

1. はじめに

ビーム貯蔵リングではビームの損失を極力抑えてビームを蓄えておく必要がある。その意味において、ビーム寿命はそのリングの性能を評価する1つの重要なパラメータである。この講義録は、電子（陽電子）ビーム貯蔵リングのビーム寿命のメカニズムについて基礎的な解説を試みたものである。また、本セミナーの今年の主題である「低エミッタンスリング」を多少なりとも念頭に置いたつもりである。しかしながら、その内容は筆者の知識と経験の範囲に限定されることを予めご容赦願う。

講義録は次のように構成されている。第2章でリング内を周回する粒子の安定領域について簡単に説明し、第3章で散乱が粒子軌道に及ぼす影響について述べる。第4章では電子ビームとリング内の残留気体との散乱から決まるビーム寿命を考える。第5章ではTouschek寿命について解説する。

調べてみてわかるのだが、ビーム寿命についてのまとまった解説書は意外と少ない。本講義が少しでもビーム寿命の理解に役立てれば幸いである。

2. 粒子の安定領域

通常、加速器やビーム輸送系で粒子が安定に運動することができる位相空間には上限が存在し、これをアクセプタンス(acceptance)と呼んでいる。粒子がこのアクセプタンスを越えてしまうと運動は不安定になり最終的には失われてしまう。ビーム寿命とはそもそもビーム損失の時間的変化に対応するものであるから、粒子の安定領域について知ることはビーム寿命を考える上で重要である。ここでは、最初にリング内の粒子の運動について簡単に触れた後、リングの安定領域を制限しているいくつかのパラメータについて説明する。但し、軌道関連の用語の詳しい説明や式の導出については省略する。他の講義録や文献を参照していただきたい。

2.1 粒子の運動

一般にリング内で粒子の横方向（水平・垂直

方向）の運動はそれぞれ次の式に従う。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left\{ K_x(s) + \frac{1}{\rho(s)^2} \right\} x = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + K_y(s) y = 0 \quad (2.2)$$

ここで、 s はビームの進行方向の位置変数、 $\rho(s)$ はそこでの偏向電磁石による曲率半径、 $K_x(s)$ と $K_y(s)$ は四極電磁石による水平・垂直方向の磁場勾配を表している。この方程式の解は共にベータトロン振動としてよく知られていて、次のように表現される。

$$x_{\beta}(s) = b_x \sqrt{\beta_x(s)} \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x0} \} \quad (2.3)$$

$$y_{\beta}(s) = b_y \sqrt{\beta_y(s)} \sin \{ \varphi_y(s) + \varphi_{y0} \} \quad (2.4)$$

但し、

$$\varphi_{x,y}(s) = \int_0^s \frac{1}{\beta_{x,y}(s)} ds \quad (2.5)$$

である。 $\beta_{x,y}$ は水平・垂直方向のベータトロン関数、 $\varphi_{x,y}$ はベータトロン振動の位相角である。また、 $b_{x,y}$ は s に依存しない量で、粒子のエミッタンスの平方根に等しい。 φ_{x0} と φ_{y0} も定数である。ここで、

$$v_{x,y} = \frac{1}{2\pi} \oint \varphi_{x,y}(s) ds \quad (2.6)$$

と定義すると、これはベータトロン・チューンと呼ばれるものである。但し、 \oint はリング1周の積分を意味する。

次に粒子の運動量（あるいはエネルギー）がリングの基準の運動量 p から Δp だけずれた場合を考えると、粒子の水平方向の軌道は次の方程式に従う。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left\{ K_x(s) + \frac{1}{\rho(s)^2} \right\} x = \frac{\Delta p}{p} \frac{1}{\rho(s)} \quad (2.7)$$

この方程式の周期解は次のように表現される。

$$x_p(s) = \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (2.8)$$

ここで $\eta(s)$ は分散関数と呼ばれ、リング1周の周期関数となっている。水平方向の粒子の軌道は(2.3)と(2.8)の和として与えられる。即ち、

$$x(s) = x_\beta(s) + x_p(s) \quad (2.9)$$

垂直方向の分散関数は通常は無視できるので、垂直方向の軌道は

$$y(s) = y_\beta(s) \quad (2.10)$$

となる。この他、リング電磁石の磁場に誤差がある場合に発生するC.O.D(closed orbit distortion)と呼ばれる閉軌道が(2.9)あるいは(2.10)に加えられるべきであるが、ここでは無視するものとする(あるいは、無視できる程度に補正されていると考える)。また、六極電磁石の磁場に代表されるような非線形磁場の影響については後に触れることになる。

リング内を安定に周回している粒子は上で述べた横方向の運動の他に縦方向(あるいは進行方向)の振動もしている。これがシンクロトロン振動と呼ばれているものである。シンクロトロン振動は粒子がリング周回中に放射光を出すことなどによって運動量(エネルギー)を失うこととRF空洞によってその運動量(エネルギー)が補われることの結果生じるもので、次の2つの式で記述される。

$$\frac{d\phi}{dt} = -h\omega_0\alpha_M \frac{\Delta p}{p} \quad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\Delta p}{p} = \frac{\omega_0 e V_{RF}}{2\pi E} (\sin \phi - \sin \phi_0) \quad (2.12)$$

ここで ϕ と ϕ_0 は粒子の縦方向の位置に対応するRF空洞の位相角とその平衡位相角、 E と e は粒子のエネルギーと電荷、 ω_0 は周回角周波数、 h はharmonic number (RF周波数と周回周波数の比)、 V_{RF} はRF電圧、 α_M はmomentum compaction factorである。粒子の位相角の平衡位相角からのずれ $\Delta\phi = \phi - \phi_0$ が小さい場合、(2.11)と(2.12)から粒子は次の調和振動の式に従う。

$$\frac{d^2\Delta\phi}{dt^2} = -\omega_s^2 \Delta\phi \quad (2.13)$$

この振動の角周波数 ω_s は

$$\omega_s = \sqrt{\frac{\alpha_M h e V_{RF} \cos \phi_0}{2\pi E}} \omega_0 \quad (2.14)$$

で与えられる。また v_s を

$$v_s = \frac{\omega_s}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\alpha_M h e V_{RF} \cos \phi_0}{2\pi E}} \quad (2.15)$$

と定義して、これをシンクロトロン・チューンと呼んでいる。

2.2 Physical aperture

さて、前節で与えられた粒子の横方向の軌道が不安定になる条件を考える。その1つは軌道の位置がリングの真空チェンバーの大きさを越える場合である。今、水平及び垂直方向についてそれぞれ考えると、

$$x_\beta(s) + x_p(s) > a_x(s) \quad (2.16)$$

$$y_\beta(s) > a_y(s) \quad (2.17)$$

となる。ここで a_x と a_y は真空チェンバーの水平・垂直方向の半径である。この時、粒子はチェンバーの壁に当たって失われてしまう。真空チェンバーの口径をしばしばphysical apertureと呼ぶ。physical apertureはアクセプタンスを制限する1つの要因となる。

図1(a)(b)にビーム貯蔵リングの真空チェンバーの断面の例を示す。(a)は高エネルギー物理学研究所にある放射光実験施設(Photon Factory)の2.5GeV電子(陽電子)ビーム貯蔵リング(以下ではPFリングと呼ぶことにする)の偏向電磁石用の真空チェンバーの断面であり、(b)は同じくPFリングの直線部の1つに設けられた挿入型光源用の真空チェンバーの断面である。近年、放射光用のビーム貯蔵リングでは挿入型光源を設置して偏向電磁石からの放射光よりも高い輝度をもつ放射光を取り出している。挿入型光源では磁石を多周期並べていて、その磁場の強度や一様性を保つためにチェンバーの垂直方向(あ

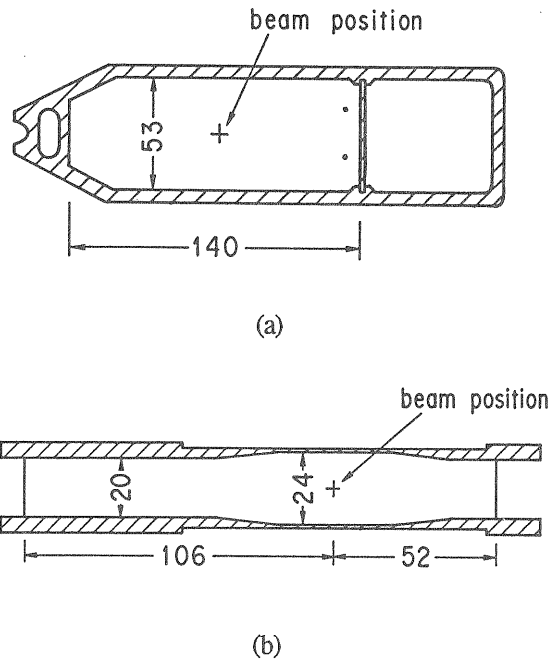


図1 PFリングの(a)偏向電磁石と(b)挿入型光源の真空チャンバーの断面

るいは水平方向)のapertureが他の真空チャンバーと比較して著しく狭くなっている。ビーム寿命を考える場合、常にこのようなapertureの狭い場所を頭に入れておく必要がある。

2.3 Dynamic aperture

physical apertureと同様に横方向の軌道の安定領域を限定するものにdynamic apertureと呼ばれるものがある。これは、リング内に存在する非線形の電磁場に起因している。六極電磁石や八極電磁石がリングに設置されている場合はもちろんであるが、偏向電磁石や四極電磁石の磁場が不完全である場合にも非線形の磁場成分が生じる。このような磁場の影響は通常は軌道の中心から離れるに従って強くなり、ある範囲を越えると粒子は安定に運動することができなくなる。dynamic apertureは式(2.1)(2.2)に非線形磁場の項を加えてそれを解くことによって原理的に求められるが、実際にそれを解析的に行うのが困難な場合が多い。従って、通常はtrackingという手段を用いて求めている。これは、計算機を使って粒子の軌道をリング何周分も追跡していく方法である。trackingによって求められたdynamic apertureの例を図2に示す。図をx軸に関

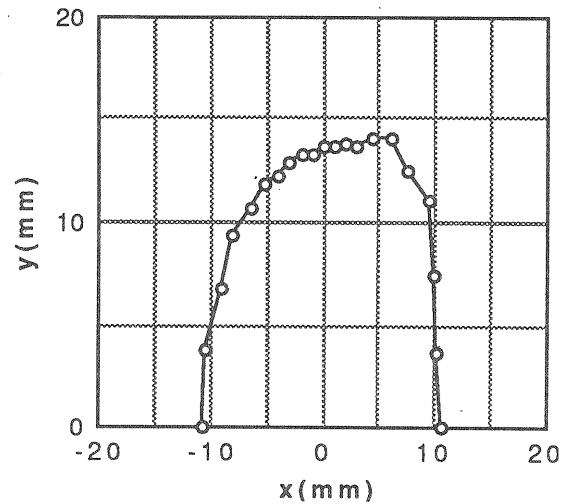


図2 dynamic apertureの例。白丸が実際にtrackingによって求められた場所である。

して折り返してできる閉曲線の内側では粒子は安定であるが、外では不安定になる。

低エミッタンスリングでは、エミッタンスを小さくするために四極電磁石の磁場強度をかなり強くすることになる。その四極磁場によって次式で表されるchromaticity(色収差)をビームが持つようになる。

$$\xi_{x,y} \equiv \frac{\Delta v_{x,y}}{(\Delta p/p)} = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_{x,y}(s) K_{x,y}(s) ds \quad (2.18)$$

このchromaticityは負の値を持ち、その絶対値は四極電磁石の磁場強度に比例して大きくなる。大きなchromaticityを持つビームはその運動量幅に対応するベータトロン・チューンの広がりが大きく危険な共鳴線を横切ることになる。また、負のchromaticityはhead-tail不安定を起す原因にもなる。そこで通常は六極電磁石を分散関数がゼロでない場所に設置し、四極磁場が作るchromaticityと逆符号(正)のchromaticityを生じさせて補正する。この六極電磁石が作るchromaticityは

$$\xi_{x,y}^S = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_{x,y}(s) S_{x,y}(s) \eta(s) ds \quad (2.19)$$

と表され、六極電磁石の磁場強度 $S_{x,y}$ に比例する。従って、低エミッタンスリングでは六極電磁石による非線形磁場が強くなる傾向にある。このほかに、放射減衰を高めて低エミッタンス

化するためのダンピング・ウィグラーや放射光用の挿入型光源等がある場合にはこれらの持つ非線形磁場なども dynamic aperture を小さくする要因となる。これまでの比較的高いエミッタンスを持つリングでは dynamic aperture は physical aperture に比べて十分に大きいためあまり問題にはならなかった。しかし、低エミッタンスリングではこのような理由で dynamic aperture の影響が無視できなくなっている。

2.4 RF bucket height

これまで横方向の安定性について述べてきたが、縦方向についても安定と不安定な領域を分ける境界がある。これを separatrix と呼んでいる。リング内のビームが縦方向に分けられたいくつかの粒子の塊（バンチ）から成っているのはそのためである。式(2.11)に $d(\Delta p/p)/dt$ を式(2.12)に $d\phi/dt$ をかけてその差をとり、両辺を積分すると、

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2 + \Phi(\phi) = \Phi_0 \quad (2.20)$$

が得られる。ここで、

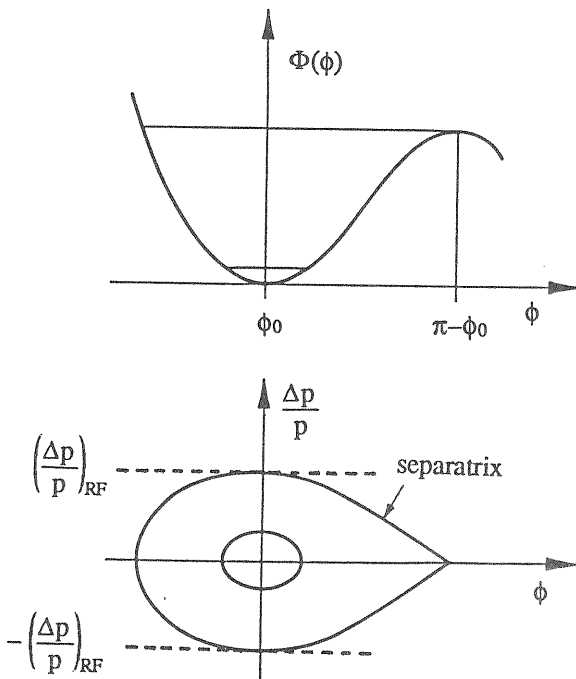


図3 $\Phi(\phi)$ と separatrix。separatrix の内側ではポテンシャル $\Phi(\phi)$ の井戸の中で安定に運動できる。

$$\Phi(\phi) = \frac{eV_{RF}}{2\pi h\alpha_M E} \{ \cos \phi_0 - \cos \phi - (\phi - \phi_0) \sin \phi_0 \} \quad (2.21)$$

である。積分定数 Φ_0 は $\phi = \phi_0$ かつ $(\Delta p/p) = 0$ の時にゼロになるように選んである。separatrix は運動が安定でかつ Φ_0 が最大となる時に描く $(\phi, \Delta p/p)$ の位相平面上の曲線である。図3に $\Phi(\phi)$ 及び separatrix を示す。separatrix より内側では粒子は安定であるが、外側では不安定になる。安定領域での $\Delta p/p$ の最大値 $(\Delta p/p)_{RF}$ は次のように表され、RF bucket height と呼ばれる。

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{RF} = \sqrt{\frac{eV_{RF}}{\pi h\alpha_M E} \{ 2 \cos \phi_0 - (\pi - 2\phi_0) \sin \phi_0 \}} \quad (2.22)$$

$(\Delta p/p)_{RF}$ より大きな運動量のずれもった粒子は RF のバケツからこぼれて失われてしまう。

3. 散乱と粒子軌道

ここでは、散乱が粒子軌道に及ぼす影響について述べる。同時に、散乱によって粒子の損失が起こる限界の散乱角と運動量変化についても考える。

3.1 角度変化を伴う散乱

リングを周回中の粒子が他の粒子と散乱して進行方向の角度が変わってしまった場合を考えてみる（図4）。但し、その時の運動量（エネルギー）の変化は無視できるものとする。散乱前後の粒子の水平方向の軌道の位置は式(2.3)から次のようになる。

$$x_1(s) = b_{x1} \sqrt{\beta_{x1}(s)} \sin \{ \varphi_{x1}(s) + \varphi_{x1} \} \quad (3.1)$$

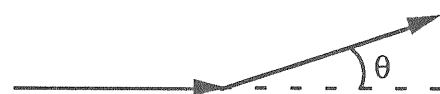


図4 角度変化を伴う散乱

$$x_2(s) = b_{x2} \sqrt{\beta_x(s)} \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x2} \} \quad (3.2)$$

また、軌道の傾きは式(3.1)(3.2)をsで微分して

$$x_1'(s) = \frac{b_{x1}}{\sqrt{\beta_x(s)}} \left[\cos \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x1} \} - \alpha_x(s) \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x1} \} \right] \quad (3.3)$$

$$x_2'(s) = \frac{b_{x2}}{\sqrt{\beta_x(s)}} \left[\cos \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x2} \} - \alpha_x(s) \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x2} \} \right] \quad (3.4)$$

となる。但し、

$$\alpha_x(s) = -\frac{1}{2} \beta_x'(s) \quad (3.5)$$

である。今、 $s=\bar{s}$ で散乱により水平方向の粒子の傾きが θ_x だけ変化したとすると、境界条件は

$$x_1(\bar{s}) = x_2(\bar{s}) \quad (3.6)$$

$$x_1'(\bar{s}) + \theta_x = x_2'(\bar{s}) \quad (3.7)$$

これらの式に式(3.1)から(3.4)を代入すると、

$$b_{x2} \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \} = b_{x1} \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} \quad (3.8)$$

$$b_{x1} \left[\cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} - \alpha_x(\bar{s}) \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} \right] = b_{x2} \left[\cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \} - \alpha_x(\bar{s}) \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \} \right] - \theta_x \sqrt{\beta_x(\bar{s})} \quad (3.9)$$

となる。上の2式から次式が得る。

$$b_{x2} \cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \} = b_{x1} \cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} + \theta_x \sqrt{\beta_x(\bar{s})} \quad (3.10)$$

式(3.8)(3.10)から

$$b_{x2}^2 = b_{x1}^2 + 2b_{x1}\theta_x \sqrt{\beta_x(\bar{s})} \cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} + \theta_x^2 \beta_x(\bar{s}) \quad (3.11)$$

を得る。 $b_{x2} \gg b_{x1}$ の場合を考えると、

$$b_{x2}^2 = \theta_x^2 \beta_x(\bar{s}) \quad (3.12)$$

が成り立つ。これより、粒子の散乱後のベータ

トロン振動の振幅は次のように表される。

$$A_{\beta_x(s)} = \sqrt{\beta_x(\bar{s})\beta_x(s)} \theta_x \quad (3.13)$$

同様な議論が垂直方向にも成り立つので

$$A_{\beta_y(s)} = \sqrt{\beta_y(\bar{s})\beta_y(s)} \theta_y \quad (3.14)$$

となる。ここで θ_x と θ_y を進行方向の傾き角 θ とリングに垂直な平面での位相角 ϕ を用いて表すと次のようになる。

$$\theta_x = \theta \cos \phi \quad (3.15)$$

$$\theta_y = \theta \sin \phi \quad (3.16)$$

式(3.13)(3.14)は散乱によって大振幅のベータトロン振動が生じることを示している。その場合に振幅は散乱角 θ に比例し、かつ散乱場所のベータトロン関数に依存する。

散乱によって生じるベータトロン振動の振幅が大きいと当然のことながらリングの壁に当たって粒子は失われてしまうことになる。散乱による蹴り角がどのくらい大きいと粒子は失われてしまうのかを考えてみよう。リングの真空チャンバーの断面の形はさまざまではあるが、議論を簡単にするために楕円形であるとする(図5)。すると、粒子が失われる限界の条件は

$$\frac{\beta_x(\bar{s})\beta_x(s)\theta^2 \cos^2 \phi}{a_x(s)^2} + \frac{\beta_y(\bar{s})\beta_y(s)\theta^2 \sin^2 \phi}{a_y(s)^2} = 1 \quad (3.17)$$

となる。但し、 $a_x(s)$ と $a_y(s)$ は水平・垂直方向の楕

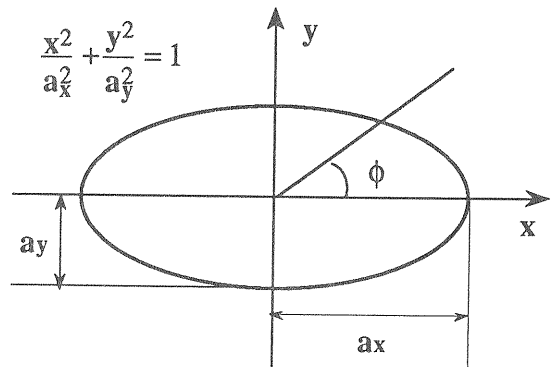


図5 楕円形のチャンバー断面

円の半径である。従って、場所 \bar{s} での位相角 ϕ を持つ散乱による限界の散乱角は

$$\frac{1}{\theta_c(\bar{s}, \phi)^2} = \text{Max}_s \left\{ \frac{\beta_x(\bar{s})\beta_x(s) \cos^2 \phi}{a_x(s)^2} + \frac{\beta_y(\bar{s})\beta_y(s) \sin^2 \phi}{a_y(s)^2} \right\} \quad (3.18)$$

となる。Maxは s に関してリング1周を考えたときの最大値をとることを意味する。楕円に限らず他の形を持つチェンバーでも θ_c は \bar{s} と ϕ の関数となる。さて、ある場所 $s=s_m$ でphysical apertureが著しく狭く、ベータatron関数も大きいとすると、式(3.18)は

$$\frac{1}{\theta_c(\bar{s}, \phi)^2} \approx \frac{\beta_x(\bar{s})\beta_{xm} \cos^2 \phi}{a_{xm}^2} + \frac{\beta_y(\bar{s})\beta_{ym} \sin^2 \phi}{a_{ym}^2} \quad (3.19)$$

となる。ここで、 (a_{xm}, a_{ym}) と (β_{xm}, β_{ym}) は $s=s_m$ でのphysical apertureとベータatron関数である。また、ベータatron関数やapertureがリング全周でほぼ均一である場合には次のように表現することが許されるであろう。

$$\frac{1}{\theta_c(\bar{s}, \phi)^2} \approx \frac{\beta_x(\bar{s}) \langle \beta_x \rangle \cos^2 \phi}{\langle a_x \rangle^2} + \frac{\beta_y(\bar{s}) \langle \beta_y \rangle \sin^2 \phi}{\langle a_y \rangle^2} \quad (3.20)$$

ただし、 $\langle \rangle$ はリング一周の平均値を意味している。では、dynamic apertureがphysical apertureよりも小さい場合にはどうなるであろうか。dynamic apertureを考える場合にはすでに非線形磁場の影響が効いているが、式(3.18)のphysical aperture(a_x, a_y)をdynamic aperture(d_x, d_y)で置き換えることによって1つの目安とすることができる。通常、dynamic apertureはビームサイズ $\sigma_{x,y}$ を単位として次のように表される。

$$\begin{aligned} d_{x,y}(s) &= n_{x,y} \sigma_{x,y} \\ &= n_{x,y} \sqrt{\varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}(s)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで、 $\varepsilon_{x,y}$ はビームの水平・垂直方向のエミッタンスである。この時、限界の散乱角は次のようになる。

$$\frac{1}{\theta_c(\bar{s}, \phi)^2} \approx \frac{\beta_x(\bar{s}) \cos^2 \phi}{n_x^2 \varepsilon_x} + \frac{\beta_y(\bar{s}) \sin^2 \phi}{n_y^2 \varepsilon_y} \quad (3.22)$$

3.2 運動量変化を伴う散乱

運動量（エネルギー）の変化を伴う散乱を考える（図6）。但し、角度変化は無視できるものとする。散乱による運動量の変化を Δp とする



図6 運動量の変化を伴う散乱

と散乱前後の水平方向の軌道の位置及びその傾きは次のようになる。

$$x_1(s) = b_{x1} \sqrt{\beta_x(s)} \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x1} \} \quad (3.23)$$

$$x_2(s) = b_{x2} \sqrt{\beta_x(s)} \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x2} \} + \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(s) &= \frac{b_{x1}}{\sqrt{\beta_x(s)}} \left[\cos \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x1} \} \right. \\ &\quad \left. - \alpha_x(s) \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x1} \} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(s) &= \frac{b_{x2}}{\sqrt{\beta_x(s)}} \left[\cos \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x2} \} \right. \\ &\quad \left. - \alpha_x(s) \sin \{ \varphi_x(s) + \varphi_{x2} \} \right] + \eta'(s) \frac{\Delta p}{p} \end{aligned} \quad (3.26)$$

境界条件は $s=\bar{s}$ で散乱するとして、

$$x_1(\bar{s}) = x_2(\bar{s}) \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_1(\bar{s}) = \dot{x}_2(\bar{s}) \quad (3.28)$$

となる。式(3.27)(3.28)に式(3.23)から(3.26)を代入すると

$$\begin{aligned} b_{x2} \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \} &= b_{x1} \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} \\ &\quad - \frac{\eta(\bar{s})}{\sqrt{\beta_x(\bar{s})}} \frac{\Delta p}{p} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
& b_{x1} [\cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} - \alpha_x(\bar{s}) \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \}] \\
& = b_{x2} [\cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \} - \alpha_x(\bar{s}) \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \}] \\
& \quad - \eta'(\bar{s}) \sqrt{\beta_x(\bar{s})} \frac{\Delta p}{p} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

となる。さらに、上の2式から次の関係式が求まる。

$$\begin{aligned}
b_{x2} \cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x2} \} & = b_{x1} \cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} \\
& \quad - \frac{\alpha_x(\bar{s})\eta(\bar{s}) + \beta_x(\bar{s})\eta'(\bar{s})}{\sqrt{\beta_x(\bar{s})}} \frac{\Delta p}{p} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

ここで式(3.29)と(3.31)を2乗して和をとると

$$\begin{aligned}
b_{x2}^2 & = b_{x1}^2 - \frac{2b_{x1}}{\sqrt{\beta_x(\bar{s})}} [(\alpha_x(\bar{s})\eta(\bar{s}) + \beta_x(\bar{s})\eta'(\bar{s})) \\
& \cos \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \} + \eta(\bar{s}) \sin \{ \varphi_x(\bar{s}) + \varphi_{x1} \}] \frac{\Delta p}{p} \\
& \quad + \frac{\eta(\bar{s})^2 + (\alpha_x(\bar{s})\eta(\bar{s}) + \beta_x(\bar{s})\eta'(\bar{s}))^2}{\beta_x(\bar{s})} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \quad (3.32)
\end{aligned}$$

となる。 $b_{x2} \gg b_{x1}$ の場合を考えると

$$b_{x2}^2 = \frac{\eta(\bar{s})^2 + (\alpha_x(\bar{s})\eta(\bar{s}) + \beta_x(\bar{s})\eta'(\bar{s}))^2}{\beta_x(\bar{s})} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2 \quad (3.33)$$

が得られる。式(3.33)より運動量の変化による水平方向のベータatron振動の振幅は

$$A_{\beta_x}(s, \bar{s}) = h(s, \bar{s}) \frac{\Delta p}{p} \quad (3.34)$$

となる。但し、

$$h(s, \bar{s}) = \sqrt{\beta_x(s) \frac{\eta(\bar{s})^2 + (\alpha_x(\bar{s})\eta(\bar{s}) + \beta_x(\bar{s})\eta'(\bar{s}))^2}{\beta_x(\bar{s})}} \quad (3.35)$$

である。また、分散による軌道の変化は

$$x_p(s) = \eta(s) \frac{\Delta p}{p} \quad (3.36)$$

となる。ここで、

$$H(s, \bar{s}) = \text{Max} \{ h(s, \bar{s}), \eta(s) \} \quad (3.37)$$

と表すと、散乱によって粒子がリングの水平方

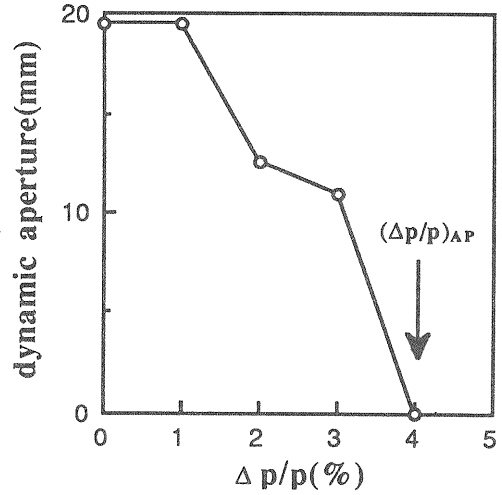


図7 dynamic apertureの $\Delta p/p$ 依存性及び $(\Delta p/p)_{AP}$ の例

向のphysical apertureによって失われる限界の運動量変化 $(\Delta p/p)_{AP}$ は

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{AP}(\bar{s}) = \text{Min}_s \left\{ \frac{a_x(s)}{H(s, \bar{s})} \right\} \quad (3.38)$$

となる。ただし、Minはsに関してリング1周の最小値をとることを意味するとする。散乱場所の分散関数がゼロの場合には散乱前後でベータatron振動の振幅は変化しないので、(3.38)は単純に

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{AP}(\bar{s}) = \text{Min}_s \left\{ \frac{a_x(s)}{\eta(s)} \right\} \quad (3.39)$$

となる。dynamic apertureの影響はphysical apertureをdynamic apertureに置き換えることで評価できるが、trackingによって求める方がより正確である。図7にdynamic apertureの $\Delta p/p$ 依存性の例を示す。 $\Delta p/p$ を変えていってdynamic apertureがゼロになるところが $(\Delta p/p)_{AP}$ であると考えれば良い。この値と式(3.38)の値の小さい方が最終的な $(\Delta p/p)_{AP}$ になる。さらに、 $(\Delta p/p)_{AP}$ はRF bucket height $(\Delta p/p)_{RF}$ と比較されなければならない。即ち、 $(\Delta p/p)_{AP}$ が $(\Delta p/p)_{RF}$ より大きければ粒子は横方向の運動で制限され、逆ならば縦方向の運動で制限される。従って運動量のアクセプタンス $(\Delta p/p)_c$ は

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c(\bar{s}) = \text{Min} \left\{ \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{AP}(\bar{s}), \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{RF} \right\} \quad (3.40)$$

と表される。 $s=\bar{s}$ での散乱によって、運動量が $(\Delta p/p)$ 以上ずれた粒子は安定に運動することができなくなる。

4. 残留気体との散乱とビーム寿命

ここでは、これまでの議論を基にして、リング内の残留気体との種々の散乱による電子ビーム損失の断面積を求め、それによって決まるビームの寿命を求めてみる。

4.1 Rutherford散乱

ビーム内の電子が原子番号 Z_i の原子核の作るクーロン場によって弾性散乱を受ける時の微分断面積は、原子核の反跳を無視した場合に次のように表現される。

$$d\sigma_R(Z_i) = \frac{1}{2} \frac{Z_i^2 r_e^2}{\gamma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^4} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} d\theta d\phi \quad (4.1)$$

これは、Rutherfordによる古典的な散乱公式にローレンツ収縮とスピンの補正因子を加えたものである。式(4.1)で、 v は電子の速度、 c は光速度を表している。ビーム内の電子はほぼ光速度で周回しているとすると、上の式は

$$d\sigma_R(Z_i) = \frac{1}{2} \frac{Z_i^2 r_e^2}{\gamma^2} \cot^3 \frac{\theta}{2} d\theta d\phi \quad (4.2)$$

となる。この式を使うと、散乱場所 s でのビーム損失の全断面積は

$$\begin{aligned} \sigma_R(Z_i, s) &= \int d\sigma_R \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\theta_c(s, \phi)}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} \frac{Z_i^2 r_e^2}{\gamma^2} \cot^3 \frac{\theta}{2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{Z_i^2 r_e^2}{\gamma^2} \left(\frac{1}{2} \cot^2 \frac{\theta_c}{2} + \ln \left| \sin \frac{\theta_c}{2} \right| \right) d\phi \end{aligned} \quad (4.3)$$

と与えられる（ここでは、第3章の \bar{s} を改めて s で置き換えた）。通常の場合、 $\theta_c \ll 1$ が成立するので、全断面積は

$$\sigma_R(Z_i, s) = \frac{4\pi Z_i^2 r_e^2}{\gamma^2 \theta_c(s)^2} \quad (4.4)$$

と書くことができる。但し、

$$\frac{1}{\theta_c(s)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\theta_c(s, \phi)^2} \quad (4.5)$$

とした。

4.2 Møller散乱

ビーム内の電子が残留気体の核外電子とクーロン散乱をして失われる場合を考える。この散乱の微分断面積はMøllerによって導き出され、

$$\begin{aligned} d\sigma_M &= \frac{2r_e^2 \gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{dq d\phi}{q^2 (\gamma - 1 - q)^2} [(\gamma - 1)^2 \\ &\quad - \frac{q(\gamma - 1 - q)^2}{\gamma^2} \{2\gamma^2 - 2\gamma - 1 - q(\gamma - 1 - q)\}] \end{aligned} \quad (4.6)$$

で与えられる。ここで、 q は入射電子のエネルギー損失で、散乱角 θ と次の関係にある。

$$q = \frac{(\gamma^2 - 1) \sin^2 \theta}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta} \quad (4.7)$$

エネルギー損失 q が小さい時、式(4.6)は近似的に

$$d\sigma_M = \frac{r_e^2 \gamma^2}{\gamma^2 - 1} \frac{dq d\phi}{q^2} \quad (4.8)$$

と書ける。この式は、 q がその最大値 $(\gamma - 1)/2$ に等しい時も良い近似となる。これは、 $\gamma \gg 1$ のもとでさらに単純化され、

$$d\sigma_M = r_e^2 \frac{dq d\phi}{q^2} \quad (4.9)$$

となる。今、

$$\gamma_c(s) = \gamma \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c (s) \quad (4.10)$$

と定義する。ここで、 $(\Delta p/p)_c$ は式(3.40)で与えられるものである。 $\theta_c(s, \phi)$ を式に代入して得られる q の値 q_c よりも γ_c が小さい時には、電子の損失は縦方向の運動を通して起こり、その逆の場合には横方向の運動の結果生じる。まず、 $\gamma_c \ll q_c$ の場合を考えると、式(4.9)を γ_c から $(\gamma-1)/2$ まで積分することで電子損失の全断面積 σ_M が与えられる。即ち、

$$\begin{aligned} \sigma_M(s) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\gamma_c(s)}^{\frac{\gamma-1}{2}} r_c^2 \frac{dq}{q^2} \\ &= 2\pi r_c^2 \left(\frac{1}{\gamma_c(s)} - \frac{2}{\gamma-1} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

である。さらに $\gamma_c \ll \gamma$ である場合、

$$\begin{aligned} \sigma_M(s) &= \frac{2\pi r_c^2}{\gamma_c(s)} \\ &= \frac{2\pi r_c^2}{\gamma \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c (s)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。 $\gamma_c \gg q_c$ の場合は、 $\theta_c \ll 1$ を考えれば、

$$q_c(s, \phi) = \frac{\gamma^2 \theta_c(s, \phi)^2}{2} \quad (4.13)$$

となるので、これを式(4.11)での積分の下限として γ_c を q_c と置き換えれば、電子損失の全断面積は

$$\sigma_M(s) = \frac{4\pi r_c^2}{\gamma^2 \theta_c(s)^2} \quad (4.14)$$

となる。ここで、 $\theta_c(s)$ は式(4.5)で定義されるものである。これは、Rutherford散乱の場合の式(4.4)で $Z_i=1$ とした場合に等しい。

4.3 制動輻射

電子の原子核による制動輻射の微分断面積は

$$d\sigma_B(Z_i) = 2\alpha r_e^2 Z_i^2 \frac{dk}{k} \frac{\gamma'}{\gamma} \left\{ \left(\frac{\gamma^2 + \gamma'^2}{\gamma\gamma'} - \frac{2}{3} \right) \right.$$

$$\left. \cdot 2 \ln(183Z_i^{-\frac{1}{3}}) + \frac{2}{9} \right\} \quad (4.15)$$

で与えられる。ここで、 α は微細構造定数(=1/137)、 γ と γ' は散乱前後の電子のローレンツ因子、 k は放出される光子の電子の静止質量単位でのエネルギーで $k=\gamma-\gamma'$ である。電子損失の全断面積は上の式を k について γ_c から γ まで積分することによって

$$\begin{aligned} \sigma_B(Z_i, s) &= 4\alpha r_e^2 Z_i^2 \left[\left\{ \frac{4}{3} \ln \frac{\gamma}{\gamma_c} - \frac{5}{6} + \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{4}{3} - \frac{\gamma_c}{2\gamma} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \ln(183Z_i^{-\frac{1}{3}}) + \frac{2}{9} \left(\ln \frac{\gamma}{\gamma_c} - 1 + \frac{\gamma_c}{\gamma} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

と得られる。ここで、 γ_c はMøller散乱の場合と同じ定義である。 $\gamma_c \ll \gamma$ の近似を使うと

$$\begin{aligned} \sigma_B(Z_i, s) &= 4\alpha r_e^2 Z_i^2 \left[\left(\frac{4}{3} \ln \frac{\gamma}{\gamma_c} - \frac{5}{6} \right) \ln(183Z_i^{-\frac{1}{3}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \left(\ln \frac{\gamma}{\gamma_c} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

となる。[]内の第2項は第1項と比べて通常は無視できるので、全断面積はさらに簡単化されて表現される。

$$\begin{aligned} \sigma_B(Z_i, s) &= 4\alpha r_e^2 Z_i(Z_i+1) \left(\frac{4}{3} \ln \frac{1}{\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c (s)} - \frac{5}{6} \right) \\ &\quad \cdot \ln(183Z_i^{-\frac{1}{3}}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

ここで、 γ/γ_c を $(\Delta p/p)_c$ で置き換えている。また、 Z_i^2 を $Z_i(Z_i+1)$ で置き換えることで、原子の核外電子の効果を近似的に取り入れた。

4.4 ビーム寿命

一般にビームの寿命 τ は次のように定義される。

$$\frac{1}{\tau} = - \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \quad (4.19)$$

N はリングを周回しているビーム内の粒子数である。従って、前節で挙げたリングの場所 s での原子番号 Z_i を持つ残留気体との各散乱によるビームの寿命は、ビームの速度を光速として

$$\frac{1}{\tau_R(Z_i,s)} = cn_G(Z_i,s)\sigma_R(Z_i,s) \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{\tau_M(Z_i,s)} = cn_G(Z_i,s) Z_i \sigma_M(Z_i,s) \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\tau_B(Z_i,s)} = cn_G(Z_i,s)\sigma_B(Z_i,s) \quad (4.22)$$

と表される。 $n_G(Z_i,s)$ は残留気体内の原子番号 Z_i の原子の単位体積当たりの数で、温度300Kの単原子分子から成る理想気体を仮定するとその原子の圧力 $P(Z_i,s)$ との関係は次のようになっている。

$$n_G(Z_i,s)[m^{-3}] = 3.22 \times 10^{22} P(Z_i,s)[\text{Torr}] \quad (4.23)$$

式(4.20)を残留気体の持つすべての原子の種類について和をとり、散乱場所 s に関してリング1周の平均をとったものが最終的な各散乱によるビームの寿命となる。即ち、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_R} &= \sum_i \left\langle \frac{1}{\tau_R(Z_i,s)} \right\rangle \\ &= \sum_i c \langle n_G(Z_i,s)\sigma_R(Z_i,s) \rangle \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_M} &= \sum_i \left\langle \frac{1}{\tau_M(Z_i,s)} \right\rangle \\ &= \sum_i c Z_i \langle n_G(Z_i,s)\sigma_M(Z_i,s) \rangle \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_B} &= \sum_i \left\langle \frac{1}{\tau_B(Z_i,s)} \right\rangle \\ &= \sum_i c \langle n_G(Z_i,s)\sigma_B(Z_i,s) \rangle \end{aligned} \quad (4.26)$$

但し、 $\langle \rangle$ は散乱点 s に関するリング1周の平均を意味する。電子ビームの残留気体との散乱によるビーム寿命 τ_G はこれらの和をとって

$$\frac{1}{\tau_G} = \frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_B} \quad (4.27)$$

と表すことができる。

ここで、各散乱によるビーム寿命の特徴について見てみよう。話を簡単にするために、 $n_G(Z_i,s)$ あるいは $P(Z_i,s)$ がリングの場所によらず一定とし、残留気体内の原子も1種類とする。

その原子の原子番号を Z とし $n_G(Z,s)=n_G(Z)=n_G$ とくと、各散乱における寿命は

$$\frac{1}{\tau_R} = cn_G \langle \sigma_R(Z,s) \rangle \quad (4.28)$$

$$\frac{1}{\tau_M} = cn_G Z \langle \sigma_M(s) \rangle \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{\tau_B} = cn_G \langle \sigma_B(Z,s) \rangle \quad (4.30)$$

となる。但し、

$$\langle \sigma_R(Z,s) \rangle = \frac{4\pi Z^2 r_e^2}{\gamma^2} \left\langle \frac{1}{\theta_c(s)^2} \right\rangle \quad (4.31)$$

$$\langle \sigma_M(s) \rangle = \text{Max} \left\{ \frac{2\pi r_e^2}{\gamma} \left\langle \frac{1}{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_c(s)} \right\rangle, \frac{4\pi r_e^2}{\gamma^2} \left\langle \frac{1}{\theta_c(s)^2} \right\rangle \right\} \quad (4.32)$$

$$\langle \sigma_B(Z,s) \rangle = 4\alpha r_e^2 Z(Z+1) \left\{ \frac{4}{3} \left\langle \ln \frac{1}{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_c(s)} \right\rangle - \frac{5}{6} \right\} \cdot \ln(183Z^{1/3}) \quad (4.33)$$

である。 $\theta_c(s,\phi)$ として、式(3.19)(3.20)(3.22)をそれぞれ採用した場合には

$$\left\langle \frac{1}{\theta_c(s)^2} \right\rangle = \frac{\langle \beta_x \rangle \beta_{xm}}{2a_{xm}^2} + \frac{\langle \beta_y \rangle \beta_{ym}}{2a_{ym}^2} \quad (4.34)$$

$$\left\langle \frac{1}{\theta_c(s)^2} \right\rangle = \frac{\langle \beta_x \rangle^2}{2\langle a_x \rangle^2} + \frac{\langle \beta_y \rangle^2}{2\langle a_y \rangle^2} \quad (4.35)$$

$$\left\langle \frac{1}{\theta_c(s)^2} \right\rangle = \frac{\langle \beta_x \rangle}{2n_x^2 \epsilon_x} + \frac{\langle \beta_y \rangle}{2n_y^2 \epsilon_y} \quad (4.36)$$

となる。これらの寿命はいずれも残留気体の圧力 P に反比例する。また、 τ_M は原子番号 Z に反比例し τ_R と τ_B は概ね Z^2 に反比例しているの、重い原子の影響が大きいことがわかる。さらに、 θ_c や $(\Delta p/p)_c$ にも依存している。図8(a)(b)にRutherford散乱によるビーム寿命を圧力 P の関数として計算した例を示す。但し、ここではビームのエネルギー $E=2.5\text{GeV}$ 、原子番号 $Z=10$ の残留気体を仮定し、 θ_c として式(4.34)を考えている。図8(a)では3種類のphysical aperture(a_{ym})の値につ

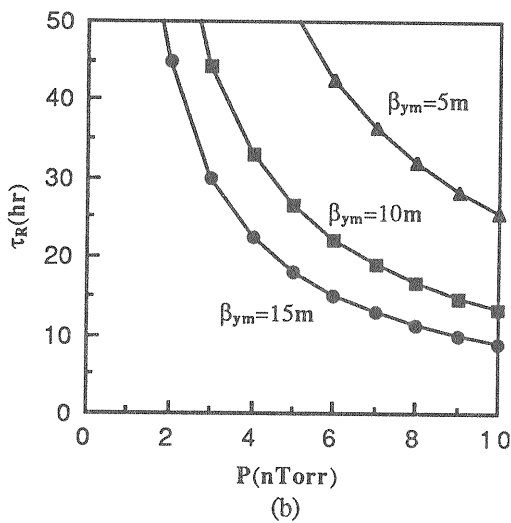
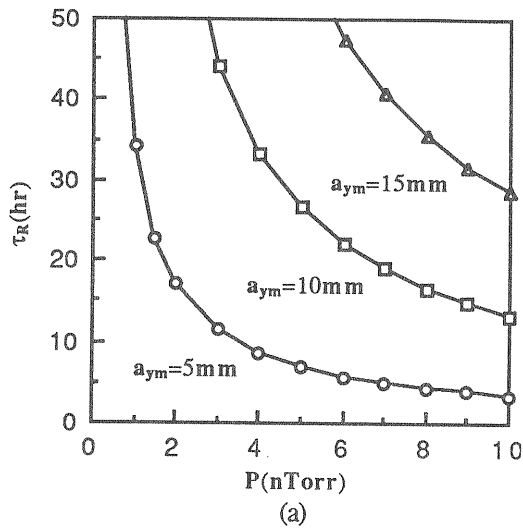


図8 Rutherford散乱によるビーム寿命と真空度の関係。E=2.5GeV、Z=10、 $\langle\beta_x\rangle=\langle\beta_y\rangle=10\text{m}$ 、 $\beta_{xm}=10\text{m}$ 、 $a_{xm}=50\text{mm}$ を仮定している。(a)では $\beta_{ym}=10\text{m}$ として3種類の a_{ym} について、(b)では $a_{ym}=10\text{mm}$ として3種類の β_{ym} について寿命を計算している。

いて、図8(b)では3種類のベータatron関数(β_{ym})の値について計算した。図8(a)から、apertureが小さくなると急激に寿命が悪くなることがわかる。これは、式(4.34)からわかるようにこの場合寿命がほぼその2乗に比例するためである。一方、図8(b)からそこでのベータatron関数の値を小さくするとそれに比例して寿命が良くなることもわかる。第2章で述べたように最近の放射光リングでは挿入型光源を使用しているので、そこでの狭いapertureを補うためにベータatron関数を小さくしている場合が多い。PFリングで

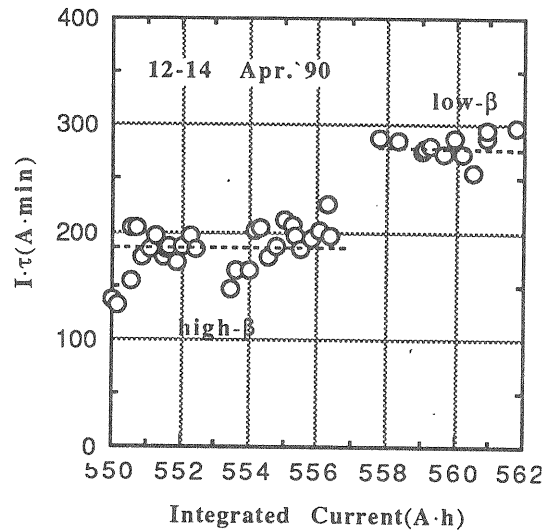


図9 PFリングにおける寿命改善の例。挿入型光源が設置されている長直線部付近の垂直方向のベータatron関数を小さくしてRutherford散乱の影響を小さくした結果である。ビーム寿命の表現($I\cdot\tau$)については式(4.40)を参照のこと。

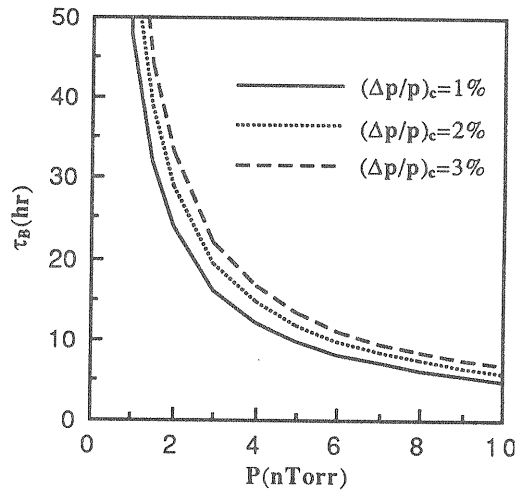


図10 制動輻射によるビーム寿命の計算例。Z=10を仮定。 $(\Delta p/p)_c$ の3つの値について示されている。

も図9に示すように挿入型光源の設置された長直線部のベータatron関数を小さくしてビーム寿命の改善に成功している。図10に今度は制動輻射によるビーム寿命の計算例を示す。制動輻射の場合は $(\Delta p/p)_c$ に依存しているが、対数的な変化なのでその依存度は弱い。従って、寿命はほぼ真空度によって決まるといって良いだろう。また、Rutherford散乱やMøller散乱と異なり散乱断面積のエネルギー依存性がないので、ビーム

エネルギーが高くなると相対的にその影響は他の2つの散乱に比べて大きくなる傾向にある。

最後にビーム寿命 τ_G と全ビーム電流 I との関係について述べよう。ビーム電流がゼロの時の残留気体の圧力が十分低く無視できる場合には、残留気体の圧力 P は全ビーム電流に比例する。これは、電流値が増えると電子が出す放射光の量も増えて真空チェンバーの壁に吸着していた分子が放出されるためである。但し、バンチ当たりの電流値 I_0 が大きい場合には、その2乗に依存する項が現われる場合がある。これはビームの作るwake fieldが強くなり真空チェンバーの作る凹凸に残って発熱によって壁に吸着していた分子を出すためである（真空関係の問題についてはまだまだ尽きないが、筆者の範疇を越えるものなので詳しくは参考文献や他の講義録を読んでいただきたい）。通常は前者のみを考えればよいので、この時 τ_G は

$$\frac{1}{\tau_G} = c_G I \quad (4.37)$$

という形に書ける。ここで、 c_G は電流値に依存しない定数である。従って、寿命は電流に反比例する。ビームの電流値とビーム内の粒子の数 N とは比例するので、式(4.37)(4.19)から電流の時間変化は

$$\frac{dI}{dt} = -c_G I^2 \quad (4.38)$$

となる。これを解くと電流の時間変化がで、

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{I_0}{1 + c_G I_0 t} \\ &= \frac{I_0}{1 + (t/\tau_{G0})} \end{aligned} \quad (4.39)$$

となる。 I_0 と τ_{G0} は $t=0$ での電流値と寿命である。この式から $t=\tau_{G0}$ の時に電流値は半分になることがわかる。式(4.37)は

$$I \cdot \tau_G = \frac{1}{c_G} \quad (4.40)$$

とも書け、 $I \cdot \tau_G$ は電流によって変化しないことがわかる。この表現は電流値を気にせずビーム寿命を表現することができるので便利である。図9はこの表現を使ってビーム寿命を表している。

る。

5. Touschek寿命

Touschek寿命は、Touschekらによって電子・陽電子貯蔵リング(ADA)で最初に観測されたことに由来する。Touschek寿命はこれまで、ビームエネルギーの低いリングで問題となったが、高エネルギーリングでは無視することができ忘れ去られた感があった。しかし、近年建設されたあるいはこれから建設される予定のリングでは低エミッタンスがゆえにビームエネルギーが高いにもかかわらず問題になっている場合が少なくない。

Touschek寿命はバンチ内の電子同士（あるいは陽電子同士）のクローン散乱(Møller散乱)により電子の持っている横方向の運動量が縦方向に変換されることで、電子が安定領域を越え失われる結果である。例えば、ビームエネルギー $E=2.5\text{GeV}$ 、エミッタンス $\epsilon_x=1 \times 10^9 \text{m}\cdot\text{rad}$ のリングを考えてみる。このビームの平均的な横方向（水平方向）の運動量 p_x はベータatron関数を $\beta_x=10\text{m}$ とすると、 $p_x=p(\epsilon_x/\beta_x)^{1/2}=25\text{keV}/c$ と与えられる。この運動量が散乱により完全に縦方向に変換されると、ローレンツ因子 $\gamma \approx 5000$ により $\Delta p = \gamma p_x = 125\text{MeV}/c$ 、あるいは $\Delta p/p = 0.05$ の運動量の変化が起きる。これは、通常のリングの運動量アクセプタンス $(\Delta p/p)_c$ を越える値である。運動量変換により $(\Delta p/p)_c$ を越えた電子は、第3章での議論により横方向あるいは縦方向の運動が不安定になりビーム損失につながる。特に低エミッタンスリングではバンチ内の電子密度が高く散乱確率が高くなるので、Touschek寿命の影響がより大きくなる。

ここでは、Touschek寿命を評価するための式を導き、その特徴について述べる。ただし、垂直方向の運動量の広がりや水平方向に比べて通常のリングでは1オーダー小さいので以下では無視することにする。

5.1 ビーム損失の断面積

同一のバンチ内で水平方向の運動量を持つ2つの電子がクローン散乱する場合を考える（ここで垂直方向の運動量は無視している）。2つ

の電子の重心系で見た時の電子の運動量は等しく（但し、向きは逆）、これを p_x と置く。重心系での電子の散乱角を θ 、散乱後の電子の方向とビームの進行方向（縦方向）とのなす角を χ 、進行方向と垂直な面内での位相角を ψ とする（図11）。この時、実験室系での散乱による縦方向の運動量変化 Δp は

$$\Delta p = \gamma p_x |\cos \chi| \quad (5.1)$$

となる。電子の損失は $\Delta p > \Delta p_c$ の条件で起こるので、式(5.1)を使えばその条件は

$$|\cos \chi| > \Delta p_c / \gamma p_x \quad (5.2)$$

と書くことができる。但し、

$$p_x \geq \Delta p_c / \gamma \quad (5.3)$$

でなければならない。一方、非相対論的近似のもとでのクーロン散乱（Møller散乱）の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4r_e^2}{(v/c)^4} \left(\frac{4}{\sin^4 \theta} - \frac{3}{\sin^2 \theta} \right) \quad (5.4)$$

で与えられる。但し、 v は2つの電子の相対速度で、電子の静止質量を m とすれば p_x と次の関係にある。

$$p_x = \frac{mv}{2} \quad (5.5)$$

式(5.3)を式(5.2)の条件のもとで立体角について積分したもの、即ち

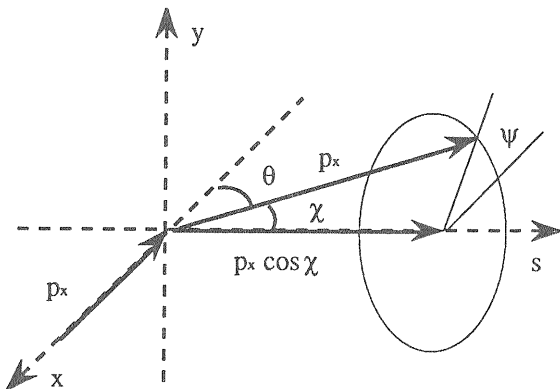


図11 重心系でのクーロン散乱

$$\sigma_T = \int_{|\cos \chi| > \frac{\Delta p_c}{\gamma p_x}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (5.6)$$

が重心系でのビーム損失の断面積となる。さて、式(5.6)は

$$d\Omega = \sin \chi \, d\chi \, d\psi \quad (5.7)$$

$$\cos \theta = \sin \chi \cos \psi \quad (5.8)$$

を使うと

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \frac{4r_e^2}{(v/c)^4} \int_0^{\cos^{-1}(\frac{\Delta p_c}{\gamma p_x})} \sin \chi \, d\chi \cdot 2 \int_0^\pi d\psi \\ &\quad \left\{ \frac{4}{(1 - \sin^2 \chi \cos^2 \psi)^2} - \frac{3}{1 - \sin^2 \chi \cos^2 \psi} \right\} \\ &= \frac{8\pi r_e^2}{(v/c)^4} \int_0^{\cos^{-1}(\frac{\Delta p_c}{\gamma p_x})} \left(\frac{2 \sin \chi}{\cos^3 \chi} - \tan \chi \right) d\chi \end{aligned} \quad (5.9)$$

となり、最終的に

$$\sigma_T(v) = \frac{8\pi r_e^2}{(v/c)^4} \left(u - 1 - \frac{1}{2} \ln u \right) \quad (5.10)$$

あるいは p_x で表現して

$$\sigma_T(p_x) = \frac{\pi r_e^2}{(p_x/mc)^4} \left(u - 1 - \frac{1}{2} \ln u \right) \quad (5.11)$$

が得られる。但し、 u は

$$u = \left(\frac{\gamma p_x}{\Delta p_c} \right)^2 \quad (\geq 1) \quad (5.12)$$

で定義される。

5.2 Touschek寿命の導出

式(4.19)と式(5.10)を使うと、あるリング周上の点 s でのTouschek寿命は実験室系で次のように表される。

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{2}{N_b \gamma^2} \iint \sigma_T(v) v n_1 n_2 d\Gamma_1 d\Gamma_2 \quad (5.13)$$

ここで、 n_1 と n_2 は散乱する2つの電子の位相空間 $\Gamma_1 \Gamma_2$ における分布を表す。バンチ内の散乱を扱うので、粒子の総数 N をバンチ内の粒子の数 N_b に置き換えてある。式(5.13)における因子 γ^2 は σ_T と v の実験室系へのローレンツ変換を考慮した結果である。また、因子2は1回の散乱によって同時に2個の電子が失われることからでくる。以下で、話を簡単にするために分散関数の効果を見捨てるとする。即ち、水平方向の電子の軌道はベータトロン振動のみで記述されるとする。この時、積分に必要な位相空間は4次元となり、 $i=1,2$ として

$$n_i = n_i(x_i, x_i', y_i, s_i) \quad (5.14)$$

$$d\Gamma_i = dx_i dx_i' dy_i ds_i \quad (5.15)$$

となる。 n_i は具体的に次のように書くことができる。

$$n_i = N_b \rho_x(x_i, x_i') \rho_y(y_i) \rho_s(s_i) \quad (5.16)$$

規格化された電子の分布関数はそれぞれ

$$\rho_x(x_i, x_i') = \frac{\beta_x}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left\{-\frac{x_i'^2 + (\beta_x x_i + \alpha_x x_i')^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad (5.17)$$

$$\rho_y(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_y^2}\right) \quad (5.18)$$

$$\rho_s(s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} \exp\left(-\frac{s_i^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (5.19)$$

である。また、

$$\sigma_{x,y} = \sqrt{\epsilon_{x,y} \beta_{x,y}} \quad (5.20)$$

$$\sigma_s = \frac{\alpha_M R}{v_s} \sigma_p \quad (5.21)$$

である。 σ_p はビームの相対的な運動量幅で、 R はリングの平均半径である。ここで、電子の分

布は放射減衰と放射励起によって決まっているとしている。また、式(5.17)と(5.18)の表現が異なるのは前に述べたように y' の効果について無視しているためで、(5.18)では既に y' について積分されていると考えればよい。2つの電子の位置は散乱時には一致するので

$$x_1 = x_2 \quad (5.22)$$

$$y_1 = y_2 \quad (5.23)$$

$$s_1 = s_2 \quad (5.24)$$

が成り立つ。この時、 y と s については簡単に積分することができ、式(5.13)は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_T(s)} &= \frac{N_b}{2\pi\gamma^2\sigma_y\sigma_s} \iiint \sigma_T(v) v \rho_x(x_1, x_1') \rho_x(x_1, x_2') \\ &\quad \cdot dx_1 dx_1' dx_2' \\ &= \frac{N_b \beta_x^2}{8\pi^3 \gamma^2 \sigma_x^4 \sigma_y \sigma_s} \iiint \sigma_T(v) v \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{A_0 x_1'^2 + A_1 x_1 + A_2}{2\sigma_x^2}\right) dx_1 dx_1' dx_2' \end{aligned} \quad (5.25)$$

となる。但し、

$$A_0 = 2(1 + \alpha_x^2) \quad (5.26)$$

$$A_1 = 2\alpha_x \beta_x (x_1' + x_2') \quad (5.27)$$

$$A_2 = \beta_x^2 (x_1'^2 + x_2'^2) \quad (5.28)$$

と置かれている。さらに、 x_1 について $-\infty$ から ∞ まで積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_T(s)} &= \frac{N_b \beta_x^2}{8\pi^{5/2} \gamma^2 \sigma_x^3 \sigma_y \sigma_s \sqrt{1 + \alpha_x^2}} \iiint \sigma_T(v) v \\ &\quad \cdot \exp\left\{\frac{\alpha_x^2 \beta_x^2}{4(1 + \alpha_x^2) \sigma_x^2} (x_1 + x_2)^2 - \frac{\beta_x^2}{2\sigma_x^2} (x_1'^2 + x_2'^2)\right\} dx_1 dx_2' \end{aligned} \quad (5.29)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= \frac{v}{\gamma c} \\ &= \frac{2p_x}{\gamma m c} \end{aligned} \quad (5.30)$$

の関係を使って変数変換を行うと、式(5.29)は

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{N_b \beta_x^2}{2\pi^{5/2} \gamma^3 m^2 c \sigma_x^3 \sigma_y \sigma_s \sqrt{1+\alpha_x^2}} \iint \sigma_T(p_x) p_x \cdot \exp \left\{ -\frac{\beta_x^2 \left(x_2' - \frac{p_x}{\gamma m c} \right)^2}{\sigma_x^2 (1+\alpha_x^2)} - \frac{\beta_x^2 \left(\frac{p_x}{\gamma m c} \right)^2}{\sigma_x^2} \right\} dx_2' dp_x \quad (5.31)$$

となり、 x_2' に関して $-\infty$ から ∞ までの積分を実行すると

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{N_b}{2\pi^2 \gamma^3 m^2 c \sigma_x \sigma_y \sigma_s} \int_{\frac{\Delta p_c}{\gamma}}^{\infty} \sigma_T(p_x) p_x \cdot \exp \left\{ -\left(\frac{p_x}{\gamma \sigma_x m c} \right)^2 \right\} dp_x \quad (5.32)$$

が得られる。式(5.32)の積分の下限は(5.3)の条件から決まる。また、

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x}{\beta_x} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\beta_x}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

で定義している。これは、水平方向のビームの角度(x')の広がりを表している。式(5.12)を使って変数の変換($p_x \rightarrow u$)を行い、さらに

$$\begin{aligned} \epsilon_A &= \left(\frac{\Delta p_c}{\gamma^2 \sigma_x m c} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(\gamma \sigma_x)^2} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c^2 \quad (\gamma \gg 1) \end{aligned} \quad (5.34)$$

と定義する。 ϵ_A は運動量アクセプタンスと縦方向に変換された横方向の運動量の広がりとの比の2乗を表している。これらを用いると、最終的にはTouschek寿命を表現する式として

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{\sqrt{\pi} c r_e^2 N_b}{\gamma^3 V_b \sigma_x} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c^2 F(\epsilon_A) \quad (5.35)$$

が得られる。但し、

$$V_b = 8\pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_s \quad (5.36)$$

はバンチの体積に相当する量で、 $F(\epsilon_A)$ は

$$F(\epsilon_A) = \int_1^{\infty} (2u - 2 - \ln u) \frac{\exp(-\epsilon_A u)}{2u^2} du \quad (5.37)$$

で定義される関数である。式(5.35)はリングの場所sの関数であるので、実際はリング1周の平均を考える必要がある。即ち、

$$\frac{1}{\tau_T} = \left\langle \frac{1}{\tau_T(s)} \right\rangle \quad (5.38)$$

である。関数 $F(\epsilon_A)$ は $\epsilon_A \ll 1$ の近似のもとで、

$$F(\epsilon_A) = -\ln \epsilon_A - 2.077 \quad (5.39)$$

となる。但し、一般には図12のようになる。

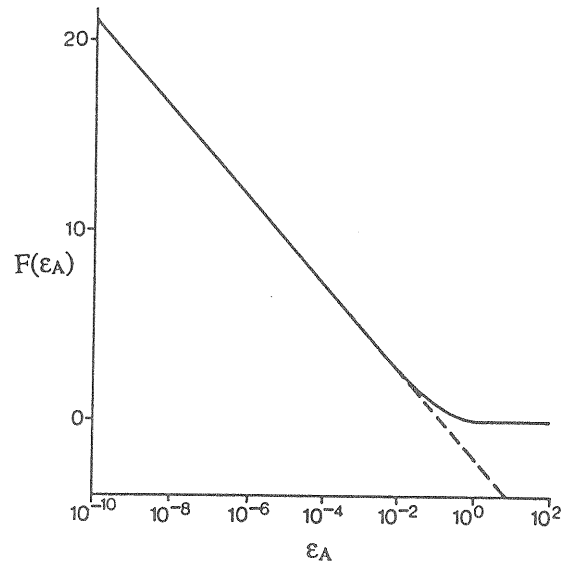


図12 関数 $F(\epsilon_A)$ の ϵ_A 依存性。破線は近似式(5.39)を表す。

5.3 分散関数の効果

前節のTouschek寿命の式の導出では、分散関数(η, η')の効果を見逃した。ここではそれを考慮した場合の式を求めてみよう。この場合もTouschek寿命は式(5.13)と同じ形に書くことがで

きる。但し、電子の水平方向の軌道はベータトロン振動の成分 (x_β, x'_β) に分散関数による成分 $(\eta\Delta p/p, \eta'\Delta p/p)$ が加わる。従って、考えるべき位相空間も $\Delta p/p$ を加えて各電子について5次元になる。 $\Delta p/p$ の分布関数は

$$\rho_p\left(\frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2}{2\sigma_p^2}\right\} \quad (5.40)$$

と表わされる。また、 (x_β, x'_β) は式(5.17)に、 y と s もそれぞれ式(5.18)(5.19)の分布に従う。式(5.22)(5.30)の条件は分散関数を考慮すると次のように変わる。

$$x_{\beta 1} + \eta\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_1 = x_{\beta 2} + \eta\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_2 \quad (5.41)$$

$$\left\{x'_{\beta 1} + \eta'\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_1\right\} - \left\{x'_{\beta 2} + \eta'\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_2\right\} = \frac{v}{\gamma c} = \frac{2p_x}{\gamma m c} \quad (5.42)$$

Touschek寿命はこの時次のようになる。

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{N_b \beta_x^2}{16\pi^4 \gamma^2 \sigma_x^4 \sigma_y \sigma_s \sigma_p^2} \iiint \iiint \sigma_T(v) v \cdot \exp(-B_0) dx_{1\beta} dx_{2\beta} dx'_{1\beta} dx'_{2\beta} d\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_1 d\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_2 \quad (5.43)$$

但し、

$$B_0 = \frac{x_{\beta 1}^2 + (\beta_x x'_{\beta 1} + \alpha_x x_{\beta 1})^2}{2\sigma_x^2} + \frac{x_{\beta 2}^2 + (\beta_x x'_{\beta 2} + \alpha_x x_{\beta 2})^2}{2\sigma_x^2} + \frac{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_1^2}{2\sigma_p^2} + \frac{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_2^2}{2\sigma_p^2} \quad (5.44)$$

である。ここで、前節の (x, x') を (x_β, x'_β) と変えたのと同様に式(5.20)で定義された σ_x を後々のため $\sigma_{x\beta}$ と表記を変えて使用した。この先、式を細かく追っていくのはかなり煩雑になるので、以下では概略のみを示す。まず、式(5.41)を使って $x_{\beta 2}$ を消去する。これで、積分の数は1つ減ることになる。次に $x_{\beta 1}$ の積分を実行すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_{\beta 1} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{1+\alpha_x^2}} \sigma_{x\beta} \quad (5.42)$$

が得られる。ここで、式(5.42)を代入して $x'_{\beta 2}$ を消去し積分変数を p_x に変え、 $x'_{\beta 1}$ の積分を実行すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'_{\beta 1} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi(1+\alpha_x^2)}{\beta_x^2}} \sigma_{x\beta} \quad (5.46)$$

を得る。続けて、 $(\Delta p/p)_1$ と $(\Delta p/p)_2$ についても積分をすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{B_1}} \quad (5.47)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_1 \rightarrow \sqrt{\frac{\pi B_1}{B_2}} \sigma_p \quad (5.48)$$

となる。但し、 B_1 と B_2 は

$$B_1 = \frac{\eta^2 + (\alpha_x \eta + \beta_x \eta')^2}{4\sigma_x^2} + \frac{1}{2\sigma_p^2} \quad (5.49)$$

$$B_2 = \frac{\eta^2 + (\alpha_x \eta + \beta_x \eta')^2}{4\sigma_x^2} + \frac{1}{4\sigma_p^2} \quad (5.50)$$

で定義される。最終的には p_x についての積分が残る、

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{N_b \beta_x}{4\pi^2 \gamma^3 m^2 c \sigma_x^2 \sigma_y \sigma_s \sigma_p \sqrt{B_2}} \int_{\frac{\Delta p_c}{\gamma}}^{\infty} \sigma_T(p_x) p_x \cdot \exp\left\{-B_3 \left(\frac{p_x}{\gamma m c}\right)^2\right\} dp_x \quad (5.51)$$

となる。但し、 B_2 と B_3 は次の関係にある。

$$B_3 = \frac{\beta_x^2 (\sigma_x^2 + \eta^2 \sigma_p^2)}{4\sigma_x^4 \sigma_p^2 B_2} \quad (5.52)$$

今、新たに σ_x を式(5.33)の代わりに

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{B_3}} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma_{x\beta}^2 \sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 \sigma_p^2 + (\alpha_x \eta + \beta_x \eta')^2 \sigma_p^2}{\beta_x^2 \sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 \sigma_p^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\epsilon_x \epsilon_x \beta_x + \eta^2 \sigma_p^2 + (\alpha_x \eta + \beta_x \eta')^2 \sigma_p^2}{\beta_x \epsilon_x \beta_x + \eta^2 \sigma_p^2}}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

と定義する。この時、式(5.52)から

$$B_2 = \frac{\beta_x^2 (\sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 \sigma_p^2)}{4 \sigma_{x\beta}^4 \sigma_p^2} \sigma_x^2 \tag{5.54}$$

となる。また、式(5.12)(5.34)を使って前節と同様にuについての積分に書き換えると、式(5.51)は

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{c r_e^2 N_b}{8 \pi \gamma^3 \sigma_x \sqrt{\sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 \sigma_p^2} \sigma_y \sigma_s} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c^2 F(\epsilon_A) \tag{5.55}$$

となる。F(ε_A)は式(5.37)で定義される関数である。ここで、

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{x\beta}^2 + \eta^2 \sigma_p^2} \tag{5.56}$$

で置き換えると、式(5.55)は式(5.35)と全く同じ形、即ち、

$$\frac{1}{\tau_T(s)} = \frac{\sqrt{\pi} c r_e^2 N_b}{\gamma^3 V_b \sigma_x} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_c^2 F(\epsilon_A) \tag{5.57}$$

となる。つまり、分散関数の効果は、σ_xに関して

$$\sqrt{\epsilon_x \beta_x} \rightarrow \sqrt{\epsilon_x \beta_x + \eta^2 \sigma_p^2} \tag{5.58}$$

σ_xに関して

$$\sqrt{\frac{\epsilon_x}{\beta_x}} \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_x \epsilon_x \beta_x + \eta^2 \sigma_p^2 + (\alpha_x \eta + \beta_x \eta')^2 \sigma_p^2}{\beta_x \epsilon_x \beta_x + \eta^2 \sigma_p^2}} \tag{5.59}$$

の変換を施せばよいことになる。

5.4 Touschek寿命の特徴

まず、Touschek寿命のエネルギー依存性を見よう。式(5.35)を使ってTouschek寿命のエネルギー依存性を計算した例を図13に示す。但し、エミッタンスε₀(=ε_x+ε_y)を100nm·radとし、水平・垂直方向のカップリングκ(=ε_y/ε_x)を2%としている。図からわかるようにTouschek寿命のエネルギー依存性は極めて高く、エネルギーの増加に伴って寿命は急激に上昇する。これがこれまで高エネルギーリングにおいてTouschek寿命が問

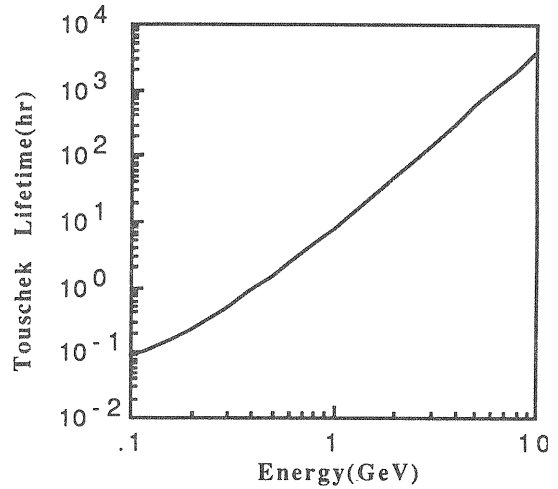


図13 Touschek寿命のエネルギー依存性。ε₀=100nm·rad、κ=2%、β_x=β_y=10m、σ_s=1cm、N_b=10¹⁰、(Δp/p)_c=1%を仮定している。

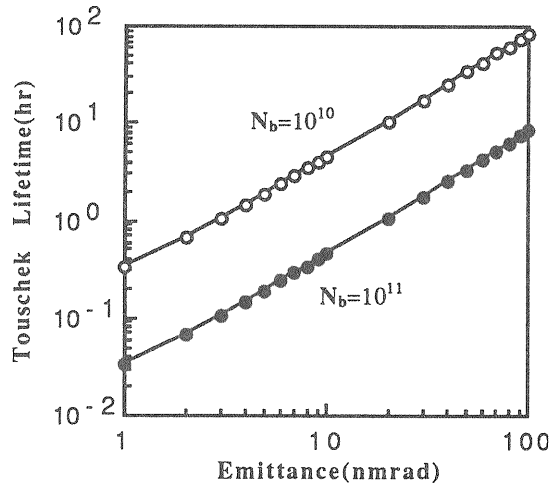


図14 Touschek寿命のエミッタンス依存性。2つのN_bの値について示してある。但し、E=2.5GeV、κ=2%、β_x=β_y=10m、σ_s=1cm、(Δp/p)_c=1%を仮定している。

題とならなかった大きな理由である。しかし、低エミッタンスリングではバンチの体積が小さくなり、Touschek寿命が無視できなくなる。また、バンチ内の電子数 N_b が増えてもTouschek寿命は短くなる。図14はこれらの影響を計算した結果である。

Touschek寿命を向上させる1つの方法はバンチの体積を増やしてやることである。図15にエミッタンス ϵ_0 を一定にして水平・垂直方向のカップリング κ を変えた時の寿命の変化を示す。カップリングを強くするとビームの断面積が大きくなり寿命が伸びることがわかる。実際に、英国の放射光リング(SRS)ではこのような方法

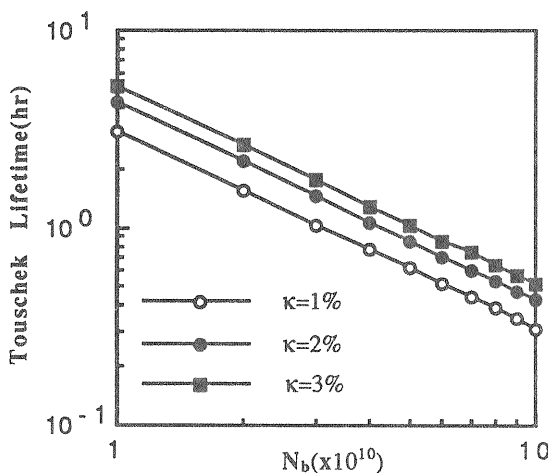


図15 Touschek寿命とカップリング κ との関係。ここでは、 $E=2.5\text{GeV}$ 、 $\epsilon_0=10\text{nm}\cdot\text{rad}$ 、 $\beta_x=\beta_y=10\text{m}$ 、 $\sigma_s=1\text{cm}$ 、 $(\Delta p/p)_c=1\%$ を仮定している。

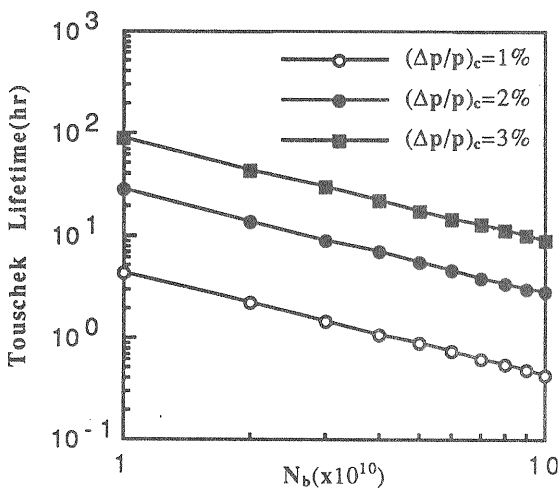


図16 Touschek寿命と運動量アクセプタンス $(\Delta p/p)_c$ との関係。 $E=2.5\text{GeV}$ 、 $\epsilon_0=10\text{nm}\cdot\text{rad}$ 、 $\kappa=2\%$ 、 $\beta_x=\beta_y=10\text{m}$ 、 $\sigma_s=1\text{cm}$ を仮定している。

を使ってTouschek寿命を伸ばしている（放射光リングではビームサイズを広げると放射光の輝度が下がるので苦肉の策と言えるが、逆に如何にビーム寿命が大切かを物語る例でもある）。また、米国の放射光リング(NSLS-VUV)のように4倍高調波を生成するRF空洞を設置しバンチ長 σ_s を伸ばすことでTouschek寿命を改善しようとしている例も見られる。バンチの体積を変える以外にビーム寿命を伸ばす方法としては、運動量のアクセプタンス $(\Delta p/p)_c$ を大きくすることが考えられる。図16の計算例で示すようにTouschek寿命は $(\Delta p/p)_c$ に強く依存しているのも、もし $(\Delta p/p)_c$ を大きくすることができればかなり効果的と言えるだろう。

Touschek寿命はその式の形から全電流をバンチ電流で置き換えれば、残留気体との散乱による場合の式(4.34)と同じような関係式が成り立つ。即ち、

$$I_b \cdot \tau_T = \frac{1}{c_T} \quad (5.60)$$

バンチ電流の時間変化も式(4.33)と同じく

$$I_b(t) = \frac{I_{b0}}{1 + c_T I_{b0} t} \quad (5.61)$$

となる。ここで、 c_T はバンチ電流に依存しない定数である（実際には、バンチ長やビームサイズ等が種々の原因でバンチ電流依存性を持つことがあり、その場合 c_T はバンチ電流依存性を持つが、この講義の主旨とかけ離れる内容なのでここではこれ以上触れないことにする）。

最後にTouschek寿命の実例を示そう。図17に示されるように、PFリングでは多バンチ運転から単バンチ運転への移行に伴って $I_b \tau$ の著しい減少が見られる。この単バンチ運転での $I_b \tau (=I_b \cdot \tau)$ の大きな減少は、残留気体の圧力や組成の変化だけでは説明ができず、Touschek寿命によるものであることがわかっている。実際、式(5.57)を使って予想される寿命によって、ほぼ単バンチ運転での $I_b \tau$ の値を説明することができる。Touschek寿命が単バンチ運転で支配的になった理由は、バンチ電流が多バンチ運転と比べて数十倍になったためである。

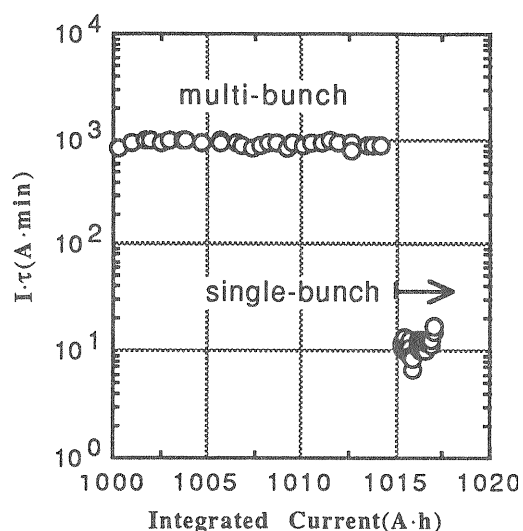


図17 PFリング単バンチ運転でのビーム寿命。横軸は時間積分された蓄積電流値で、比較のため多バンチ運転でのビーム寿命も示した。

謝辞

本稿執筆にあたり、図を提供していただいた放射光実験施設の光源研究系の方々に深く感謝します。また、勉強の機会を与えていただいた高エネルギー加速器科学研究奨励会並びにKEKの木村嘉孝加速器研究部総主幹に感謝します。

参考文献

ビームと残留気体との散乱断面積については文献[1][2]を、Touschek寿命については文献[3]~[6]を参考にした。文献[7][8]では相対論的なMøller散乱の微分断面積を考えた場合のTouschek寿命について取り扱っている。講義録の中で実例として示したPFリングのビーム寿命に関しては文献[9][10]を参照されたい。また、文献[11]~[17]ではこの講義で詳しく述べなかった事柄について解説がなされている。加速器の真空については文献[11][12]に、軌道一般については[13]~[15]に、trackingについては文献[16]に、放射減衰と放射励起で決まるビーム内の電子分布と量子寿命については文献[13][14][17]に詳しく書かれている。なお、講義録中の図は1部ここで挙げた文献から転用させていただいた。

- [1] W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation, third ed.(Oxford Univ. Press, 1954).
- [2] 鎌田 進, KEK-Report 79-28(1979), p. 1.
- [3] C. Bernardini et al., Phys. Rev. Lett. Vol. 10(1963), p. 407
- [4] J. Le Duff, Proc. of the CERN accelerator school, Berlin, 1987, CERN 89-01(1989)
- [5] M. S. Zisman et al., LBL-21270(1986).
- [6] H. Bruck, Accélérateurs circulaires de particules, Presses Universitaires de France(1966).
- [7] U. Völkel, DESY 67/5(1967)
- [8] R. P. Walker, Proc. of the 1987 IEEE Part. Accel. Conf.(1987), p. 491
- [9] Photon Factory Activity Report 1989.
- [10] Photon Factory Activity Report 1990.
- [11] 小林正典, OHO '87, 加速器の真空.
- [12] 堀洋一郎, 放射光ユーザーのための光源論 (1989), 蓄積リング真空の諸問題.
- [13] M. Sands, The Physics of Electron Storage Rings, SLAC-121, 1970.
- [14] 神谷幸秀, OHO '84, 加速器の原理.
- [15] 鎌田 進, OHO '85, 加速器の原理と設計.
- [16] 平田光司, OHO '85, ビームトラッキング
- [17] A. Piwinski, Proc. of the CERN accelerator school, Paris, 1984, CERN 85-19.