

序論

リング内を周回するビーム内の粒子（電子）は、残留ガスと衝突しエネルギーを失い、また進行方向の変化を受ける。進行方向の変化やエネルギーロスが大きければ粒子はビームから失われる。そのような衝突の平均衝突時間つまりビーム寿命は残留ガスの密度（圧力）によって決まり、蓄積リングにおいては通常、数十時間あるいはそれ以上であるように設計されている。

一方ビームロスにつながる微小なエネルギーロスや進行方向の変化は、より頻繁に起こっている。このような衝突は、粒子にランダムな振幅と位相のベータトロン振動を励起することになり、エミッタンスの増加を引き起こす。超低エミッタンスリングの真空システムを設計するに当たっては、ビーム寿命のほかに、残留ガスとの衝突によるエミッタンスの増加を見積もっておく必要がある。

粒子のエミッタンスは、良く知られているようにシンクロトロン放射における光子放射時のランダムなエネルギーロスと進行方向の変化によるベータトロン振動の励起（放射励起）と、加速によるダンピングのバランスによって生じ、ガウス分布を持つ。残留ガスとの衝突によって生じるエミッタンスもガウス分布を持つのではないと思われるが、実は放射励起と、残留ガスとの衝突によるベータトロン振動の励起には大きな違いがある。それはそれぞれの時定数と、ダンピングタイムとの大きさの違いに由来する。

放射励起の場合は、ダンピングタイムに比べて十分短い時間に頻繁に励起が行なわれる。その結果、例えばエネルギーロスによる励起であれば、ダンピングタイムに比べて十分短い時間内に生じるエネルギーロスの大きさは、ガウス分布に従うようになる。そして、Fokker-Planck方程式によってエミッタンスの分布を決定する場合、エミッタンスの揺らぎの2次の項まで取れば十分になり、ガウス分布が得られる。

一方、残留ガスとの衝突による励起の場合には、ダンピングタイム程度の時間内では期待される励起の数が非常に少ない。その結果、短時間におけるエネルギーロスや角度変化がガウス分布に従わず、むしろ散乱確率がそのまま現われる。もしFokker-Planck方程式を用いてエミッタンスの分布を決定しようとするれば、すべての

次数の揺らぎを考慮しなければならなくなり、ガウス分布とは異なった分布を得ることが予想される。

この小論においては、初めに§1から§3で残留ガスによって生じる一粒子のエミッタンスの期待値を見積もる。

次に§4で、残留ガスとの衝突によって生じるエミッタンスの分布を求める試みについて述べる。

なお、エミッタンスと関連する真空の問題として、イオントラッピングがあるが、ここでは触れない。

§1. 衝突による平均エミッタンスの変化[1]

周回する電子が残留ガスと相互作用するとき、電子は残留ガス中の分子を構成する個々の原子と相互作用すると見なすことができる。分子を構成する原子との1回の衝突におけるエミッタンスの変化量を衝突の断面積と粒子のベータトロン振動の位相で平均したものを、 $\Delta\bar{\epsilon}$ とすると、粒子のエミッタンスの衝突による単位時間当たりの変化は、

$$c \sum_{(m)} N_m \sum_{(s,a)} \sigma_a^s \Delta\bar{\epsilon}_{s,a} \quad (1)$$

と表される。

(s,a)は衝突の種類に関する和と分子を構成する原子に関する和、(m)は残留ガスを構成する分子に関する和を取ることを表す。 σ_a^s は、分子内のa番目の原子に対するsという相互作用の全断面積である。原子と電子の相対速度は光速(c)であるとした。 N_m は残留ガス中のm番目の分子の密度である。常温(20°C)では N_m は、各分子の絶対分圧 P_m と次のように関係付けられる。

$$N_m [\text{m}^{-3}] = 2.65 \times 10^{20} P_m [\text{Pa}] \quad (2)$$

N_m や $\Delta\bar{\epsilon}$ はリング内の位置に依存する量であるが、以下では式(1)をリング一周に関し

て平均して議論する。この時 N_m や $\Delta\bar{\epsilon}$ を個別にリング一周にわたる平均値で置き換える近似を行なう。このような平均操作のもとで、粒子のエミッタンス (ϵ) の時間変化は

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{\tau}\epsilon + c \sum_{(m)} N_m \sum_{(s,a)} \sigma_a^s \Delta\bar{\epsilon}_{s,a} \quad (3)$$

と表される。ここで τ はダンピングタイムである。

残留ガスとの散乱によって生じる粒子のエミッタンスの平均値 ($\bar{\epsilon}$) は、式 (3) の定常値として、

$$\bar{\epsilon} = \frac{\tau}{2} c \sum_{(m)} N_m \sum_{(s,a)} \sigma_a^s \Delta\bar{\epsilon}_{s,a} \quad (4)$$

と与えられる。

次に $\Delta\bar{\epsilon}$ をエネルギーロスや散乱角によって表すことを考える。粒子のエミッタンスはベータトロン振動の振幅によって次のように表される。

$$\epsilon_x = \frac{1}{\beta_x} \left[x^2 + (\alpha_x x_\beta + \beta_x x_\beta')^2 \right] \quad (5)$$

$$\alpha_x = -\frac{\beta_x'}{2}$$

ここで、 ϵ_x は x 方向 (水平方向) のエミッタンス、 x_β は x 方向のベータトロン振動の振幅、 β_x は x 方向のベータトロン関数である。 y 方向についても同様の式が成り立つ。

散乱によって各方向のベータトロン振動の振幅は次のように変化する。まず x 方向について考える。一般に x 方向の粒子の変位は次のように表される。

$$x = x_\beta + x_\epsilon \quad (6)$$

$$x' = x_\beta' + x_\epsilon'$$

x_ϵ は中心エネルギーからのずれに比例する変

位である。散乱前の進行方向と、散乱後の進行方向の成す角が θ で、エネルギーロスが u であるとする、 (x, x') と $(x_\epsilon, x_\epsilon')$ は次のように変化する。

$$x \rightarrow x$$

$$x' \rightarrow x' + \theta_x \quad (7)$$

$$x_\epsilon \rightarrow x_\epsilon - \eta \frac{u}{E}$$

$$x_\epsilon' \rightarrow x_\epsilon' - \eta' \frac{u}{E} \quad (8)$$

ここで η はディスパージョン、 E は電子のエネルギーである。 θ_x は θ の水平面への投影値である。これに伴ってベータトロン振動の振幅 (x_β, x_β') は次のように変化する。

$$x_\beta \rightarrow x_\beta + \eta \frac{u}{E}$$

$$x_\beta' \rightarrow x_\beta' + \eta' \frac{u}{E} + \theta_x \quad (9)$$

この変化に対応する x 方向のエミッタンスの増加 ($\Delta\bar{\epsilon}_x$) は、衝突の断面積と粒子のベータトロン振動の位相での平均操作を施すことにより、

$$\Delta\bar{\epsilon}_x = \beta_x \langle \theta_x^2 \rangle$$

$$+ \frac{1}{\beta_x} \left[\eta^2 + (\alpha_x \eta + \beta_x \eta')^2 \right] \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle \quad (10)$$

で与えられる。 $\langle \rangle$ は衝突の断面積に関する平均操作を意味する。 θ_x や u/E の一次の項や両者の積を含む項は、 θ_x や u/E とベータトロン振動の振幅との間に相関がないのですべて消える。

y 方向のエミッタンスの増加 ($\Delta\bar{\epsilon}_y$) は、ディスパージョンはないものと仮定して、

$$\Delta\bar{\epsilon}_y = \beta_y \langle \theta_y^2 \rangle \quad (11)$$

と与えられる。小角度の散乱に関しては、 θ と x, y 各方向の投影値の間に、

$$\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 \quad (12)$$

が成り立つ。

式 (10) および (11) にリング1周についての平均操作を施して、簡単のために

$$\beta_{x,y} \rightarrow \frac{R}{v_{x,y}} \quad (12)$$

$$\eta \rightarrow \left(\frac{\alpha R}{v_x} \right)^{1/2} \beta_x^{1/2} \quad (13)$$

の置き換えを行なう。 $v_{x,y}$ はそれぞれの方向のチューン、 R はリングの平均半径（周長 $\div 2\pi$ ）である。 α はmomentum compaction factorである。また以下で考える散乱は等方的であるので、

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_y^2 \rangle = \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2} \quad (14)$$

と置く。その結果、

$$\Delta \bar{\epsilon}_x = \frac{R}{v_x} \left(\frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle + \alpha \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle \right) \quad (15)$$

$$\Delta \bar{\epsilon}_y = \frac{R}{v_y} \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle \quad (16)$$

を得る。

従って残留ガスとの散乱による平均エミッタンスは x, y 各方向について、

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= \frac{\tau_x}{2} c \frac{R}{v_x} \\ &\times \sum_{(m)} N_m \sum_{(s,a)} \left(\frac{1}{2} \sigma_a^s \langle \theta^2 \rangle_{s,a} + \alpha \sigma_a^s \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle_{s,a} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\bar{\epsilon}_y = \frac{\tau_y}{2} c \frac{R}{v_y} \sum_{(m)} N_m \sum_{(s,a)} \frac{1}{2} \sigma_a^s \langle \theta^2 \rangle_{s,a} \quad (18)$$

と表される。 τ_x と τ_y はそれぞれ、 x 方向 y 方向のダンピングタイムである。

§ 2. $\sigma \langle \theta^2 \rangle$ と $\sigma \langle u^2/E^2 \rangle$ の評価

残留ガスとの衝突によって生じるエミッタンスを評価するためには、式 (17) および (18) からわかるように、各相互作用について $\sigma \langle \theta^2 \rangle$ と $\sigma \langle u^2/E^2 \rangle$ を求める必要がある。定義により、

$$\sigma \langle \theta^2 \rangle = \sigma \frac{\int \theta^2 d\sigma}{\int d\sigma} = \int \theta^2 d\sigma \quad (19)$$

であり、 $\sigma \langle u^2/E^2 \rangle$ についても同様である。

通常は3種類の相互作用を考える。すなわち原子核との弾性散乱、原子（分子）の励起ないしはイオン化、および制動輻射である。ターゲットとなる原子（分子）の運動エネルギーは熱エネルギー程度で、一方電子の速度はほぼ光速度に等しいので、ターゲットは静止していると見なすことができる。この節では簡単のため原子の種類と相互作用の種類を区別する添え字は省いた。この評価により、全ての相互作用を考慮に入れる必要はないことが分かる。

弾性散乱においては、衝突前後の原子核の運動エネルギーの変化は無視できるほど小さいので、電子はエネルギーを失わず、進行方向のみを変化させると考えてよい。散乱の微分散乱断面は電子のエネルギーが静止質量に対して十分大きい場合散乱角が1より十分小さいとしてよく、以下のように表される。

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 Z^2 \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\theta}{\theta^3} \quad (20)$$

ここで、 Z は原子核の電価数（原子番号）、 r_e は

古典電子半径 ($2.818 \times 10^{-15} \text{ m}$)、 γ はローレンツファクターである。 $\sigma < \theta^2 >$ は以下のようになる[2],[3],[4]。

$$\begin{aligned} \sigma < \theta^2 > &= 8\pi r_e^2 Z^2 \frac{1}{\gamma^2} \int \theta^2 \frac{d\theta}{\theta^3} \\ &= 8\pi r_e^2 Z^2 \frac{1}{\gamma^2} \ln \left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、散乱の最大角 (θ_{\max}) と最小角 (θ_{\min}) は以下のように与えられる。最小角は原子内電子による原子核の電場のシールドを考えると、原子半径程度の物体による電子波の回折角程度と見積られ、

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &\approx \frac{\lambda_d}{a} = \frac{\lambda_d}{a_0 Z^{1/3}} \\ \lambda_d &= \frac{\lambda_d}{2\pi} \end{aligned} \quad (22)$$

のように表される。ここで、 a はトーマスフェルミモデルによる原子半径、 λ_d は入射電子のドブロイ波長、 a_0 はボーア半径 ($5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$) である。最大角は、原子核程度の物体による電子波の回折角程度と見積られ、

$$\theta_{\max} \approx \frac{\lambda_d}{d} = \frac{\lambda_d}{1.3 \times 10^{-15} [\text{m}] A^{1/3}} \quad (23)$$

と表される。ここで、 d は経験的な原子核半径を表す式であり、 A は原子の質量数である [5]。あるいは、 θ_{\max} を散乱された粒子が真空チェンバーに衝突して失われる最小角と置くのも合理的である。この時には $\sigma < \theta^2 >$ の値が 1/1.5 位に小さくなる。結局弾性散乱による $\sigma < \theta^2 >$ は、

$$\sigma < \theta^2 > = 8\pi r_e^2 Z^2 \frac{1}{\gamma^2} \ln \frac{4.1 \times 10^4}{(AZ)^{1/3}} \quad (24)$$

と与えられる。

イオン化ないしは励起の過程では、電子はエネルギーを失いかつ進行方向も変化する。通常は、このエネルギーロスは励起エネルギーの数倍程度で、問題にならない。ここで考慮する必要があるので頻度は少ないがエネルギーロスの大きい場合である。この時の微分断面積は、原子内電子を自由な静止電子とした場合のメラー散乱の断面積で与えられる [6]。

$$d\sigma = 2\pi r_e^2 Z \frac{dq}{q^2} \quad (25)$$

ここで、 q は電子の静止質量を単位としたエネルギーロスで散乱角と次のような関係がある。

$$q = \frac{(\gamma^2 - 1) \sin^2 \theta}{2 + (\gamma - 1) \sin^2 \theta} \quad (26)$$

微分断面積を散乱角で表すと、 $\gamma > 1$ 、 $\theta \ll 1$ の場合に、

$$d\sigma = 8\pi r_e^2 Z \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\theta}{\theta^3} \quad (27)$$

となる。弾性散乱とほとんど類似の式であるが、弾性散乱の断面積は Z^2 に比例しているのに対し、この場合は電子同志の相互作用なので、一個の原子に対しては原子内の電子の個数 Z に比例することになる。 $\sigma < \theta^2 >$ は弾性散乱と同様に計算されるが、最大角は $\pi/2$ 、であり、最小角はエネルギーロスが最小励起エネルギー程度とおいたときの角度とする (これは要検討)。

$$\sigma < \theta^2 > = 8\pi r_e^2 Z \frac{1}{\gamma^2} \ln \frac{\pi\gamma}{2\sqrt{2I}} \quad (28)$$

ここで I は、電子の静止質量を単位とした最小励起エネルギーである。

$\sigma < u^2/E^2 >$ は、 $q=I$ から $(\gamma-1)/2$ まで積分して、

$$\begin{aligned} \sigma \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle &= 2\pi r_e^2 \frac{1}{\gamma^2} \int_1^{\frac{\gamma-1}{2}} q^2 \frac{dq}{q} \\ &\approx \pi r_e^2 Z \frac{1}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。最終的に γ に対して1やIは無視した。

制動輻射に於てもエネルギーロスと、進行方向の変かが起こる。エネルギーロスに関する微分断面積は以下のように与えられる[6]。

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\alpha_f r_e^2 Z(Z+1) \\ &\times \frac{dk}{k} \frac{\gamma'}{\gamma} \left[\left(\frac{\gamma^2 + \gamma'^2}{\gamma\gamma'} \right) 2 \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{2}{9} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

ここで $\gamma' = \gamma - k$ である。散乱角分布を与える微分断面積は複雑なので省略する。

$\sigma \langle \theta^2 \rangle$ は解析的に計算するのは困難なので、次のように全断面積と $\langle \theta^2 \rangle$ を別々に評価して近似する。 $\gamma \gg 1$ のとき、

$$\langle \theta^2 \rangle \approx \frac{1}{\gamma^2} \quad (31)$$

であることが微分断面積の検討から分かっている[6]。また全断面積は、上の式を $k=k_{\min}$ から γ まで積分して評価できる。ここで $k_{\min}=1$ とおく。従って、

$$\begin{aligned} \sigma \langle \theta^2 \rangle &\approx 2\alpha_f r_e^2 Z(Z+1) \\ &\times \left[\frac{8}{3} \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{2}{9} \right] \frac{\ln(\gamma)}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (32)$$

である。 $\sigma \langle u^2/E^2 \rangle$ は、

$$\sigma \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle = 2\alpha_f r_e^2 Z(Z+1)$$

$$\times \left[\frac{17}{18} \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{27} \right] \quad (33)$$

となる。

ここで各結果を用いて、

$$\sum_{(a)} \sigma_a^s \langle \theta^2 \rangle_a \quad \text{および} \quad \sum_{(a)} \sigma_a^s \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle_a$$

をCO分子に対して評価し比較してみる。数値的には以下ようになる。単位は[m²]である。ビームエネルギーに対して図示したのが図1である。

弾性散乱

$$\sum_{(a)} \sigma_a^s \langle \theta^2 \rangle_a = \frac{1.8 \times 10^{-25}}{\gamma^2} \quad (34)$$

イオン化ないし励起 (最小の励起エネルギーはとりあえず10eVとした)

$$\sum_{(a)} \sigma_a^s \langle \theta^2 \rangle_a = 2.8 \times 10^{-27} \frac{\ln(56700\gamma)}{\gamma^2} \quad (35)$$

$$\sum_{(a)} \sigma_a^s \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle_a = \frac{3.5 \times 10^{-28}}{\gamma} \quad (36)$$

制動輻射

$$\sum_{(a)} \sigma_a^s \langle \theta^2 \rangle_a = 1.6 \times 10^{-28} \frac{\ln(\gamma)}{\gamma^2} \quad (37)$$

$$\sum_{(a)} \sigma_a^s \left\langle \frac{u^2}{E^2} \right\rangle_a = 5.7 \times 10^{-29} \quad (38)$$

図1から分かるように、ビームと残留ガスの相互作用によるエミッタンスの増加を考えるとときには、弾性散乱(+イオン化ないし励起?)による角度の変化と、制動輻射によるエネルギーロスのみを考えればよい。そして角度変化に

よるエミッタンスの増加はビームエネルギーの二乗に反比例して小さくなるが、制動輻射によるエネルギーロスに伴うエミッタンスの増加はビームエネルギーによらない。また弾性散乱も制動輻射も原子の電価 Z に対し Z^2 で依存しているので、残留ガスの中でも質量の重いガスの量に気を付けなければならない。電子リングではシンクロトン放射によってチェンバーからのガス放出があり、運転中の圧力はほとんどこのガス放出で決まっている。その組成の主なもの

は水素と一酸化炭素である。各分子に対する Z^2 の和は水素分子2に対し一酸化炭素分子100であるから、残留ガスによるビームに対する影響はほとんど一酸化炭素の分圧で決まっていると言える。図2にアルミ合金製真空チェンバーにシンクロトン放射光を照射したときの残留ガス組成の一例を示した。左の図が、各ガスの組成の比で、右の図が各分圧に各分子の Z^2 の和をかけた値を示している。一酸化炭素の影響が最も大きいことがよくわかると思う。

図1 CO 分子に対する $\sum_{(a)} \sigma_a^s \langle \theta^2 \rangle_a$ と $\sum_{(a)} \sigma_a^s \langle \frac{u^2}{E^2} \rangle_a$ 。

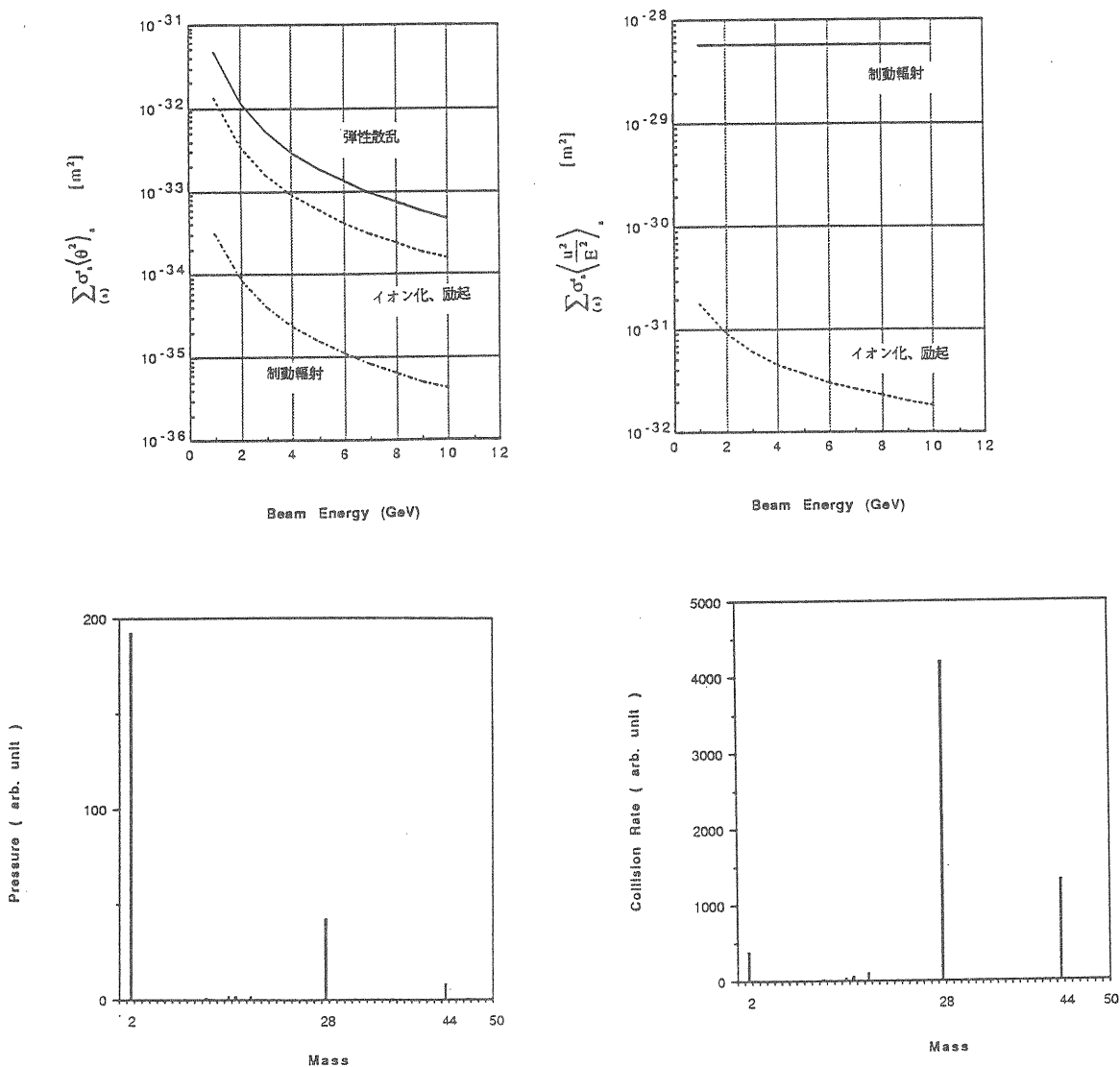


図2 シンクロトン放射下のチェンバー内の残留ガス組成の例と衝突への寄与の度合い。

§ 3. 加速器における残留ガスによって生じるエミッタンスの平均の評価。

超低エミッタンスを狙う加速器の例として、リニアコライダ-におけるダンピングリングがある。ダンピングリングと通常の蓄積リングを放射光リングとして使用したときの低エミッタンス運転の例について、設計エミッタンスの平均値（ビームエミッタンスの2倍）と、残留ガスとの衝突によるエミッタンスの比較を行なう（Table 1）。残留ガスは簡単のためすべて一酸化炭素とした。DR（ATF）はKEKのATFに建設予定のダンピングリングである。DR（NLC）はSLACで検討中の次期リニアコライダ-のダンピングリングである。

これらの例から分かるように、ダンピングリングでは、垂直方向（y方向）のエミッタンスに対する残留ガスの影響を押さえるには、 10^{-6} ~ 10^{-7} Pa程度の圧力にしなければならない。これはビームダクトの内径が20mm程度であるダンピングリングの構造を考えると少し厳しい要求である。通常の放射光リングの低エミッタンス運転については、残留ガスとの直接の相互作用によるエミッタンスの増加は 10^{-6} Pa以下では無視できるようである。

Table1

	DR(ATF)[7]	DR(NLC)[7]	CESR[8]	
Energy	1.5	1.8	5.437	GeV
Circumference	176	155.1		m
β_x			~16	m
β_y			~16	m
α	2.2×10^{-3}	1.2×10^{-3}	6.3×10^{-3}	
τ_x	5.2	2.5	~10(?)	msec
τ_y	5.2	4.0	~10(?)	msec
v_x	15.6	24.4	15.62	
v_y	5.4	11.3	12.35	
ϵ_x (design)	$\sim 2 \times 10^{-9}$	1.7×10^{-9}	1.3×10^{-7}	m (average)
ϵ_y (design)	2×10^{-11}	1.7×10^{-11}	$< 2 \times 10^{-9}$	m (average)
ϵ_x (beam-gas)	5×10^{-5} $\times P_{CO}[\text{Pa}]$	7.6×10^{-6} $\times P_{CO}[\text{Pa}]$	2.3×10^{-3} $\times P_{CO}[\text{Pa}]$	m (average)
ϵ_y (beam-gas)	1.1×10^{-5} $\times P_{CO}[\text{Pa}]$	2.5×10^{-6} $\times P_{CO}[\text{Pa}]$	5.1×10^{-6} $\times P_{CO}[\text{Pa}]$	m (average)

§ 4. 残留ガスとの衝突によって生じるエミッタンスの分布

これまでの節では、とりあえず残留ガスとの衝突によって生じるエミッタンスの平均値について述べた。ここで、残留ガスとの衝突の頻度などの具体的な数値を評価すると同時に、エミッタンスの分布について考えてみる。

話をはっきりとさせるために、 $Z = \sqrt{50}$ 、 $A = 2 \times Z$ という仮想的な原子からなる2原子分子との弾性散乱によって生じるy方向のエミッタンスを考える。加速器のパラメーターはATFのダンピングリングの値を用いる。

弾性散乱の全断面積は以下のように評価される。

$$\begin{aligned} \sigma(Z) &\approx \frac{4\pi r_e^2 Z^2}{\gamma^2 \theta_{\min}^2} \\ &= 4\pi Z^{4\beta} (137r_e)^2 \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、式(22)を用いた。

単位時間の衝突回数 ($1/\tau_c$) は、仮想的な分子の密度 N または分圧 P を用いて以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_c [\text{sec}]} &= Nc \times 2 \times \sigma(\sqrt{50}) \\ &= 4.0 \times 10^6 \times P [\text{Pa}] \end{aligned} \quad (40)$$

つまり 10^6 Paの圧力で毎秒約4回、 10^5 Paの圧力で毎秒約40回である。衝突時間 (τ_c) は典型的な圧力 10^6 Paに対して約0.25 secとなり、ダンピングタイム (5.2 msec) に比べて非常に長い。一方放射励起の場合には、単位時間当たりの励起回数は単位時間に放射される光子数 ($N_{\text{photon}} [\text{sec}^{-1}]$) に等しく、リングを1周する時間で平均して (ウイグラーの寄与を除いて)、

$$N_{\text{photon}} = \frac{5\pi}{\sqrt{3}} \frac{mc}{h} r_e \gamma f_{\text{rev}}$$

$$\begin{aligned} &= 6.57 \times 10^{-2} \times \gamma f_{\text{rev}} \\ &= 3.3 \times 10^8 \end{aligned} \quad (41)$$

あり、励起の時間間隔は約 3×10^9 secである。従ってダンピングタイムより十分短い時間間隔内にも非常に多数の励起がある。この結果、その時間間隔内に $u \sim u + du$ の間のエネルギー変化が起こる確率はガウス分布となり[9]、このことが最終的に x 方向のエミッタンスのガウス分布をもたらす[10]。残留ガスとの衝突における励起では、明らかにこの条件が成立しない。エミッタンスの分布は、したがってガウス分布にならない。

一回の衝突におけるエミッタンスの変化は平均して、

$$\bar{\beta}_y \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2} \approx \frac{R}{v_y} \frac{\langle \theta^2 \rangle}{2} \approx 1.1 \times 10^{-9} [\text{m}] \quad (42)$$

で、ダンピングリングの y 方向のエミッタンス平均 2×10^{11} m に比べて非常に大きい。また 10^6 Pa程度の圧力によって生じるエミッタンスの広がり平均に比べても遥に大きい。

エミッタンスは残留ガスとの衝突によって非常に大きい値を得るが、次の衝突までに、ダンピングによって極めて小さい値に戻ることを繰り返す。この変化の長時間にわたる平均が、前節までで求めた残留ガスとの衝突によって生じるエミッタンスの広がりである。

多くの場合一回の衝突におけるエミッタンスの変化が初めのエミッタンスより遥に大きいのであるから、時間 t だけ前に θ_x のキックを受けた粒子のエミッタンスは、位相に関して平均すると、

$$\begin{aligned} \epsilon_y(t) &= e^{-\frac{2}{\tau_y} t} \bar{\beta}_y \theta_y^2 \\ &\approx e^{-\frac{2}{\tau_y} t} \bar{\beta}_y \frac{1}{2} \theta^2 \end{aligned} \quad (43)$$

という値を持つことになるだろう。ところで t だけ前の時間 dt 内に衝突する確率 $f(t)dt$ は

$$f(t)dt = \frac{1}{\tau_c} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (44)$$

で与えられるので、衝突からの経過時間について平均すると

$$\epsilon_y(\theta) = \frac{1}{\tau_c} \frac{1}{\frac{2}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_c}} \bar{\beta}_y \frac{1}{2} \theta^2 \quad (45)$$

となる。初め θ だけ蹴られた粒子のエミッタンスはこの位になると考えることができる。ダンピングタイムのほうが衝突時間より遥に短いから

$$\epsilon_y(\theta) \approx \frac{\tau_y}{2\tau_c} \bar{\beta}_y \frac{1}{2} \theta^2 \quad (46)$$

と書ける。

ここで一回の衝突で θ だけ変化する確率は散乱断面積によって

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = 2\theta_{\min}^2 \times \frac{d\theta}{\theta^3} \quad (47)$$

で表されるので、期待されるエミッタンスの分布 ($D(\epsilon_y)$) もこれをエミッタンスで書き換えたものになると考えることができる。

従って

$$D(\epsilon_y)d\epsilon_y = \epsilon_{y,\min} \frac{d\epsilon_y}{\epsilon_y^2} \quad (48)$$

を得る。ここで、

$$\epsilon_{y,\min} = \frac{\tau_y}{2\tau_c} \bar{\beta}_y \frac{1}{2} \theta_{\min}^2 \quad (49)$$

である。衝突の確率そのままの形を引き継いで、ガウス分布に比べて長い尾を引いていることがわかる。

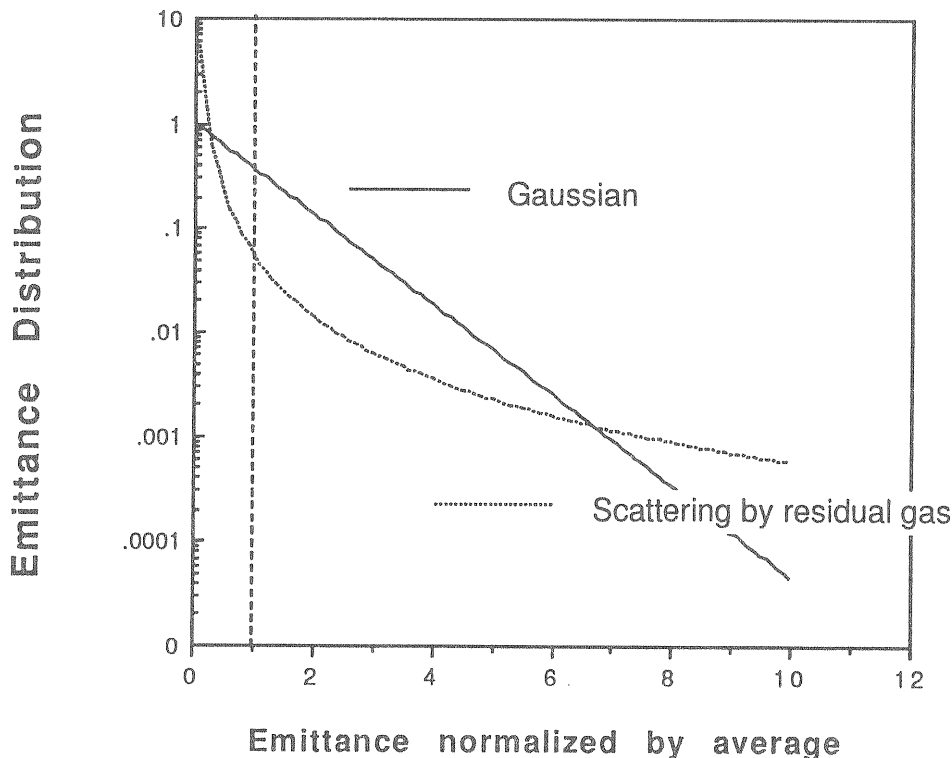


図3 残留ガスとの衝突によるエミッタンス分布と、同じエミッタンスの平均値を持つガウス分布の比較。

この結果は、Tor Raubenheimer [11]が計算機によるシミュレーションで得た形

$$D(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_0}{(\varepsilon_0 + \varepsilon)^2} \quad (50)$$

と類似しているのもっともらしい結果であると思われる。また衝突の確率そのままであるから、

$$\bar{\varepsilon}_y = \int \varepsilon_y D(\varepsilon_y) d\varepsilon_y = \varepsilon_{y,\min} \times \ln \frac{\varepsilon_{y,\max}}{\varepsilon_{y,\min}} \quad (51)$$

となり、前節までの結果と矛盾しない。

この分布を、同じ平均を与えるガウス分布と比較したのが図3である。図3によると、平均値の6.7倍のところで、残留ガスとの衝突による分布がガウス分布の上に来る。これは約 $13\sigma_y$ から外側にビームのハーローを形成する状況に対応している。

参考文献

- [1] M. Sands, SLAC-121, UC-28(ACC) (1970).
- [2] E. Fisher, CERN/ISR-VAC/67-16 (1967).
- [3] B. Rossi and K. Greisen, Rev. Mod. Phys. 13 240 (1941)
- [4] 武田暁、宮沢広成、「素粒子物理学」裳華房 1971
- [5] E. Segre, 'Nuclei and Particles', (W. A. Benjamin, Inc, 1977).
- [6] W. Heitler, 'The Quantum Theory of Radiation', (Oxford, 1954)
- [7] S. Kurokawa et al (ed), Proceedings of LC90, Tsukuba, KEK Internal 90-22 (1990).
- [8] E. B. Blum, Proc. IEEE Part. Accel. Conf. 1989, pp473-475.
- [9] S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. 15 1 (1943)
- [10] A. Piwinski, CERN 85-19 (1985) pp432-462
- [11] T. Raubenheimer, private communication.