V_a$ とすると空間電荷制限電流の密度は次のようになる。

$$-i = \left(\frac{8}{9} \right) \epsilon_0 \left(\frac{e}{2m} \right)^{1/2} \frac{V_a^{3/2}}{d^2} \quad (4.10)$$

上式が Child-Langmuir の式または $3/2$ 乗の式とよばれているものである。電流が陰極から陽極の向かう方向を正の方向にしたために電流値 i が負になっていることに注意。

(4.10) 式は、陽極電位をボルト、 d をメートルで表せば

$$-i = 2.33 \times 10^{-6} \frac{V_a^{3/2}}{d^2}, \quad (\text{A/m}^2)$$

となる。

さて電位分布は (4.8) に (4.10) を代入して i を消去すると

$$\phi(x) = V_a \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3} \quad (4.11)$$

となる。よって電界分布は

$$E(x) = -\frac{d\phi}{dx} = -\frac{4}{3} \frac{V_a}{d^{4/3}} x^{1/3} \quad (4.12)$$

で与えられる。また空間電荷密度の分布は Poisson 方程式 (4.2) から

$$\rho(x) = -\epsilon_0 \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\frac{4\epsilon_0}{9} \frac{V_a}{d^{4/3}} x^{-2/3} \quad (4.13)$$

となる。

ϕ , E , v 及び ρ の空間分布を図 4.3 に示す。

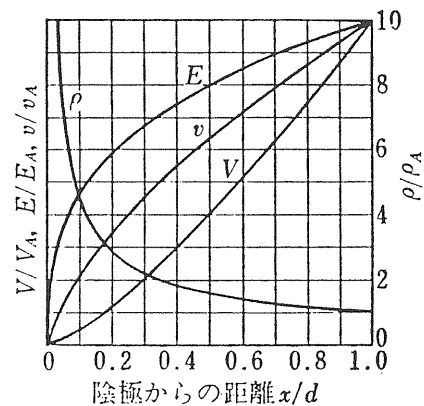


図 4.3 空間電荷制限平面二極管の諸量の空間分布

(2) パービアン

ところで、空間電荷制限電流が $V_a^{3/2}$ に比例することは、電極の形と無関係に成り立つ一般式である(4.1)、(4.2)、(4.3)の3式だけを使って証明することもできる。 i は電流の保存則より x に因らないから、(4.1) から i を求めるには陽極表面における ρ と v がわかればよい。一方、(4.2) により ρ は V_a 比例し、(4.3) より v は $\sqrt{V_a}$ に比例することがわかる。したがって $i = \rho v$ は $V_a^{3/2}$ に比例する。

このことから任意の形の陰極と陽極の場合でも、一般に空間電荷制限電流は

$$I_a = G V_a^{3/2} \quad (4.14)$$

の形に表されることがわかる。普通 I_a は全陽極電流で、 G をパービアン (perveance) という。 G は陰極と陽極の幾何学的な大きさや配置で決まる係数である。

例えば平行平板の場合、電極の面積を S (m^2)、電極間距離 d (m) とすれば、パービアンは

$$G = 2.33 \times 10^{-6} \frac{S}{d^2}, \quad (A/V^{3/2}) \quad (4.15)$$

で与えられる。

4.2 空間電荷によるビームの発散

電子銃を出たビームは空間電荷のために、そのままでは発散してビーム径が大きくなってしまふ。そこでソレノイドコイル等の磁場で発散しないようにするのが一般的なやり方であるが、磁場の存在する空間に達するまでにどうしてもビームは、ある有限な距離の自由空間を走ることになる。ビーム電流が大きいときには、空間電荷による発散が著しくなり、短距離といえども無視できない場合がある。

以下では、軸対称で一様分布の空間電荷によるビームの発散の問題を考察する。実際のビームは必ずしもこのようなものではないが、解析的な解の得られる場合についてまず考察するほ

うが、現象の本質を理解しやすいであろう。尚、これから導出する式は、電子の運動エネルギーによらない一般的な式である。

速度 v_0 で運動している軸対称なビームについて考えてみよう。ビームの中心軸から r だけ離れたところにある電子は、半径 r 内にある電子によって作られる電場と磁場の両方と相互作用して力を受ける。電子が一樣な密度 ρ で分布しているとすると、ガウスの定理とアンペールの定理から電場 $E(r)$ と磁場 $B(r)$ は、それぞれ次のよう与えられる。

$$\begin{aligned} 2\pi r \Delta l E(r) &= \frac{\pi r^2 \Delta l}{\epsilon_0} \rho \\ \therefore E(r) &= \frac{r}{2\epsilon_0} \rho \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} 2\pi r \frac{B(r)}{\mu_0} &= \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I_0 \\ \therefore B(r) &= \frac{I_0 \mu_0}{2\pi a^2} r \end{aligned} \quad (4.17)$$

一方、電荷密度 ρ とビーム半径 a 及びビーム電流 I_0 の関係は

$$\begin{aligned} v_0 \pi a^2 \rho(a) &= I_0 \\ \therefore \rho(a) &= \frac{I_0}{v_0 \pi a^2} \end{aligned} \quad (4.18)$$

で与えられる。上式を(4.16)に代入すると

$$E(r) = \frac{I_0}{2v_0 \pi a^2 \epsilon_0} r \quad (4.19)$$

となる。従って自由空間における電子ビームの運動方程式は、円筒座標で成分に分けて書くと

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{dp_r}{dt} = \frac{e}{2\pi a^2 \epsilon_0 v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) r \quad (4.21)$$

$$\frac{dp_\phi}{dt} = 0 \quad (4.22)$$

$$Z = \left[\frac{e/m}{\pi \epsilon_0 v_0^3} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} \frac{z}{a_0} \quad (4.30)$$

となる。(4.21) 式より、電場と磁場による r 方向の力は打ち消しあって $1/\gamma^2$ になっていることがわかる。ここで

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-1/2}$$

である。

$t = 0$ の初期条件を

$$p_z(0) = p_0,$$

$$p_r(0) = 0, \quad (4.23)$$

$$p_\phi(0) = 0$$

として、(4.20) と (4.22) 式を解くと

$$p_z(t) = p_0 \quad (4.24)$$

$$p_\phi(t) = 0 \quad (4.25)$$

となる。(4.21) 式は、 $v_r \ll c$ のもとに近似すると

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \frac{e/m}{2\pi a^2 \epsilon_0 v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) r \quad (4.26)$$

となる。 $r = a$ の場合には、上式は次のようになる。

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} = \frac{e/m}{2\pi \epsilon_0 v_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) \frac{1}{a} \quad (4.27)$$

ここで $\Delta z = v_0 \Delta t$ を使うと上式は

$$\frac{d^2 a(t)}{dz^2} = \frac{e/m}{2\pi \epsilon_0 v_0^3} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) \frac{1}{a} \quad (4.28)$$

となる。ここで変数を

$$R(t) = \frac{a}{a_0} \quad (4.29)$$

に変えると、(4.28) は次のように簡単な形で表される。

$$\frac{d^2 R}{dZ^2} = \frac{1}{2R} \quad (4.31)$$

上式の両辺に dR/dZ を掛けて z で積分すると

$$\left(\frac{dR}{dZ} \right)^2 = \log R + \left(\frac{dR}{dZ} \right)_{Z=Z_0} \quad (4.32)$$

となる。これを変数分離して積分すると

$$\int_{Z_0}^Z dZ = \pm \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{\log R + (R')_0}} \quad (4.33)$$

が得られる。よって式 (4.31) の解は

$$Z - Z_0 = \pm \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{\log R + (R')_0}} \quad (4.34)$$

となる。積分の前の符号は、 dR/dZ が正の時 (つまりビームが発散している時) に正で、 dR/dZ が負の時 (つまりビームが集束している時) に負である。

さて R'_0 は dR/dZ の初期値であるが、 $z_0 = 0$ の時に $R'_0 = 0$ としても (4.34) は一般性を失わない。(なぜなら、座標の原点を移動すれば任意の場合を表すことが出来るからである。) この時 (4.34) は

$$Z = \int_1^R \frac{dR}{\sqrt{\log R}} \quad (4.35)$$

となる。 $z_0 = 0$ で $R'_0 = 0$ 、つまりビーム径が最小になった後はビームが発散するだけであるから、積分の前の符号は正である。又、運動方

単位時間に放出される電子数 N は、次のように与えられる。

$$N = \frac{4\pi mkT}{h^3} \int_w^\infty d\epsilon_z \exp\left\{-\frac{\epsilon_z - \mu}{kT}\right\} P(\epsilon_z) \quad (1.23)$$

この式は、式 (1.22) を (1.18) の被積分関数に掛けることにより得られる。

上式の積分は、 $(\epsilon_z - w)/kT$ の値が小さい所からの寄与がほとんどである。従って $(\epsilon_z - w)/kT$ の値が小さい所で $P(\epsilon_z)$ を近似をする。式(1.22)は、 $\epsilon_z > w$ で

$$P(\epsilon_z) = 4 [(\epsilon_z - w)/w]^{1/2} \quad (1.24)$$

となる。上式を (1.23) に代入して、関係式 $w - \mu = \phi$ を使うと

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi mkT}{h^3} \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \frac{4}{\sqrt{w}} \int_w^\infty d\epsilon_z \exp\left(-\frac{\epsilon_z - w}{kT}\right) (\epsilon_z - w)^{1/2} \\ &= \frac{4\pi mkT}{h^3} \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \frac{4(kT)^{3/2}}{\sqrt{w}} \int_0^\infty dx e^{-x} x^{1/2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

となる。ここで次の積分公式

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (1.26)$$

を使うと (1.25) は

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi mk^2}{h^3} T^2 e^{-\phi/kT} 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{kT}{w}} \\ &= \eta \frac{A}{e} T^2 e^{-\phi/kT} \end{aligned} \quad (1.27)$$

となる。ここに η は

$$\eta = 2\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{kT}{w}} \quad (1.28)$$

で与えられるもので、ポテンシャル障壁での電子の平均的な透過率を表している。 η には、金属内の伝導電子のポテンシャルの深さを表すパラメータ w が含まれている。この w は金属に固有な値である。 w をパラメータとしたときの η の変化を参考のために図2.3 に示す。

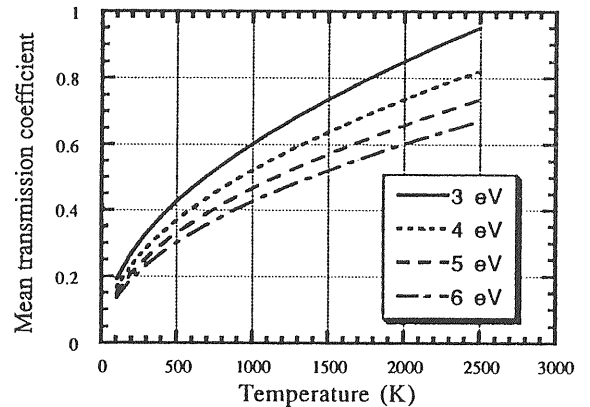


図 2.3 w をパラメータとしたときの、電子の平均的な透過率 η の変化

このとき単位面積当たりの熱電子放出の電流密度は、式 (1.27) に素電荷を掛けて

$$I = \eta A T^2 e^{-\phi/kT} \quad (1.29)$$

となる。

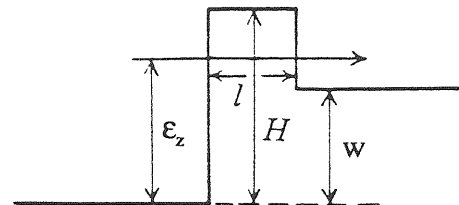


図 2.4 表面に膜がある場合の単純化されたポテンシャル

これまでの議論では、金属表面は完全に理想的な状態であると暗黙のうちに仮定していた。しかし実際の金属表面は必ずしもこのような状

程式は時間反転に対して対称であるから、ビーム径の変化は $z_0 = 0$ の面に対してで対称である。

ここで積分変数を $\log R = x$ に変えると、式 (4.35) は

$$\begin{aligned}
 Z &= \int_1^R \frac{dR}{\sqrt{\log R}} \\
 &= \int_0^{\log R} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \left[\frac{e^y}{\sqrt{y}} \left(2y - \frac{(2y)^2}{1 \cdot 3} + \frac{(2y)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \dots \right) \right]_{y=1}^{y=\log R}
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

となる。これで Z と R の関係、つまり z 座標とビームの半径 a の関係がもたまった。 Z と R の関係は、ビーム電流と速度でスケールしておけば、図 4.4 のように常に一本の曲線で表される。この曲線は電子ビームの広がり曲線 (universal beam-spread curve) と呼ばれている。

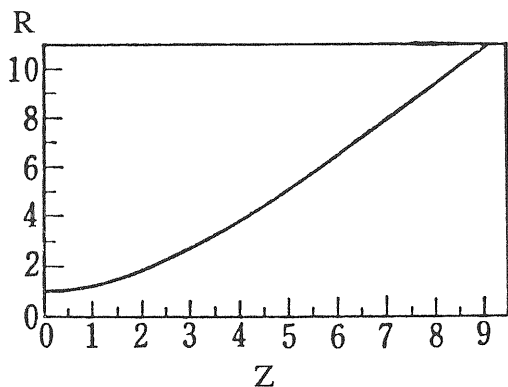


図 4.4 空間電荷効果による軸対称円柱電子ビームの広がり曲線 (ユニバーサルカーブ)

図 4.4 は、初期値が $R'_0 = 0$ の場合である。 R'_0 がこれと異なる場合には、ビーム径は図 4.5 のように変化する。これよりビームをあまり強く集束させると、たちまち発散してしまうことが分かる。

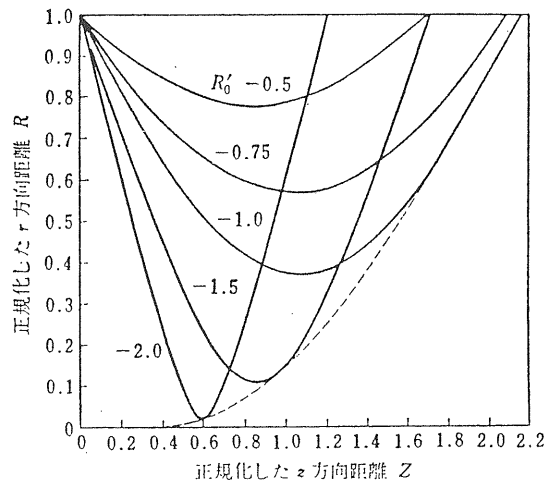


図 4.5 空間電荷効果による軸対称円柱電子ビームの発散軌道

ところで (4.36) の関係式は、 z 方向に静止した円筒ビームを考え、その r 方向への発散の様子を z 方向にローレンツ変換することによっても得られる。この方法の方が、電子密度と電子の速度 (エネルギー) が変わったときにビームの発散がどのように変化するかを直感的に捉え易いと思われるので、説明が重複することになるが、この方法についても述べておこう。

上で考察したビームを、 z 軸に垂直な方向に輪切りにして、電子と共に等束直線運動している座標系から見ると、ビームは z 方向に静止している多数の円柱から成っていると見ることが出来る。従って、ビームの運動を考察するには、 r 方向にのみ運動する 1 個の円柱ビームの運動を考えれば十分である。

そこで z 方向に静止している軸対称な円柱ビームを考えよう。このビームの r 方向の運動からは磁場が生じないから、電子に働く力はクーロン力のみである。この時電子の運動方程式は、ガウスの定理を使うと

$$\frac{dp_r}{dt} = eE_r = \frac{ep}{2\epsilon_0} r
 \tag{4.37}$$

となる。 z 方向の値からは無視してもよいであろう。

電荷密度 ρ と円柱ビームの総電荷量 Q の関係

は、円柱の長さを L とすれば

$$\pi a^2 L \rho = Q \quad (4.38)$$

で与えられる。これを (4.37) に代入すると、質量の時間変化が小さい場合には運動方程式は

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{e}{2\epsilon_0 m_0} \frac{Q}{\pi a^2 L} r \quad (4.39)$$

となる。 $r = a$ の場合には

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} = \frac{e}{2\epsilon_0 m_0} \frac{Q}{\pi L} \frac{1}{a} \quad (4.40)$$

である。ここで変数を

$$R(t) = \frac{a}{a_0} \quad (4.41)$$

$$\tau = \left[\frac{e}{\epsilon_0 m_0} \frac{Q}{\pi L} \right]^{1/2} \frac{t}{a_0} \quad (4.42)$$

とすると、(4.40) は前と同様に

$$\frac{d^2 R}{dZ^2} = \frac{1}{2R} \quad (4.43)$$

となる。これは (4.30) と全く同じ式であるからすぐに計算できて、結果は次のようになる。

$$\tau - \tau_0 = \pm \int_1^R \frac{dR}{\sqrt{\log R + (R')_0}} \quad (4.44)$$

この式は、ビームと共に z 方向に運動している慣性座標系から見たときのビーム径の時間変化を与える式である。この式と (4.34) を比較すると、 Z が τ になっている以外は全く同じである。 Z と τ は、これから示すようにローレンツ変換によって結ばれているもので、本質的には全く同じものである。

ビームと共に z 方向に運動している慣性座標系を K とする。 K 系にいる観測者から見ると、ビームは z 方向には運動せず静止している。次に K 系に対して $-v_0$ の速度で z 方向に運動し

ている慣性系を K' 系とする。 K および K' 系での電子の座標をそれぞれ (x, y, z, t) , (x', y', z', t') とすれば、Lorentz 変換により

$$z' = \gamma(z + v_0 t) \quad (4.45)$$

$$z = \gamma(z' - v_0 t') \quad (4.46)$$

の関係がある。 x, y は変化しない。尚、時間の変換式は使用しないので省略する。

K 系におけるビームの中心を $z = 0$ とすると、 K' 系ではこの点は z 方向に速度 v_0 で運動している。 K 系における時間 t と K' 系の座標 z' の関係は、(4.45) から $z = 0$ として

$$z' = \gamma v_0 t$$

$$\therefore t = \frac{z'}{\gamma v_0} \quad (4.47)$$

と与えられる。一方、 K' 系のある点 z' が円筒ビームを通過するのに要する時間を $\Delta t'$ とすると (4.46) より

$$L = z_1 - z_2$$

$$= \gamma(z' - v_0 t'_1) - \gamma(z' - v_0 t'_2)$$

$$= \gamma v_0 \Delta t'$$

$$\therefore \Delta t' = \frac{L}{\gamma v_0} \quad (4.48)$$

K' 系での電流値を I とすると、円筒ビームの全電荷は、電荷の保存則より

$$Q = I \Delta t' = I \frac{L}{\gamma v_0}$$

$$\therefore \frac{Q}{L} = \frac{I}{\gamma v_0} \quad (4.49)$$

(4.47) と (4.49) を τ の定義式 (4.42) に代入して、 $m = m_0 \gamma$ を使うと

$$\begin{aligned}
\tau &= \left[\frac{e}{\epsilon_0 m_0} \frac{Q}{\pi L} \right]^{1/2} \frac{t}{a_0} \\
&= \left[\frac{e}{\epsilon_0 m_0} \frac{I}{\pi \gamma v_0} \right]^{1/2} \frac{1}{a_0} \frac{z'}{\gamma v_0} \\
&= \left[\frac{e}{\epsilon_0 m} \frac{I}{\pi \gamma^2 v_0^3} \right]^{1/2} \frac{z'}{a_0} \quad (4.50)
\end{aligned}$$

z' は K' 系での z 座標であるが、 K' 系は通常の実験室系であるから、 z' は (4.30) の z そのものである。従って、(4.30) の Z と (4.42) の τ とは、前に述べたように、全く同じものである。

さて、(4.42) の τ は、 z 方向に静止したビームの発散を表す曲線の横軸の値である。これは明らかに電荷密度の平方根と時間に比例する。この系では時間は一様であるから、電荷密度とビーム径によって発散は完全に決まってしまう。ところが、静止しているビームを加速すると、ビームのエネルギーによって発散の様子は異なる。このことを端的に表しているのが式 (4.46) である。 K 系から見ると K' 系の距離 z' が $1/\gamma$ に収縮したように見えるので、 K' 系でのビームのエネルギーが高くなると、 K' 系の同

じ距離 z' の移動に対して、 K 系では時間の進み t が少なくなる。つまり K 系で見ている観測者にとっては、 K' 系のビームエネルギーが高くなると、この間の時間があまり進んでいないことになる。従ってビームはあまり発散しないということになる。

このように運動しているビームの発散も、重心の静止した系に戻って考えると理解しやすことがある。尚、上で議論した式は任意のエネルギーに適用できる一般的な式であるので、高エネルギーまで加速されたビームについても成り立つ式である。この項の結果は、高エネルギーのビームほど発散しにくいことを意味している。従って発散を防ぐには、電子銃の加速電圧を高くすれば良いことが分かる。この極限が、ビームを一気に数 MeV まで空洞を使って加速する RF ガンである。

4.3 Pierce 型電子銃の実際例

次に実際に使用している電子銃の例をおめにかけてみよう。これは陽電子発生装置もしくは P F 2.5 GeV リニアックの電子銃である。まず電子銃の構造、ヒーター特性及び軌道計算例を示す。最後は電子銃とその周辺の装置の配置図である。

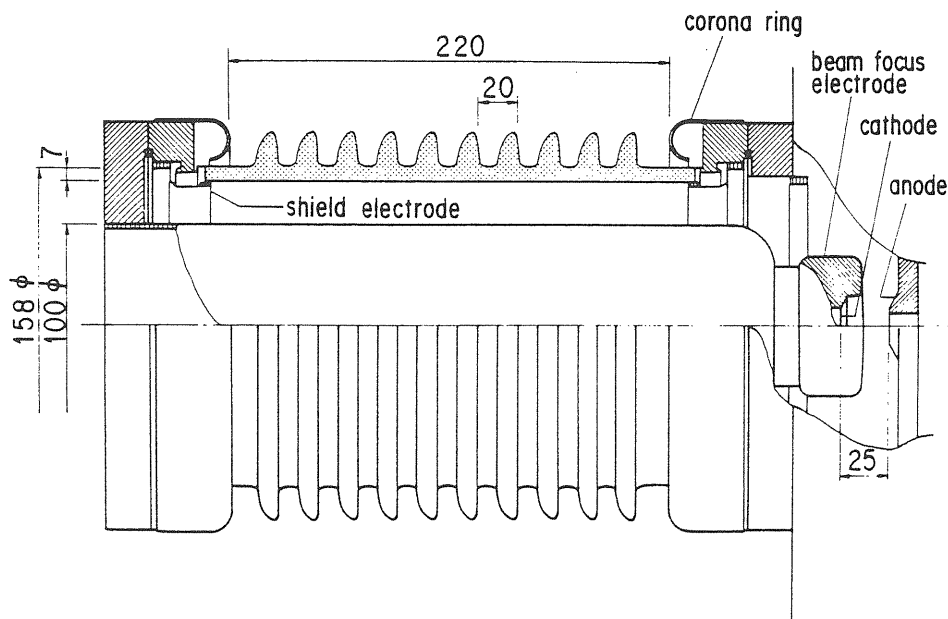


図 4.6 陽電子発生装置の電子銃の構造

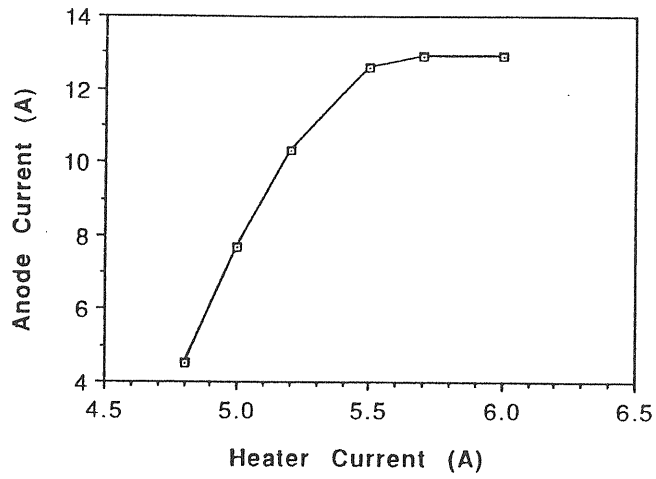


図 4.7 電子銃のヒータ特性

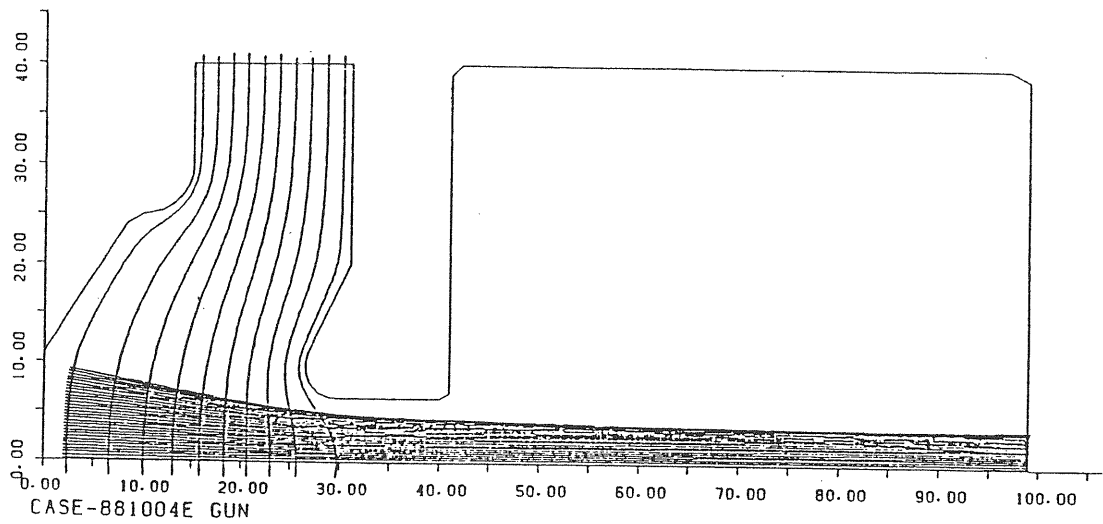


図 4.8 a 電子銃の軌道計算 (陰極印加電圧 -160kV、アノード電流 9A)

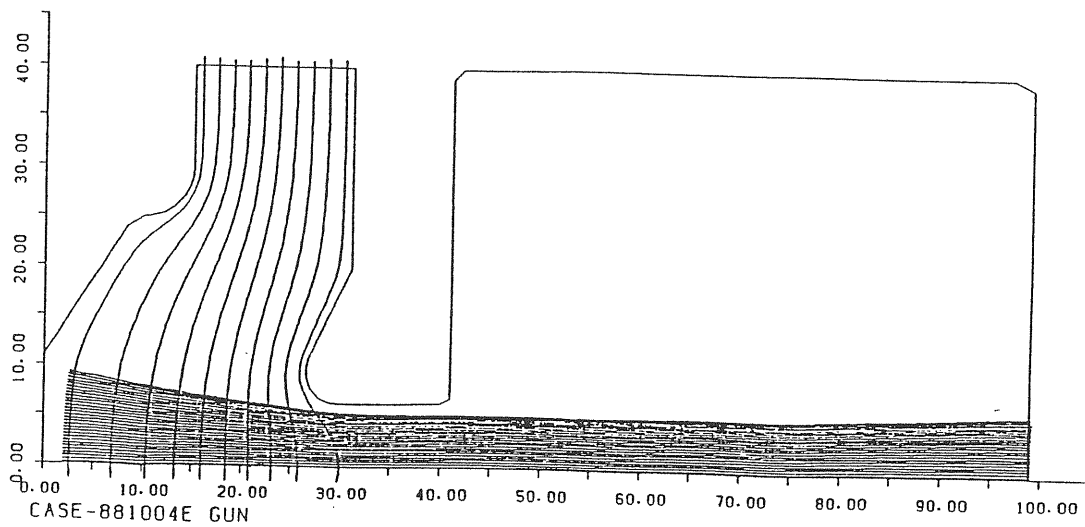


図 4.8 b 電子銃の軌道計算 (陰極印加電圧 -160kV、アノード電流 18A)

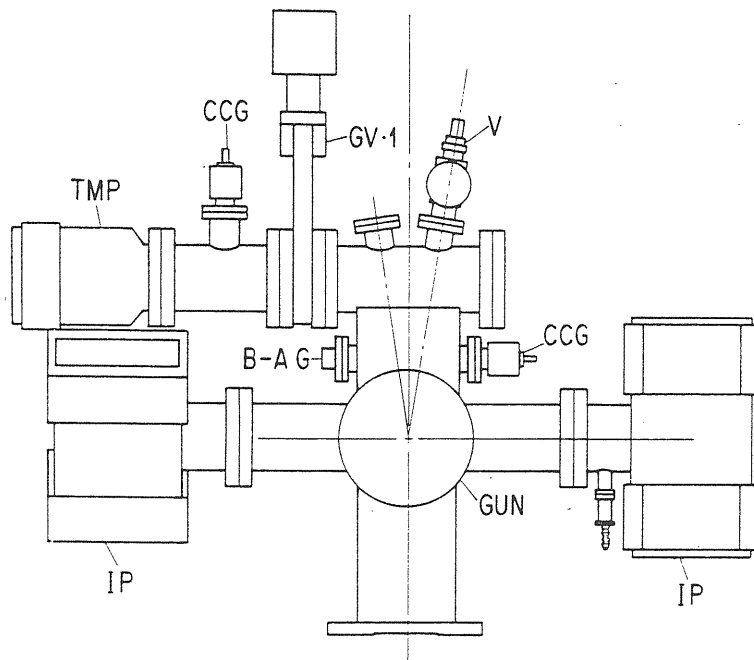


図 4.9 電子銃及び真空系の配置

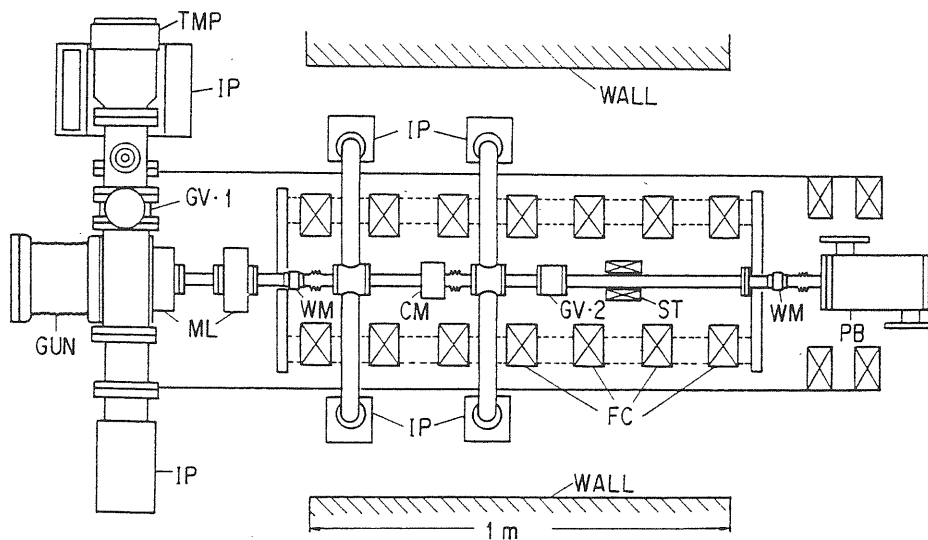


図 4.10 電子銃と真空系及び集束系等

5. エミッタンス

次に陰極表面における電子ビームのエミッタンスについて考察する。エミッタンスは、荷電粒子ビームの質の良さを評価するために定義された指数であり、ビーム粒子の横方向の運動の乱雑さを表す尺度と考えることができる。

ビームを構成している各粒子の力学的な状態は (x, y, z, p_x, p_y, p_z) 空間の1点によって表されるが、縦方向と横方向の運動が結合していない場合は、これらの自由度を独立に扱うことができる。通常単にエミッタンス \mathcal{E}_x と言うと、各粒子が (x, x') 平面内に占める面積のことである。つまり

$$\mathcal{E}_x = \int dx \int dx' \quad (5.1)$$

で表される。密度分布が均一である場合には、この占有面積は一意的に決まる。しかし一般には密度分布が一様でないため、占有面積は粒子の占有率によって変化する。つまり占有率を指定してエミッタンスを定義することになる。また (x, p_x) 平面の面積で定義されたエミッタンス $\mathcal{E}_{x,n}$ は z 方向のビームのエネルギーに依存しない運動の恒量であり、(5.1) と次の関係にある。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{x,n} &= \int dx \int dp_x \\ &= \beta\gamma \mathcal{E}_x \quad (m_0 c \cdot \text{cm}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

これは規格化エミッタンスと呼ばれるもので、 $p_x = \beta\gamma m_0 c x'$, $x' = dx/dz$ の関係から導かれる。

位相空間におけるビームの密度分布は、一般には任意の形をしており、形が著しく変形した場合には、マクロに見るとエミッタンスが大きくなったように見えることがある。このような状態の変化を表すのに便利なのが、次のように定義された二乗平均エミッタンスである。

$$\overline{\mathcal{E}_x} = 4 \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle^2} \quad (5.3)$$

これは運動の恒量ではなく変化する。例えば、ビームが集束系と不整合であるときには、一般には増加する。

5.1 熱電子ビームのエミッタンス

陰極表面から放出された熱電子は乱雑な熱運動をしている。これがビームのエミッタンスの最小値を与えることになる。二乗平均エミッタンス一般には増大するが、これが変化する前の、つまり、電子が加速される前の、表面近傍に於けるエミッタンスの初期値についてまず考察する。

エミッタンスを計算するには、陰極表面に平行な方向の運動量の情報が必要である。熱電子の運動量スペクトルは指数関数的な連続関数であるから、rms (二乗平均の平方根) で運動量を代表させよう。それには平均エネルギーを求めてば良い。

陰極の単位表面から単位時間に放出される熱電子の数は、量子力学の効果 (ポテンシャル障壁による反射) を無視すると、(1.16) 式から

$$N = \frac{4\pi m}{h^3} \int_w^\infty d\epsilon_z \int_0^\infty d\epsilon' \frac{\exp\{-(\epsilon_z + \epsilon' - \mu)/kT\}}{1 + \exp\{-(\epsilon_z + \epsilon' - \mu)/kT\}} \quad (5.3)$$

となる。陰極面に平行な方向のエネルギー ϵ' の平均値 $\overline{\epsilon'}$ は、上式の被積分関数に ϵ' を掛けて積分し電子数 N で割ればよい。つまり

$$\overline{\epsilon'} = \frac{4\pi m}{Nh^3} \int_w^\infty d\epsilon_z \int_0^\infty d\epsilon' \frac{\epsilon' \exp\{-(\epsilon_z + \epsilon' - \mu)/kT\}}{1 + \exp\{-(\epsilon_z + \epsilon' - \mu)/kT\}} \quad (5.4)$$

である。 $\epsilon_z + \epsilon' - \mu \geq w - \mu \gg kT$ であるから

$$\overline{\epsilon'} \approx \frac{4\pi m}{Nh^3} \int_w^\infty d\epsilon_z \int_0^\infty d\epsilon' \epsilon' \exp\left(-\frac{(\epsilon_z + \epsilon' - \mu)}{kT}\right)$$

となる。ここで次の積分公式

$$\int dx x e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} \left(x - \frac{1}{a} \right)$$

を使った上に、 $x = (\epsilon_z - \mu) / kT$ とすると

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}' &= \frac{4\pi m k T}{N h^3} \int_w^\infty d\epsilon_z [kT e^{-x} (x+1) - (\epsilon_z - \mu) e^{-x}] \\ &= \frac{4\pi m (kT)^3}{N h^3} e^{-\frac{\phi}{kT}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる。ここで上式にNの式(1.19)を代入すると、陰極面に平行な方向のエネルギー ϵ' の平均値 $\bar{\epsilon}'$

$$\bar{\epsilon}' \approx kT \quad (5.6)$$

が得られる。T=1000 Kの時、 $\bar{\epsilon}' \approx 0.086$ eVである。

したがって、半径aの陰極が温度T (K)である時は、金属の陰極表面における熱電子ビームの実効的なエミッタンスは

$$\epsilon_{r,n} = a \sqrt{\frac{2kT}{m_0 c^2}}, \quad (\pi \cdot m_0 c \cdot \text{cm}) \quad (5.7)$$

で与えられる。よって、 $a = 0.5$ (cm), T = 1000 Kの場合には $\epsilon_{r,n} = 0.29 \times 10^{-3}$ ($\pi \cdot m_0 c \cdot \text{cm}$)となる。

5.2 光電子ビームのエミッタンス

次に光電子放出されたビームのエミッタンスについて考察しよう。熱電子ビームの場合と同様に、放出されたばかりの陰極表面におけるエミッタンスの初期値について考える。

まず、陰極面に平行な方向の運動エネルギーの平均値を求めよう。光電子放出の電子密度が式(3.4)で与えられることから、陰極面に平行な方向の運動エネルギーの平均値が

$$\bar{\epsilon}' = \frac{4\pi m}{N h^3} \int_{w-hv}^\infty d\epsilon_z \int_0^\infty d\epsilon' \frac{\epsilon'}{\exp(\epsilon_z + \epsilon' - \mu) / kT + 1} \quad (5.8)$$

で与えられることは容易にわかる。ここでNは、式(3.4)の光電子放出の電子密度である。

この式は、熱電子の式(5.4)と比較すると、 ϵ_z の積分領域が hv だけ異なってるだけである。光電子放出の場合には、陰極面に垂直な方向の運動エネルギーが、 $w - hv$ よりも高い状態にある電子から放出が可能になることを、上式の積分領域は現わしている。

式(5.8)を任意の温度について解くのは、この式の被積分関数の指数が十分大きいという近似が成り立たないために複雑になるので、以下ではT=0の場合について考察する。

T=0の場合には式(5.8)より

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}' &= \frac{4\pi m}{N h^3} \int_{w-hv}^\mu d\epsilon_z \int_0^{\mu-\epsilon_z} d\epsilon' \epsilon' \\ &= \frac{4\pi}{N h^3} \frac{(hv - \phi)^3}{6} \end{aligned} \quad (5.9)$$

となる。一方、光電子放出の電子密度は(3.4)よりT=0の場合には

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\pi m}{h^3} \int_{w-hv}^\mu d\epsilon_z \int_0^{\mu-\epsilon_z} d\epsilon' \\ &= \frac{4\pi m}{h^3} \frac{(hv - \phi)^2}{2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

よって、T=0の時には、陰極面に平行な方向の運動エネルギーの平均値が

$$\bar{\epsilon}' = \frac{hv - \phi}{3} \quad (5.11)$$

となる。 $hv - \phi > 0.3$ eVになると、陰極面に平行な方向の運動エネルギーの平均値は、1000 K以

上の高温の熱電子に相当する値となる。従って、光電子ビームのエミッタンスは光子のエネルギーによって変化することになり、必ずしも小さいとは限らない。

光電子放出の電子ビームの実効的なエミッタンスは式 (5.11) より

$$\varepsilon_{r,n} = a \sqrt{\frac{2(\hbar\nu - \phi)}{3m_0c^2}}, \quad (\pi \cdot m_0c \cdot \text{cm}) \quad (5.12)$$

で与えられる。ただしこれは絶対零度の金属陰極の場合である。

5.3 電界電子ビームのエミッタンス

最後に電界放出された電子ビームのエミッタンスについて考察しよう。熱電子ビームの場合と同様に、放出されたばかりビームの陰極表面におけるエミッタンスの初期値について考える。

例によって陰極面に平行な方向の運動エネルギーの平均値をまず求める。簡単のために、ここでも $T=0^\circ\text{K}$ の場合について考えよう。このとき電界放出の電子密度は式 (2.2) で与えられるから、陰極面に平行な方向の運動エネルギーの平均値は

$$\bar{\varepsilon}' = \frac{4\pi m}{Nh^3} \int_0^{\mu_0} d\varepsilon_z \int_0^{\mu_0 - \varepsilon_z} d\varepsilon' \varepsilon' P(\varepsilon_z) \quad (5.13)$$

となる。トンネル確率 $P(\varepsilon_z)$ は、式 (2.7) で与えられるから

$$\bar{\varepsilon}' = \frac{2\pi m}{Nh^3} \int_0^{\mu_0} d\varepsilon_z (\mu_0 - \varepsilon_z)^2 \exp\left\{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} (w - \varepsilon_z)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$\mu_0 - \varepsilon_z = x$ と置くと $x \ll w$ であるから、 x について Taylor 展開して近似し、仕事関数の関係式 $\phi = w - \mu_0$ を使うと

$$\bar{\varepsilon}' \approx \frac{2\pi m}{Nh^3} \int_0^{\mu_0} dx x^2 \exp\left\{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} \left(\phi^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\phi^{\frac{1}{2}}x\right)\right\} \quad (5.14)$$

ここで更に積分公式

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) \quad (5.15)$$

を使った後、 $e^{a\mu_0} \ll 1$ の近似をすると次の結果が得られる。

$$\bar{\varepsilon}' \approx \left(-\frac{2}{a^3}\right) \frac{2\pi m}{Nh^3} \exp\left\{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} \phi^{\frac{3}{2}}\right\} \quad (5.16)$$

ただし

$$a = -\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{1}{eF} \frac{3}{2} \phi^{\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

である。式 (5.16) に (5.17) と (2.11) を代入すると

$$\bar{\varepsilon}' = \frac{81}{128\sqrt{2}} \frac{\hbar}{\sqrt{m\phi}} eF \quad (5.18)$$

$$\bar{\varepsilon}' (\text{eV}) = 1.24 \times 10^{-8} \frac{F (\text{V/cm})}{\sqrt{\phi (\text{eV})}}$$

が得られる。これが電界放出された電子ビームの、陰極面に平行な方向の運動エネルギーの平均値である。

従って、この場合の実効的なエミッタンスは

$$\varepsilon_{r,n} = a \sqrt{\frac{2\bar{\varepsilon}'}{m_0c^2}}, \quad (\pi \cdot m_0c \cdot \text{cm}) \quad (5.19)$$

となる。

因みに、 $F = 10^8$ (v/cm), $\phi = 4$ (eV) とすると $\bar{\varepsilon}' = 0.618$ (eV) で、電流密度は $I = 1.63 \times 10^7$

(A/cm²) となる。また、 $F = 10^7$ (v/cm), $\phi = 4$ (eV) の場合には $\bar{\epsilon}^{\dagger} = 0.0618$ (eV) で、電流密度は $I = 7.17 \times 10^{-17}$ (A/cm²) である。このことから電界を強めて大電流を取り出す時には、電子放出面積を小さくしないかぎり、エミッタンスがかなり悪くなることが予想される。電子放出面が多数の突起からなる場合には、個々の突起毎にビームを集束させることも必要になるであろう。

いずれにしても、陰極から放出された電子ビームのエミッタンスの初期値に関する限り、陰極の大きさを小さくすることが、エミッタンスを小さくするのに有効な方法であることは明らかである。

最後にいくつか参考文献をあげておこう。

- 1) R. H. Fowler : "Statistical Mechanics"
Cambridge Universal Press
- 2) 久保亮五編 : "熱学統計力学", 裳華房
- 3) A. J. Lichtenberg : "Phase-space Dynamics of Particles"
- 4) A. Septier : "Applied Charged Particle Optics"
- 5) 柴田幸男 : "電子管. 超高周波デバイス "
コロナ社
- 6) 菅田栄治 : "電子. イオンビームハンドブック "