

1 はじめに

この講義録はライナックにおけるビーム輸送に関して解説を試みたものである。ライナックでのビーム輸送は、電子銃からバンチャーまでの低エネルギー領域、それからライナック終端までの高エネルギー領域、さらに最近では陽電子生成用ターゲットへの大電流の輸送、生成された陽電子ビームの捕獲・輸送等と多岐にわたる。筆者はこれらのすべてについて経験があるわけではない。従って本講義録ではより基本的な部分に限ってはなしをすることになる。

構成は下記の如くである。第2節ではビームオプティクスの基礎について解説をおこなう。特に加速区間の取扱についてとぼしい知恵をしばって若干の考察をおこなった。第3節では低エネルギー領域、高エネルギー領域の2つに分けてビーム輸送について論ずるが著者の経験不足から力点は高エネルギー領域の収束系にある。

著者の勘違い、間違い等が多々存在する事をおそれる。予め読者の容赦を請う。

2 ビーム光学の基礎

2.1 運動方程式

3次元直交座標を (x, y, z) とする。運動方程式、エネルギーゲインの式は

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= F_x \\ \frac{dE}{dt} &= (\vec{F} \cdot \vec{v}) = F_s v \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる。ただし、ここで s は粒子の道のりに沿って測った長さであり、 v および F_s は粒子の速度および s 方向 (即ち運動方向) の力である。 p_x は x 方向の運動量、 E は全エネルギーである。また y 方向の力は無視している。時間 t と粒子の走る距離 s との関係

$$ds = \beta c dt \quad (2)$$

から ($\beta = v/c$, c : 光速) (1) 第2式は

$$\frac{dE}{ds} = F_s \quad (3)$$

ともかかれる。 p_x , E はローレンツ因子 γ をもちいて

$$\begin{aligned} p_x &= m_0 \gamma \frac{dx}{dt} \\ E &= m_0 c^2 \gamma \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。(4),(3) から (1) 式は

$$\begin{aligned} (\beta \gamma x')' &= \frac{F_x}{m_0 c^2 \beta} \\ \gamma' &= \frac{F_s}{m_0 c^2} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。但し $' \equiv d/ds$ 。(5) は加速力と横方向の力が同時に存在する場合には一般的に解くことはできない。どちらか一方がゼロの場合には解けることもある。

$F_x = 0$ の場合

$$\begin{aligned} (\beta \gamma x')' &= 0 \\ \gamma' &= \frac{F_s}{m_0 c^2} \end{aligned} \quad (6)$$

F_s が x を含まなければ (6) 第2式を積分することにより γ は s の関数として得られる: $\gamma = \gamma(s)$ 。(6) 第1式より、

$$x(s) - x(0) = \beta(0) \gamma(0) x'(0) \int_0^s \frac{ds}{\beta \gamma} \quad (7)$$

$\beta \gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ を使うと、 $\gamma' =$ 一定の場合には積分できて、

$$\begin{aligned} x(s) - x(0) &= x'(0) \beta(0) \gamma(0) \frac{1}{\gamma'} \ln \frac{\gamma(s)(1 + \beta(s))}{\gamma(0)(1 + \beta(0))} \\ &\equiv L_{eff} x'(0) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。 L_{eff} は加速区間の有効長と呼ばれている。横方向の運動量は保存するが ($\beta \gamma x' = const$) $\beta \gamma$ が増大する結果として x' は一様に減少していく (図2.1)。傾き $x'(0)$ で出発した粒子が自由空間をドリフトしたとして横方向の偏位 x に到達する仮想的距離が L_{eff} である。従って長さ s の加速区間は L_{eff}/s 倍だけ短い自由空間と同等である。

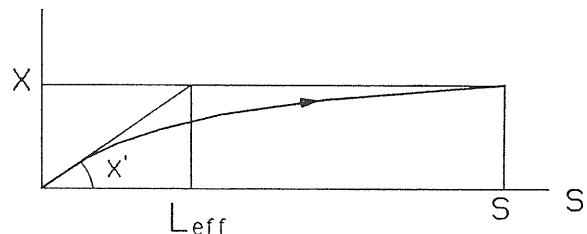


図2.1 加速区間における有効長。加速のために徐々に傾きが減ってくる。

$F_s = 0$ の場合

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{F_x}{m_0 c^2 \beta^2 \gamma} \\ \gamma &= \text{const.} \end{aligned} \quad (9)$$

横方向の力としては例えば4極磁石があげられる。4極磁石の磁場は

$$B_y = b_1 x, \quad B_x = b_1 y \quad (10)$$

で与えられる ($b_1 \equiv B'_y \equiv \partial B_y / \partial x = \text{const}$) ので

$$\begin{aligned} F_x &= e(\vec{v} \times \vec{B})_x = -e\beta c B_y \\ F_y &= e(\vec{v} \times \vec{B})_y = e\beta c B_x \end{aligned} \quad (11)$$

より

$$x'' = -Kx \quad y'' = Ky \quad (12)$$

$$K \equiv \frac{eB'_y}{m_0 c \beta \gamma} = \frac{e}{p} B'_y \quad (13)$$

となる。これから $K > 0$ ならば x 方向は収束、 y 方向は発散する。 $K < 0$ ならば逆である。一方向について収束するならば別の方向については発散することがわかる。これは磁場が Maxwell の方程式を満たすことに由来するものである。

一様磁場、即ち2極磁場の場合についても良く知られている： y 方向に一様な磁場 B がある場合には力は

$$\begin{aligned} F_x &= -eBv_z = -eB\beta cz' \\ F_z &= eBv_x = eB\beta cx' \end{aligned} \quad (14)$$

となる。これからエネルギーゲインの式は

$$\frac{dE}{dt} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) = F_x v_x + F_z v_z = 0$$

となりエネルギーは一定である。(これは一般に磁場によって加速されることはないという定理の一例となっている。) (14)(2) 式から x 方向、 z 方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{z'}{\rho} \\ z'' &= \frac{x'}{\rho} \end{aligned} \quad (15)$$

とかかれる。ただし ρ は

$$\frac{1}{\rho} \equiv \frac{eB}{p} \quad (16)$$

で与えられる。(15) 式は半径 ρ の円運動を表すことはよく知られている。

2.2 ビーム光学

2.1 節では運動方程式と加速区間、4極磁場、2極磁場に対する運動について述べた。実際のビーム輸送では拡がりをもった粒子集団の輸送が問題になる。従って粒子1個1個の3次元空間 (x, y, z) での軌道を論ずるのは適切ではない。これにかわって、あらかじめ定められた設計軌道 (design orbit) — それに沿って加速管、4極磁石等が並べられるべき軌道—の上を走る中心粒子、およびそれに対して小さなずれをもって入射された粒子たちのふるまいを論ずるというかたちをとる。実際には設計軌道はライナックでは加速管および4極磁石を結ぶ直線である。(あるライナックから他のライナックへの入射の場合等には2.1節で述べた2極磁石が使われるがこの場合には設計軌道は円弧になる)。

a. 座標系

2.1 節で導入した s (粒子の軌跡に沿って測った道のり) を独立変数にとるのは同様であるが、ここではその意味は少し異なる。設計軌道に沿って測った道のりを s と定義する。図 2.2 で設計軌道からずれた粒子 (P) から設計軌道上に下ろした垂線の足を点 P_1 とする。設計軌道に沿って測った P_1 の道のりがこの粒子の s である。点 P_1 での単位接線ベクトル \hat{s} と単位法線ベクトル \hat{x} は一意に決り、これらから単位ベクトル $\hat{y} = \hat{s} \times \hat{x}$ を定義する。点 P を $P_1 \vec{P} = x\hat{x} + y\hat{y}$ と表したとき粒子 P の座標を (x, y) と定義する [6]。

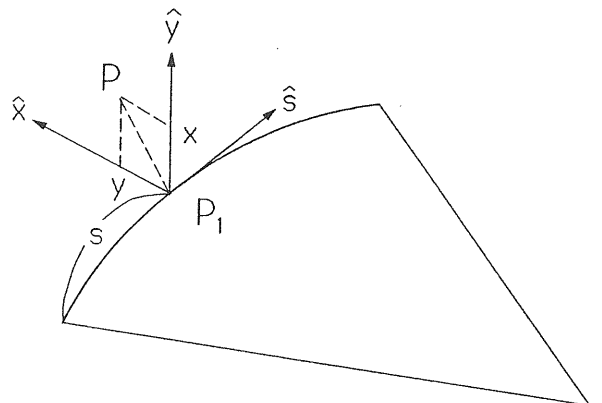


図 2.2 座標系。設計軌道に下ろした垂線の足 (P_1) の道のりが独立変数で P_1 とともに動く座標系 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{s})$ で粒子の運動を記述する。

x, y の s に関する微分を x', y' とすれば (x, x', y, y') が粒子を表す変数となる。

b. 転送行列

ここでは簡単のために加速を考えない。

4極磁石

設計軌道は4極磁石の中心を通る直線である。(11)式の独立変数 s は実際の粒子軌道に沿って測った長さであるが x の振動の波長に比べて x の大きさが充分小さければ、設計軌道に沿って測った距離と思ってよい[6]。従って(11)式はそのままわれわれの座標系での運動方程式としてよい。再記すれば

$$\begin{aligned} x'' + Kx &= 0 & (17) \\ y'' - Ky &= 0 \\ K &= (e/p)B_y' \end{aligned}$$

簡単のために x 方向の運動だけを考えることにする。(y 方向に対しては以下の議論で $K \rightarrow -K$ とすればよい。) (17) 式は線形方程式なので一般解は2つの一次独立な解の和で表せる。まず $K > 0$ の場合を考える。初期条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ に対する解は $x(s) = \cos \sqrt{K}s$ 、また初期条件 $x(0) = 0, x'(0) = 1$ に対する解は $x(s) = \sin \sqrt{K}s / \sqrt{K}$ となることは容易に確かめられる。よって一般に初期条件 $x(0) = x_0, x'(0) = x'_0$ に対する解は

$$\begin{aligned} x(s) &= \cos \sqrt{K}s x_0 + \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}s x'_0 \\ x'(s) &= -\sqrt{K} \sin \sqrt{K}s x_0 + \cos \sqrt{K}s x'_0 \end{aligned} \quad (18)$$

第2式は第1式を s で微分して得られる。 $x(s), x'(s)$ はけっして ∞ にならず4極磁石の収束作用をあらわしている。(18)式は行列をもちいて

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = M_F \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$M_F = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K}s & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}s \\ -\sqrt{K} \sin \sqrt{K}s & \cos \sqrt{K}s \end{pmatrix} \quad (20)$$

とかくことができる。行列 M_F は収束4極磁石の転送行列と呼ばれ、 $s = 0$ から $s = s$ への運動を表している。 $K < 0$ の場合には4極磁石は発散作用をなし、転送行列は

$$M_D = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{|K|}s & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh \sqrt{|K|}s \\ \sqrt{|K|} \sinh \sqrt{|K|}s & \cosh \sqrt{|K|}s \end{pmatrix} \quad (21)$$

で与えられる。(20)(21)式で $K \rightarrow 0$ とすると

$$M_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

となるがこれは自由空間の転送行列を表している。また4極磁石の長さ l がゼロの極限 (ただし Kl を一定に保つ) では(20)(21)式は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Kl & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

となる。この近似は薄肉近似と呼ばれる。(23)式は薄肉レンズの式と呼ばれる。薄肉近似でいいことは4極磁石によって $x(y)$ は変化を受けないということである。

一般に光学系の各要素の転送行列 M_j さえ与えられていれば、それらを並べた光学系全体の転送行列 M は各転送行列の積で表される：

$$M = M_n M_{n-1} \cdots M_2 M_1.$$

偏向磁石

ライナック本体におけるビーム輸送に偏向磁石を使うことは(軌道補正用磁石を除いて)あまりないが一応偏向磁石の場合を議論しておく。まずセクター磁石を考える。図2.3は設計軌道とそれからはずれた一般の粒子の軌道の微小な曲げ角 $\Delta\theta$ の間の変化を示している。この図から $s = \rho\theta$ に注意すれば x, x' の1次の近似で

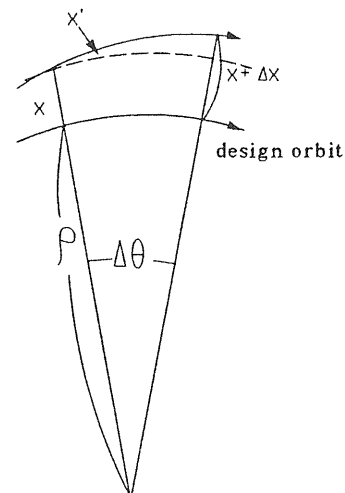


図2.3 偏向磁石における設計軌道から外れた粒子の、微小偏向角だけ動いたときの位置と傾きの変化。

$$x(\theta + \Delta\theta) = x(\theta) + (\rho + x)x'(\theta)\Delta\theta = x(\theta) + \rho x'(\theta)\Delta\theta$$

$$x'(\theta + \Delta\theta) = x'(\theta) - x(\theta)\Delta\theta/\rho$$

とかかれることがわかる。これから

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \rho x' \\ \frac{dx'}{d\theta} &= -\frac{x}{\rho} \end{aligned} \quad (24)$$

という方程式が導かれる。これから

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = -x$$

あるいは独立変数を s にすれば

$$x'' + \frac{x}{\rho^2} = 0 \quad (25)$$

という方程式が得られる。これを4極磁石の場合と比べるとセクター型偏向磁石には x 方向に関して収束作用があることがわかる。これは $1/\rho$ の曲率で曲っている曲線座標系を設計軌道にとったことに由来するものである。転送行列は4極磁石と同様に

$$M_H = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta \\ -(1/\rho) \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{セクター型} \quad (26)$$

で与えられる。 θ は偏向角。 y 方向に関しては設計軌道は曲率をもたないので自由空間と同じである：

$$M_V = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

制作が容易であるために屢々長方形型の偏向磁石が用いられる。長方形型の場合には設計軌道は磁石の端面に垂直でない。このために端部では収束（発散）作用を生ずる。これをエッジ効果と呼ぶ。まず x 方向に関してみる（図2.4）。座標 (x, x') をもつ粒子の設計軌道に下ろした垂線の足 s が磁石の端面に達したときには粒子はまだ磁場を感じておらず、 $x \tan \alpha$ だけ走ってはじめて磁場端面に達する。もしもセクター磁石であればこの距離を走る間に $x \tan \alpha / \rho$ だけ曲げられていたはずである。 x に関しては1次のオーダーでは変化がない。したがって、長方形型では端部において

$$\Delta x = 0 \quad \Delta x' = x \frac{\tan \alpha}{\rho}$$

だけ軌道が変化する。これは強さ $\tan \alpha / \rho$ の薄肉4極磁石による発散作用と同じである。磁石から出るときも同様である。従って長方形型偏向磁石の転送行列はセクター型の端部にエッジ効果を表す薄肉レンズをつ

けたものと同等である：

$$M_H^{\text{長方形型}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan \beta / \rho & 1 \end{pmatrix} M_H^{\text{セクター型}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan \alpha / \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

(注) 現実には磁場は上で仮定したように端部で急には上がらないがこの場合でもエッジ効果を表す上の式は x の1次のオーダーでただし。

$\alpha = \beta = \theta/2$ の場合にはセクター磁石がもっている収束効果とエッジによる発散効果とがちょうど相殺して、自由空間と同等になる：

$$M_H^{\text{長方形型}} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$(\alpha = \beta = \theta/2) \quad (30)$$

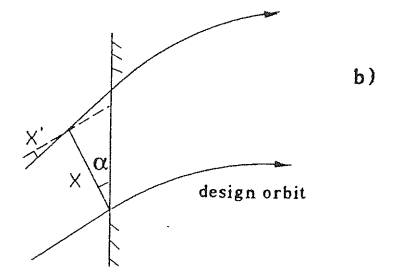
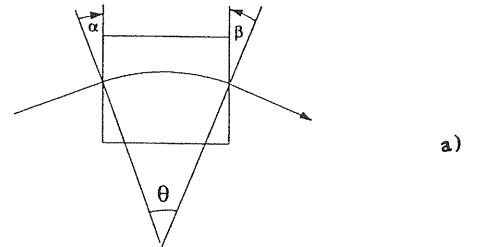


図2.4 長方形型偏向磁石による水平方向のエッジ効果。a) 平面図。入射角と出射角の和は偏向角に等しい。b) 入射部分の拡大図。 $x \tan \alpha$ だけよけいに走って、磁場端面に達する。

y 方向に関しては端部における磁場のしみだが本質的である。図2.5に示すように斜に入射しかつ y 方向にある偏位をもって入射した粒子は磁石端面に達する前にしみだした磁場 B の x 成分 B_x を感じて y 方向に蹴られる。詳細は省略するが ([7][8] 参照) 磁場のしみだしの幅が小さければこの効果は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan \alpha / \rho & 1 \end{pmatrix}$$

で表されこんどは収束作用になる。(偶然にも x 方向と y 方向のエッジ効果を表す薄肉レンズの強さは符号が反対で絶対値は等しい。) 磁場のしみだしの幅が大きいときにはしみだした磁場の分布により上式の(2,1)要素に補正項が入る [8] が ρ が大きければ普通は以上で充分である。以上から y 方向の転送行列は

$$M_{\text{長方形型}} = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} & \rho \theta \\ \frac{1}{\rho} \tan \frac{\theta}{2} (\theta \tan \frac{\theta}{2} - 2) & 1 - \theta \tan \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (31)$$

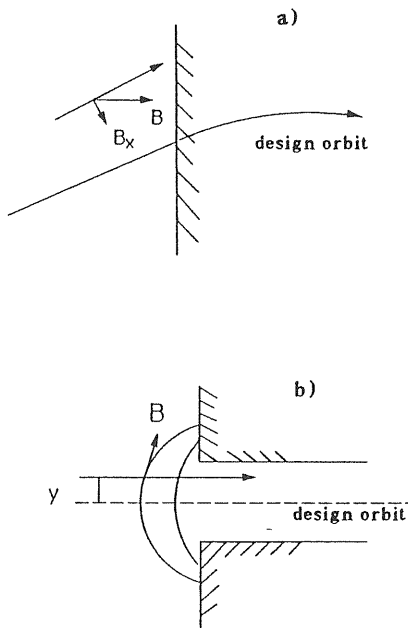


図 2.5 垂直方向のエッジ効果。 y 方向にずれて入射するビームは洩れ磁場の x 成分を感じて y 方向に蹴られる。

c. 位相空間

これまで取扱った要素は (1) 加速区間、(2) 4 極磁石、(3) 自由空間、(4) 偏向磁石、であるがこのうち加速区間を除けば運動方程式はすべて

$$x'' + K(s)x = 0 \quad (32)$$

という形をしている。ここで K は実際には区分的に一定の関数であるがここでは一般的に s の関数である

としておく。われわれは一般解の形を知らないが転送行列の方法を使えば粒子の (x, x') 平面の中での運動を追跡できることはすでに述べた。この (x, x') 平面を位相空間とよぶ。さて我々は個々の粒子の運動でなしに粒子の集団全体としての運動に関心がある。そこで位相空間内での粒子の分布を考える (図 2.6)。(32) 式は 2 階の微分がはいっていて見通しがわるいので新しい変数 $p \equiv x'$ を導入して 1 階の連立方程式に直しておく：

$$\begin{aligned} x' &= p \equiv f(x, p) \\ p' &= -Kx \equiv g(x, p) \end{aligned} \quad (33)$$

ここで (33) の各々の式で第 1 等号右辺を x, p の関数とみてそれぞれ $f(x, p), g(x, p)$ とおいた。(従っていまの場合 $f(x, p) = f(p)$, $g(x, p) = g(x)$ とかいてもよいのだが後の議論のために上記のように一般的なかたちにかいておくことにする)。さて (x, p) あるいは同じことだが (x, x') 平面の中に充分小さい正方形 $ABCD$ を考える。この中に含まれる粒子たちは (33) 式にしたがって動くが s から $s + ds$ まできたときに四角形 $A'B'C'D'$ にちょうど含まれているとする。このとき $ABCD$ と $A'B'C'D'$ の面積は等しい。

(証明) $ABCD$ と $A'B'C'D'$ の頂点の座標は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A(x, p), & \quad B(x + \Delta x, p) \\ C(x + \Delta x, p + \Delta p), & \quad D(x, p + \Delta p) \\ A'(x + f(x, p)ds, p + g(x, p)ds) \\ B'(x + \Delta x + f(x + \Delta x, p)ds, p + g(x + \Delta x, p)ds) \\ C'(x + \Delta x + f(x + \Delta x, p + \Delta p)ds, \\ & \quad p + \Delta p + g(x + \Delta x, p + \Delta p)ds) \\ D'(x + f(x, p + \Delta p)ds, p + \Delta p + g(x, p + \Delta p)ds) \end{aligned}$$

これから、(33) しきから

$$\begin{aligned} A'B'C'D' \text{ の面積} &= |\vec{A'B'} \times \vec{A'D'}| \\ &= (\vec{A'B'})_x (\vec{A'D'})_y - (\vec{A'B'})_y (\vec{A'D'})_x \\ &= \Delta x \Delta p \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} \right) ds \right] \\ &= \Delta x \Delta p = ABCD \text{ の面積} \end{aligned}$$

ここで (33) 式から $\partial f / \partial x + \partial g / \partial p = 0$ であることを使った。(証終)

したがって位相空間の中で粒子たちの占める体積は運動の恒量である。全粒子の位相空間の中に占める体積(面積)をビームのエミッタンスという。これはビームの拡がりの尺度をあたえる。上の証明をみてもわかるように、 $\partial f/\partial x + \partial g/\partial p = 0$ がエミッタンスが保存

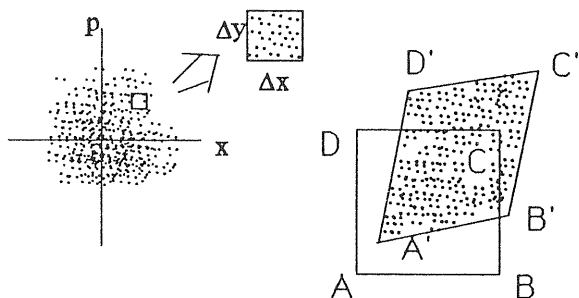


図 2.6 位相平面内の微小領域 $ABCD$ はそのなかに含まれる粒子とともに ds のあいだに $A'B'C'D'$ に移るがその面積は等しい。

するための必要条件である。(実は運動方程式がハミルトニアンから導かれるならばこの条件を満たす。)

加速区間の場合には運動方程式は

$$x'' + \frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma} x' = 0 \quad (34)$$

となる。 (x, p) でかけば、

$$\begin{aligned} x' &= p \\ p' &= -\frac{(\beta\gamma)'}{\beta\gamma} p \end{aligned} \quad (35)$$

となるがこれは $\partial f/\partial x + \partial g/\partial p = 0$ を満たさないのので (x, p) 空間ではエミッタンスは保存しない。実際エミッタンスは運動量に比例して小さくなる。

d. twiss パラメータ

(32) 式の解の形を次のように仮定する。

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\psi(s) + \delta). \quad (36)$$

β, ψ は s の関数で a, δ は初期条件で決まる定数。(36) を (32) に代入して $\cos(\psi + \delta), \sin(\psi + \delta)$ の係数を両辺で比較すると β, ψ に関する次の 2 つの条件が得ら

れる。

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + K\beta^2 + (\beta\psi')^2 = 0 \quad (37)$$

$$(\beta\psi')' = 0. \quad (38)$$

(38) 式から $\beta\psi' = \text{const.}$ となるが、

$$(\beta\psi)' = 1 \quad (39)$$

となるように β を規格化する。したがって (37)(38) 式は

$$\frac{1}{2}\beta\beta'' - \frac{1}{4}\beta'^2 + K\beta^2 + 1 = 0 \quad (40)$$

$$\psi(s) = \int^s \frac{ds}{\beta(s)} \quad (41)$$

となる。以上から我々は (40) 式を満たすように $\beta(s)$ をきめてやれば、運動方程式 $x'' + K(s)x = 0$ の解を

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\psi(s) + \delta) \quad (42)$$

$$\psi(s) = \int^s \frac{ds}{\beta(s)} \quad (43)$$

のようにかくことができた。この $\beta(s)$ はベータ関数と呼ばれる。(40) 式によって、 $\beta(s)$ は $K(s)$ 即ち磁石の強さとその配置(光学系)及びその光学系の入口での値 $\beta(0), \beta'(0)$ が決まれば一義的にきまる。また、個々の粒子の初期条件には依存しない。この意味でベータ関数は与えられた光学系を記述する関数であるといえよう。

ベータ関数とビームサイズ

(42) 式で与えられる粒子の運動を位相空間でみてみる。(42) 式を s で微分すると

$$x'(s) = \frac{a}{\sqrt{\beta}} \left\{ \frac{\beta'}{2} \cos(\psi + \delta) - \sin(\psi + \delta) \right\}. \quad (44)$$

(42)(44) 式は粒子の初期条件 a, δ が与えられたときに位相空間上での運動を与える式である。(42)(44) 式から $\cos(\psi + \delta), \sin(\psi + \delta)$ を消去してやると、

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha x + \beta x'}{\sqrt{\beta}} \right)^2 = a^2 \quad (45)$$

となる。但し $\alpha \equiv -\beta'/2$ とおいた。(45) 式は s を固定してみると (x, x') 平面上での楕円を表す。 a はこの楕円の大きさをあらわしている。(45) 式は δ を含んでいないので同じ a をもつ粒子たちは (45) の楕円上に分布しているはずである(図 2.7)。別の a をもつ粒子たちは形は相似だが大きさの異なる楕円上に分

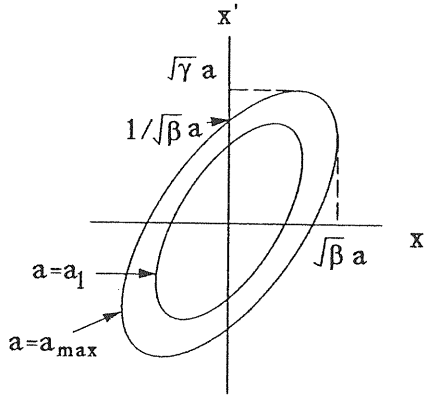


図 2.7 ある s における位相平面。共通の a をもつ粒子は楕円上に分布し、粒子全体は $a = a_{max}$ の楕円の内部に分布する。楕円の形はベータ関数で決まる。

布している。従って粒子全体は a の最大値を a_{max} として大きさ a_{max} の楕円の内部を埋める。この楕円の面積は前項で述べたエミッタンスに他ならない。(45)からこの楕円の面積はちょうど πa_{max}^2 で与えられる。従ってエミッタンス ε は $\varepsilon = a_{max}^2$ となる。(注: 前項に述べたエミッタンスの定義に従えば $\varepsilon = \pi a_{max}^2$ であるがこれ以降は π をつけないで定義する。即ち、エミッタンス \equiv (位相平面の面積) / π)。他の s にうつるとこの楕円は面積は同じで傾きの異なる別の楕円にうつる。以上から、 a_{max}^2 あるいは一般にある粒子の (x, x') を用いて (45) から逆に定義した a^2 は保存量であってクーラン・シュナイダー不変量と呼ばれている。(45) は先に定義した α および $\gamma \equiv (1 + \alpha^2) / \beta$ をもちいると

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = a^2 \quad (46)$$

とかける。 β, α, γ をあわせて twiss パラメータという。図 2.7 からビームの最大径は $x_{max} = \sqrt{\beta \varepsilon}$ で与えられる。即ちベータ関数はビーム幅が $\sqrt{\beta \varepsilon}$ になるような量であるといえる。

さて (45) 式から自然に導かれるように

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{x}{\sqrt{\beta}} \\ v &\equiv \frac{\alpha x + \beta x'}{\sqrt{\beta}} \end{aligned} \quad (47)$$

とおくと (47) は (u, v) 平面上の円周の方程式になる。(42)(44) 式は

$$\begin{aligned} u &= a \cos(\psi + \delta) \\ v &= -a \sin(\psi + \delta) \end{aligned} \quad (48)$$

となる。これは ψ を角変数とする単振動を表している。これをベータatron振動という。 ψ をベータatron振動の位相とよぶ。もとの x 座標にもどってみると、振幅は $\sqrt{\beta}$ 倍されているものの位相の進み方は u と同じである。 $\Delta\psi \equiv \psi(s) - \psi(0)$ とおくと (48) 式から

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

となることがわかる。変数を (x, x') に戻すと

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta/\beta_0}(\cos \Delta\psi + \alpha_0 \sin \Delta\psi) \\ -\{(1 + \alpha_0 \alpha) \sin \Delta\psi + (\alpha - \alpha_0) \cos \Delta\psi\} / \sqrt{\beta_0 \beta} \\ \sqrt{\beta_0/\beta}(\cos \Delta\psi - \alpha \sin \Delta\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

となる。下付添え字 $_0$ は $s = 0$ での値をあらわす。(50) は $s = 0$ から $s = s$ までの転送行列を twiss パラメータ及び位相をもちいてあらわしたことになる。

さて、いま $s = s_0$ で twiss パラメータの値がわかっていて、 $s = s_0$ から $s = s$ までの転送行列 M が知られていれば $s = s$ での twiss パラメータの値を次のようにして求めることができる。 $s = s_0$ では (46) は

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x'_0 + \beta_0 x_0'^2 = a^2. \quad (51)$$

これを x_0, x'_0 についての 2 次形式とみて行列形式でかくと

$$\begin{aligned} a^2 &= \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^t (M^{-1})^t \begin{pmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

ここで転送行列の定義

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$

を使った。(52) から

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = (M^{-1})^t \begin{pmatrix} \gamma_0 & \alpha_0 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{pmatrix} M \quad (53)$$

が得られる。これは M の行列要素 m_{ij} を用いてかきなおせば

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & 1+2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

となる。例えば自由空間では入口と出口の twiss パラメータの関係は

$$\begin{cases} \beta = \beta_0 - 2\ell\alpha_0 + \ell^2\gamma_0 \\ \alpha = \alpha_0 - \gamma_0\ell \\ \gamma = \gamma_0 \end{cases} \quad (55)$$

で与えられる。また薄肉4極磁石 ($m_{11} = m_{22} = 1, m_{12} = 0, m_{21} = -k$) では、

$$\begin{cases} \beta = \beta_0 \\ \alpha = \alpha_0 + k\beta_0 \\ \gamma = \gamma_0 + k^2\beta_0 + 2k\alpha_0 \end{cases} \quad (56)$$

となる。図2.8に自由空間、収束4極磁石による楕円の変化の様子を示す。

また、位相の進み $\Delta\psi$ は (50) 式の (1,1), (1,2) 要素から

$$\tan \Delta\psi = \frac{m_{12}}{m_{11}\beta_0 - m_{12}\alpha_0} \quad (57)$$

となる。

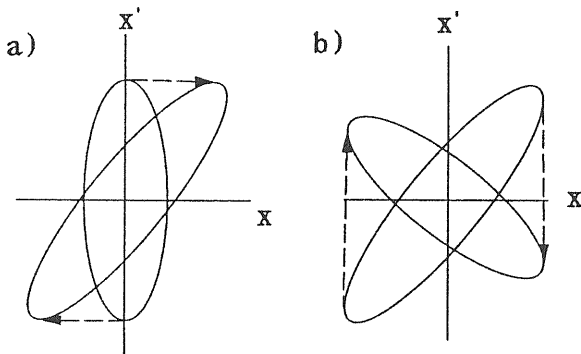


図2.8 位相空間における楕円が自由空間及び4極磁石を通ることによって受ける変化を示す。a) 自由空間, b) 収束4極磁石

e. ディスパージョン・クロマチシティ

これまでの議論では全ての粒子は中心粒子と同一のエネルギーを持つと仮定していた。この項ではエネルギーの異なる粒子のふるまいを扱う。

偏向磁石 エネルギーの違いに応じて曲げ角が異なるため、磁石出口での (x, x') にはエネルギーの違いに比例した項が加わる。セクター型磁石に対して運動方程式を導いた過程と同様のやり方で $\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$ のあいだの x, x' の変化は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x(\theta + \Delta\theta) &= x(\theta) + \left(\frac{\rho}{1 + \Delta p/p} + x \right) x' \Delta\theta \\ &\simeq x(\theta) + x' \rho \Delta\theta \\ x'(\theta + \Delta\theta) &= x'(\theta) - \frac{x}{\rho(1 + \Delta p/p)} \Delta\theta \\ &\quad + \frac{\Delta p}{p} \Delta\theta \end{aligned} \quad (58)$$

ここで $x'(\Delta p/p), x(\Delta p/p)$ のような項は2次のオーダーとして無視している。これから運動方程式は

$$\frac{dx}{d\theta} = \rho x'$$

$$\frac{dx'}{d\theta} = -\frac{x}{\rho} + \frac{\Delta p}{p} \quad (59)$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = \rho \frac{\Delta p}{p} \quad (60)$$

あるいは

$$x'' + \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} \quad (61)$$

(61) 式の右辺 = 0 の解 (一般解) はすでに与えられている ((26) 式)。(61) の解はこの一般解 + (61) の特解であらわせる。 $\Delta p/p = 1$ に対する特解をディスパージョンと呼び η であらわす。ディスパージョンは $\Delta p/p = 1$ のエネルギー偏移を持ったビームに対する中心軌道からのずれである (これはもちろん初期条件 $x(0), x'(0)$ による)。以上から (61) 式の解は

$$x = x_0 + \eta \frac{\Delta p}{p} \quad (62)$$

とかける。ただし x_0 は $\Delta p = 0$ に対する解。今の場合も転送行列を導入することができる。ただし今回は $(x, x', \Delta p/p)$ に対する行列で (3×3) 行列となる:

$$M_H^{\text{セクター型}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta & \rho(1 - \cos \theta) \\ -\sin \theta / \rho & \cos \theta & \rho \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (63)$$

垂直方向に関しては設計軌道が曲率をもたないのでディスパージョンはゼロであり、転送行列の (1,3), (2,3) 成分はゼロである。

4極磁石 4極磁石の場合も同様に設計軌道が曲率をもたないのでディスパージョンはゼロである。しかしそのかわりに収束（発散）の強さがエネルギーによる結果として位相の進みが運動量依存性をもつ。 $\Delta p/p = 1$ の粒子に対する位相の進みの変化 $\Delta\psi/2\pi$ をクロマチシティといい ξ で表す。運動方程式 $x'' + K(s)x = 0$ で $K(s) \rightarrow K(s)(1 - \Delta p/p)$ とおけば運動量偏移 $\Delta p/p$ の粒子に対する運動方程式が得られる：

$$x'' + K(s)x = K(s)x\Delta p/p. \quad (64)$$

右辺がゼロの解は既知である。摂動論によって解を求める。 s_0 から s までの転送行列を M_0 とする（これは $\Delta p = 0$ の転送行列である）。これに対して、ある s_1 という点に強さ $-\Delta k \equiv -K(s_1)ds_1\Delta p/p$ の薄肉レンズが挿入されたとする（これは運動量偏移 $\Delta p/p$ によってうまれた摂動を表している）。図 2.9 参照。これによって全体の転送行列は変化を受け、 M_0 から M になる。このとき、もともとの位相の進み ψ_0 からの変化 $\Delta\psi$ を知りたい。 $s_0 \rightarrow s_1$ の転送行列を $M^{(1)}$ 、 $s_1 \rightarrow s$ の転送行列を $M^{(2)}$ とすると、

$$M_0 = M^{(2)}M^{(1)} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (65)$$

$$\tan \psi_0 = \frac{m_{12}}{m_{11}\beta_0 - m_{12}\alpha_0} \quad (66)$$

となる。但し、 β_0, α_0 は s_0 での twiss パラメータ。摂動後の転送行列は

$$\begin{aligned} M &= M^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta k & 1 \end{pmatrix} M^{(1)} \\ &= M_0 - \begin{pmatrix} M_{12}^{(2)}M_{11}^{(1)} & M_{12}^{(2)}M_{12}^{(1)} \\ M_{22}^{(2)}M_{11}^{(1)} & M_{22}^{(2)}M_{12}^{(1)} \end{pmatrix} \Delta k \end{aligned} \quad (67)$$

となる。(66) 式より

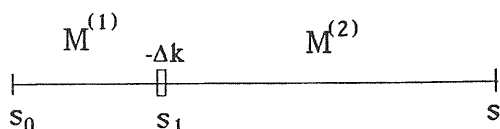


図 2.9 ある光学系の途中に小さな摂動が加わったときの位相の変化を求めるための図。

$$\begin{aligned} \Delta \tan \psi_0 &= \frac{\Delta \psi_0}{\cos^2 \psi_0} = \frac{m_{11}\Delta m_{12} - m_{12}\Delta m_{11}}{(m_{11}\beta_0 - m_{12}\alpha_0)^2} \beta_0 \\ &= \frac{(M_{12}^{(2)})^2}{(m_{11}\beta_0 - m_{12}\alpha_0)^2} \beta_0 \Delta k \end{aligned}$$

となるが、これは (50) 式を使うと分子分母はそれぞれ

$$\begin{aligned} m_{11}\beta_0 - m_{12}\alpha_0 &= \sqrt{\beta\beta_0} \cos \psi_0 \\ M_{12}^{(2)} &= \sqrt{\beta_1\beta} \sin(\psi_0 - \psi_1) \end{aligned}$$

と計算できるので結局、

$$\Delta \psi_0 = \sin^2(\psi_0 - \psi_1) \beta_1 \Delta k \quad (68)$$

となる。 $\Delta k = K(s)ds_1(\Delta p/p)$ を (68) 式に代入して s_1 で積分し、 $\Delta p/p$ で割れば、クロマチシティが得られる：

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^s \sin^2(\psi(s) - \psi(s_1)) \beta(s_1) K(s_1) ds_1. \quad (69)$$

これからベータ関数の大きいところの 4極磁石がクロマチシティに大きく寄与することがわかる。また (40) 式から

$$\beta K = \gamma + \alpha'$$

と表すことができる。これからベータ関数が s の周期関数の場合には α' の積分は無視できて

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^s \sin^2(\psi(s) - \psi(s_1)) (\gamma + \alpha') ds_1 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{s_0}^s (\gamma + \alpha') ds_1 \simeq \frac{1}{4\pi} \int_{s_0}^s \gamma ds_1 \\ &\simeq \frac{1}{4\pi} \int_{s_0}^s \frac{ds_1}{\beta} = \frac{1}{4\pi} \psi_0. \end{aligned} \quad (70)$$

ここで \sin^2 の項はその平均値におきかえ、また 4極磁石の場所では $\alpha \ll 1$ という近似を行なっている。(70) 式はクロマチシティはほぼ光学系全体の位相の進みだけできまる事を示している。

f. 固有座標系でのオブティクス

これまで述べてきたビームオブティクスはすべて

$$x'' + K(s)x = 0 \quad (71)$$

という運動方程式に基いている。加速がある場合にはこの式は成立たない。加速区間に対する式は

$$(\beta\gamma x')' = \frac{F_x}{m_0 c^2 \beta} \quad (72)$$

で与えられることは既に述べた。いままで述べたオブティクスの概念が加速区間にも摘要できればつごうがよい。 $s = 0$ から $s = s$ への変換は 2.1 節に述べたよ

うに (転送行列に似せて)

$$\begin{aligned} x(s) &= x(0) + L_{eff} x'(0) \\ x'(s) &= \frac{p(0)}{p(s)} x'(0) \\ L_{eff} &\equiv p(0) \int_0^s \frac{ds}{p(s)} \\ \varepsilon(s) &= \frac{p(0)}{p(s)} \varepsilon(0) \end{aligned} \quad (73)$$

とかけるので、加速区間にはこれを用い非加速区間には前項までに導入した転送行列 (およびベータ関数) を用いるというのが加速区間に対して通常用いられる処方である。この方法によれば twiss パラメータの加速区間による変換は次のようにして与えられる。加速前の (x, x') 上の楕円

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x'_0 + \beta_0 x_0'^2 = \varepsilon(0) \quad (74)$$

は加速後は (73) 式に従って

$$\frac{p_0}{p} \tilde{\gamma} x^2 + 2\tilde{\alpha} x x' + \frac{p}{p_0} \tilde{\beta} x'^2 = \varepsilon(s) \quad (75)$$

にうつる。ここで、 $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}$ は $\beta_0, \alpha_0, \gamma_0$ の、長さ L_{eff} の自由空間によって変換を受けたものである。即ち、

$$\begin{cases} \tilde{\beta} = \beta_0 - 2L_{eff}\alpha_0 + L_{eff}^2\gamma_0 \\ \tilde{\alpha} = \alpha_0 - L_{eff}\gamma_0 \\ \tilde{\gamma} = \gamma_0 \end{cases} \quad (76)$$

従って、(75) 式において、

$$\gamma \equiv \frac{p_0}{p} \tilde{\gamma} \quad \alpha \equiv \tilde{\alpha} \quad \beta \equiv \frac{p}{p_0} \tilde{\beta} \quad (77)$$

と定義すれば通常の楕円の式が得られそうである。(但し、クーラン・シュナイダー”不変量”は (73) 第4式に従って変化することに注意する)。twiss パラメータをこのように定義すると $1 + \alpha^2 = 1 + \tilde{\alpha}^2 = \tilde{\beta}\tilde{\gamma} = \beta\gamma$ となり γ の定義は加速後も加速前と同じ式で定義できた。しかし、 $\alpha = -\beta'/2$ という α の定義式は (77) 式で定義した β, α の間には成立たない。すなわちベータ関数は不連続になる。従って、加速後の非加速区間は (77) 式で与えられる twiss パラメータをその区間の初期値とする別の光学系として扱わなければならない。このことは加速区間では減衰項 ($p'x'$) があるためベータ関数が定義できないということの直接的帰結である。

以上に述べた処方は従って次のような短所をもっている。

- (1) 保存量がない。
- (2) (1) の帰結としてベータ関数が定義できない。従って、加速区間を含む輸送系全体をつじつまの合う単一の光学系として扱うことができない。
- (3) 従って、オブティクスのマッチング、軌道補正等の計算がやりにくい。

固有座標系

加速区間においてもベータ関数が定義可能な別の処方が可能である。これを以下に述べる。粒子の固有座標系に乗って考える。即ち

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \\ d\tau &= \frac{dt}{\gamma} \end{aligned} \quad (78)$$

τ は粒子の固有時。実験室系での運動方程式

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \quad (79)$$

は

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(m_0 \gamma \frac{dx}{dt} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(m_0 \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right) \\ &= \frac{m_0}{\gamma} \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \end{aligned} \quad (80)$$

とかくことができる。

$$d\sigma \equiv c d\tau \quad (81)$$

を独立変数として導入すると (80) 式は ($d\sigma = c d\tau = c dt/\gamma = ds/(\beta\gamma)$ に注意して)

$$\frac{d^2 x}{d\sigma^2} = \frac{\gamma F_x}{m_0 c^2} \quad (82)$$

となる。 γF_x は Minkowski の力と呼ばれているものである。同様に縦方向についても

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} = \frac{\gamma F_s}{m_0 c^2} \quad \text{または} \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{F_s}{m_0 c^2 \beta} \quad (83)$$

以下設計軌道は直線とする (即ち偏向磁石は考えない)。さらに全ての粒子は基準粒子と同一エネルギーとする。この場合には (82) 式の σ は基準粒子の σ とおもってよい。 $F(s)$ 即ち加速電場が s の関数として与えられているとすれば (83) 式から $\gamma(s)$ が求まる。また $d\sigma = ds/(\beta\gamma)$ を積分して σ と s の関係がわかる。従って (82) 式の右辺は σ の関数として与えることができる。(82) 式は $F_x = 0$ または F_x が 4 極磁石のよる力の場合 (71) の形になり、4 極磁石と加速が同時に存在してもベータ関数が定義できる。以下本稿では σ を独立変数にとった座標系を σ 座標系、 s を

独立変数にとった系を s -座標系とよぶことにする。
 加速区間 ($F_x = 0$) (82) 式から加速区間は自由空間と同等であって、転送行列は

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ell_{eff} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}_0 \quad (84)$$

$$\ell_{eff} = \int_0^s \frac{ds}{\beta\gamma} \quad (85)$$

で与えられる。但しここで、 $\cdot \equiv d/d\sigma$ である。(85) 式は (x, x') に戻せば

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_0\gamma_0\ell_{eff} \\ 0 & \beta_0\gamma_0/(\beta\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 \quad (86)$$

これは (73) の変換に他ならない。

4極磁石 ($F_x = 0$) 転送行列は

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{K^{(\sigma)}\sigma} & \sin\sqrt{K^{(\sigma)}\sigma}/\sqrt{K^{(\sigma)}} \\ -\sqrt{K^{(\sigma)}}\sin\sqrt{K^{(\sigma)}\sigma} & \cos\sqrt{K^{(\sigma)}\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}_0 \quad (87)$$

但し

$$K^{(\sigma)} \equiv K^{(s)}(\beta\gamma)^2 \quad (88)$$

上付添え字 $(\sigma), (s)$ はそれぞれ σ -座標系、 s -座標系での量であることを示す。 $(K^{(s)} \equiv eB'_y/p)$

規格化エミッタンス σ -座標系におけるエミッタンス $\epsilon^{(\sigma)}$ は保存量である。 s -座標系におけるエミッタンス $\epsilon^{(s)}$ との関係は $x\dot{x} = \beta\gamma x x'$ より

$$\epsilon^{(\sigma)} = \beta\gamma\epsilon^{(s)} \quad (89)$$

となる。 $\epsilon^{(\sigma)}$ は規格化エミッタンスと呼ばれ、 ϵ_n ともかかれる。

ベータ関数 ベータatron振動の位相の進み $\Delta\psi$ は保存するので、両座標系でのベータ関数の関係は

$$\Delta\psi = \int \frac{ds}{\beta^{(s)}} = \int \frac{d\sigma}{\beta^{(\sigma)}} = \int \frac{ds}{(\beta\gamma)\beta^{(\sigma)}}$$

より

$$\beta^{(\sigma)} = \frac{\beta^{(s)}}{(\beta\gamma)} \quad (90)$$

となる。これは (77) 第3式に対応している。一方、 α については、 $(\hat{p} \equiv (\beta\gamma) = p/(m_0c))$

$$\begin{aligned} \alpha^{(\sigma)} &\equiv -\frac{1}{2} \frac{\beta^{(\sigma)}}{d\sigma} = -\frac{\hat{p}}{2} \left(\frac{\beta^{(s)}}{\hat{p}} \right)' \\ &= -\frac{\beta^{(s)}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\hat{p}'}{\hat{p}} \beta^{(s)} \\ &= \alpha^{(s)} + \frac{1}{2} \hat{p}' \beta^{(s)} \end{aligned}$$

であるが、 $\hat{p}' \neq 0$ のときは $\alpha^{(s)}$ が定義されないので、

結局

$$\alpha^{(\sigma)} = \alpha^{(s)} \quad (91)$$

となる。これは再び (77) 第2式に対応している。

3 ライナックにおけるビーム輸送

ライナックにおけるビーム輸送では非相対論的領域 (低エネルギー、低ベータ領域と称する) と (超) 相対論的領域 (高エネルギー、高ベータ領域) とで、そのビーム力学が大きく異なるため2つにわけて論ずるのが便利である。低ベータ領域では、(1) ビームの空間電荷による力が重要となる。また、(2) 加速管内電磁場の横方向成分による力も無視できない。(3) 縦方向 (進行方向) の運動 (位相振動) が可能である。高ベータ領域ではこれと反対に (1) 空間電荷による力は無視できる。(2) 加速管内電磁場の横方向成分による力は無視できる。(3) 縦方向の運動は $\beta = 1$ のため凍結している。したがって高ベータ領域の力学は比較的単純で外部の収束系による横方向の運動だけをかながえればよい。

3.1 低ベータ領域での運動

a. 空間電荷による力

半径 b で線電荷密度 $e\lambda (= \text{一定})$ のビームを考えると Gauss および Ampere の法則から

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{e\lambda}{2\pi b^2\epsilon_0} r & r < b \\ &= \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > b \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{ve\lambda\mu_0}{2\pi b^2} r & r < b \\ &= \frac{ve\lambda\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} & r > b \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} F_r &= e(E_r - vB_\phi) \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{e^2\lambda}{2\pi b^2\epsilon_0} r & r < b \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{e^2\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > b \end{aligned} \quad (94)$$

(94) の第1式第1項は電場による発散力、第2項は磁場による収束力を表す。それらの比は、

$$\frac{eE_r}{-evB_\phi} = -\frac{1}{\beta^2} \quad (95)$$

となる。即ち、 $\beta \ll 1$ では電場による発散力が主となり、 $\beta \rightarrow 1$ で磁場による収束力とちょうどつりあう。

b. ソレノイドによる収束

電子銃からバンチャーまでの区間では、 $\beta \approx 0.65$ ($E = 160\text{keV}$) 程度 (KEK-PF linac の場合) であり空間電荷による力が大きいため、ふつう、ソレノイドによる収束系がもちいられる。この収束系では、ビームはソレノイド端部に存在する B_r 成分によって、 ϕ 方向にまげられ速度成分 v_ϕ を獲得する。ソレノイド内部ではこの v_ϕ と B_z によって r 方向の収束力を得る (図 3.1)。入射ビームがソレノイド入射端で平行ビーム (即ちウエイスト) を成している場合、空間電荷による発散力を打消しソレノイド内部で一定の半径を保つようにすることができる。このような収束をブリリアン・フロー (Brillouin flow) による収束といい、ソレノイド磁場は

$$B = \sqrt{\frac{2m \epsilon_0}{\pi e \mu_0}} \frac{1}{b} \sqrt{\frac{I}{\beta \gamma}} = 3.69 \times 10^{-5} \frac{1}{b} \sqrt{\frac{I}{\beta \gamma}} \quad [\text{T}] \quad (96)$$

b : ビーム径 (m) I : ビーム電流 (A)

であたえられる [2]。実際のビームがこの条件からはずれた場合のビームの運動については文献 [3] に詳しい。ソレノイド磁場で収束を受けつつ加速される場合 (バンチャーでは実際こうなっている) の運動方程式は文献 [1] で論ぜられている。例として図 3.2 に KEK 陽電子生成用 200MeV 電子ライナックのソレノイドの配置を示す。

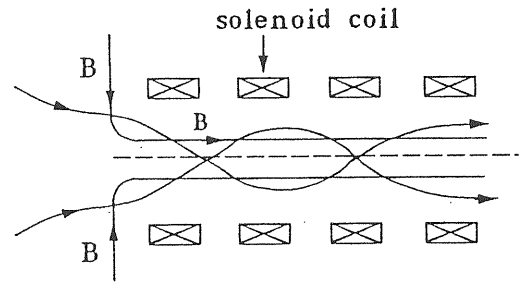


図 3.1 ブリリアン・フローによる収束。ソレノイドに平行に入射したビームは端部の半径方向の磁場によって ϕ 方向に蹴られる。それ以降はソレノイド磁場に巻きつく様に運動しビーム径は一定に保たれる。

c. 加速管内電磁場による横方向の力

低 β 領域では加速管内電磁場による横方向の力も重要な効果をもたらす。 TM_{01} 基本波モードの電磁場は

$$\begin{aligned} E_z &= A J_0(kr) \exp i(\omega t - \beta_0 z) \\ E_r &= iA \frac{\beta_0}{k} J_1(kr) \exp i(\omega t - \beta_0 z) \\ B_\theta &= iA \frac{\omega}{kc^2} J_1(kr) \exp i(\omega t - \beta_0 z) \end{aligned} \quad (97)$$

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_0^2$$

$$\beta_0 = 2\pi/\lambda_g \quad \lambda_g: \text{管内波長}$$

と表される。実際の電磁場の値はこれらの式の実数部をとる。 E_r と B_θ には i がかかっているので E_z に比べて位相が 90° ずれている：

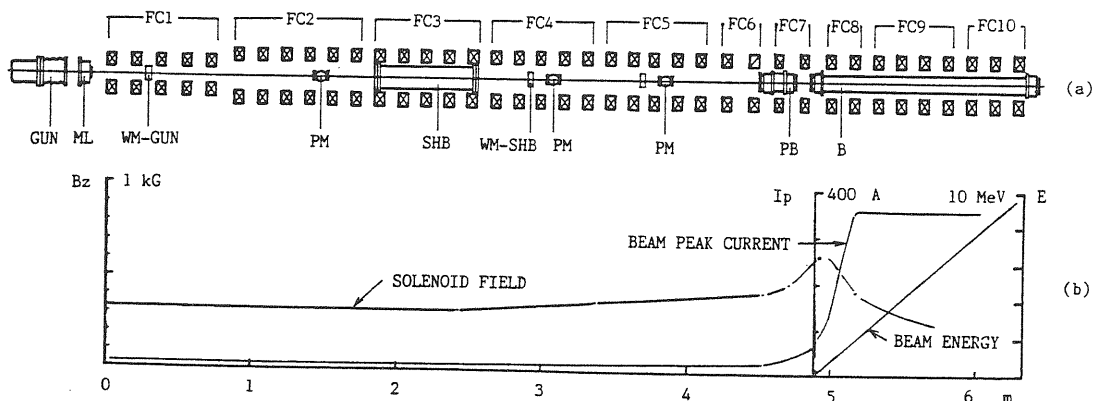


図 3.2 (a) KEK 陽電子生成用電子ライナックの低 β 領域のソレノイドの配置。SHB: サブハーモニックバンチャー PB: プリバンチャー B: バンチャー (b) ソレノイド磁場, ピーク電流, エネルギーの様子 (文献 [9] より転載。)

$$\begin{aligned}
E_z &= AJ_0(kr) \cos(\omega t - \beta_0 z) \\
E_r &= -A \frac{\beta_0}{k} J_1(kr) \sin(\omega t - \beta_0 z) \\
B_\theta &= -A \frac{\omega}{kc^2} J_1(kr) \sin(\omega t - \beta_0 z) \quad (98)
\end{aligned}$$

したがってビームにはたらく力は

$$\begin{aligned}
F_r &= q(E_r - \beta_e c B_\theta) \\
&= -qA \frac{J_1(kr)}{k} \frac{\omega}{c} \frac{1 - \beta_e \beta_w}{\beta_w} \sin(\omega t - \beta_0 z) \\
F_z &= qAJ_0(kr) \cos(\omega t - \beta_0 z) \quad (99)
\end{aligned}$$

となる。ここで β_e, β_w はそれぞれビームの速度および電磁場の位相速度を光速で割った値である。近軸近似、即ち $kr \ll 1$ では $J_0(kr) \simeq 1, J_1(kr) \simeq kr/2$ となり

$$\begin{aligned}
F_r &= -\frac{qA\omega}{2c} \frac{1 - \beta_e \beta_w}{\beta_w} \sin(\omega t - \beta_0 z) \\
F_z &= qA \cos(\omega t - \beta_0 z) \quad (100)
\end{aligned}$$

とかかれる。これから2つの事がわかる。第1に $\beta_e = \beta_w \simeq 1$ となるレギュラーセクションでは $F_r \propto 1/\gamma_e^2$ 、即ち横方向の力はほとんど働かないといってよい。第2は加速電場が最大となる位相を境にして横方向の力の符号が変わることである(図3.3)。即ち、バンチ内の粒子はその位相に応じてある粒子は発散力を受け、別の粒子は収束力を受けることになる。これはエミッタンスの増大を意味する。このような横方向と縦方向の運動の結合はバンチ長が長くかつエネルギーが低いバンチャー部で著しい。このためプリバンチャーでできるだけ位相幅をせまくし、かつ磁場レンズ、ソレノイドを用いた収束系でビームをしぼる事がおこなわれている。(バンチャーの入口でソレノイド磁場が大きくなっているのはこのためである。) 磁場レンズについては文献[1]により解説がある。

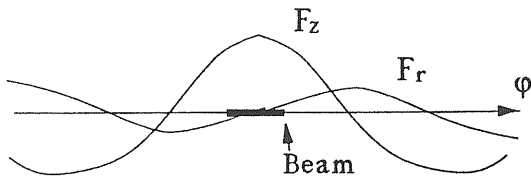


図3.3 加速管内電磁場による半径方向の力は最大加速の位相を境にしてその符号が変わる。

d. 位相安定性

話を完結させるため文献[4]にもとずいて縦方向の運動について簡単に議論しておく。加速管内 rf 電場の位相の原点を適当にえらんでやると加速電場は次のようにかける。

$$\begin{aligned}
E_z &= -A \sin \theta \\
\theta &= \beta_0 z - \omega t \quad (101)
\end{aligned}$$

これから位相とエネルギーは次の方程式に従う。

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dz} &= -a \sin \theta \\
\frac{d\theta}{dz} &= \frac{\omega}{c} \left(\frac{1}{\beta_w} - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta_w} - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \quad (102) \\
a &= \frac{eA}{m_0 c^2}
\end{aligned}$$

これは $\beta_w = \text{const.}, a = \text{const.}$ の場合には積分することができて、

$$\frac{\omega}{ac} \left(\frac{\gamma}{\beta_w} - \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) + D = \cos \theta \quad (103)$$

となる。ただし D は積分定数。これは $\gamma^2 \equiv p^2 + 1$ ($p = \beta\gamma$) とおいて

$$\frac{\omega}{ac} \left(\frac{\sqrt{p^2 + 1}}{\beta_w} - p \right) + D = \cos \theta \quad (104)$$

ともかける。いろいろな初期値 D に対して軌道 (p, θ) をプロットすると図3.4、3.5のようになる。図3.4は $\beta_w < 1$ に、図3.5は $\beta_w = 1$ に対応している。これらの図から次の事がわかる。いずれの場合にも位相がある範囲にとどまる解(位相安定解)と位相がどこまでもドリフトしていく解(不安定解)とがある。図3.4の場合不安定解はビームの速度が遅すぎて(あるいは速すぎて)加速電場の進行波に乗りきれない事に対応している。(へたなサーファーを想起する。) 図3.5の場合進行波の速度は光速なのでエネルギーの小さい粒子は加速位相からどんどんスリップしていく。エネルギーがある値より大きい粒子はかならず加速位相に乗ることができてエネルギーは無限大に漸近していく。これがグラフが上に開いている理由である。

$\beta_w < 1$ の場合、位相が最大 (θ_m) になるのは $\beta = \beta_w$ のときである。したがって D は θ_m をつかって

$$D = \cos \theta_m - \frac{\omega}{ac} \frac{\sqrt{1 - \beta_w^2}}{\beta_w} \quad (105)$$

と表される。これから

$$\cos \theta - \cos \theta_m = \frac{\omega}{ac} \frac{1}{\beta_w} \left[\sqrt{p^2 + 1} - \sqrt{1 - \beta_w^2} - \beta_w p \right] \quad (106)$$

図 3.4 において運動量の拡がり Δp_i のわりに大きな位相の拡がり $\Delta \theta_i$ をもって入ったビームは (p, θ) の位相空間上で $\pi/2$ だけ回転したとすると以前に比してより大きな運動量の拡がり Δp_o とより小さな位相の拡がり $\Delta \theta_o$ をもつことになる。ビームの位相幅が圧縮されたことになる。これがバンチャーの動作原理である。どれだけ圧縮されるかは図 3.4 に描かれた閉軌道（これをバケットとよぶ）の縦横比できまる。この比を p_B/θ_B とかくと

$$\frac{\Delta \theta_o}{\Delta p_o} = \left(\frac{\theta_B}{p_B} \right)^2 \frac{\Delta p_i}{\Delta \theta_i} \quad (107)$$

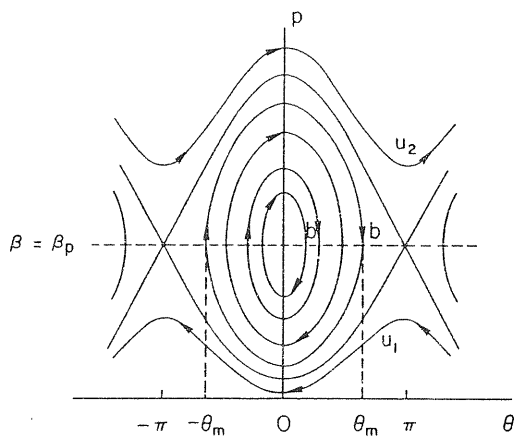


図 3.4 位相速度が光速より遅い場合の粒子の位相振動。(文献 [4] より転載。)

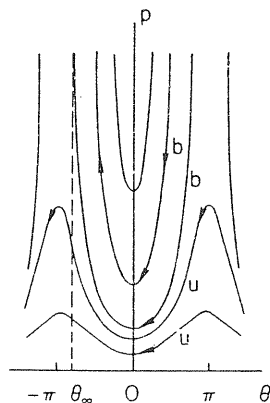


図 3.5 位相速度が光速に等しいときの位相運動。漸近位相があることがわかる。(文献 [4] より転載。)

バケットの運動量幅を大きくすれば（即ちバンチャーの加速電圧を上げれば）大きな位相圧縮比が得られる。

$\beta_w = 1$ の場合 (106) 式は

$$\cos \theta - \cos \theta_\infty = \frac{\omega}{ac} \left(\sqrt{p^2 + 1} - p \right) \quad (108)$$

となる。ここで θ_m を θ_∞ とかきなおした。 $\theta = 0$ で $p = p_0$ の粒子が位相安定（漸近位相をもつ）であるためには $1 - \cos \theta_\infty = \omega/(ac) \left(\sqrt{p_0^2 + 1} - p_0 \right) > 2$ 、即ち

$$\frac{ac}{\omega} \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{p_0^2 + 1} - p_0 \right) \quad (109)$$

が必要である。この式の等号をあたえる a に対して p_0 より小さいエネルギーでは位相安定性はない。 $\theta_\infty = -\pi/2$ のとき、即ち、漸近位相が最大加速の位相になるためには

$$\frac{ac}{\omega} = \sqrt{p_0^2 + 1} - p_0 \quad (110)$$

であればよい。このとき、位相幅 $\pm \Delta \theta_0$ をもった入射ビームの漸近位相での位相幅 $\pm \Delta \theta_\infty$ は $\cos(\pi/2 \pm \Delta \theta_{infty}) = \cos(\pm \Delta \theta_0) - 1$ より、

$$\Delta \theta_\infty = \frac{1}{2} (\Delta \theta_0)^2 \quad (111)$$

となる。この位相の拡がりにはエネルギーの拡がりになる：

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{1}{2} (\Delta \theta_\infty)^2 = \frac{1}{8} (\Delta \theta_0)^4 \quad (112)$$

例えば $\Delta \theta_0 = 15^\circ$ とすると $\Delta \theta_\infty = 2.0^\circ$ 、 $\Delta \gamma/\gamma = 0.06\%$ となる。

3.2 高ベータ領域のビーム輸送

3.1 節に述べたように $\beta = 1$ の領域の特徴は (1) 縦方向と横方向の運動には coupling はない、(2) 縦方向の運動は凍っている（位相が漸近位相に固定されている）、(3) rf による横方向の力はない、ということにある。従って横方向の収束だけをかんがえればよい。収束系にはふつう 4 極磁石がもちいられる。

輸送系の設計は前段システムからくるビームの性質に依存する。即ち (1) ビームエミッタンス ϵ 、(2) エネルギー幅 $\Delta p/p$ 、(3) 電荷量、(4) バンチ長等である。エネルギー幅は、ライナック全長を通じて一定なものとは変化するものとのわけられる。前者は例えば位相幅（バンチ長）に起因するエネルギー幅であり、

後者はライナック入口でもっていたエネルギー幅である。一定のエネルギー幅をもたらすものとして他に多バンチ運転で電荷量が多い場合があげられる。この場合にはビーム負荷（先頭のバンチが rf のエネルギーを吸収し、後続のバンチはそのため相対的に加速電場が弱まる効果）のためにエネルギー幅が大きくなる。KEK 陽電子生成用電子ライナックの例ではビーム電流 10A のとき 6 バンチの先頭と最後尾とでは約 10% ビームエネルギーが異なっている。このような大きなエネルギー幅をもったビームをライナックの終端まで輸送するには収束系の精度の良いアライメントが必要となる。エミッタンスが大きい場合にはビーム径がライナックのアーチャーにおさまるような収束系が必要である。また上に述べたような、電流を損失することなく終端まで輸送することを第一義とする場合以外に、リニアコライダーの場合の如くエミッタンスの増加を抑えることが重要な場合もある。

本節ではリニアコライダーのケースは考えない。したがって与えられたライナックのアーチャーをビームを損失することなく通すような収束系の設計を念頭において議論をすすめる。

a. アドミッタンス

規格化エミッタンスは保存する。エミッタンスが大きいということは横方向の拡がりや角度方向の拡がりやを同時に小さくはできないということを意味する。ライナックのアーチャーと収束系が与えられたとき、輸送できるビームのエミッタンスには上限がある。一般に輸送できる最大のエミッタンスをその輸送系のアドミッタンスと呼ぶ。定義からアドミッタンスがビームのエミッタンスより小さいという事が損失なくビームを輸送するための必要条件である。

加速管の内側半径（disk 径）を a とする。（これは通常ビームが通過可能な最大半径—アーチャー—となる。）ビームはライナック入口で $\pm a$ 内になければならない。位相空間でかんがえるとこれは $x = \pm a$ の 2 直線にはさまれた領域になる。ライナック下流のある地点（ s ）においてもビームは $x(s) \leq \pm a$ を満たさなければならない。 $x(s) = \pm a$ という直線は $s = 0$ に引戻してみると、次式で与えられる傾いた 2 直線になる。（図 3.6。）

$$m_{11}x + m_{12}x' = \pm a \quad (113)$$

但し m_{ij} は $s = 0$ から $s = s$ への転送行列要素。この 4 本の直線で囲まれた領域にあるビームは少なくとも $s = 0$ と $s = s$ では $|x| < a$ を満たす。任意の s で $|x| < a$ を満たす位相領域の面積がアドミッタンスである。アドミッタンスは通常楕円の面積で定義する。これをアドミッタンス楕円と称する。アドミッタンスで注意すべきことは、エミッタンスがアドミッタンスより小さくても、エミッタンス楕円がアドミッタンス楕円に含まれない場合は下流のある地点でアーチャーに接触してしまうことである。エミッタンス楕円をアドミッタンス楕円に相似になるように収束系を調節することをエミッタンスマッチングといい前段のシステムから入射するとき必ず必要な手続きである。

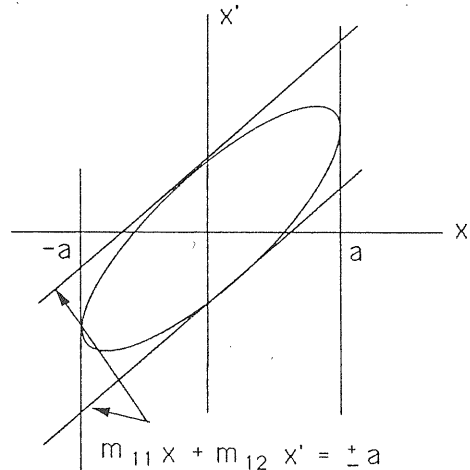


図 3.6 アドミッタンス楕円の概念の説明図。

b. 収束系

第 2 節で述べたように 4 極磁石は x 方向（ y 方向）に収束作用をもてば必ず y 方向（ x 方向）に発散作用をもつ。 x 方向に収束作用をもつ 4 極磁石（収束 4 極磁石—以下では単に QF とよぶこともある）と x 方向に発散作用をもつ 4 極磁石（非収束 4 極磁石—QD）を交互に並べることによって両方向に収束作用をもたせることができる。これを強収束の原理という。4 極磁石を置くスペースは実際上加速管と加速管の狭いスペースに限られている。（まれに加速管の上から 4 極磁石を重畳することもある。）良く用いられる 4 極磁石の配置は図 3.7 に示す 3 種類である。

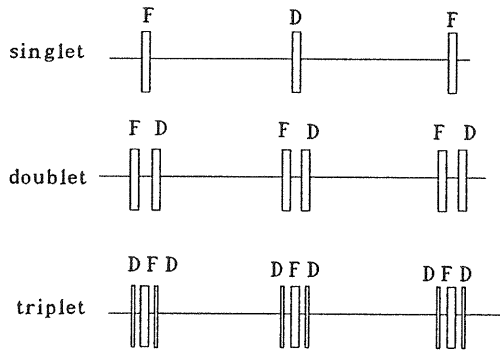


図 3.7 3 種類の収束系

singlet は FODO セルとも呼ばれ、通常の輸送ラインの他、円形加速器の基本構造としてよく用いられる。doublet は収束 4 極磁石と非収束 4 極磁石が近接して置かれ、近似的に両方向に収束作用をもつ 1 枚のレンズとしてふるまう。triplet は doublet をさらに対称性を良くしたものと考えられる。例として図 3.8 に K E K 陽電子生成用 200 MeV 電子ライナックの triplet 収束系を示す。

周期的光学系

4 極磁石はいずれの場合にも周期的に配列されており、twiss パラメータも周期的になるようにするのがふつうである。例えば singlet の場合には QF の中心から次の QF の中心までが一周期であり、これを単位セルとよぶ。twiss パラメータの初期値は周期条件のため一意的に決まる。単位セルの端から端までの転送行列を M とすると n 個の単位セルをつないだ光学系の転送行列は M^n となる。任意の n に対して運動が安定であるためには、

$$\text{Trace} M \equiv m_{11} + m_{22} \leq 2 \quad (114)$$

が必要十分条件である。(50) 式から、周期条件 ($\beta = \beta_0, \alpha = \alpha_0$) をもちいれば単位セルの転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (115)$$

とかける。但し μ はセル当たりの位相の進みである。これから $\text{Trace} M = 2 \cos \mu$ 、即ち (114) の条件は μ が実数であることを意味する。単位セル内でのベータ関数の最大値を β_{max} とするとビームサイズの最大値は $\sqrt{\beta_{max} \epsilon}$ で与えられる。これがちょうどアパーチャに等しくなるようなビームのエミッタンスが単位セルを通過可能な最大エミッタンスである。どの単位セルも同等であるから、これがアドミッタンスに他ならない。即ち、アドミッタンス A は

$$A = \frac{a^2}{\beta_{max}} \quad (116)$$

で与えられる。ここで a はライナックのアパーチャである。次に上記の 3 種類の 4 極磁石の配置について具体的に β_{max}, A を計算してみる。簡単のために 4 極磁石は薄肉レンズで近似する。

singlet

図 3.9a に示す単位セルの x 方向の転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k/2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 - (k\ell)^2/2 & 2\ell(1 + k\ell/2) \\ -(1 - k\ell/2)k^2\ell/2 & 1 - (k\ell)^2/2 \end{pmatrix} \quad (117)$$

となる。 $\text{Trace} M = 2 \cos \mu$ より

$$\cos \mu = 1 - \frac{(k\ell)^2}{2} \quad \text{または} \quad \sin \frac{\mu}{2} = \frac{k\ell}{2} \quad (118)$$

これから安定条件は $k\ell < 2$ 。焦点距離 $f (= 1/k)$ でいえば、 $f > \ell/2$ となる。これは焦点距離が短すぎると発散してしまうことを示している。(115) 式より

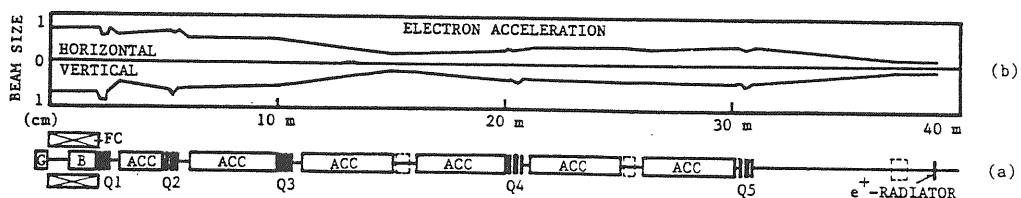


図 3.8 (a) K E K 陽電子生成用電子ライナックの高 β 領域の triplet 収束系。Q: triplet 4 極磁石 ACC: 加速管 (b) ビームサイズの計算値 (文献 [9] より転載。)

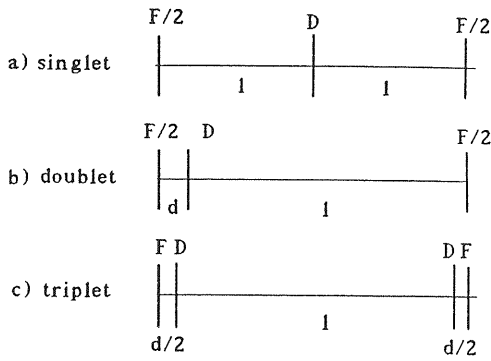


図 3.9 3 種類の収束系の単位セル。F は水平方向収束 4 極磁石，D は水平方向発散 4 極磁石をあらわす。手計算では 4 極磁石は薄肉近似で扱う。

$$\alpha_F = 0 \quad (119)$$

$$\beta_F = \frac{2\ell(1 + \sin(\mu/2))}{\sin \mu} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{1 + k\ell/2}{1 - k\ell/2}} \quad (120)$$

添字の F は QF の場所での値であることを示す。他の場所の β は (54) 式を使って計算することができ、結局 $\beta_{max} = \beta_F$ であることがわかる。対称性から、y 方向では QD で最大になり $\beta_{max} = \beta_D^y = \beta_F^y$ である。ベータ関数の例を図 3.10a に示す。実線は x 方向、破線は y 方向のベータ関数を表す。位相の進みは約 76.3° にとった。計算では薄肉近似をもちいていない。アドミッタンスは

$$A = \frac{a^2}{\beta_F} \quad (121)$$

となる。

さて上で求めた β は加速のない場合あるいは σ -座標系 ($(x, dx/d\sigma)$ 空間) でのもの、 $\beta^{(\sigma)}$ 、に相当する。これを通常の s -座標系にもどして考えてみるのは興味深い。上つきの添字 (σ)、および (s) はそれぞれ σ -座標系および s -座標系での量であることをしめす。式をみやすくするために $\hat{p} \equiv p/(m_0c)$ という記号を導入すると、

$$\beta^{(s)} = \hat{p}\beta^{(\sigma)} \quad (122)$$

また、長さ ℓ の区間がすべて加速管で埋っていたとすれば、その区間における運動量の増加を Δp として

$$\ell^{(\sigma)} = \frac{1}{\gamma'} \ln\left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right) \simeq \frac{1}{\gamma'} \frac{\Delta p}{p} = \ell^{(s)}/\hat{p} \quad (123)$$

となる。ここで γ' は加速勾配である。式 (87) から

$$k^{(\sigma)} = \hat{p}k^{(s)} \quad (124)$$

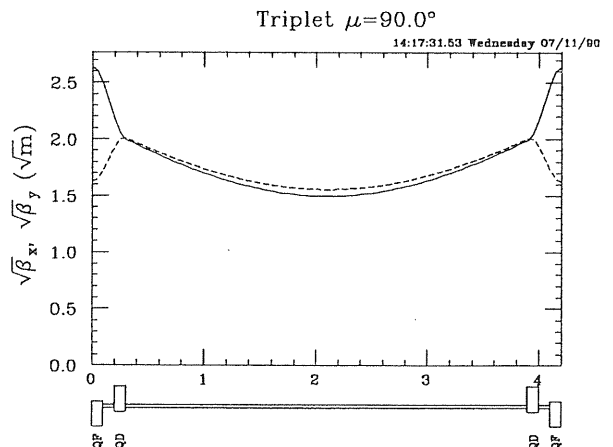
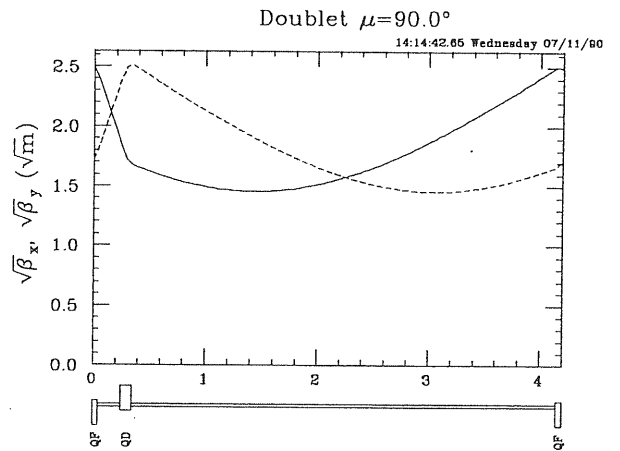
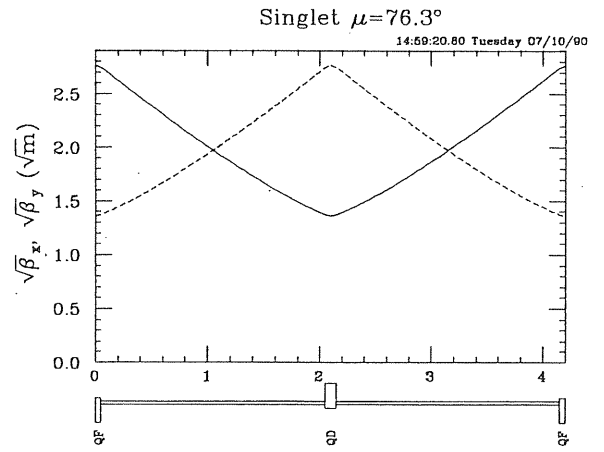


図 3.10 3 種類の単位セルに対するベータ関数の例。a) singlet 位相の進みはアドミッタンスを最大にする 76.3° に選んだ。b) doublet c) triplet いずれも実線は x，破線は y 方向のベータ関数。

(123) 式と (124) 式とから $k^{(\sigma)}\ell^{(\sigma)} = k^{(s)}\ell^{(s)}$ となり (118) 式から位相の進みは両座標系で変わらない (当然)。また (123) 式および (124) 式から位相の進み μ と加速勾配 γ が与えられているとき、

$$\ell^{(s)} \propto p \quad (125)$$

$$k^{(s)} \propto 1/p. \quad (126)$$

したがって 4 極磁石の間隔はエネルギーに比例して長くし、その強さは小さくすればよい。ベータ関数はエネルギーに比例して大きくなっていく。両座標系でのベータ関数のようすを図 3.11a,b に示す。図は 4 セルからなる singlet についてベータ関数を示している。 $\mu = 76.3^\circ$ 、最初のセルの長さは約 2.5m、エネルギーの初期値 $E_0 = 1.54\text{GeV}$ 、加速勾配は 100MeV/m を仮定している。

(120) 式から与えられた ℓ に対して最小の β_{max} 即ち最大のアドミッタンスを与える位相の進み μ_{opt} があり、

$$\mu_{opt} = \arccos(\sqrt{5} - 1) = 76.35^\circ \quad (127)$$

で与えられる。

以上から収束系の設計の手続きは次のようになる。

(1) 与えられたエミッタンス ϵ とアパーチャ a からアドミッタンス A を決める (式 (121))。 (2) セル当たりの位相の進み μ を適当に決める (ふつう μ_{opt} 近辺にとる)。 (3) (120) 式から 4 極磁石間の距離 ℓ が決まる。また式 (118) から 4 極磁石の強さ k がきまる。 (4) 与えられた運動量 p および加速勾配 γ をもちいて実空間 (s -座標系) での $\ell^{(s)}$, $k^{(s)}$ を求める (式 (123),(124))。doublet、および triplet の場合でも相当する式は異なるが同じ手続きになる。

設計エネルギーよりも小さいエネルギーをもったビームに対しては (4 極磁石の強さ k は設計エネルギーに対して設定されているので) 実効的に k が大きくなる。 $k\ell > 2$ になるとビームは不安定になりライナックの途中で失われてしまう。このエネルギーは遮断エネルギー (low-energy cutoff) と呼ばれている。これは次式で与えられる。

$$\frac{p_{cutoff}}{p_{design}} = \frac{k\ell}{2} = \sin \frac{\mu}{2} \quad (128)$$

これは最適位相 μ_{opt} に対しては $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618$ となる。 $\mu = \mu_{opt}$ であれば設計エネルギーと異なるビームに対してはベータ関数が大きくなるので実際に

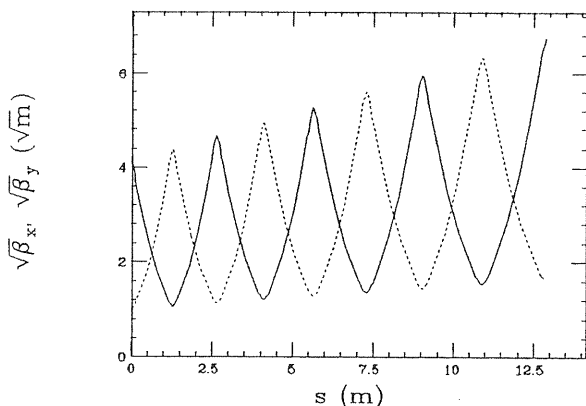
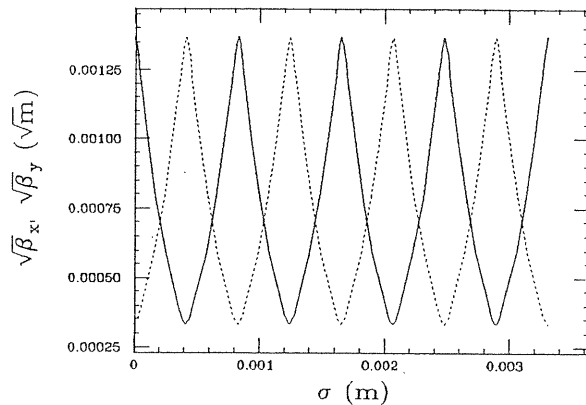


図 3.11 singlet の場合のベータ関数の σ -座標系および s -座標系での比較。計算はまず σ -座標系で計算し結果を s -座標系に変換した。 $\mu = 76.3^\circ$ 、最初のセルの長さは約 2.5m、エネルギーの初期値は 1.54GeV 、加速勾配は 100MV/m を仮定し加速管は 4 極磁石の間に一様に詰っているとした。a) は σ -座標系、b) は s -座標系でのベータ関数を示す。実線は x 、破線は y 方向のベータ関数。 s -座標系では加速部ではベータ関数が定義できないので図では内挿している。いずれも最初の 4 セル分のみ示している。 σ -座標系では周期的なベータ関数が s -座標系ではエネルギーとともに増大すること、セル長もエネルギーとともに伸びていくことがわかる。

ビームが通過可能か否かはエミッタンスに対してアドミッタンスがどれだけ余裕をもっているかに依る。

doublet

単位セルは図 3.9b に示されている。転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1 - k(\ell - d + d\ell k)/2 & \ell + d + d\ell k \\ -k^2(\ell + d + d\ell k)/4 & 1 - k(\ell - d + d\ell k)/2 \end{pmatrix} \quad (129)$$

以下結果だけ記す。

$$\cos \mu = 1 - \frac{1}{2}dk^2 \quad \text{または} \quad \sin \frac{\mu}{2} = \frac{k}{2}\sqrt{\ell d} \quad (130)$$

$$\alpha_F = \frac{k(\ell - d)}{2\sin \mu} \quad (131)$$

$$\beta_{max} = \beta_F = \frac{\ell + d + dk}{\sin \mu} = \frac{1 + d/\ell + kd}{k\sqrt{d/\ell}\sqrt{1 - k^2\ell d/4}} \quad (132)$$

アドミッタンス：

$$A = a^2 k \frac{\sqrt{d/\ell}\sqrt{1 - k^2\ell d/4}}{1 + d/\ell + kd} \quad (133)$$

遮断エネルギー：

$$\frac{p_{cutoff}}{p_{design}} = \frac{k}{2}\sqrt{\ell d} \quad (134)$$

d が ℓ に比べて十分小さい場合 doublet を1つの薄肉レンズのようにみなせる。即ち、 $d \ll \ell$ かつ $kd \ll 1$ の場合には (132) 式は

$$\beta_{max} = \frac{\ell}{k\sqrt{\ell d}\sqrt{1 - k^2\ell d/4}} \quad (135)$$

となる。またこのときには最適位相は

$$\mu_{opt} = \frac{\pi}{2}, \quad (136)$$

このときのアドミッタンスおよび遮断エネルギーは

$$A_{opt} = a^2/\ell, \quad (137)$$

$$\frac{p_{cutoff}}{p_{design}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (138)$$

で与えられる。

図 3.10b にベータ関数の例を示す。

triplet

単位セルは図 3.9c に示されている。x 方向の転送行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1 - k^2\ell d(1 + d/\ell + kd/2)/2 & \\ dk^2(-4 + 2dk + dk^2\ell)/4 & \\ \ell(1 + kd/2)(1 + d/\ell + kd/2) & \\ 1 - k^2\ell d(1 + d/\ell + kd/2)/2 & \end{pmatrix} \quad (139)$$

y 方向については $k \rightarrow -k$ とおいたものに等しい。従って

$$\begin{aligned} \cos \mu^{x,y} &= 1 - \frac{1}{2}k^2\ell d \left(1 + \frac{d}{\ell} \pm \frac{1}{2}kd\right) \\ \sin \frac{\mu^{x,y}}{2} &= \frac{1}{2}k\sqrt{\ell d} \sqrt{1 + \frac{d}{\ell} \pm \frac{1}{2}kd} \end{aligned} \quad (140)$$

$$\alpha_F^x = \alpha_D^y = 0 \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \beta_{max}^{x,y} &= \frac{\ell(1 \pm kd/2)(1; d/\ell \pm kd/2)}{\sin \mu^{x,y}} \\ &= \frac{\ell \left(1 \pm \frac{kd}{2}\right) \left(1 + \frac{d}{\ell} \pm \frac{kd}{2}\right)}{k\sqrt{\frac{d}{\ell}}\sqrt{\left(1 + \frac{d}{\ell} \pm \frac{kd}{2}\right) \left\{1 - \frac{1}{4}k^2\ell d \left(1 + \frac{d}{\ell} \pm \frac{kd}{2}\right)\right\}}} \end{aligned} \quad (142)$$

$$A^{x,y} = \frac{a^2}{\beta_{max}^{x,y}} \quad (143)$$

d が ℓ に比べて十分小さい場合 doublet を1つの薄肉レンズのようにみなせる。即ち、 $d \ll \ell$ かつ $kd \ll 1$ の場合には

$$\beta_{max} = \frac{\ell}{k\sqrt{\ell d}\sqrt{1 - k^2\ell d/4}} \quad (144)$$

となる。これは doublet の場合と同じである。したがって最適位相、そのときのアドミッタンス、遮断エネルギーも doublet と同じになる。(式(136)-(138))。図 3.10c にベータ関数の例を示す。

表 1 に3種類の比較をしめす。この表から次のことがわかる。(1)doublet と triplet はおなじ。(2)singlet は doublet,triplet に比べてアドミッタンスは約 1/3、あるいは同じアドミッタンスにするためには $\ell \rightarrow 1/3$ にしなければならない(4極磁石の数が3倍必要)。(3)同じアドミッタンスで比べると4極磁石の強さは doublet,triplet の方が $2.9\sqrt{\ell/d}$ 倍だけ強くなる(triplet は doublet の2倍の強さが必要)。これは(2)の4極磁石の数が少なくてすむという事と相殺する傾向である。(4)遮断エネルギーは singlet の方が低い。

ビームによって誘起される加速管の高次モードが横方向のビーム不安定性を引き起こすことは BBU (beam break-up) という名でよく知られている(文献[5])。これは簡単にいえば次のような事である。横方向にずれた先頭のバンチが誘起する wake field によって後のバンチが蹴られ横方向の偏位をうける。この偏位はまた wake field を誘起しさらに後続のバンチを

Table 1: singlet,doublet,triplet の比較

	μ_{opt}	A_{opt}	p_{cutoff}/p_{design}	k
singlet	76.3°	$0.3a^2/\ell$	0.62	$1.24/\ell$
doublet	90°	a^2/ℓ	0.71	$1.42/\sqrt{\ell d}$
triplet	90°	a^2/ℓ	0.71	$1.42/\sqrt{\ell d}$

蹴ることになり後のバンチほど強いキックを受けつけ、終いにはアパーチャを越してビーム損失となる。この wake field によって蹴られる大きさはその場所のベータ関数に比例するため一般に BBU は加速管の中での β の値が大きいほど大きい。

実際の収束系の設計ではエミッタンスを収容するに十分なアドミッタンスを確保するというだけでなくこの BBU によって決る電流しきい値をできるだけ上げるためベータ関数ができるだけ小さくするような設計が行なわれる。

c. 収束系の誤差

前項に述べた収束系の話は誤差のない理想的な場合についてであった。現実には 4 極磁石の据え付け誤差等のためにビームは加速器の中心軸からそれてベータatron 振動をはじめ。この振幅がアパーチャをこえればビーム損失になる。アパーチャをこえないときでもビームは有限のエネルギー幅をもっているの、収束系のクロマティシティのためにエネルギーの異なる粒子はベータatron 振動の位相の進みも異なる。これは有効エミッタンスの増加となる。このことは位相空間でみるとはっきりする (図 3.12)。ただし規格化された座標 (u, v) での位相空間を考える—この位相空間ではベータatron 振動は円運動になることはすでに第 2 節でみた。ビームはエネルギーの大きい集団と小さい集団の 2 グループから成っているとす。 $s = s_0$ では両者は重なっているが両者の位相進行が異なっているために $s = s$ では位相空間の異なった位置を占めるようになる。したがって充分ライナックが長ければビームは位相空間上でリング状に分布する。いったんこのようになったビームは元に復することは通常できないのでこれは有効エミッタンスが増大したことを意味する。運動量幅 $\Delta p/p$ に対して位相のずれは

$$\Delta\psi = 2\pi\xi \frac{\Delta p}{p} = \frac{2}{\psi} \frac{\Delta p}{p} \quad (145)$$

ここで (71) 式を使った。ベータatron 振動の大きさを \hat{r} とするとエミッタンスは

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \cong \frac{\Delta\psi}{2\pi\epsilon_0} \sqrt{\hat{r}^2 + \epsilon_0^2} = \sqrt{1 + \frac{r_x^2}{\sigma_x^2} \frac{\Delta\psi}{2\pi}} \quad (146)$$

倍だけ増加する。ここで σ_x はビームサイズ、 r_x は重心

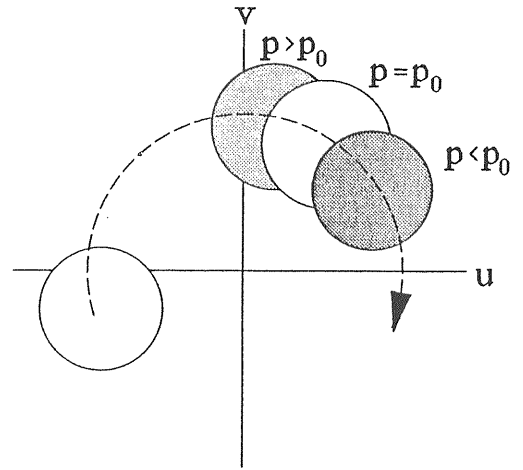


図 3.12 規格化された位相平面での運動量の異なるビームの運動。クロマティシティのためにしだいに位相がばらばらになり有効エミッタンスが増大する

軌道の大きさ。これから重心運動の許容値がでる。例えば $\epsilon/\epsilon_0 \leq \sqrt{2}$ であるためには

$$\begin{cases} r_x < \sigma_x & \text{if } \Delta\psi > 2\pi \\ r_x < \sigma_x \sqrt{2(2\pi/\Delta\psi)^2 - 1} & \text{if } \Delta\psi < 2\pi \end{cases} \quad (147)$$

$\Delta p/p$ の大きい場合には r_x の許容値は小さい。またこの場合にはステアリング磁石による軌道補正にたよるのはかんがえものである。なぜなら、一般にビームサイズは

$$\sigma^2 = \beta\epsilon + (\eta\Delta p/p)^2 \quad (148)$$

で与えられるが、ステアリング自身ディスパージョンを発生するので第 2 項により再びビームサイズが増大する可能性がある。 $\Delta p/p$ が小さい場合でもライナックが非常に長く $\Delta\psi > 2\pi$ のときには再び r_x の許容値は厳しくなる。

4 極磁石の据え付け誤差

規格化されたビーム重心の変位を u であらわす。また、

$$\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x/\sqrt{\beta} \\ (\alpha x + \beta dx/d\sigma)/\sqrt{\beta} \end{pmatrix} \quad (149)$$

と定義する。4 極磁石の誤差によって生ずる \vec{u} の変化を $\delta\vec{u}$ とする。 j 番目のセルに含まれる 4 極磁石の誤差によって引起こされる重心の変位をそのセルの終端で測ったものを \vec{u}_j とする。 n 番目のセルの終りで観測した重心の変位 $\Delta\vec{u}_n$ とのあいだには

$$\Delta \vec{u}_n = R(\psi_n - \psi_j) \delta \vec{u}_j \quad (150)$$

という関係がある。ここで $R(\psi)$ は j 番めのセルから n 番めのセルへの転送行列で、

$$R(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (151)$$

で与えられる。 n より以前のセルについて和をとると

$$\Delta \vec{u}_n = \sum_{j=1}^n R(\psi_n - \psi_j) \delta \vec{u}_j. \quad (152)$$

これから

$$\begin{aligned} (\Delta \vec{u}_n)^2 &= \sum_{j,k=1}^n \delta \vec{u}_k^T R^T(\psi_n - \psi_k) R(\psi_n - \psi_j) \delta \vec{u}_j \\ &= \sum_{j,k=1}^n \delta \vec{u}_k^T R(\psi_k - \psi_j) \delta \vec{u}_j \end{aligned} \quad (153)$$

となる。いま異なるセルの誤差のあいだには相関がないとすると上の式は簡単になって

$$(\Delta \vec{u}_n)^2 = \sum_{j=1}^n (\delta \vec{u}_j)^2 \quad (154)$$

となる。例として singlet を考える。(図 3.13.) 誤差として 4 極磁石の横方向の据え付け誤差をとる。QF, QD の誤差をそれぞれ ϵ_{Fj} , ϵ_{Dj} とする。これによって $\delta \dot{x} = k\epsilon_{Fj}$ あるいは $\delta \dot{x} = -k\epsilon_{Dj}$ だけキックを受ける。従ってこれによる QF の直後での偏位と傾きは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -k\epsilon_{Dj} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ k\epsilon_{Fj} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} k\ell \\ k(1+k\ell) \end{pmatrix} \epsilon_{Dj} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \epsilon_{Fj}. \end{aligned} \quad (155)$$

これから、誤差についてのアンサンブル平均 (多数のライナックについての平均) を $\langle \dots \rangle$ で表すと、

$$\begin{aligned} \langle (\delta x)(\delta \dot{x}) \rangle &= k^2 \ell (1+k\ell) \langle \epsilon^2 \rangle \\ \langle (\delta x)^2 \rangle &= k^2 \ell^2 \langle \epsilon^2 \rangle \\ \langle (\delta \dot{x})^2 \rangle &= (k^2 (1+k\ell)^2 + k^2) \langle \epsilon^2 \rangle \end{aligned} \quad (156)$$

となる。ただしここで QD と QF の誤差は独立とし、かつそれらの 2 乗平均は同じと仮定した: $\langle \epsilon_{Fj} \epsilon_{Dj} \rangle = 0$, $\langle \epsilon_{Fj}^2 \rangle = \langle \epsilon_{Dj}^2 \rangle \equiv \langle \epsilon^2 \rangle$ 。QF の直後でのベータatron 振動の振幅とセルの終端でのそれは等しいはずなので、(149)、(156) 式から、

$$\langle (\Delta \vec{u}_j)^2 \rangle \simeq 4k \frac{1 + \sin(\mu/2)}{\cos(\mu/2)} \langle \epsilon^2 \rangle \quad (157)$$

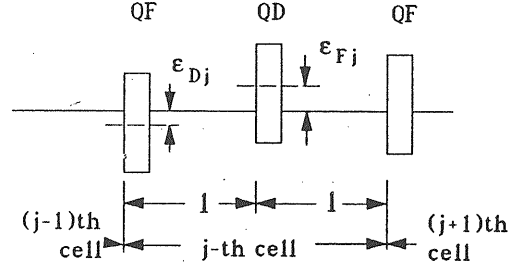


図 3.13 singlet の場合のアラインメントの誤差。いまの場合 QF の入口どうしの間を単位セルとしている。

また (154) 式から

$$\langle (\Delta \vec{u}_n)^2 \rangle \simeq 4nk \frac{1 + \sin(\mu/2)}{\cos(\mu/2)} \langle \epsilon^2 \rangle \quad (158)$$

うえの議論は σ -座標系でおこなったが s -座標系では (157) 式は

$$\langle (\Delta \vec{u}_j^{(s)})^2 \rangle \simeq \frac{m_0 c}{p_j} 4k^{(s)} \frac{1 + \sin(\mu/2)}{\cos(\mu/2)} \langle \epsilon^2 \rangle, \quad (159)$$

となる。 p_j は j 番めのセルでの運動量である。(158) 式から Δu_n は \sqrt{n} に比例する。

doublet の場合も同様にして、

$$\langle (\Delta \vec{u}_j)^2 \rangle \simeq 2k \sqrt{\frac{\ell}{d}} \frac{1 - 2\sqrt{d/\ell} \sin(\mu/2)}{\cos(\mu/2)} \langle \epsilon^2 \rangle. \quad (160)$$

QF と QD の誤差に完全に相関がある場合 (例えば共通の堅固な架台に据え付けられている場合などはこれに近い)、即ち $\delta \epsilon_{Fj} = \delta \epsilon_{Dj}$ のときには

$$\langle (\Delta \vec{u}_j)^2 \rangle \simeq k \sqrt{\frac{\ell}{d}} (kd)^2 \frac{1 + d/\ell \cos(\mu/2)}{\cos(\mu/2)} \langle \epsilon^2 \rangle. \quad (161)$$

となり $(kd) \ll 1$ のときには (160) 式に比べて非常に小さくなる。triplet の場合も同様に計算できる。

謝辞

本稿執筆にあたり KEK の榎本収志 助教授には多大なる援助とご指導をいただきました。感謝します。KEK の平田光司氏には貴重な助言を戴いた事に感謝します。また勉強の機会を与えて下さいました KEK の竹田誠之 助教授、木村嘉孝教授に感謝します。

References

- [1] 小林仁 '電子線形加速器' OHO'88 p.IV-29.
- [2] S.R.Farrell, W.J.Gallagher, and R.A.Hartline, IEEE Trans, NS-26 p.4283
- [3] 福田茂樹 'クライストロンとその周辺' OHO'88 p.V-16.
- [4] P.M.Lapostolle and A.L.Septier ed., *Linear Accelerators* North-Holland 1970, p.115.
- [5] 鈴木敏郎 'ビーム不安定性の理論' OHO'86 p.V-26
- [6] 鎌田進 '加速器の原理と設計' OHO'85
- [7] 佐藤康太郎 'ビームの輸送・入射・取り出し [I] (理論)' OHO'87 p.I-6.
- [8] 野田章 '陽子シンクロトロンのイオン光学' OHO'89 p.IV-12.
- [9] A.Enomoto, I.Sato, A.Asami, G.Horikoshi, and J.Tanaka, *Focusing System of The KEK Positron Generator*, Nucl. Instr. Meth., A281 (1989) pp.1-9.