

1. 序

ビーム貯蔵リングの中を安定に回っている荷電粒子の3次元運動は、リングの設計軌道に垂直な方向（横方向）の2次元ベータatron振動と、基準粒子からのエネルギーおよび前後方の位置のずれに関するシンクロtron振動によって記述される。通常のビーム貯蔵リングでは、これらの3次元の振動はそれぞれ独立な振動として扱うことができる。

このテキストでは、ベータatron振動を考慮する場合、ハミルトン形式に従って、まず基本となる静磁場中の荷電粒子のハミルトニアンを求め、これに適当な正準変換を施して望ましい座標系での運動方程式を導く。

偏向磁石、四極磁石および六極磁石から構成される通常のビーム貯蔵リングでは水平垂直方向のベータatron振動は独立に扱うことができるので、この1次元のベータatron振動について、Twissパラメタ、トランスファ行列などの軌道理論の基本を解説する。

しかし、トリスタンのような衝突型貯蔵リングでは、衝突点に測定器用のソレノイドが設置されカップリングが発生し、これを補正するためにスキュー四極磁石が衝突点のまわりに配置される。この場合は、水平垂直方向のベータatron振動を独立に扱うわけにはいかない。また衝突型リングでなくても、四極磁石の設置誤差、運動量依存性を補正するために設置される六極磁石中での垂直方向の軌道のずれなどのため無視できないカップリングが生じる可能性がある。そこで、このテキストではカップリングがある場合のベータatron振動も取り扱えるようにはじめからソレノイドとスキュー四極磁場を含んだハミルトニアンを求める。

一方シンクロtron振動については、シンクロtron放射によるエネルギー損失と高周波加速装置からのエネルギー利得を考え、ハミルトニアンを求めずに直接運動方程式を導いた。またシンクロtron放射による振動の減衰（放射減衰）と放射が量子化されて起こることによる振動の励起（量子励起）の釣り合いで、ビームのエネルギー分散やエミッタンスがさがる仕組みを説明する。

2. 円形加速器における荷電粒子の運動方程式

2.1 電磁場中の荷電粒子のハミルトニアン

電磁場の中で相対論的な運動をしている荷電粒子のラグランジアンは、粒子の電荷を e 、静止質量を m とすると、

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} - e\phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (2-1-1)$$

と表される。ここで c は光速、 \mathbf{A} 、 ϕ はそれぞれ電磁場のベクトルポテンシャル及びスカラーポテンシャルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\text{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2-1-2)$$

粒子の運動はラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx_i}{dt} \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (2-1-3)$$

に従うので、これに (2-1-1) のラグランジアンを代入して計算すると、よく知られている荷電粒子の運動方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \gamma m \mathbf{v} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2-1-4)$$

ラグランジアン (2-1-1) から座標 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に共役な運動量（正準運動量） $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ を求めると、

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx_i}{dt} \right)} = \gamma m \frac{dx_i}{dt} + eA_i \quad (2-1-5)$$

となり、ベクトルポテンシャル A_i がゼロでないところでは、正準運動量は力学的運動量 $\gamma m \mathbf{v}$ とは異なっている。

ハミルトニアン H は、

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \sum_i p_i \frac{dx_i}{dt} - L$$

$$= c \sqrt{m^2 c^2 + \sum_i (p_i - eA_i)^2} + e\phi \quad (2-1-6)$$

で与えられる。このハミルトニアンから導かれるのハミルトンの正準方程式

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (2-1-7)$$

は(2-1-3)と同じ方程式を与える。以後(2-1-6)のハミルトニアンを基にして議論を進めることにする。

2.2 座標系

円形加速器内の粒子の運動を記述するには空間に固定された通常の3次元座標ではなく、図1の様に定義されたフルネ標構を用いるのが便利である。

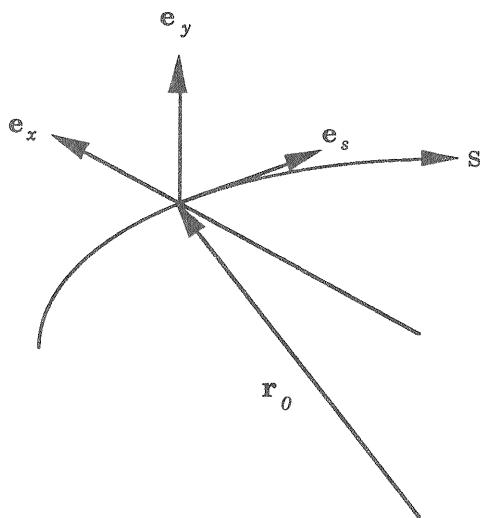


図1

加速器の設計軌道にそって測った軌道長を s , 単位接線ベクトルを \mathbf{e}_s とすると、単位主法線ベクトル \mathbf{e}_x (リングの外が正になるように通常の設定とは符号を逆にとる。), 及び単位従法線ベクトル \mathbf{e}_y は位置 s において \mathbf{e}_s に垂直な平面内にあり、

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{r}'_0$$

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{r}''_0}{\sqrt{\mathbf{r}''_0 \cdot \mathbf{r}''_0}}$$

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y \quad (2-2-1)$$

となっている。(ダッシュ'は s による微分を表す。) 粒子の位置ベクトル

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \quad (2-2-2)$$

は座標 (x, y, s) で表される。 $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ は軌道上の位置 s の関数であり、フルネセルの公式によって次のような関係になっている。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_s &= -\kappa \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}'_x &= -\tau \mathbf{e}_y + \kappa \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}'_y &= \tau \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (2-2-3)$$

ここで κ は曲率、 τ は捩率であり、ともに s の関数である。通常の加速器では設計軌道の τ は常にゼロである。ただし設計軌道とソレノイド磁場の方向が一致していないような場合、ソレノイドの中では τ はゼロとならない。

加速器の設計軌道が一水平面上に存在する場合、つまり加速器内の偏向磁石が全て水平方向の偏向磁石である場合は、 \mathbf{e}_x は常にその水平面内にとれる。しかし、垂直方向偏向磁石も存在する場合、垂直方向偏向磁石の中では単位主法線ベクトル \mathbf{e}_x は、(2-2-1)の定義に従えば、垂直面内を動くことになり直観的に解かりにくくなる。そこで $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の決め方を少し変更して、垂直方向偏向磁石の中では \mathbf{e}_y を主法線ベクトル方向にとることにする。(ただし、この場合も $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の符号は(2-2-1)を満たすようにとる。) $\tau=0$ として(2-2-3)式を書き直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_s &= -\kappa_x \mathbf{e}_x - \kappa_y \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}'_x &= \kappa_x \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}'_y &= \kappa_y \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (2-2-4)$$

正準変換によって通常の3次元座標系から図1のように定義された (x, y, s) 系に移行するのに、元の運動量と新しい座標で表された母関数

$$G(p_1, p_2, p_3, x, y, s)$$

$$= -\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}_0(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s)) \quad (2-2-5)$$

を用いると、新しい座標 (x, y, s) に対応する正準運動量は

$$\begin{aligned}
p_x &= -\frac{\partial G}{\partial x} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x \\
p_y &= -\frac{\partial G}{\partial y} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y \\
p_s &= -\frac{\partial G}{\partial s} \\
&= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}'_0 + x \mathbf{e}'_x + y \mathbf{e}'_y) \\
&= \mathbf{p} \cdot (1 + \kappa_x x + \kappa_y y) \mathbf{e}_s
\end{aligned} \tag{2-2-6}$$

となる。つまり元の正準運動量 \mathbf{P} は新しい正準運動量 (p_x, p_y, p_s) によって

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + \frac{p_s}{1 + \kappa_x x + \kappa_y y} \mathbf{e}_s \tag{2-2-7}$$

と表せる。同様にベクトルポテンシャル \mathbf{A} を $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_s$ 方向の成分に分解して

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + \frac{A_s}{1 + \kappa_x x + \kappa_y y} \mathbf{e}_s \tag{2-2-8}$$

と表すことにすれば、新しいハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
H &= c \left\{ m^2 c^2 + (p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p_s - eA_s)^2}{(1 + \kappa_x x + \kappa_y y)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} + e\phi \tag{2-2-9}
\end{aligned}$$

となる。

2.3 独立変数の変更と規格化されたハミルトニアン

今までは時間 t を独立変数として扱ってきたが、リング内の粒子の設計軌道のまわりのふるまいを調べるには s を独立変数としたほうがよい。そこで独立変数を t から s に変更することを考える。一般的に、ハミルトンの正準方程式は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^f p_i \frac{dq_i}{dt} - H \right) dt = 0 \tag{2-3-1}$$

という変分の問題と同等であるが、

$$\frac{dq_j}{dt} \neq 0 \tag{2-3-2}$$

であるような (t の単調関数である) 座標については、(2-3-1)を

$$\delta \int_{q_j(t_1)}^{q_j(t_2)} \left(\sum_{i \neq j} p_i \frac{dq_i}{dq_j} - H \frac{dt}{dq_j} - (-p_j) \right) dq_j = 0 \tag{2-3-3}$$

のように q_j を独立変数として書き直すことができる。今考えている座標系 (x, y, s, t) で s は(2-3-2)の条件を満たすので

$$\delta \int_{s_1}^{s_2} \left(p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds} - H \frac{dt}{ds} - (-p_s) \right) ds = 0 \tag{2-3-4}$$

となり、 s を独立変数とした場合のハミルトニアン H_a は

$$H_a = -p_s \tag{2-3-5}$$

ととればよいことがわかる。 H_a は(2-2-9)のハミルトニアンを

$$H(x, y, s, p_x, p_y, p_s; t) = E \tag{2-3-6}$$

とおき、これを p_s について解くことによって得られ、

$$\begin{aligned}
H_a &= -eA_s - (1 + \kappa_x x + \kappa_y y) \\
&\quad \times \left\{ \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{2-3-7}$$

となる。このハミルトニアンを代入した正準方程式

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_x}, & \frac{dp_x}{ds} &= -\frac{\partial H_a}{\partial x} \\
\frac{dy}{ds} &= \frac{\partial H_a}{\partial p_y}, & \frac{dp_y}{ds} &= -\frac{\partial H_a}{\partial y} \\
\frac{dt}{ds} &= \frac{\partial H_a}{\partial(-E)}, & \frac{d(-E)}{ds} &= -\frac{\partial H_a}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2-3-8}$$

によってリング内の荷電粒子の3次元の運動が記述される。6次元の位相空間で粒子の運動を統一して扱おうとすると、話が複雑になるので、まずリング一周にわたってエネルギーが一定であると仮定して設計軌道に垂直な方向（transverse 方向、横方向）の運動のみを考える。

エネルギーが一定の場合は、座標 x, y はそのままにして横方向の運動量のみを力学的全運動量で次のように規格化すると

$$\bar{p}_x = \frac{p_x}{p}, \quad \bar{p}_y = \frac{p_y}{p}$$

$$p \equiv \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2} \quad (2-3-9)$$

ハミルトニアンも p で割って

$$H_s = \frac{H_a}{p} \quad (2-3-10)$$

とすれば、運動方程式の形は変わらない。ただしこの変換は $p=1$ のとき以外は正準変換ではない。以下ではこの規格化された運動量とハミルトニアンを基にして議論をする。運動量を

$$\frac{p_x}{p} \rightarrow p_x, \quad \frac{p_y}{p} \rightarrow p_y \quad (2-3-11)$$

と置き換えれば、規格化されたハミルトニアンは

$$H_s = -\frac{e}{p} A_s - (1 + \kappa_x + \kappa_y)$$

$$\times \left\{ 1 - \left(p_x - \frac{e}{p} A_x \right)^2 - \left(p_y - \frac{e}{p} A_y \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-3-12)$$

と表せる。

2.4 磁場のベクトルポテンシャル

ハミルトニアン(2-3-12)に加速器内の磁石による磁場を表す具体的なベクトルポテンシャルを代入して、リング内の荷電粒子の運動を記述するハミルトニアンを書き下すことにする。磁場の種類としては、偏向、四極、スクュー四極、六極、ソレノイドのみを考える。磁場

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_s \mathbf{e}_s \quad (2-4-1)$$

は、(2-2-8)のように定義されたベクトルポテンシャルから

$$B_x = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s} \right)$$

$$B_y = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} \right)$$

$$B_s = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (2-4-2)$$

によって導かれる。ここで

$$h = 1 + \kappa_x x + \kappa_y y \quad (2-4-3)$$

とおいた。

これらの磁場が満たすマクスウエル方程式は、設計軌道の付近では電流がないので

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0 \quad (2-4-4)$$

である。第一式は磁場をベクトルポテンシャルで表せば自動的に満たされているので、第二式のみ書き下すと、

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} (h B_s)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial y} (h B_s) \quad (2-4-5)$$

となる。ソレノイドを除く磁石の磁場については磁石のエッジの効果を無視すれば、

$$\frac{\partial B_x}{\partial s} = \frac{\partial B_y}{\partial s} = 0$$

$$B_s = 0 \quad (2-4-6)$$

となるので、ベクトルポテンシャルの A_s 成分のみで書き表すことが出来る。これと逆にソレノイドは A_s 成分のみがゼロになる。以下に各種の磁場を与えるベクトルポテンシャルと磁場の表現を列挙する。(リングの設計運動量を p_0 とする。)

1) 偏向磁石

$$\begin{aligned}\frac{e}{p_0} A_s &= -\frac{1}{2}(1 + \kappa_x x + \kappa_y y)^2 \\ \frac{e}{p_0} B_x &= -\kappa_y \\ \frac{e}{p_0} B_y &= \kappa_x\end{aligned}\quad (2-4-7)$$

2) 四極磁石

$$\begin{aligned}\frac{e}{p_0} A_s &= \frac{1}{2} K (y^2 - x^2) \\ K &\equiv \frac{e}{p_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right)_{x=y=0} \\ \frac{e}{p_0} B_x &= Ky \\ \frac{e}{p_0} B_y &= Kx\end{aligned}\quad (2-4-8)$$

3) スキュー四極磁石

$$\begin{aligned}\frac{e}{p_0} A_s &= -Nxy \\ N &\equiv \frac{e}{2p_0} \left(\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial x} \right)_{x=y=0} \\ \frac{e}{p_0} B_x &= -Nx \\ \frac{e}{p_0} B_y &= Ny\end{aligned}\quad (2-4-9)$$

4) 六極磁石

$$\begin{aligned}\frac{e}{p_0} A_s &= -\frac{1}{6} \lambda (x^3 - 3xy^2) \\ \lambda &\equiv \frac{e}{p_0} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right)_{x=y=0} \\ \frac{e}{p_0} B_x &= \lambda xy \\ \frac{e}{p_0} B_y &= \frac{1}{2} \lambda (x^2 - y^2)\end{aligned}\quad (2-4-10)$$

5) ソレノイド (Ref.8 参照)

$$\begin{aligned}A_x &= -y \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+2} b_{2i}(s) (x^2 + y^2)^i \\ A_y &= x \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+2} b_{2i}(s) (x^2 + y^2)^i \\ A_s &= 0\end{aligned}\quad (2-4-11)$$

ここで $b_i(s)$ は次の関係を満たす。

$$\begin{aligned}b_{2i+1}(s) &= -\frac{1}{2i+2} b'_{2i}(s) \\ b_{2i+2}(s) &= \frac{1}{2i+2} b'_{2i+1}(s)\end{aligned}\quad (2-4-12)$$

このうち x, y について3次の項までとると

$$\begin{aligned}\frac{e}{p_0} A_x &\equiv -Ly + \frac{1}{8} L'' (x^2 + y^2) y \\ \frac{e}{p_0} A_y &\equiv Lx - \frac{1}{8} L'' (x^2 + y^2) x\end{aligned}\quad (2-4-13)$$

となる。ただし

$$L(s) \equiv \frac{e}{2p_0} b_0(s) = \frac{e}{2p_0} B_s(0, 0, s)\quad (2-4-14)$$

とおいた。

A_x, A_y についてはソレノイドからの寄与のみであるが、 A_s については1) から4) をまとめると

$$\begin{aligned}\frac{e}{p_0} A_s &= -\frac{1}{2}(1 + \kappa_x x + \kappa_y y)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} K (y^2 - x^2) - Nxy \\ &\quad - \frac{1}{6} \lambda (x^3 - 3xy^2)\end{aligned}\quad (2-4-15)$$

となる。このテキストでは、磁場は静磁場と考えているので、 $\kappa_x, \kappa_y, K, N, L, \lambda$ は s のみの関数であり、リング内の磁石の配列に対応して周長 C を周期とする周期関数となる。また磁石は全てセパレートファンクションと考え、 $\kappa_x, \kappa_y, K, N, L, \lambda$ の内の2つ以上のものが同じ場所で有限の(ゼロでない)値をもつことはない、とする。

5 ハミルトニアンの展開形

前節で求めたベクトルポテンシャルを(2-3-12)のハミルトニアン H_s に代入し、式の中のルートを展開する。まず、粒子の運動量の設計運動量 p_0 からのずれを

$$\delta \equiv \frac{p - p_0}{p}\quad (2-5-1)$$

で表すと、ハミルトニアンは

$$H_s = - (1 - \delta) \frac{e}{p_0} A_s - (1 + \kappa_x + \kappa_y) \times \left\{ 1 - \left(p_x - (1 - \delta) \frac{e}{p_0} A_x \right)^2 - \left(p_y - (1 - \delta) \frac{e}{p_0} A_y \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-5-2)$$

となる。ここで x, p_x, y, p_y, δ の3次までとると H_s は次のように近似できる。

$$H_s \equiv - (1 - \delta) \frac{e}{p_0} A_s - (1 + \kappa_x + \kappa_y) \times \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(p_x - (1 - \delta) \frac{e}{p_0} A_x \right)^2 - \frac{1}{2} \left(p_y - (1 - \delta) \frac{e}{p_0} A_y \right)^2 \right\} \equiv H_0 - \delta(\kappa_x x + \kappa_y y) + \delta H_1 + H_2 \quad (2-5-3)$$

ここで

$$H_0 \equiv \frac{1}{2} (p_x + Ly)^2 + \frac{1}{2} (p_y - Lx)^2 + \frac{1}{2} (\kappa_x^2 + K) x^2 + \frac{1}{2} (\kappa_y^2 - K) y^2 + Nxy$$

$$H_1 \equiv - \frac{1}{2} (\kappa_x^2 + K) x^2 - \frac{1}{2} (\kappa_y^2 - K) y^2 - Ly (p_x + Ly) + Lx (p_y - Lx) - Nxy$$

$$H_2 \equiv - \frac{1}{2} (\kappa_x x + \kappa_y y) (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{6} \lambda (x^3 - 3xy^2) \quad (2-5-4)$$

である。この計算をするに当たって、 $\kappa_x, \kappa_y, K, N, L, \lambda$ の任意の2つの積はゼロとした。(前節で述べたようにセパレートファンクションの磁石のみを考えているので。) また、運動に関係しない定数項 $-(1 + \delta)/2$ は省いた。

2.6 ディスパージョンとベータトロン振動の分離

前節で展開されたハミルトニアンを正準方程式

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial H_s}{\partial p_x}, \quad \frac{dp_x}{ds} = - \frac{\partial H_s}{\partial x} \\ \frac{dy}{ds} = \frac{\partial H_s}{\partial p_y}, \quad \frac{dp_y}{ds} = - \frac{\partial H_s}{\partial y} \quad (2-6-1)$$

に代入すれば設計軌道に垂直な方向 (transverse 方向、横方向) の運動方程式が得られるが、これは行列を用いて次のようにまとめて表すことが出来る。

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X} = S \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} H_s(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X} \equiv \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}, \quad S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-6-2)$$

この方程式を解くに当たってまず H_s の中にある $-\delta(\kappa_x x + \kappa_y y)$ の項に注目すると、この項があるために δ がゼロでない場合、

$$\mathbf{X} = 0 \quad (2-6-3)$$

は方程式 (2-6-2) の解にならない。そこで \mathbf{X}_ϵ を方程式 (2-6-2) の周期解

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X}_\epsilon = S \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} H_s(\mathbf{X}) \right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_\epsilon} \\ \mathbf{X}_\epsilon(s + C) = \mathbf{X}_\epsilon(s) \quad (2-6-4)$$

として \mathbf{X} を \mathbf{X}_β と \mathbf{X}_ϵ に分けて考える。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_\beta + \mathbf{X}_\epsilon = \begin{pmatrix} x_\beta \\ p_{x\beta} \\ y_\beta \\ p_{y\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_\epsilon \\ p_{x\epsilon} \\ y_\epsilon \\ p_{y\epsilon} \end{pmatrix} \quad (2-6-5)$$

x_ϵ, y_ϵ は運動量がずれた粒子の閉軌道 (closed orbit) の設計軌道からの変位であり、

$$\mathbf{X}_\epsilon = \delta \mathbf{D} = \delta \begin{pmatrix} D_x \\ D_{px} \\ D_y \\ D_{py} \end{pmatrix} \quad (2-6-6)$$

とおいた D_x, D_y をディスパージョンと呼ぶ。リングの中の個々の粒子は、設計軌道ではなく、その粒子の運動量のずれに応じてきまる閉軌道のまわりを振動しながら進んでいく。この振動をベータトロン振動という。 x_β, y_β は粒子の閉軌道からの変位を表している。

ここでディスパージョンの満たすべき方程式を線形近似の範囲内で求めておこう。まず (2-5-3)、(2-5-4) で与えられるハミルトニアン H_s を x, p_x, y, p_y について2次の項までで近似して \mathbf{X}_ϵ についての方程式 (2-6-4) を書き下し、これに (2-6-6) を代入し、さらに δ^2 の項を省くと、次のような \mathbf{D} についての方程式が得られる。

$$\begin{aligned} D'_x &= D_{px} + LD_y \\ D'_{px} &= -(\kappa_x^2 + K + L^2) D_x \\ &\quad - ND_y + LD_{py} + \kappa_x \\ D'_y &= D_{py} - LD_x \\ D'_{py} &= -(\kappa_y^2 - K + L^2) D_y \\ &\quad - ND_x - LD_{px} + \kappa_y \end{aligned} \quad (2-6-7)$$

次にベータトロン振動を記述するハミルトニアンを求めるのに \mathbf{X} から \mathbf{X}_β への正準変換を行なう。この場合の変換は母関数

$$\begin{aligned} G(x, y, p_{x\beta}, p_{y\beta}, s) \\ = (x - x_\epsilon(s))(p_{x\beta} + p_{x\epsilon}(s)) \\ + (y - y_\epsilon(s))(p_{y\beta} + p_{y\epsilon}(s)) \end{aligned} \quad (2-6-8)$$

によって

$$\begin{aligned} x_\beta &= \frac{\partial G}{\partial p_{x\beta}} = x - x_\epsilon(s) \\ y_\beta &= \frac{\partial G}{\partial p_{y\beta}} = y - y_\epsilon(s) \\ p_x &= \frac{\partial G}{\partial x} = p_{x\beta} + p_{x\epsilon}(s) \\ p_y &= \frac{\partial G}{\partial y} = p_{y\beta} + p_{y\epsilon}(s) \\ H_\beta(\mathbf{X}_\beta) &= H_s(\mathbf{X}_\beta + \mathbf{X}_\epsilon) + \frac{\partial G}{\partial s} \end{aligned} \quad (2-6-9)$$

と導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial s} \\ = -x'_\epsilon(s)(p_{x\beta} + p_{x\epsilon}(s)) \\ - y'_\epsilon(s)(p_{y\beta} + p_{y\epsilon}(s)) \\ + (x - x_\epsilon(s))p'_{x\epsilon}(s) + (y - y_\epsilon(s))p'_{y\epsilon}(s) \\ = -\left(\frac{\partial H_s(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_\epsilon} \cdot \mathbf{X}_\beta \\ - x'_\epsilon(s)p_{x\epsilon}(s) - y'_\epsilon(s)p_{y\epsilon}(s) \end{aligned} \quad (2-6-10)$$

の中の s のみに依存する部分は運動方程式に関係しないので省略すると、ベータトロン振動のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H_\beta(\mathbf{X}_\beta) &= H_s(\mathbf{X}_\beta + \mathbf{X}_\epsilon) \\ &\quad - \left(\frac{\partial H_s(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_\epsilon} \cdot \mathbf{X}_\beta \end{aligned} \quad (2-6-11)$$

と表すことができ、これを (2-5-3) (2-5-4) 式を使って具体的に表現すると次のようになる。

$$\begin{aligned} H_\beta(\mathbf{X}_\beta) &= H_0(\mathbf{X}_\beta) + \delta H_I(\mathbf{X}_\beta) \\ &\quad + (\kappa_x x_\beta + \kappa_y y_\beta)(p_{x\epsilon} p_{x\beta} + p_{y\epsilon} p_{y\beta}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\kappa_x x_\beta + \kappa_y y_\beta)(p_{x\beta}^2 + p_{y\beta}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda(x_\epsilon x_\beta^2 - x_\epsilon y_\beta^2 - 2x_\beta y_\beta y_\epsilon) \end{aligned} \quad (2-6-12)$$

ここでも (2-6-11) からさらに s のみに依存する項を省いた。

2.7 ベータトロン振動の運動方程式

前節でベータトロン振動のハミルトニアンが得られたのでベータトロン振動の運動方程式

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X}_\beta = S \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_\beta} H_\beta(\mathbf{X}_\beta) \quad (2-7-1)$$

を線形近似の範囲で求めてみよう。 H_β の中で $x_\beta, y_\beta, p_{x\beta}, p_{y\beta}$ の2次までとって方程式を書き下すと線形近似すると次のようになる。

$$\begin{aligned} x'_\beta &= p_{x\beta} + Ly_\beta \\ &\quad + \delta\{\kappa_x D_{px} x_\beta + (\kappa_y D_{px} - L)y_\beta\} \end{aligned}$$

$$+(\kappa_x D_x + \kappa_y D_y) p_{x\beta}\}$$

$$p'_{x\beta} = -(\kappa_x^2 + K + L^2)x_\beta - Ny_\beta + Lp_{y\beta} \\ -\delta\{(-\kappa_x^2 - K - 2L^2 + \lambda D_x)x_\beta \\ + \kappa_x D_{px} p_{x\beta} - (N + \lambda D_y)y_\beta \\ + (\kappa_x D_y + L)p_{y\beta}\}$$

$$y'_\beta = p_{y\beta} - Lx_\beta \\ + \delta\{\kappa_y D_{py} y_\beta + (\kappa_x D_{py} + L)x_\beta \\ + (\kappa_x D_x + \kappa_y D_y) p_{y\beta}\}$$

$$p'_{y\beta} = -(\kappa_y^2 - K + L^2)y_\beta - Nx_\beta - Lp_{x\beta} \\ -\delta\{(-\kappa_y^2 + K - 2L^2 - \lambda D_x)y_\beta \\ + \kappa_y D_{py} p_{y\beta} - (N + \lambda D_y)x_\beta \\ + (\kappa_y D_x - L)p_{x\beta}\} \quad (2-7-2)$$

これで2次元ベータトロン振動の運動方程式が具体的に得られたわけであるが、このままでは解かりにくいので行列表示にして整理しよう。(2-7-2)式はハミルトニアンを線形化して得られた方程式なので、マトリックスで表すことが出来る。次のように運動量のずれ δ に依存しない部分と δ に比例する部分に分けて表すと、

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X}_\beta = S(H_{\beta 0} + \delta H_{\beta 1}) \mathbf{X}_\beta \\ = (Q_0 + \delta Q_1) \mathbf{X}_\beta \quad (2-7-3)$$

となる。 $H_{\beta 0}, H_{\beta 1}$ は次のような対称行列である。

$$H_{\beta 0} = \begin{pmatrix} F & 0 & N & -L \\ 0 & 1 & L & 0 \\ N & L & G & 0 \\ -L & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \kappa_x + K + L^2$$

$$G = \kappa_y - K + L^2$$

$$H_{\beta 1} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ h_2 & h_5 & h_6 & 0 \\ h_3 & h_6 & h_7 & h_8 \\ h_4 & 0 & h_8 & h_5 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = -\kappa_x^2 - K + \lambda D_x - 2L^2$$

$$h_2 = \kappa_x D_{px}$$

$$h_3 = -N - \lambda D_y$$

$$h_4 = \kappa_x D_{py} + L$$

$$h_5 = \kappa_x D_x + \kappa_y D_y$$

$$h_6 = \kappa_y D_{px} - L$$

$$h_7 = -\kappa_y^2 + K - \lambda D_x - 2L^2$$

$$h_8 = \kappa_y D_{py} \quad (2-7-4)$$

この行列を用いると線形化されたハミルトニアンは

$$H_\beta = \mathbf{X}_\beta^T (H_{\beta 1} + \delta H_{\beta 0}) \mathbf{X}_\beta \quad (2-7-5)$$

と表現することが出来る。(行列またはベクトルの右上につけた T はその行列またはベクトルの転置を表す。) また、 Q_0, Q_1 は

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & L & 0 \\ -F & 0 & -R & L \\ -L & 0 & 0 & 1 \\ -R & -L & -G & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} h_2 & h_5 & h_6 & 0 \\ -h_1 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_4 & 0 & h_8 & h_5 \\ -h_3 & -h_6 & -h_7 & -h_8 \end{pmatrix} \quad (2-7-6)$$

となる。

前節で求めたディスパージョンについての方程式(2-6-7)もこの行列 Q_0 を用いて

$$\frac{d}{ds} \mathbf{D} = Q_0 \mathbf{D} + \mathbf{D}_0$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_x \\ 0 \\ \kappa_y \end{pmatrix} \quad (2-7-7)$$

と表せる。

3. ベータ トロン振動

3.1 1次元ベータトロン振動のトランスファ行列

まず最も簡単な場合のベータトロン振動の運動方程式について議論することにしよう。リングの中にソレノイドとスキュー四極磁石がなければ、運動量がずれていない ($\delta=0$) の粒子の運動方程式は (2-7-3), (2-7-6) より

$$\begin{aligned} x'_\beta &= p_{x\beta} \\ p'_{x\beta} &= -(\kappa_x^2 + K)x_\beta \\ y'_\beta &= p_{y\beta} \\ p'_{y\beta} &= -(\kappa_y^2 - K)y_\beta \end{aligned} \quad (3-1-1)$$

となり、水平方向と垂直方向の運動はカップルしなくなる。(δ がゼロでなくても水平 (垂直) 方向偏向磁石の中で $D_{py} = 0$ ($D_{px} = 0$) であり、且つ六極磁石の中で $D_y = 0$ ならばカップリングは生じない。) (3-1-1) 式の運動量を消去して x_β または y_β についての二階線形微分方程式にすると方程式は

$$z'' + K_z(s)z = 0 \quad (3-1-2)$$

という形になる。これが1次元ベータトロン振動の運動方程式である。ここで、 z は x_β または y_β を、 $K_z(s)$ は $\kappa_x^2 + K$ または $\kappa_y^2 - K$ を、それぞれ代表して表している。 $K_z(s)$ はリング内の磁石の配列に対応しているので、 C をリングの周長とすると

$$K(s + C) = K(s) \quad (3-1-3)$$

の周期関数である。方程式 (3-1-2) の解は

$$z(s) = aw(s)\cos(\psi(s) + \psi_0) \quad (3-1-4)$$

の形に表すことが出来るので、これを (3-1-2) に代入して整理すると、任意の初期位相 ψ_0 に対して (3-1-2) が成立するためには、 w, ψ は次のような方程式を満たさなければならない。

$$w'' - w\psi'^2 + K_z w = 0$$

$$2w\psi' + w\psi'' = 0 \quad (3-1-5)$$

第2式より

$$\psi = \int \frac{ds}{w^2} \quad (3-1-6)$$

となり、これを第1式に代入して

$$w'' - \frac{1}{w^3} + Kw = 0 \quad (3-1-7)$$

が得られる。また(3-1-4), (3-1-6)を使って

$$W \equiv \frac{z^2 + (w'wz - w^2z')^2}{w^2} = a^2 \quad (3-1-8)$$

が s によらず一定であることがわかる。

(3-1-2) は二階線形微分方程式であるから、任意の解 z は二つの互いに線形独立な解 z_1, z_2 の線形結合で表せる。 $C(s, s_0)$ $S(s, s_0)$ を

$$\begin{aligned} C(s_0, s_0) &= S'(s_0, s_0) = 1 \\ C'(s_0, s_0) &= S(s_0, s_0) = 0 \end{aligned} \quad (3-1-9)$$

のように規格化された (3-1-2) の独立解とすると、 s_0 における初期条件 $z(s_0), z'(s_0)$ を与えれば任意の位置 s における $z(s), z'(s)$ を次のように求めることが出来る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} &= M(s, s_0) \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-1-10)$$

$z(s_0), z'(s_0)$ と $z(s), z'(s)$ を関係付ける行列 M はトランスファ行列 (transfer matrix) と呼ばれる。トランスファ行列は常に

$$\det M = 1 \quad (3-1-11)$$

であることが、(3-1-2), (3-1-9) より簡単に証明できる。

リング内の任意の2点 s_1, s_2 間の $M(s_2, s_1)$ は、1組の独立解 z_1, z_2 が得られていれば

$$\begin{pmatrix} z_i(s_2) \\ z'_i(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} z_i(s_1) \\ z'_i(s_1) \end{pmatrix} \quad (i=1,2) \quad (3-1-12)$$

を満たすという条件から

$$M(s_2, s_1) = \begin{pmatrix} z_1(s_1) & z_2(s_1) \\ z'_1(s_1) & z'_2(s_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1(s_2) & z_2(s_2) \\ z'_1(s_2) & z'_2(s_2) \end{pmatrix} \quad (3-1-13)$$

と定まる。こうして得られた $M(s_2, s_1)$ はもちろん任意の解 $z(s)$ について

$$\begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} \quad (3-1-14)$$

を満たしている。独立解を

$$\begin{aligned} z_1 &= w(s) \cos(\psi(s) + \psi_1) \\ z_2 &= -w(s) \sin(\psi(s) + \psi_1) \end{aligned} \quad (3-1-15)$$

ととって $M(s_2, s_1)$ を具体的に求めると

$$\begin{aligned} M(s_2, s_1) &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \\ m_{11} &= \frac{w_2}{w_1} \cos(\psi_{12}) - w_2 w'_1 \sin(\psi_{12}) \\ m_{12} &= w_1 w_2 \sin(\psi_{12}) \\ m_{21} &= -\frac{1 + w_1 w'_1 w_2 w'_2}{w_1 w_2} \sin(\psi_{12}) \\ &\quad - \frac{w_1 w'_1 - w_2 w'_2}{w_1 w_2} \cos(\psi_{12}) \\ m_{22} &= \frac{w_1}{w_2} \cos(\psi_{12}) + w_1 w'_2 \sin(\psi_{12}) \end{aligned} \quad (3-1-16)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \psi(s_2) - \psi(s_1) \\ w_1 &= w(s_1) \quad w_2 = w(s_2) \\ w'_1 &= w'(s_1) \quad w'_2 = w'(s_2) \end{aligned} \quad (3-1-17)$$

である。

3.2 Twissパラメタ

トランスファ行列 $M(s_2, s_1)$ は前節で述べたのよう
に w, ψ で表すことが出来るが、次のように定義
された Twiss パラメタを用いた方がより簡潔に表
せる。

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= -w(s)w'(s) \\ \beta(s) &= w(s)^2 \\ \gamma(s) &= \frac{1 + w(s)^2 w'(s)^2}{w(s)^2} \end{aligned} \quad (3-2-1)$$

定義から明らかなように Twiss パラメタは

$$\begin{aligned} \beta' &= -2\alpha \\ \beta\gamma - \alpha^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3-2-2)$$

という関係になっている。また ψw についての方程
式 (3-1-6), (3-1-7) は

$$\begin{aligned} \psi &= \int \frac{1}{\beta} ds \\ \alpha' &= K\beta - \gamma \end{aligned} \quad (3-2-3)$$

と、(3-1-8)の不変量 W は

$$\begin{aligned} W &= \frac{z^2 + (\alpha z - \beta z')^2}{\beta} \\ &= \gamma z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 \end{aligned} \quad (3-2-4)$$

と書き直せる。この W は Courant - Snyder 不変量
(以下では C-S 不変量と略す) と呼ばれ、 $z-z'$ 平面
にこの曲線を表示すると図 2 に示すような楕円に
なる。方程式 (3-1-2) の解 (3-1-4) はこの不変量と Tw
iss パラメタによって

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{W\beta} \cos(\psi + \psi_0) \\ z' &= -\sqrt{\frac{W}{\beta}} \{ \sin(\psi + \psi_0) + \alpha \cos(\psi + \psi_0) \} \end{aligned}$$

と表現できる。

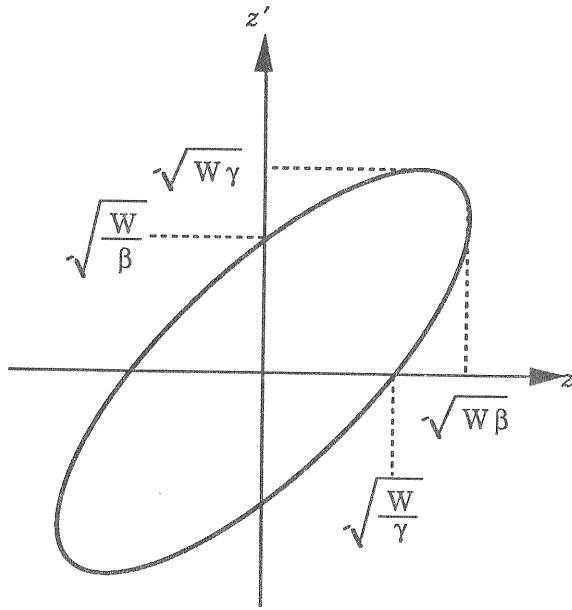


図 2

(3-1-6)で求められたトランスファ行列 $M(s_2, s_1)$ をTwissパラメタで表すと

$$\begin{aligned} m_{11} &= \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos(\psi_{12}) + \alpha_1 \sin(\psi_{12})) \\ m_{12} &= \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin(\psi_{12}) \\ m_{21} &= -\frac{1 + \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \sin(\psi_{12}) - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \cos(\psi_{12}) \\ m_{22} &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos(\psi_{12}) - \alpha_2 \sin(\psi_{12})) \end{aligned} \quad (3-2-5)$$

となる。リング一周のトランスファ行列 $M(s) = M(s+C, s)$ は Twiss パラメタが周期関数であるので

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos(\psi_C) + \alpha(s) \sin(\psi_C) \\ m_{12} &= \beta(s) \sin(\psi_C) \\ m_{21} &= -\gamma(s) \sin(\psi_C) \\ m_{22} &= \cos(\psi_C) - \alpha(s) \sin(\psi_C) \end{aligned} \quad (3-2-6)$$

とより簡潔になる。ここで

$$\psi_C = \oint_C \frac{1}{\beta(s)} ds \quad (3-2-7)$$

はリングを一周したときのベータatron振動の位相の進みを表し、これを 2π で割ったものをベータatron振動のチューンという。 β は周期関数なの

で ψ_C は s に依存しない。 $M(s)$ はさらに

$$M(s) = \cos(\psi_C) I + \sin(\psi_C) J(s)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J(s) = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \quad (3-2-8)$$

と表すと見通しが良く、

$$J^2 = -I \quad (3-2-9)$$

であることを用いると、リングを n ターンしたときのトランスファ行列が

$$M(s)^n = \cos(n\psi_C) I + \sin(n\psi_C) J(s) \quad (3-2-10)$$

となるのが簡単に導ける。またリング一周のトランスファ行列(3-2-6)の対角和を計算すると

$$\text{Tr}(M) = 2 \cos(\psi_C) \quad (3-2-11)$$

なるのでベータatron振動が安定になるための条件は

$$\text{Tr}(M) < 2 \quad (3-2-12)$$

であることがわかる。

ここで、 s_1 から s_1+C までのトランスファ行列を考えてみると

$$\begin{aligned} &M(s_2 + C, s_1) \\ &= M(s_2 + C, s_2) M(s_2, s_1) \\ &= M(s_2 + C, s_1 + C) M(s_1 + C, s_1) \end{aligned} \quad (3-2-13)$$

のように二通りの方法で表せる。これに(3-2-8)を代入し Twiss パラメタの周期性を使うと、

$$J(s_2) M(s_2, s_1) = M(s_2, s_1) J(s_1) \quad (3-2-14)$$

となるので、これから Twiss パラメタの s_1 から s_2 への変換公式が導ける。

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \\ = M(s_2, s_1) \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} M^{-1}(s_2, s_1) \quad (3-2-15)$$

3.3 運動量がずれた粒子のベータトロン振動

次に運動量がずれた粒子の運動を考えてみよう。このときの運動方程式は(2-7-2)式から運動量を消して、 δ の2次以上の項を省略すると得られて

$$\begin{aligned} x'' + \{(1-\delta)(\kappa_x^2 + K) + \delta\lambda D_x\}x &= 0 \\ y'' + \{(1-\delta)(\kappa_y^2 - K) - \delta\lambda D_y\}y &= 0 \end{aligned} \quad (3-3-1)$$

となり、 δ がゼロのときと比較すると収束力が変化していることがわかる。従ってベータトロン振動のチューンもずれる。

リングの一箇所 s_1 で収束力が k だけ変化した場合のリング一周のトランスファ行列 M は、変化がない場合のトランスファ行列 M_0 と

$$\begin{aligned} M(s; s_1) \\ = M_0(s+C, s_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} M_0(s_1, s) \end{aligned} \quad (3-3-2)$$

という関係になるので、複数の場所で収束力に変化がある場合はこれをリング一周で積分するとトランスファ行列の全体の変化が得られる。

$$M(s) = \int_s^{s+C} M(s; s_1) ds_1 \quad (3-3-3)$$

この行列の対角和と(1,2)成分を M_0 のそれとを比較すれば、ベータトロン振動のチューンの変化とベータ関数の変化がそれぞれ求められる。まずチューンの変化について調べると、 M の対角和が

$$\begin{aligned} 2 \cos(\psi_c) \\ = \int_s^{s+C} \text{Tr} M(s; s_1) ds_1 \end{aligned}$$

$$= \int_s^{s+C} (2 \cos \psi_{c0} - \beta_0(s_1) k(s_1) \sin \psi_{c0}) ds_1 \quad (3-3-4)$$

となるので、これからベータトロン振動のチューンの変化は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{1}{2\pi} (\psi_c - \psi_{c0}) \\ &\equiv \frac{1}{4\pi} \int_c^c k(s_1) \beta(s_1) ds_1 \end{aligned} \quad (3-3-5)$$

またベータ関数の変化も、リング一周のトランスファ行列の(1,2)成分の変化が(3-2-6)より

$$\begin{aligned} \Delta m_{12} &= \beta(s) \sin \psi_c - \beta_0(s) \sin \psi_{c0} \\ &\equiv \Delta \beta \sin \psi_{c0} + 2\pi \Delta v \beta_0(s) \sin \psi_{c0} \end{aligned} \quad (3-3-6)$$

と表せ、一方(3-3-3)の積分を計算して

$$\begin{aligned} \Delta m_{12} &= -\beta_0(s) \int_s^{s+C} \beta_0(s_1) k(s_1) \\ &\quad \times \sin(\psi_{c0} + \psi_0(s) - \psi_0(s_1)) \\ &\quad \times \sin(\psi_0(s_1) - \psi_0(s)) ds_1 \end{aligned} \quad (3-3-7)$$

となることから次のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \beta}{\beta_0} &= \frac{-1}{2 \sin \psi_{c0}} \int_s^{s+C} \beta_0(s_1) k(s_1) \\ &\quad \times \cos\{\psi_{c0} - 2(\psi_0(s_1) - \psi_0(s))\} ds_1 \end{aligned} \quad (3-3-8)$$

(3-3-5),(3-3-8)の k に

$$\begin{aligned} k &= -\delta(\kappa_x^2 + K - \lambda D_x) \\ k &= -\delta(\kappa_y^2 - K + \lambda D_y) \end{aligned} \quad (3-3-9)$$

を代入すると水平垂直方向のベータトロン振動のチューンとベータ関数の運動量依存性が求まる。次のように定義された ξ をクロマティシティという。

$$\begin{aligned} \xi_x &\equiv \frac{\Delta v_x}{\delta} = \frac{1}{4\pi} \int_c^c (\lambda D_x - \kappa_x^2 - K) \beta_0 ds \\ \xi_y &\equiv \frac{\Delta v_y}{\delta} = \frac{1}{4\pi} \int_c^c (-\lambda D_y - \kappa_y^2 + K) \beta_0 ds \end{aligned}$$

(3-3-10)

ディスパージョンがゼロでない場所に設置された六極磁石の強度を適当に設定すれば、このような運動量依存性を消すことができる。

3.4 ディスパージョンとCODの解

次にディスパージョンについて考えてみよう。カップリングがない場合のディスパージョンの方程式は(2-6-7)より

$$\begin{aligned} D''_x + (\kappa_x + K)D_x &= \kappa_x \\ D''_y + (\kappa_y - K)D_y &= \kappa_y \end{aligned} \quad (3-4-1)$$

となるので、(3-1-2)と同じようにこの2つの方程式を代表して

$$\eta'' + K_z \eta = \frac{1}{\rho} \quad (3-4-2)$$

と書き表す。これは、(3-1-2)式に非斉次の項が付け加わった形となっている。ディスパージョンはこの非斉次方程式の周期解である。

またリングの中の偏向磁場にエラー $f(s)$ がある場合、運動量のずれがない粒子の閉軌道も設計軌道からずれる。このような磁場の誤差による閉軌道の歪みをCOD (closed orbit distortion)とよぶ。CODもディスパージョンと同様の非斉次方程式

$$z''_{cod} + K_z z_{cod} = f(s) \quad (3-4-3)$$

の周期解として求められる。これらはGreen関数を用いる方法 (Ref.2 p19-27参照) によって

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+C} \frac{\sqrt{\beta(\sigma)}}{\rho(\sigma)} \\ &\quad \times \cos\{\psi(\sigma) - \psi(s) - \pi \nu\} d\sigma \\ z_{cod}(s) &= \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+C} \sqrt{\beta(\sigma)} f(\sigma) \\ &\quad \times \cos\{\psi(\sigma) - \psi(s) - \pi \nu\} d\sigma \end{aligned} \quad (3-4-4)$$

のように求めることができる。運動量のずれによるリング一周の軌道長の変化は、ディスパージョンを使って次のように計算できる。

$$\alpha_0 \equiv \frac{1}{\delta} \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{C} \int \frac{\eta}{\rho} ds \quad (3-4-5)$$

この α_0 はモメンタムコンパクションと呼ばれ次章でシンクロトロン振動の計算を行なうときに用いられる。

3.5 2次元ベータトロン振動

リング内にソレノイドやスキュー四極磁石が設置されている場合は、水平、垂直方向の運動を分離して扱うことができない。そこで適当な正準変換 T

$$\mathbf{U}(s) \equiv \begin{pmatrix} u \\ p_u \\ v \\ p_v \end{pmatrix} = T(s) \mathbf{X}(s) \quad (3-5-1)$$

を行なって u と v の振動がカップルしないようなノーマル座標系に移行して、ベータトロン振動を解析することにする。(ここで、 \mathbf{X} は2.7節の \mathbf{X}_β のことであるが以後添え字の β は省略する。)

この正準変換を行なう前にトランスファ行列の一般的な性質について述べておこう。2次元ベータトロン振動の運動方程式は(2-7-3)で示したように対称行列 H を用いて

$$\mathbf{X}' = SH \mathbf{X} \equiv Q \mathbf{X} \quad (3-5-2)$$

と書き表せる。 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ をこの方程式の2つの解とすると、 H が対称行列なので

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} (\mathbf{X}_2^T S \mathbf{X}_1) \\ &= (SH \mathbf{X}_2)^T S \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2^T S (SH \mathbf{X}_1) \\ &= \mathbf{X}_2^T H^T \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2^T H \mathbf{X}_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-5-3)$$

となり、 $\mathbf{X}_2^T S \mathbf{X}_1$ は s によらず一定であることが分かる。従って任意の場所 s_1, s_2 で

$$\mathbf{X}_2^T(s_2) S \mathbf{X}_1(s_2)$$

$$\begin{aligned}
&= (M \mathbf{X}_2(s_1))^T SM \mathbf{X}_1(s_1) \\
&= \mathbf{X}_2^T(s_1) M^T SM \mathbf{X}_1(s_1) \\
&= \mathbf{X}_2^T(s_1) S \mathbf{X}_1(s_1) \quad (3-5-4)
\end{aligned}$$

が成り立つはずなので、トランスファ行列Mは

$$M^T SM = S \quad (3-5-5)$$

という条件を満たす。この性質をシンプレクティック(symplectic)であるという。2行2列のシンプレクティック行列は行列式が1であり、独立なパラメタは3つある。(つまり、2次元ベクトロン振動のトランスファ行列はシンプレクティックである。) 今問題としている4行4列のシンプレクティック行列の場合は独立なパラメタ数は10である。この10個のパラメタのうち、4つを変換行列Tに、残りを3個ずつu方向とv方向のトランスファ行列に割り当てることにする。(ここでは、KEKで開発されたプログラムSAD(Ref.14)で使用されている表記方法にしたがった。)

まず変換行列Tを

$$T = \begin{pmatrix} \mu I & SR^T S \\ R & \mu I \end{pmatrix} \quad (3-5-6)$$

という形に2行2列の行列に分割して表すことにする。ここで μ と行列Rの各要素はsの関数であり、

$$\mu^2 + \det(R) = 1 \quad (3-5-7)$$

の関係を常に満たすとする。また変換行列Tの中のSは

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3-5-8)$$

である。このSを用いれば

$$SR^T S = -(\det R) R^{-1} \quad (3-5-9)$$

という関係が得られるので、Tの逆行列は

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \mu I & -SR^T S \\ -R & \mu I \end{pmatrix} \quad (3-5-10)$$

となる。

変換行列Tによってxy系でのリング一周のトランスファ行列M(s)は

$$M(s) = T(s)^{-1} \begin{pmatrix} U(s) & 0 \\ 0 & V(s) \end{pmatrix} T(s) \quad (3-5-11)$$

のように区分的に対角化される。U, Vはuv系でのリング一周のトランスファ行列なので、1次元ベクトロン振動の場合と同様にTwissパラメタを使って

$$\begin{aligned}
U &= I \cos \psi_u + J_u \sin \psi_u \\
V &= I \cos \psi_v + J_v \sin \psi_v
\end{aligned}$$

$$J_u \equiv \begin{pmatrix} \alpha_u & \beta_u \\ -\gamma_u & -\alpha_u \end{pmatrix} \quad J_v \equiv \begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ -\gamma_v & -\alpha_v \end{pmatrix} \quad (3-5-12)$$

と表現することにする。この場合もTwissパラメタ間には(3-2-2)の第2式の関係が成り立つとする。

(3-5-11)の行列の計算を行なうと、xy系でのトランスファ行列M(s)を構成する2行2列の部分行列

$$M(s) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (3-5-13)$$

がuv系でのトランスファ行列及び変換行列Tによって次のように表せる。

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \mu^2 U + (\det R) R^{-1} VR \\
M_{12} &= -\mu (\det R) (UR^{-1} - R^{-1} V) \\
M_{21} &= -\mu (RU - VR) \\
M_{22} &= \mu^2 V + (\det R) RUR^{-1} \quad (3-5-14)
\end{aligned}$$

xy系からuv系に移行するには、これと逆に、与えられたM(s)から μ, R, U, V を求めなければならない。

まず、(3-5-14)に(3-5-12)を代入して整理すると

$$\frac{1}{(\mu^2 - \det R)^2}$$

$$= 1 + \frac{2 \det(M_{21}) + \text{Tr}(M_{12} M_{21})}{\left(\frac{1}{2} \text{Tr}(M_{11} - M_{22})\right)^2}$$

$$\equiv \chi \quad (3-5-15)$$

が $M(s)$ の部分行列で上記のように書き表せる。また(3-5-14)の第1,4式より

$$\cos \psi_u - \cos \psi_v = \frac{\frac{1}{2} \text{Tr}(M_{11} - M_{22})}{\mu^2 - \det R}$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\chi} \text{Tr}(M_{11} - M_{22}) \quad (3-5-16)$$

が得られ、さらに(3-5-7)を用いると結局 μ, R, U, V が次のように求まる。

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\frac{1}{2} \text{Tr}(M_{11} - M_{22})}{\cos \psi_u - \cos \psi_v}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm \frac{1}{\sqrt{\chi}}}$$

$$R = - \frac{M_{21} + SM_{12}^T S^T}{2 \mu (\cos \psi_u - \cos \psi_v)}$$

$$= - \frac{M_{21} + SM_{12}^T S^T}{\pm \mu \sqrt{\chi} \text{Tr}(M_{11} - M_{22})}$$

$$U = M_{11} - \frac{\det R}{\mu} R^{-1} M_{21}$$

$$V = M_{22} + \frac{1}{\mu} R M_{12} \quad (3-5-17)$$

uv 系での運動方程式は

$$U' = T X' + T' X$$

$$= T Q T^{-1} T X + T' T^{-1} T X$$

$$= (T Q T^{-1} + T' T^{-1}) U \quad (3-5-18)$$

となることから、行列 P によって

$$U' = P U$$

$$P \equiv T Q T^{-1} + T' T^{-1} \quad (3-5-19)$$

と書き表せる。またディスプレイジョンの方程式(2-7-7)も同じ行列 P を使って次のように表現できる。

$$D_{uv} \equiv T D$$

$$D'_{uv} = P D_{uv} + T D_0 \quad (3-5-20)$$

行列 P の中に現われる変換行列 T の微分は、 x, y 系でのトランスファ行列 $M(s)$ の微分が

$$M' = Q M - M Q \quad (3-5-21)$$

となることから計算できて、

$$\frac{d}{ds} (\cos \psi_u - \cos \psi_v) = 0$$

$$\frac{d}{ds} (\det R) = -2 \mu \mu'$$

$$\mu' = \frac{\frac{1}{2} \text{Tr}(M'_{11} - M'_{22})}{4 \mu (\cos \psi_u - \cos \psi_v)}$$

$$= -\frac{1}{2} (r_{11} + r_{22}) L + \frac{1}{2} r_{12} N$$

$$R' = - \frac{M'_{21} + SM'_{12}^T S^T}{2 \mu (\cos \psi_u - \cos \psi_v)} - \frac{\mu'}{\mu} R$$

$$= \begin{pmatrix} r_{12} F + r_{21} & r_{11} - r_{22} \\ r_{22} F - r_{11} G & r_{12} G + r_{21} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2 \mu} \{ (r_{11} + r_{22}) L - r_{12} N \} R$$

$$+ \frac{\mu^2 - \det R}{\mu} \begin{pmatrix} L & 0 \\ N & L \end{pmatrix} \quad (3-5-22)$$

となる。これを(3-5-19)に代入すると、 P が具体的に得られて、次のように部分的に対角化されていることが確かめられる。

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$A = Q_{11} - \frac{1}{\mu} \left((\det R) R^{-1} Q_{21} - \mu' \right)$$

$$B = Q_{22} + \frac{1}{\mu} (R Q_{12} + \mu') \quad (3-5-23)$$

ここでは A, B はともに対角和がゼロの2行2列の行列で、その要素は次のようになっている。

$$a_{11} = \frac{2}{\mu} \{ (r_{22} - r_{11}) L - r_{12} N \}$$

$$a_{12} = 1 - \frac{1}{\mu} r_{12} L$$

$$a_{21} = -F - \frac{1}{\mu} (r_{21} L - r_{11} K)$$

$$a_{22} = \frac{2}{\mu} \{ (r_{11} - r_{22}) L + r_{12} N \}$$

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{2}{\mu} \{ (r_{11} - r_{22})L - r_{12}N \} \\
b_{12} &= 1 + \frac{1}{\mu} r_{12}L \\
b_{21} &= -G + \frac{1}{\mu} (r_{21}L - r_{22}K) \\
b_{22} &= \frac{2}{\mu} \{ (r_{22} - r_{11})L + r_{12}N \} \quad (3-5-24)
\end{aligned}$$

また uv 系でのトランスファー行列の微分も xy 系におけるのと同様に

$$M'_{uv} = PM_{uv} - M_{uv}P \quad (3-5-25)$$

と表せるので、これから uv 系での Twiss パラメタの微分が次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\alpha'_u &= -\gamma_u + \beta_u F \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \{ \gamma_u r_{12}L + \beta_u (r_{21}L - r_{11}N) \} \\
\beta'_u &= -2\alpha_u + \frac{1}{\mu} \{ 2\alpha_u r_{12}L \\
&\quad + \beta_u ((r_{22} - r_{11})L - r_{12}N) \} \\
\gamma'_u &= 2\alpha_u F + \frac{1}{\mu} \{ 2\alpha_u (r_{21}L - r_{11}N) \\
&\quad + \gamma_u ((r_{11} - r_{22})L + r_{12}N) \} \\
\alpha'_v &= -\gamma_v + \beta_v G \\
&\quad + \frac{1}{\mu} \{ -\gamma_v r_{12}L + \beta_v (-r_{21}L + r_{22}N) \} \\
\beta'_v &= -2\alpha_v + \frac{1}{\mu} \{ -2\alpha_v r_{12}L \\
&\quad + \beta_v ((r_{11} - r_{22})L - r_{12}N) \} \\
\gamma'_v &= 2\alpha_v G + \frac{1}{\mu} \{ 2\alpha_v (-r_{21}L + r_{22}N) \\
&\quad + \gamma_v ((r_{22} - r_{11})L + r_{12}N) \} \quad (3-5-26)
\end{aligned}$$

uv 系での運動方程式 (3-5-19) の解は 1 次元ベータatron振動の解と同様に

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{W_u \beta_u} \cos \psi_u \\
p_u &= -\sqrt{\frac{W_u}{\beta_u}} (\sin \psi_u + \alpha_u \cos \psi_u) \\
v &= \sqrt{W_v \beta_v} \cos \psi_v \\
p_v &= -\sqrt{\frac{W_v}{\beta_v}} (\sin \psi_v + \alpha_v \cos \psi_v) \quad (3-5-27)
\end{aligned}$$

と書き表せる。1次元の場合の (3-2-3) とは異なってベータatron振動の位相は

$$\begin{aligned}
\Psi_u &= \int \frac{1 - \frac{1}{\mu} r_{12}L}{\beta_u} ds + \Psi_{u0} \\
\Psi_v &= \int \frac{1 + \frac{1}{\mu} r_{12}L}{\beta_v} ds + \Psi_{v0} \quad (3-5-28)
\end{aligned}$$

となるが、ソレノイド磁場がない場所では (3-5-28) は (3-2-3) と同じにベータ関数の逆数を積分したものになる。

4. シンクロトロン振動と電子貯蔵リングの特徴

4.1 シンクロトロン振動の放射減衰

これまでのベータトロン振動の議論では、リング全周に渡って粒子のエネルギーは一定であるとしてきたが、電子貯蔵リングにおいては、電子は偏向磁石の中でシンクロトロン放射によって光を放出して、少しずつエネルギーを失っていく。このエネルギー損失はリングに設置されている高周波加速装置 (RFキャビティ) によって補償される。

単位時間あたりに電子から放射される放射光のパワーは、偏向磁石の磁場を B 、静止質量を m 、エネルギーを E 、古典電子半径を r_0 とすると

$$P_{\gamma} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c^3 r_0}{(m c^2)^3} E^2 B^2 = \frac{2}{3} \frac{r_0 c}{(m c^2)^3} \frac{E^4}{\rho^2} \quad (4-1-1)$$

である。設計エネルギー E_0 をもつ粒子のリング一周当たりのエネルギー損失はこれを積分して

$$U_0 = \frac{2}{3} \frac{r_0}{(m c^2)^3} E_0^4 I_2 \quad I_2 \equiv \oint \frac{1}{\rho^2} ds \quad (4-1-2)$$

となり、この損失はRFキャビティを通過するときの加速電圧によるエネルギー利得によって丁度補われる。

$$U_0 = e V_c \sin(h \omega_0 t_0 + \phi_s) \quad (4-1-3)$$

ここで C を周長とすると

$$\omega_0 = \frac{2 \pi c}{C} \quad (4-1-4)$$

であり、 h はハーモニク数と呼ばれる。

次にエネルギーが ε だけずれた電子を考える。この電子のリング一周当たりのエネルギー損失を

$$U \equiv U_0 + U_1 \varepsilon \quad U_1 \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad (4-1-5)$$

のように ε の 1 次で近似し、バンチの中心からのずれを z (バンチの前方を正とする) とすると、リングを一周したときのこの電子のエネルギー変化 $\Delta \varepsilon$ と位置の変化 Δz はそれぞれ

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= e V_c \sin\left(h \omega_0 \left(t_0 - \frac{z}{c}\right) + \phi_s\right) - U_0 - U_1 \varepsilon \\ &\equiv - \frac{e V_c h \omega_0}{c} \cos\left(h \omega_0 t_0 + \phi_s\right) z - U_1 \varepsilon \\ \Delta z &= - \alpha_0 C \frac{\varepsilon}{E_0} \end{aligned} \quad (4-1-6)$$

と表せる。ここで α_0 はモメンタムコムパクションである。これを粒子がリングを一周するのにかかる時間 T について平均すると、 ε と z についての連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= - \frac{e V_c h \omega_0}{c T} \cos\left(h \omega_0 t_0 + \phi_s\right) z - \frac{U_1}{T} \varepsilon \\ \frac{dz}{dt} &= - \alpha_0 c \frac{\varepsilon}{E_0} \end{aligned} \quad (4-1-7)$$

が得られる。ここで z を消去すると ε についての二階微分方程式になる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{U_1}{T} \frac{d\varepsilon}{dt} + \Omega_s^2 \varepsilon &= 0 \\ \Omega_s^2 &\equiv - \frac{\alpha_0 e V_c h \omega_0^2}{2 \pi E_0} \cos\left(h \omega_0 t_0 + \phi_s\right) \end{aligned} \quad (4-1-8)$$

この方程式の解は

$$\Omega_s^2 \gg \left(\frac{U_1}{T} \right)^2 \quad (4-1-9)$$

の条件が満たされる範囲では

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\frac{U_1}{2T} t} \cos(\Omega_s t + \Omega_0) \quad (4-1-10)$$

となる。 T, U_1 はともに正なので z, ε は時間が経て

ば減衰して行く。これを放射減衰 (radiation damping) と言う。

次に U_1 を詳しく計算してみよう。エネルギーが ε だけ離れた粒子については、その粒子の閉軌道にそって測った軌道長 dl が時間および設計軌道の軌道長 ds と

$$dt = \frac{dl}{c} = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{\eta}{\rho} \frac{\varepsilon}{E_0} \right) ds \quad (4-1-11)$$

という関係になっているので、リング一周当たりのエネルギー損失 U は

$$\begin{aligned} U &= \oint P_\gamma dt \\ &= \frac{1}{c} \oint P_\gamma \left(1 + \frac{\eta}{\rho} \frac{\varepsilon}{E_0} \right) ds \end{aligned} \quad (4-1-12)$$

と表せる。これを U_1 の定義式に代入すると

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{c} \oint \left\{ \frac{dP_\gamma}{dE} \left(1 + \frac{\eta}{\rho} \frac{\varepsilon}{E_0} \right) + \frac{P_\gamma \eta}{E_0 \rho} \right\}_{\varepsilon=0} ds \\ &= \frac{1}{c} \oint \left(\frac{dP_\gamma}{dE} + \frac{P_\gamma \eta}{E_0 \rho} \right) ds \end{aligned} \quad (4-1-13)$$

となるが、さらに

$$\begin{aligned} \frac{dP_\gamma}{dE} &= 2 P_\gamma \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{B} \frac{dB}{dE} \right) \\ \frac{1}{B} \frac{dB}{dE} &= \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \frac{dx}{dE} = \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \frac{\eta}{E_0} \\ K &= \frac{1}{B \rho} \frac{dB}{dx} \end{aligned} \quad (4-1-14)$$

などの関係を用いて、被積分関数を整理すると

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{c E_0} \oint P_\gamma \left(2 + 2 \eta \rho K + \frac{\eta}{\rho} \right) ds \\ &= \frac{U_0}{E_0} \left\{ 2 + \frac{1}{c U_0} \oint P_\gamma \left(2 \eta \rho K + \frac{\eta}{\rho} \right) ds \right\} \end{aligned} \quad (4-1-15)$$

が得られる。ここで

$$I_4 \equiv \oint \left(2 \frac{K}{\rho} + \frac{1}{\rho^3} \right) \eta ds \quad (4-1-16)$$

とおき、(4-1-2)(4-1-5)を用いるとシンクロトロ

ン振動の減衰分配率 (damping partition number) J_ε および減衰時間 τ_ε が次のように表せる。

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \frac{E_0}{U_0} U_1 = 2 + \frac{I_4}{I_2} \\ \frac{1}{\tau_\varepsilon} &= \frac{U_0}{2 E_0 T} J_\varepsilon \end{aligned} \quad (4-1-17)$$

キャビティでの加速とシンクロトン放射は横方向の運動にも影響を与え、ベータトロン振動の振幅も減衰させる。この減衰の様子を調べるために、加速と光の放射でそれぞれC-S不変量 W

$$W = \gamma x_\beta^2 + 2 \alpha x_\beta x'_\beta + \beta x'^2_\beta \quad (4-1-18)$$

がどのように変化するかを考える。

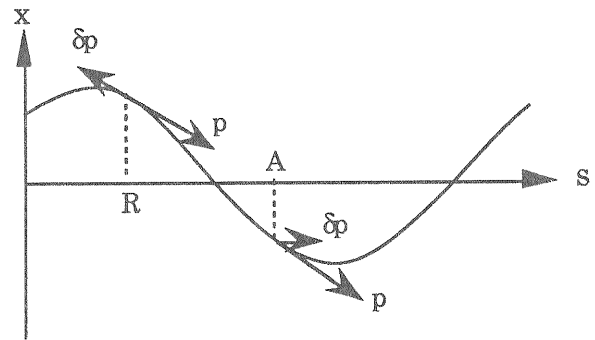


図3

まず、キャビティで加速を受ける場合は、横方向の運動量は変化せず、設計軌道に平行な運動量 p_L のみが増加する。(図3のA点) 従って粒子の x は変化しないが、 x' は変化してその変化量は

$$\begin{aligned} \delta x' &= \frac{p_x}{p_L + \delta p_L} - \frac{p_x}{p_L} \\ &= -x' \frac{\delta p_L}{p_L} \equiv -x' \frac{\delta \varepsilon}{E} \end{aligned} \quad (4-1-19)$$

となる。これに伴って W は

$$\begin{aligned} \delta W &= 2 \alpha x \delta x' + 2 \beta x \delta x' \\ &= -2 \frac{\delta E}{E} (\alpha x x' + \beta x'^2) \end{aligned} \quad (4-1-20)$$

だけ変化するが、ベータトロン振動の初期位相で平均すると

$$\langle xx' \rangle = -\frac{W\alpha}{2} \quad (4-1-28)$$

$$\langle x'^2 \rangle = \frac{W\gamma}{2} \quad (4-1-21)$$

となるので、 W の変化は結局

$$\langle \delta W \rangle = -W \frac{\delta E}{E} \quad (4-1-22)$$

で与えられる。エネルギー E_0 の粒子については、この粒子がリングを一周する間にキャビティから受け取るエネルギーは U_0 に等しいので、 W の変化率は周廻時間 T で平均して

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = -\frac{U_0}{E_0 T} \quad (4-1-23)$$

となる。

一方、光の放射の場合は、光は粒子の進行方向に放出されるので、粒子の x, x' はどちらも変化しない。(図3のR点) 従って、もし光の放出点でディスパージョンがゼロならば、 W は不変である。ディスパージョンがゼロでない場合は

$$\delta x = \delta x_\beta + \delta x_\epsilon = 0 \quad (4-1-24)$$

であるが、光の放射によるエネルギーの変化によって

$$\delta x_\epsilon = \eta \frac{\delta E}{E_0} \quad (4-1-25)$$

となるので、(4-1-24)を満たすようにベータトロン振動の部分も変化する。

$$\delta x_\beta = -\eta \frac{\delta E}{E_0} \quad (4-1-26)$$

同様の議論で $\delta x'_\beta$ についても

$$\delta x'_\beta = -\eta' \frac{\delta E}{E_0} \quad (4-1-27)$$

となることから分かるので δW を求めると

$$\delta W \cong -\frac{\delta E}{E_0} (\gamma x_\beta \eta + \alpha x_\beta \eta' + \alpha x'_\beta \eta + \beta x'_\beta \eta')$$

となる。エネルギーの変化は

$$\delta E = -P_\gamma \frac{\delta L}{c} = -\left(1 + \frac{x_\beta}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\epsilon}{E_0}\right) P_\gamma \delta s \quad (4-1-29)$$

であり、放射される電磁波のパワーは

$$P_\gamma = P_{\gamma 0} \left(1 + 2 \frac{\epsilon}{E_0} + 2 \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} x\right) \quad (4-1-30)$$

と展開できるので、これらを(4-1-28)に代入して x_β, x'_β および ϵ/E_0 の3次以上の項をを省くと W の変化は

$$\langle \delta W \rangle = -\frac{P_{\gamma 0}}{cE_0} \left(2K\rho + \frac{1}{\rho}\right) \eta \delta s \quad (4-1-31)$$

となる。ここでもキャビティでの加速の場合と同様にベータトロン振動の初期位相について平均をとった。リング一周分の変化を平均して(4-1-23)と同様に W の変化率を求めると

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = -\frac{U_0}{E_0} \frac{I_4}{I_2} \quad (4-1-32)$$

となるので、これと加速による変化率(4-1-23)を合わせて、ベータトロン振動の減衰分配率および減衰時間は

$$J_x = \frac{E_0}{U_0} \frac{d\langle W \rangle}{dt} = 1 - \frac{I_4}{I_2}$$

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{U_0}{2E_0 T} J_x \quad (4-1-33)$$

となる。ディスパージョンがゼロである y 方向については加速の影響があるだけなので

$$J_y = 1 \quad (4-1-33)$$

である。

4.2 量子励起

それでは、シンクロトロン放射によってエネル

ギー振動とベータトロン振動の振幅が無限小まで減衰して行くかという、そうではない。放射減衰の議論をするときは、シンクロトロン放射によって、荷電粒子のエネルギーが軌道の曲率がゼロでない全ての場所で連続的に失われると考えた。しかし実際には、エネルギーは光子という塊で確率的に放出されるので、この量子的効果によって反対に振動が励起される。これを量子励起 (quantum excitation) あるいは放射励起 (radiation excitation) という。

(4-1-8)の方程式で減衰項を無視すると

$$\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} - \Omega_s^2 \varepsilon = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} - \Omega_s^2 z = 0 \quad (4-2-1)$$

となり、方程式の解は簡単に

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A_0 \cos(\Omega_s t + \Omega_0) \\ z &= -\frac{\alpha_0 c A_0}{E_0 \Omega_s} \sin(\Omega_s t + \Omega_0) \end{aligned} \quad (4-2-2)$$

と表せる。この系では、

$$A^2 = \varepsilon^2 + \left(\frac{E_0 \Omega_s}{\alpha_0 c} \right)^2 z^2 = A_0^2 \quad (4-2-3)$$

が不変量である。粒子がエネルギー u の光子を放出すると A^2 は、

$$\begin{aligned} A^2 &= (\varepsilon - u)^2 + \left(\frac{E_0 \Omega_s}{\alpha_0 c} \right)^2 z^2 \\ &= A_0^2 + u^2 - 2 u A_0 \cos(\Omega_s t_u + \Omega_0) \end{aligned} \quad (4-2-4)$$

となるので、 A^2 の変化は

$$\langle \delta A^2 \rangle_\varepsilon = u^2 \quad (4-2-5)$$

である。ここでも、シンクロトロン振動の位相で平均をとった。右辺を放出される光子のエネルギー分布で平均し、単位時間に放出される光子の数を N_γ とすると A^2 の変化率は

$$\frac{d \langle A^2 \rangle}{dt} = N_\gamma \langle u^2 \rangle \quad (4-2-6)$$

と表せる。ここで

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle &= \frac{11}{27} u_c^2 \\ N_\gamma &= \frac{15 \sqrt{3}}{8} \frac{P_\gamma}{u_c} \end{aligned} \quad (4-2-7)$$

であり、 u_c は放射の臨界エネルギー (critical energy)

$$u_c = \frac{3}{2} \frac{\hbar c}{\rho} \left(\frac{E}{m c^2} \right)^3 \quad (4-2-8)$$

である。さらに、(4-2-6)をリング一周で平均すると

$$\begin{aligned} \frac{d \langle A^2 \rangle}{dt} &= \frac{1}{c T} \oint N_\gamma \langle u^2 \rangle ds \\ &= \frac{55}{16 \sqrt{3}} \frac{\hbar}{T} \left(\frac{E}{m c^2} \right)^3 \oint \frac{P_\gamma}{|\rho|} ds \\ &= \frac{55}{24 \sqrt{3}} \frac{r_0 c E^4}{(m c^2)^3 T} \left(\frac{E}{m c^2} \right)^3 \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds \\ &\equiv Q_\varepsilon \end{aligned} \quad (4-2-9)$$

が得られるので、これと放射減衰の効果(4-1-17)を合わせると、シンクロトロン振動の振幅についての方程式は最終的に

$$\frac{d \langle A^2 \rangle}{dt} = -2 \frac{\langle A^2 \rangle}{\tau_\varepsilon} + Q_\varepsilon \quad (4-2-10)$$

となる。平衡状態では上式の左辺がゼロになるので、このときのシンクロトロン振動の振幅は

$$\langle A^2 \rangle_\varepsilon = \frac{\tau_\varepsilon Q_\varepsilon}{2} \quad (4-2-11)$$

となる。従ってビームのエネルギー分散は

$$\sigma_\varepsilon^2 = \langle \varepsilon^2 \rangle = \frac{\langle A^2 \rangle_\varepsilon}{2} = \frac{\tau_\varepsilon Q_\varepsilon}{4} \quad (4-2-12)$$

与えられる。エネルギー E_0 のビームについて(4-1-17)(4-2-3)(4-2-9)よりエネルギー分散とバンチ長を求めると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{E_0}\right)^2 &= c_\gamma \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^2 \frac{I_3}{2I_2 + I_4} \\ \sigma_z^2 = \langle z^2 \rangle &= \left(\frac{\alpha_0 c}{\Omega_s E_0}\right)^2 \frac{\langle A^2 \rangle}{2} \\ &= \left(\frac{\alpha_0 c}{\Omega_s}\right)^2 \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{E_0}\right)^2 \\ I_3 &\equiv \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds \\ c_\gamma &\equiv \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \end{aligned} \quad (4-2-13)$$

$$= \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{r_0 c E^4}{(mc^2)^3} \frac{\hbar}{T} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \oint \frac{H}{E_0^2 |\rho|^3} ds$$

$$\equiv Q_x \quad (4-2-17)$$

となるので、(4-1-33)の放射減衰の項と合わせて、 W についての方程式

$$\frac{d\langle W \rangle}{dt} = -2 \frac{\langle W \rangle}{\tau_x} + Q_x \quad (4-2-18)$$

が得られる。ここでも(4-2-10)の場合と同様に方程式の右辺をゼロとおくと、平衡状態では

$$\langle W \rangle_\varepsilon = \frac{\tau_x Q_x}{2} \quad (4-2-19)$$

となることがわかる。これからエネルギー E_0 の電子ビームの平衡状態における x 方向のビームサイズが次のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{x\beta}^2}{\beta} &= \frac{\langle W \rangle_\varepsilon}{2} = c_\gamma \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4} \\ I_5 &\equiv \oint \frac{H}{|\rho|^3} ds \end{aligned} \quad (4-2-20)$$

C-S不変量 W そのものをエミッタンスと呼ぶこともあるが、この平衡状態における W の平均値で電子ビームのエミッタンスは次のように定義される。

$$\varepsilon_x \equiv \frac{\langle W \rangle_\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_{x\beta}^2}{\beta} \quad (4-2-21)$$

以上の議論は水平垂直方向のベータトロン振動にカップリングがないとしていた。カップリングがある場合の放射積分については大見氏の講義ノートを参照して頂きたい。

参考文献

- 1) 神谷幸秀, OHO'84テキスト
- 2) 鎌田進, OHO'85テキスト
- 3) 山本昇, OHO'88テキスト
- 4) 佐藤朝男, OHO'88テキスト
- 5) E.D.Courant and H.S.Snyder,

となる。

光子の放出はもちろんベータトロン振動の振幅にも影響をあたえる。エネルギーが u の光子が放射されたときの x_β, x_β' の変化は放射減衰の場合に述べたように

$$\delta x_\beta = -\eta \frac{u}{E_0}, \quad \delta x'_\beta = -\eta' \frac{u}{E_0} \quad (4-2-14)$$

となるので、C-S不変量の変化は

$$\begin{aligned} \delta W &= \left(\frac{u}{E_0}\right)^2 (\gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2) \\ &\quad - \frac{2u}{E_0} (\gamma x_\beta \eta + \alpha(\eta x'_\beta + x_\beta \eta') + \beta x'_\beta \eta') \end{aligned} \quad (4-2-15)$$

であるが、 x_β, x_β' の1次の項は初期位相の平均をとると消えるので

$$\begin{aligned} \delta\langle W \rangle &= \left(\frac{u}{E_0}\right)^2 H \\ H &\equiv \gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2 \end{aligned} \quad (4-2-16)$$

となる。エネルギー振動の場合と同様の手順で、まず、光子のエネルギー分布で平均し、さらにリング一周の平均をとって変化率を求めると

$$\begin{aligned} \frac{d\langle W \rangle}{dt} &= \frac{1}{cT} \oint N_\gamma \langle u^2 \rangle \frac{H}{E_0^2} ds \\ &= \frac{55}{16\sqrt{3}} \frac{\hbar}{T} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^3 \oint \frac{P_\gamma H}{\rho E_0^2} ds \end{aligned}$$

- Ann. of Physics, 3 (1958) p.1
- 6)E.D.Courant, R.D.Ruth and W.T.Weng,
AIP Conf. Proc. No. 127 (1985) p.294
 - 7)R.D.Ruth,
AIP Conf. Proc. No. 153 (1987) p.150
 - 8)F.Willeke and G. Ripken,
AIP Conf. Proc. No. 184 (1989) p.758
 - 9)E. Keil, CERN77-13 (1977)p.11
 - 9)B.W.Montague, CERN77-13 (1977)p.37
 - 10)J.S.Bell, CERN87-03(1987) p.5
 - 11) D.A.Edwards and L.C.Teng,
IEEE PAC (1973)p.885
 - 12)M. Sands, Proc. of International School of
Physics "Enrico Fermi" Course 46 (1971)
 - 13)A. Renieri, CERN77-13 (1977)p.82
 - 14)K. Hirata, CERN88-04 (1988)p.62