

# 1 序

電子蓄積リングを回る電子は偏向磁石の磁場を受け加速されシンクロトロン放射光を発生する。この放射光は物性、生物等の広い科学分野で応用されている。これらの実験ではシンクロトロン光が高輝度であることが重要な役割を持つ。輝度  $B$  というのは単位時間  $dt$  に光源の単位面積  $S$  から単位立体角  $d\Omega$  あたりに放射される単位相対周波数幅  $d\omega/\omega$  にある光子の数である。

$$B = \frac{d^4 N}{dt dS d\Omega d\omega/\omega}$$

単位は一般的には

[B] = 光子数/sec/mrad<sup>2</sup>/mm<sup>2</sup>/0.1% relative bandwidth

が使われている。

$B$  中の光源サイズと立体角の積は  $x$ 、 $y$  方向のエミッタンスの積と考えてよい。

$$dS d\Omega \sim \varepsilon_x \varepsilon_y$$

そのため高輝度光源を得るために低エミッタンスリングが要求される。最近の傾向としては運動量分散によるエミッタンスの広がりのないアクロマートな ( $\eta$  が 0) 直線部にアンジュレーターやウィグラーを挿入し偏向磁石による放射光よりはるかに輝度の大きな光が得られるような努力がなされている。

現在世の中で運転されている、電子蓄積リングのエミッタンスはおおむね 100nm くらいである。ところが現在建設中の高輝度放射光用のリングは 1桁小さい 5ないし 10nm のエミッタンスを持つ。ここでは、このような小さなエミッタンスを持ったリングのラティスについて論じる。

具体的な話にはいる前に低エミッタンスの指標について考えてみる。光には回折効果があるため光源のエミッタンスが小さくなればなるほど輝度が大きくなるわけではない。光源の大きさと光の波長が決まると光源からでてくる光の角度分布 ( $\theta$ ) は、光源の大きさをスリット幅 ( $d$ ) と考えると次のような制限を受ける。

$$d \times \theta = \sigma_x \times \sigma_{x'} \sim \frac{\lambda}{4\pi}$$

ここで  $\lambda$  は観測する光の波長である。エミッタンスは

$$\pi \varepsilon \sim \pi \sigma_x \sigma_{x'}$$

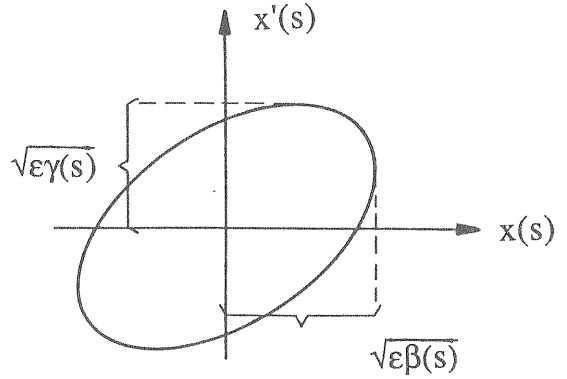


図 1: クーランシュナイダー不変量と位相空間

なので

$$\varepsilon \sim \lambda/4\pi$$

となり、このエミッタンス以下にしても輝度は大きくならないということになる (diffraction limit)。たとえば 10keV (1.2Å) の光の場合、対応するエミッタンスは  $10^{-11} m$  である。これは今我々が考えているエミッタンスよりずっと小さい。

本文にはいる前にエミッタンスの定義についてははっきりさせておく。1次元の運動における不変量

$$\begin{aligned} W &= \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \\ &= \frac{x^2}{\beta} + \frac{(\alpha x + \beta x')^2}{\beta} \end{aligned} \quad (1)$$

をクーランシュナイダー (CS) 不変量と呼ぶ。図 1 からわかるようにクーランシュナイダー不変量は位相空間上で粒子が囲む楕円の面積を  $\pi$  で割ったものに等しい。また放射減衰をして放射励起と平衡になったビームは位相空間上でガウス分布をする。そこで式 (1) の 1 自由度あたりの期待値に相当する

$$\varepsilon = \langle W \rangle / 2$$

をエミッタンスの定義とする。(Appendix D)

## 2 放射積分

### 2.1 公式集

ここでは放射積分の定義と加速器パラメータとの関係を述べる。先に公式をざっと並べ、後で証明することにする。

通常の定義にしたがい、座標系は水平方向を  $x$ 、垂直方向を  $y$  にとっている。 $\alpha_x$ 、 $\beta_x$ 、 $\gamma_x$  はツイスパラメーター、 $\eta$  はデイスパーションである (Appendix B)。偏向磁石は  $y$  方向の磁場を持ち、収束磁石はスキュー成分を持たないと仮定する。また設計上の運動量、軌道を持った粒子を基準粒子と呼ぶ。

$$I_1 = \oint \frac{\eta_x}{\rho} ds \quad (2)$$

$$I_2 = \oint \frac{1}{\rho^2} ds \quad (3)$$

$$I_3 = \oint \frac{1}{|\rho|^3} ds \quad (4)$$

$$I_4 = \oint \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K_x \right) \eta_x ds \quad (5)$$

$$I_5 = \oint \frac{H}{|\rho|^3} ds \quad (6)$$

$$\frac{\Delta I_4}{\Delta p/p} = \oint 2K_x^2 \eta_x^2 ds \quad (7)$$

ここで、軌道曲率半径  $\rho$ 、収束強度  $K_x$ 、 $H$  は

$$\frac{1}{\rho_x} \equiv \frac{B_y}{p/e} \quad (8)$$

$$K_x \equiv \frac{1}{p/e} \frac{dB_y}{dx} \quad (9)$$

$$H \equiv (\gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2) \quad (10)$$

と定義されている。

加速器のパラメーター

- $\alpha$  : モーメントムコンパクションファクター
- $U_0$  : 基準粒子がリング 1 周したときのエネルギー損失
- $\sigma_\epsilon/E_0$  : エネルギー分散率
- $\tau_x$ 、 $\tau_y$  : ダンピングタイム
- $\epsilon_x$  : 平衡エミッタンス

と放射積分の関係は以下の通りである。

$$\alpha = \frac{I_1}{L} \quad (11)$$

$$U_0 = \frac{2}{3} \frac{r_e E_0^4}{(mc^2)^3} I_2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \right)^2 &= C_q \gamma^2 \frac{I_3}{2I_2 + I_4} \\ &= C_q \gamma^2 \frac{I_3}{I_2 J_\epsilon} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_\epsilon} &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} (2I_2 + I_4) \\ &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_\epsilon \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_x} &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} (I_2 - I_4) \\ &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_x \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{1}{\tau_y} = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_y \quad (16)$$

$$\epsilon_x = C_q \gamma^2 \frac{I_{5u}}{I_2 - I_4} = C_q \gamma^2 \frac{I_{5u}}{I_2 J_x} \quad (17)$$

ここで、

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (18)$$

$$C_q = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} = 3.84 \times 10^{-13} \text{ m} \quad (19)$$

$$J_x = 1 - \frac{I_4}{I_2} \quad (20)$$

$$J_y = 1 \quad (21)$$

$$J_\epsilon = 2 + \frac{I_4}{I_2} \quad (22)$$

と定義されている。 $J_x$  をシンクロトロン振動の減衰分配係数 (damping partition number)、 $J_x$ 、 $J_y$  のことを  $x$ 、 $y$  方向のベータトロン振動の減衰分配係数と呼んでいる。これらの減衰分配係数は

$$J_x + J_y + J_\epsilon = 4 \quad (23)$$

の関係が成り立っている。この関係式は減衰時間が周回時間に比べ充分長いときに一般的に成り立つ式で、 $I_4$  を操作することで減衰時間をこの関係式の範囲内で各方向に分配できる。

RF がらみになるが、ついでに以下の公式も添えておく。

- $\sigma_l$  : バンチ長

$$\sigma_l = \frac{c\alpha}{\Omega} \frac{\sigma_\epsilon}{E_0} = \frac{c\alpha}{2\pi\nu_s/T_0} \frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \quad (24)$$

ここで  $\Omega$  はシンクロトロン周波数で、また  $\nu_s$  はシンクロトロンチューンと呼ばれているもので

$$\nu_s = \Omega \frac{T_0}{2\pi}$$

と定義されている。

## 2.2 証明

- (1) モーメントムコンパクションファクター

以上で述べた公式に対して簡単に証明を述べておく。まず  $I_1$  から述べる。基準粒子に対して運動量のずれた粒子は基準軌道からずれた軌道を運動する。運動量のずれに対する軌道のずれは

$$\Delta x = \eta \Delta p / p$$

であらわされる。 $\eta$  は一般に正なので、運動量の大きな粒子は外側を回るために軌道長が延びる。運動量変化に対する軌道長の変化の割合をモーメントコンパクトションファクターと呼ぶ。

$$\alpha \equiv \frac{\Delta \ell / L}{\Delta p / p} \quad (25)$$

ここで  $\ell$  は  $\rho$  が有限の所 (偏向磁石の中) では次のように表わされる。

$$d\ell = \left( 1 + \frac{\eta_x \Delta p}{\rho p} \right) ds$$

リング1周での軌道は

$$\ell = L + \oint \frac{\eta_x}{\rho} ds \frac{\Delta p}{p}$$

と表わされ、モーメントコンパクトションファクター  $\alpha$  と  $I_1$  の関係は以下のように表わされ、式 (11) が得られる。

$$\alpha = \frac{1}{L} \oint \frac{\eta_x}{\rho} ds = \frac{I_1}{L}$$

## (2) 放射エネルギー

次にリングを回っている電子の放出する放射光のエネルギーを考える。曲率半径  $\rho$  で運動している相対論的電子の単位時間に放射するエネルギー  $P$  は電磁気の教科書にあるように [2]

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} \frac{e^4}{mc^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 B^2 \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2 r_e c^3}{(mc^2)^3} E^2 B^2 \end{aligned}$$

である。ここで  $p = eB\rho$  を使って

$$P = \frac{2}{3} \frac{r_e c}{(mc^2)^3} \frac{E^4}{\rho^2} \quad (26)$$

と書くことが出来る。

基準粒子がリング1周で放出するエネルギーは基準粒子が単位時間に放出するエネルギー  $P_0$  を周回時間  $T_0$  revolution time で積分することで得

られる。またこの積分は周長に対する積分に置き換えると扱いやすい。

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_0^{T_0} P dt = \oint P \frac{ds}{c} \\ &= \frac{2}{3} \frac{r_e E_0^4}{(mc^2)^3} \oint \frac{1}{\rho^2} ds \end{aligned}$$

放出エネルギー  $U_0$  と  $I_2$  の関係は以下のように表わされ式 (12) が得られる。

$$U_0 = \frac{2}{3} \frac{r_e E_0^4}{(mc^2)^3} I_2$$

## (3) シンクロトロン振動の減衰

シンクロトロン振動の減衰時間は Appendix.A にあるように

$$\frac{1}{\tau_\epsilon} = \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{d\epsilon} \quad (27)$$

である。粒子のエネルギーに対する放出エネルギーの関係が求まればシンクロトロン振動の減衰時間は求められる。

リング1周に対して粒子の放出するエネルギーは粒子軌道の変化も考慮して、以下のようになる。

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T P dt = \frac{1}{c} \oint P dl \\ &= \frac{2}{3} \oint \frac{e^2 r_e c^3}{(mc^2)^3} E^2 B^2 dl \end{aligned}$$

電子のエネルギー損失、 $U$  のエネルギーに対する微分は、直接エネルギーに関係した項、エネルギー差による軌道のずれからくる項と軌道のずれに対して磁場  $B$  が関係する項に分けられる。基準粒子から  $\epsilon$  ずれたエネルギーを持った粒子の軌道長は

$$d\ell = \left( 1 + \frac{\eta \epsilon}{\rho E} \right) ds$$

で表わされる。また  $\delta x = \eta \epsilon / E$  ずれた場所での磁場は

$$B = B_0 + \frac{dB_y}{dx} \eta \frac{\epsilon}{E}$$

である。以上から

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{c} \oint P(E + \epsilon, B + B' \eta \frac{\epsilon}{E}) \left( 1 + \frac{\eta \epsilon}{\rho E} \right) ds \\ &= \oint \left( P_0 + \frac{\partial P}{\partial E} \epsilon + \frac{\partial P}{\partial B} B' \eta \frac{\epsilon}{E} \right) \left( 1 + \frac{\eta \epsilon}{\rho E} \right) ds \end{aligned}$$

$$= U_0 + \frac{\epsilon}{c} \oint \left( \frac{\partial P}{\partial E} + \frac{\partial P}{\partial B} B' \frac{\eta}{E} + P_0 \frac{\eta}{\rho E} \right) ds$$

だから、 $dU/d\epsilon$  は

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\epsilon} &= \frac{1}{c} \oint \left( \frac{\partial P}{\partial E} + \frac{\partial P}{\partial B} B' \frac{\eta}{E} + \frac{P_0 \eta}{E \rho} \right) ds \\ &= \frac{1}{c} \oint \left\{ \frac{2P_0}{E} + \frac{2P_0}{B} B' \frac{\eta}{E} + P_0 \frac{\eta}{\rho} \right\} ds \\ &= \frac{1}{Ec} \oint P_0 \left\{ 2 + \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K_x \right) \eta \right\} ds \\ &= \frac{2r_e \gamma^2}{3} \oint ds \left\{ \frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K_x \right) \eta \right\} \end{aligned}$$

となる。そこで  $I_4$  を式 (5) のように定義すると  $dU/d\epsilon$  は

$$\frac{dU}{d\epsilon} = \frac{2r_e \gamma^2}{3} (2I_2 + I_4)$$

と書くことができエネルギー減衰時間は式 (14) のように

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} (2I_2 + I_4) = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_x$$

となる。

#### (4) ベータトロン振動の減衰

横方向の減衰は、RF 空洞による効果とコンパクションによる効果に分けられる。RF による効果は、 $x$  方向も、 $y$  方向も同様でここでは  $x$  方向について述べる。RF を通過する前後で  $x'$  の変化は以下のように書ける。

$$x'(s_+) = x'(s_-) \left( 1 - \frac{\epsilon}{E} \right)$$

$$\Delta x' = -x' \frac{\epsilon}{E}$$

それに伴う CS 不変量の変化は上の式を式 (1) に代入することで得られる。

$$\begin{aligned} \Delta W &= 2\alpha x \Delta x' + 2\beta x' \Delta x' \\ &= -2(\alpha x x' + \beta x'^2) \frac{\epsilon}{E} \end{aligned}$$

ここで粒子のベータトロン初期位相に対して平均操作をすることで得られる以下の式を使って、

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{W\beta}{2} \\ \langle x'^2 \rangle &= \frac{W\gamma}{2} \\ \langle x x' \rangle &= -\frac{W\alpha}{2} \end{aligned} \quad (28)$$

CS 不変量はリング 1 周につき

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{T_0} &= -\frac{U_0}{ET_0} W \\ &= -\frac{2r_e \gamma^3}{3T_0} I_2 W \end{aligned}$$

減少する。

$x$  方向は  $\eta$  が 0 でないところでの放射によって、エネルギー（運動量）が  $\epsilon$  変化し閉軌道が変化するので、

$$\begin{aligned} \Delta x &= -\eta \frac{\epsilon}{E} \\ \Delta x' &= -\eta' \frac{\epsilon}{E} \end{aligned}$$

の振幅を持ったベータトロン振動が加わる。それによる CS 不変量の変化は上の式を式 (1) に代入することにより得られる。

$$\begin{aligned} \Delta W &= 2\gamma x \Delta x + 2\alpha \Delta x x' + 2\alpha \Delta x' x + 2\beta x' \Delta x' \\ &= (2\gamma x + 2\alpha x') \left( -\eta \frac{\epsilon}{E} \right) \\ &\quad + (2\alpha x + 2\beta x') \left( -\eta' \frac{\epsilon}{E} \right) \end{aligned}$$

ここで振幅  $x$  を持つ電子のエネルギー損失は

$$\begin{aligned} \epsilon &= -P \frac{dl}{c} = \left( -P_0 - \frac{\partial P}{\partial B} B' x \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{ds}{c} \\ &= -P_0 \left( 1 + \frac{2B'}{B} x \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \frac{ds}{c} \end{aligned}$$

である。これを  $\Delta W$  の式に代入してベータトロン初期位相に対して平均をとると、 $x, x'$  に対して奇数次の項は消え、2 次の項が残る。

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{P_0}{E} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{2B'}{B} \right) \\ &\quad \{ 2\eta(\gamma x^2 + \alpha x x') + 2\eta'(\alpha x^2 + \beta x'^2) \} \end{aligned}$$

式 (28) を使って

$$\Delta W = \frac{P_0}{E} \left( \frac{1}{\rho} + 2\frac{B'}{B} \right) W \eta$$

を得る。リング 1 周に対して積分すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{T_0} &= \frac{1}{cT_0 E} \oint P_0 \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K_x \right) \eta ds W \\ &= \frac{2r_e \gamma^3}{3T_0} I_4 W \end{aligned}$$

ここにでてくる  $I_4$  はエネルギー振動の減衰に出てきた  $I_4$  と同じものである。RF による効果を加えると、 $x$  方向のベータトロン振動の減衰時間は

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{\sigma_x} \frac{d\sigma_x}{dt} = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} (I_2 - I_4) = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_x$$

となる。y方向は設計上 $\eta$ は0なのでRFによる減衰しかないため、

$$\frac{1}{\tau_y} = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 = \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_y$$

となり式(15)(16)が得られる。

$I_4$ の中の $\rho K_x$ を含む積分は偏向磁石と収束磁石が分離しているときは0であるが、CODが発生したときは収束磁石が $\rho$ を持つようになる(Combined magnet)。粒子の運動量がずれたときはCODが $x = \eta \Delta p/p$ の様に発生し、収束磁石から $\rho = K_x \Delta x = K_x \eta \Delta p/p$ の曲率成分ができる。そのため $I_4$ は以下のように変化し式(7)が得られる。

$$\Delta I_4 = \oint 2K_x^2 \eta_x^2 ds \frac{\Delta p}{p} \quad (29)$$

$$\Delta J_x = \frac{\Delta I_4}{I_2}$$

これが先に述べた減衰分配係数をずらす例である。実際にはCODが発生すると高次の磁石(6極など)により収束力が出て、トゥイスパラメータをゆがめるので、どこまで $\Delta p/p$ が取れるか注意が必要である。

#### (5) エネルギー分散とバンチ長

エネルギー分散はエネルギー方向の減衰と量子励起の平衡によって決まる。エネルギー $\epsilon$ の光子の放射によって、電子はエネルギーを失い、シンクロトン振幅が発生する。振幅は

$$\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)^2 = \frac{\epsilon^2}{E_0^2}$$

で表わされる。放射される光子はエネルギーに対し分布を持っているので、リング1周で発生するエネルギー振幅はこの分布に対して積分しなければならない。

$$\frac{\Delta E_{ex}^2}{T_0} = \oint ds \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon / \oint ds$$

ここで光子のエネルギー分布関数に対する積分を半古典的に扱う。この詳しい計算は大徳'84の神谷氏の講義録のAppendix Bにかかっているので、そちらを参考にしていきたい。

$$P_0 = \int_0^\infty \wp(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) d\epsilon$$

$\wp(\epsilon)$ は放射光パワーの波長分布で古典電磁気によって求められる。つまり放出光子の全パワーは

光子のエネルギー分布に光子のエネルギーを掛け積分したものに等しい。そこで

$$\int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon$$

$$= \int_0^\infty \epsilon \wp(\epsilon) d\epsilon$$

を計算することによって

$$= \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e \hbar m c^4 \frac{\gamma^7}{\rho^3} \quad (30)$$

が求められる。

それにたいしエネルギー振幅は、減衰時間 $\tau_\epsilon$ で減衰する。リング1周あたりのエネルギーの変化は以下のように表わされる。

$$\frac{\Delta E_d^2}{T_0} = -2 \frac{\Delta E^2}{\tau_\epsilon}$$

平衡エネルギー振幅は以下の式で決定される。

$$\frac{\Delta E_{ex}^2}{T_0} + \frac{\Delta E_d^2}{T_0} =$$

$$\frac{1}{cT_0} \oint ds \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon - \frac{2\Delta E^2}{\tau_\epsilon} = 0$$

平衡エネルギー振幅の2乗を振幅の2乗の期待値と考えエネルギー分散は振幅の2乗の期待値の1/2であるから(Appendix D)

$$\left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)^2$$

$$= \frac{\tau_\epsilon}{4 c T_0 E_0^2} \oint \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon$$

$$= \frac{\tau_\epsilon r_e}{4 T_0} \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{\hbar}{m c} \gamma^5 \oint ds \frac{1}{|\rho|^3}$$

$$= C_q \gamma^2 \frac{I_3}{2I_2 + I_4}$$

で表すことができる。ここで $I_3$ 、 $C_q$ は式(4)(19)で表わされている。

バンチ長は基準粒子に対する時間の進み $\tau$ の分散に $c$ を掛ければよい。シンクロトン振動の時間振幅 $\Delta\tau$ はエネルギー振幅と以下の関係にある。(Appendix A)

$$\frac{d\tau}{dt} = \alpha \frac{\epsilon}{E}$$

振動に対する平均をとると

$$\left\langle \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \right\rangle = \alpha^2 \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E}\right)^2$$

で、また以下の関係によって (Appendix D)

$$\langle \tau^2 \rangle = \frac{1}{\Omega^2} \left\langle \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 \right\rangle$$

シンクロトロン振動の時間分散は

$$\langle \tau^2 \rangle = \sigma_\tau^2 = \frac{\alpha^2}{\Omega^2} \left( \frac{\sigma_\epsilon}{E} \right)^2$$

となり、バンチ長は

$$\sigma_t = c\sigma_\tau = \frac{c\alpha}{\Omega} \frac{\sigma_\epsilon}{E}$$

によって求めることができる。

### (6) 平衡エミッタンス

平衡エミッタンスは、ベータトロン振動のダンピングと量子励起の平衡によって決まる。エネルギー  $\epsilon$  の光子の放射によって、電子はエネルギーを失い、 $x$  方向にベータトロン振幅が発生する。また光子は前方に  $\Delta\theta = 1/\gamma$  の広がりを持って放出されるので電子はその反跳によって横 ( $x$  と  $y$ ) 方向のキックを受ける。 $x$  方向にしか  $\eta$  が無いリングでは  $x$  方向のエミッタンスは両方の効果が効くが、 $y$  方向では後者の効果のみとなる。

まず前者の  $\eta$  による効果からを考える。エネルギー  $\epsilon$  の光子の放出によって閉軌道が変化し発生するベータトロン振動は

$$\Delta x = -\eta \frac{\epsilon}{E}$$

$$\Delta x' = -\eta' \frac{\epsilon}{E}$$

であり、それによって発生する CS 不変量は式 (1) に代入することによって以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta W_x &= (\gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2) \left( \frac{\epsilon}{E_0} \right)^2 \\ &= H(s) \left( \frac{\epsilon}{E_0} \right)^2 \end{aligned}$$

この  $H(s)$  は式 (10) で定義されている。放射される光子はエネルギーに対し分布を持っているので、エネルギー分散で行ったのと同じ処理をする。 $H(s)$  のみが新たに入っている。

$$\frac{\Delta W_{ex}}{T_0} = \oint ds H(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon / \oint ds$$

それにたいし  $x$  方向の CS 不変量は、減衰時間  $\tau_x$  で減衰する。リング 1 周あたりの CS 不変量の変化は以下のように表わされる。

$$\frac{\Delta W_d}{T_0} = -2 \frac{W}{\tau_x}$$

平衡 CS 不変量は以下の式で決定される。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_{ex}}{T_0} + \frac{\Delta W_d}{T_0} &= \frac{1}{cT_0} \oint ds H(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon - \frac{2W_{eq}^2}{\tau_x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$W_{eq}$  について解くとエミッタンスが得られる。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2} W_{eq} = \frac{1}{2} \langle W \rangle \\ &= \frac{\tau_x}{4} \frac{1}{cT_0 E^2} \oint ds H(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{\tau_x r_e}{2T_0} \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \gamma^5 \oint ds \frac{H(s)}{|\rho|^3} \\ &= C_q \gamma^2 \frac{I_5}{I_2 - I_4} \end{aligned}$$

ここで放射積分  $I_5$ 、 $C_q$  は式 (6)(19) で表わされている。

角度分布を持つ光子の反跳から発生する CS 不変量は以下で表わされる。

$$\Delta \epsilon = \beta \frac{u^2}{E_0^2} \theta^2$$

前者に対して  $H(s)$  が  $\beta\theta^2$  に変わっただけである。ここでエネルギー分布と角度分布の相関を無視し

$$\langle \theta^2 \rangle = 1/\gamma^2$$

と置く。ダンピングとの平衡条件から

$$\begin{aligned} \epsilon_{x,\gamma} &= \frac{\tau_x}{4\gamma^2} \frac{1}{cT_0 E^2} \oint ds \beta_x(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon \\ &= C_q \frac{I_{\beta x}}{I_2 - I_4} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 $I_{\beta x}$  は以下の様に定義されている。

$$I_{\beta x} = \oint \frac{\beta_x}{|\rho|^3} ds \quad (32)$$

2つのメカニズムからでてくるエミッタンスの比は

$$\frac{\epsilon_x}{\epsilon_{x,\gamma}} = \frac{\gamma^2 I_5}{I_\beta}$$

であり、1 GeV 程度のリングで  $\gamma^2 = 4 \times 10^6$  なので、ラティスにもよるが  $x$  方向のエミッタンスは  $\eta$  による効果だけできまる。実際のリングにはアラインメントエラーや COD があって、それらから発生する  $\eta$  でエミッタンスが大きくなる。それらは COD 補正などで計算上のエミッタンスになるように補正される。

これに対して設計上は  $y$  方向に  $\eta$  がないのでエミッタンスは、

$$\varepsilon_{y,\gamma} = C_q \frac{I_{\beta y}}{I_2 - I_4} \quad (33)$$

のみであらわされる。ここで、 $I_{\beta y}$  は

$$I_{\beta y} = \oint \frac{\beta_y}{|\rho|^3} ds \quad (34)$$

である。 $y$  方向のエミッタンスは  $x$  方向に比べ非常に小さくなる ( $1\text{GeV}$  で  $\varepsilon_y \sim 10^{-6}\varepsilon_x$ )。実際にはアラインメントエラーや COD によって  $y$  方向のエミッタンスはもっと大きくなる。COD 補正後残る、カップリングの効果 (数%) の方がこの反跳による  $10^{-6}$  の効果より大きくなるので実際にはカップリングを含めた理論で論じなければならない。カップリングを考慮した放射積分は 5 節で論じる。

### 3 低エミッタンスにするために

前節で求めたエミッタンスの式をもう少し具体的に試してみる。エミッタンスは

$$\varepsilon \propto \frac{I_5}{I_2 - I_4} = \frac{I_5}{I_2 J_x}$$

と書け、 $I_i$  は幾何的な (磁石の配置と強さ) 量だけで決まる。低エミッタンスを実現するためには  $I_5$  を小さくし、 $I_2$ 、 $J_x$  を大きくすればよい。COD が無いときリング内で有限の  $\rho$  をもつ磁石は偏向磁石だけなので、放射積分は偏向磁石内だけで行えばよい。すべての偏向磁石が同じ曲率半径を持っているとすると、

$$I_2 = \oint \frac{1}{\rho^2} ds = \frac{2\pi}{\rho}$$

$$I_5 = \frac{1}{\rho^3} I'_5 \quad I'_5 = \int_{\text{Bend}} H ds$$

$I_2$  はリングの曲率半径で決まってしまう。しかし曲率半径は偏向磁石の磁場で決まるので、それほど小さくはできない。常伝導磁石を使えば  $1T$  がいいところである。

$I_5$  は偏向磁石の中のツイスパラメータに依存しているのでラティスの工夫で調整できる。まず偏向磁石の入り口の  $\alpha_0$ 、 $\beta_0$ 、 $\eta_0$ 、 $\eta'_0$  を使って、偏向磁石内のツイスパラメータを表すと、

$$\beta = \beta_0 \cos^2 \frac{\ell}{\rho} - 2\alpha_0 \rho \sin \frac{\ell}{\rho} \cos \frac{\ell}{\rho} + \gamma_0 \rho^2 \sin^2 \frac{\ell}{\rho}$$

$$\alpha = \frac{\beta_0}{\rho} \sin \frac{\ell}{\rho} \cos \frac{\ell}{\rho} + \alpha_0 \left( 1 - \sin^2 \frac{\ell}{\rho} \right) - \gamma_0 \rho \sin \frac{\ell}{\rho} \cos \frac{\ell}{\rho}$$

$$\gamma = \frac{\beta_0}{\rho} \sin^2 \frac{\ell}{\rho} + \frac{2\alpha_0}{\rho} \sin \frac{\ell}{\rho} \cos \frac{\ell}{\rho} + \gamma_0 \cos^2 \frac{\ell}{\rho}$$

$$\eta = \eta_0 \cos \frac{\ell}{\rho} + \eta'_0 \rho \sin \frac{\ell}{\rho} + \rho \left( 1 - \cos \frac{\ell}{\rho} \right)$$

$$\eta' = -\frac{\eta_0}{\rho} \sin \frac{\ell}{\rho} + \eta'_0 \cos \frac{\ell}{\rho} + \sin \frac{\ell}{\rho}$$

となる。(Appendix B)

これらの式を使って偏向磁石の中の  $H$  の積分を実行すると以下ようになる。

$$I'_5 = \int_0^L (\gamma \eta^2 + 2\alpha \eta \eta' + \beta \eta'^2) ds$$

$$= (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) L$$

$$+ 2(\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') \rho \left( 1 - \cos \frac{L}{\rho} \right)$$

$$- 2(\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') \rho \left( L - \rho \sin \frac{L}{\rho} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_0 \left( L - \frac{\rho}{2} \sin \frac{2L}{\rho} \right)$$

$$- 2\alpha_0 \rho^2 \left( \frac{3}{4} - \cos \frac{L}{\rho} + \frac{1}{4} \cos \frac{2L}{\rho} \right)$$

$$\gamma_0 \rho^2 \left( \frac{3}{2} - 2\rho \sin \frac{L}{\rho} + \frac{\rho}{4} \sin \frac{2L}{\rho} \right)$$

$L/\rho$  の 2 次までとると、

$$I'_5 = (\gamma_0 \eta_0^2 + 2\alpha_0 \eta_0 \eta'_0 + \beta_0 \eta_0'^2) L$$

$$+ (\alpha_0 \eta_0 + \beta_0 \eta_0') \frac{L^2}{\rho}$$

$$- (\gamma_0 \eta_0 + \alpha_0 \eta_0') \frac{L^3}{3\rho}$$

$$+ \left( \frac{\beta_0 L}{3} - \frac{\alpha_0 L^2}{4} + \frac{\gamma_0 L^3}{20} \right) \frac{L^2}{\rho^2} \quad (35)$$

ツイスパラメータはどの偏向磁石でも同じ値になっていることが多い。そのため 1 つのセルの中の偏向磁石の中のツイスパラメータのようすを知れば、リング全体の大体の  $I'_5$  つまりはエミッタンスを知ることができる。この式を最適化してやればエミッタンスの最小値が出せるので設計のガイドラインになるだろう。

エミッタンスは  $I_4$  を操作することによっても制御できる。通常の Rectangular 型の偏向磁石で

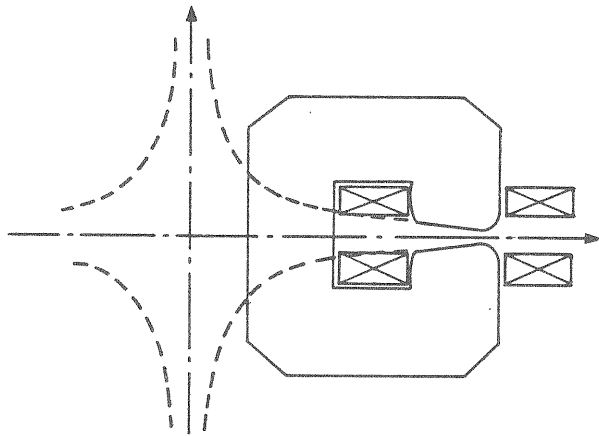


図 2: Combined 型の偏向磁石

きているリングでは、 $x$  方向のエッチ効果も小さく  $I_4$  は  $I_2$  に対して

$$\frac{I_4}{I_2} \sim \frac{\eta}{\rho}$$

の大きさをもつ。これは小さな値のためはエミッタンスにはあまり効かない。

ところが図 2 のような Combined 型の偏向磁石を使って、 $\rho$  と  $K$  を両方持つ磁石を使えば  $I_4$  を小さく ( $|I_4|$  を大きく) でき、エミッタンスを小さくできる。

また RF 周波数を変化させることによって、運動量変化を起こさせ、 $\Delta x = \eta \Delta p / p$  の COD を起こした状態で収束磁石を通し  $\rho$  と  $K$  を作ることも同じことができる。

$$\Delta J_x = \frac{\Delta I_4}{I_2} = \frac{1}{I_2} \oint 2K_x^2 \eta^2 ds \frac{\Delta p}{p}$$

$I_2$  がダンピングウィグラーなどによってやたら大きな場合には効きが悪い。 $J_x$  を大きくすると式 (23) の関係から、シンクロトロン振動の減衰時間が長くなるので、 $I_4$  は  $-2 \times I_2$  までしか小さくはできない。 $J_x$  は 3 倍が限界である。

## 4 いろいろなラティス

### 4.1 始めに

具体的なラティスの例の説明にはいる前に、いままでの加速器がどのように構成されているか見てみる。図 3, 4, 5 に KEK にある (陽) 電子リングである、PF リング、トリスタン AR、トリスタン MR のラティスを示す。

図 3 は全体の 1/4 がしめされていて、その鏡影対称と合わせた 1/2 部分が 2 つ繰り返されリング全体をかたちづくる。この 1/2 部分をスーパーピリオドとよび、このようにスーパーピリオドが 2 つでできているリングをスーパーピリオド 2 をもつという表し方をする。図を見てみると、(a) で示した部分は QF と書いた focusing quadrupole magnet (F)、磁石のないスペース (O)、偏向磁石 (B)、磁石のないスペース (O)、QD と書いた defocusing quadrupole magnet (D) という並びの、セルと呼ばれているものが 3 つ (図では 1.5) 繰り返されている。ここで B の有無を無視した FODO の並びから FODO セルと呼ばれている。つぎに (b) で示した部分は  $\eta$  が 0 になっていて、挿入光原や RF が置かれている。(a) と (b) の間の (c) と書いた部分で  $\eta$  が 0 になるように工夫されている。この部分をディスペーションサプレッサーと呼んでいる。(d) の部分は偏向磁石で収束磁石を挟み両端で  $\eta$  が 0 になるようにし (アクロマートにするという表現をよく使う)  $\eta$  が 0 の直線部を作っている。PF では合計 6 つの  $\eta$  が 0 の直線部がある。

つぎに図 4 の AR のラティスを見てみる。やはりが 1/4 図示されていて鏡影対称、スーパーピリオド 2 を持つ。PF と違って FODO セルが多くあり、トゥイスパラメータの周期性が良く見え、一目で FODO タイプであることがわかる。(a) が FODO セルの部分で周回部分を形づくっている。(b) が  $\eta$  が 0 の直線部で、(c) がディスペーションサプレッサーである。 $\eta$  が 0 の直線部は 4 つである。

図 5 の MR では 1/8 が図示されていて、鏡影対称、スーパーピリオド 4 を持つ。MR ではさらに FODO セルの数が増えている。また RF が多量にあるため、その部分も FODO セル構造になっている。(a) が周回部分の FODO セルの集まり、(b) が  $\eta$  が 0 の直線部、(c) がディスペーションサプレッサー及び次の RF セルとのマッチングを取る部分、(d) が RF セルである。(e) は衝突点で、(f) はセルから衝突点へのマッチングセクションである。 $\eta$  が 0 の直線部はスーパーピリオド数と同じ 4 つである。

以上からわかるように、これらのリングは FODO セルを使って周回部分を作り、希望するオプティクスと、それらをつなげるマッチングセクション



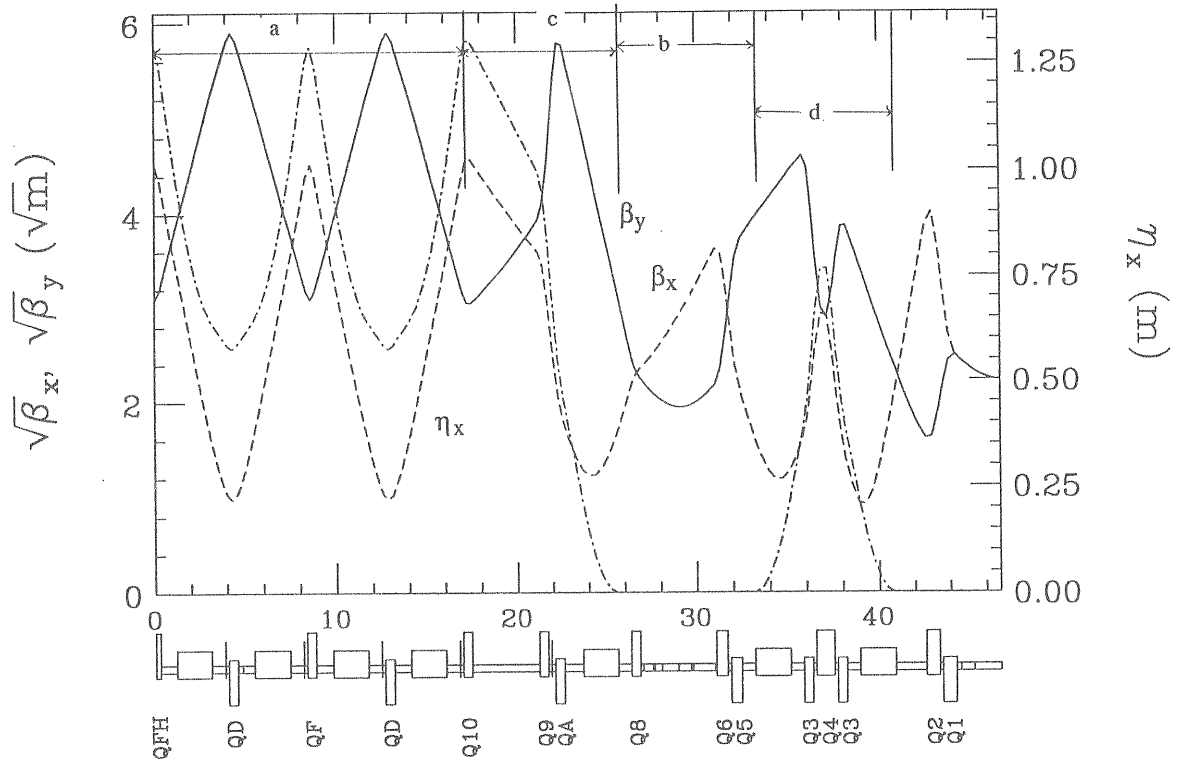


図3: PF リングのラティスパラメータ

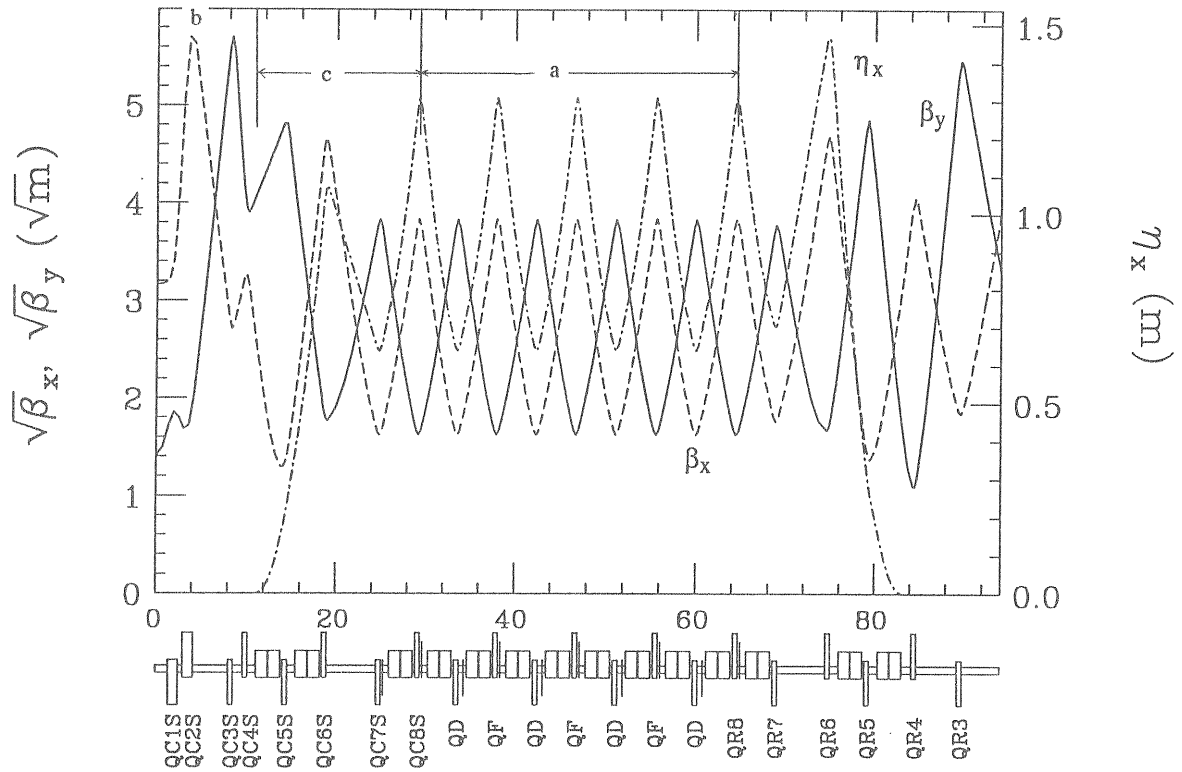


図4: トリスタンARのラティスパラメータ

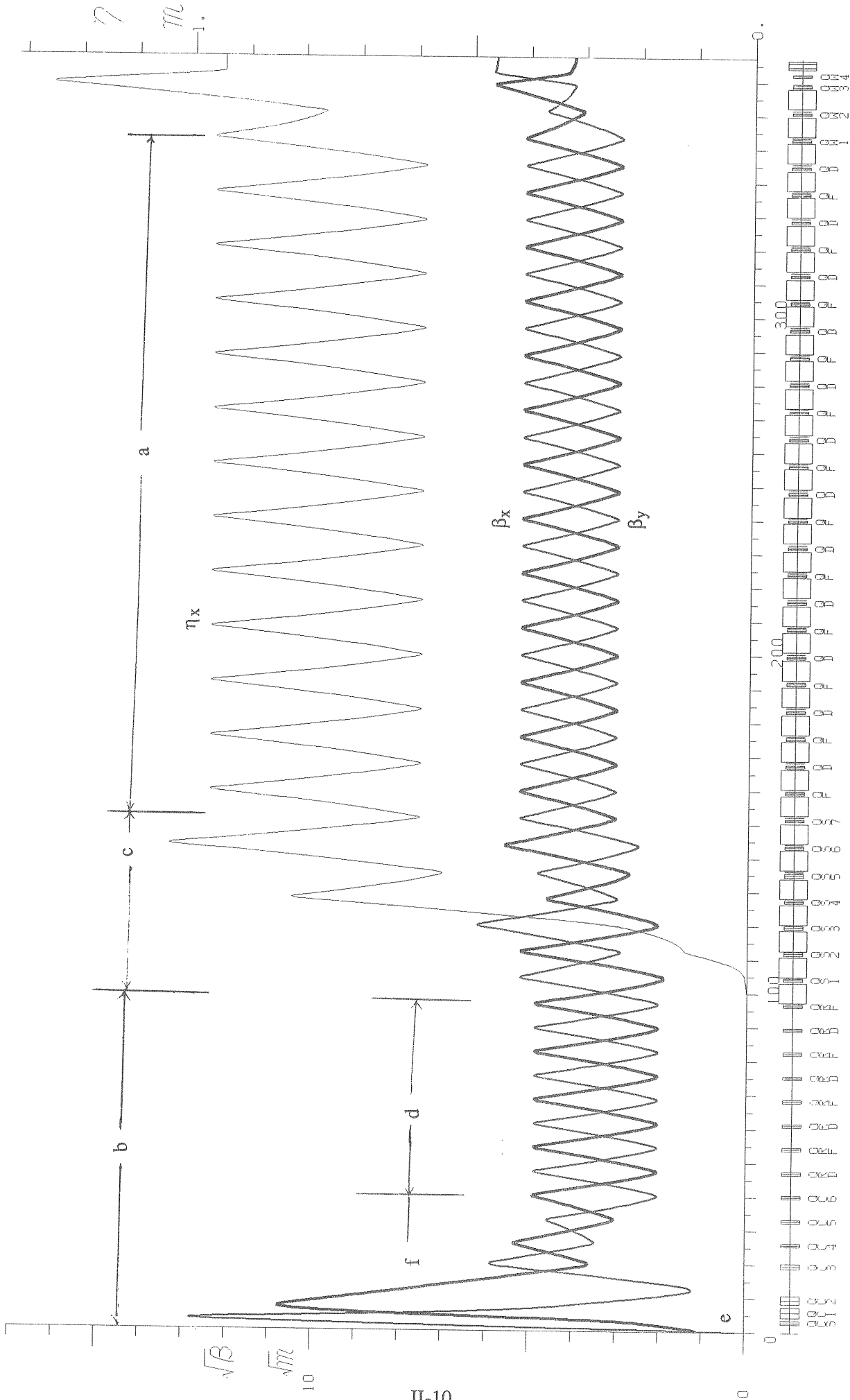


図 5: トリスタンMR のラティスパラメータ

からなることがわかる。また直線部でも長い距離を移送するときはセルを使う。長い距離を移送するとき、トウイスパラメーターを適当な値にとじこめておくには、周期条件を使って振動させておくのがもっとも簡単だからである。

それではここで、セルについてもっと良く考えてみる。セルが周期条件をもつためには、セルの入り口と出口のトウイスパラメーターが等しくなければならないためクーランシュナイダーのパラメーターを使って、 $T_{cell}$ は以下のように書ける。

$$T_{cell} = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma_0 \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (36)$$

ここで  $\mu$  のことを位相進度という。 $\mu$ は

$$\mu = \int_0^{L_{cell}} \frac{ds}{\beta} \quad (37)$$

という関係で一意的に決まっている。移送行列  $T_{cell}$  のトレースは  $2 \cos \mu$  であるため 2 以下でなければならない。その条件のため任意の収束磁石の強さで周期解があるわけではない。どのような領域で周期解があるかを示すのに、よくネクタイ図が用いられる。FODO では QD の強さが縦軸、QF の強さが横軸に取られ、周期解がある領域を斜線で描くとネクタイ図の形になることからそう呼ばれている。ネクタイ図の具体的な例は以下の節ででてくる。

## 4.2 FODO

前の節で触れた FODO ラティスについて詳しく述べる。まず周期的条件を考えてみる。簡単のため図6にあるような薄肉レンズの極限で先ず考えてみる。セル内の  $x$  方向の移送行列は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} T_{x,cell} &= T_{L/2} T_{QD} T_L T_{QF} T_{L/2} = \\ & \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 + K_d/2 - 3K_f/2 - K_d K_f/2 & \\ (K_d - K_f - K_d K_f)/L & \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} L(2 + 3K_d/4 - 3K_f/4 - K_d K_f/4) \\ 1 + 3K_d/2 - K_f/2 - K_d K_f/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

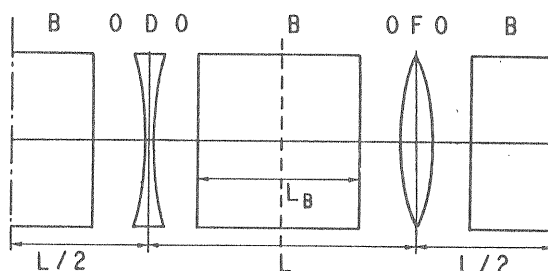


図6: FODO ラティスの例

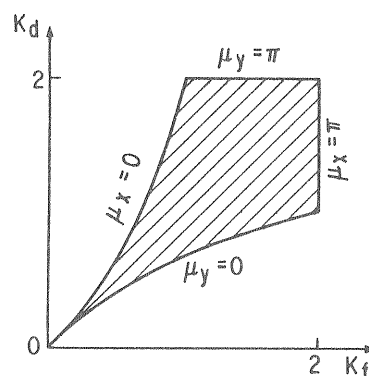


図7: FODO のラティスのネクタイ図

ここで  $K_f = k_f L$ 、 $K_d = k_d L$  としている。移送行列のトレースから

$$\cos \mu_x = 1 + K_d - K_f - \frac{K_d K_f}{2}$$

また  $K_d$  と  $K_f$  を入替えると  $y$  方向の関係式が出る。

$$\cos \mu_y = 1 + K_f - K_d - \frac{K_d K_f}{2}$$

周期的条件は  $\cos \mu$  が実数であること、つまり

$$-1 < 1 + K_d - K_f - \frac{K_d K_f}{2} < 1$$

$$-1 < 1 + K_f - K_d - \frac{K_d K_f}{2} < 1 \quad (38)$$

である。これをもとにネクタイ図を書くと図7のようになる。斜線の部分が周期的条件が満たされる領域である。また FODO では位相進度が  $180$  度を越えることはない。これは図8から明らかのように、 $x > 0, x' = 0$  でセルの入り口をスタートした粒子はセルの出口で  $x < 0, x' = 0$  まで運動するのが精いっぱいである。

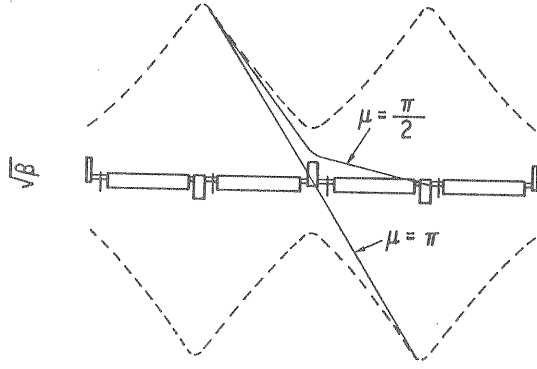


図 8: FODO のラティス内の粒子の運動

移送行列を式 (36) と等しいとすることによってツイスパラメータは以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{K_d + K_f}{2 \sin \mu} \\ \gamma &= \frac{-K_d + K_f + K_d K_f}{L \sin \mu} \\ \beta &= \frac{L(2 + \frac{3K_d}{4} - \frac{3K_f}{4} - \frac{K_d K_f}{4})}{\sin \mu}\end{aligned}\quad (39)$$

偏向磁石あたりの偏向角を $\theta$ とし、薄肉レンズで近似し、中心での $\theta$ キックを与えるとする、 $\eta$ を次の式から求めることができる。

$$\eta = T_{x,cell} \eta + V_{x,cell}$$

$V_{x,cell}$ は偏向磁石からでてくる $V_\eta = (\eta, \eta')$ にセルの移送行列を掛けたものである。偏向磁石が2つあるので $V_\eta$ は2ヶ所(ここでは1つのBを2つに分けているので3ヶ所)で発生する。移送行列を $3 \times 3$ 行列で表わしたときの3列目である。

$$\begin{aligned}V_{x,cell} &= T_{l/2} T_{QD} T_{l/2} [V_B + T_{l/2} T_{QF} T_{l/2} V_{B/2}] + V_{B/2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_f \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} 1 & \ell/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta/2 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\eta$ も周期的であるためには

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = T_{x,cell} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} + V_{x,cell}$$

でなければならない。 $\eta$ は以下の式で求めることができる。

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = (I - T_{x,cell})^{-1} V_{x,cell}$$

退屈な行列計算の後に

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{L\theta}{2(1 - \cos \mu_x)} (4 + K_d - K_f - K_d K_f) \\ \eta' &= \frac{\theta}{2(1 - \cos \mu_x)} (K_d + K_f)\end{aligned}$$

が求まる。

このラティスでの $I'_5$ を求めてみる。これまでに得られたツイスパラメータの結果を代入して

$$\begin{aligned}I'_5 &= \gamma \eta^2 + 2\alpha \eta \eta' + \beta \eta'^2 \\ &= \frac{L\theta^2}{4 \sin \mu_x (1 - \cos \mu_x)^2} \\ &\quad \left[ (-K_d + K_f + K_d K_f)(4 + K_d - K_f - K_d K_f/4)^2 \right. \\ &\quad \left. - (K_d + K_f)^2 (4 + K_d - K_f - K_d K_f/4) \right. \\ &\quad \left. + (K_d + K_f)^2 \left( 2 + \frac{3K_d}{4} - \frac{3K_f}{4} - \frac{K_d K_f}{4} \right) \right]\end{aligned}$$

ここで簡単のため $K_d = K_f = K$ とする。

$$\cos \mu = 1 - \frac{K^2}{2}$$

$$K = 2 \sin \frac{\mu}{2}$$

から

$$I'_{5,cell} = L\theta^2 \frac{1 - \sin^2 \frac{\mu}{2} + \frac{1}{8} \sin^4 \frac{\mu}{2}}{\sin^3 \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2}}$$

となる。エミッタンスは

$$\varepsilon = C_q \gamma^3 \theta^3 \frac{L}{L_B} \frac{1 - \sin^2 \frac{\mu}{2} + \frac{1}{8} \sin^4 \frac{\mu}{2}}{\sin^3 \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2}}$$

となる。これをプロットしたものが図9である。エミッタンスの極小は微分によって求められる。

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\mu}{2} &= \frac{20 - 2\sqrt{10}}{15} \\ \mu &\sim 145 \text{ deg}\end{aligned}\quad (40)$$

のときで

$$\varepsilon \sim C_q \gamma^2 \theta^3 \frac{L}{L_B} \times 0.74 \quad (41)$$

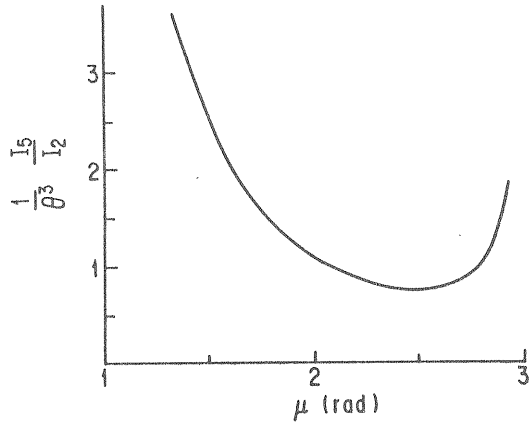


図 9: FODO ラティスの位相進度とエミッタンスの関係

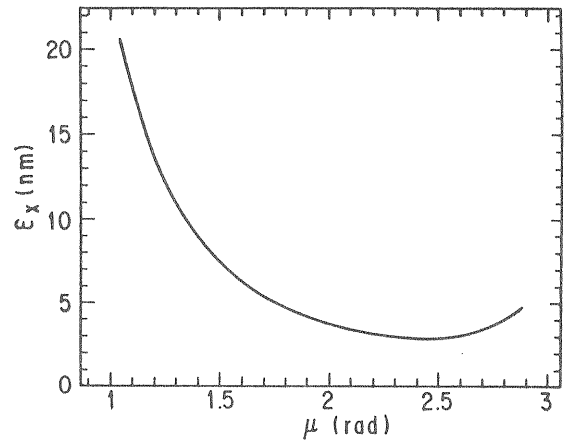


図 11: トリスタンノーマルセルの位相進度とエミッタンス

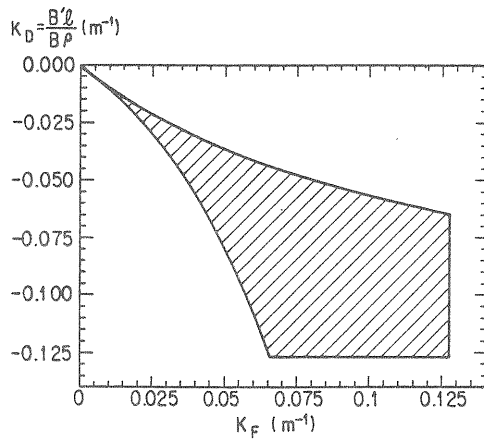


図 10: トリスタンのノーマルセルのネクタイ図

である。ただし  $L_B$  は偏向磁石の長さである。ここで  $\mu$  にたいする依存性以上に重要なことは、エミッタンスが偏向磁石あたりの偏向角  $\theta$  の 3 乗に比例していることである。つまり偏向角を半分にするれば（磁石の数は 2 倍になるが）エミッタンスは  $1/8$  になるのである。

実際磁石は厚みを持っていて、 $K_d$ 、 $K_f$  別の値を持ち  $x$ 、 $y$  それぞれ異なる位相進度を持つので数値計算にたよることになる。例としてトリスタンのノーマルセルで計算してみる。まずネクタイ図は図 10 のようになる。チューンとエミッタンスの関係は図 11 のようになり、やはり位相進度 145 度あたりで極小値をとる。 $I_5/I_2\theta^3$  の極小値は 1.4 で薄肉近似の 2 倍になっている。この違いは偏向磁石の厚さからくる。

実際のリングでは RF、挿入光源、衝突点等を

いれるために、ディスパージョンが 0 の領域が必要なので、FODO セルの端にディスパージョンを 0 にもっていく、通常ディスパージョンサプレッサーと呼んでいる部分を付け加えなければならない。スーパーピリオドあたりのセル数を  $n_{cell}$ 、ディスパージョンサプレッサーの数を 2 とするとエミッタンスは

$$\varepsilon = \frac{C_q \gamma^2 n_{cell} I'_{5,cell} + 2I'_{5,ds}}{J_x \rho^2 (n_{cell} + 2)\theta}$$

となる。ここで  $I_{2,ds}$ 、 $I'_{5,ds}$  はディスパージョンサプレッサーからくる放射積分、 $n_{cell}$  は FODO セルの数である。トリスタンの様なセルが大量にある様なリングでは、セルだけで決まるとして良いだろう。ただし  $\beta$ 、 $\eta$  などが異常な値にならないように注意しておくことは必要である。比較的小さなセル数では、ディスパージョンサプレッサーの効果が大きい。この最適化は [1] にみられるので、参考にさせていただきたい。

ここで低エミッタンス化に際して起こってくるクロマチシティ補正の問題について触れておく。衝突型加速器では衝突点での極端な絞り込みからくる大きなクロマチシティをリング全体で補正することがテーマとなるが、放射光利用を前提にした低エミッタンスリングではリング全体を強い収束磁石により絞ることから大きなクロマチシティが発生する。薄肉レンズの近似で見ると、

$$T_{x,cell} = T_{QD/2} T_l T_{QF} T_l T_{QD/2}$$

$$T_{x,cell} = T_{QF/2} T_l T_{QD} T_l T_{QF/2}$$

から、QF、QD それぞれの場所での $\beta$ が計算できる。

$$\beta_{x,F} = \frac{L(2+K)}{\sin \mu} = \frac{2L(1 + \sin \frac{\mu}{2})}{\sin \mu}$$

$$\beta_{y,F} = \frac{L(2-K)}{\sin \mu} = \frac{2L(1 - \sin \frac{\mu}{2})}{\sin \mu}$$

$$\beta_{x,D} = \frac{L(2-K)}{\sin \mu} = \frac{2L(1 - \sin \frac{\mu}{2})}{\sin \mu}$$

$$\beta_{y,D} = \frac{L(2+K)}{\sin \mu} = \frac{2L(1 + \sin \frac{\mu}{2})}{\sin \mu}$$

ここでもエミッタンスのときと同様  $K_f = K_d = K$ 、 $\mu_x = \mu_y$  としている。セルからでてくるクロマティシティ $\xi$ は

$$-4\pi\xi_x = \int_{L_{cell}} K_x \beta_x ds = \frac{\tan \frac{\mu}{2}}{4}$$

$$-4\pi\xi_y = \int_{L_{cell}} -K_x \beta_y ds = \frac{\tan \frac{\mu}{2}}{4}$$

であるからは位相進度が $\pi$ に近づくにしたがい急速に大きくなるのがわかる。

このクロマティシティは6極磁石を使って補正される (Appendix B)。運動量に対して

$$\Delta x = \eta \frac{\Delta p}{p}$$

ずれた軌道を6極磁石内に通し傾き成分による収束力でチューン(クロマティシティ)を補正する。6極磁石によるクロマティシティ補正は

$$-4\pi\Delta\xi_x = \int_{L_{cell}} -k_2\eta\beta_x ds$$

$$-4\pi\Delta\xi_y = \int_{L_{cell}} k_2\eta\beta_y ds$$

である。ここで  $k_2$  は以下で定義される。

$$k_2 \equiv \frac{1}{p/e} \frac{d^2 B_y}{dx^2}$$

クロマティシティをなるべく弱い6極磁石で補正するためには $\beta_x$ の大ききなところに  $k_2 < 0$  の6極磁石 (SD) を $\beta_y$ の大ききなところに  $k_2 > 0$  の6極磁石 (SF) を置けばよい。つまり QD の近くに SD をおき、QF の近くに SF を置けばよい。ここでは QD と SD、QF と SF が同じ場所にあるとして計算する。SD、SF での $\eta$ は同様の行列計算から

$$\eta_F = \frac{L\theta}{\sin \frac{\mu}{2}} \left[ \frac{1}{\sin \frac{\mu}{2}} + \frac{1}{2} \right]$$

$$\eta_D = \frac{L\theta}{\sin \frac{\mu}{2}} \left[ \frac{1}{\sin \frac{\mu}{2}} - \frac{1}{2} \right]$$

クロマティシティへの寄与は

$$-4\pi\Delta\xi_x = -\beta_{x,F}\eta_F K_2(SF) - \beta_{x,D}\eta_D K_2(SD)$$

$$\begin{aligned} -4\pi\Delta\xi_y &= \beta_{y,F}\eta_F K_2(SF) + \beta_{y,D}\eta_D K_2(SD) \\ &= \beta_{x,D}\eta_F K_2(SF) + \beta_{x,F}\eta_D K_2(SD) \end{aligned}$$

である。ここで  $K_2 = k_2 \ell$  としている。クロマティシティが補正できるためには

$$-4\pi\Delta\xi = -\frac{\tan \frac{\mu}{2}}{4}$$

であることが必要で、6極磁石の強さは

$$K_2(SD) = -\frac{\tan \frac{\mu}{2}}{4(\beta_{x,F} - \beta_{x,D})\eta_D}$$

$$= -\frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}}{2L^2\theta \left( \frac{1}{\sin \mu/2} - \frac{1}{2} \right)}$$

$$K_2(SF) = \frac{\tan \frac{\mu}{2}}{4(\beta_{x,F} - \beta_{x,D})\eta_F}$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\mu}{2}}{2L^2\theta \left( \frac{1}{\sin \mu/2} + \frac{1}{2} \right)}$$

でなければならない。 $L = 1$ 、 $\theta = 1$  としてプロットしたものが図 12 である。位相進度に対して単調に増加している。また  $K_2$  の分母に $\theta$ が入っていることに注意しよう。この項は $\eta$ からきている。大きな $\eta$ は大きな偏向角によって発生するからである。エミッタンスのところでも述べたように低エミッタンスにするのに一番有効なことはセルの偏向角を小さくすることである。これによって発生する $\eta$ を抑え  $H$  を小さくする。しかしこのことはクロマティシティの補正に取っては強い6極磁石を必要とすることになる。

またクロマティシティは周回部分だけで発生するわけではないので、実際のクロマティシティは今考えている値より数十%大きい。特に衝突リングのように局所的に $\beta$ を絞ったりするとそこからのクロマティシティが非常に大きくなる。そのため実際の6極磁石の強度はここであげた値より大きくなる。

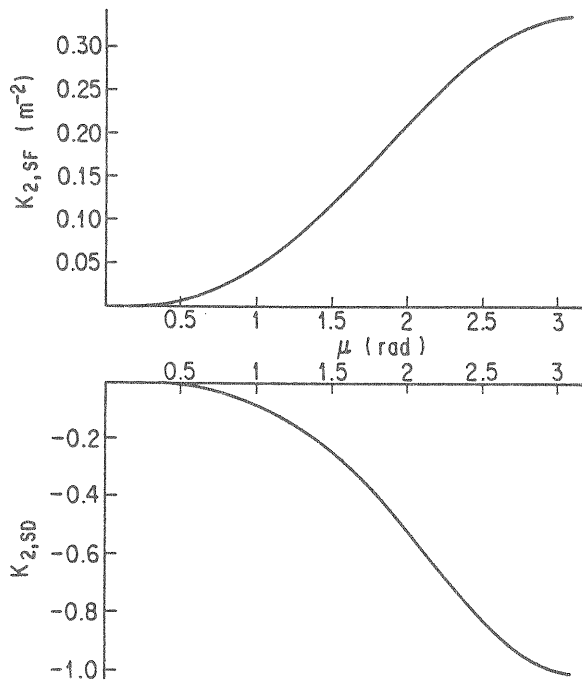


図 12: FODO ラティスの位相進度と 6 極磁石の強さ

粒子が 6 極磁石をとると、粒子は振幅に依存した収束力を受けるためチューンが広がる。広がったチューンが共鳴と接するとそれ以上の振幅を持った粒子は回らないことになる。(実際には共鳴を越えて回るか回らないかは議論もあるがここでは深くは考えない。) この限界の振幅をダイナミックアパーチャという。それに対して実際の '物' によって起こる振幅の限界をフィジカルアパーチャという。アパーチャをもっとも要するのは、一般的にはビームの入射のときでそれに対して十分なアパーチャ (フィジカルにもダイナミックにも) を取って置く必要がある。ダイナミックアパーチャの計算は 6 極磁石を含んだリングのトラッキングによって決められる。

### 4.3 Double Bend Achromat lattice (DBA)

ここで説明する DBA ラティスはいわゆるチャスマン=グリーンラティスで 2 つの偏向磁石で囲まれた部分でアхроマトを作り、セルの出入口で  $\eta$  は 0 になっている。収束磁石で  $\eta$  は発生しないので偏向磁石の入り口で  $\eta, \eta'$  が 0 である。そ

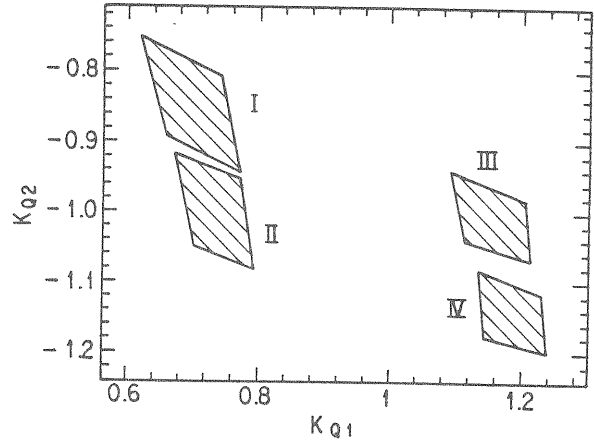


図 14: DBA ラティスのネクタイ図

のため偏向磁石だけで発生する  $\eta$  でエミッタンスが決まるため、低エミッタンスが得られると予想できる。

また前節でも述べたが、加速器では必ず  $\eta$  が 0 の領域が必要である。小さなリングで、FODO セルを作って、そのたびにディスパーションサプレッサーを入れていくのは効率的でない。そのためにもセルの端で  $\eta$  が 0 になっているようなラティスをくめば無駄がない。例として図 13 のようなラティスを考える。寸法はかなり安易なものが入っている。偏向磁石は 30 個になっている。

図のように偏向磁石によって発生する  $\eta$  をその間に挟まれた収束磁石で補正するようになっている。セルの両端での  $\alpha$  は偏向磁石の外側の収束磁石で周期的になるような条件を満たせば対称性から 0 になる。

FODO と同様に周期条件から見てみる。FODO とちがってセルあたりの収束磁石、ドリフトスペースの数が多いので数値的にあたるのがとっとり早い。中央の収束磁石は偏向磁石からできた  $\eta$  を打ち消すために QF 型であり、その強度も偏向磁石の偏向角とそれからの位置が決まれば一意的に決まる。図 13 の例では

$$K_1 = \frac{B'\ell}{B\rho} = 0.90604$$

である。偏向磁石の外側の 2 つの収束磁石をパラメータとして図 14 のようなネクタイ図が書ける。図に示したように周期条件を満たす領域はネクタイの形ではなく、複数の部分に別れていることがわかる。これは FODO とちがって位相進度が 180 度以上あることから起こる。この図で見えて

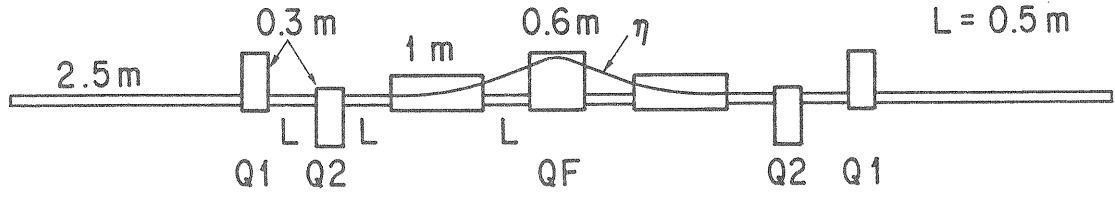


図 13: DBA の磁石配置の例

いる 4 つの領域はそれぞれ位相進度が以下のようになっている。

- I  $0.5 < \nu_x < 1$   $0 < \nu_y < 0.5$
- II  $0.5 < \nu_x < 1$   $0.5 < \nu_y < 1$
- III  $1 < \nu_x < 1.5$   $0 < \nu_y < 0.5$
- IV  $1 < \nu_x < 1.5$   $0.5 < \nu_y < 1$

周期的条件を満たす領域の中心付近の値を入れたときのラティスパラメータを図 15、表 1 に示す。それぞれの収束磁石の強さは

- I  $K_{Q1} = 0.70$   $K_{Q2} = -0.85$
- II  $K_{Q1} = 0.75$   $K_{Q2} = -1.00$
- III  $K_{Q1} = 1.16$   $K_{Q2} = -1.00$
- IV  $K_{Q1} = 1.18$   $K_{Q2} = -1.15$
- I'  $K_{Q1} = 0.75$   $K_{Q2} = -0.85$

に設定されている。

I に比べ II, III, IV はクロマチシティが大きい。これは位相を回転させるため、主に偏向磁石の外側で絞っていることから起こる。エミッタンスはさほど変わらないので、特に直線部で  $\beta$  を絞りたいと考えなければ I を使うことになるだろう。このラティスでエミッタンスをできるだけ小さくするために前章のエミッタンスの式 (35) を使って考える。

エミッタンスは偏向磁石の入り口で、 $\eta$ 、 $\eta'$  が 0 のため簡単な式で、評価できる。

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \theta^3 \left[ \frac{\beta_0}{3L} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\gamma_0 L}{20} \right] \quad (42)$$

と書ける。DBA の最小のエミッタンスを求めるために、偏向磁石入り口の  $\beta$ 、 $\alpha$  について微分してそれぞれを 0 とおけば、

$$\alpha_{0m} = \sqrt{15} \quad \beta_{0m} = \frac{2\sqrt{15}}{5} L \quad (43)$$

表 1: ネクタイ図の位置とパラメータ

|     | $\nu_x/\nu_y$ | $-\xi_x/-\xi_y$ | $I_5/I_2\theta^3$ |
|-----|---------------|-----------------|-------------------|
| I   | 0.75/0.33     | 1.69/1.33       | 0.39              |
| II  | 0.80/0.66     | 2.04/1.96       | 0.29              |
| III | 1.25/0.27     | 3.38/2.24       | 0.25              |
| IV  | 1.20/0.72     | 3.59/3.28       | 0.32              |
| I'  | 0.92/0.26     | 3.38/1.51       | 0.14              |

となり、 $\alpha$  と  $\beta$  の展開の式

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - \gamma_0 l \\ \beta &= \beta_0 - 2\alpha_0 l + \gamma_0 l^2 \end{aligned}$$

を使うと、偏向磁石の入り口 ( $\eta = 0$  側) から  $3L/8$  の地点で、 $\beta$  の極小値

$$\beta_{x,min} = \frac{\sqrt{15}}{40} L \quad (44)$$

のとき、最小エミッタンス

$$\varepsilon_{x,min} = \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \theta^3 \frac{1}{4\sqrt{15}} \quad (45)$$

を得る。

例で最小エミッタンスを実現しようとする、長さ 1m の偏向磁石を使用しているので  $\beta_{min}$  を 9cm まで絞り込めばよいことになる。中央の収束磁石の強度はディスパージョンを消すために決まってしまうので、Q1 を強くしネクタイ図の I' のところにもっていった。図 16 にラティスパラメータを示してある。これ以上 Q1 を強くするとトレースが 2 を越えてしまいネクタイ図からはみ出てしまう。このときエミッタンスは

$$\varepsilon = C_q \gamma^2 \theta^3 \times 0.13$$

で最小値の 2 倍であった。SAD を使ってフィットしたが最小エミッタンスの条件までもっていけな



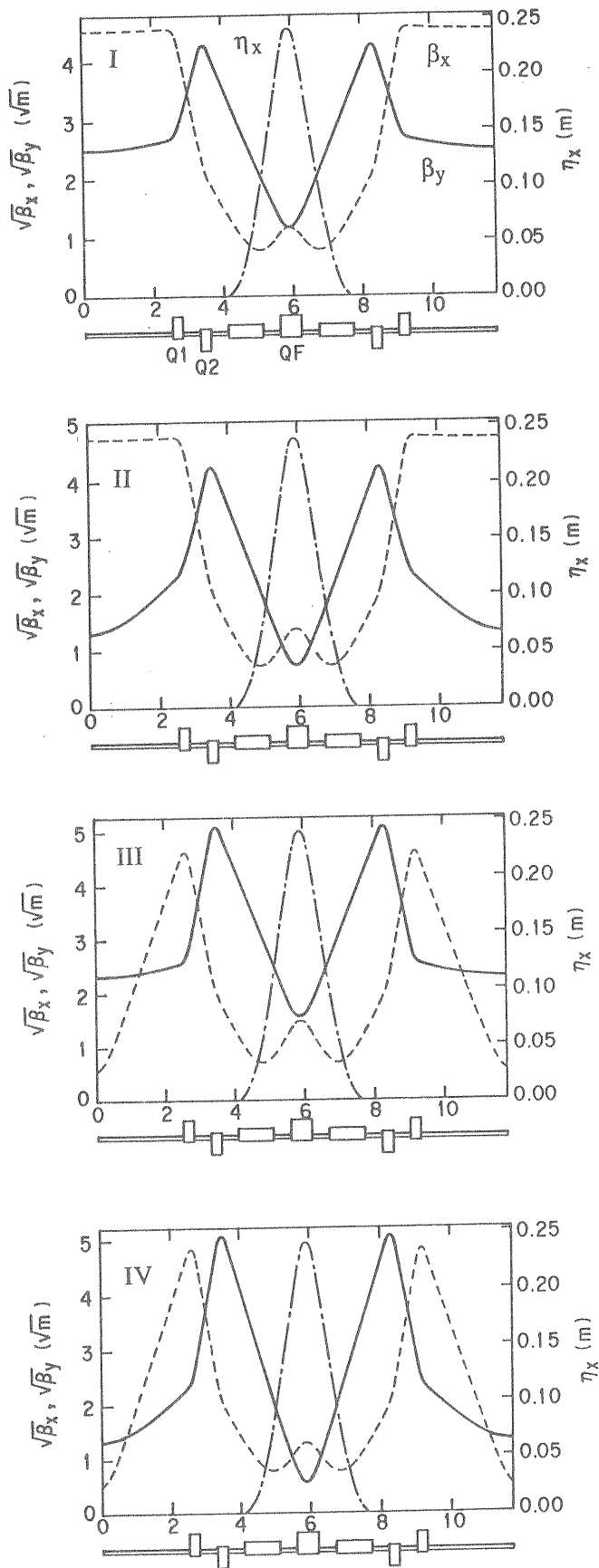


図 15: ネクタイ図の位置と DBA ラティスパラメータ

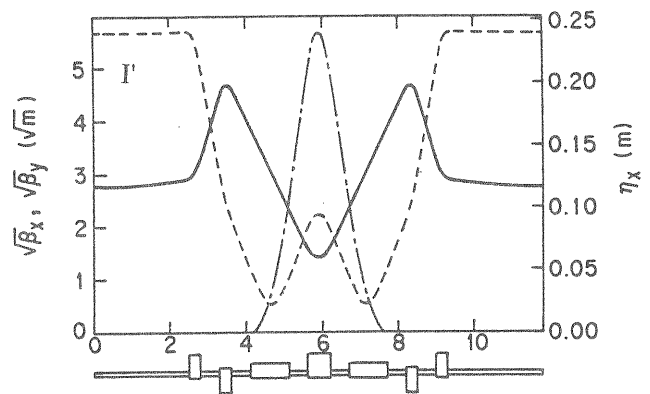


図 16: Q1 を強くしたとき (I') のラティスパラメータ

かった。おそらくネクタイ図の外側にあり、解として存在しないと思われる。I と I' を比べると I' はクロマチシティが大きくチューンが 1 に近づいている。

チューンが 1 に近づくのは Q1 を強くしネクタイ図の端に近づけたので当然のことだが、これはそうすることで端と中央の収束磁石の間の位相差を  $\pi$  に近くして絞りで絞っている。セルあたりのチューンが 1 に近いと強い共鳴を誘発する恐れがある。つまりクロマチシティ補正のためにセルの同じ位置に 6 極を置くのが通常であるが、6 極毎に常に同じ方向に蹴ることになってしまう。

クロマチシティが大きくなるのは次の理由からである。ドリフトスペースでの  $\beta$  は、 $s = 0$  で極小値  $\beta_{min}$  をとるとすると

$$\beta = \beta_{min} + \frac{s^2}{\beta_{min}}$$

のように振る舞う (Appendix B)。 $\beta_{min}$  が小さいほど  $\beta$  が大きく  $\beta$  の上がり方が急である。これはちょうど衝突リングでの衝突点のオプティクスと同じ状況である。偏向磁石の両側の収束磁石の強さと、そこでの  $\beta$  の値が大きくなって、クロマチシティが大きくなる。衝突リングは数個の衝突点で大きなクロマチシティを生むが、FODO と同様に DBA でも低エミッタンスリングではセル自身が大きなクロマチシティを生むことになる。

もうひとつ DBA でクロマチシティの補正で難しい点は補正する場所とそこでの  $\eta$  が小さいことである。 $\eta$  を大きくしようと偏向磁石と QF の間の距離をあけると  $\beta$  が大きくなってしまいクロ

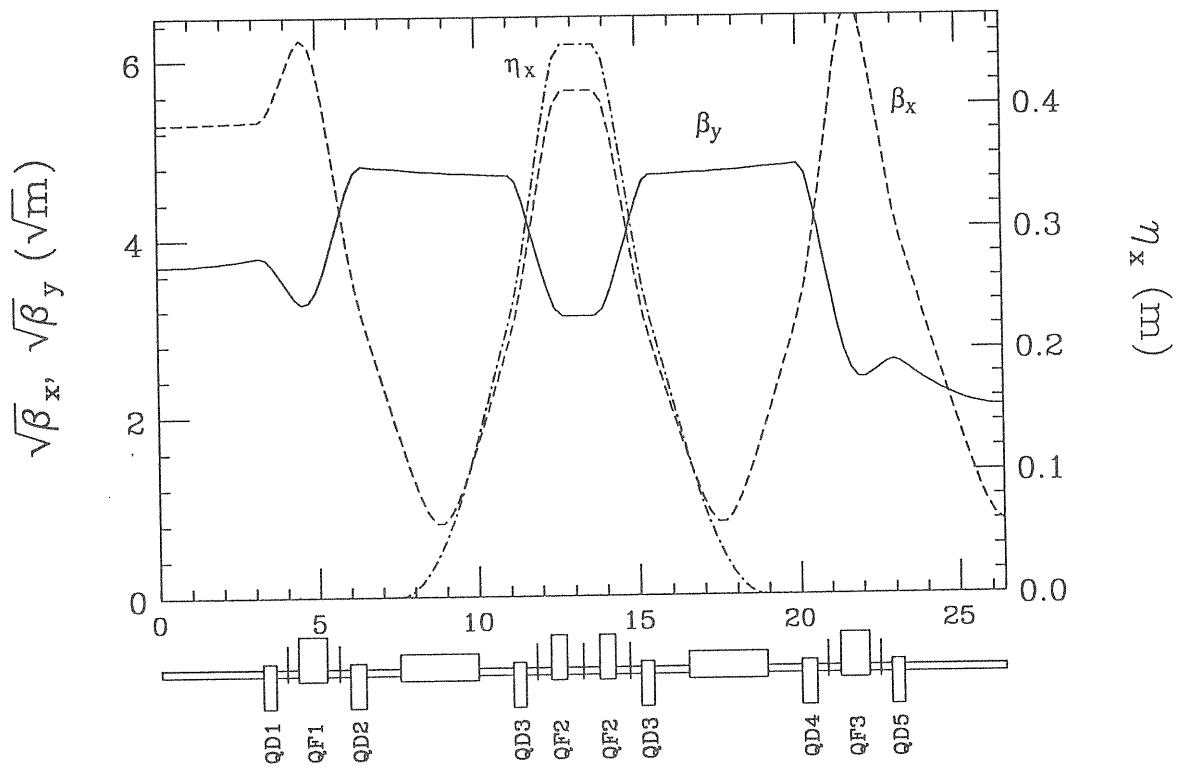


図17: ESRF(フランス)のラティス

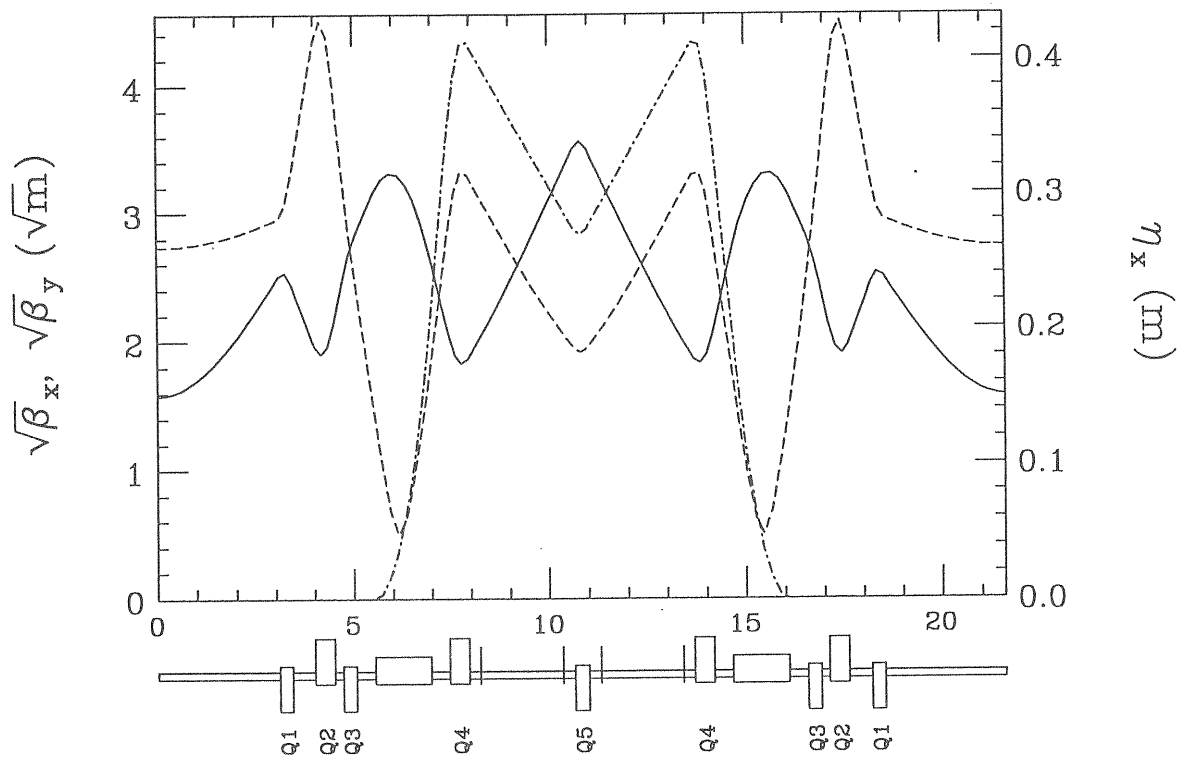


図18: ELETTRA(イタリア)

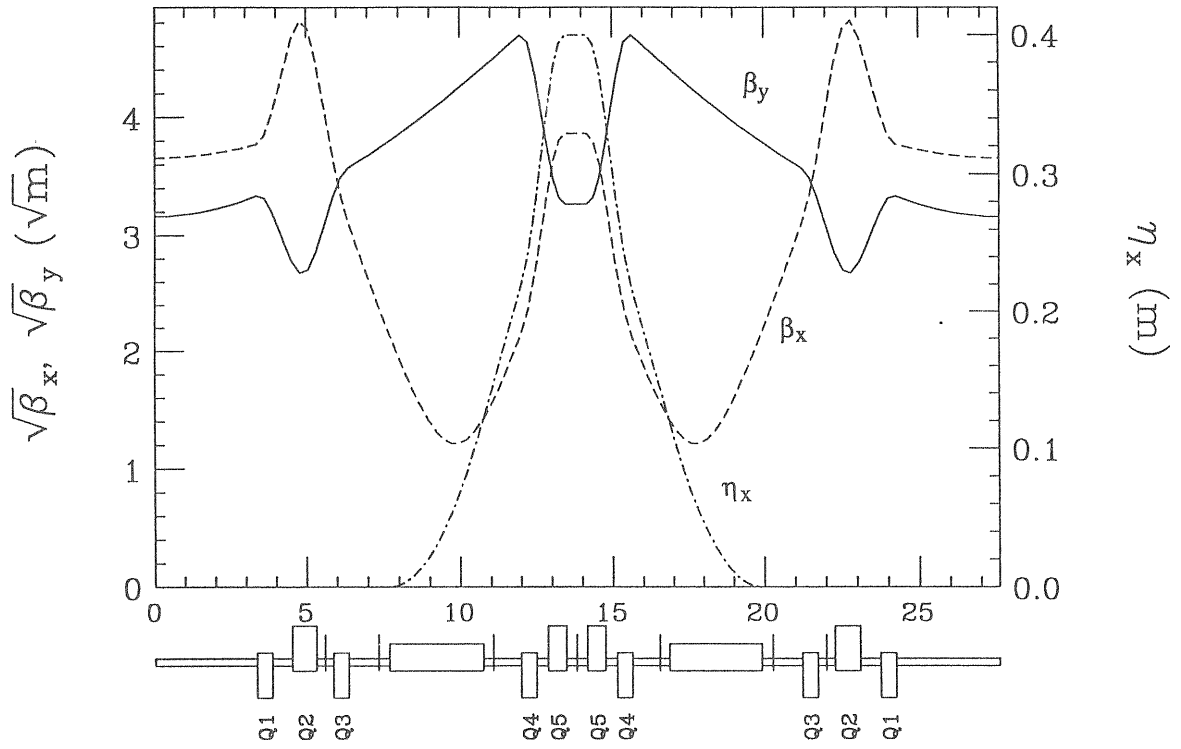


图 19: APS(USA)

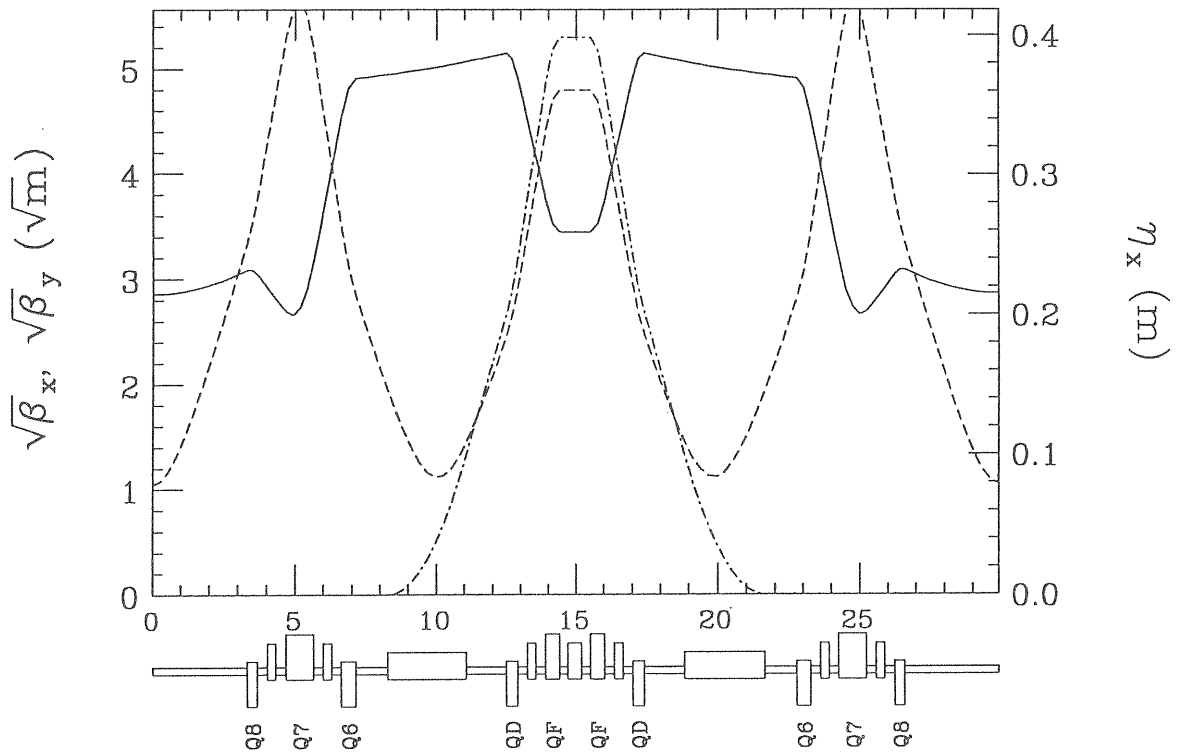


图 20: SPring-8(日本)

マティシティが大きくなる。また FODO のようにトウイスパラメータの凹凸がはっきりしていないので、SD、SF の置き方が難しそうである。どちらにしても補正するための 6 極磁石が強くなり、ダイナミックアパーチャが小さくなる。そのため偏向磁石の外側の  $\eta$  が 0 の部分に 6 極磁石をおき共鳴を打ち消すことが良く検討されている。トラッキングしてみるとかなりアパーチャが広がるようである。

このタイプのラティスは最近放射光用低エミッタンスリングによく使われている。図 17-20 に現在運転中あるいは建設中の DBA 型リングのセルの部分のラティスパラメータを示す。上に述べたような難しさを避けるためいろいろな工夫がされている。表 2 にこのタイプのラティスを使ったリングのパラメータをあげておく。チューン、クロマティシティはセルあたりの値である。(ESRF は 2 つのアクロマーで 1 つのセル作っているので 1/2 セル)

現在設計、建設されているリングは大体、エミッタンスの最小値の 3 倍くらいになっているものが多い。

このタイプのリングはセルの間に RF、挿入光源をいれることができる。放射光用リングとしてはアークの長さの割に、挿入光源を使って、光が取り出せる（放射光ユーザーにとって有益な）直線部が多いので、効率的に見える。

#### 4.4 Triplet Achromat lattice (TA)

DBA をもっと簡単にしたもので偏向磁石に囲まれた 3 つ（2 種類）の収束磁石で、アクロマーにし、周期的条件も満たすようにする。偏向磁石で発生する、 $\eta$  を中央 2 種の収束磁石で打ち消すため 1 つの自由度はない。

セルの端での  $\beta$  を  $\beta_c$  とすると、偏向磁石の入り口の  $\beta_0$  等は直線部の長さ  $2l$  を使って

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \beta_c + \frac{\ell^2}{\beta_c} \\ \alpha_0 &= -\frac{\ell}{\beta_c} \\ \gamma_0 &= \frac{1 + \alpha_0^2}{\beta_0} = \frac{1}{\beta_c}\end{aligned}$$

と表わされる。エミッタンスは

$$\epsilon = \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \theta^3 \left[ \frac{\beta_c}{3L} + \left( \frac{\ell^2}{3L} + \frac{\ell}{4} + \frac{L}{20} \right) \frac{1}{\beta_c} \right] \quad (46)$$

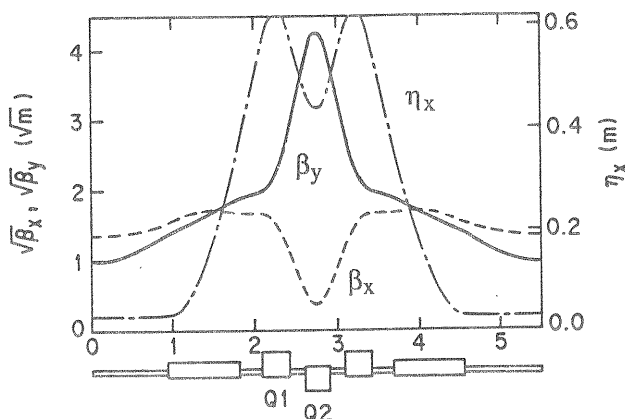


図 21: ACO(フランス)

ちなみに最小のエミッタンスを求めると

$$\frac{\beta_c^2}{L^2} = \frac{3}{20} + \frac{3\ell}{4L} + \frac{\ell^2}{L^2} \quad (47)$$

のとき

$$\epsilon_{min} = \frac{C_q \gamma^2}{J_x} \theta^3 \frac{2\beta_c}{3L} \quad (48)$$

である。

例として LURE の ACHO があげられる。このマシンは既に運転されていない。図 21 にラティスを示す。

#### 4.5 Triple Bend Achromat lattice (TBA)

このラティスは DBA の 2 つの偏向磁石の中間 ( $\eta$  が 0 でない領域) に 3 つめの偏向磁石を加えたものである。図 22 に例を示す。偏向磁石は 30 個になっている。

外側の偏向磁石で  $\eta$  を作り、QF で  $\eta$  を下げ中央の偏向磁石の中心で  $\eta' = 0$  になるようにする。中央の偏向磁石で  $\eta$  が小さくなるようにしておけばエミッタンスも DBA 並に得られると推測できる。またこうすることでセル内の偏向磁石を増やし  $\theta$  を小さくすれば DBA と同じセル数でより小さなエミッタンスが得られる。ただし当然偏向磁石の数は増える。中央部をこのようにアクロマーに作っておいてあとは両端の 2 つずつの収束磁石で周期的条件を整えればよい。ただし中央の偏向磁石の  $\eta$  を小さくするためにあらかじめ磁石配置を考慮しておく必要がある。後述の中央の  $\eta$  の最適化から  $\eta_c = 0.87mm$  にもっていく必要が

表 2 現在建設中の DBA リング

|          | E(GeV) | $N_{cell}$ | $\nu_x/\nu_y$ | $-\xi_x/-\xi_y$ | $\varepsilon(m)$     | $\varepsilon_{min}(m)$ |
|----------|--------|------------|---------------|-----------------|----------------------|------------------------|
| ESRF     | 6.0    | 16*2       | 1.13/0.35     | 3.6/1.0         | $7.0 \times 10^{-9}$ | $3.2 \times 10^{-9}$   |
| ELLETRA  | 2.0    | 12         | 1.19/0.68     | 3.4/1.2         | $7.2 \times 10^{-9}$ | $3.8 \times 10^{-9}$   |
| APS      | 7.0    | 40         | 0.88/0.36     | 1.6/0.7         | $8.5 \times 10^{-9}$ | $2.3 \times 10^{-9}$   |
| SPring-8 | 8.0    | 48         | 1.25/0.36     | 2.9/0.9         | $6.4 \times 10^{-9}$ | $2.2 \times 10^{-9}$   |

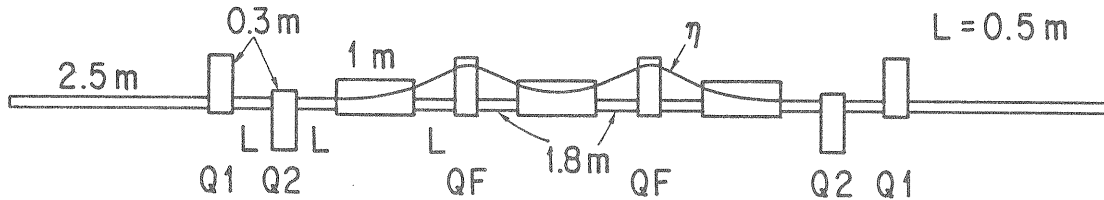


図 22: TBA ラティスの例

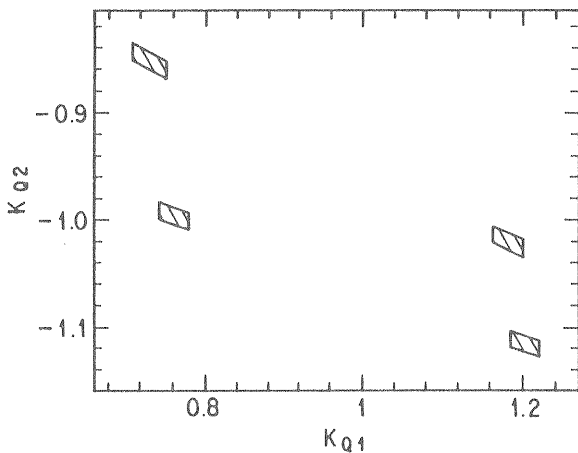


図 23: TBA ラティスのネクタイ図

あるので中央の偏向磁石と収束磁石の間の距離を 1.82m にしている。(  $\eta_c = 8.7mm$ 、  $\eta'_c = 0$  になるように、その距離と収束磁石強度を変数としてフィットさせた。) 例にあるラティスでネクタイ図を書いたものが図 23 である。周期的条件を満たす領域は 4ヶ所に別れている。それらは次のようなチューンに対応している。

- I  $1 < \nu_x < 1.5$   $0 < \nu_y < 0.5$
- II  $1 < \nu_x < 1.5$   $0.5 < \nu_y < 1$
- III  $1.5 < \nu_x < 2$   $0 < \nu_y < 0.5$
- IV  $1.5 < \nu_x < 2$   $0.5 < \nu_y < 1$

表 3: ネクタイ図の位置とパラメータ

|    | $\nu_x/\nu_y$ | $-\xi_x/-\xi_y$ | $I_5/I_2\theta^3$ |
|----|---------------|-----------------|-------------------|
| I  | 1.27/0.17     | 5.36/9.04       | 0.21              |
| I' | 1.38/0.23     | 8.14/7.86       | 0.14              |

DBA に比べチューンが 0.5 大きい。これはアクロマート部分の絞りが 1 つ多いからである。その中心付近の強度に収束磁石をセットした時のラティスパラメータを図 24、表 3 に示す。それぞれの磁石強度は

- I  $K_{Q1} = 0.70$   $K_{Q2} = -0.85$
- I'  $K_{Q1} = 0.75$   $K_{Q2} = -0.85$

に設定されている。

DBA 同様に領域によって偏向磁石の外側の絞り具合が違っているだけなので I の領域だけを扱う。

最低エミッタンスを求めることで低エミッタンス化の方向をあたってみる。エミッタンスは端側と中央の 2 種類の偏向磁石の中のトゥイスパラメータを調べ、両方の放射積分の和をとればよい。TBA は一般的には端と中央の偏向磁石の曲率や長さ、偏向角が同じ必要はないがここでは同じ場合を扱っている。

$$\varepsilon_x = \frac{C_q \gamma^2 2\theta^3}{J_x} \frac{1}{3} \left[ \left\{ \frac{\beta_0}{3L} - \frac{\alpha_0}{4} + \frac{\gamma_0 L}{20} \right\} \right] \quad (49)$$

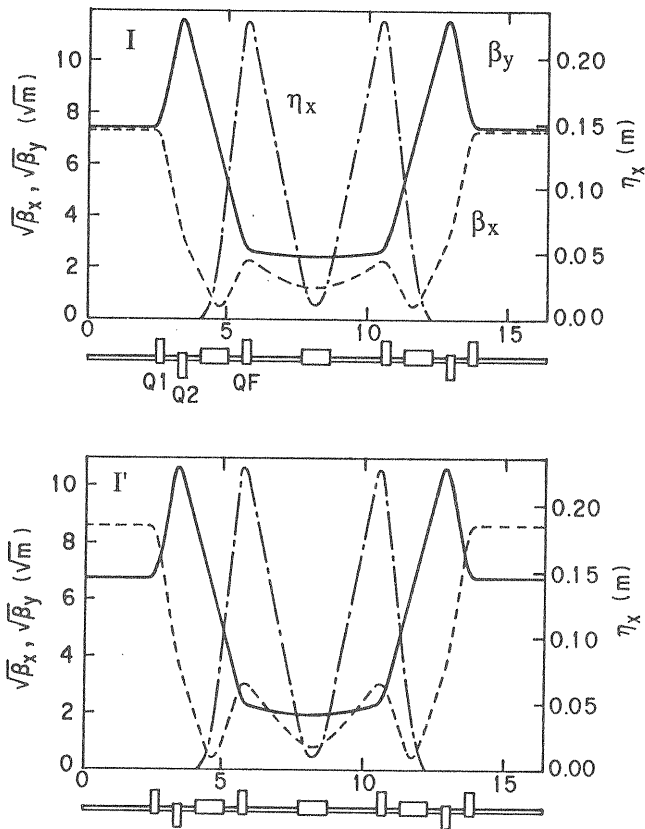


図 24: ネクタイ図の位置と TBA ラティスパラメータ

$$+ \left\{ \frac{\eta_c^2}{2\beta_c L \theta^2} - \frac{\eta_c}{24\beta_c \theta} + \frac{1}{4} \left( \frac{\beta_c}{6L} + \frac{L}{160\beta_c} \right) \right\}$$

ここで添え字 0 は両側の偏向磁石入り口、 $\beta_c, \eta_c$  は中央の偏向磁石の中心でのトウイスパラメータである。最小エミッタンスは端と中央の偏向磁石での最小値の和である。端の偏向磁石に対する条件は DBA と同様に式 (43)(44) のときで式 (49) 内の 1 項の中括弧は

$$\frac{1}{4\sqrt{15}}$$

である。

中央の偏向磁石に対しては、 $\eta_c, \beta_c$  に対して微分して 0 とおけば ( $\alpha_c = 0$  は対称性により保証される。)

$$\beta_c = \frac{L}{2\sqrt{15}}$$

$$\eta_c = \frac{L\theta}{24}$$

で最小となり、式 (49) 内の 2 項の中括弧は

$$\frac{1}{12\sqrt{15}}$$

である。よって最小エミッタンスは以下のようになる。

$$\varepsilon_{x \min} = \frac{C_q \gamma^2 \theta^3}{J_x} \frac{7}{36\sqrt{15}} \quad (50)$$

この例では偏向磁石の長さは 1m なので両側の偏向磁石の中で  $\beta$  を 9cm、中央の偏向磁石の中心で 13cm に絞ればよいことになる。また  $\eta$  も中央で 8.7mm まで小さくしておくことが必要である。この条件は磁石配置のときに既に考慮されている。DBA でやったようにの領域で右下の方の値に収束磁石をもっていくとやはりエミッタンスは小さくなる。I' で  $I_5/I_2\theta^3$  が 0.14 と DBA の I' のときと同じ値になっているが、チューンは 1.38 と DBA に比べ構造的共鳴の点からは安心できる。このことは  $\beta$  を 3ヶ所で絞るため位相進度は  $3\pi$  に近づくことから理解できる。

このラティスは両端の偏向磁石と中央の偏向磁石の 3ヶ所で  $\beta$  を絞るためやはりクロマチシティが大きくなる。中央にアクロマートにするために強い 2つの QF を置くため、その外側で  $\beta_y$  が大きくなり  $y$  方向のクロマチシティも大きくなる。中央の  $\eta_c$  を甘くしたり磁石配置を工夫してほどのクロマチシティにもっていく必要がある。 $\eta$  が 0 でない部分が DBA に比べ広いのでクロマチシティ補正は若干やりやすいかもしれない。

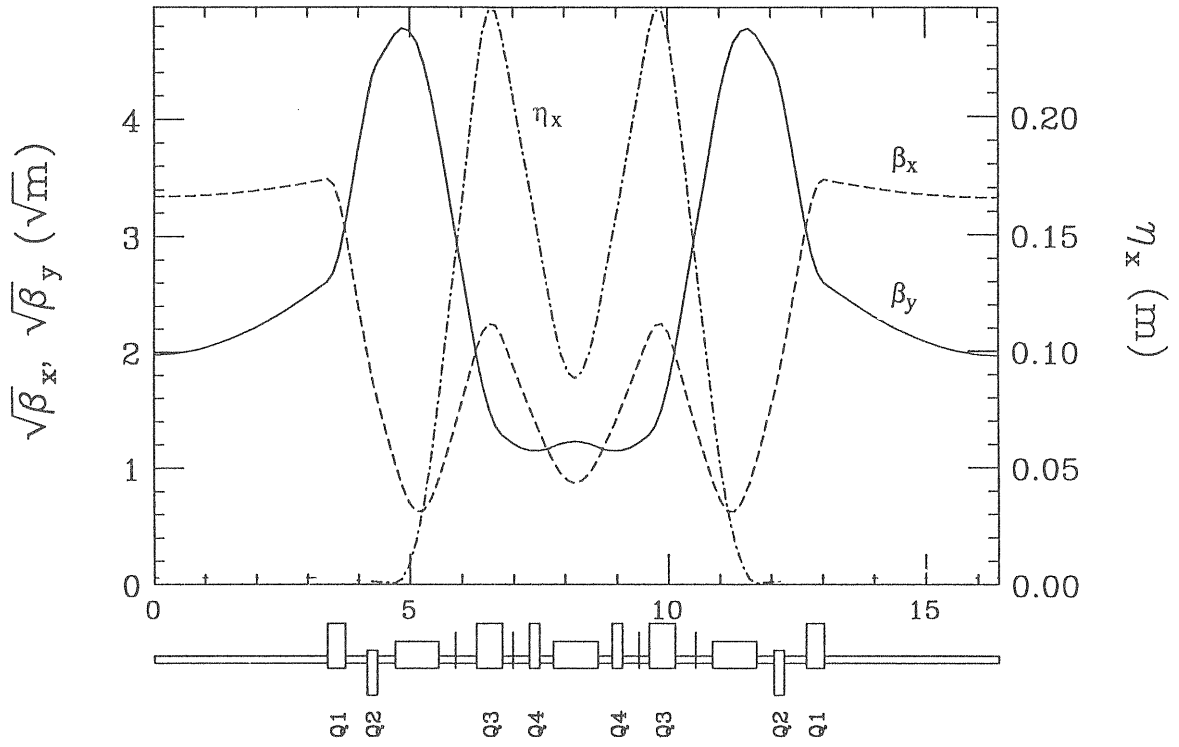


図 25: ALS(USA) のラティス

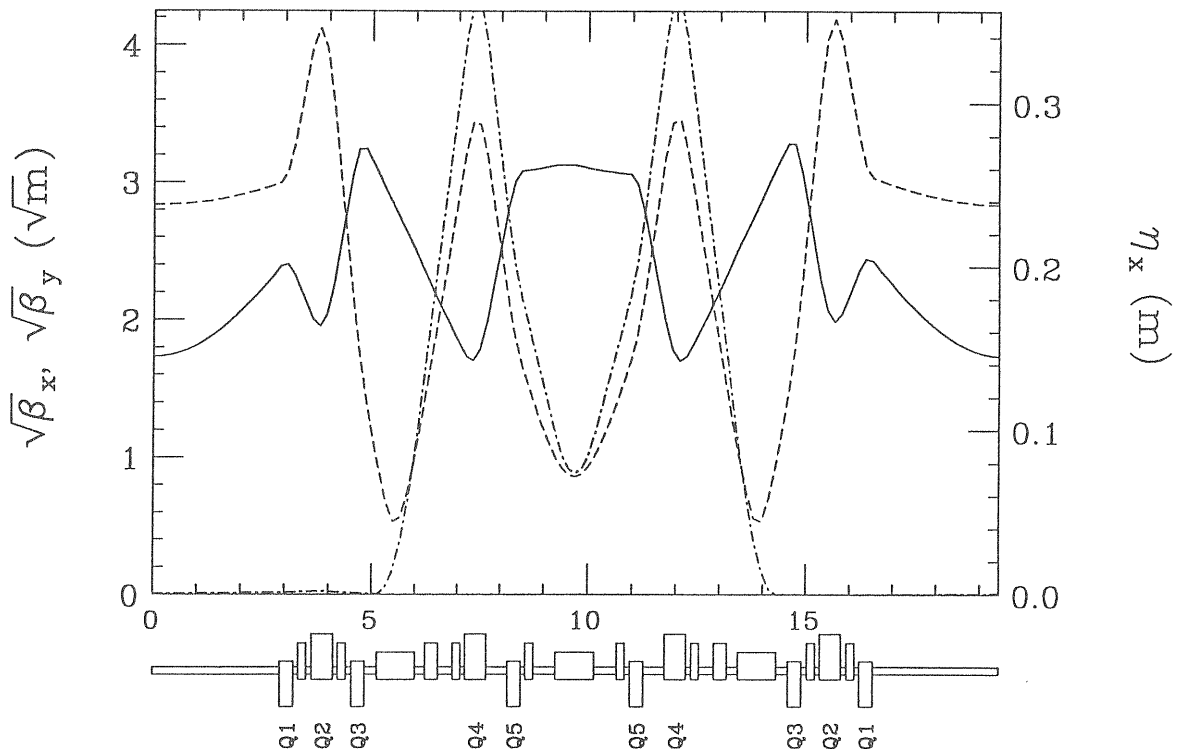


図 26: BESSY II(ドイツ)

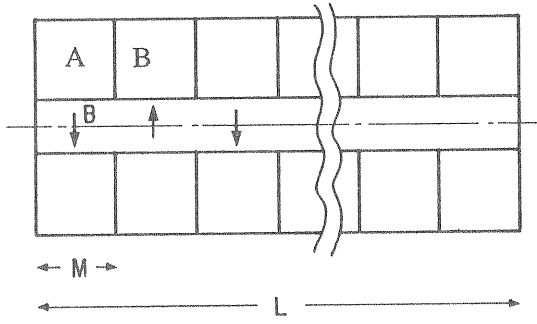


図 27: ダンピングウィグラーの例

TBA はセルの中に 3 つの偏向磁石とマッチングのための収束磁石が入るので、アークの長さが大きくなるのは避けられない。

現在このラティスで設計、建設中のリングは ALS、BESSY II で、それらのラティスを図 25, 26 に、パラメータを表 4 に示す。チューン、クロマチシティーはセルあたりの値である。

#### 4.6 ダンピングウィグラー

$\eta = 0$  の場所にダンピングウィグラーをいれると、 $I_5$  に対して  $I_2$  を大きくできるため、エミッタンスを小さくすることが期待できる。無論ウィグラー自身も  $\eta$  を発生させるので、エミッタンスは

$$\varepsilon = \frac{C_q \gamma^2 I_{5,arc} + I_{5,wig}}{J_x I_{2,arc} + I_{2,wig}} \quad (51)$$

と書ける。

図 27 のような全長  $L$ 、周期長  $M$ 、軌道曲率半径  $\rho$  のウィグラーを  $\eta$  が 0 のところに置いたと考える。 $I_2$  は

$$I_{2,wig} = \frac{L}{\rho_w^2} \quad (52)$$

である。 $I_{5,wig}$  を計算するためにウィグラーから発生する  $\eta$  を調べる。A の部分では

$$\eta = \rho_w \left( 1 - \cos \frac{s}{\rho_w} \right) \sim \frac{s^2}{2\rho_w}$$

$$\eta' = \sin \frac{s}{\rho_w} \sim \frac{s}{\rho_w}$$

である。A と B の間はウィグラーの磁石が rectangular 型なのでエッジ効果によって  $\eta$  は連続につながるが  $\eta'$  は不連続になっている。しかし B の中央では  $\eta'$  は 0 で

$$\eta_{max} = 2\rho \left( 1 - \cos \frac{M}{2\rho} \right)$$

となっている。そのため B の部分では

$$\eta = \eta_{max} \cos \frac{s}{\rho_w} - \rho \left( 1 - \cos \frac{s}{\rho_w} \right) \sim \frac{M^2}{4\rho_w} - \frac{s^2}{2\rho_w}$$

$$\eta' = -\frac{\eta_{max}}{\rho_w} \sin \frac{s}{\rho_w} + \sin \frac{s}{\rho_w} \sim \frac{s}{\rho_w}$$

ウィグラーの半周期で発生する  $I_{5,wig}$  は

$$I_{5,wig}' = \int_{-M/2}^{M/2} (\gamma\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2) ds$$

ウィグラーの周期の間に  $\alpha$ 、 $\beta$  が変らないとすると

$$I_{5,wig}' = \gamma \int_{-M/2}^{M/2} \eta^2 ds + \beta \int_{-M/2}^{M/2} \eta'^2 ds$$

となる。 $\eta$ 、 $\eta'$  を代入して積分すると A でも B でも

$$\int_{-M/2}^{M/2} \eta^2 ds = \frac{M^4}{320\rho_w^2}$$

$$\int_{-M/2}^{M/2} \eta'^2 ds = \frac{M^2}{12\rho_w^2}$$

となる。ここで両方の項の大きさを比べてみる。

$$\frac{\gamma \int \eta^2 ds}{\beta \int \eta'^2 ds} \sim \frac{\gamma M^2}{30\beta}$$

ここでウィグラーを FODO セルの間に入れるとすると式 (39) から

$$\gamma \sim \frac{2(1 - \cos \mu)}{L \sin \mu}$$

である。 $M$  を 10cm 程度  $L$  は数 m、 $\beta$  は数 m から数十 m が一般的であるから

$$\frac{\gamma \int \eta^2 ds}{\beta \int \eta'^2 ds} \sim \frac{M^2 2(1 - \cos \mu)}{L\beta 30 \sin \mu} \ll 1$$

よって  $I_5'$  は  $\beta\eta'^2$  の項だけで決まる。つまり

$$I_{5,wig}' = \langle \beta_x \rangle \frac{M^2 L}{12\rho_w^2}$$

$$I_{5,wig} = \langle \beta_x \rangle \frac{M^2 L}{12\rho_w^5} \quad (53)$$

である。

ウィグラーの周期長  $M$  を小さくすれば、 $I_{5,wig}$  は小さくでき、最大

$$\frac{I_{2,arc}}{I_{2,total}} = \frac{1}{1 + \frac{L\rho}{2\pi\rho_w^2}}$$



表4 現在建設中の TBA リング

|       | E(GeV) | $N_{cell}$ | $\nu_x/\nu_y$ | $-\xi_x/-\xi_y$ | $\varepsilon(m)$     | $\varepsilon_{min}(m)$ |
|-------|--------|------------|---------------|-----------------|----------------------|------------------------|
| ALS   | 1.5    | 12         | 1.19/0.68     | 2.0/2.3         | $3.4 \times 10^{-9}$ | $8.8 \times 10^{-10}$  |
| BESSY | 1.7    | 10         | 1.42/0.62     | 3.9/1.3         | $6.1 \times 10^{-9}$ | $2.0 \times 10^{-9}$   |

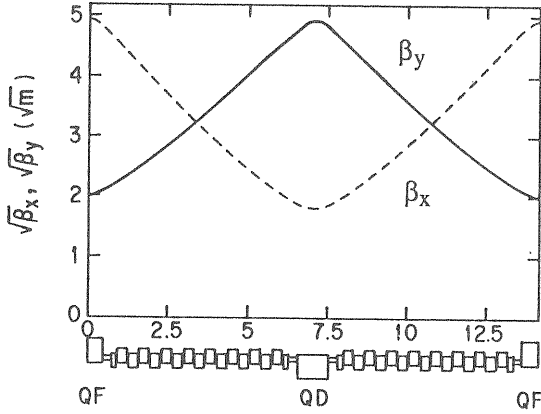


図 28: トリスタンダンピングウィグラー (案)

の割合でエミッタンスを小さくできる。ここで注意しなければならないのは  $M$  を小さくすれば、発生する  $\eta$  が

$$\eta = \frac{M^2}{4\rho_w}$$

と小さくなるのだが、その設計上の  $\eta$  が実現可能な量でないと、エラーによって、 $\eta$  が決まり、ウィグラーの周期を小さくした御利益がないことになる。

トリスタンもダンピングウィグラーを使うことで低エミッタンス化しようとしている [3](図 28)。ノーマルセルの  $I_5$ 、 $I_2$  は  $x$ 、 $y$  の位相進度を 90 度 60 度にしたラティスでは

$$I_{2,arc} \sim 1.93 \times 10^{-4} \times 136m^{-1}$$

$$I_{5,arc} \sim 8.63 \times 10^{-9} \times 136m^{-1}$$

で、現 RF セル ( $\langle \beta_x \rangle \sim 10m$ ) の中に全長 5.5m、周期長 0.345m、分割数 16、磁場 1.2 テスラ (曲率半径 27.8m) のダンピングウィグラーを 20 台挿入することによって、式 (52)(53) から

$$I_{2,wig} = 0.1423m^{-1}$$

$$I_{5,wig} = 6.53 \times 10^{-7}m^{-1}$$

から、平衡エミッタンスを

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\sim C_q \gamma^2 \frac{I_{5,arc} + I_{5,wig}}{I_{2,arc} + I_{2,wig}} \\ &= 1.67nm \end{aligned}$$

にできる。このときの  $\eta_{max}$  は 1mm 程度なのでその程度の値まで  $\eta$  を制御できなければならない。

## 5 X-Y カップリング

ここまでの議論はエミッタンスの源は  $\eta$  と考えてきたので、 $\eta$  のない  $y$  方向にはエミッタンスが発生しない、あるいは 2 で述べたように  $1/\gamma^2$  のオーダーのエミッタンスしかなかった。しかし実際のリングでは設計上は垂直偏向磁石がなく、 $\eta_y$  が 0 でもアラインメントエラー、スキュー収束磁石、ソレノイド磁石がある場合、または高次の非線形磁石と COD がくみあわさった場合には線形の枠の中でも、 $x$  方向の運動と  $y$  方向の運動が混じり、すなわち XY カップリングが起り、 $y$  方向のエミッタンスが発生する。そのときには、運動方程式がデカップルするように、ノーマル座標系を定義し、その座標系で、ツイスパラメーター等も定義し直すのが一般的である。

ところが、シンクロトロン放射はその座標系に対して起こるものではない。つまり放射は  $X$ 、 $Y$  方向の偏向曲率に対して、発生するので、 $X(Y)$  方向に偏向している場所ではその方向の運動に対して、キックが与えられる。従来の放射積分の考え方、平衡エミッタンス、ダンピングタイムは、クーランシュナイダー不変量の励起、減衰をもとにしているため、シンクロトロン放射自体を、ノーマル座標系で表わすことが必要になる。ここではノーマル座標を使って、放射積分を定式化し、放射減衰、平衡エミッタンス等の加速器における定数を表す。まず  $I_2$  と  $I_3$  はエネルギー方向の放射積分なので、従来どおりである。 $I_1$  も従来とほとんど同じだが、 $x$  方向と  $y$  方向のコンパクト性を分けて考える。運動量誤差に対する軌道長の

変化  $dl$  は、

$$dl = \left\{ 1 + \left( \frac{\eta_x}{\rho_x} + \frac{\eta_y}{\rho_y} \right) \frac{dp}{p} \right\} ds$$

ここで、 $\rho_x$ 、 $\rho_y$  は以下のように定義されている。

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{B_y}{p/e} \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{B_x}{p/e}$$

そして  $I_{1x}$ 、 $I_{1y}$  は以下の式で表される。

$$I_{1x} = \oint \frac{\eta_x}{\rho_x} ds \quad I_{1y} = \oint \frac{\eta_y}{\rho_y} ds \quad (54)$$

つぎにエネルギー振動の減衰を考える。エネルギー減衰率もデカップルしているときと同様に求められる。

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{2T_0} \frac{dU}{d\epsilon}$$

電子のエネルギー損失、 $U$ のエネルギーに対する微分は、直接エネルギーに関係した項と、磁場、 $B$ を介して関係する項に分けられる。

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\epsilon} &= \frac{1}{c} \oint \left\{ \frac{dP}{dE} + \frac{P}{E} \left( \frac{\eta_x}{\rho_x} + \frac{\eta_y}{\rho_y} \right) \right\} ds \\ &= \frac{U_0}{E} \left( 2 + \frac{I_4}{I_2} \right) \end{aligned}$$

エネルギーに関係した項を分離させると、幾何的に決まる量、 $I_4$  が定義できる。

$$\begin{aligned} I_4 &= \oint \frac{1}{\rho^2} \left\{ \left( \frac{1}{\rho_x} + 2\rho K_x \right) \eta_x \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\rho_y} - 2\rho K_y \right) \eta_y \right\} ds \end{aligned}$$

ここで、 $K_x$ 、 $K_y$  は横方向の磁場の大きさ  $B_\perp$  を使って以下のように定義されている。

$$K_x = \frac{1}{p/e} \frac{dB_\perp}{dx} \quad K_y = -\frac{1}{p/e} \frac{dB_\perp}{dy}$$

横方向の減衰は、RF 空洞による効果とコンパクションによる効果に分けられる。RF による効果は、 $u$  方向も、 $v$  方向も同様でここでは  $u$  方向について述べる。RF を通過する前後で  $p_u$  の変化は以下のように書ける。

$$p_u(s_+) = p_u(s_-) \left( 1 - \frac{\Delta E}{E} \right)$$

それによって CS 不変量はリング1周につき

$$\frac{\langle \Delta \epsilon_u \rangle}{T_0} = -\frac{U_0}{ET_0} \langle \epsilon_u \rangle$$

減少する。コンパクションによる効果は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \Delta W_u &= \frac{\Delta E}{E} (V_\eta S_2 J_u V + V S_2 J_u V_\eta) \\ &= \frac{P_0 ds}{Ec} \left\{ \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K_x \right) x + \left( \frac{1}{\rho} - 2\rho K_y \right) y \right\} \\ &\quad (V_\eta S_2 J_u V + V S_2 J_u V_\eta) \end{aligned}$$

ここで、 $\langle u^2 \rangle = \beta_u W_u / 2$ 、 $\langle uv \rangle = 0$  等を使うと以下の式を得る。

$$\frac{\Delta W_u}{T_0} = \frac{U_0}{ET_0} \frac{I_{4u}}{I_2} W_u$$

ここで  $I_{4u}$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} I_{4u} &= \oint \frac{ds}{\rho^2} \left\{ \left( \frac{1}{\rho_x} + 2\rho K_x \right) (R_{11}\eta_u + R_{12}\eta'_u) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\rho_y} - 2\rho K_y \right) (R_{31}\eta_u + R_{32}\eta'_u) \right\} \quad (55) \end{aligned}$$

同様にも次のようになる。

$$\begin{aligned} I_{4v} &= \oint \frac{ds}{\rho^2} \left\{ \left( \frac{1}{\rho_x} + 2\rho K_x \right) (R_{13}\eta_v + R_{14}\eta'_v) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\rho_y} - 2\rho K_y \right) (R_{33}\eta_v + R_{34}\eta'_v) \right\} \quad (56) \end{aligned}$$

ここで、 $V_\eta = RX_\eta$  を使うと、

$$I_{4u} + I_{4v} = I_4$$

なので

$$\begin{aligned} J_u &= 1 - \frac{I_{4u}}{I_2} \\ J_v &= 1 - \frac{I_{4v}}{I_2} \end{aligned}$$

とすると、

$$J_u + J_v + J_e = 4 \quad (57)$$

は保存されていることがわかる。 $u, v$  それぞれの方向の減衰時間は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_u} &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} (I_2 - I_{4u}) \\ &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_u \\ \frac{1}{\tau_v} &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} (I_2 - I_{4v}) \\ &= \frac{r_e \gamma^3}{3 T_0} I_2 J_v \quad (58) \end{aligned}$$

となる。

平衡エミッタンスは、ダンピングと量子励起の平衡によって決まる。エネルギー  $\epsilon$  の光子の放射

によって、電子はエネルギーを失い、 $u, v$  方向に  $dV = V_{\eta}\epsilon/E$  の、ベータatron振幅が発生する。そのとき発生するCS不変量は以下のように表わせる。

$$\Delta W_u = H_u(s) \left( \frac{\epsilon}{E_0} \right)^2$$

$$H_u(s) = (\gamma_u \eta_u^2 + 2\alpha_u \eta_u \eta'_u + \beta_u \eta_u'^2)$$

リング1周で発生するCS不変量を得るために2.2でやったように光子のエネルギー分布に対して積分しなければならない。

$$\frac{\Delta W_u}{T_0} = \frac{1}{E_0^2} \oint ds H_u(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon / \oint ds$$

それには  $u, v$  方向のCS不変量は、減衰時間  $\tau_u, \tau_v$  で、減衰する。リング1周あたりのCS不変量の変化は以下のように表わされる。

$$\frac{\Delta W_u}{T_0} = -2 \frac{W_u}{\tau_u}$$

これらを等しいと置けば平衡エミッタンスが計算できる。

$$\begin{aligned} \epsilon_u &= \frac{\tau_x}{4} \frac{1}{cT_0 E^2} \oint ds H(s) \int_0^\infty \epsilon^2 n(\epsilon) d\epsilon \\ &= C_q \gamma^2 \frac{I_{5u}}{I_2 - I_{4u}} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\epsilon_v = C_q \gamma^2 \frac{I_{5v}}{I_2 - I_{4v}} \quad (60)$$

放射積分  $I_{5u}, I_{5v}$  は以下の式で表される。

$$I_{5u} = \oint \frac{H_u(s)}{|\rho|^3} ds \quad I_{5v} = \oint \frac{H_v(s)}{|\rho|^3} ds \quad (61)$$

ここでの考え方をプログラム化したものがSAD[4]に組み込まれている。カップリングが小さいとき、カップリング定数  $\kappa$  は

$$\kappa = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \frac{\epsilon_v}{\epsilon_u} \quad (62)$$

であらわされる。

## 6 終わりに

本稿をつくるにあたって、非常に多くのことを勉強させていただきました。その際、放射光光源系、加速器部の多くの方にお世話になりました。機会を与えてくださった加速器奨励会に感謝します。また草稿を平田光司氏に読んでいただき筆者の勉強不足による誤りを指摘していただいたことを感謝します。

## 参考文献

- [1] A.Wrulich, Particle Accelerators, 22, 257 (1988).
- [2] J.D.Jackson, Classical Electrodynamics.
- [3] 鎌田進, KEK Report 88-16.
- [4] KEK, 生出氏をはじめとする加速器理論グループによって開発されたプログラムコード。
- [5] E.Courant and H.Snyder, Ann. Phys. 3, 1 (1958).

放射積分、平衡エミッタンスについての詳しい説明は以下にある。

Y. 神谷, OHO'84 テキスト.  
M.Sands, SLAC-121, 1970.

各ラティスの解説については

R.Maier, CERN 89-01 (CAS Proceedings).  
A.Roport, CERN 90-03 (CAS Proceedings).  
をあげておく。

## A シンクロトロン振動とその減衰

1章で述べたように軌道長は運動量によって、以下のように変化する。

$$\frac{dL}{L} = \alpha \frac{\Delta p}{p} \quad (1)$$

電子は光速で運動するので、RF周波数 $\omega_{rf}$ に対して、設計上の粒子のリングの回転周波数 $\omega_{rev}$ が以下のように整数比で関係づけられていれば電子は周回のたびに同じ加速電圧を受ける。

$$\omega_{rf} = h\omega_{rev}$$

ここではハーモニクナンバーと呼ばれるもので整数である。運動量のずれた粒子は同期からずれ、基準粒子と違った加速電圧を受ける。基準粒子とのエネルギー差を $\epsilon$ とすると、

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{eV(\tau) - U_{rad}(\epsilon)}{T_0}$$

ここで $V(\tau)$ は時間のずれが $\tau$ の粒子の受けるリング1周あたりの加速電圧で、 $U_{rad}(\epsilon)$ はリング1周あたりにその粒子の放射する放射エネルギーである。蓄積リング中の基準粒子は加速も減速もしないので、

$$eV(0) - U_{rad}(0) = 0$$

が成り立つ。基準粒子に対して微小振動する粒子を考え

$$eV(\tau) = eV(0) + e\dot{V}\tau$$

$$U_{rad}(\epsilon) = U_{rad}(0) + \frac{dU_{rad}}{d\epsilon}$$

と展開する。よって式(1)は

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e\dot{V}\tau - \frac{dU_{rad}}{d\epsilon}}{T_0} \quad (2)$$

となる。

またエネルギーのずれによって軌道長が変化するので、RFへの到着時刻のずれ、 $\tau$ は、

$$\frac{d\tau}{dt} = -\alpha \frac{\epsilon}{E} \quad (3)$$

と表わせる。式(2)と(3)から

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \frac{1}{T_0} \frac{dU}{d\epsilon} \frac{d\tau}{dt} + \Omega^2\tau = 0 \quad (4)$$

ここで $\Omega$ をシンクロトロン周波数と呼び

$$\Omega^2 = \frac{\alpha e \dot{V}}{T_0 E}$$

である。この微分方程式は減衰振動を表わして、減衰時間 $\tau_\epsilon$ は

$$\tau_\epsilon = \frac{1}{2T_0} \frac{dU_{rad}}{d\epsilon} \quad (5)$$

である。

## B 1次元の運動とその移送行列

加速器中の電子の運動を記述するハミルトニアンはX-Yカップリングがない場合、 $x$ 方向と $y$ 方向のハミルトニアンを別々に書くことができる。運動を記述するパラメータは時間 $t$ ではなく軌道上の座標 $s$ にとってある。

$$H_x = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}K_x(s)x^2$$

$$H_y = \frac{1}{2}p_y^2 + \frac{1}{2}K_y(s)y^2$$

ここで、

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho(s)^2} + K_1(s)$$

$$K_y(s) = -K_1(s)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{B_y}{p/e} \quad K_1 = \frac{B'}{p/e}$$

$x$ 、 $y$ どちらもハミルトニアンの係数行列は

$$H = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

の形をしている。運動方程式は $2 \times 2$ の反対称行列 $S_2$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

をつかって、運動方程式を表すと

$$X' = S_2 H X \quad (8)$$

となる。ただし $X$ は以下で定義される。

$$X = \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

$S_2H$ は以下のように書ける。

$$S_2H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{pmatrix}$$

$K_x$ は実際の加速器ではステップ関数的であることが多い。Sands は isomagnetic という表現をしている。そのような場合、 $K_x$ が変わらない領域で、運動方程式は簡単に解ける。 $K_x$ が異なる領域に移行するときは、 $K_x$ が有限であれば  $X$ は連続なのでその条件を使えばよい。解は

$$X = TX_0 = e^{S_2Hs} X_0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} e^{S_2Hs} &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (S_2Hs)^n \\ &= I \cos \sqrt{K_x} s + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{K}} \\ -\sqrt{K} & 0 \end{pmatrix} \sin \sqrt{K_x} s \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} (SH)^{2m} &= (-K)^m I \\ (SH)^{2m+1} &= (-K)^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を使った。移送行列は

$$\begin{aligned} T &= e^{S_2Hs} \quad (10) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

ドリフトスペース、偏向磁石、収束磁石の移送行列についてまとめておく。

- ドリフトスペース  $K \rightarrow 0$

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_y = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 偏向磁石  $K_x = 1/\rho^2$ 、 $K_y \rightarrow 0$

$$T_x = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho} & \rho \sin \frac{s}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho} \sin \frac{s}{\rho} & \cos \frac{s}{\rho} \end{pmatrix}$$

$$T_y = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 収束磁石 (QF)  $K_x = K > 0$ 、 $K_y = -K$

$$T_x = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{pmatrix}$$

$$T_y = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}s) \\ \sqrt{K} \sinh(\sqrt{K}s) & \cosh(\sqrt{K}s) \end{pmatrix}$$

- 収束磁石 (QD)  $K_x = -K < 0$ 、 $K_y = K$

$$T_x = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}s) \\ \sqrt{K} \sinh(\sqrt{K}s) & \cosh(\sqrt{K}s) \end{pmatrix}$$

$$T_y = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}s) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}s) & \cos(\sqrt{K}s) \end{pmatrix}$$

ここで移送行列の一般的な性質についてふれておく。無限小移送行列は

$$T_\epsilon = I + S_2H_x(s_0)\epsilon + O(\epsilon^2)$$

であり、この  $T_\epsilon$  は以下の関係にしたがう。

$$\hat{T} S_2 T = S_2 + O(\epsilon^2)$$

有限の移送行列も同じ関係に従うことがわかる。

$$\hat{T} S_2 T = S_2 \quad (11)$$

このような性質を持つ行列をシンプレクティックであるといい群を作る。つまり単位行列が存在し、シンプレクティックな行列どうしの積もやはりシンプレクティックである。数学的には1次元の運動を表す  $2 \times 2$  行列の群を  $Sp(2)$  という群であるという。この条件は  $Sp(2)$  行列の行列式が1であるという条件に等しい。

リング上のある点  $s$  から1周の移送行列は

$$T(s) = T(s + C, s)$$

であり、やはりシンプレクティック条件を満たす。シンプレクティック行列  $T$  をクーランシュナイダーにしたがい以下のようにパラメトライズする。

$$T = I \cos 2\pi\nu + J(s) \sin 2\pi\nu$$

ここで、 $J$  は

$$J(s) = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix}$$

シンプレクティック条件から

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1$$

が成り立っている。

ある点での  $T$  が求めれば

$$T(s + \epsilon + C, s) = T(s + \epsilon)T_\epsilon = T_\epsilon T(s)$$

から、 $s + \epsilon$  での  $T$  は以下の様に求められる。

$$T(s + \epsilon) = T_\epsilon T(s) T_\epsilon^{-1} \quad (12)$$

CS 不変量を以下の様に定義する。

$$\begin{aligned} W(s) &= \tilde{X}(s) \tilde{S}_2 J(s) X(s) \\ &= \gamma x^2 + 2\alpha x p_x + \beta p_x^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$J$  も  $T$  と同じ変換をするので、

$$J(s + \epsilon) = T_\epsilon J(s) T_\epsilon^{-1}$$

から、 $s + \epsilon$  での CS 不変量は

$$\begin{aligned} W(s + \epsilon) &= \tilde{X}(s + \epsilon) \tilde{S}_2 J(s + \epsilon) X(s + \epsilon) \\ &= \tilde{X}(s) \tilde{T}_\epsilon \tilde{S}_2 T_\epsilon J(s) T_\epsilon^{-1} T_\epsilon X(s) \\ &= \tilde{X}(s) \tilde{S}_2 J(s) X(s) = W(s) \end{aligned}$$

となり、CS 不変量は言葉どおり運動の定数であることがわかる。

トウイスパラメータの変換公式は以下の様に書ける。

$$\begin{pmatrix} \alpha(s+L) & \beta(s+L) \\ -\gamma(s+L) & -\alpha(s+L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$$

見やすくすると

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_{s+L} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & 1 + 2m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_s$$

ドリフトスペースでの  $\beta$  の振舞いは  $m_{ij}$  に移送行列を代入すると

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - \gamma_0 \ell \\ \beta &= \beta_0 - 2\alpha_0 \ell + \gamma_0 \ell^2 \end{aligned}$$

である。ある点  $s = s_0$  で  $\alpha$  が 0 とすると  $\gamma_0 = 1/\beta_0$  なので

$$\beta = \beta_0 + \frac{\ell^2}{\beta_0} \quad (14)$$

となる。

基準粒子から運動量のずれ  $\Delta p/p \equiv \Delta$  がある粒子の運動は

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} K_x x^2 (1 - \Delta) + \frac{\Delta}{\rho} x$$

で表わされる。運動方程式は  $x$ 、 $\Delta$  の 2 次まで考慮すると、

$$X' = S_2 H X + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta/\rho \end{pmatrix}$$

である。これを  $s = 0$  で  $X = X_0$  の条件で解くと

$$\begin{aligned} X &= T_0 X_0 + V \Delta \\ &= e^{S_2 H s} X_0 + (e^{S_2 H s} - I) H^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta/\rho \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。 $V$  を展開すると、

$$V = \begin{pmatrix} \rho(1 - \cos \frac{s}{\rho}) \\ \sin \frac{s}{\rho} \end{pmatrix} \quad (16)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \eta &\equiv x \frac{\Delta p}{p} \\ \eta' &\equiv x' \frac{\Delta p}{p} \end{aligned}$$

を定義すると、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta'_0 \end{pmatrix} + V \quad (17)$$

となる。

$H$  の 2 項目は 3 次の項であるが、共鳴とカップルすると面倒なことになる。それを  $x$  の 3 次の項とキャンセルさせておく

$$\delta H_x = -\frac{1}{2} K_x \Delta x^2 + \frac{1}{6} K_2 x^3$$

$$\delta H_y = -\frac{1}{2}K_y \Delta y^2 - \frac{1}{2}K_2 x y^2$$

こゝら  $x = x + \eta \Delta$  を使って  $x$  の 2 次の項を引きずりだすと

$$\delta H_x = -\frac{1}{2}(K_x - K_2 \eta) x^2 \Delta$$

$$\delta H_y = -\frac{1}{2}(K_y + K_2 \eta) y^2 \Delta$$

である。リング 1 周で積分した  $\delta H$  を 0 と置くと、クロマティシティ補正の式がでてくる。

$$\oint \delta H_x ds \sim \oint (K_x \beta_x - K_2 \eta_x \beta_x) ds \Delta = 0$$

$$\oint \delta H_y ds \sim \oint (K_y \beta_y + K_2 \eta_x \beta_y) ds \Delta = 0$$

ここで

$$\begin{aligned} \xi_x &= -\frac{1}{4\pi} \oint K_x \beta_x ds \\ \xi_y &= -\frac{1}{4\pi} \oint K_y \beta_y ds \end{aligned} \quad (18)$$

をクロマティシティと呼ぶ。

## C 2次元の運動と移送行列

カップリングがある場合にはハミルトニアンは  $x$ 、 $y$  方向を別々に書くわけにはいかない。

$$H = \frac{1}{2}(p_x - \frac{e}{c}A_x)^2 + \frac{1}{2}(p_y - \frac{e}{c}A_y)^2 + \frac{e}{p}A_s$$

$A$  を展開し  $H$  の 2 次までとると

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + L(p_x y - p_y x) \\ &\quad + \frac{1}{2}Kx^2 + Fxy + \frac{1}{2}Gy^2 \end{aligned}$$

のような形に書ける。ここで、

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho(s)^2} + K_1(s)$$

$$K_y(s) = K_1(s)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{B_y}{p/e} \quad K_1 = \frac{B'}{p/e}$$

ハミルトニアンの係数行列は

$$H = \begin{pmatrix} K & 0 & F & -L \\ 0 & 1 & L & 0 \\ F & L & G & 0 \\ -L & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

運動方程式は  $4 \times 4$  の反対称行列  $S_4$  をつかって、

$$X' = S_4 H X \quad (20)$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる。ただし、

$$X = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}$$

であり、 $S_4 H$  は以下のように書ける。

$$S_4 H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & L & 0 \\ -K & 0 & F & L \\ -L & 0 & 0 & 1 \\ -F & -L & -G & 0 \end{pmatrix}$$

無限小移送行列は

$$T_\epsilon = I + S_4 H(s_0) \epsilon + O(\epsilon^2)$$

であり、この  $T_\epsilon$  は以下の関係にしたがう。

$$\tilde{T}_\epsilon S_4 T_\epsilon = S_4 + O(\epsilon^2)$$

有限の移送行列も同じ関係に従う。

$$\tilde{T} S_4 T = S_4 \quad (22)$$

2次元の運動もやはりシンプレクティックであり  $Sp(4)$  で表す。

ここで  $T(s)$  をシンプレクティック行列  $R(s)$  によって  $2 \times 2$  に区分対角化させる。

$$T(s) = R^{-1}(s) U(s) R(s) \quad (23)$$

ここで、 $R$  について

$$R = \begin{pmatrix} \mu I & -S_2^{-1} \tilde{r} S_2 \\ r & \mu I \end{pmatrix} \quad (24)$$

の形を仮定する。またシンプレクティック条件から、

$$\det(r) = 1 - \mu^2$$

を満たす。 $R$  はトリビアルな符号の選択を除けばユニークに決まる。

$U$ を以下の様に表すと

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$A$ も $B$ もシンプレクティックなので一般的に、クーラン=シュナイダー [5] にしたがって、以下のようパラメトライズされる。

$$A = I \cos 2\pi\nu_u + J_u(s) \sin 2\pi\nu_u$$

$$B = I \cos 2\pi\nu_v + J_v(s) \sin 2\pi\nu_v$$

ここで、 $J_u$ ( $J_v$ も同様)は

$$J_u(s) = \begin{pmatrix} \alpha_u(s) & \beta_u(s) \\ -\gamma_u(s) & -\alpha_u(s) \end{pmatrix}$$

である。このように定義された、 $R$ を使って、新しい座標系、 $\tilde{V} = (u, p_u, v, p_v)$ を以下のように定義する。

$$V = RX$$

$u, v$ をノーマル座標と呼ぶ。

また $s + \epsilon$ で、以下の条件で $U_\epsilon$ が区分別対角化されるように、 $U_\epsilon, R(s + \epsilon)$ を決める。 $R$ は式(24)の形を仮定すればユニークに決まる。

$$U_\epsilon = R(s + \epsilon)T_\epsilon R(s)^{-1} \quad (25)$$

$V(s + \epsilon)$ は $V(s)$ に対して

$$\begin{aligned} V(s + \epsilon) &= R(s + \epsilon)X(s + \epsilon) \\ &= R(s + \epsilon)T_\epsilon X(s) \\ &= R(s + \epsilon)T_\epsilon R(s)^{-1}V(s) \\ &= U_\epsilon V(s) \end{aligned}$$

のような変換を受けるので、 $U_\epsilon$ は $V$ の移送行列であることがわかる。 $T$ の変換性

$$\begin{aligned} T(s + \epsilon) &= T_\epsilon T(s)T_\epsilon^{-1} \\ &= R^{-1}(s + \epsilon)U_\epsilon U(s)U^{-1}(s + \epsilon)R(s + \epsilon) \end{aligned}$$

から、 $U(s + \epsilon)$ を以下のように定義すると

$$U(s + \epsilon) \equiv U_\epsilon U(s)U_\epsilon^{-1} \quad (26)$$

$U(s + \epsilon)$ は区分別対角化されかつ式(23)も満たす。つまりあらゆる地点の周回行列 $T(s)$ を $R$ によって対角化させその地点ごとのノーマル座標 $V(s)$

を選べばノーマル座標間の移送行列 $U_\epsilon$ も対角化されていることになる。

ノーマル座標系での運動方程式は

$$(R^{-1}V)' = SHR^{-1}V$$

$$V' = PV \quad P \equiv (RSHR^{-1} - RR^{-1}') \quad (27)$$

である。形式的に解くと

$$\begin{aligned} V(s + \epsilon) &= e^{P\epsilon}V(s) = (I + P\epsilon)V(s) = U_\epsilon V(s) \\ U_\epsilon &= I + P\epsilon \end{aligned} \quad (28)$$

で、 $U_\epsilon$ は区分別対角化されているので、ハミルトニアン $P$ も区分別対角化されていて、 $u, v$ それぞれの運動はデカップルしていることがわかる。

ノーマル座標系でCS不変量を定義する。

$$\begin{aligned} W_u &= \tilde{V}\tilde{S}_2 J_u V = \gamma_u u^2 + 2\alpha_u u p_u + \beta_u p_u^2 \\ W_v &= \tilde{V}\tilde{S}_2 J_v V = \gamma_v v^2 + 2\alpha_v v p_v + \beta_v p_v^2 \end{aligned} \quad (29)$$

このように定義されたCS不変量は運動の定数であることは1次元で行ったのと同様に明らかである。

最後に $\tilde{X}_\eta = (\eta_x, \eta'_x, \eta_y, \eta'_y)$ を使って、 $\tilde{V}_\eta = (\eta_u, \eta'_u, \eta_v, \eta'_v)$ も定義しておく。

$$V_\eta = RX_\eta$$

このように定義すれば、 $dX = X_\eta dE/E$ から、

$$dV = V_\eta dE/E$$

がなりたつ。

## D 平衡振幅と分散

調和振動子は以下のような微分方程式であらわされる。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$dx/dt$ を掛け積分すると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

となる。ここで $A$ は振幅である。位相空間上でガウス分布している調和振動子の確率分布関数は

$$\psi(x, \dot{x}) dx d\dot{x}' = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\dot{x}^2/\omega^2 + x^2}{\sigma_x^2}\right\} dx d\dot{x}'$$



簡単のため

$$p = \dot{x}/\omega$$

という座標をとると分布関数は

$$\psi(x, p)dx dp = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{p^2 + x^2}{\sigma_x^2}\right\} dx dp$$

となる。 $x^2$ 、 $p^2$ 、 $A^2$ の期待値は

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi(x, p) dx dp = \sigma_x^2$$

$$\langle p^2 \rangle = \sigma_x^2$$

$$\langle A^2 \rangle = \langle x^2 + p^2 \rangle = 2\sigma_x^2$$

である。

同様に

$$W = \frac{x^2}{\beta} + \frac{(\alpha x + \beta x')^2}{\beta}$$

が一定になるように運動している傾いた調和振動子についても考える。

$$X = \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

$$P = \frac{\alpha x + \beta x'}{\sqrt{\beta}}$$

という座標をとると分布関数は

$$\psi(X, P)dX dP = \frac{1}{2\pi\epsilon} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{P^2 + X^2}{\epsilon}\right\} dX dP$$

となる。 $X^2$ 、 $P^2$ 、 $XP$ 、 $W^2$ の期待値は

$$\langle X^2 \rangle = \epsilon$$

$$\langle P^2 \rangle = \epsilon$$

$$\langle XP \rangle = 0$$

$$\langle W^2 \rangle = \langle X^2 + P^2 \rangle = 2\epsilon$$

これらから

$$\langle x^2 \rangle = \beta\epsilon$$

$$\langle x'^2 \rangle = \gamma\epsilon$$

$$\langle xx' \rangle = -\alpha\epsilon$$

$$\langle W^2 \rangle = 2\epsilon$$

が得られる。