

## I, はじめに

このノートはビーム不安定性について、高エネルギー電子貯蔵リングに限って解説したものである。筆者は経験も知識も乏しいので、この問題の全体を系統的に述べていくことは到底できない。従って、筆者自身が（一応）理解していることのまとめであると思っただけでありたい。ビーム不安定性の理論については、OHO'86 その他のサマースクールなどのまとまった講義録がある。とくに Chao の講義ノート[1] は有名である（ここで述べることのかなりの部分は、Chao のノートにでている）。

ここではまず、第II章でビーム不安定の原因となる wakefield の性質について述べる（ビームの不安定を引き起こす原因には、他に残留ガスによる散乱やイオントラッピングなどがあるが、ここではとりあげない）。第III章では long range の wakefield による不安定性を rigid bunch（バンチが変形しない）の仮定のもとに調べる。最後に第IV章でバンチの変形を含む不安定性を主に short range の wakefield について述べる。

## II、Wakefield

ビーム不安定を考える時、高エネルギーの電子ビーム、即ち超相対論的な場合には、普通ビーム中の粒子どうしが直接力を及ぼしあうスペースチャージの影響は小さく、ビームと、ビームパイプやRF空洞などとの相互作用が支配的な影響を持つ。

加速器内のある部分を電荷が通過したとき、そこに発生してその後残っている電磁場の事を wakefield と言い、後から来る電荷がそれによって力を受ける。

以下この章では、加速器内の構造における wakefield を、ビームが常に光速で軸方向に直進するものとして考える。曲線部であっても、考えている長さのスケールに対して曲率半径が十分長いとすれば直線で近似しておいてよいであろう。以下、ビーム軸の方向を  $z$  とし、円柱座標系  $(r, \theta, z)$  を使う。軸方向を  $z$  方向または縦方向、 $r-\theta$  面上の向きを横方向と呼ぶ。

### (1) Wakefunction

ビームチューブ内のある構造（RF空洞、ベローズなど）を、点電荷  $q$ （以下、leading charge あるいは leading particle と呼ぶ）が  $z$  方向に光速で通過したとする。これより距離  $s$  だけ遅れて、微小電荷  $e$ （以下、test particle と呼ぶ）がやはり  $z$  方向に光速で通過するときに受ける力を考えよう。この力は、一般に leading charge と test particle の横方向の位置  $(r_0, \theta_0), (r, \theta)$  に依存する。

考えている構造中の電場および磁場を

$$\vec{E}(r, \theta, z, t)$$

$$\vec{B}(r, \theta, z, t)$$

とすると、test particle がある位置で受ける力は、縦方向には、

$$F_z = eE_z \quad (1)$$

横方向には、

$$\vec{F}_\perp = e(\vec{E}_\perp + c\vec{z} \times \vec{B}) \quad (2)$$

である。ここで  $\vec{z}$  は、 $z$  方向の単位ベクトルである。

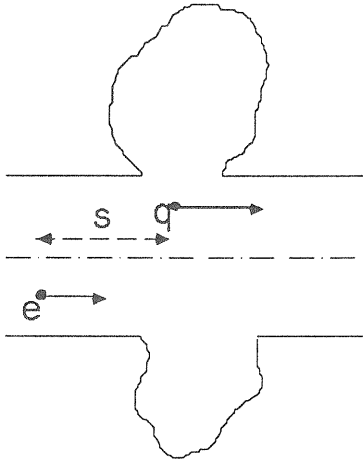


図1、leading charge (q)と testparticle (e)

test particle は、縦方向の力によってエネルギーが変化する。この変化量を  $eq$  で割ったもので longitudinal wakefunction を定義することができる。これは、一般に  $s, r_0, \theta_0, r, \theta$  の関数であり、力を  $z$  方向にそって積分したものになる。

$$W_z(r_0, \theta_0, r, \theta, s) =$$

$$\frac{1}{eq} \int_{-\infty}^{\infty} dz F_z(r, \theta, z, t = \frac{s+z}{c}) \quad (3)$$

leading charge が点電荷でなく線密度  $\lambda(s)$  を持つときのエネルギー変化を  $eq$  で割ったものを wakepotential と呼び、wakefunction の重ね合わせにより以下のようなになる。

$$V_z(r_0, \theta_0, r, \theta, s) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds' W_z(r_0, \theta_0, r, \theta, s-s') \lambda(s')$$

(4)

横方向 transverse wakefunction も同様に

$$W_T(r_0, \theta_0, r, \theta, s) =$$

$$\frac{1}{eq} \int_{-\infty}^{\infty} dz \vec{F}_T(r, \theta, z, t = \frac{s+z}{c}) \quad (5)$$

と定義できる。

#### (A) 多重極展開

加速器内の構造は大体回転対称にできているので、電磁場を多重極展開すると便利である。すなわち  $m$  を整数として  $\cos m\theta$  と  $\sin m\theta$  に比例する成分で展開する。

$$\vec{E} = \sum_{m=0}^{\infty} (\vec{E}_{mc} \cos m\theta + \vec{E}_{ms} \sin m\theta)$$

$$\vec{B} = \sum_{m=0}^{\infty} (\vec{B}_{mc} \cos m\theta + \vec{B}_{ms} \sin m\theta)$$

(6)

以下では構造が回転対称であるとし

よう。この場合には、多重極展開した各成分の  $s, r_0, \theta_0, r, \theta$  に対する依存関係が分離できて簡単になる。 $\theta$  の基準を leading particle の方向に選ぶと、以下のような関係が成り立つ。

$$\frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz E_{mz}(r, \theta, z, t = \frac{s+z}{c}) = -W_{zm}(s) r_0^m r^m \cos m\theta \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} dz (\vec{E}_{mT} + c\vec{z} \times \vec{B}_m) = \\ -W_{Tm}(s) r_0^m r^{m-1} \\ \times (\vec{r} \cos m\theta - \vec{\theta} \sin m\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $\vec{z}, \vec{r}, \vec{\theta}$  は各々の方向の単位ベクトルである。

ここで  $W_{zm}, W_{Tm}$  が  $s$  のみの関数であって  $r_0, r, \theta$  に依存しないことが重要である。式 (3)、(5) のかわりに、ここで改めて式 (7)、(8) によって  $m$  次の longitudinal wakefunction, transverse wakefunction を定義しなおす。

式 (7)、(8) からわかるように、 $m$  の大きなものほど  $r_0, r$  が小さくなると急速に小さくなる。ビームパイプの半径を  $b$ 、ビームの中心軸からのずれをだいたい  $a$  とすると、縦方向の wakefield の影響は  $(a/b)^m$  に、横方向は  $(a/b)^{m-1}$  に比例すると考えてよいであろう。ふつう  $a/b$  は十分小さく設計されているので、最低次のモード、つまり縦方向については

$m=0$ , 横方向については  $m=1$  のモードのみを考えておけばよい。(あるいは、「最低次のモードだけを考えればよいようにビームパイプその他の構造を設計すべきである。」と言ったほうがよいかもしれない。) 以下では多くの場合とくにことわらないで、縦方向の wakefield としては  $m=0$ 、横方向の wakefield としては  $m=1$  モードだけを考慮し、高次のモードは無視する。 $m=0$  を「monopole」  $m=1$  を「dipole」と呼ぶ。

### (B) wakefunction の性質

ここで、wakefunction の性質をいくつかあげておこう。

leading particle が光速で動くものとしているので、wakefield はそれを追いついて前には出られないはずである。従って、

$$\begin{aligned} W_{zm}(s < 0) = 0 \\ W_{Tm}(s < 0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

である。

「Panofsky - Wenzel theorem」と呼ばれる定理、

$$\begin{aligned} \nabla_T \int dz F_z(z, t = \frac{s+z}{c}) = \\ \frac{d}{ds} \int dz \vec{F}_T(z, t = \frac{s+z}{c}) \end{aligned} \quad (10)$$

から、 $W_{zm}$  と  $W_{Tm}$  のあいだには、

$$W_{zm}(s) = \frac{d}{ds} W_{Tm}(s) \quad (11)$$

という関係があることがわかる。従

ってまた、

$$W_{Tm}(s) = \int^s ds' W_{zm}(s') \quad (12)$$

であるから、式9により、

$$\lim_{s \rightarrow +0} W_{Tm}(s) = 0 \quad (13)$$

である。

後で述べるように、始めに電磁場のなかった構造中を電荷が通過したときのエネルギー保存を考えることにより、

$$\lim_{s \rightarrow +0} W_{zm}(s) \geq 0 \quad (14)$$

でなければならない。

## (2) インピーダンス

wakefieldの影響を周波数領域で考えると便利ことが多い。例えば、あとで述べるようにビームの不安定性を考えるとき多くの場合ビームの理想的な運動からのずれを周波数  $\Omega$  によって  $\exp(-i\Omega t)$  のように変化するものと仮定して ( $\Omega$  は一般に複素数) 周波数領域で議論をする。そのためにはインピーダンスという概念が必要になる。電気回路では、電圧を電流で割ったものをインピーダンスと定義し、それは一般に周波数に依存するが、加速器でも同じようにインピーダンスを定義することができる。

まずmonopoleモードについて考える。ある構造中をある密度分布を持った電荷が光速で通過しているとする。この時の電流は電荷の線密度に光速をかけ

たものに等しいが、これを  $I(\tau)$  と書く。 $I$  は、時刻を  $t$  縦方向の位置を  $z$  として  $\tau = t - z/c$  の関数である。このときの電圧を、

$$V(\tau) = \int dz E_z(z, t = z/c + \tau) \quad (15)$$

で定義する。そして電流と電圧の周波数  $\omega$  の成分

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I(\tau) e^{+i\omega\tau} \quad (16)$$

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau V(\tau) e^{+i\omega\tau} \quad (17)$$

により、インピーダンスを

$$Z(\omega) \equiv - \frac{\tilde{V}(\omega)}{\tilde{I}(\omega)} \quad (18)$$

と定義しよう。

monopole モードの wakefunction の定義により、

$$V(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' W[c(\tau - \tau')] I(\tau') \quad (19)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\omega) &= \\ &= - \int \frac{d\tau}{2\pi} \int d\tau' W[c(\tau - \tau')] I(\tau') e^{i\omega\tau} \\ &= - \int d\tau'' W(c\tau'') e^{i\omega\tau''} \times \tilde{I}(\omega) \end{aligned} \quad (20)$$

従って、

$$Z(\omega) = \int \frac{dz}{c} W(z) e^{i\omega z/c} \quad (21)$$

となり、インピーダンスは実は wakefunction のフーリエ変換になっている。

次に dipole モードを考える。こんどは dipole moment を持った電荷が通過するとして、そのときの (dipole moment の) 「電流」を  $D(\tau)$  とし、「電圧」を、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_T &\equiv \int dz (\tilde{E}_T(z, t = z/c + \tau) \\ &+ c\vec{z} \times \tilde{B}(z, t = z/c + \tau)) \end{aligned} \quad (22)$$

と定義しよう。  $V(\tau)$ ,  $D(\tau)$  の周波数  $\omega$  の成分を、  $\tilde{D}(\omega)$ ,  $\tilde{V}(\omega)$  として、 dipole mode のインピーダンスを

$$Z_T(\omega) \equiv i \frac{\tilde{V}_T(\omega)}{\tilde{D}(\omega)} \quad (23)$$

で定義する。 wakepotential の定義により

$$V_T(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' W_T[c(\tau - \tau')] D(\tau') \quad (24)$$

である。ただし、式 (8) で dipole moment が  $qr_0$  であることを使った。従って、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_T(\omega) &= \\ &- \int \frac{d\tau}{2\pi} \int d\tau' W_T[c(\tau - \tau')] D(\tau') e^{i\omega\tau} \\ &= - \int d\tau W_T(c\tau) e^{i\omega\tau} \times \tilde{D}(\omega) \end{aligned} \quad (25)$$

であり、

$$Z_T(\omega) = \frac{1}{i} \int \frac{dz}{c} W_T(z) e^{i\omega z/c} \quad (26)$$

となって、やはりインピーダンスは wakefunction のフーリエ変換である。

ここでは、縦方向、横方向ともに最低次 ( $m=0, m=1$ ) のみを考えたが、高次モードのインピーダンスも同様に定義できる。あるいはより簡単にインピーダンスを wakefunction のフーリエ変換として、

$$Z_{zm}(\omega) = \int \frac{dz}{c} W_{zm}(z) e^{i\omega z/c} \quad (27)$$

$$Z_{Tm}(\omega) = \frac{1}{i} \int \frac{dz}{c} W_{Tm}(z) e^{i\omega z/c} \quad (28)$$

のように定義することもできる。

なお、wakefunction が実数であることと、式 (9) から

$$Z_{zm}(-\omega) = Z_{zm}^*(\omega) \quad (29)$$

$$Z_{Tm}(-\omega) = -Z_{Tm}^*(\omega) \quad (30)$$

という関係がわかる。

### (3) Loss factor

電荷がある構造を通過したときの (通過前には電磁場がなかったとして) エネルギー損失を全電荷量の二乗で割ったものをその構造の loss factor と呼ぶ。エネルギー損失は前方の電荷によってできた wakefield を後方の電荷が感じることによって起こる。電荷の線密度を  $\lambda(s)$ , 全電荷を  $q$  としよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \lambda(s) = q \quad (31)$$

monopole モードを考えて wakepotential を  $V(s)$  とすると lossfactor  $k$  は、

$$k = \frac{1}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds V(s) \lambda(s) \quad (3.2)$$

と書ける。wakepotential は wakefunction と電荷密度で

$$V(s) = \int_{-\infty}^s W(s-s') \lambda(s') \quad (3.3)$$

と表わされるので

$$k = \frac{1}{q^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^s ds' W(s-s') \lambda(s) \lambda(s') \quad (3.4)$$

となる。

無限に短い電荷に対する loss factor を考えてみよう。 $\lambda(s)\lambda(s')$  ( $s>s'$ ) がゼロでないような短い範囲では wakefunction の変化が小さく一定と考えてよいとすると、式 (3.4) の  $W(s-s')$  を定数  $W_0$  で置き換えて、

$$k = \frac{W_0}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^s ds' \lambda(s) \lambda(s') \quad (3.5)$$

これは

$$k = \frac{W_0}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \int_{s'}^{\infty} ds \lambda(s) \lambda(s') \quad (3.6)$$

とも書けて、2式を足してみれば、

式 (3.1) より

$$2k = W_0 \quad (3.7)$$

となる。従って、無限に短い電荷 (点電荷) の loss factor は、

$$k = \lim_{s \rightarrow +0} \frac{1}{2} W(s) \quad (3.8)$$

である。これを言い換えれば、「点電荷は、自分自身の作る field の半分を感じる。」ということになる。

なお、monopole モードにかぎらず電荷が中心軸から  $r_0$  の位置を通過する場合の  $m$  次モードの wakefield による loss factor は、

$$k_m = r_0^{2m} \lim_{s \rightarrow +0} \frac{1}{2} W_{zm}(s) \quad (3.9)$$

となる。

#### (4) RF 空洞

RF 空洞のあるひとつの monopole モードの電磁場を考えてみる。空洞の電圧は、

$$V(t) = \int dz E_z(z, t + z/c) \quad (4.0)$$

で定義できる。今、点電荷  $q$  が通過した時刻を  $t=0$  とすると

$$V(t) = qW(ct) \quad (4.1)$$

である。共振周波数を  $\omega_R$ 、 $Q$  値を  $Q$  として電圧は微分方程式

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \omega_R^2 V - \frac{\omega_R}{2Q} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (4.2)$$

を満たすはずである。これを(4.1)、

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{の条件で解いて、}$$

$$V(t) = qW(0) \left[ \cos \omega' t + \frac{\omega_R}{2Q\omega'} \sin \omega' t \right] e^{-\frac{\omega_R}{2Q} t} \quad (4.3)$$

が得られる ( $W(+0)$  を単に  $W(0)$  と書く)。ただし

$$\omega' \equiv \omega_R \sqrt{1 - 1/4Q^2} \quad (4.4)$$

である。

これと shunt impedance  $R_0$  の関係を見よう。 $R_0$  は、

$$R_0 \equiv \frac{V^2}{P} \quad (4.5)$$

によって定義される空洞のパラメータで、 $P$  は時間当たりの loss power である ( $R_0 = V^2/2P$  という定義を使う人も多いので注意)。空洞内に蓄えられている電磁場のエネルギーを  $U$  とすると、 $Q$  の定義により

$$P = \frac{\omega_R U}{Q} \quad (4.6)$$

である。電磁場のない状態から電荷  $q$  によって励起された直後を考えると、エネルギー保存則より  $U$  は電荷の失ったエネルギーに等しいので、式(3.6)により、

$$U(t=0) = kq^2 = \frac{W(0)q^2}{2} \quad (4.7)$$

である。式(4.3)、(4.4)、(4.5)より

$$R_0 = \frac{2QW(0)}{\omega_R} \quad (4.8)$$

であり、wakefunction は、

$$W(s) = \frac{\omega_R R_0}{2Q} \left[ \cos \omega' s/c + \frac{\omega_R}{2Q\omega'} \sin \omega' s/c \right] e^{-\frac{\omega_R}{2Q} s/c} \quad (4.9)$$

である。

インピーダンスは、これをフーリエ変換して

$$Z(\omega) = \frac{R_0/2}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)} \quad (5.0)$$

となる。この実部と虚部は図2のようになる。

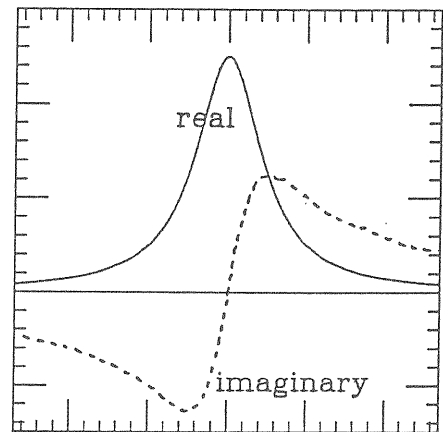


図2、RF 空洞のインピーダンス

次に dipole モードをしらべてみる。  
dipole モードの縦方向の wakefunction  
は monopole と同様に

$$W_{z1}(s) = W_{z1}(0) \left[ \cos \omega' s / c + \frac{\omega_R}{2Q\omega'} \sin \omega' s / c \right] e^{-\frac{\omega_R}{2Q} s / c} \quad (51)$$

である。式 (12) によりこれを積分して、式 (13) の初期条件から、

$$W_{z1}(s) = W_{z1}(0) \frac{c}{\omega'} \sin \omega' s / c \times e^{-\frac{\omega_R}{2Q} s / c} \quad (52)$$

である。一方 dipole モードの shunt impedance  $R_1$  を

$$R_1 \equiv \frac{c}{\omega_R} \frac{\left[ \int dz E_z(r, z, t = z/c) \right]^2}{Pr^2} \quad (53)$$

のように定義する。電荷  $q$  が中心軸から  $r_0$  のところを通過した場合を考えると、

$$W_{z1}(0) = \frac{1}{qr_0} \int dz E_z(r, z, z/c) \quad (54)$$

であるから

$$U = \frac{1}{2} q^2 r_0^2 W_{z1}(0) \quad (55)$$

$$P = \frac{\omega_R U}{Q} \quad (55)$$

より

$$R_1 = \frac{2Qc}{\omega_R} W_{z1}(0) \quad (56)$$

が得られる。従って、

$$W_{T1}(s) = \frac{1}{2} \left( \frac{R_1}{Q} \right) \frac{\omega_R^2}{\omega'} \times \sin \omega' s / c e^{-\frac{\omega_R}{2Q} z / c} \quad (57)$$

であり、フーリエ変換によりインピーダンスは

$$Z_T(\omega) = \frac{\frac{R_1 \omega_R}{2 \omega}}{1 + iQ \left( \frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R} \right)} \quad (58)$$

となる。

## (5) Wakefield の求め方

### (A) 時間領域

ある電荷分布が構造中を通過するときの電磁場を時間をおって計算していく方法で、KEKではTBCI (回転対称)、MAFIA (3次元) などの計算機コードが使われている。ここでは回転対称な構造について monopole モード (縦方向) と dipole モード (横方向) について簡単に触れておきたい。

まずビームパイプを含めて構造をメッシュ状に細分化し (回転対称なので二次元)、時間ステップも細かくとる。そして電荷を通過させて時間ステップ毎に各メッシュ点上での電磁場を Maxwell 方程式から計算していく。普通 monopole モードの場合は中心軸上を、dipole モードでは軸からずらせて通過させる。求められた電磁場を式 (7)、(8) に従って  $z$  方向に積分することによって wakepotential が得られる。

monopole モードの縦方向と dipole モードの横方向の力は test particle の横方向の位置によらないので積分はどの位



置でもよいが、一般には無限の長さにわたって積分しなくてはならない。しかし両側で内径の等しいビームパイプには含まれている構造の場合には、積分はビームパイプの内径のところであると有限ですむ。

monopole モードではビームパイプの表面にそった (z 方向) 電場を積分することになるが、ビームパイプを完全導体と考えればこれはゼロである。従って積分は実際に構造のある有限区間ですればよい (図3)。一方 dipole モードの横方向の力は leading particle のずれの方向に平行であるので図4に示すようなこれと直角のビームパイプ表面上ではゼロである。このように積分路を選べばやはり有限区間で済むことになる。

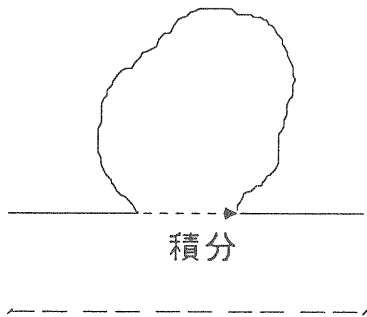


図3、monopole mode field の積分路

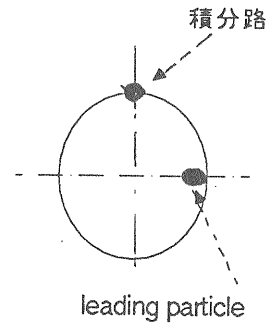
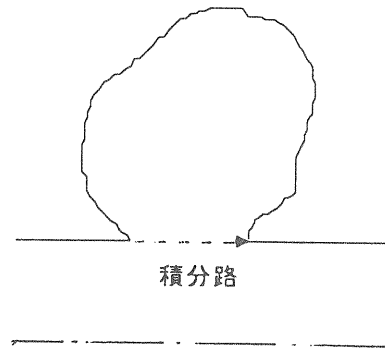


図4、dipole mode field の積分路

メッシュサイズを無限に小さくすることは実際上出来ないので、点電荷に対する wakepotential 即ち wakefunction を完全に求めることは不可能である。しかしメッシュサイズを構造の大きさに比べて十分小さくとれば近いものが得られる。Gaussian の電荷分布 (r.m.s. =  $\sigma$ ) に対する wakepotential は、

$$V_{\sigma}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times \int ds' W(s-s') e^{-\frac{s'^2}{2\sigma^2}} \quad (59)$$

である。σが小さく、W(s-s')が、 $|s'| \approx \sigma$  の範囲で一定ならば  $V_{\sigma}$  は W に一致する。

wakepotential をフーリエ変換したものを、effective impedance と呼ぶことがある。Gaussian の電荷分布 (r.m.s. =  $\sigma$ )

に対する effective impedance は、

$$Z_{\sigma}^{\text{eff}}(\omega) = \int \frac{ds}{c} V_{\sigma}(s) e^{i\omega s/c}$$

$$= Z(\omega) e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2c^2}} \quad (60)$$

である。低周波部分 ( $\omega \ll c/\sigma$ ) に対しては、これはインピーダンスにはほぼ一致する。ただし、wakepotential を無限の長さにわたって求めなければ式 (60) の積分ができないが、実際にはある程度のところで打ち切らざるをえない。この範囲を  $L$  とすると、 $\omega$  に対する分解能は、 $c/L$  程度であり、これより細かい変化はわからない。

### (B) 周波数領域

RF 空洞のように、はっきりした共振のあるものは、時間領域の計算よりも周波数領域で共振周波数、shunt impedanceなどを計算したほうが実用的である。RF 空洞のパラメーターを求める計算機コードとしては、SUPERFISH (回転対称、monopoleのみ)、URMEL (回転対称)、MAFIA (三次元)などが使われている。

周波数、R/Q、Q値が決まれば式 (50)、(58) によって wakefunction が求められる。ただし、ビームパイプのカットオフ周波数より高い周波数は正確に計算できないので long range の wakefunction はわかるが short range の振る舞いを調べるにはこの方法は適当でない。

### (C) 例

図5に示したような簡単な構造を例にとって monopole モードを調べてみる。

$\sigma = 5\text{mm}$  の Gaussian bunch を通過させたときの wakepotential を TBCI を使って計算したのが図6である。一方 URMEL を使って共振周波数と R/Q を計算した結果が図7 (ただしビームパイプのカットオフ以下のみ) であり、これから式 (48) に従って wakefunction を計算したのが図8である。さらに式 (58) から wakepotential を計算したものを図9に示した。TBCI と URMEL の結果を比べると大まかなところはよく一致しているが細かい振る舞いには差が見られる。

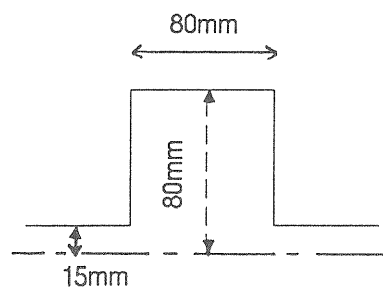


図5、計算例に使った構造

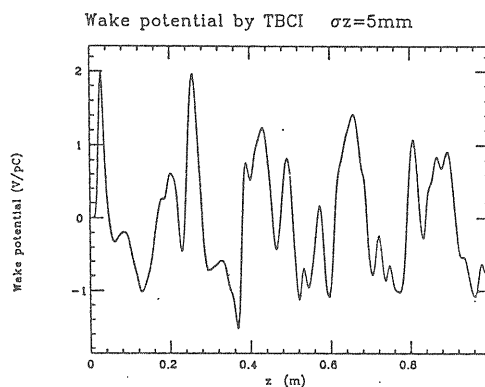


図6、Wakepotential (TBCI)  $\sigma = 5\text{mm}$

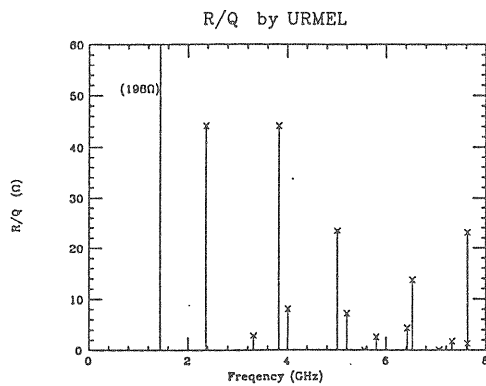


図 7、R/Q (URMEL)

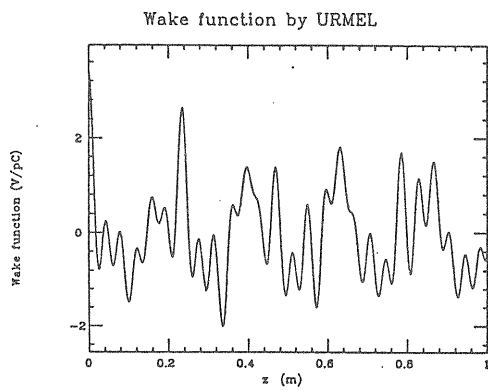


図 8、Wakefunction (URMEL)

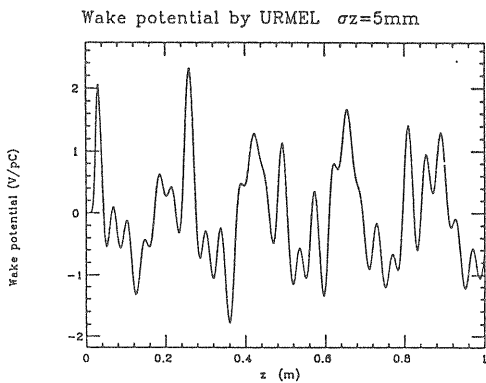


図 9、Wakepotential (URMEL)  $\sigma = 5 \text{ mm}$

次に、電荷の存在している短いところの wakepotential を拡大してみたのが図 10 である。点線はバンチの電荷密度であり、このあたりでは wakepotential は常に正であることがわかる。すなわち RF 空洞のようにバンチに比べて大きな構造のばあいはバンチ全体が減速される。

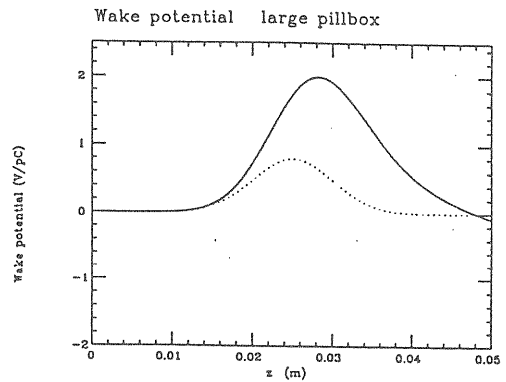


図 10、Wakepotential (TBCI) 図 5 の構造

図 11 のような、バンチ長に比べて短い構造に対する wakepotential をみると図 12 のようになり、バンチの後ろの方では負である。この場合はバンチ前方は減速されるが後方の部分は加速される。

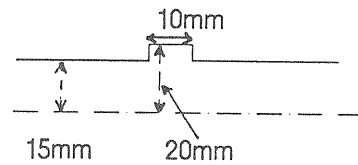


図 11、短い構造の例

### III, Rigid バンチ

この章では、いくつかの（一個でも多数でもよい）バンチからなるビームの不安定性について調べるが、各バンチ自体の形は変わらないものとしておく（rigid bunch）。従ってこの章では一つのバンチは一つの点電荷として取り扱う。ここで問題になるのはバンチ間の長さ以上の long range の wakefield であって、バンチの通過後すぐに減衰してしまうような short range の wakefield は不安定を引き起こすことはない。これを周波数領域の言葉でいえば、幅の狭い、あるいは Q 値の大きなインピーダンスが問題となるということである。普通このようなインピーダンスをもつ構造は RF 空洞であり、ビームパイプのつなぎめのような細かい構造は効いてこない。

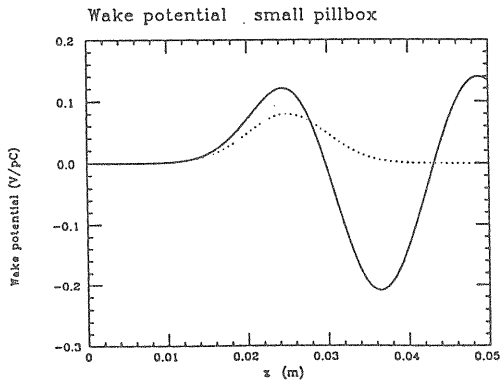


図 1 2、Wakepotential (TBCI) 図 6 の構造

#### (1) Longitudinal motion

##### (A) 一バンチ

リングに一バンチが回っている場合を考える。wakefield の影響のない場合（バンチの電荷を無限小とした極限）の運動方程式は、synchrotron 振動の amplitude が小さいとして、

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\alpha}{c} \delta$$

$$\frac{d\delta}{ds} = -\frac{\omega_{s0}^2}{\alpha c} \tau \quad (1)$$

とかける。ここで  $\tau$  は理想的な位置からのバンチの遅れ時間、 $\delta$  は理想的なエネルギーを  $E_0$ 、バンチのエネルギー

—をEとして

(4)

$$\delta \equiv \frac{E - E_0}{E_0} \quad (2)$$

で定義されるエネルギーのずれ、 $\omega_{s0}$  はバンチの電荷を無限小にしたときの synchrotron 振動数、 $\alpha$  は momentum compaction である。

wakefield の効果をいれると第2式は

$$\frac{d\delta}{ds} = -\frac{\omega_{s0}^2}{\alpha c} \tau + \frac{Ne^2}{EcT_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(c\tau(s) - c\tau_k) \quad (3)$$

$$\tau_k \equiv -kT_0 + \tau(s - ckT_0)$$

となる。k についての和は、周回についての wakefield の和を意味する。N は、バンチに含まれる粒子数、 $T_0$  はリング一周の時間である。W は、リング一周の wakefunction である。厳密にいうとこの式は、長さ当たりの wakefunction がリング内のどこでも等しいと仮定している（実際には RF 空洞の場所などに localize しているが、振動のようすが  $T_0$  の間にほとんど変わらない場合には、この近似は悪くないであろう）。振幅が小さいとして、

$$W(ckT_0 + c\tau(s) - c\tau(s - ckT_0))$$

$$\approx W(ckT_0) +$$

$$d[\tau(s) - \tau(s - ckT_0)]W'(ckT_0)$$

$$W'(z) \equiv \frac{d}{dz}W(z)$$

と近似すると運動方程式より、

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} + \frac{\omega_s^2}{c^2}\tau = \frac{Ne^2}{EcT_0} \sum_k \left\{ \frac{1}{c}W(ckT_0) + (\tau(s) - \tau(s - ckT_0))W'(ckT_0) \right\} \quad (5)$$

となる。また、E の変化は小さいので右辺の E は定数と見なす ( $=E_0$ )。右辺の第一項は定数であり、振動の中心をずらし（加速電場が linear でないとすると）振動数もずらす効果がある。しかしこの項は不安定性にとっては意味がなく、 $\omega_{s0}$  の代わりに新たに振動数  $\omega_s$  をとり、 $\tau$  の原点のとり方を変えれば方程式から消すことができる。

ここで  $\tau$  が

$$\tau(s) \propto \exp(-i\Omega s/c) \quad (6)$$

のように変化するものと仮定する。 $\Omega$  は一般に複素数である。すると式 (5) は、

$$\Omega^2 - \omega^2 = -\frac{Ne^2\alpha c^2}{EcT_0} \times \sum_k (1 - e^{ikT_0\Omega})W'(ckT_0) \quad (7)$$

となる。これをインピーダンスで表わすと

$$W(z) = \int \frac{d\omega}{2\pi} Z(\omega) e^{-i\omega z/c} \quad (8)$$

であるから

$$W'(z) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \left(-i\frac{\omega}{c}\right) Z(\omega) e^{-i\omega z/c} \quad (9)$$

であり、Poisson の和公式 (付録 1) により、

$$\sum_k \left\{ e^{-ik\omega T_0} - e^{-ik(\omega-\Omega)T_0} \right\} = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta\left(\frac{2\pi p}{T_0} - \omega\right) - \delta\left(\frac{2\pi p}{T_0} - \omega + \Omega\right) \right\} \quad (10)$$

だから、

$$\sum_k (1 - e^{ikT_0\Omega}) W'(ckT_0) = \frac{-i\omega_0}{2\pi c} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ p\omega_0 Z(p\omega_0) - (p\omega_0 + \Omega) Z(p\omega_0 + \Omega) \right\} \quad (11)$$

となる。ここで  $\omega_0$  は revolution の周波数である。従って、

$$\Omega^2 - \omega_s^2 = \frac{-iNe^2\omega_0^2}{4\pi^2 E} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ p\omega_0 Z(p\omega_0) - (p\omega_0 + \Omega) Z(p\omega_0 + \Omega) \right\} \quad (12)$$

が得られる。

今、 $\Omega$  と  $\omega_s$  の差が小さいとすると、左辺を  $2\omega_s(\Omega - \omega_s)$  で置き換え、さらに右辺の  $\Omega$  を  $\omega_s$  で置き換えて、

$$\Omega - \omega_s = \frac{-iNe^2\omega_0^2}{8\pi^2 E\omega_s} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ p\omega_0 Z(p\omega_0) - (p\omega_0 + \omega_s) Z(p\omega_0 + \omega_s) \right\} \quad (13)$$

を得る。この実数部と虚数部が各々周波数のずれと growth rate を与える。growth rate は、

$$\tau^{-1} = \text{Im}(\Omega - \omega_s) = \frac{Ne^2\omega_0^2}{8\pi^2 E\omega_s} \times$$

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) \text{Re}[Z(p\omega_0 + \omega_s)] \quad (14)$$

となる。ただし、インピーダンスの性質、(II章の式 (29)) より、

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} p\omega_0 \text{Re}[Z(p\omega_0)] = 0 \quad (15)$$

であることを使った。

### (B) 多数バンチ

次にたくさんのバンチが回っている場合を考える。harmonic number を  $h$  とし、 $n$  番目の RF バケツのバンチの粒子数を  $N_n$  ( $n=0,1,2,3,\dots,h-1$ ) 理想位置からのずれを  $\tau_n$  とする。 $n$  番目のバンチの運動方程式は、すべてのバンチからの wakefield を考慮して

$$\frac{d^2\tau_n}{ds^2} + \frac{\omega_{s0}^2}{c^2}\tau_n = \frac{e^2\alpha}{Ec^2T_0}$$

$$\times \sum_k \sum_{n'=0}^{h-1} N_{n'} W[c(\tau_n(s) - \tau_{k,n'-n})]$$

(16)

$$\tau_{k,n'-n} \equiv \tau_{n'}(s - c(k + \frac{n'-n}{h})T_0)$$

$$- c(k + \frac{n'-n}{h})T_0$$

(17)

となる。一バンチの場合と同様に振幅が小さいとして、

$$W[c(\tau_n(s) - \tau_{k,n'-n})] \approx$$

$$W[c(k + \frac{n'-n}{h})T_0] +$$

$$[\tau_n(s) - \tau_{n'}(s - c(k + \frac{n'-n}{h})T_0)]$$

$$\times W[c(k + \frac{n'-n}{h})T_0]$$

(18)

である。さらに

$$\tau_n(s) = \tilde{\tau}_n(s) \exp(-i\Omega s/c) \quad (19)$$

と置くと

$$(\Omega^2 - \omega_s^2)\tilde{\tau}_n = \frac{-ie\omega_0^2}{4\pi^2E} \sum_{n'=0}^{h-1} N_{n'}$$

$$\times \left\{ \tilde{\tau}_n \sum_p \rho\omega_0 Z(\rho\omega_0) \right.$$

$$\left. - \tilde{\tau}_{n'} \sum_p \omega_p Z(\omega_p) e^{i\frac{n-n'}{h}2\pi p} \right\}$$

$$\omega_p \equiv \rho\omega_0 + \Omega \quad (20)$$

が得られる。

等しい電荷のバンチがM個等間隔に入っているとしよう。即ち、hはMの倍数であり、

$$N_n = N \quad (n: h/M \text{ の倍数})$$

$$= 0 \quad (\text{上以外}) \quad (21)$$

とする。n=mh/M, n'=m'h/M と置いて

$$\tilde{\tau}_{mhM} \rightarrow \tilde{\tau}_m \quad (22)$$

と書き直すと、

$$(\Omega^2 - \omega_s^2)\tilde{\tau}_m = \frac{-ie\omega_0^2 N}{4\pi^2E}$$

$$\times \left\{ \tilde{\tau}_m M \sum_p \rho\omega_0 Z(\rho\omega_0) \right.$$

$$\left. - \tilde{\tau}_{m'} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_p \omega_p Z(\omega_p) e^{i\frac{m-m'}{M}2\pi p} \right\}$$

(23)

となる。この式は、

$$\lambda = \Omega^2 - \omega_s^2 - \frac{-ie\omega_0^2 N}{4\pi^2 E} \quad (24)$$

$$\times M \sum_p p \omega_0 Z(p\omega_0)$$

$$A_m = \frac{ie\omega_0^2 N}{4\pi^2 E} \sum_p \omega_p Z(\omega_p) e^{i\frac{m}{M}2\pi p} \quad (25)$$

と置いてみると、

$$A \equiv \begin{bmatrix} A_0 & A_{-1} & \dots & A_{-M+1} \\ A_1 & A_0 & \dots & A_{-M+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & A_{-1} \\ A_{M-1} & \dots & A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_0 \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \\ \dots \\ \tilde{\tau}_{M-1} \end{bmatrix}$$

として、

$$A\vec{\tau} = \lambda\vec{\tau} \quad (26)$$

という、個有値問題に帰着することがわかる。

$$\tilde{\tau}_m^{(\mu)} = \tilde{\tau}^{(\mu)} e^{i\frac{\mu}{M}m2\pi} \quad (27)$$

と置いてみる ( $\mu=0,1,2,\dots,M-1$ )。すると、これは個有値

$$\lambda^{(\mu)} = \sum_{m'=0}^{M-1} A_{-m'} e^{i\frac{\mu}{M}m'2\pi} \quad (28)$$

の固有ベクトルの  $m$  成分であることが確かめられる。そして

$$\sum_{m'=0}^{M-1} e^{i\frac{p-\mu}{M}m'2\pi} = \begin{cases} M \cdot (\frac{p-\mu}{M} = \text{int.}) \\ 0 \cdot (\frac{p-\mu}{M} \neq \text{int.}) \end{cases} \quad (29)$$

であることから  $\mu$  番目の個有値は、

$$\lambda^{(\mu)} = \frac{iMNe^2\omega_0^2}{4\pi^2 E} \times \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \omega_{Mp'+\mu} Z(\omega_{Mp'+\mu}) \quad (30)$$

となる。従って、 $\mu$  番目のモードの周波数を  $\Omega^{(\mu)}$  として、

$$\Omega^{(\mu)2} - \omega_s^2 = \frac{iMNe^2\omega_0^2}{4\pi^2 E} \times \left\{ - \sum_{p=-\infty}^{\infty} p\omega_0 Z(p\omega_0) + \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \omega_{Mp'+\mu} Z(\omega_{Mp'+\mu}) \right\} \quad (31)$$

が得られる。

このようなバンチの振動モードは、「longitudinal coupled bunch mode」と呼



ばれ、このために引き起こされる不安定を「longitudinal coupled bunch instability」という。図1に、 $\mu=0, 1, 2, 3, 4, 5$ の場合について、ある瞬間のリング全体のバンチの変位の様子を示した（ただし見やすいように縦方向の変位を横方向の変位で置き換えてある）。時間と共に、これらのバンチはリングを周回しながら synchrotron 振動をする。

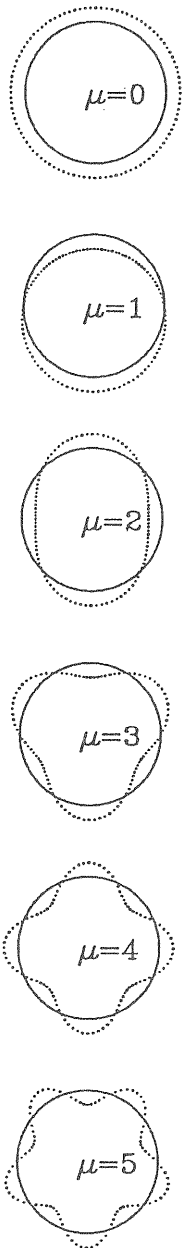


図1、Coupled bunch mode

問題： $\mu$ モードの振動があるとき、リングのある一箇所でみたバンチの変位をフーリエ変換すると、どうゆう周波数成分がみえるか？

$\Omega^{(\mu)}$  の  $\omega_s$  からのずれが小さいとして、右辺の虚数部をとり、 $\mu$ モードの growth rate が得られる。やはりII章式(30)より、第一項の寄与は消えて

$$\tau^{-1(\mu)} = \frac{MNe^2\omega_0^2}{8\pi^2E\omega_s} \times \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \omega_{Mp'+\mu} \operatorname{Re}[Z(\omega_{Mp'+\mu})] \quad (32)$$

であり、これは

$$\tau^{-1(\mu)} = \frac{MNe^2\omega_0^2}{8\pi^2E\omega_s} \times \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \omega_+ \operatorname{Re}[Z(\omega_+)] - \sum_{p=1}^{\infty} \omega_- \operatorname{Re}[Z(\omega_-)] \right\} \quad (33)$$

とかける。ただし

$$\omega_{\pm} \equiv (Mp' \pm \mu) \pm \omega_s \quad (34)$$

と定義した。

これを一バンチの場合の growth rate と比べてみると、インピーダンスの周波数についての和の間隔が  $\omega_0$  から  $M\omega_0$  に広がり、変わりに各項の大きさが  $M$  倍になっている事がわかる。

ふつう

$$\omega_s \ll \omega_0 \quad (35)$$

なので、 $\omega_0$  の整数倍付近のインピーダンスがビームの不安定性に影響を及ぼす。 $\omega=(Mp'+m)\omega_0$  ( $m=0,1,2,\dots,M-1$ ,  $p'=0,1,2,3,\dots$ ) 付近のインピーダンスに注目してみると、

$$\begin{aligned} Z(n\omega_0+\omega) &: \mu=m \text{ mode excite} \\ Z(n\omega_0-\omega) &: \mu=M-m \text{ mode damp} \end{aligned} \quad (36)$$

で、あるモードを damp する周波数のすぐ近く ( $2\omega_0$  上) には他のモードを励起する周波数がある (ただし、 $m=0$ ,  $M/2$  の場合には同一モード)。

## (2) Transverse motion

今度は、横方向の運動を調べよう。ただし、垂直方向又は鉛直方向のどちらか一次元の変位のみを考える。

一バンチの運動方程式は、wakefield の影響を無視したとき (バンチ電荷ゼロの極限) の betatron 振動数を  $\omega_\beta$  とし

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\omega_\beta^2}{c^2}x &= \frac{Ne^2}{EcT_0} \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(s-ckT_0)W(ckT_0) \end{aligned} \quad (37)$$

と書ける。W は、dipole mode のリング一周の wakefunction である。Longitudinal motion のときと同様に、多数のバンチがある場合には、

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_n}{ds^2} + \frac{\omega_\beta^2}{c^2}x_n &= \frac{e^2}{EcT_0} \sum_{n'=0}^{h-1} N_{n'} \\ &\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_n \left[ s - c \left( k + \frac{n'-n}{h} \right) T_0 \right] \\ &\times W \left[ c \left( k + \frac{n'-n}{h} \right) T_0 \right] \end{aligned} \quad (38)$$

となる。ここで  $x_n$  は  $n$  番目のバケツに入っているバンチの横方向の変位である。ここで

$$\tilde{x}_n(s) = \tilde{x}_n \exp(-i\Omega s/c) \quad (39)$$

と置くと

$$\begin{aligned} (\Omega^2 - \omega_\beta^2)\tilde{x}_n &= \frac{-ce^2}{ET_0} \sum_{n'=0}^{h-1} N_{n'} \\ &\times \tilde{x}_{n'} \sum_k e^{-i\Omega(s/c - kT_0 - \frac{n'-n}{h}T_0)} \\ &\times W \left[ c \left( k + \frac{n'-n}{h} \right) T_0 \right] \end{aligned} \quad (40)$$

これをインピーダンスで書くと、

$$W(z) = i \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega z/c} Z(\omega) \quad (41)$$

であるから (Z は dipole mode のインピーダンス) poisson の和公式から

$$\begin{aligned} (\Omega^2 - \omega_\beta^2)\tilde{x}_n &= \frac{-ice^2\omega_0^2}{4\pi^2E} \sum_{n'=0}^{h-1} N_{n'} \\ &\times \tilde{x}_{n'} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n-n'}{h}p2\pi} Z(p\omega_0 + \Omega) \end{aligned} \quad (42)$$

となる。

縦方向の所で考えたのと同様に、等しい電荷のバンチがM個等間隔に入っているとしよう（式（21））。  
 $m=0,1,2,\dots,M-1$ として、 $x_m$ を定義しなおして

$$(\Omega^2 - \omega_\beta^2)\tilde{x}_m = \frac{-icNe^2\omega_0^2}{4\pi^2E} \sum_{m'=0}^{M-1} \times \tilde{x}_{m'} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{m-m'}{M}p2\pi} Z(p\omega_0 + \Omega) \quad (43)$$

となり、これは、

$$\lambda \equiv \Omega^2 - \omega_\beta^2 \quad (44)$$

$$B_m \equiv \frac{-icNe^2\omega_0^2}{4\pi^2E} \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z(\omega_0 + \Omega) e^{i\frac{m}{M}2\pi p} \quad (45)$$

とにおいて

$$B \equiv \begin{bmatrix} B_0 & B_{-1} & \dots & B_{-M+1} \\ B_1 & B_0 & \dots & B_{-M+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B_{-1} \\ B_{M-1} & \dots & B_1 & B_0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\tilde{x} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \dots \\ \tilde{x}_{M-1} \end{bmatrix} \quad (47)$$

とすると、

$$B\tilde{x} = \lambda\tilde{x} \quad (48)$$

という個有値問題になる。

$$\tilde{x}_m^{(\mu)} = \tilde{x}^{(\mu)} e^{i\frac{\mu}{M}m2\pi} \quad (49)$$

は、個有値

$$\lambda^{(\mu)} = \sum_{m'=0}^{M-1} B_{-m'} e^{i\frac{\mu}{M}m'2\pi} \quad (50)$$

の固有ベクトルのm成分であることがわかる。このような振動を「transverse coupledbunch mode」、  
「transverse coupledbunch instability」と呼んでいる。

個有値は、式（29）より

$$\lambda^{(\mu)} = \Omega^{(\mu)2} - \omega_\beta^2 = \frac{-icMNe^2\omega_0^2}{4\pi^2E} \times \sum_{p'=-\infty}^{\infty} Z[(p'M + \mu)\omega_0 + \Omega] \quad (51)$$

であり、

$$\Omega - \omega_\beta \ll \omega_\beta \quad (52)$$

と仮定して右辺の虚数部を取り growth rate は、

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\mu) &= \frac{-cMNe^2\omega_0^2}{8\pi^2E\omega_\beta} \\ &\times \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re}[Z(p'M + \mu)\omega_0 + \omega_\beta] \end{aligned} \quad (53)$$

インピーダンスの性質、II章式(30)より

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\mu) &= \frac{-cMNe^2\omega_0^2}{8\pi^2E\omega_\beta} \times \\ &\left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \operatorname{Re}[Z[\omega'_+]] - \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Re}[Z[\omega'_-]] \right\} \\ \omega'_\pm &\equiv (pM \pm \mu)\omega_0 \pm \delta\omega_\beta \end{aligned} \quad (54)$$

を得る。ただし  $\delta\omega_\beta$  は  $\omega_\beta$  を  $\omega_0$  で割ったあまりの部分である。

この式は longitudinal motion の場合の式と非常によく似ている。ただ、 $\omega_s \ll \omega_0$  であるが、 $\delta\omega_\beta$  は一般には小さくない。

### (3) RF 空洞による不安定性

#### (A) 加速モード

まずRF 空洞の加速モードがビームの不安定にどうかかわるかをみる。RF 空洞のインピーダンスは、II章式(50)で与えられる。

(i) Robinson instability (Robinson damping)

まずーバンチの場合の growth rate の式(15)についてみる。RF 空洞の加速モードのインピーダンスは鋭いピークを持っており、その共振周波数  $\omega_R$  は revolution frequency の整数倍に近い。harmonic number を  $h$  として、

$$\omega_R \approx h\omega_0 \quad (55)$$

である。

$\omega_s \ll \omega_0$  であることと、普通は成り立つ関係(ただしすぐ後で述べるようにそうでない場合もある)

$$|h\omega_0 - \omega_R| \ll \omega_0 \quad (56)$$

$$\frac{\omega_R}{Q} \ll \omega_0 \quad (57)$$

即ち、空洞の detuning が小さく、共振の幅が小さいことを仮定すれば、式(14)の  $p$  についての和のなかで効いてくるのは  $p=h, -h$  だけである。従って

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &\approx \frac{Ne^2\omega_0^2}{8\pi^2E\omega_s} h\omega_0 \\ &\times \operatorname{Re}[Z(h\omega_0 + \omega_s) - Z(h\omega_0 - \omega_s)] \end{aligned} \quad (58)$$

となる。図2のように、共振周波数がすこしでも  $h\omega_0$  より低いほうにずれていれば growth rate は負になり、振動を抑えるように働く。実際のオペレーションでもそのように detune されていて、これを Robinson damping という。逆に高いほうにずれていると不安定がおこり、これを Robinson instability と呼

ぶ。

$\omega_R < h\omega_0$  stable

$\omega_R > h\omega_0$  unstable (59)

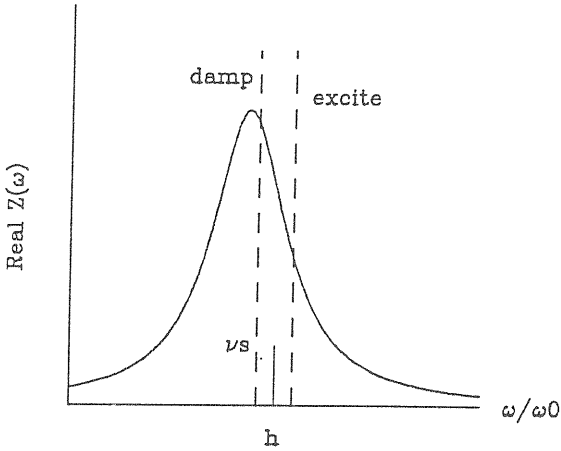


図2、Robinson damping.

(ii) Coupled bunch instability

coupled bunch instability といえはふつうは RF 空洞の高次モードが問題となる(次節)が、ビーム電流が大きくなってくると加速モードによって不安定になる可能性がある。

式(33)をみると、 $\mu=0$ モードに対しては、式(59)と同じ安定条件が得られる。

次に、 $\mu=M-1$ モードを考えてみよう。説明の簡単のため

$$\frac{\omega_R}{Q} \ll M\omega_0 \quad (60)$$

を仮定する。式(33)で、 $\mu=M-1$ モードの growth rate は、

$$\tau^{-1(M-1)} \approx \frac{MNe^2\omega_0^3}{8\pi^2E\omega_s}$$

$$\times \{ (h+1)\text{Re}[Z((h+1)\omega_0 + \omega_s)] - (h-1)\text{Re}[Z((h-1)\omega_0 - \omega_s)] \} \quad (61)$$

となる。図2からもわかるように  $m=0$ モードが安定になるような条件(式59)のもとでは、この Coupled bunch mode は RF 空洞の加速モードのインピーダンスによって励起されてしまう。

もしインピーダンスの幅が狭く式(56)、(57)が成り立てば、一バンチのときと同様に、

$$\omega = h\omega_0 \pm \omega_s \quad (62)$$

のインピーダンスしか効かず、 $m=0$ 以外のモードの growth rate は (radiation damping に比べて) 無視してもよい(図3)

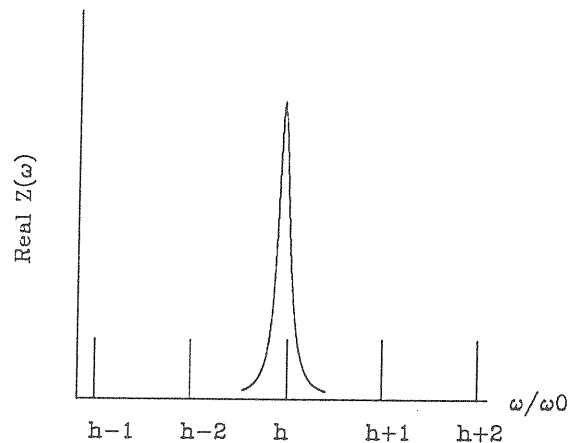


図3、Very narrow impedance.

ところが、ビーム電流が極めて高い場合には空洞のインプットカップラーのカップリングを大きく(加速モード

の loaded Q を小さく) しなければならず、

$$\omega \approx (h \pm 1) \omega_0 \quad (63)$$

でのインピーダンスが無視できない。しかも、普通、detuning  $h\omega_0 - \omega_R$  も、電流の増加と共に大きくする必要があるので、図4からもわかるように M-1 モードの growth rate は大きくなる。

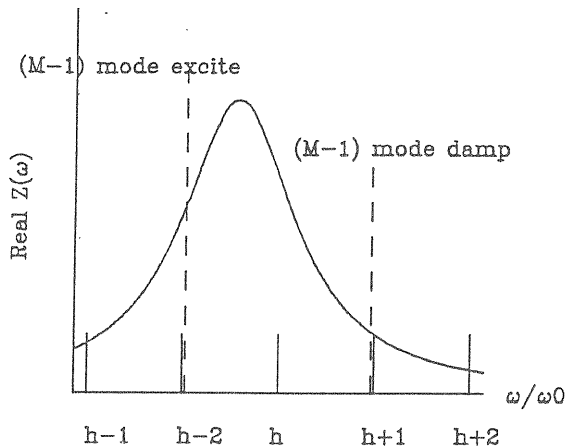


図4、Instability of the m=M-1 mode.

従って、周長が大きくビーム電流の極めて高いリングでは、加速モードによる Coupled bunch instability も考慮しておく必要がある。

### (B) 高次モード

RF 空洞の高次モードによって引き起こされる coupled bunch instability について述べる。

ある高次モードの幅が狭い (Q 値が高い) 場合には、それが coupled bunch instability を起こすかどうかは、その周波数が

$$\omega_{\text{excite}} = n\omega_0 + \omega_s \quad (64)$$

近くにあるかどうかによる。加速モードの周波数は、revolution の整数倍近

くに tune されるが、高次モードの周波数がどうなるかは空洞の形状によって変わる。

RF 空洞には多数の高次モードがあり、そのうちいくつかは大きな R/Q をもっているのが普通である。これらの周波数をうまくコントロールすることによって不安定を抑えられる場合もある (例えば、KEK のフォトンファクトリーでは、空洞の温度を調整して高次モードの周波数をコントロールしている)。しかしながら、加速モードの周波数は変えないで多数の高次モードの周波数をうまい値にもっていくことが常に可能とは限らない。ここでは不安定を抑える方法として「damped cavity」を使う方法と「decoupling」法について述べる。他に、ここでは述べないが、バンチの運動を検出して振動を抑えるように feed back をかけるといった方法もある。

#### (i) Damped cavity

Coupled bunch instability は、あるバンチの励起した wakefield が、続いてくるバンチに力を及ぼすことによって起こる。だから、もしこの field を次のバンチが来るまでの間に減衰させてしまえば不安定は起こらない。完全に消すことはできなくてもある程度減衰させることができれば growth rate は下がる。これを周波数領域の言葉でいえば「Q 値を下げる」ということであり、インピーダンスの幅を広げてピークを下げることに対応する (図5)。このような目的で、高次モード Q 値を下げた空洞を「damped cavity」と呼んでいる (なお、普通は、Q 値を下げて R/Q はほとんど変化しないことに注意)。

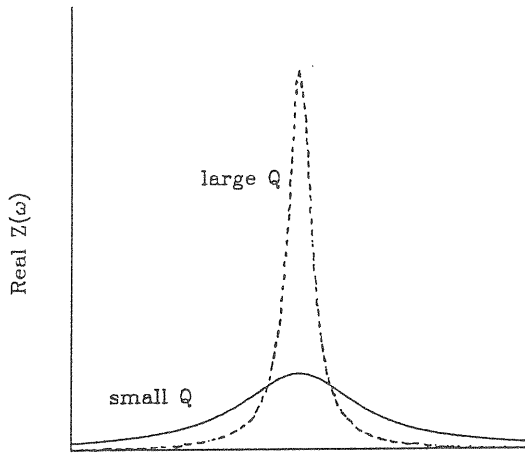


図5、High and low Q (equal R/Q)

Q値がある程度小さくなってインピーダンスの幅が revolution frequency よりも大きくなったとする。

$$\frac{\omega_R}{Q} > \omega_0 \quad (65)$$

すると、インピーダンスはいくつかの coupledbunch モードに影響を与えるようになる。その中には必ず励起されるモードと減衰されるモードがある。もし

$$\omega_0 \ll \frac{\omega_R}{Q} \ll M\omega_0 \quad (66)$$

であれば、式(33)の和のなかで一つ(又は二つ)だけが効き、最も励起を受けるモードの growth rate はほぼインピーダンスのピークの値に比例する。

$$\max[\tau^{-1}] \propto R_0 \quad (67)$$

しかしQ値がもっと小さくなり

$$\frac{\omega_R}{Q} > M\omega_0 \quad (68)$$

になると、ある一つの coupledbunch mode について式(33)でいくつかの励起する項と damp する項が効いてくる。従って shunt impedance が等しくても、Qが大きく R/Qが小さい場合とQが小さく R/Qが大きい場合とでは(ちょうどある coupledbunch mode がインピーダンスのピークに当たった場合でも)ビーム不安定に対する寄与は異なる。

ここでは縦方向の式(33)を使ったが、横方向についても全く同様の議論ができる。

問題：式(57、66、68)を時間領域の言葉で言い直すとどうなるか。

#### (ii) Decoupling

バンチ毎に異なる振動数をもたせることによりコヒーレントな振動の growth を抑えることができる。ここでは完全な議論はしないが、横方向の coupledbunch instability を例にとって簡単に説明してみる。

式(43)の p についての和で、インピーダンスの幅が狭くある一つの p のみが効くとすると

$$X \equiv \frac{-icNe^2 \omega_0^2}{4\pi^2 E} \quad (69)$$

と置いて、

$$\tilde{x}_m e^{-i\frac{m}{M}p2\pi} = \sum_{m'=0}^{M-1} \tilde{x}_{m'} e^{-i\frac{m'}{M}p2\pi} \frac{X}{\Omega^2 - \omega_{\beta m}^2} \quad (70)$$

と書ける。 $\omega_{\beta m}$  は、 $m$  番目のバンチの (電流ゼロの極限での) betatron 振動数である。両片で  $m$  についての和をとると、

$$1 = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{X}{\Omega^2 - \omega_{\beta m}^2} \quad (71)$$

が得られる。

すべてのバンチの  $\omega_{\beta}$  が等しい場合には、

$$1 = \frac{MX}{\Omega^2 - \omega_{\beta}^2} \quad (72)$$

であるから、

$$\Omega - \omega_{\beta} \ll \omega_{\beta} \quad (73)$$

として、growth rate は

$$\tau^{-1} \approx M \frac{\text{Im}[X]}{2\omega_{\beta}} \quad (74)$$

である。

一方バンチ毎に  $\omega_{\beta}$  が大きく異なっている場合は、式 (71) の  $m$  についての和のうち  $\omega_{\beta m}$  が  $\Omega$  にもっとも近いものが支配的になる。この  $m$  を改めて  $m$  とかく事にして、

$$1 \approx \frac{X}{\Omega^2 - \omega_{\beta m}^2} \quad (75)$$

が得られる。growth rate は

$$\tau^{-1} \approx \frac{\text{Im}[X]}{2\omega_{\beta m}} \quad (76)$$

となつて、振動数のすべて等しい場合の  $1/M$  になる。

ここでの議論は、縦方向の運動についても同様にしてできる。decoupling についてのより詳しい理論的な話は、例えば文献[8]を見られたい。

実際の例として、KEK のフォトンファクトリーでは、高周波の四重極電磁石を使ってバンチ毎にベータトロン振動数に差を作り最大電流が増大することが確かめられている。また、後で述べるように JLC の Damping Ring ではこの方法で transverse coupledbunch instability を抑えることが計画されている。longitudinal coupledbunch instability を抑えるための、シンクロトロン振動数の差は、main の加速 RF 周波数と revolution frequency だけ異なる周波数で feed される空洞を導入することで作ることができる。

#### (4) Simulation

これまではリング内に等しい電荷のバンチが等間隔に入っている場合を述べてきたが、それ以外の一般の場合に式 (20) や (42) を見通しよく変形することは困難であろう。また、バンチ毎の tune の差や feed back などは解析的に取り扱うのが大変である。しかも、これまでは式 (19) (39) のようにバンチの運動の時間への依存性を  $\exp(-i\Omega t)$  のように指数的に書けるものと仮定してきたが、実際にはこのようには書けないような不安定も存在する。そこで、計算機による simulation が有用になる。実際、インピーダンスを



含めてリングのパラメーターが与えられていれば、バンチ自体が変形しないという仮定のもとでは、解析的方法を知らなくても simulation によってほぼ現実に近い結果が得られるであろう。

(ただしバンチ内の運動を問題にするとそうはいかない。リングを回るバンチはせいぜい数百個なので計算機で一個づつ動きを追っていきけるが、バンチ内には例えば  $10^{10}$  個といった数の粒子があるので今の計算機の能力ではとてもすべての動きを追いかけてはいられない。もちろんバンチ内の運動を simulation することは可能であるが、多数の粒子をいくつかの macroparticle で置き換えるといった近似がどうしても必要になる。)

ここでは rigid なバンチの運動の simulation の方法をできるだけ具体的に述べてみたい。

#### (A) Transverse motion

図6のようにリングにRF空洞があり、いくつかのバンチが回っている場合の、横方向の運動の simulation を述べる。簡単のため wakefield としては空洞の dipole mode 一つだけを考える (数個のモードの効果を入れることは容易である)。

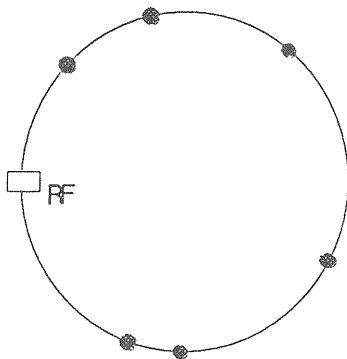


図6、Ring accelerator with multibunch.

Simulation は以下のようなステップで行なう。

(a) バンチが空洞を通過するとき、そこにある wakefield によってキックされる。粒子の横方向の運動量 ( $p_x$ ) の変化量を wakefield を  $W_T$  (複素数) として

$$p_x \rightarrow p_x + \text{Re}[W_T] \quad (77)$$

とかく。

(b) バンチ通過にともなって wakefield が励起される。バンチの電荷を  $q$ 、横方向の変位を  $x$  として  $W_T$  の変化は

$$W_T \rightarrow W_T + iqx \frac{1}{2} \left( \frac{R}{Q} \right)_T \frac{\omega_R}{c} \quad (78)$$

となる。ここで  $(R/Q)_T$  は、考えている dipole モードの  $R/Q$ 、 $\omega_R$  はその周波数である。

(c) バンチ通過後次のバンチが来るまでの時間 ( $\Delta t$ ) に、wakefield は、振動しながら減衰する。

$$W_T \rightarrow W_T e^{-i\omega_R \Delta t} e^{-\frac{\omega_R}{2Q} \Delta t} \quad (79)$$

ここで  $Q$  はこのモードの  $Q$  値である。

(d) 各バンチは空洞を通過後リングを一周する。この時ベータトロン振動をしながら radiation damping をする。

$$\begin{bmatrix} x \\ p_x \end{bmatrix} \rightarrow \exp\left[-\frac{1}{\tau_d f_{rev}}\right] \times \begin{bmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha \sin 2\pi\nu, \\ -\gamma \sin 2\pi\nu, \\ \beta \sin 2\pi\nu \\ \cos 2\pi\nu - \alpha \sin 2\pi\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p_x \end{bmatrix} \quad (80)$$

ただし、 $\alpha, \beta, \gamma$  は RF 空洞の位置での値を使う。 $\tau_d$  は radiation damping time であり、 $f_{rev}$  は revolution frequency、 $\nu$  はベータトロン tune である。

基本的に、以上の四つのステップを繰り返すことにより simulation ができる。初期条件として、wakefield はふつうはゼロとしてよい。各バンチの  $x, p_x$  は任意に決めてよいが、これを適当に選ぶことで、例えば入射や取り出しの時の transient な不安定性も調べることができる。

### (B) Longitudinal motion

縦方向の運動も横方向と同様に simulation できるが、ここでは加速モードのビームローディングも考慮に入れて、空洞内の field として以下の三つを取り扱う方法を述べる。

(i) Power generator によって作られる加速モードの field。

(ii) ビームによって励起される加速モードの field (wakefield)。

(iii) 高次モード (monopole mode) の wake field。

(i) の field は amplitude, phase とも固定しておくが、(ii) と (iii) は transverse motion のときと同じように扱う。

Simulation は transverse motion と同様に以下の 4 ステップで行う。

(a) 各バンチは空洞通過時に加速 (または減速) されてエネルギーが変化する。粒子のエネルギーを  $E$  として

$$E \rightarrow E + e \operatorname{Re}[V_g + V_0 + V_h] - \frac{eq}{4} \left\{ \left( \frac{R}{Q} \right)_0 \omega_{0R} + \left( \frac{R}{Q} \right)_h \omega_{hR} \right\} \quad (81)$$

である。ここで、 $V_g, V_0, V_h$  は各々 field (i)、(ii)、(iii) による電圧 (複素数) である。これらの実数部の大きさは、バンチの (理想的な位置からの) 遅れ時間  $\tau$  に依存する。 $V_0, V_h$  は次のステップ (b)、(c) から決まるが、 $V_g$  は、

$$V_g = |V_g| e^{-i(h\omega_0\tau + \theta_0)} \quad (82)$$

で与えられる。ここで  $h$  は harmonic number、 $\omega_0$  は revolution frequency、 $\theta_0$  は、ビームローディングなどの運転条件から決まる定数である。

式 (81) の右辺の最後の項は、loss factor から決まるエネルギー損失の分であり、 $q$  はバンチの電荷、 $(R/Q)_0, (R/Q)_h$  は、各々加速モードと高次モードの  $(R/Q)$ 、 $\omega_{0R}, \omega_{hR}$  はその周波数である。

(b) バンチの通過により (ii)、(iii)

の field が励起される。

$$V_0 \rightarrow V_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{Q} \right)_0 \omega_{0R} \quad (83)$$

$$V_h \rightarrow V_h - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{Q} \right)_h \omega_{hR} \quad (84)$$

(c) バンチ通過後次のバンチが来るまでの時間 ( $\Delta t$ ) に field は振動しながら減衰する。

$$V_0 \rightarrow V_0 e^{-i\omega_{0R}\Delta t - \frac{\omega_{0R}}{2Q_{0L}}\Delta t} \quad (85)$$

$$V_h \rightarrow V_h e^{-i\omega_{hR}\Delta t - \frac{\omega_{hR}}{2Q_{hL}}\Delta t} \quad (86)$$

(d) 各バンチは空洞を通過した後、リングを一周する。この時そのエネルギーに応じた放射減衰でエネルギーを失い、さらにエネルギーによって次に空洞を通過するときの (理想位置からの) 遅れ時間が変化する。すなわち

$$E \rightarrow E - U(E) \quad (87)$$

$$U(E) \approx \frac{E^2}{E_0^2} U(E_0) \quad (88)$$

$$\tau \rightarrow \tau + \alpha \frac{E - E_0}{E_0 f_{rev}} \quad (89)$$

ここで  $U(E)$  は、エネルギー  $E$  をもつ粒子が放射減衰によりリング一周で失うエネルギーで、エネルギーの二乗にほぼ比例する ( $E_0$  は理想的なエネルギー

の値)。  $\alpha$  は、momentum compaction factor である。

初期条件は、高次モードの wakefield はゼロとしてよいが、加速モードについてはコースティングビームの理想的な条件のもとでのビームローディングを計算して与えておくといよいであろう。 $\tau, E$  は、任意に与えられる。

$V_g, \omega_{0R}$  は制御可能であり、ビームローディングなどを考慮して決めなくてはならない。

横方向の simulation では振動数や radiation damping time を手で入れたが、今度の場合は  $U(E), E_0, \alpha$  などを与えることによって自動的にシンクロトロン振動をし、radiation damping も起こる。

#### (5) JLC Damping Ring の場合

JLC (Japan Linear Collider) の Damping Ring のデザインを例にとって RF 空洞の wakefield によって何が起こるかを simulation してみる。

JLC Damping ring には、図 7 のように 10 個のバンチトレインが入り、各バンチトレインは 20 個のバンチからなる。各バンチは  $2 \times 10^{10}$  個の電子 (または陽電子) を含む。トレイン内でのバンチ間隔は約 1.4 nsec、トレインの間は 60 nsec である。対称な二箇所 RF 空洞が置かれる。主なパラメータを表 1 に示す。

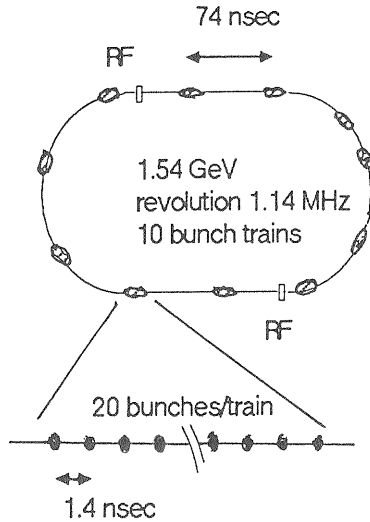


図7、Bunches in the JLC Damping Ring.

表1、Parameters of JLC Damping Ring

Beam energy	1.54 GeV
Revolution frequency	1.14 MHz
RF frequency	1.428 GHz
# of particles /bunch	$2 \times 10^{10}$
# of bunches /train	20
# of trains /ring	10
Beam current	0.8 A
Radiation loss /turn	0.47 MeV
Damping time	5 msec
	(transverse)
Betatron wave length	5 m (at RF)
Momentum compaction	$3 \times 10^{-3}$

(a) transverse motion

まず横方向について試みる。空洞の高次モード (dipole) 一つを取ることにしそのパラメーターとして  $(R/Q)_T = 10 \text{ k}\Omega/\text{m}/\text{RFsection}$ ,  $\omega_p/2\pi = 2.3 \text{ GHz}$  を使う。Q値はいくつかの値を取って調べてみる。

バンチの振動の大きさを見るために、各バンチの「重心のエミッタンス」を  $d\beta/ds = 0$  の場所で以下のように定義し

ておく。

$$\epsilon_c \equiv x^2/\beta + \beta x'^2 \quad (90)$$

ここで  $x'$  は  $dx/ds$  のことである。

横軸に周回数を取り縦軸に、 $\epsilon_c$  をとって、あるバンチトレイン中の最後尾のバンチの動きを見たのが図8である。ここでは  $Q=5000$  とし、共振周波数を 2.3000, 2.3004, 2.3008, 2.3012 GHz の場合について示した。初期状態は、すべてのバンチの変位を  $x=0.1 \text{ mm}$  ( $p_x=0$ ) とした。振動は、時間の指数関数で大きくなっており、growth rate は共振周波数にかなり依存する。しかし  $Q=5000$  では

$$\frac{\omega_R}{Q\omega_0} \approx 0.4 \quad (91)$$

であり、

$$\frac{\omega_R}{Q\omega_0} \ll 1 \quad (92)$$

は成り立たないので周波数をどう選んでも必ずいずれかの coupledbunch mode が強く励起されて安定にはならない。

Q値を  $Q=1000$  まで下げると図9のようになり、growth rate は周波数の細かい値にほとんど関係なくなる。このとき

$$\frac{\omega_R}{Q\omega_0} \approx 2 \quad (93)$$

である。

図 1 0 に  $Q=5000$  と  $Q=1000$  の場合の growth rate の周波数依存性を示した。

さらに  $Q$  値を下げて、 $Q=500, 100, 50, 10, 5$  ( $\omega_R=2\pi \times 2.3$  GHz) の場合の結果を図 1 1 に示す。 $Q=5$  でやっと安定になる。 $Q=10$  では、一端振動が小さくなった後すぐに大きくなっていき 100000 回転ぐらいのところから再び damp し始める。

$Q=10$  のときの、あるバンチトレイン中の 20 個すべてのバンチの振動の大きさを見たのが図 1 2 である。この  $Q$  値では、wakefield は減衰して、バンチ間 (トレイン内) の時間では 0.36、トレイン間では  $2 \times 10^{-19}$  になる。従ってトレイン間の相互作用は無視でき、バンチ振動の増大はトレイン内の wakefield によって引き起こされているはずである。このような振る舞いは以下のように説明できる。

(1) 先頭バンチは wakefield の影響を受けないので radiation damping によって振動が減衰する。

(2) 二番目のバンチは先頭バンチが振動している間はその wakefield によってキックされるが、先頭バンチの振動が収まるとその後は radiation damping により減衰していく。

(n)  $n$  番目のバンチは  $n-1$  番目のバンチが振動している間はその wakefield によってキックされ続けるが、前のバンチの振動が収まった後 radiation damping により減衰していく。

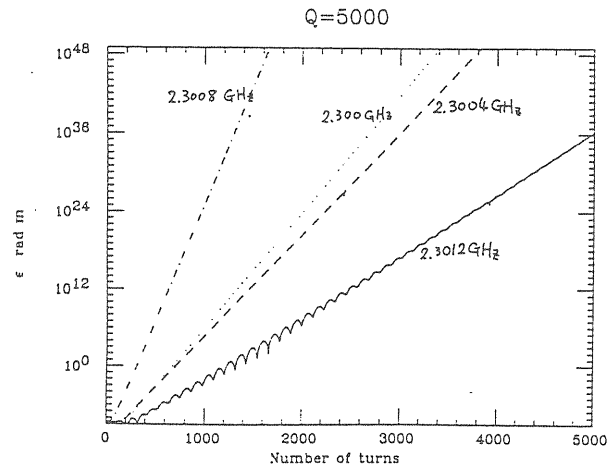


図 8、 $\epsilon_c$  vs. turn number for  $Q=5000$ .

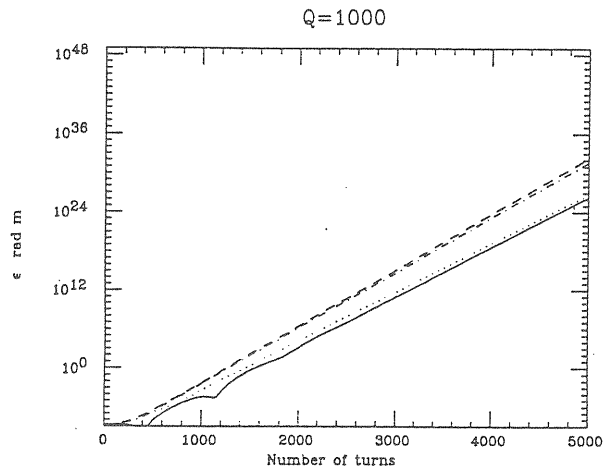


図 9、 $\epsilon_c$  vs. turn number for  $Q=1000$ .

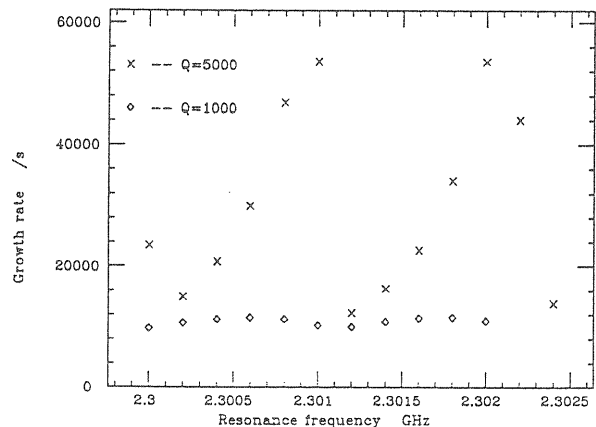


図 1 0、Growth rate vs. resonance frequency.  $Q=5000$  and  $1000$ .

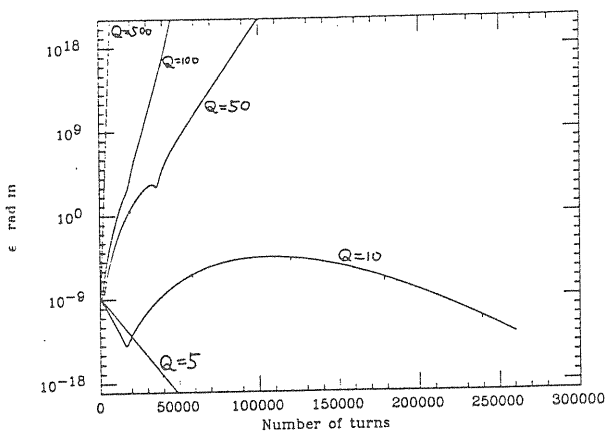


図 1 1、 $\epsilon_c$  vs. turn number for  $Q=500, 100, 50, 10$  and  $5$ .

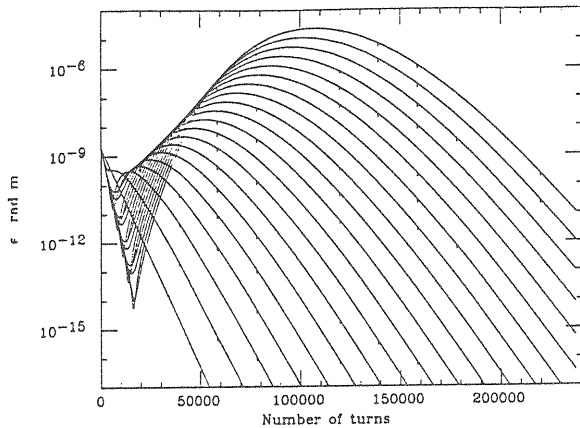


図 1 2、 $\epsilon_c$  vs. turn number of all bunches in a train for  $Q=10$ .

これは、振動が定常的に指数関数で発散していく coupled bunch instability とは異なり、transient な不安定である。最終的には振動は収まるが、それまでに時間がかかり過ぎ、しかも途中の振幅が大きくなり過ぎてそこでビームが失われる可能性もある（この例では振幅が初めの約 100 倍にもなってしまふ）。

なお、後方のバンチの振動が初めに少し小さくなるのは初期状態のバンチの変位の phase と wakefield による励起の phase とが異なるために起こり、この振る舞いは初期状態の選び方によっ

て変わる。

$Q$  値を下げるだけで不安定を抑えようとすると、 $Q=10$  よりももっと小さくしなくてはならないことがわかった。しかしながら、そういう空洞を作ることは非常に難しいと思われる。

次にバンチ毎に tune の差を付ける「decoupling」を見てみる。バンチ間の tune spread  $\Delta v$  を図 1 3 のようにトレイン内の全バンチの tune の差の全幅で定義する。

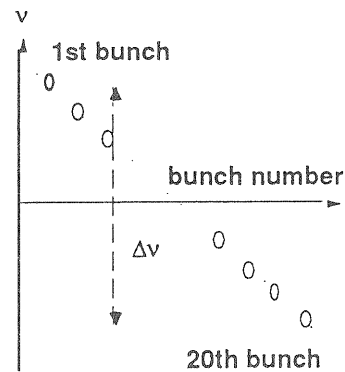


図 1 3、Definition of  $\Delta v$ .

$Q=500, 100, 50, 10$  の各々の場合について  $\Delta v=0$  と  $\Delta v=0.001$  の結果を比べたものを図 1 4 (a) から (d) に示す。 $\Delta v=0.001$  であれば  $Q$  値を 100 まで下げれば安定になる。この程度の  $\Delta v$  は四個の電極に高周波電流を流すことによって得られると考えられている。このように  $Q$  値をある程度下げてさらに tune にバンチ毎の差を付けるのは、不安定を抑えるのに極めて有効と思われる。

(b) longitudinal motion

次に縦方向について調べてみる。まず高次モードなしで加速モードだけの場合を見みた。あるバンチが空洞を通過する時点での理想的な時刻からの時間の遅れを、横軸に周回数をとって図15に示す。ここではインプットカップラーのカップリングと空洞の共振周波数の detune を「optimum」(反射パワーがゼロになるように) 選んだ。振動がある時点から急に発散していくのがわかる。これは、先に述べた加速モードによる coupledbunch instability である。これを抑えるため空洞の detune を小さくした(つまり、 $h\omega_0 - \omega_R$  を小さくした) 場合の結果を図16に示す。(A)、(B)、(C) は各々、 $h - \omega_R/\omega_0 = 0.109, 0.075, 0.060$  の場合である。detune 量を減らしていくと振動の growth がゆっくりになり、ついには安定になることがわかる(ただしあまりにも大きく optimum tuning からずらすと反射パワーが大きくなって別の問題を起こす可能性がある)。

次に、 $h - \omega_R/\omega_0 = 0.060$  と、加速モードに対しては安定になるようにしておいて、高次モードを一つ入れてみる。

$\omega_{HR}/2\pi = 2.4 \text{ GHz}$ ,  $(R/Q)_h = 100 \text{ } \Omega/\text{RFsection}$  として、 $Q=1000, 500, 100, 50$  の場合のあるバンチの遅れ時間を図17に示す(縦軸のスケールの違いに注意)。 $Q=100$  であれば十分安定になっている。

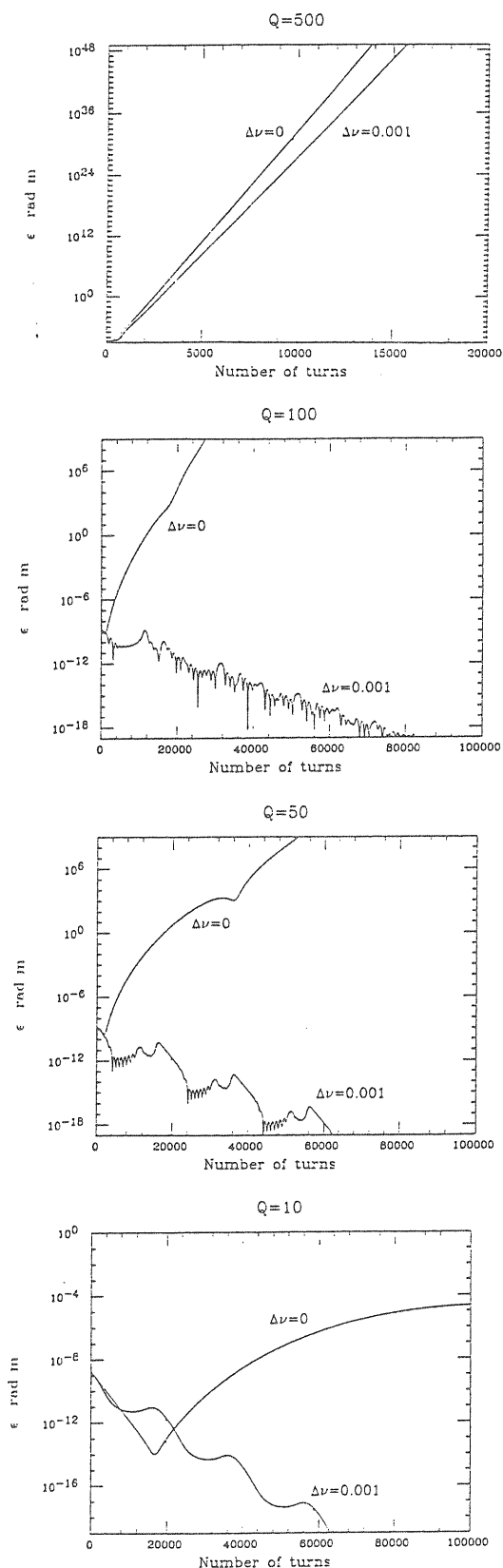


図14、 $\epsilon_c$  vs. turn number for  $\Delta\nu=0$  and  $\Delta\nu=0.001$ , in the cases of  $Q=500, Q=100, Q=50$  and  $Q=10$ .

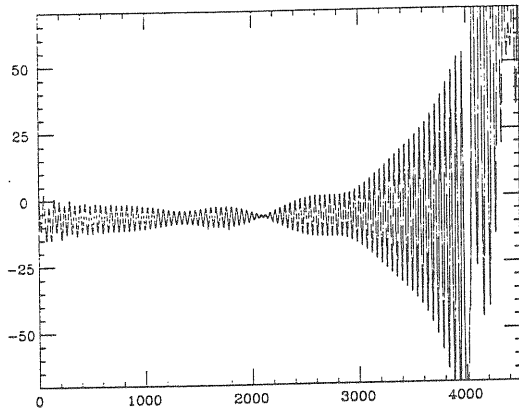


図 15、Time delay (psec) vs. turn number with only the accelerating mode.

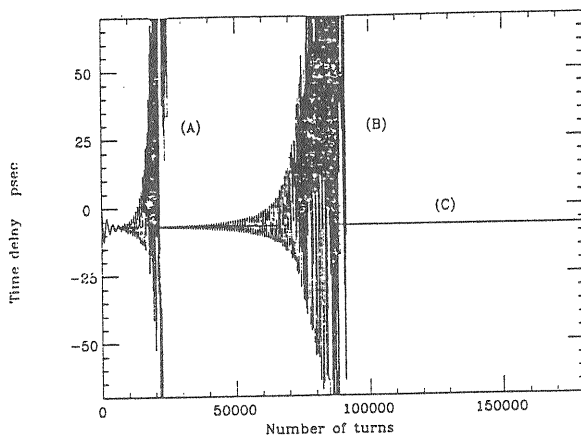


図 16、Time delay (psec) vs. turn number with only the accelerating mode. With reduced detuning;  $h\omega_R/\omega_0 =$  (A) 0.109, (B) 0.075, (C) 0.060.

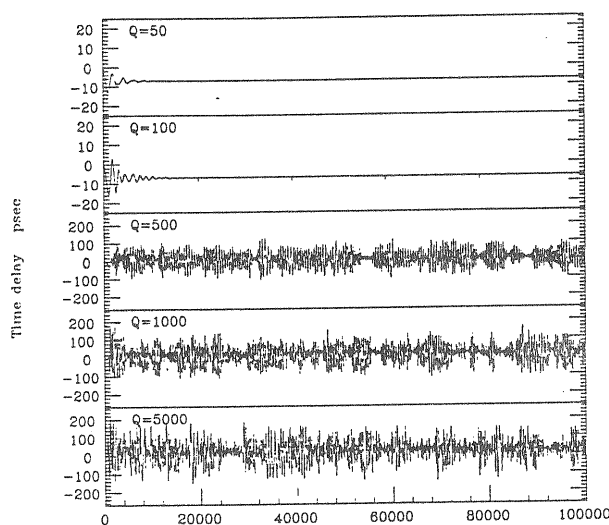


図 17、Time delay (psec) vs. turn number with a higher order mode.

#### IV. バンチ内の不安定性

前章では、バンチ自体は変形しないとしてビームの不安定を議論したが、ここではバンチ内部の運動に注目してその変形や不安定を議論してみる。問題になるのはバンチの前方部分による wakefield が後方の部分に及ぼす力であり、バンチ間の作用は考えないことにする。以下では、「Vlasov 方程式」とよばれる式から出発して議論を進める。一粒子の運動方程式が

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, p, t) = \frac{\partial H(x, p, t)}{\partial p} \\ \dot{p} &= g(x, p, t) = -\frac{\partial H(x, p, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

のようにハミルトニアンで書けるとする。  $x, p$  は一粒子の位置とその共役運動量、  $t$  は独立変数（時刻）である。ここで、ハミルトニアン  $H$  が、一粒子の変数（および独立変数）のみに依存することが本質的に重要である（これを、「粒子どうしの衝突がない」などと表現する人もいる）。このような粒子が多数あるときに、一粒子の位相空間上の点  $(x, p)$  での時刻  $t$  における分布関数（位相空間内の密度ともよい）を、  $\psi(x, p, t)$  とすると

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + f \frac{\partial \psi}{\partial x} + g \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0 \quad (4-2)$$

という方程式が成り立ち、これを Vlasov 方程式と呼ぶ。この式は、位相空間上である粒子とともに動いているとその付近の（位相空間上での）密度



が不変である、と主張している。ここでは正当性は議論しないで、この式から出発する。

(1) longitudinal motion

縦方向の一粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= \frac{\alpha}{c} \delta \\ \frac{d\delta}{ds} &= g(\tau, s) \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける。独立変数は時刻のかわりに軌道の長さ  $s$  をとった。 $\tau$  は理想的なバンチ中心からの時間の遅れ、 $\delta$  はエネルギーを  $E$ 、理想的なエネルギーを  $E_0$  として

$$\delta \equiv \frac{E - E_0}{E_0} \quad (4)$$

で定義する。粒子の受ける力として加速電場と wakefield 両方からの寄与を考慮して  $g(\tau, s)$  は

$$g(\tau, s) = \frac{-e}{cET_0} [V'_{RF} \tau + V(\tau, s)] \quad (5)$$

になる。 $V'_{RF}$  は加速電圧の傾き（時間で微分したもの）、 $V(\tau, s)$  は  $s$  における  $\tau$  の遅れに対する wakepotential である。これは wakefunction  $W(z)$  で書け、wakefield を short range として（リングを一周したときには、前の周回での wakefield はなくなっていると仮定して）

$$V(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz W(z) \rho(\tau - z/c, s) \quad (6)$$

となる。 $\rho$  は電荷密度で、分布関数との間に

$$\rho(\tau, s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \psi(\tau, \delta, s) \quad (7)$$

の関係がある。

運動方程式からハミルトニアンは  $\tau$ ,  $\delta$  を共役変数として、

$$H = \frac{\alpha}{2c} \delta^2 - \int_{-\infty}^{\tau} dt' g(\tau') \quad (8)$$

と書け、Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \delta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \frac{\partial H}{\partial \tau} \frac{\partial \psi}{\partial \delta} = 0 \quad (9)$$

である。

(A) Potential well distortion

バンチの形が時間的に変化しない場合を考えてみよう。すなわち

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (10)$$

であり、Vlasov 方程式は  $\psi$  がハミルトニアン  $H$  の任意の関数であれば満たされる。しかし、実は radiation excitation や radiation dampingなどを考慮にいれると

$$\psi \propto \exp\left[-\frac{cH}{\alpha \sigma_{\delta}^2}\right] \quad (11)$$

のようにバンチのエネルギー分布 ( $f(\delta)$  と書く) は Gauss 分布であり、 $\sigma_{\delta}$  はその r.m.s である。

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}\right] \quad (12)$$

線密度  $\rho$  は  $K$  を定数として

$$\rho(\tau) = K \exp\left[\frac{-\tau^2}{2\sigma_0^2} - \frac{1}{V'_{RF}\sigma_0^2}\right] \times \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \int_0^{\infty} dz \rho(\tau' - z/c) W(z) \quad (13)$$

となる。ただし、 $\sigma_0$  は、wakefieldのないときのバンチ長である。

$$\sigma_0 = \sigma_\delta \sqrt{\frac{\alpha T_0 E_0}{2V'_{RF}}} \quad (14)$$

さらに

$$S(z) \equiv \int_0^z dz' W(z') / c \quad (15)$$

を定義すると

$$\rho(\tau) = K \exp\left[\frac{-\tau^2}{2\sigma_0^2} - \frac{c}{V'_{RF}\sigma_0^2} \int_0^{\infty} d\tau'' \rho(\tau - \tau'') S(c\tau'')\right] \quad (16)$$

が得られる。

この式は両片に  $\rho$  を含んでいるが、よくみると  $\tau' (< \tau)$  での  $\rho(\tau')$  がわかれば  $\rho(\tau)$  が計算できることがわかる。

$\rho(-\infty) = 0, V(-\infty) = 0$  であるから、 $W(z)$  を知っていれば  $\tau$  を細かいステッ

プに分けて、 $\rho$  を  $\tau$  の小さいほうから順番に数値計算によって解いていける。ただし最後に全電荷をみたときに与えられた電荷量になっているとはかぎらないので、定数  $K$  を決めるために何度かの繰り返しが必要になる。実際の計算結果は、例えば SLC の damping ring について文献[6]にある（この文献では測定との比較もしていて、よくあっている）。なお、 $V$  が  $\rho$  の簡単な関数形になっているときには、(13) で両片を微分して

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\tau} = \left[ -\frac{\tau}{\sigma_0^2} - \frac{1}{V'_{RF}\sigma_0^2} \frac{dV(\rho)}{d\tau} \right] \quad (17)$$

とするほうが便利なことがある。

次に、簡単なインピーダンスとして inductive、resistive、capacitive の三つの場合にどうなるかを見る。wakepotential はそれぞれ、

$$V \propto d\rho/d\tau \quad (\text{inductive}) \quad (18)$$

$$V \propto \rho \quad (\text{resistive}) \quad (19)$$

$$V \propto \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \rho \quad (\text{capacitive}) \quad (20)$$

のようになる。第一章の最後の例で見たように、バンチ長に対して小さな構造は inductive、大きな構造は capacitive になる傾向がある（もちろん、純粹に inductive、resistive、capacitive というわけではない）。

文献[6]などにあるように inductive インピーダンスの場合はバンチの長さが延び (bunch lengthening)、capacitive な

場合には逆に短くなる (bunch shortening) )。また、resistive、及び capacitive な場合は、バンチの中心が前方にずれる。この振る舞いを大雑把に説明してみよう。ハミルトニアン の式 (8) を、運動エネルギー

$$T = \frac{\alpha}{2c} \delta^2 \quad (21)$$

とポテンシャルエネルギー

$$U = - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' g(\tau')$$

$$= \frac{e}{cT_0 E_0} [V_{RF} \frac{\tau^2}{2} + \int d\tau' V(\tau')] \quad (22)$$

の和であると考えてみる。[ ]内の第一項は加速電圧の寄与、第二項は wakefield によるものである。バンチ内の粒子はこのポテンシャルの井戸のなかを運動している。バンチの形をガウス分布と仮定して上で定義したポテンシャルエネルギーを見てみると、三つの場合それぞれについて図 1、2、3 のようになる (破線が第一項、点線が第二項、実線が合計)。この図から、バンチの形が上で述べたように変化するのは明らかであろう (もちろん、バンチの変形の結果ポテンシャルの形も変わるので図は完全なものではない)。

このように wakefield によるバンチの変形はポテンシャルの井戸によって説明できるので potential well distortion と呼ばれている。

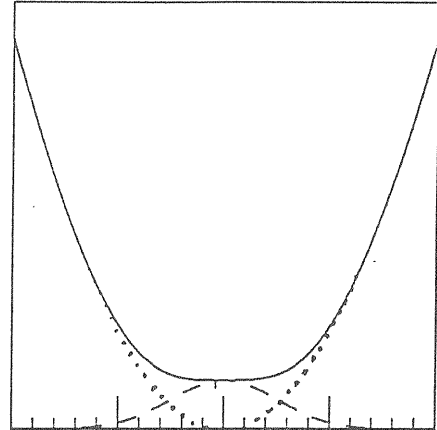


図 1、Potential with inductive impedance.

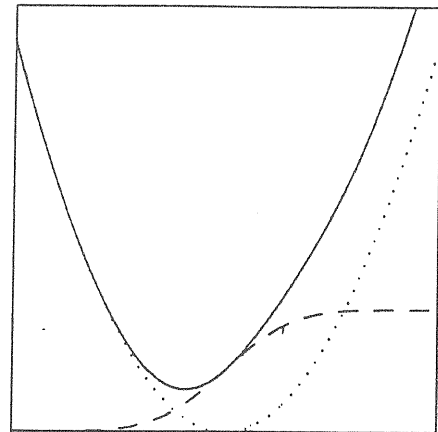


図 2、Potential with resistive impedance.

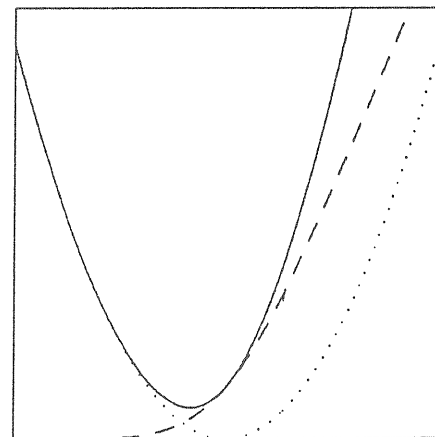


図 3、Potential with capacitive impedance.

ここまではバンチの形が時間的に変化しないと仮定してきたが、実際には電荷量が増加すると不安定が起こる。この不安定はふつう Vlasov 方程式を用いた摂動法によって取り扱うことが多い。すなわち

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1(s) \quad (22)$$

のように分布関数を時間的に変化しない  $\Psi_0$  と変化する項  $\Psi_1$  にわけ、 $\Psi_1$  が小さいとしてその二次以上の効果を見捨てる。バンチ電流の小さいときにはこの方法でよいが、電流が大きくなってくるともはや摂動は使えないはずである。電流が大きくなったときに通用する満足のいく理論はいまだにないようである。ここでは詳しい議論は省略し（例えば文献 [1], [2], [7] をみよ）、何が起きるか定性的に述べておく。まず、摂動がよい近似になるような電流の小さなときには、short range の wakefield は不安定を引き起こさない。しかし、電流が大きくなり、ある threshold を越えると不安定となる（これは、microwave instability とか mode coupling instability とか呼ばれるらしい）。この threshold は、バンチの電荷が同じでもバンチの長さ（従ってエネルギーの広がり）が大きくなると上がる。従って不安定によってビームが失われることもあるが、バンチが長くなって再び安定に戻ることもある。このようなバンチの伸びは potential well distortion とは性質の異なるもので、「abnormal bunch lengthening」、「turbulent bunch lengthening」などと呼ばれる。

## (2) transverse motion

次に transverse motion について Vlasov 方程式を用いた摂動法を文献 [1] に沿って述べておきたい。

縦方向に横方向を一つ加えて、四次元の位相空間  $(\tau, \delta, x, x')$  で Vlasov 方程式を考える。 $\tau, \delta$  は前節と同じ定義、 $x$  は横方向の変位、 $x' = dx/ds$  である。wakefield として dipole mode を考慮して、一粒子の運動方程式は

$$\frac{dx}{ds} = x' \quad (23)$$

$$\frac{dx'}{ds} = - \left( \frac{\omega_\beta + \xi \omega_0 \delta}{c} \right)^2 + \frac{1}{E} F_x(\tau, s) \quad (24)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\alpha}{c} \delta \quad (25)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = - \frac{\omega_s^2}{c\alpha} \tau - \frac{x}{cE} \frac{\partial F(\tau, s)}{\partial \tau} \quad (26)$$

$F_x(\tau, s)$  は、 $s$  において  $\tau$  だけ遅れた粒子が受ける横方向の力である。(26) 式の最後の項は dipole mode による縦方向の電場からの寄与であるが、これは普通小さいので以下では無視する。したがって、各粒子は縦方向には wakefield の影響のないシンクロトロン振動をする。 $\omega_\beta$  は理想的なエネルギーを持った粒子のベータトロン振動数、 $\xi$  は chromaticity、 $\omega_0$  は revolution frequency である。

四次元位相空間内での分布関数を  $\Psi$  とする。さらに極座標

$$x = q \cos \theta \quad (27)$$

$$\frac{c}{\omega_\beta} x' = -q \sin \theta \quad (28)$$

$$\tau = -r \cos \phi \quad (29)$$

$$\frac{\alpha}{\omega_s} \delta = r \sin \phi \quad (30)$$

を使うと Vlasov 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{(\omega_\beta + \xi \omega_0 \delta)}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ + \frac{1}{E} F_x(\tau, s) \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \frac{\omega_s}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

となる。

次に  $\psi$  を時間変化のない部分と時間変化をする摂動部分に分け、次のように書けるものと仮定する。

$$\begin{aligned} \psi = f_0(q) g_0(r) \\ + f_1(q, \theta) g_1(r, \phi) e^{-i\Omega s/c} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、 $N$  をバンチ内の粒子数として、

$$\int \psi q dq d\theta r dr d\phi = N \quad (33)$$

$$\int f_0(q) q dq d\theta = 1 \quad (34)$$

$$\int g_0(r) r dr d\phi = N \quad (35)$$

と規格化しておく。これを (31) にいれ、 $f_1(q, \theta) g_1(r, \phi)$  の一次まで取り

$$\begin{aligned} \left\{ -i \frac{\Omega}{c} f_1 g_1 + \frac{\omega_\beta + \xi \omega_0 \delta}{c} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} g_1 \right. \\ \left. + \frac{\omega_s}{c} f_1 \frac{\partial g_1}{\partial \phi} \right\} e^{-i\Omega s/c} \end{aligned}$$

$$- \frac{c}{E \omega_\beta} \sin \theta F_x \frac{df_0}{dq} g_0 = 0 \quad (36)$$

となる ( $F_x$  は摂動のないときはゼロで、すでに一次のオーダーである。)。これは、 $f_1(q, \theta)$  については簡単に解けて

$$f_1 = -A \frac{df_0}{dq} e^{i\theta} - B \frac{df_0}{dq} e^{-i\theta} \quad (37)$$

である。ここで  $A, B$  は定数である。いま、振動の周波数のずれが小さいとして  $\Omega = \pm \omega_\beta$  の二つの解のうち+の方をとることにすると  $B$  の項は無視できて

$$f_1 = -A \frac{df_0}{dq} e^{i\theta} \quad (38)$$

とできる。

(36) は  $g_1(r, \phi)$  についての式になって

$$\begin{aligned} [i(\Omega - \omega_\beta - \xi \omega_0 \delta) - \omega_s \frac{\partial}{\partial \phi}] \\ \times A e^{-i\Omega s/c} - \frac{c^2}{2iE\omega_\beta} F_x g_0 = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

となる。

実空間上の変位  $\tau$  での dipole moment  $D(\tau)$  は、規格化 (33、34、35)

に注意して

$$D(\tau, s) = e \int (x\psi) qdqd\theta d\delta$$

$$= \frac{Ne \int (x f_1) qdqd\theta}{\int f_0 qdqd\theta} \int g_1 d\delta e^{-i\Omega s/c}$$

(40)

と書ける。さらに、式(38)より

$$\int x f_1 qdqd\theta = A \int f_0 qdqd\theta \quad (41)$$

であるから、

$$D(\tau, s) = A \rho_1(\tau) e^{-i\Omega s/c} \quad (42)$$

となる。ただし  $\rho_1(\tau)$  は摂動部分の線密度

$$\rho_1(\tau) = \int g_1(r, \phi) d\delta \quad (43)$$

である。

従って dipole mode の wakefield から受ける力は、

$$F_x(\tau, s) = \frac{Ae^2}{cT_0} \int d\tau' \sum_k \rho_1(\tau')$$

$$\times e^{-i\Omega(s/c - kT_0)} W(kT_0 + \tau - \tau')$$

(44)

になる。Wは、リング一周の dipole mode の wakefunction であり、k についての和は周回についての和である。これを  $\rho_1(\tau)$  のフーリエ変換

$$\tilde{\rho}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \rho_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (45)$$

とインピーダンスで、Poisson の和公

式(付録1)を使って

$$F_x(\tau, s) = \frac{iAe^2\omega_0^2}{2\pi c} e^{-i\Omega s/c}$$

$$\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}_1(\omega') e^{i\omega'\tau} Z(\omega')$$

(46)

と書ける。ただし

$$\omega' \equiv p\omega_0 + \Omega \quad (47)$$

と定義した。

さて、これからやりたいことは、式(39)を満たす  $g_1(r, \phi)$  を求めることである。 $g_1(r, \phi)$  を

$$g_1(r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m R_m(r) e^{i(m\phi - \xi\omega_0\tau/\alpha)} \quad (48)$$

と展開し(39)に入れる。

$$\sum_{m'} (\Omega - \omega_\beta - m'\omega_0)$$

$$\times a_{m'} R_{m'}(r) e^{im'\phi} A e^{-i\Omega s/c}$$

$$- \frac{c^2}{2iE\omega_\beta} F_x(\tau, s) g_0(r) e^{i\xi\omega_0\tau} = 0$$

(49)

さらに、これに(46)を代入して  $\exp(-im\phi)$  をかけてから  $\phi$  について積分すると

$$i(\Omega - \omega_\beta - m\omega_s)a_m R_m(r) = i^m \frac{ce^2 \omega_0^2}{4\pi E \omega_\beta} g_0(r) \times \sum_p \tilde{\rho}_1(\omega') Z(\omega') J_m(\omega' r - \frac{\xi \omega_0 r}{\alpha}) \quad (50)$$

となる。ここで  $\rho(\omega)$  は

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{\omega_s}{\alpha} \sum_m i^{-m} \times \int r dr a_m R_m(r) J_m(\omega' r - \frac{\xi \omega_0 r}{\alpha}) \quad (51)$$

である。ただし Bessel 関数の積分表現 (付録2) を使った。

さて、以下では (50) を一般の  $g_0(r)$  について解くのはあきらめて

$$g_0(r) = \frac{N\alpha}{2\pi\omega_s \hat{t}} \delta(r - \hat{t}) \quad (52)$$

なるモデルを使う ( $\hat{t}$  は定数)。これは縦方向の位相空間中での円周上に粒子が均一に分布しているモデルで「hollow-beam model」、 「air bag model」などと呼ばれる (当然現実のバンチの分布とは異なっているが、かなりの程度現象を説明できるようである)。

式 (52) を (50) に入れてみると右辺の  $r$  dependence がデルタ関数であるから左辺もそうでなくてはならず

$$R_m(r) = \delta(r - \hat{t}) \quad (53)$$

とおけ、従って

$$(\Omega - \omega_\beta - m\omega_s)a_m = \frac{-icNe^2 \omega_0^2}{8\pi^2 E \omega_\beta} \times \sum_{m'} a_{m'} i^{m-m'} \sum_p Z(\omega') \times J_m(\omega' \hat{t} - \frac{\xi \omega_0 \hat{t}}{\alpha}) J_{m'}(\omega' \hat{t} - \frac{\xi \omega_0 \hat{t}}{\alpha}) \quad (54)$$

となる。これは  $a_m$  をベクトル  $\vec{a}$  の  $m$  成分とし、

$$u \equiv \omega' \hat{t} - \frac{\xi \omega_0 \hat{t}}{\alpha} \quad (55)$$

と置いて、

$$M_{mm'} = m\delta_{mm'} - \frac{icNe^2 \omega_0^2}{8\pi^2 E \omega_\beta \omega_s} \times i^{m-m'} \sum_p Z(\omega') J_m(u) J_{m'}(u) \quad (56)$$

を行列  $M$  の  $(m, m')$  成分とし、

$$\lambda \equiv (\Omega - \omega_\beta) / \omega_s \quad (57)$$

と置くと

$$M\vec{a} = \lambda\vec{a} \quad (58)$$

という個有値問題に帰着することがわかる。

(A) ビーム電流の小さい場合  
まずビーム電流ゼロの極限を考えよう。

$$M_{mm'} = m\delta_{mm'} \quad (59)$$

であるから m 番目の個有値と固有ベクトルは

$$\lambda^{(m)} = m \quad (60)$$

$$a_{m'}^{(m)} = \delta_{mm'} \quad (61)$$

であり、従って振動数は

$$\Omega^{(m)} = \omega_\beta + m\omega_s \quad (62)$$

である。そして分布関数の摂動部分は

$$f_1 g_1 e^{-i\Omega s/c} \propto \frac{df_0}{dq} e^{i\theta} \delta(r - \hat{t}) \\ \times e^{im\phi} e^{-i\xi\omega_0\tau/\alpha} e^{-i(\omega_\beta + m\omega_s)s/c} \quad (63)$$

と書ける。一つのモードの振動があるときの重心の（横方向の）動きを見るためにこれに  $x = q\cos\theta$  をかけて  $(r, \phi), (q, \theta)$  で積分してみると

$$\langle x \rangle^{(m)} = \pi^{2m} \int q \frac{df_0}{dq} dq \\ \times J_m(\xi\hat{t}/\alpha) e^{-i(\omega_\beta + m\omega_s)s/c} \quad (64)$$

となる。従って、重心の振動の振幅は  $J_m(\xi\hat{t}/\alpha)$  に比例し、chromaticity  $\xi=0$  のときは  $m=0$  モード以外では重心は動かないが、chromaticity がゼロでなければ  $m=0$  以外でも重心の動きが見える。

次に、ゼロではないが電流の小さいときは各々のモードが独立に扱えて (61) が近似的に成り立つとしてよい。従って、

$$\Omega^{(m)} - \omega_\beta - m\omega_s = \\ - \frac{iNe^2 c \omega_0^2}{8\pi^2 E \omega_\beta} \sum_p Z(\omega') J_m^2(u) \quad (65)$$

となり、各モードの周波数のずれが得られる。そして、この虚数部分が振動の growth rate をあたえる。

ここで short range の wakefield のみあるとしてリングを一周する間に field は完全に減衰してしまうとしよう。すると (44) での  $k$  についての和がなくなり、(46) で  $p$  についての和が積分に置き換えられる。つまり

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \rightarrow \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \quad (66)$$

として、

$$F_x(\tau, s) = i \frac{Ae^2 \omega_0}{2\pi c} e^{-i\Omega s/c} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\rho}(\omega) e^{i\omega\tau} Z(\omega) \quad (67)$$

であり、(65) より growth rate は

$$\tau^{-1(m)} = - \frac{Ne^2 c \omega_0}{8\pi^2 E \omega_\beta} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \text{Re}[Z(\omega')] J_m^2(\omega'\hat{t} - \xi\hat{t}\omega_0/\alpha)$$



(68)

となる。ふつう

$$\xi \hat{t} \omega_0 / \alpha \ll 1 \quad (69)$$

であるから

$$J_m(\omega' \hat{t} - \xi \hat{t} \omega_0 / \alpha) \approx J_m(\omega' \hat{t}) - \frac{\xi \hat{t} \omega_0}{\alpha} J'_m(\omega' \hat{t}) \quad (70)$$

と展開して一次までとることにし、インピーダンスの性質（第II章式31）に注意すると0次の項は消えて

$$\tau^{-1(m)} \approx \frac{Ne^2 c \omega_0}{2\pi^2 E} \frac{\xi \hat{t} \omega_0}{\alpha} \int_0^\infty d\omega \operatorname{Re}[Z(\omega)] J_m(\omega \hat{t}) J'_m(\omega \hat{t}) \quad (71)$$

となる。

簡単な例として wakefunction が（バンチの長さの範囲で）定数である場合を考える。

$$W(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ W_0 L > 0 & (z > 0) \end{cases} \quad (72)$$

ただしLは、構造の長さである（ $W_0$ は長さ当たりの wakefunction）。これに対応するリング全体のインピーダンスは

$$Z(\omega) = \frac{2\pi c}{\omega_0} W_0 \left\{ \frac{1}{\omega} - i\pi \delta(\omega) \right\} \quad (73)$$

であり、

$$\int \frac{d\omega}{\omega} J_m(\omega \hat{t}) J'_m(\omega \hat{t}) = \int \frac{d\omega}{2\hat{t}\omega^2} J_m^2(\omega \hat{t}) \quad (74)$$

と付録(2)より

$$\tau^{-1(m)} = \frac{Ne^2 c^2 W_0}{\pi E \omega_\beta} \times \frac{\xi \hat{t} \omega_0}{\alpha} \frac{2}{\pi(4m^2 - 1)} \quad (75)$$

が得られる。

$\xi > 0$  ならば、 $m=0$  モードは damp されそれ以外のモードは growth する。 $\xi < 0$  ならばその逆であるが、growth rate の絶対値は0モードが一番大きくふつうは chromaticity を正にしておくようである。ただしこのような性質は、インピーダンスに依存し、また  $\xi \hat{t} \omega_0 / \alpha$  が大きくなると変わってくる。

このような不安定性はバンチの頭の部分（によって励起された wakefield）がしっぽの部分を超ることによって起こるので「head-tail instability」とよばれる。

周波数のずれの実部をみると（式(68)のReのかわりにImをとる）

$$\Delta\Omega^{(m)} = \frac{-Ne^2 c^2}{4\pi\omega_\beta} W_0 J_m^2(\xi \hat{t} \omega_0 / \alpha) \quad (76)$$

となる。 $\xi \hat{t} \omega_0 / \alpha$  が小さいときはこのずれは0モードのみに効きほかの

モードの周波数はあまり変化しないことがわかる。

(B) ビーム電流の大きい場合

これまでは、各モードが独立としてきた(式6.1)しかしビーム電流が大きい場合にはこの近似はよくなり、モード間での相互作用が起きて、いわゆる mode mixing が起こる。これを調べるためには式(5.8)の個有値問題を解かなくてはならない。無限次元の行列の個有値問題は解けないが、いくつかの(次数の低い)モードに限ることによって計算機で数値的に解くことができる。ここではデモンストレーションとして、二つのモードのみがあるとして mode mixing をみてみよう。ただし chromaticity はゼロとしておく。

式(5.6)の  $M_{mm'}$  により

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{mm'} \\ M_{m'm} & M_{m'm'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m'} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m'} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

を考える。

まず  $m - m' = \text{odd}$  の場合は、

$$m - m' = 2n + 1 \quad (7.8)$$

$$X_m \equiv -2 \int_0^\infty d\omega \operatorname{Im}[Z(\omega)] J_m^2(\omega) \quad (7.9)$$

$$R_{mm'} \equiv 2(-1)^n \times \int_0^\infty d\omega \operatorname{Re}[Z(\omega)] J_m J_{m'} \quad (8.0)$$

$$\zeta \equiv \frac{Ne^2 c \omega_0}{8\pi E \omega_\beta \omega_s}, M_m \equiv m - \zeta X_m \quad (8.1)$$

と定義して(7.7)の  $2 \times 2$  行列は、

$$\begin{bmatrix} M_m & \zeta R_{mm'} \\ -\zeta R_{mm'} & M_{m'} \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

とかける ( $M_m, X_m, R_{mm'}, \zeta$  は実である)。この個有値は、

$$\frac{\Omega - \omega_\beta}{\omega_s} \lambda = \frac{1}{2} \{ M_m + M_{m'} \} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(M_m - M_{m'})^2 - (2R_{mm'})^2} \quad (8.3)$$

となる。

運動が安定であるためにはこの式のルートの中が負であってはならない。これが負になると二つのうちどちらかのモードの周波数の虚部が負となり、不安定が起こる。すなわち、バンチ電流が大きくなって ( $\zeta$  が大きくなって) ある threshold を越えると二つのモードの周波数の実部が一致して虚数部分が現われて不安定をおこす。この不安定を「mode coupling instability」、 「strong head-tail instability」などと称する。

ここでインピーダンスのモデルとして再び、式(7.3)をとって、 $m=0, m'=-1$  の場合を考えよう。

$$X_0 = \frac{2\pi^2 c W_0}{\omega_0} \quad (8.4)$$

$$X_{-1} = 0 \quad (85)$$

$$R_{0,-1} = -\frac{8cW_0}{\omega_0} \quad (86)$$

であるから、無次元のパラメータ

$$\eta \equiv \frac{\pi N e^2 c^2 W_0}{4 E \omega_\beta \omega_s} = \frac{2\pi^3 c W_0}{\omega_0} \zeta \quad (87)$$

を使い、

$$\frac{\Omega - \omega_\beta}{\omega_s} = -\frac{1}{2}(1 + \eta/\pi) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \eta/\pi)^2 - \left(\frac{8\eta}{\pi^3}\right)^2} \quad (88)$$

となり、安定条件

$$\eta < \frac{\pi^3}{8 + \pi^2} \approx 1.735 \quad (89)$$

が得られる。

次に、 $m = 0, m' = +1$  の場合を考えてみる。

$$X_1 = 0 \quad (90)$$

$$R_{0,1} = -R_{0,-1} \quad (91)$$

だから、

$$\frac{\Omega - \omega_\beta}{\omega_s} = \frac{1}{2}(1 - \eta/\pi) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \eta/\pi)^2 - \left(\frac{8\eta}{\pi^3}\right)^2}$$

$$(92)$$

となる。定義より  $\eta > 0$  だから、ルートの中は常に正であり、mode mixing はなく不安定も起こらない。

次に (77) で  $m - m' = \text{even}$  のときを考える。

$$m - m' = 2n \quad (93)$$

として、実数

$$I_{mm'} \equiv -2(-1)^n \times \int_0^\infty d\omega I_m[Z(\omega)] J_m(\omega) J_{m'}(\omega) \quad (94)$$

を定義すると行列は

$$\begin{bmatrix} M_m & \zeta I_{mm'} \\ \zeta I_{mm'} & M_{m'} \end{bmatrix} \quad (95)$$

とかける。 $m - m' = \text{odd}$  のときと同様に安定条件を見ると、

$$(M_m - M_{m'})^2 + (2\zeta I_{mm'})^2 > 0 \quad (96)$$

となる。これは明らかに常に成立する。従って、 $m - m' = \text{even}$  なる二つのモードの間には（少なくとも、他のモードを考慮しなければ）mixing は起こらない（ここでは「hollow beam model」を使ったが、インピーダンスは任意であることに注意）。

(C) Macroparticle model

(i) Tracking

一つのバンチ内の  $N$  個の粒子をいくつかの macroparticle に分け、（各々は

点電荷と見なして) 計算機で tracking することができる。ここでは上で述べた解析的取り扱いの結果と tracking の結果とを比べてみたい。

macroparticle の数は 20 個とし、「hollow beam model」に従って、図 4 のように縦方向の位相空間内の円周上に均一に分布させる。

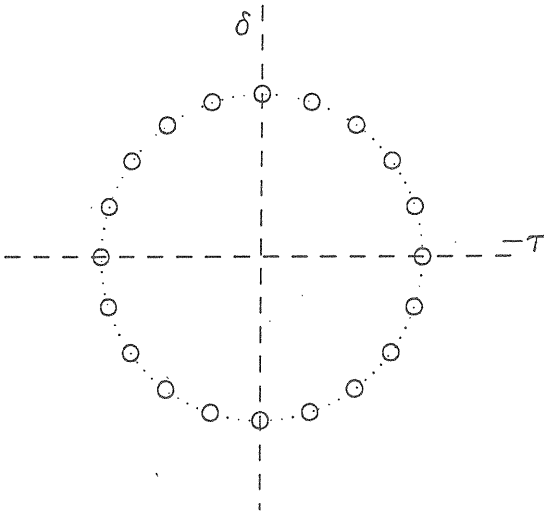


図 4、Macroparticles in the phase space.

パラメータは以下のように選んだ。

synchrotron freq.	10.123 kHz
revolution freq.	1 MHz
betatron tune	21.234
chromaticity	1 or 0
max $\Delta E/E_0$	0.001

これらから、chromaticity  $\xi = 1$  のときは

$$\frac{\xi^2 \omega_0}{\alpha} = \frac{\xi \omega_0}{\omega_s} \max \left[ \frac{\Delta E}{E_0} \right] \approx 0.1 \quad (9.7)$$

となる。wakefunction は、リングのある一箇所で、

$$W(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ W_0 c T_0 & (z > 0) \end{cases} \quad (9.8)$$

とする (localized wake)。ただし  $cT_0$  はリングの周長である。バンチの電荷と wakefunction の大きさを表わすパラメータとして先に定義した  $\eta$  を使う ( $\eta$  は、 $W_0 N$  に比例)。初期状態は、20 個の macroparticle のうち一つだけを横方向にずらせた。

まず、 $\xi = 1, \eta = 0.027, 0.08, 0.27, 0.8$  の場合についてバンチ重心の動きをみた。図 5 は、横軸に時間、縦軸に第 III 章で定義した「バンチ重心のエミッタンス」をとっている。初めに少し下がるのは、 $m=0$  モードの damp に対応しており、その後の発散は高次モードの growth に対応するものと思われる。先に見たように growth rate の大きいモードは  $m = -1, +1$  の二つのはずである。

これを確かめるため、リングのある一点でのバンチ重心の変位をフーリエ変換してみた。図 6 に、 $\eta = 0.08$  の場合の 1 msec の間の重心の振動をフーリエ変換したものを示す。開始から 0 msec - 1 msec では、ほとんど  $m=0$  モードであるが、10 msec - 11 msec では、 $m=0, -1, +1$  の三つのモードが同程度の大きさになる。その後は、 $m = -1, +1$  の二つのモードがどんどん大きくなっていく。

図 7 には、 $\eta = 0.27, 0.80, 1.33$  のとき 0 msec - 1 msec の変位をフーリエ変換したものを示した。 $\eta$  が大きくなるにつれて、 $m=0$  モードの周波数が低くなり、 $m = -1$  モードに近づいていくのがわかる。

次に、 $\xi = 0$  として、「strong head-tail

instability」をちょうど threshold 付近の  $\eta$  で見たのが、図 8 である。先に求めた threshold は、 $\eta = 1.735$  であったが、20 個の macro particle によるこのモデルでは  $\eta = 1.79$  程度になる。(次に述べるように 2 個の macro particle によるモデルでは threshold は、 $\eta = 2$  になる。)

(ii) 2 particle model

macroparticle の数を 2 個にすると、理想的なシンクロトロン振動をするバンチの横方向の運動を簡単に手計算で調べられる (wakefunction は定数として)。この大胆な近似のもとでも「head-tail instability」、「strong head-tail instability」を導くことができる。これについては文献 [1],[2] を読むことをお勧めする。ここでは、結果だけ書いておく。

$\eta$  が小さい場合、macro particle が二個しかないので振動のモードも二個 (+ mode, - mode) で、その growth rate は

$$\tau^{-1(\pm)} = \mp \frac{Ne^2 c^2 W_0}{2\pi E \omega_\beta} \frac{\xi t \omega_0}{\alpha} \quad (99)$$

であり、 $\xi = 0$  でないかぎりどちらかのモードが不安定になる。

$\xi = 0$  のときの strong head-tail instability の threshold は、 $\eta = 2$  である。

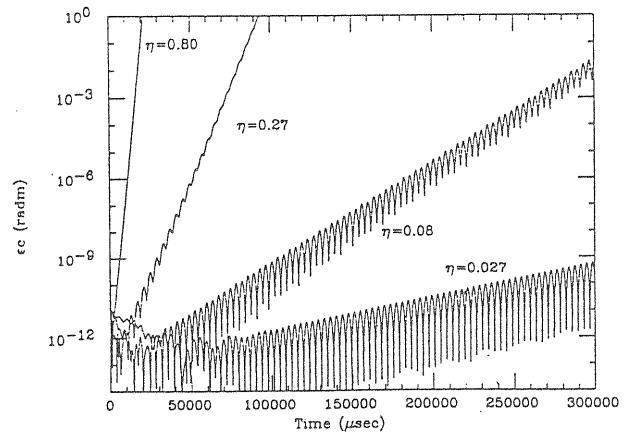


図 5、 $\epsilon_c$  vs. time. Head-tail instability.

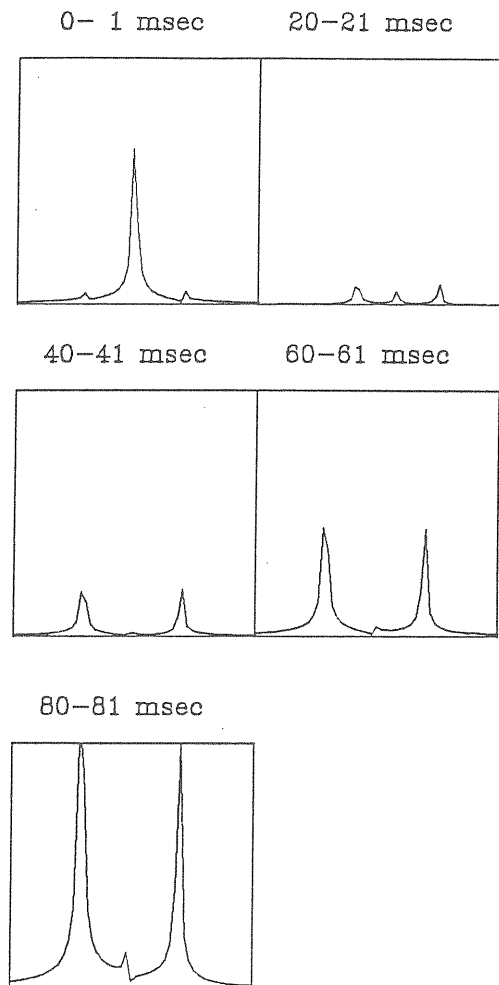


図 6、Amplitude vs.  $(\omega - \delta\omega_p)/\omega_s$  for  $\eta = 0.08$ .

付録

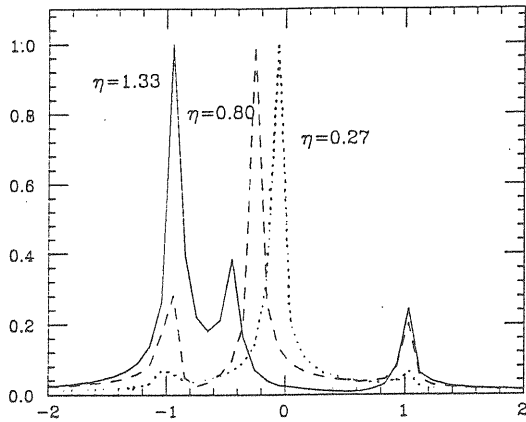


図 7、Amplitude vs.  $(\omega - \delta\omega_\beta)/\omega_s$  for  $\eta = 0.27$ , 0.80 and 1.33 at first 1 msec.

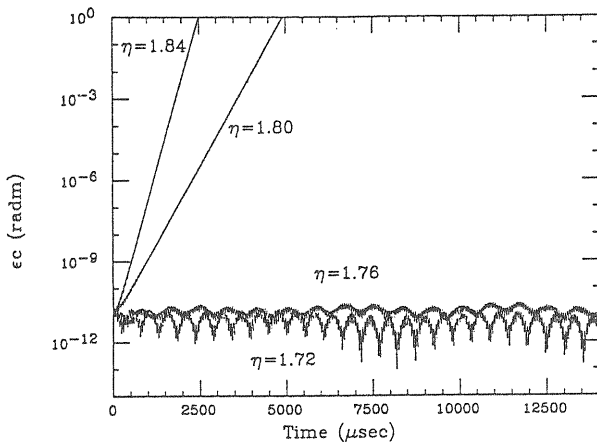


図 8、 $\epsilon_c$  vs. time ( $\xi = 0$ ). Strong head-tail instability.

(1) Poisson の和の公式  
 $F(\omega)$  を  $f(t)$  のフーリエ変換

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \quad (1)$$

とするとき、 $\alpha\beta = 2\pi$  なる正定数  $\alpha$ ,  $\beta$  に対して、

$$\sqrt{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\alpha n) = \sqrt{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(\beta m)$$

(2)

が成り立つ。  
 特に

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega_0 T_0}$$

$$= \frac{2\pi}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{2\pi p}{T_0} - \omega_0\right) \quad (3)$$

となる。

(2) Bessel 関数の性質

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n\theta - x \cos \theta)} \quad (4)$$

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x) \quad (5)$$

$$J_n(0) = \delta_{0n} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx x^{-\lambda} J_\mu(ax) J_\nu(ax) \\ &= \frac{a^{\lambda-1}}{2^\lambda} \Gamma(\lambda) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right) \\ & \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu-\nu+1}{2}\right)} \\ & \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda-\mu+\nu+1}{2}\right)} \\ & \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+1}{2}\right)} \quad (7) \end{aligned}$$

参考文献

ここでは、オリジナルな論文などは省略し、このノートを書くに当たって特に参考にしたものだけを紹介しておく。

[1] Chao, A. W., 'Coherent Instabilities of a Relativistic Bunched Beam', AIP proc. 105, p353.

[2] 鈴木敏郎, 'ビーム不安定性の理論', 高エネルギー加速器セミナー OHO'86.

[3] Zotter, B., 'Electromagnetic Fields: Impedances and Wakes in particle accelerators and storage rings', AIP proc. 153, p663

[4] Sieman, R. H., 'Computer Models of Instabilities in Electron Storage Rings', AIP proc. 127, p368.

[5] Kamiya, Y., 'On Some Properties of Longitudinal and Transverse Coupled-bunch Instabilities', KEK 82-15.

[6] Bane, K. L. F., 'Bunch Lengthening in the SLC Damping Rings', SLAC-PUB-5177.

[7] Hirata, K. and Suzuki, T. (editors), Proceedings of 'Fourth Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop', KEK Report 90-21.

[8] Chin, Y. H. and Yokoya, K., 'Landau Damping of a Multi-bunch Instability due to Bunch-to-bunch Tune Spread', DESY 86-097.