

第1章 序 論

加速器物理は特別講義を除いて、大学や大学院の物理課程の講義には一般に準備されていないのが普通である。荷電粒子に関する物理である事は容易に想像出来るが、かといってプラズマ物理の一分野に分類出来るかという、必ずしもそうでは無い。何故なら、多くの加速器中の荷電粒子は比較的希薄な単一種類の粒子集団である事が多い。従って、大局的中性というプラズマ物理の基本的前提に反する。又、これら粒子集団が一次元方向のみ超相対論的領域までいっきに加速されるというのが、もう一つの大きな特徴である。その様な特徴に即し、加速器中の粒子の振舞いを記述する物理体系が、この四十年以上にわたり止まる事のない高エネルギー加速器への要求に併せて、多くの先達によって発展させられて来た。

この物理の道具建ての九十五パーセントは古典力学と古典電磁気学で事足りる。但し、これら古典物理の応用に於て、そのレベルは“state of arts”の域に達していると言うのが、筆者の認識である。加速器物理の守備範囲は比較的狭い。加速される粒子がレプトンかハドロンかで差異は在るが、極論すると加速、蓄積を通じて荷電粒子ビームの空間的安定性の議論に尽きる。加速器設計を加速器物理の範疇に入れるかどうかは、人によって見解の分かれるところであるが、少なくとも加速器物理の理解無くして、加速器設計は有り得ない。それは、流体力学の理屈を知らないでは、実際に飛ぶ飛行機やロケットの設計が出来ないのと同じである。実際は狭い加速器社会故、この設計と加速器物理を体系化する営みが完全に分業化されているわけではない。

この十五年位、各種専門、通俗誌上を賑わせて来た新しい加速原理発見のニュースとの関連で言うならば、加速器物理をマスターしたからと言って、必ずしもその様な新原理を発見出来る訳では無い。しかし、発見されたと称する原理を用いた加速器が、実際エンジニアリングレベルで動き得るものかどうか判断するには、加速器物理で確立した方法論が役に立つ。

前置きはこれくらいにして、今回の講義の内容を簡単に説明しておこう。本講義で、加速器物理の全体像を解説する程、十分な時間は無い。講義で解説出来ない内容をテキストに納めるのは筆者の好みでない。そこでこのテキストの前半では、まず先に触れた加速器物理の領分に於て、もっとも重要で普遍的と思える概念を解説する。特に、加速器物理の線形粒子ビーム力学全部を、復元力係数が時間に依存する調和振動子の力学として統一的に論じるだろう。これを越えた、各種加速器、蓄積リング等の実用的な粒子ビーム力学やラティス設計については、Courant-Snyderに依る理論的枠組みを元に、これま

での高エネルギー加速器セミナーの講義録/1/の中に優れた解説が在るのでそちらに譲る。更に、非線型問題、ビームの集団運動/2/、ビーム冷却等専門的な話題については、CERN、US加速器スクールのテキスト/3/も役立つだろう。

これまで、加速器物理の扱う対象は高エネルギー加速器の粒子ビーム力学が中心だった。世界の潮流から言えば、即ち戦後のBNL、CERN、SLAC、FNAL、KEK、DESY等の大規模高エネルギー物理学研究所の隆盛を考えれば、それは当然の事であった。しかし、加速器物理の対象はビームソースから最終段の利用までと言うのが筆者の認識である。例えば、電子加速器の場合なら、電子銃のカソード表面に発生した瞬間からコライダーでの衝突までをその守備範囲とする。その様な認識の下、本講義の後半では、これまで余り加速器物理として統一的に捉えられる事の少なかった高密度電子ビームの発生から加速、トランスポートについて、今日的话题をも折込解説する。この高密度電子ビームは将来高出力マイクロ波源の駆動ビームを始め様ざまの応用が期待されている。筆者はこの六年ほど、上記目的のため日常的にこの高密度電子ビームの理論、設計、実験に携わって来た。テキストで扱うテーマは筆者が直接手を下した物もあれば、受け売りもある。まだ標準理論になっていない物もあるが、出来るだけ分かりやすい解説に心がけた。この中で空間電荷効果、ビーム集団運動等を加速器物理入門としての視点から議論する。

第2章 粒子ビーム力学の基礎

2-1節 外場による閉じ込め — 横方向の安定性

加速器中の粒子ビームを制御しようとする時、先ず重要なのは粒子ビームを途中で失う事なく、安定に望むエネルギーまで加速する事である。通常、入射器で造られる粒子ビームは、発生段階で進行方向とは垂直方向の速度成分を持っているし、又加速途上で残留ガス分子による散乱、粒子同士での散乱、ガイド磁場のエラー成分等の外乱により、必ず横方向速度成分を受けてしまう。もし横方向の閉じ込めに何の手も尽かさねば、いずれ粒子ビームは真空容器壁に当たって、失われてしまう事になる。その様な理由から、横方向の閉じ込めの為、外場としての電場、磁場、両者の組合せを用いる方法が様ざま考案されて来た。各々の特長を生かした使われ方がされている。ここでは、それらの全部を解説する時間はないので、歴史上画期的だった強収れん法と呼ばれる閉じ込め方を説明しよう。

高エネルギー粒子の横方向閉じ込めに四極磁場が使え

るのは昔から知られていた。しかし、四極磁場の性質上、どうしても x , y の二軸方向同時に収束作用を与える事はできない。そこで、極性の異なる四極磁石をビームの進行軸に沿って交互に列べ、その各々を強く励磁する事によって、 x , y 二軸方向の安定性を確保し、振動の振幅を小さく出来る事をBNLの Courant, Livingston, Snyderが1952年に見いだした^{1/}。Livingstonの物理的直観で得たこのアイデアが数学的に正しい事を、CourantとSnyderが証明したと伝えられている。

極性の異なる四極磁場中の運動が安定か否かと言う問いは、強収れんの原理が発見された1950年始めにおいても、応用数学上は特に新しい事ではなかった筈である。強収れん原理に基づくと、粒子は以下の軌道方程式（ベータートロン振動方程式、付録A-1を参照）に従う。

$$\begin{cases} d^2x/ds^2 + K_x(s)x = 0 \\ d^2y/ds^2 + K_y(s)y = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

強収れん方式だと $K_x, y(s)$ は図2.1の様に正負の値を交互に持つ。この様な周期係数を持つ二階の微分方程式が安定解を持つかどうかと言う問いは前世紀からの応用数学上の問題であった。現在では、この種の方程式を一般にHill方程式^{2/}と呼ぶが、その典型としてMathieu方程式がよく知られている。そこで、 $a-2q\cos(2s)$ で表される係数は連続的に正から負へと三角関数に従って変化する^{3/}。解の安定域はパラメーター空間 (q, a) に驚くべき明瞭さで表示される。そして、その解はMathieu関数と呼ばれ、その解析的性質は良く調べられてきた。しかし、Mathieu関数は非常に複雑なので、ここでは解が初等関数で書ける簡単な例を示そう。この例は6年程前筆者によって見いだされた方程式である^{4/}。

$$d^2x/ds^2 + \left[1 + \frac{\lambda(1-G^2)}{(1+G\cos 2s)^2} \right] x = 0 \quad (2.1.2)$$

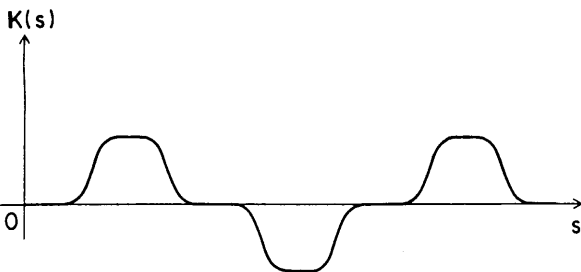


図2.1 復元力係数 $K(s)$ の模式図

係数の様子は図2.2の中にしめされている様に、正負の値を交互に取る。その解は

$$x(s) = (1+G\cos 2s)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \pm \frac{i\sqrt{\lambda+1}}{2} \sin^{-1} \left[\frac{(1-G^2)^{\frac{1}{2}} \sin 2s}{1+G\cos 2s} \right] \right\} \quad (2.1.3)$$

$$0 < |G| < 1$$

で表され、やはり図2.2に表示されている。明かに、もし条件 $\lambda+1 > 0$ が満足されるならば、この方程式の解は安定である。これらの類推から、方程式(2.1.1)の係数が適当な条件を満足すると、安定解が存在する事は容易に想像がつく。幸いに高エネルギー粒子から見ると、四極磁石両端のテーパを持った磁場プロフィールは不連続な階段関数と見なせる。すると、各領域で方程式(2.1.1)の解は初等関数で書けるのであるから、これを接続する事に依って、粒子の軌道はただちに知られる。しかし、これでは解が安定か否かと言う問いにすぐには答えられない。幸いに我々はマトリックスを用いて、解の発展を記述する方法を知っている。

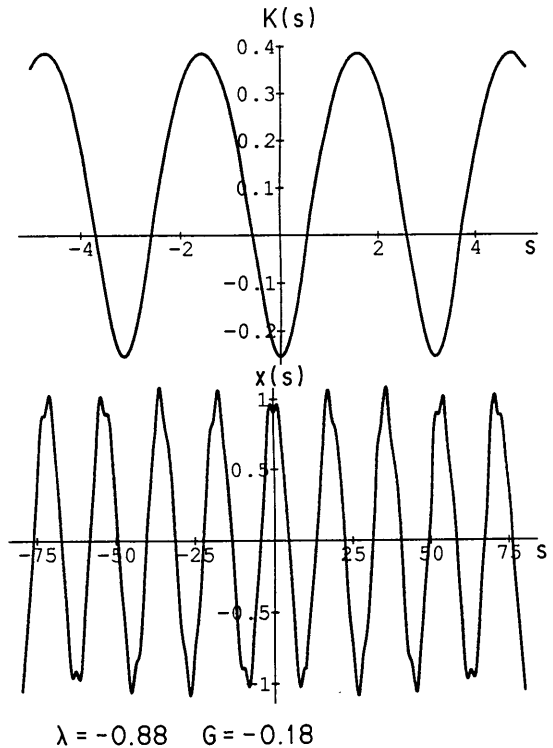


図2.2 復元力係数 $K(s)$ と周期解

軌道方程式 $\ddot{x} + K(s)x = 0$ の解を $g(s)$ とすると、ベクトル $X = (g(s), \dot{g}(s))^T$ の発展は以下の様な行列形式で書ける。

$$X(s+L) = MX(s) \quad (2.1.4)$$

そこで、Lを1周期長とする。そして、Mは図2.1の様なドリフト部、収束部、ドリフト部、発散部と列んだ典型的な収束系の場合、各部に対応する変換行列の積として書くことが出来る。勿論、その要素は知られている。今、まとめて

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

と書いておく。この行列の固有値は $ad - bc = 1$ の関係 (Wronskian $W = x_1(s)x_2'(s) - x_1'(s)x_2(s)$ が定数である事の別な表現である。 $x_1(s)$ と $x_2(s)$ は軌道方程式の1次独立解)を用いて、

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - 1} \quad (2.1.6)$$

今、 $\cos\mu = (a+d)/2$ とおけば、更に $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\mu)$ と書くことが出来る。対応する固有ベクトルは軌道方程式の一次独立解 $g_1(s)$ 、 $g_2(s)$ からつくられるベクトル $X_1 = (g_1(s), g_1'(s))^T$ 、 $X_2 = (g_2(s), g_2'(s))^T$ に外ならない。従って、任意の解ベクトルは X_1 と X_2 の線形和の形

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 \quad (c_1 \text{と} c_2 \text{は任意定数}) \quad (2.1.7)$$

で表す事が出来る。この収束系をn回通過したとすると、その発展は

$$\begin{aligned} M^n X &= c_1 M^n X_1 + c_2 M^n X_2 \\ &= c_1 \lambda_1^n X_1 + c_2 \lambda_2^n X_2 \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

と書ける。表式(2.1.8)の右辺から解る様に、もし $|\lambda_{1,2}| > 1$ であれば、解はnと共に増大する。即ち、 $n \rightarrow \infty$ について、有限な解は存在しない。かくして、安定条件

$$|\cos\mu| = \left| \frac{a+d}{2} \right| \leq 1 \quad (2.1.9)$$

が見いだされる。

適当なパラメーターの選択で解、或いは粒子軌道が安定になるのは理解出来た。しかし、これだけでは強収れんの有難みは解らない。調和振動子の類推からすると、振動の振幅は振動数に逆比例する。強収れん法では、弱収れん法に比較して、桁違いの振動数が得られる。これは加速器を製作する上で非常に重要な意味を持つ。即ち、

振動の振幅が小さいと言う事は小さいビームサイズを意味し、ギャップサイズの小さい電磁石の利用を可能にする。必要な磁場の強さを同じだとすると、電磁石の鉄ヨークの大きさは、一般にギャップサイズに比例する。かくして強収れん加速器では弱収れん加速器に比して、著しく小さい電磁石で済むと言う事になる。その様な訳で、強収れん法の発見は典型的ブレークスルーだったのである。

2-2節 力学不変量とベータートロン関数

ベータートロン振動方程式と等価な力学系

$$H = \frac{1}{2} [p^2 + K(s)x^2] \quad (2.2.1)$$

は、何か力学不変量を持つであろうか？ もし、持つとすると、その物理的意味は何だろうか？ この問いに答える為、先ず x 、 p の2次式で書ける以下の様な不変量を捜してみよう。

$$I = \frac{1}{2} \lambda_1(s)p^2 + \lambda_2(s)px + \frac{1}{2} \lambda_3(s)x^2 \quad (2.2.2)$$

もちろん、この段階では $\lambda_i(s) (i=1,2,3)$ は未知の関数である。もしIが力学不変量ならば、

$$\frac{dI}{ds} = \frac{\partial I}{\partial s} + [I, H] = 0 \quad (2.2.3)$$

を満足する筈である。[]はポアソン括弧、(2.2.1)と(2.2.2)を(2.2.3)に代入すれば、係数 λ_i に対する微分方程式

$$\dot{\lambda} = M\lambda \quad (2.2.4)$$

ここで、

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ K(s) & 0 & -1 \\ 0 & 2K(s) & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

今、 $\lambda_1 = \beta_C(s)$ とおけば(2.2.4)から

$$\begin{cases} \lambda_2 = -\frac{1}{2}\dot{\beta}_C \\ \lambda_3 = -K(s)\dot{\beta}_C \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}\dot{\beta}_C + K(s)\beta_C \end{cases} \quad (2.2.5)$$

を見いだす。これらから β に関する3階の微分方程式

$$\ddot{\beta}_C + 4K(s)\dot{\beta}_C + 2K(s)\beta_C = 0$$

を得る。この方程式は積分可能故、最終的に

$$\frac{1}{2}\beta_C\dot{\beta}_C - \frac{1}{4}\dot{\beta}_C^2 + K(s)\beta_C = C \quad (2.2.6)$$

になる。今、 $C=1$ とおいた(2.2.6)式をベータートロン振動方程式の補助方程式と呼ぶ。もし、この方程式の解が得られるならば、全ての係数 λ を手中にする事になる。かくして、もしあるとすれば、その力学不変量は次の様な形に書ける

$$I = \frac{1}{2\beta(s)} \left[x^2 + \left(\frac{\dot{\beta}(s)}{2}x - \beta(s)p \right)^2 \right] \quad (2.2.7)$$

補助方程式の解 $\beta(s)$ の代わりに $\rho(s) = \sqrt{\beta(s)}$ を導入すると、補助方程式は

$$\dot{\rho} + K(s)\rho = \frac{1}{\rho^3} \quad (2.2.8)$$

に帰着する。補助方程式の一般解がベータートロン振動方程式の2つの一次独立解を使って書ける事を指摘しておこう(付録A-2参照)。

$$\rho^2(s) = \beta(s) = c_1x_1^2(s) + c_2x_2^2(s) \pm 2\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{w^2}x_1x_2} \quad (2.2.9)$$

ここで、 c_1, c_2 は初期条件、或は境界条件によって決まる。さて、不変量 I の存在は位相空間上どのような意味を持つのであろうか？ $s=0$ において、初期値 $(x(0), p(0))$ を持つ粒子或は位相点を考えよう。 I の不変性とは、この粒子が $s=0$ 以後、 $s=0$ の位置の $(x(0), p(0))$ と $(\beta(0), \dot{\beta}(0))$ とで決まる $I=I_0$ を保存したまま動く事を意味する。言い替えると、 $s=0$ において $I=I_0$ と $(\beta(0), \dot{\beta}(0))$ とで決まる楕円上に存在した粒子列は、

$\beta(s)$ の発展にともない楕円の形は変わるが、この楕円上に留まる(図2.3と付録A-3を参照)。

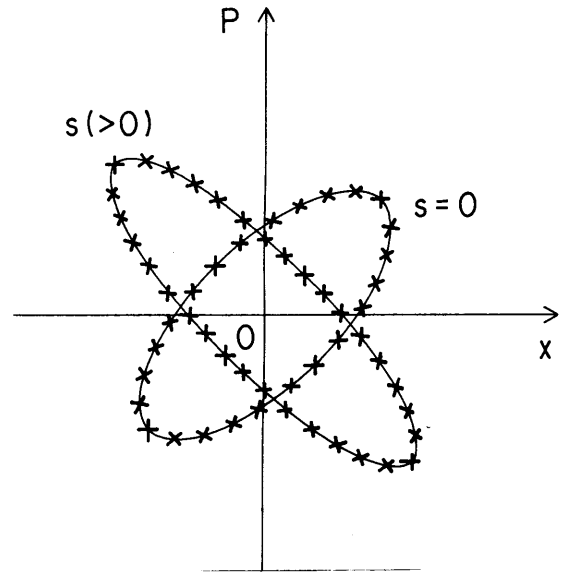


図2.3 同じ不変量 I_0 を持った位相空間上の粒子列

それでは、楕円の変形を決定する補助関数 $\beta(s)$ は一体どの様にして求めれば良いのだろうか？ 先ず、力学系(2.2.1)の復元力係数 $K(s)$ に着目する。円形加速器や蓄積リングにおいては、それが閉鎖系である故、少なくともリング1周期分の周期性をもつ。すなわち、 $K(s+C) = K(s)$ (C :リング周長)。以後、この周期性を閉鎖周期性と呼ぶ。一方、線形加速器やトランスポートの収束系においては、局所周期性を除いて、この閉鎖周期性は存在しない。もちろん、それはこれらの系では本質的に両端が開放しているという理由による。閉鎖周期性を持った系において、補助方程式(2.2.8)が周期解を持つことが証明される。今、 $\rho(s)$ が初期値 $\rho(0), \dot{\rho}(0)$ を持つ補助方程式の解とする。 $K(s+C) = K(s)$ を用いると、 $\rho(s+C)$ も又補助方程式を満足する事が示される。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho(s+C)}{ds^2} + K(s)\rho(s+C) \\ = \frac{d^2\rho(s+C)}{d(s+C)^2} + K(s+C)\rho(s+C) \quad (2.2.10) \\ = 1/\rho^3(s+C) \end{aligned}$$

従って、 $\rho(s+C) = \rho(s)$ なる周期解が存在し得る。そして、 $\rho^2(s) > 0$ なる周期解は1個である(付録A-2参照)。力学不変量 I の存在と併せてこの周期解の存在は、円形加速器の粒子ビームの挙動を説明する上で実に福音となる。即ち、リングに沿って先の楕円の形が一意に定まる

ので、粒子各々の入射時点での初期値を特に知るまでもなく、粒子集団の全体としての振舞いを把握出来る。この様な理由から、(2.2.8)を Envelope方程式と呼ぶこともある。加速器のラッティス設計の際、Magic等の計算機コードを用いて与えた $K(s)$ に対して、この周期解 $\rho^2(s) = \beta(s)$ を捜すわけである。

他方、開放系においては補助方程式の解は境界値を与えれば一意に見いだされる。例えば、トランスポート系の場合、リング上の入射点での補助関数の値を下流側の境界値と置く事もできる。この他の開放系については、物理的な考察から境界値を決め得る場合が多い。その例については、後の節で論じよう。

一般に力学系が保存量を持つのは、系の持つ空間的或は時間的対称性に起因する。それでは、この節で求めてきた不変量はいったい、何に由来するのだろうか？ この問いに初めて明確に答えたのはオーストラリアの数学者 EliezerとGray(1976)/1/ であった。彼らは先ず、中心力が時間に依存するポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{1}{2} K(s) r^2 \quad (2.2.11)$$

ここで、

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

から決まる平面振子(図2.4)を導入した。この振子のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{K(s)}{2} r^2 \quad (2.2.12)$$

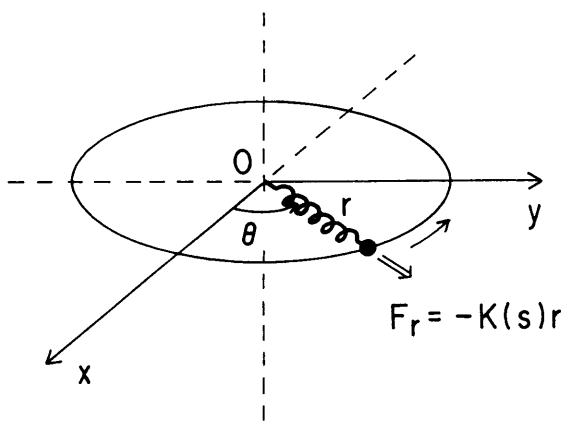


図2.4 復元力係数 $K(s)$ を持った平面振子

で書ける。 L が θ についてサイクリックである故、角運動量は保存される。今、保存される角運動量 h を導入すると、動径方向の運動は

$$r + K(s)r = h^2/r^3 \quad (2.2.13)$$

に従う。ここで、

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (2.2.14)$$

この時、

$$J = \frac{1}{2} \left[\frac{h^2 x^2}{r^2} + (x\dot{r} - r\dot{x})^2 \right] = \frac{h^2}{2} \quad (2.2.15)$$

なる運動の定数を作る事が出来る。 $\beta(s) = r^2(s)/h$ を導入すると、(2.2.15)式は

$$J = \frac{h}{2\beta} \left[x^2 + \left(\frac{\beta}{2} x - \beta p \right)^2 \right] \quad (p = \dot{x}) \quad (2.2.16)$$

と書ける。 $h = 1$ となる様に y 方向運動の初期値を適当に選んでやれば、運動の定数 J は先の I に完全に一致する。

かくして、われわれが1次元の力学系に見いだした不変量は、2次元に拡張した系の角運動量が保存する事の別な表現なのである。ベータートロン補助方程式は平面振子の動径方向の運動方程式そのものであり、1次元運動としてのベータートロン振動は平面振子の斜影運動である事が結論できる。勿論、この場合の平面振子のもう1つの自由度は、実空間での y 方向ではない。ここで言う角運動量は、実空間での x, y 方向が各々持つ相棒としての、もう1つの仮想的自由度との間に作る平面振子の持つ角運動量である。

いずれにしろ、以上の性質は力学系(2.2.1)に共通する特徴である。この不変量と補助方程式の存在は前世紀ロシアの Ermakov(1880)によって最初に認識されたと伝えられている。Ermakovの論文/2/が入手出来ないので、彼がどのような過程で認識するに到ったかは説明のしようがない。彼の後も、応用数学者 Milne(1930)/3/は、その波力学の解法を論じる中で、補助方程式に到達し、補助関数と系(2.2.1)の1次独立解との関係を明確に述べている。そして、CourantとSnyder(1958)/4/によって、強収れん加速器中の荷電粒子のベータートロン振動を記述する際、発展させた定式化の中で、必然的に上の諸概念と補助方程式を再発見する事になる。補助関数を

ベータートロン関数と名付け、不変量を我々加速器社会では、Courant-Snyder Invariantと呼ぶのが習わしとなった。但し、他の分野ではこう呼ばない。数学畑では、Ermakov Invariantと呼ぶのを良く耳にする。しかし、実際の応用において、CourantとSnyderの定式化の与えたインパクトは圧倒的であった。極論すれば、現在稼働している円形加速器の全部は Courant-Snyder の定式化に沿って設計され、特にハドロン粒子ビームはその予測どおり加速、蓄積されているといっても過言ではない。このインパクトは古典力学の教科書をも変更させた。筆者の世代は、古典力学を Goldsteinの“古典力学”初版で学んだ。今発行されている第2版/5/では、この節で論じた不変量と補助方程式に関する記述の一部が付け加えられている。これは初版になかった事である。

1960年以降も、力学系(2.2.1)とそれに類似な非線形力学系の不変量、補助方程式等に関する研究は進んでいる。しかし、諸概念の認識の更新には役だっても、実用上有為な物は、今の処余り多いとは言えない。

2-3節 加速と縦方向の安定性

荷電粒子のエネルギー増加を伴う加速に、電場のみが寄与するのは Lorentz方程式のしらしめる処である。そしてこの二十世紀前半は静電場、マイクロ波、誘導電場を用いた粒子加速法の発明が相次いだ。これらは、それぞれ加速技術として完全に定着した。現在でもレーザー工学やプラズマ物理からのヒントを得て、レーザー加速やプラズマ航跡場加速等の新しいアイデアが提案されている/1/。しかし、これら新しいアイデアの中、加速技術として確立した物は無い。原理的可能性が実証された物も極めて希である。その様な訳で、ここでは完全に定着した加速法のみを話を限定する。粒子ビームを安定に望むエネルギーまで加速する為には、加速方向即ち縦方向の安定性も又非常に重要な要素である。静電場や誘導電場(ベータートロン加速)による加速には、原理的にこの縦方向の安定性を与える機構が備わっていない。そこで議論をマイクロ波(RF)による加速のみに、更に限定する。RFによる加速も、定在波か進行波かで少し取扱を異にする。十分な紙面もないので、ここでは円形加速器における定在波加速のみを解説する。

まず、加速の不連続モデルを考える。円周 $2\pi R$ の円形リングの一ヶ所に共振角周波数 ω_{rf} を持ち、最大電圧 V に励起された、ギャップ長の無視出来る単一空洞を仮定しよう(図2.5参照)。いま、粒子の加速を記述する力学変数として、粒子エネルギー E と粒子が空洞に入射する時間の代わりに空洞の位相 $\phi (= \omega_{rf}t)$ を取る。空洞の

直前の位置を観測点にとると、周回毎の力学変数の発展は以下の様なスタンダードマッピングに類似の漸化式で記述できる。

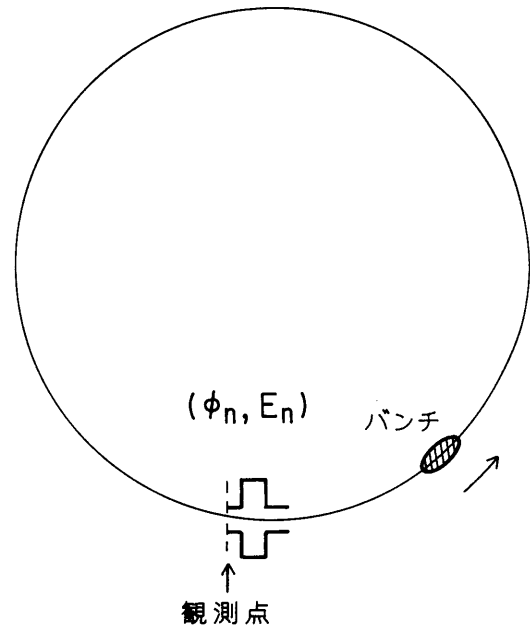


図2.5 円形リング加速モデル

$$\begin{cases} E_{n+1} = E_n + eV\sin\phi_n \\ \phi_{n+1} = \{\phi_n + \omega_{rf} \cdot \tau_{n+1}\}_{\text{mod } 2\pi} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

ここで、 τ_{n+1} は $(n+1)$ 番目の周回時間である。当然、周回時間は粒子の周回距離を速さで除したものである。周回距離は粒子のエネルギーで決まる。直観的には、より高エネルギーの粒子はそれだけ外側を回るだろう。実際は、強収れん加速器の性質上、少しこのイメージとは異なる。 $2\pi R$ からのずれは、後述する共鳴粒子の運動量からの相対的ずれに比例する量として表し得る。そして、この比例係数が付録A-4に求めたMomentum Compaction Factorと呼ばれ、 α の記号で書く。これを用いて周回距離は

$$C = 2\pi R[1 + \alpha(\Delta p/p)] \quad (2.3.2)$$

と書く。ここで、共鳴粒子は加速中もこの周回距離が常に $2\pi R$ である粒子として定義される。その様な共鳴粒子の存在には、共鳴粒子エネルギー E^* と偏向磁場の間に一定の関係が満足されねばならないが、これは後で整理して述べよう。

今、RFの周波数が完全に外部から制御出来ると仮定

して、加速電圧V一定の下、共鳴粒子の加速位相 ϕ_n^s が一定に加速される為の条件を求めてみよう。この条件とは、とりも直さず共鳴粒子のエネルギー増大一定の条件でもある。空洞への入射位相が一定であるためには、(2.3.1)式から、 $\omega_{rf}\tau_n^s$ は

$$\omega_{rf}\tau_n^s = 2\pi h \quad (h: \text{整数}) \quad (2.3.3)$$

を満足しなければならない。ここで τ_n^s は共鳴粒子のn回目の周回時間であり、 $2\pi R/c\beta(E_n^s)$ と書ける。また、共鳴粒子のリング回転角周波数 ω_0 を用いれば、良くしられた形、 $\omega_{rf} = h\omega_0(E_n^s)$ で書ける。

この共鳴粒子の周回距離を常に $2\pi R$ にしておく為には、偏向磁場Bの大きさを、以下の Lorentzの式に従ってランプさせれば良い。

$$E_n^s = e\rho B_n \quad (2.3.4)$$

ここで ρ は偏向半径。こうすれば、共鳴粒子をガイド磁場の中心にいつも保持する事が出来る。

共鳴粒子の加速は理解出来たが、他の粒子は一体どうなるのだろうか？ 共鳴エネルギー E^s から少しずれたエネルギーを持った粒子の周回時間 τ を相対的運動量差 $\Delta p/p$ ($\equiv \frac{E_{n+1} - E_n^s}{\beta^2(E_{n+1}^s)E_{n+1}^s}$)で展開すると、

$$\tau_{n+1} = \frac{2\pi R}{c\beta(E_{n+1}^s)} \left\{ 1 + \left[\alpha - \frac{1}{\gamma^2(E_{n+1}^s)} \right] \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \right\} \quad (2.3.5)$$

を得る。この表式を位相変化の式(2.3.1)に導入すると、

$$\phi_{n+1} = \left\{ \phi_n + 2\pi h \left[\alpha - \frac{1}{\gamma^2(E_{n+1}^s)} \right] \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \right\}_{\text{mod } 2\pi} \quad (2.3.6)$$

を見いだす。(2.3.6)式の [] 括弧の中に現れた $\alpha - 1/\gamma^2(E_{n+1}^s)$ の項がハドロン加速器の場合極めて重要な意味を持つ。この括弧の値が0になるエネルギーをトランジションエネルギーと呼び、 γ_T ($\equiv 1/\sqrt{\alpha}$)と書く。もしリング入射時の共鳴エネルギーが γ_T より小さいなら、 $\gamma(E_n^s) < \gamma_T$ において、 $\Delta p > 0$ の粒子は位相を減らす方向に動き、 $\Delta p < 0$ なる粒子は位相を増やす方向へ動く。従って、トランジションエネルギー以下では、共鳴位相を $0 < \phi^s < \pi/2$ に選べば、位相安定性が得られる。ここで $eV > 0$ を仮定している。一方 $\gamma_s > \gamma_T$ においては、共鳴位相を $\pi/2 < \phi^s < \pi$ へ移してやらねば、安定性を得る事はできない。実際の加速器ではRFの位相

を π だけジャンプさせて、これを実現している(例えばKEK-PSにおけるこの辺のハードウェアを含めた専門的解説は二宮による加速器セミナーの講義(1989)/2/がある)。この様な訳で、トランジションは円形ハドロン加速器に於ける一種の特異点とみなせる。この特異点の存在が、強収れん加速器の登場以来様ざまに加速器屋を悩まして来た。これについては、この節の最後に少し触れる事にしよう。

この位相安定性は、米国のMcMillan/3/ とロシア人Veksler/4/によって、1945年独立に発見された。それ以来、シンクロトロン位相安定性として広く認識されていた。強収れん型加速器の出現においても、トランジションエネルギーと言う新しい概念が持ち込まれはしたが、原理そのものには変わるところはなかった。Bohm, Foldy(1946)/5/の定式化を経て、その今日的標準理論が確立した。

ところで、(2.3.1)、(2.3.6)式の組合せは、正にスタンダードマッピングの式/6/ そのものと言って良い。炯眼の読者は、この様な力学系にはカオスがつきものだと思うかもしれない。この洞察は正しい。しかし、位相空間(ϕ, E)において、大局的なカオスが出現するや否やは、マッピング方程式を構成する係数の大きさに左右される。現在稼働している加速器において、加速途上に大局的カオスを造ろうとすると、概ね今使用されている空洞電圧の10倍から20倍程度を必要とする。従って、通常の加速において、大局的カオスによる粒子ビームの拡散を心配する必要は無い。

少し話題が反れたので、本論に戻ろう。ハドロン加速において、 γ_T 近傍以外何等取り立てて面倒な事は起きない。しかし、特異点 γ_T 近傍は昔から嫌われてきた。これは何故だろうか？ この特異点近傍に於ける粒子ビームの振舞いを良く調べると問題点が見えて来る。以下ではこの特異点近傍の位相力学を少し考えてみよう。

粒子ビームの共鳴粒子周りでの拡がり、位相に関して $\pi/2$ より十分小さいという条件の下、不連続加速方程式を $\chi = \phi - \phi^s$ で展開し一次のオーダーで近似すると、

$$\begin{cases} \delta_{n+1} = \delta_n + \frac{eV \cos \phi^s}{E_n^s \beta^2(E_n^s)} \chi_n \\ \chi_{n+1} = \chi_n + 2\pi h \eta \delta_{n+1} \end{cases} \quad (2.3.7)$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{E_n - E^s}{E_n^s \beta^2(E_n^s)} \\ \eta &\equiv \alpha - \frac{1}{\gamma^2(E_n^s)} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

(2.3.7)式中、変数 χ , δ 以外の係数が時間と共にゆっくり変化するのであれば、この不連続加速方程式は単に不連続な調和振動子型ポテンシャルの中の粒子の位相空間での時間発展を与える式に外ならない。もしその固有振動数(シンクロトロン振動数)が回転周波数 ω_0 に比較して十分小さいならば、(2.3.7)式は連続方程式で近似出来、単なる断熱的に変動する係数を持った調和振動子に関する正準方程式になる。実際の加速器では、いつもその様な描像が正しい。しかしながら、 γ_T 近傍ではこの描像が成立しない。そこでは、(2.3.8)式で与えられた η の値が急速に変動し、 $\gamma_s(=\gamma(E^s))=\gamma_T \rightarrow 0$ になる。即ち、まだ連続方程式の近似は正しくても、断熱的ではなくなるわけである。断熱と非断熱の境界は、従来計算機シュミレーションで経験的には解っていたが、最近厳密に解析的に見いだせる様になった。詳細は後の節で述べることにする。ここでは、FNALの主リングではトランジションエネルギーの前後500ターン(8msec)以内が完全に非断熱的領域である事を述べるにとどめよう。

以下、この非断熱的領域の位相力学を考える。(2.3.7)式を連続方程式

$$\begin{cases} \frac{d\delta}{dt} = \frac{eV\cos\phi^s}{T_s E^s \beta^2(E^s)} \chi \\ \frac{d\chi}{dt} = \frac{2\pi h}{T_s} \eta \delta \end{cases} \quad \left(T_s \equiv \frac{2\pi R}{c\beta(E^s)} \right) \quad (2.3.9)$$

で近似する。ここで、係数 η を除いて、全部 $\gamma_s=\gamma_T$ の値を取ると仮定する。(2.3.9)式から解る様に、トランジションエネルギーに近付くと、位相の変化はどんどん小さくなり、特異点で停止する。運動量の変化は位相によって決まるが、その位相が非断熱域に入った初期位相と余りかわらないわけであるから、共鳴粒子より前の位相に在る粒子は相対的に加速され続け、後の位相に在る粒子は減速され続ける。この結果、ビームバンチを位相空間で見ると、運動量軸に引き延ばされたようになるであろう、と予測される。もし、この拡がりが増えれば、トランジション通過時に加速ビームを失う事になる。この様な懸念がある故、この非断熱領域で粒子ビームの挙動を知るのには非常に重要なのである。

今、上の定性的描像を定量化する。この目的に、新しい独立変数 $\tau = -t$ と力学変数

$$\begin{cases} x = -\delta \\ p = \frac{eV\cos\phi^s}{T_s E^s \beta^2(E^s)} \chi \end{cases} \quad (2.3.10)$$

を導入すると、シンクロトロン振動は次のハミルトニアンで書ける。

$$H(x, p; \tau) = \frac{1}{2} [p^2 + K(\tau)x^2] \quad (2.3.11)$$

ここで

$$\begin{aligned} K(\tau) &= -\frac{2\pi h}{T_s^2} \frac{eV\cos\phi^s}{E^s \beta^2(E^s)} \left(\frac{1}{\gamma_T^2} - \frac{1}{\gamma_s^2} \right) \\ &= \left[\frac{4\pi h}{T_s^2} \frac{eV\cos\phi^s}{E^s \beta^2(E^s) \gamma_T^3} \gamma_s \right] \tau \\ &\equiv k^2 \tau \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

このハミルトニアンは前節で考察して来た、復元力係数が時間の関数である力学系そのものである。ちなみに復元力係数は時間の1次関数である。 $\tau=0$ がトランジション通過時に対応する。ハミルトニアン(2.3.11)式に従って動く粒子ビームはトランジションに近づく以前の断熱領域では良くRFバケツとマッチングしていたと仮定する。非断熱領域に入ってからビームバンチの振舞いを記述するには、ハミルトニアン(2.3.11)式の補助方程式の解を見いだせば良い事を前節の議論から知っている。この場合、補助関数をシンクロトロン振動関数と呼ぶのが適切かもしれない。そこで、この関数を $S(\tau)$ という記号を使って表す。断熱、非断熱的領域の境界を $\tau=\tau_1 (> 0)$ とすれば、補助方程式は境界条件 $S(\tau_1) = 1/\sqrt{K(\tau_1)}$ 、 $\dot{S}(\tau_1) = 0$ を持つ。そこで、シンクロトロン振動関数を

$$S(\tau) = \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \tau \left[a N_{\frac{1}{3}}^2(\theta) + b J_{\frac{1}{3}}^2(\theta) - 2 \left(ab - \frac{9}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times J_{\frac{1}{3}}(\theta) N_{\frac{1}{3}}(\theta) \right] \quad (2.3.13)$$

ここで

$$\theta = \frac{2}{3} k\tau^{\frac{3}{2}}, \quad \theta_1 = \frac{2}{3} k\tau_1^{\frac{3}{2}} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{2} \theta_1 J_{\frac{1}{3}}^2(\theta_1) + \frac{3}{2\theta_1 N_{\frac{1}{3}}^2(\theta_1)} \left[\theta_1 J_{-\frac{2}{3}}(\theta_1) N_{\frac{1}{3}}(\theta_1) + \frac{2}{\pi} \right]^2 \\ &\quad - \frac{6}{\pi \theta_1 N_{\frac{1}{3}}^2(\theta_1)} \left[\theta_1 J_{-\frac{2}{3}}(\theta_1) N_{\frac{1}{3}}(\theta_1) + \frac{1}{\pi} \right] \\ b &= \frac{3}{2} \theta_1 N_{\frac{1}{3}}^2(\theta_1) + \frac{3}{2\theta_1 J_{\frac{1}{3}}^2(\theta_1)} \left[\theta_1 J_{-\frac{2}{3}}(\theta_1) N_{\frac{1}{3}}(\theta_1) + \frac{2}{\pi} \right]^2 \end{aligned}$$

と言う形で求める事ができる(付録A-5参照)。 $\tau=0$ におけるバンチの位相空間(x, p)上の形を得るには、 $S(0)$ と $\dot{S}(0)$ を知れば良い。それらは

$$\begin{cases} S(0) = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{k}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{a}{\Gamma^2(2/3)} \\ S(0) = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{a}{\sqrt{3}} + \left(ab - \frac{9}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{cases} \quad (2.3.15)$$

で与えられる。断熱領域でRFバケツにマッチしているビームバンチの外形は位相空間で正立した楕円で表される。楕円の長軸、短軸を $\xi(\tau_1)$ 、 $\mu(\tau_1)$ とすれば、その面積は $2\pi I_0 = \pi \xi(\tau_1) \mu(\tau_1)$ と書ける。するとトランジション($\tau=0$)では、 $S(0) \neq 0$ であるので、楕円は傾倒する。傾倒するという事実がトランジション通過は非断熱的であることの証しでもある。さて、そのような楕円の上界はそれぞれ

$$\begin{cases} \xi(0) = \sqrt{2I_0 S(0)} \\ \mu(0) = \sqrt{2I_0 \frac{1+S^2(0)/4}{S(0)}} \end{cases} \quad (2.3.16)$$

となる。十分大きい τ_1 については、 $a=b=3/\pi$ であるから、 $S(0)$ は定数、又 $S(0)$ もトランジションでのRFとビームパラメーターだけで決まる定数となる。従って、トランジションでのビームバンチの外形は、これらのパラメーターで一意に決まる。(2.3.16)式から以下の関係式を得る。

$$\xi(0)\mu(0) = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi(\tau_1)\mu(\tau_1) \quad (2.3.17)$$

これは最初 Hereward(1966)/7/に依って、Matrix法を用いて演繹された関係である。加速器のパラメーターに依らずいつも成立するのであるから、非常に興味ある事実と言えらる。実用上も、この関係はトランジション通過時のバンチサイズ等を判断する時に役に立つ。楕円の上界の時間発展の例を図2.6に示す。これを位相空間上で視覚的に説明すると、以下の様になる。ビームバンチは平面上をゆっくり回転しながら運動量の拡がり最大になったところで、シンクロトロン振動をストップする。全体として、ビームバンチはp軸、即ち位相軸上で圧縮された格好になる。この様なバンチ挙動が加速器物理上非常に重要な問題になる。これは後にまとめて述べることにする。

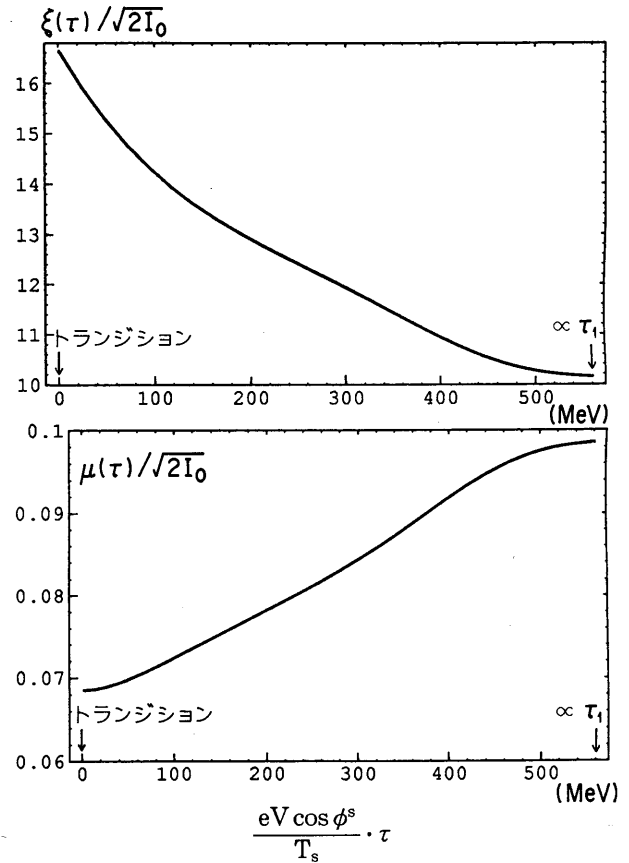


図2.6 Transition Crossingまでのバンチ(上界)挙動
例はFermilab主リング($h=1113$, $eV=2MV$,
 $\phi \sim 235.87^\circ$ $\gamma_{\tau}=18.8$ $E_{\tau}=17.639GeV$)の場合

トランジションを越すと、一体どうなるのであろうか? 先に述べた様に $\tau=0$ でRFの位相を π だけジャンプさせる。これは力学系(2.3.11)の時間を反転させたのと同じになり、 $t=\tau$ では $t=-\tau$ の状態に戻る。従って、ビーム拡散に結び付く様な事は何も起きない。以上が理想的トランジション通過の線形理論とそれからの予測である。そのストーリーを、筆者が後述する非線形Kinematical Termの影響を定量的に評価する為導入した、シンクロトロン振幅関数を使って、全体を再構築してみた/8/。

現実には、理想的トランジション通過を保証する事は非常に困難なのである。先ず、力学系(2.3.1)には、理想的トランジション通過を阻むIntrinsicな問題が内包する。理想的トランジション通過を不連続加速方程式(2.3.1)を位相と運動量差について線形化した(2.3.7)を土台に議論した。そこで見た様に、トランジション通過の際、位相幅は最小、運動量幅は最大になる。この事実が、運動量差についての線形化の妥当性に再考を強いる。

粒子の周回時間を運動量差で展開した表式(2.3.5)の中で $(\Delta p/p)$ の1次の項の前の係数 η は、トランジションで0になる事を知っている。かくして、 $\tau = 0$ 近傍では、 $(\Delta p/p)^2$ (通称非線形 Kinematical Term と呼ぶ) の影響が相対的に大きくなり、縦方向の運動を決定するまでになり得る。悪い事に、非線形 Kinematical Term はRFの位相ジャンプによって引き起こされる筈の時間反転に対して非対称となり、系はトランジション通過後、線形位相力学に従う様には元に戻らない。結局このような事があると、トランジション通過後RFバケツとのミスマッチングをおこし、縦方向のエミッタンス増大につながる。その程度は加速器によって異なる。筆者が計算したFNAL主リングの場合で、20-30%でありマシーンスタディーの結果と矛盾はなかった/9/。

トランジション通過に当たっての Intrinsic な問題として、粒子ビーム自身が持つ空間電荷効果を挙げねばならない。トランジション通過の際位相幅最小になることは何度も繰り返して述べてきた。これはビーム長が最小になる事にほかならない。そこで、縦方向の空間電荷効果がまた最大になる。この空間電荷効果はトランジション通過に関係なく、いつもビームバンチの Head 側 ($\chi < 0$ にある粒子) を前へプッシュ (加速) するし、Tail 側 ($\chi > 0$ にある粒子) を後ろへプッシュ (減速) する方向へ働く。ところが、RF位相は $\gamma < \gamma_T$ ではバンチHead側を相対的に減速し、Tail側を相対的に加速する様選んであるので、有効なトラップ電圧は加速電圧から空間電荷による相当電圧分差し引いた電圧となる。一方、 $\gamma > \gamma_T$ ではRF位相の選択が反対なので、有効トラップ電圧は二つを重畳したものになる。かくして、トランジション通過の際、加速電圧や位相に特別な対策を取らねば、 $\gamma < \gamma_T$ で長いバンチ、 $\gamma > \gamma_T$ で短バンチを作ることになる。

トランジションでビーム長が最小になる事は、横方向運動にも又サイド効果を産む。そこでは、当然粒子密度が増大するわけであるから、x、y方向の発散力が増す。これは線形ラッティスが少し変形したのと等価であるから、当然運動量分散関数が少し異なってくる。そうすると、Momentum Compaction Factor α がずれ、 γ_T が動く、そうすると設計値どりのRF位相ジャンプがミスタイミングになってしまう恐れがある。“風吹けば、桶屋が儲る”しきの論理であるが、CERNのPSリングではこれが真面目に考えられた。

今回の講義で直接は取り上げないが、周回するビームバンチとそれを取り巻く環境の間には、コヒーレントなビーム不安定を生み出す電磁相互作用がある。特に、バンチビームの縦方向不安定を Microwave Instability /9/ と呼ぶが、多くの場合は、粒子間でメンバーチェン

ジがおきてコヒーレントにはならない。これを通称、Landau減衰と呼ぶ。ところが、トランジションでは周回周波数の広がり無くなくなってしまわなければならないから、縦方向におけるメンバーチェンジは起きない。従って、取り巻く環境のインピーダンスが小さくともコヒーレントになる可能性がある。最近のKEK-PSでは、或条件のもとトランジションでこの Instability が起きていそうだという指摘がされている/10/。

以上、トランジション通過に関する懸念の主な物を整理して来た。これらの問題点の内、一体どれが一番シリアスかは、マシーンとビームパラメーター等の運転条件によって異なるので、一概に言えない。しかし結論的に言えるのは、トランジションの無い加速器がオールマイティーだということである。とはいってもコストの問題もあり、加速エネルギー巾の小さいリング幾段からなるカスケード方式は取れない。多くのハドロン加速器は入射エネルギー近くにトランジションを持つ。そこで、トランジション通過の際引き起こされる不都合を最小に押さえるためトランジション通過を急がせようという試みが為された。ビーム自身の加速を速めることは、可能なRF電圧、追従する電磁石等の問題があって現実的ではない。そこで γ_T 近傍で特別に準備した四極磁石をパルス励磁して、パルス励磁に対応する時間依存性を持った γ_T を作り出す (図2.7参照)。すると粒子ビームの相対的な γ_T 近傍滞在時間は短縮される。これが、通称 γ_T ジャンプと呼ばれるもので、CERNのK. Johnsen /11/によって提唱され、CERN-PSでは日常的に今でも使用されている。

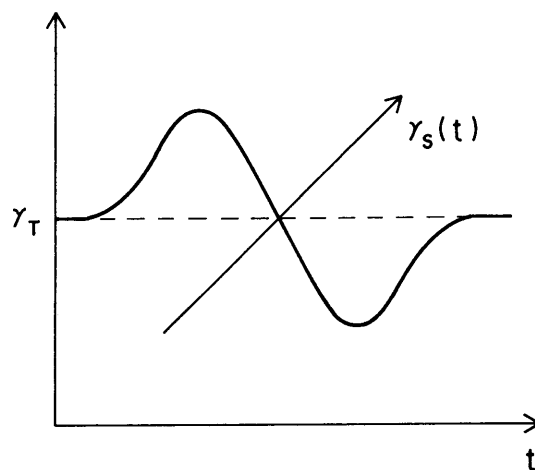


図2.7 γ_T -ジャンプとTransition Crossingの模式図

kinematical termの影響を完全に殺してしまう方法も提案された/12/。これは六極磁場成分のkinematical termへの寄与をコントロールする事によって為される。非常にデリケートなクロマティシティ補正を要求するので簡単ではなく、まだ検証はされていない。先に見たとうり、不都合の多くは、トランジションでバンチ長が小さくなることに起因した。そこで、これを避けるための工夫も考案、検証されている。Christofilos によるDuck-under Crossing 法は、トランジションで共鳴位相 $\phi = \pi/2$ にうごかし、その分加速電圧を下げてやる。ビームバンチは少なくとも位相平面を回転しないから比較的長いバンチが維持出来ると言う訳である。しかし実際の実験では顕著な効果が確認出来なかった由/13/。もう一つはFNALのJ. Griffin/14/による、トランジション近傍でのみ2倍高調波の空洞を励起してフラットなRFバケツを作ろうと言うアイデアである。こうすれば、シンクロトロン振動の運動量変化と位相変化が分離できて、やはり長いバンチ長を維持出来る。実験が予定されている。

従来、ハドロン円形加速器でのトランジション通過は、或意味で加速器物理の草刈場であった。理由は先に述べた様に、粒子ビームがこのトランジション通過の際縦方向位相空間で極端な振舞いをする為、加速器物理上種々興味ある(悩ましい)問題点が頭をもたげる故であった。しかし、世界の大型加速器の主流がレプトン用加速器に移るに従って、流行から遠ざかっていたが、最近FNALの新入射器、BNLの重イオンコライダー、SSCのブースター的设计が進むにつれ、トランジションを対象にする研究活動がいくらかまた盛んになって来たようである。

2-4節 断熱減衰と断熱不変性

仮に、エネルギー増大に併せて、収束用四極磁石を励磁したとしても、線形加速器や円形加速器でのベータートロン振動は厳密に言うと力学系(2.2.1)で記述出来る訳ではない。付録A-1に示したように、軌道座標で書いた加速中の粒子の運動方程式は下に見られるように、いわゆる速度 dx/ds に比例した摩擦項を持つ。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{1}{p} \frac{dp}{ds}\right) \frac{dx}{ds} + K(s)x = 0 \quad (2.4.1)$$

ここで $p (\equiv mc^2 \gamma)$ は s 軸方向の運動量である。調和振動子からの類推からすると、摩擦項の係数が正であれば振動振幅は減衰し振動数が少しづれる。この単純な描像

をもう少し厳密に調べてみよう。(2.4.1)式の摩擦項の係数部を $h(s)$ と置き新しい変数 $\chi (\equiv x \exp[\frac{1}{2} \int^s h(s') ds']) = xp^{1/2}$ を導入すると方程式(2.4.1)は

$$\frac{d^2\chi}{ds^2} + \left[K(s) - \frac{1}{2} h(s) - \frac{1}{4} h^2(s) \right] \chi = 0 \quad (2.4.2)$$

と書くことができる。今、一様加速、 $dp/ds = \text{一定}$ 、を仮定すると(2.4.2)式中の復元力係数は

$$\bar{K}(s) = K(s) + \frac{1}{4} h^2(s) \quad (2.4.3)$$

となり、四極磁場から決まる復元力係数 $K(s)$ からずれる。円形リングの周長を $2\pi R$ そして、1ターン当りの運動量増加を Δp とすると、

$$\frac{1}{2\pi R} \frac{\Delta p}{p_{out}} \leq h(s) \leq \frac{1}{2\pi R} \frac{\Delta p}{p_{in}} \quad (2.4.4)$$

ここで、 p_{in} 、 p_{out} はそれぞれ入射時とフラットトップでの運動量である。例えば、FNAL主リングの場合だと、 $c\Delta p = 2\text{MeV}$ 、 $cp_{in} = 8\text{GeV}$ 、 $2\pi R = 6000\text{m}$ であるから、 $h(s) \leq 4 \times 10^{-8} \text{m}^{-1}$ 程度である。一方 $|K(s)| = |B'/B\rho| \sim 7 \times 10^{-3} \text{m}^{-2}$ であるから、(2.4.3)式中の補正項は $K(s)$ に比して極めて小さいと言える。この補正項はいわゆる勾配エラーとみなせるから、付録A-4の公式にこの項を代入すればチューンシフトを求める事ができる。ベータ関数の平均値が非摂動ベータートロン振動数 ν を使って近似的に R/ν (付録A-2の(A.2.11)において $\rho^2(s) = \beta$ とおけば得られる。)で書ける事を使えば、

$$\Delta\nu = \frac{1}{32\pi^2\nu} \left(\frac{\Delta p}{p_{in}} \right)^2 \quad (2.4.5)$$

得る。 $\nu \sim 20$ から、 $\Delta\nu/\nu \sim 4.5 \times 10^{-3}$ であり、全く問題にならない位小さい値である。かくして、前節までのベータートロン振動に関する議論をそのままここに採用すると、粒子の振動振幅は運動量増大に伴い次の式に従って減衰していく事を知る。

$$x(s) = \frac{\chi(s)}{\sqrt{p}} \quad (2.4.6)$$

これが、いわゆる断熱減衰である。シンクロトロン振動についても、ほぼこれと同じ理屈で減衰が起きる。これについては読者の演習として残して置こう。

断熱減衰においては運動方程式の摩擦項が本質的役割を担ったのに対し、断熱不変性は系を構成するパラメータのゆっくりした時間変化に対する系の応答特性を指すものである。古典力学でこの80年来、断熱不変性について最も良く研究されて来たのは1次元調和振動子であった事は言うまでも無い。この力学系の作用変数が断熱不変量である事が75年前に証明されている。つまり、復元力係数が $t = -\infty$ から $t = +\infty$ に亙る値から異なる値へゆっくり変化する時、エネルギーを振動数で除した量、 $E(t)/\omega(t)$ 、が不変である事を我々は知っている。この量が即ち作用変数であり、作用積分なのである。

しかし、ここで注意しなくてはならないのは、加速器物理において実際興味ある系は、 $t = -\infty$ から $t = +\infty$ まで無限にゆっくり変化して行くなどと言う様な古典力学の演習問題に見るようなケースではない。実際は、パラメータの変化は可能な限り速く、だが系の断熱不変性は出来るだけ維持したいというのが、応用者の立場である。このパラメータ変化の速さと断熱不変性との関係を明瞭にする努力が1950年代後半から1970年代初頭にかけてプラズマ物理分野で為されて来た。それらの結果は、まだ十分に断熱的である領域の作用変数の増大に対する漸近式を一般的に求めるものか、或は準断熱的領域を含めてこの増大を、極めて特殊なケースについて解析的に求めるものであった。それらの各々を紹介するに十分な紙面は無いので参考文献/1/ をあげるにとどめる。この節では、非断熱、準断熱、断熱領域の区別なく統一的に作用変数の増大を解析的に求める方法を紹介します、実用上極めて有用で一般的な例を解説する。

例によって、振動数が時間の関数である1次元調和振動子からスタートしよう。質量は正規化したと仮定する。このような力学系は以下のハミルトニアンで書ける。

$$H(x, p; t) = \frac{1}{2} [p^2 + \omega^2(t)x^2] \quad (2.4.7)$$

そこで、次のような問題設定が可能である。“振動数が有限な時間間隔 τ で、或一定値 ω_1 から他の一定値 ω_2 まで図2.8に見られる様なめらかに変化した時、作用変数の増大は τ や $\omega(t)$ のルートどう依存するか？”この問いに解答を与えてみよう。 $\omega(t)$ の変化する以前、 $t < t_1$ 、において2-2節で導入した不変量が正確に系(2.4.7)の作用変数である事は殆ど自明である。我々は、調和振動子の作用変数と角変数(J, ϕ)と正準変数(x, p)との関係

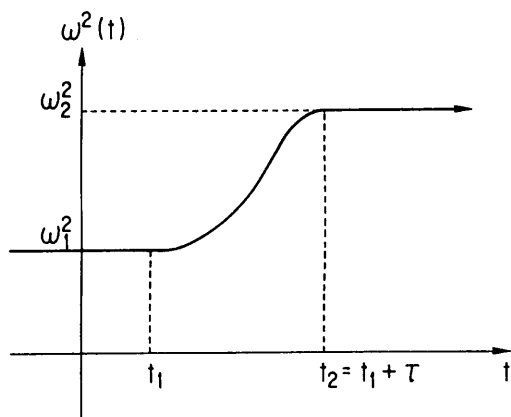


図2.8 時間の関数としての角周波 $\omega(t)$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2J/\omega} \sin\phi \\ p = \sqrt{2\omega J} \cos\phi \end{cases} \quad (2.4.8)$$

を知っている。 $t < t_1$ で $\beta(t) = 1/\omega_1$ であるから、

$$\begin{aligned} I &= \frac{\omega_1}{2} \left(x^2 + \frac{p^2}{\omega_1^2} \right) \\ &= \frac{\omega_1}{2} \left(\sqrt{\frac{2J}{\omega_1}} \sin\phi \right)^2 + \frac{1}{2\omega_1} \left(\sqrt{2\omega_1 J} \cos\phi \right)^2 \\ &= J \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

ここで、 $t < t_1$ において作用変数 $J = I_0$ を持った粒子を位相空間上に仮定しよう。これらの粒子は直立した楕円上にある。この楕円の長軸短軸の比 b/a は ω_1 であり、面積は $2\pi I_0$ である。2-3節で述べた様に、 $I = I_0$ で定まった楕円上の点は時間の遷移に伴って、この楕円から決して離れることはない。この性質が、力学系(2.4.7)の断熱性を定量的に計算する上で実に旨い特性である事が後で解る。 $t = t_1 + \tau = t_2$ で $\omega(t)$ の変化が終了し一定値 ω_2 になってもCourant-Snyderの楕円は動き続けるだろう。なぜなら、 $t = t_2$ において楕円の形状を決める $(\beta(t_2), \dot{\beta}(t_2))$ が $(1/\omega_2, 0)$ にピッタリ一致する保証は何も無い。幸いに、 $t > t_2$ での $\beta(t)$ の挙動は、補助方程式の解析解より知ることが出来る。

$$\begin{cases} \beta(t) = \sqrt{A^2 + B^2 + 1/\omega_2^2} + A \cos[2\omega_2(t - t_2)] \\ \quad + B \sin[2\omega_2(t - t_2)] \\ \dot{\beta}(t) = 2\omega_2 [-A \sin[2\omega_2(t - t_2)] + B \cos[2\omega_2(t - t_2)]] \end{cases} \quad (2.4.10)$$

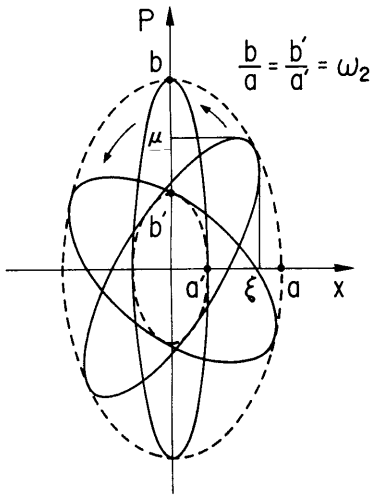


図2.9 タンプリングするCourant-Snyderの楕円

と書ける。また、 $t > t_2$ で位相平面上をタンプリングするCourant-Snyder楕円（図2.9参照）のx軸とp軸方向の上界は

$$\begin{cases} \xi(t) = \sqrt{2I_0\beta(t)} \\ \mu(t) = \sqrt{2I_0\gamma(t)} \end{cases} \quad \left(\gamma(t) \equiv \frac{1 + \beta^2(t)}{\beta(t)} \right) \quad (2.4.11)$$

と書けるから、この楕円の外接円の面積Sは

$$S = \pi \xi(t)_{\max} \cdot \mu(t)_{\max} \quad (2.4.12)$$

とあらわせる。そこで、断熱不変性計量の尺度として、断熱比を $R = S/S_0$ によって定義しよう。即ち、

$$R = [\text{Max}\beta(t) \cdot \text{Max}\gamma(t)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.13)$$

このRを別な言い方をするとこうなる。即ち、 $t < t_1$ において等しく作用変数 I_0 を持った粒子の内、振動数の変化の後、作用変数の最大の変化幅を引き起こした粒子の、変化前と変化後での作用変数の値の比そのものである。(2.4.13)式から、我々の必要とするものは $\text{Max}\beta(t)$ と $\text{Max}\gamma(t)$ であることはすぐ解る。これらは(2.4.10)式から容易に得られ、

$$\begin{cases} \text{Max}\beta(t) = (A^2 + B^2 + 1/\omega_2^2)^{\frac{1}{2}} + (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{Max}\gamma(t) = 1/\left[(A^2 + B^2 + 1/\omega_2^2)^{\frac{1}{2}} - (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} \right] \end{cases} \quad (2.4.14)$$

(2.4.14)を(2.4.13)に代入すれば、

$$R = [\omega_2^2(A^2 + B^2) + 1]^{\frac{1}{2}} + [\omega_2^2(A^2 + B^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.15)$$

を得る。ここでAとBは $t = t_2$ における補助方程式

$$\rho + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3} \quad (\rho^2 \equiv \beta)$$

の境界条件

$$\begin{cases} \beta(t_2) = (A^2 + B^2 + 1/\omega_2^2)^{\frac{1}{2}} + A \\ \dot{\beta}(t_2) = 2\omega_2 B \end{cases} \quad (2.4.16)$$

から求まる。かくして、断熱比は形式的に

$$R = X + (X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.17)$$

ここで

$$X = \frac{\omega_2}{2} \left[\beta(t_2) + \frac{\dot{\beta}^2(t_2)}{4\omega_2^2\beta(t_2)} + \frac{1}{\omega_2^2\beta(t_2)} \right] \quad (2.4.18)$$

と書くことができる。実際に、このRを ω_1 、 ω_2 、 τ の関数として求める為には、 ω の遷移する区間における補助方程式を解き、 $t = t_2$ での値 ($\beta(t_2)$, $\dot{\beta}(t_2)$) を求めれば、全てが解る。

Courant-Snyder楕円の外接円を観測する事によって、断熱性を計量出来ると言うアイデアは、始めSymon(1970)/2/ によって提案された。残念ながら、ここまでは一種の形式論である。 $(\beta(t_2), \dot{\beta}(t_2))$ の具体的形が解らねば、これ以上先に進まない。任意の形をした $\omega(t)$ を持つ補助方程式を解析的に解くことは殆ど絶望的である。しかし、計算機でこの非線形ではあるが、2階の微分方程式を解くのに大した苦労は無い。 ω_1 、 ω_2 、 τ 等のパラメーター依存性が明瞭ではないにしても、バカチョンである。しかし人間余りバカチョンに浸り続けていると、脳細胞の一部退化は避けられない。この退化防止の為、一つの典型的な $\omega(t)$ の表式が提案された/3/。

$\omega(t)$ の一つの典型は

$$\omega^2(t) = \frac{\nu^2}{4} \left[1 + \frac{\lambda(1-G^2)}{(1+G\cos\nu t)^2} \right] \quad (|G| < 1) \quad (2.4.19)$$

ここで、

$$\lambda = \left\{ \left[(2\omega_1/\nu)^2 - 1 \right] \left[(2\omega_2/\nu)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$G = \frac{\lambda + 1 - (2\omega_1/\nu)^2}{\lambda - 1 + (2\omega_1/\nu)^2}$$

である。図2.8との対応で言えば、 $\tau = \pi/\nu$ であり、便宜の為 $t_1 = 0$ とおいている。明かに境界条件

$$\begin{cases} \omega^2(0) = \omega_1^2 \\ \omega^2(\pi/\nu) = \omega_2^2 \\ \dot{\omega}(0) = \dot{\omega}(\pi/\nu) = 0 \end{cases}$$

を満たし、 $0 \leq t \leq \pi/\nu$ において連続である。もし復元力係数 $K(s) = \omega^2(s)$ と置けば、2-1節で示した解析解の知られたHill方程式そのものとなる。その1次独立解は

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = (1 + G \cos \nu t)^{\frac{1}{2}} \times \begin{cases} \sin\left(\frac{\sqrt{1+\lambda}}{2} \theta(t)\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{1+\lambda}}{2} \theta(t)\right) \end{cases} \quad (2.4.20)$$

$$\sin \theta(t) = (1 - G^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\nu t)}{1 + G \cos(\nu t)}$$

として知られている。又、補助方程式の解は

$$\beta(t) = c_1 x_1^2(t) + c_2 x_2^2(t) + 2\sqrt{c_1 c_2 - 1/W^2} x_1(t) x_2(t) \quad (2.4.21)$$

と書ける事を知っているから、(2.4.20)を(2.4.21)に代入すれば、補助関数 $\beta(t)$ の解析的表現を得ることができる。任意定数 c_1 と c_2 は境界条件 $\beta(0) = 1/\omega_1^2$ と $\dot{\beta}(0) = 0$ によって決まる。以上の結果より、 $t = \pi/\nu$ での補助関数の値は

$$\begin{cases} \beta(\pi/\nu) = \frac{4\omega_1}{\nu^2(1+\lambda)} \sin^2 \frac{\sqrt{1+\lambda}}{2} \pi \\ \quad + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{1-G}{1+G} \right) \cos^2 \frac{\sqrt{1+\lambda}}{2} \pi \\ \dot{\beta}(\pi/\nu) = \sqrt{1+\lambda} \left[\frac{2\omega_1}{\nu(1+\lambda)} \left(\frac{1-G}{1+G} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ \quad \left. - \frac{\nu}{2\omega_1} \left(\frac{1-G}{1+G} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \sin \sqrt{1+\lambda} \pi \end{cases} \quad (2.4.22)$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{4}{\nu^2} \cdot \frac{\omega_1}{1+\lambda} \cdot \frac{1}{1-G} \\ c_2 = \frac{1}{\omega_1(1+G)} \end{cases}$$

$$W = -\frac{\nu}{2} \sqrt{1+\lambda} \sqrt{1-G^2}$$

として得られる。ここで、最終結果を見やすく、そして更なる応用を考えて、変化前の系の4分の1周期時間で計られた変化時間

$$n = \frac{\pi}{\nu} / \left(\frac{2\pi}{4\omega_1} \right) = \frac{2\omega_1}{\nu} \quad (2.4.23)$$

と振動数のマルチプリケーション係数

$$k = \omega_2/\omega_1 \quad (2.4.24)$$

を導入すると、

$$\lambda = [(n^2 - 1)(n^2 k^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}$$

$$G = \frac{\lambda + 1 - n^2}{\lambda - 1 + n^2}$$

となり、(2.4.18)式のXは

$$X = \frac{1}{2} \left[D_1 + \frac{D_2}{4D_1} + \frac{1}{D_1} \right] \quad (2.4.25)$$

そこで、

$$D_1 = \omega_2 \beta(\pi/\nu) = k \left[\frac{n^2}{1+\lambda} \sin^2 \frac{\sqrt{1+\lambda}}{2} \pi \right. \\ \left. + \frac{n^2 - 1}{\lambda} \cos^2 \frac{\sqrt{1+\lambda}}{2} \pi \right] \quad (2.4.26)$$

$$D_2 = \dot{\beta}^2(\pi/\nu) = (1+\lambda) \left[\frac{n^2 \lambda}{(1+\lambda)^2 (n^2 - 1)} \right. \\ \left. + \frac{n^2 - 1}{n^2 \lambda} - \frac{2}{1+\lambda} \right] \sin^2 \sqrt{1+\lambda} \pi \quad (2.4.27)$$

n と k のみの関数として書き下せる。

これで一応完全に道具は揃った。先ず、断熱定理(断熱不変性)を証明しよう。変化前の系の振動周期に比して無限に長い時間間隔で $\omega(t)$ を変化させると言うことは、(2.4.23)式によって $n \rightarrow \infty$ を意味する。 k を一定値とすると、(2.4.26)、(2.4.27)式より、 $D_1 \rightarrow 1$ 、 $D_2 \rightarrow 0$ となるので、 X は1に近づく。従って、 $n \rightarrow \infty$ の極限において、明かに $R = X + (X^2 - 1)^{1/2} = 1$ である事が証明できた。これが断熱領域の極限である。それでは、非断熱、

準断熱、断熱領域に全部を見る為に、 $k = \text{一定値}$ について、 n の関数として断熱比 R を図2.10に示す。 $n = 2$ 即ち、変化前の振動の半周期の時間間隔で $\omega(t)$ を変化させるケースを境に、断熱比の振舞いはドラスチックに変わる。 $n < 2$ で完全に非断熱域、 $2 < n < 6$ 当りを準断熱域、 $n > 10$ を断熱域と実際上区分できるかもしれない。

もう一つの興味ある問題は、変化の時間間隔を一定にした場合、周波数マルチプリケーション係数の関数として、断熱比はどう変わるだろうか？ 今、 $n = 4$ （ほぼ準断熱域に対応）に固定して断熱比 R を k の関数として図2.11に示す。 $k > 20$ で断熱比は殆ど一定値（3%）になる。即ち、或程度十分な変化時間を取れば振動数の振動数の変化の大きさに関係なく一定値に近付くことを意味する。これは一見驚きの様に思うかもしれないが、周波数が大きくなればそれに従って、変化時間は相対的に伸びるのであるから、この結果は定性的にも納得がいく。

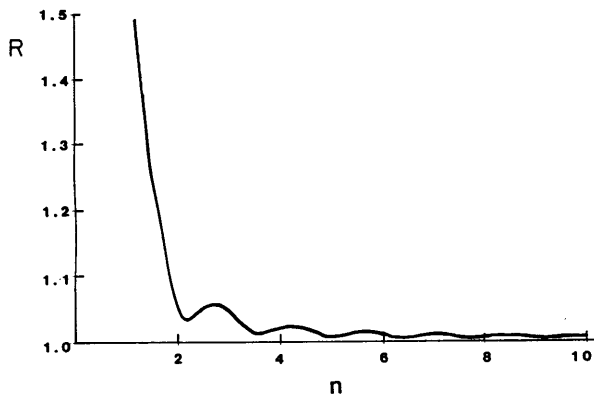


図2.10 断熱比 R

(振動数マルチプリケーション係数 $k = 2$ の場合)
 $n = 4$ は変化前の一周周期長 $2\pi/\omega_1$ に対応する

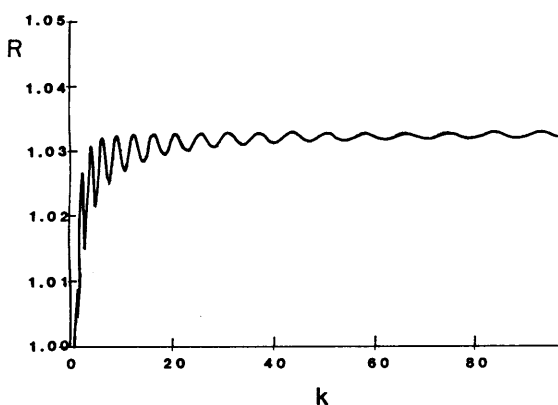


図2.11 断熱比 R ($n = 4$ の場合)

以上の結果は、力学系(2.4.7)の一般的考察から導かれた。加速器物理への応用として、ビームバンチ形状をRF電圧のコントロールで制御するケースを考えてみよう。定常バケツに保持されているハドロンバンチに対して、コヒーレントな外乱を加えることなく、出来るだけ短時間に、望むバンチ長に伸ばしたり、縮めたりする事がある。これを、通常RF Gymnasticsと呼ぶが、このようなバンチコントロールに、この節の理論的考察がそのまま利用し得る。小さい振動振幅のシンクロトロン振動が調和振動子の力学系と等価であることは、前節でみてきた通りである。シンクロトロン振動数 ω_s は加速電圧の V の平方根に比例する。そしてバンチ長が $V^{-1/2}$ でスケールする事は知っている。欲するバンチ長から、振動数マルチプリケーション係数 k が決まるから、後は許容し得る断熱比との兼ね合で、最短のRF電圧操作時間を求める事が可能である。先の断熱比に対する解析の結果から、この操作時間として、操作前、或は操作後予測されるシンクロトロン振動の半周期の内、長い方を取れば、実際上問題になる様な四極振動やそれに連なる縦方向エミッタンスの増大は避け得ると、結論する。

2-5節 エピローグ

以上、線形粒子ビーム力学の依って立つ物理的及び数学的背景を、復元力係数が時間の関数である調和振動子の力学として、統一的に論じて来た。モデルが非常に単純である分、この力学系が持つ不変量や補助関数に代表される特徴は極めて一般的であることが理解されたと思う。一般的であると言うことは、他に应用出来ると言う事であり、読者の活用を期待する。

円形加速器を論ずる時欠かせないのが、Closed Orbit Distortion、平衡軌道、ベクター関数のDistortion、クロマティシティー、磁場勾配誤差によるチューンシフト等の概念である。これらはまとめて摂動線形ベクターロン振動の各側面と言え。摂動の原因によって、振動中心の遷移を引き起こすものと、振動数のずれを誘起するものとに分類出来る。たとえば、地球の重力の影響は前者の範疇に入る。加速器中の粒子が何故重力に引っ張られて、真空パイプの底面まで落下しないかと言う問いの回答もここにある。この摂動の影響に依って、どの程度線形ベクターロン運動が歪むのかは、具体的に表現してみないと解らない。非摂動線形ベクターロン運動を理解した上で、これを求めるのは実に月並みな事である。付録A-4に、各々の解析的表現を演繹をふくめて示しておいた。2章で使った数学以上は何も使っていない。参照無しに読める筈である。

2章の内容を理解しても、加速器設計にすぐ取り掛かれるわけではない。加速器設計にはそれなりの処方箋がある。円形加速器といっても、固定標的用シンクロトロン、コライダー (e⁺e⁻、e-p、pp) シンクロトロン輻射用蓄積リング、蓄積リング、エミッタンス減衰用リング等がある。加速器のタイプによって、その処方箋も違う。設計では、これらリングの用途に応じた理想的なベータートロン関数、運動量分散関数を持つよう、B、F、D、Oの組合せを捜すわけである。これをラッティスデザインと呼ぶ。線形ラッティスが決まると、粒子の運動量差に起因する収束力の差を補正するクロマティシティ補正と呼ばれる次の設計段階を迎える。そこでは、適当な六極磁石の配列を決めてやらねばならない。この時、六極磁石の配列と強さに依っては、六極磁場に依って引き起こされる非線形力の為、非線形ベータートロン運動から決まるダイナミックアパチャー (ビームが安定に周回する事のできるスペース) が狭くなり、粒子ビームの蓄積寿命との兼ね合いで、線形ラッティスを見直す事もある。

何れにしろ、ラッティスの設計には、或程度のガイドラインはあるわけだから、ラッティス設計の入門書で先ず、know-howを知る事から始めるのが良いと筆者は考える。加速器の機能に応じて異なる部分が、正に設計者の腕の見せどころなのだろう。時代の変遷と共に、要求される加速器は異なってきた。もはや高エネルギー物理先進国で大型の固定標的用シンクロトロンやe⁺e⁻、ppコライダーを設計する機会は今も余り無いかもしれない。将来、或程度の普及が見込めるのは、医療用シンクロトロンとシンクロトロン輻射用蓄積リングの二種類ぐらいだろう。その意味では、この二つのタイプの加速器の設計処方箋を書くのは、役立つのかもしれない。

設計入門書としては、T. CollinsのUS加速器サマースクール(1982)、P. J. BryantのCERN加速器スクール(1989)、鎌田(1985)、野田(1989)、大見(1991)の高エネルギー加速器セミナーの講義ノート等/1/がある。筆頭者名は、CollinsインサクションやCollins Q、で固有名詞として使われているから、知る人も多いだろう。彼はラッティス設計の玄人であった。彼がラッティス設計に当たって、手持ちの電卓以上の物を使うところを見た事がない。明確な設計方針と長年培ってきた勘が為せるわざなのだろう。例えば、FNAL蓄積リング設計の際、彼の与えた概念設計 (と言うより、手計算による詳細設計と呼ぶべきかもしれない) を、今SSCの衝突リングラッティス設計責任者であるD. Johnsonが既存の計算機コードを使って、これを追認、補完すると言った具合でリングの設計は完了した。特に、六極磁場の第2次効果まで手計算でやったのには驚いた。この辺りの行

察は当時身近にいた安東の論文(1984)/2/に詳しい。周辺の人々が彼に、退職する前に加速器設計の教科書を書くよう強く勧めたが、結局活字になったのは上記US加速器サマースクールの講義録のメモランダムだけであり、我々としては残念な事である。今ごろ、本人はカナダの自然の中で悠々自適の生活を送っていることだろう。

第3章 高密度粒子ビーム力学の基礎

前章の議論とは一転して、この章では単一粒子力学で取り扱えない高密度粒子ビームを論じる。即ち、そこでは粒子ビーム自身の空間電荷効果が粒子一個の挙動を全面的に支配してしまう。一般に、空間電荷の電場による反発力は、粒子ビームに伴う磁場のピンチ力で相殺される。相殺の程度は電流に比例し、エネルギーの逆自乗に比例する。従って、粒子ビームのエネルギーが小さい時、生成と初期加速の段階では、優勢なる電場による反発力がビームの空間的挙動を大きく左右する。高エネルギー加速器においても、この空間電荷効果は残るが、ビーム電流が今稼働している加速器程度であれば、あくまでベータートロン振動とシンクロトロン振動に対する摂動である。単一粒子力学が大幅に変更される事は無い。この章では、特に低エネルギー、高密度という極端に空間電荷効果優勢な粒子ビームの物理をトピック的に解説しよう。

この様な高密度粒子ビームへの関心はプラズマ核融合やその他限られた分野では、かなり以前からあった。しかし、現在の加速器物理の対象となる様なビームの加速法の確立には、強収れん原理の第一発見者であるChristofilosの力に負うところが大きかった。BNLから1950年代の終わり頃、ローレンスリバモア研究所へ移った彼は、線形ベータートロン加速器の開発を手掛け、1967年に初めてAstronと名付けられた線形誘導加速器を用いて、0.5kAの電子ビームを4MeVまで加速する事に成功した/1/。彼のアイデアはさまざまな技術的改良を重ね、Advanced Test Accelerator (ATA) と呼ばれる、7kAの電子ビームを50MeVまで加速し得る誘導加速器に結実した/2/。ビームのエネルギーと電流値の積、ビームパワーと言う尺度で計ると、この加速器は350GWのピークビームパワーを産みだし得る。KEK 2.5GeV linacの持つ能力が約25GW(10A×2.5GV)と比較すると、如何にそれが大きなビームパワーであるかが理解出来るであろう。ビームパワーはビーム電流に比例する。kAオーダーの電子ビームをRF Linacで加速するのは難しい。誘導加速方式が利用できるだけである。残念ながら、この講義では誘導加速器を解説するのが目的ではないので、本論では触れな

い。参考文献/3/ を挙げておくので興味ある読者は参照されたい。

今、荷電粒子を用いた慣性核融合、自由電子レーザー、その他マイクロ波発生装置の駆動ビームとして、このような大強度電子ビームの利用が考えられている。用途によって、必要な最終エネルギー、パルス幅、繰り返し等は異なる。しかし、可能な限り大電流である事を期待するのは共通する。このような大電流をどこで発生させるかと言えば、もちろん電子銃のカソード上である。そして電子を取り出す。繰り返しは50Hz以下であれば、通称コールドカソードと呼ばれる、安直なカソードが利用出来る。ちなみにKEKマイクロ波FELの入射器では、ベルベットカソードを用いて200A/cm²程度の電流密度が得られている。これ以上の繰り返しが要求される時は熱陰極にせざるおえない。パルスクライストロンのカソード等が候補になるが、得られる電流密度が10A/cm²と小さいので、面積で稼ぐ事になる。最近、LaB6を用いた熱陰極で50A/cm²程度の電流密度が得られると言う報告がなされている。

原理的には、得られるビーム電流値はカソード表面の状態、ダイオード電圧、ダイオード部の空間的構造によって決まる。付加されたダイオード電圧電場によって引き出された電子雲の電荷に起因する電場がカソード表面上のダイオード電圧による電場を相殺してしまうと、それ以上の電子の引出しは起こらない。ビーム電流に限界があり、飽和電流以上は取り出せない。十分な電子の供給が保証されれば、ダイオードは定常的にこの飽和電流で動作すると考えて良い。これが空間電荷制限と呼ばれる現象である。以下3-1節でもう少し、数式を用いてこの現象を論じ、得られる電流とダイオード電圧の関係をはっきりさせる。

取り出された電子ビームをガイドするのが次の作業であるが、低密度ビームの場合なら、いっきにRF加速してFODOチャンネルで望む様なビームガイドングが可能である。しかし、今議論している高密度粒子ビームの場合は非線形の強い発散力がビーム進行軸に沿って、連続的に分布しているのと等価である。しかも、それが外場でないのでスタティックではない。粒子ビームの密度分布の変化に併せて変わっていく。古典力学と電磁気学を一步も出ないとは言え、このようなビームの伝播を最後まで取り扱う自己完結した理論は無い。従って、かなりプリミティブな形でのビームの運動方程式を計算機によって解き、その挙動を予測しビームトランスポート系の設計をするのが一般的である。但し、ビームの粒子分布をかなり理想化して、より解析的に取り扱う工夫が為されてきているが、ビーム挙動の質的理解には役だっても、実用上前者と比肩するまでには到っていない。

高密度粒子ビームのガイドングには種々のアイデアが試みられた。四極磁石とソレノイドチャンネルが比較的ポピュラーである。ビーム進行軸に沿って、途切れる事無く、ヘリカル四極磁石やソレノイド磁石を列べる事は実際上不可能なので不連続収束系でのマッチングが重要な設計ポイントになる。ATAは全長100mに列べられた各加速ユニットにソレノイドが組み込まれた周期的ソレノイド収束系で構成されている。又ビームの伝播する軸に細いワイヤーを張り、これに高圧を印加し、発生するE_r電場で連続的にビームを収束させる試みもなされ、一定の成果を上げた/4/。ワイヤーとの衝突によるビームロスは不可避であり、以後日常的に使用されていると言う話は聞かない。3-2節で少し詳細に紹介するのが、上記二つの収束方式の長所を取り込んだイオンチャンネル収束/5/である。ここでは、ソレノイド収束の非破壊性、ワイヤー収束の連続性が、その長所として強調される。原理は非常に簡単である(図3.1参照)。まず、ビームトランスポート用真空容器を薄い(ビームエネルギーによるが、kAオーダーのビーム電流では $\sim 10^{-4}$ Torr)UV光でイオン化され易いガスで満たす。電子ビームの到来に先だって、ビーム軸上にレーザー光を照射しプラズマチャンネルを作る。プラズマ密度はガス密度とレーザー強度調整で独立に制御可能である。プラズマチャンネルのサイズはレーザー光のスポットサイズを調整することによって自由に得られる。再結合やイオン拡散時間(μ sec)より十分早く、電子ビームをこのプラズマチャンネルへ入射させると、電子ビームのHead部(nsec)の空間電荷の創る電場によって、プラズマ電子は真空容器の壁まで飛ばされ消失する。即ち、プラズマチャンネルはイオンチャンネルに転化してしまう。残る正電荷のイオンチャンネルによって電子ビームのHead部以下はガイドされる。Head部は収束力が十分でないので、伝播と共に広がっていく。長距離伝播後ビームの形状は一種のランペット状になる。しかし、パルス長がhead部に比して十分長く、イオン拡散時間に比して十分短ければ、大部分のビームは期待されるビームサイズを維持しながら伝播される。

この収束方式は、ある意味で使い捨て収束と言えるかもしれない。消費されるのはガスとレーザーである。この収束方式の距離的限界はレーザー光の強度と発散に依って一意に決まる。現在、市販されているエキシマレーザーを用いた場合、200~300mの伝播は可能かもしれない。もちろん、偏向磁石で電子ビームのパスを変えて、別のレーザー光を用いれば、続けてイオンチャンネルガイドングは可能である。ATAでは100mの誘導加速器内の伝播に、このイオンチャンネルを用いた。又、KEKマイクロ波FELでは誘導加速器からウイグラーを通し

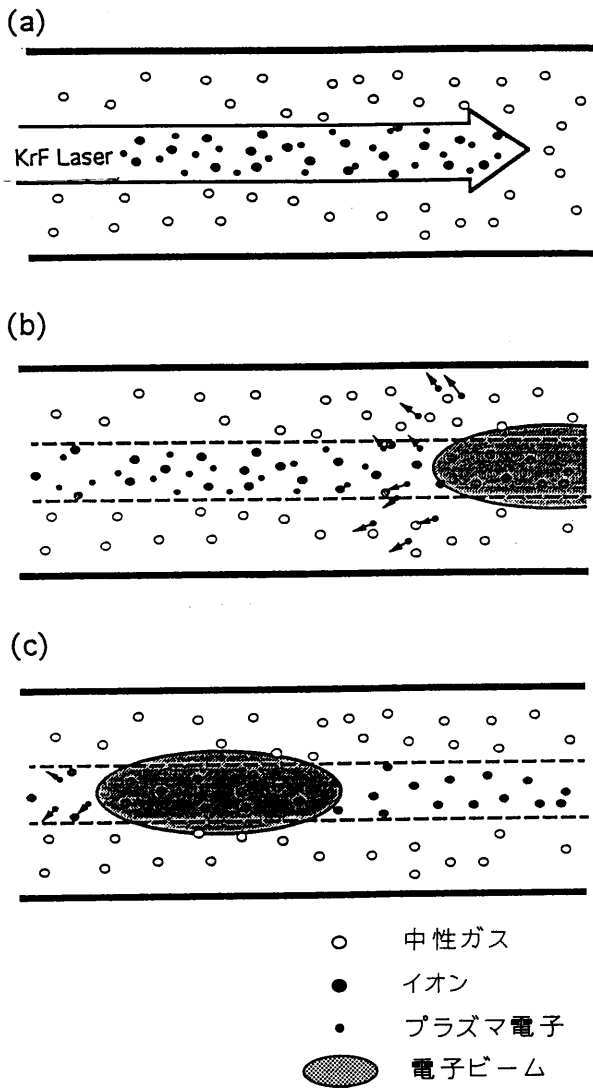


図3.1 イオンチャンネルの形成

- (a) KrFレーザー光で中性ガスをイオン化する。
- (b) 入射した電子ビームがプラズマ電子をラッセスする。
- (c) 電子ビームの下流にはイオンチャンネルが残る。

て、日常的に約8mのビームトランスポートをイオンチャンネルガイディングに頼っている/6/。イオンチャンネルガイドのFELは世界で初めての試みであり/7/、日常的使用と言うのも、おそらく世界でKEKだけだと思う。ここでの経験を踏まえて、イオンチャンネルガイディングの背景を加速器物理的視点で3-2節に解説する。

イオンチャンネルが高密度電子ビームのガイディング法として魅力的なのは、その安直さだけではない。真空容器内のガス濃度が一様であれば、イオンチャンネルのイオン密度はレーザービームの強度分布で決まる。そ

れが、もしガウス分布のごときのものであれば、イオンチャンネルもそれに習う。その様なイオンチャンネルで電子ビームは非線形の収束力を受ける。従って、粒子のベータートロン振動数はその振動振幅に依存する。即ち、粒子ビームのベータートロン振動数に一定の拡がりが生じる。その様な系は横方向のコヒーレントな振動が生じても、いわゆるLandau減衰によって、コヒーレント振動が成長しない事が知られている。不連続な非線形要素の存在は、非線形共鳴現象の恐れが付きまとうが、連続系での非線形収束は単一粒子の運動に何の不安もない。常にベータートロン振動数に拡がりを誘起し、耐コヒーレント不安定性が増す。我々はイオンチャンネルガイディングにその様な利点を見いだしている。

最後の節(3-3節)に高密度電子ビームの加速やトランスポートに常に付きまとう、ビームブレークアップや壁抵抗不安定等のコヒーレント不安定性を簡単に解説する。上記した非線形ガイディングの有為さ等、その対策について少し数式を使って議論する。

3-1節 空間電荷制限電流

電子ビームパワーを電磁波の様な何か他のエネルギーに変換する時、変換されるエネルギーがビームパワー以上でない事はエネルギー保存則から当然である。ビームパワーは先に述べた様にビーム電流(I)とビーム電圧(V)の積、 $I \times V$ である。電磁波の増幅を例に取れば、変換パワーは $I \times \Delta V$ で書ける。 ΔV は増幅装置を通過した後のビーム電圧の減少分であり、ビーム側から見た変換デバイスのインピーダンスZを用いれば、 $\Delta V = Z \cdot I$ で表わせる。すると、増幅パワーは $P \propto Z I^2$ と書け、ビーム電流の2乗に比例する。インピーダンスZは増幅装置における電子ビームと環境との相互作用のタイプで異なる。即ち、Slow Wave StructureかFast Wave Structureか、或いはカップルさせる電磁波のモードによっても異なる。それが何んであれ、可能な限り大パワーを産み出したい時、ビーム電流を増す事が一番効率的である。この様な理由から、大強度電流の生成とその伝播に興味注がれる。

通常RFライナック電子銃のダイオード電圧は大概100kV程度と余り高くない。従ってダイオードを出て行く電子ビームはまだ十分に相対論的スピードに達していない。一方、高密度電子ビーム発生用の誘導加速方式電子銃では、カソード・アノード間に誘導電圧を容易に重畳出来るという理由で、1MV以上のダイオード電圧も珍しくない/1/。得られる電子ビームは、すでに十分相対論的域に達している。この外にマルクスゼネレーター等

で発生した高圧をブルームラインと呼ばれるパルスフォームラインで整形してダイオードに印加するタイプの電子銃では15MV近くに達する物もあるが、繰り返し等の問題で、我々加速器社会のニーズに答える様な代物ではないので、以下の議論では簡単に触れるにとどめる。

この様な相対論的電子銃で得られビーム電流値にも制限がある。それはこの節を始める前に指摘した様に、空間電荷制限によって決まるものである。直観的に考えて、電子ビームの加速が大きければ大きいだけ、進行方向の空間電荷によるバリアーを乗り越え易い様に見える。即ち、制限電流は大きくなるだろうと想像する。この直観をもっと物理的に正しく促え、この制限電流を求めてみよう。もちろんここでは、カソード面からの十分な電子の補給が仮定される。問題を簡単化する為に、図3.2に見る様に、カソード及びアノード面は無限平板とする。アノードポテンシャルをアース、即ち0、そしてカソードポテンシャルは $-V$ に保持されていると仮定する。

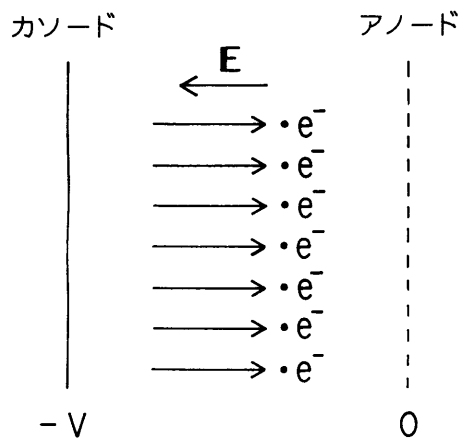


図3.2 平板ダイオードモデル

アノード・カソード間の任意の位置には電子のエネルギー $\gamma(s)$ は、その位置のポテンシャル $\phi(s)$ と次の関係にある。

$$\gamma(s) = \gamma_0 + e\phi(s)/mc^2 \quad (3.1.1)$$

$$\gamma_0 = 1 + \frac{eV}{mc^2} \quad (3.1.2)$$

ポテンシャル $\phi(s)$ は、その位置における粒子密度 $n(s)$ とポアソン方程式によって関係付けられている。

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = \frac{en(s)}{\epsilon_0} \quad (3.1.3)$$

アノード・カソード間で電子が加速されても、電荷保存則から、電流密度

$$i = -en(s)v \quad (3.1.4)$$

が保存する事を知っている。この保存量を使うと(3.1.3)式は、

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{i}{\epsilon_0 v} = -\frac{i}{\epsilon_0 c} (1 - \gamma^{-2})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1.5)$$

に書き換えられる。ここで変数 $y = d\gamma/ds$ を導入すると(3.1.5)式は

$$y \frac{dy}{d\gamma} = K \frac{\gamma}{(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.1.6)$$

ここで

$$K \equiv -\frac{i}{\epsilon_0} \left(\frac{e}{mc^3} \right) \quad (3.1.7)$$

(3.1.6) は積分可能で、

$$y^2 = K(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + c \quad (3.1.8)$$

を得る。cは積分定数。空間電荷制限状態とは、完全に飽和状態にあるわけであるから、カソード表面上での電場は0である。数式で表現すると、

$$E_s(0) = -\frac{d\phi(s)}{ds} = 0 \quad (3.1.9)$$

という事になる。これは

$$y(0) = \frac{d\gamma(0)}{ds} = \frac{e}{mc^2} \frac{d\phi(0)}{ds} = 0 \quad (3.1.10)$$

という具合に、新しい変数に対する初期条件に書き直される。これから、上の積分定数cは0でなければならぬ事を知る。かくして(3.1.8)式の平方根を取り積分を実行して

$$(2K)^{\frac{1}{2}} s = \int_1^\gamma (\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} d\gamma \quad (3.1.11)$$

を得る。かくして、飽和状態に達したビーム電流密度が

(3.1.11)式から求められる。s = d、すなわちアノード面でのパラメーターを用いれば、ただちに制限電流密度 i_{\max}

$$i_{\max} = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{mc^3}{e} \right) \frac{1}{d^2} \left[\int_1^{\gamma_0} (\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} d\gamma \right]^2 \quad (3.1.12)$$

が書き下せる。Alfven電流

$$I_0 = 4\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{mc^2}{e} \right) \approx 17\text{kA}$$

を用いて、更に簡単な

$$i_{\max} = \frac{I_0}{8\pi d^2} \left[\int_1^{\gamma_0} (\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{4}} d\gamma \right]^2$$

となる。積分を実行（付録B-1参照）すると、

$$i_{\max} = \frac{I_0}{8\pi d^2} \left[F(\varphi, 1/\sqrt{2}) - 2E(\varphi, 1/\sqrt{2}) + \frac{2\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}{1 + (\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 \quad (3.1.13)$$

そこで

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{1 - (\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{1 + (\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

F, Eはそれぞれ第1種、第2種不完全楕円積分である。超相対論的極限 ($\gamma_0 \gg 1$) においては

$$\varphi(\gamma_0) \approx \pi, \quad \frac{2\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}{1 + (\gamma_0^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sim 2\gamma_0^{\frac{1}{2}}$$

不完全楕円積分で表わされた部分は完全楕円積分になる事がすぐわかる。

$$\begin{aligned} A &= F(\pi, 1/\sqrt{2}) - 2E(\pi, 1/\sqrt{2}) \\ &= 2 \left[K(1/\sqrt{2}) - 2E(1/\sqrt{2}) \right] \\ &= -\frac{\pi}{K(1/\sqrt{2})} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

ここでLegendreの関係式

$$K(\sqrt{2}) = 2E(1/\sqrt{2}) - K^2(1/\sqrt{2}) = \pi/2$$

を用いた。(3.1.14)において $K(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} [\Gamma(1/4)]^2 \approx 1.85$ であるから、 $A \sim -1.7$ 。これは $2\gamma_0^{\frac{1}{2}}$ に比して無視し得る。

かくして、

$$i_{\max} = \frac{I_0}{2\pi d^2} \gamma_0 \quad (3.1.15)$$

かくして相対論的領域においては、制限電流はダイオード電圧に単純に比例する事が解る。数10MVを印加して得られる100万アンペアオーダーの電子ビームも、この制限則によって決まっている筈である。

一方、弱相対論的領域 $1 \leq \gamma_0 < 2$ ではどうなるであろうか？ (3.1.12)の積分を

$$f(\gamma_0) \approx \int_0^{\gamma_0 - 1} \frac{dx}{(2x)^{\frac{1}{4}}} \quad (x \equiv \gamma - 1)$$

で近似すれば、

$$f(\gamma_0) = 2^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{4}{3} \right) (\gamma_0 - 1)^{\frac{3}{4}}$$

あるいは、

$$f^2(\gamma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{16}{9} \right) \left(\frac{e}{mc^2} \right)^{\frac{3}{2}} V^{\frac{3}{2}} \quad (3.1.16)$$

(3.1.16)を(3.1.12)に代入して、

$$i_{\max} = -\frac{4\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{mc^2}{e} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{d^2}$$

を得る。真空のインピーダンス $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} (= 377\Omega)$ を用いて、

$$\begin{aligned} i_{\max} &= -\frac{8\sqrt{2}\pi}{9} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Z_0^3 I_0 d^2}} \\ &= -2.33 \times 10^{-6} \frac{V^{\frac{3}{2}}}{d^2} \quad (\text{A/m}^2) \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

を得る。これが良く知られているところの、古典的Langmuir-Childの公式である。

ここで、正規化されたダイオードインピーダンス

$$Z_d = \frac{V}{d_{i_{\max}}^2} = \frac{mc^2 (\gamma_0 - 1)}{e d_{i_{\max}}^2}$$

$$= 8\pi Z_A \frac{\gamma_0 - 1}{\Gamma^2(\gamma_0)} = \begin{cases} \frac{9Z_0}{8\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{Z_0}{Z_A}} \frac{1}{(\gamma_0 - 1)^{1/2}} & 1 \leq \gamma_0 < 2 \\ 2\pi Z_A & \gamma_0 \gg 2 \end{cases}$$

$$\left(Z_A = \frac{(mc^2/e)}{I_0} \approx 29.4(\Omega) \right) \quad (3.1.18)$$

を導入する。これを γ_0 の関数として図 3.3 に示す。

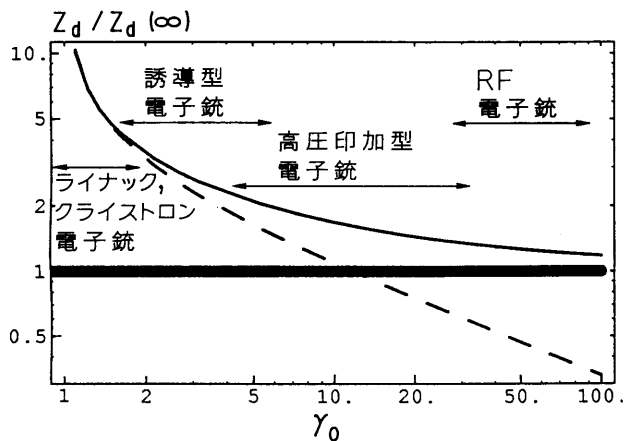


図 3.3 ダイオードインピーダンス Z_d

γ_0 について、 $\gamma_0 \rightarrow 1$ と $\gamma_0 \rightarrow \infty$ の両極限が破線と太い実線で示されている。先に求めた(3.1.17)と(3.1.15)によって与えられる Z_d が各々これに対する現在実績のある各種電子銃の動作領域も併せて示している。一般に高電圧で動作させるダイオードを低インピーダンスダイオードと呼ぶが、この図から一目瞭然である。

Langmuir/2/ が非相対論的な問題設定で(3.1.17)式を導いたのが1923年であった。今からみると、大学院の入学試験に出て来そうな問題であるが、当時として、低圧動作の電子銃しか実験室になかったのであるから、これは当然かもしれない。意外にも、これを相対論的領域に拡張したのがJoryとTrivelpiece(1969)/3/でLangmuirから40年以上経過している。歴史的には、この時代の少し前から、相対論的な電子銃が開発されて来た事実と符号する。

空間電荷制限という概念は、ここで見た電子銃のみで問題となるものではない。もっと一般的である。例えば、

“無限に広がった長さ d というドリフト空間があって、その両端の位置が電位 0 に固定されている時、この空間内を定常的に流れ得る、入口で一定エネルギー γ_0 を持った電子ビームの電流値の限界は何か？”という問いも又成立する。この領域に入射したビームはあるエネルギーまで減速され、その点を越えると加速され出口で再び γ_0 のエネルギーに達すると考えられる。この空間に入る電流値がある値を越えると、入射したビームの一部は入口へ押し戻される事が予想される。これは読者の演習に残すが、簡単なヒントを与えておこう。道具立てはこの節の本論と全く同じであるが、エネルギーに関する初期条件 $\gamma(0) = 0$, $\gamma(d) = \gamma_0$ の代わりに境界条件 $\gamma(0) = \gamma(d) = \gamma_0$ を採用しなくてはならない。

この外にも様々な問題設定が可能であるが、いずれもいわゆる空間電荷存在下でのポテンシャル問題である。形状が複雑になれば、数学的取扱いはたちまち面倒になる。幸い現在ではこの手の問題の解法に“体力”を費やす必要はなくなった。計算機コード/4/の整備で、誰でもその使用に習熟さえすれば、任意の形状でのポテンシャル問題を解く事が出来る。

3-2節 ビーム伝播

ここでは、軸対称なビーム伝播を考える。従って、扱う対象はソレノイド収束系とイオンチャンネルガイドに限る。始めにビームトランスポートを考える上での基本になる方程式を導く。重要な概念を認識しておく為に、ソレノイド収束系を議論する。そして、これに対する代替えとしてのイオンチャンネルガイドに進む。

Paraxial Ray 方程式

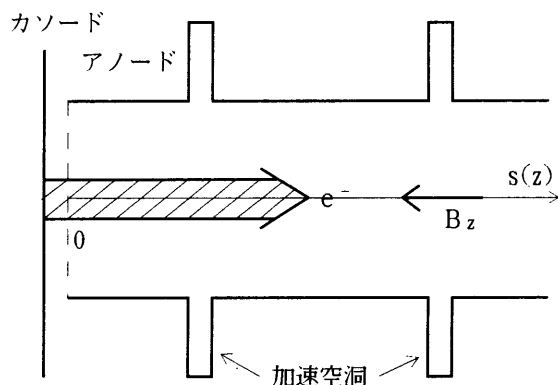


図 3.4 電子ビームと伝播路モデル

プラナーダイオードで生成され、ソレノイド磁場からなる収束系に入射し、途上誘導加速ギャップで加速されて行く電子の運動を考える。この電子が運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ (\mathbf{P} &= m\gamma\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

に従うのは言うまでもない。(3.2.1)の動径方向成分

$$\gamma m v_r + \gamma m \dot{v}_r = -e[E_r + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_r] \quad (3.2.2)$$

と書ける。電子ビーム自身が作る自己場 E_r と B_θ を考慮に入れ、(3.2.2)を電子の動径座標 r の微分方程式に書き直せば、

$$\begin{aligned} r + \frac{\dot{r}}{\gamma} r - \frac{v_\theta^2}{r} &= \frac{-e}{m\gamma} (E_r + v_\theta B_z - v_z B_\theta) \\ \left(\cdot \equiv \frac{d}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

となる。ここで $B_z = B_z(r, z)$ は外場としてのソレノイド磁場である。もしここで、電子ビームの一様分布を過程すると、ガウスとアンペールの法則から、自己場が求まる。即ち、

$$E_r = -\frac{en}{2\epsilon_0} r \quad (3.2.4)$$

$$B_\theta = -\frac{1}{2} \mu_0 enc \beta_z r \quad (3.2.5)$$

ここで n は電子密度であり ($n = \frac{I_B}{\pi a^2 ec \beta_z}$ a : ビーム半径, I_B : ビーム電流) 半径 r 以内に含まれるビーム電流値は $I_r = \pi r^2 enc \beta_z$ で与えられる。この I_r を用いれば、自己場に起因するローレンツ力はより簡単な形

$$\frac{e}{m\gamma} (E_r - v_z B_\theta) = -\frac{eI_r}{2\pi\epsilon_0\gamma^3 c \beta_z} \frac{1}{r} \quad (3.2.6)$$

で与えられる。ビームトランスポート途上に分布する誘導加速ギャップでの加速電場 E_z が、ギャップ近傍で z 依存性を持つ故、低エネルギーの粒子の場合、この z 依存性に由来する動径方向の電場成分

$$E_r(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z(z)}{\partial z} r \quad (3.2.7)$$

を無視し得ない。ここで、(3.2.6)と(3.2.7)を(3.2.3)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} r + \frac{\dot{r}}{\gamma} r - \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{eI_r}{2\pi\epsilon_0 m \gamma^3 c \beta_z} \frac{1}{r} - \frac{eE'_z}{2m\gamma} r + \frac{ev_\theta B_z}{m\gamma} &= 0 \\ \left(\cdot \equiv \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

を得る。

一方、運動方程式(3.2.1)の θ 成分は

$$m(\gamma r \dot{\theta} + 2\gamma \dot{r} \theta + \gamma r \ddot{\theta}) = -e(rB_z - zB_r) \quad (3.2.9)$$

と書かれる。ここで、この式の右辺が粒子半径 r の円を取り囲まれる磁束

$$\Psi(r, z) = \int_0^r 2\pi r B_z(r, z) dr \quad (3.2.10)$$

の時間微分に比例する事が示される。当然、粒子の移動に伴ってこの磁束は変化するので、時間の関数である。先ず Ψ の時間全微分

$$\frac{d\Psi(r, z)}{dt} = r 2\pi r B_z(r, z) + z \int_0^r 2\pi r \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z} dr \quad (3.2.11)$$

と書かれる。ここで磁場に関するガウスの法則

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

を使うと、(3.2.11)は

$$\frac{d\Psi}{dt} = 2\pi r (r B_z - z B_r) \quad (3.2.12)$$

に帰着する。これを(3.2.9)に代入すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma m r^2 \dot{\theta} + \frac{e}{2\pi} \Psi \right) = 0$$

を得、保存量を見出す。即ち、正準角運動量である。もちろんこれは、考えている系が z 軸に対して回転対称性を持つ事の証である。この保存量を P_θ であらわせば、 θ 方向の速度成分 v_θ は、

$$v_\theta = r\dot{\theta} = -\frac{e}{2\pi m\gamma r} \left(\Psi - \frac{2\pi}{e} P_\theta \right) \quad (3.2.13)$$

と書ける。この v_θ を先の動径方向の運動方程式(3.2.8)に導入し、更に独立変数を時間 t から軌道座標 s に変換してやると、

$$\begin{aligned} ds = c\beta_z ds \quad (\beta_z \approx 1), \quad (' \equiv d/ds) \\ r'' + \frac{(\beta_z \gamma)'}{\beta_z \gamma} r' - \frac{(\Psi - \frac{2\pi}{e} P_\theta)^2}{4\pi^2 m^2 c^2 (\beta_z \gamma)^2} \frac{1}{r^3} - \frac{eI_r}{2\pi \epsilon_0 m c^3 (\beta_z \gamma)^3} \frac{1}{r} \\ - \frac{eE'_z}{2m\gamma (\beta_z c)^2} r + \frac{e^2 (\Psi - \frac{2\pi}{e} P_\theta) B_z}{2\pi m^2 c^2 (\beta_z \gamma)^2} \frac{1}{r} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

となる。この方程式は、ある電子のソレノイド磁場中で動径方向の運動を与える方程式に外ならない。粒子分布に大きい変動が無いと仮定すると、この方程式は $r = a$ とおき半径の a の粒子ビームのEnvelopeの軌道発展を示す方程式と看做する事も出来る。

ここでParaxial近似(外場は中心軸の第1次項のみ)を用いるとは、ソレノイド磁場 B_z は r に依存しない。かつ B_r 成分は r の1次関数である。即ち、この近似は、ビームが常にソレノイド中の中心軸近傍にあれば、良い近似と言える。磁束は $\Psi(r, z) = \pi r^2 B_z(s)$ であるから、動径方向の運動方程式は、

$$\begin{aligned} r'' \frac{(\beta_z \gamma)'}{\beta_z \gamma} r' + \frac{e^2 B_z^2}{4m^2 \gamma^2 (c\beta_z)^2} r - \frac{eI_B}{2\pi \epsilon_0 m (c\beta_z \gamma)^3} \frac{r}{a^2} \\ - \frac{eE'_z}{2m\gamma (c\beta_z)^2} r = \frac{P_\theta^2}{m^2 (c\beta_z \gamma)^2} \frac{1}{r^3} \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

省略形、

$$\Omega = \frac{eB_z(s)}{m} \quad : \text{サイクロトロン周波数}$$

$$I_0 = \frac{4\pi \epsilon_0 m c^3}{e} \quad : \text{Alfven電流}$$

を導入すれば、

$$\begin{aligned} r'' + \frac{(\beta_z \gamma)'}{\beta_z \gamma} r' + \frac{1}{c^2 \beta^2} \left(\frac{\Omega}{2\gamma} \right)^2 r - \frac{2}{(\beta \gamma)^3} \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \frac{r}{a^2} \\ - \frac{eE'_z}{2m\gamma (c\beta_z)^2} r = \frac{(P_\theta/m)^2}{(c\beta \gamma)^2} \frac{1}{r^3} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

すっきりした形を取る。

左辺第2項は加速による摩擦項、第3項はソレノイド磁場による収束力で第4項は自己場による発散力、そして右辺の項は遠心力に対応する。先ず $I_B = 0, r'(0) = 0$, かつ加速が無い一番簡単なケースを考えよう。回転速度 $\dot{\theta}(0)$ だけを持って一様磁場中 ($B_s(z) = \text{一定}$) に入射する訳であるから、 $x-y$ 平面上への斜影がサイクロトロン運動である事は容易に想像がつく。確かに(3.2.16)式の解は、2章の議論より

$$\begin{aligned} r^2(s) = \frac{1}{2} \left\{ \left[r^2(0) + \frac{G^2}{\omega^2 r^2(0)} \right] \right. \\ \left. + \left[r^2(0) - \frac{G^2}{\omega^2 r^2(0)} \right] \cos(2\omega s) \right\} \end{aligned}$$

で与えられる。ここで

$$G = \frac{P_\theta}{m c \beta \gamma}, \quad \omega = \frac{1}{c\beta} \left(\frac{\Omega}{2\gamma} \right)$$

一方、 θ 方向の運動は、(3.2.13)式より求まる

$$\dot{\theta} = -\omega + \frac{G}{r^2(s)}$$

に上の $r^2(s)$ を導入し、 s について積分すれば、簡単に得られる。典型的軌跡図3.5に示す。半径 $r(0)$ の位置で θ について一様に分布する粒子列が全く同じ初期条件を持つとすると、ビームのEnvelopeも又 $r(s)$ の式に従って振動する。 $B_z(s)$ が一様でなく、 $2\pi/\omega$ に比して十分ゆっくりと変動する場合(実際ソノイドとソレノイドの切れ目は磁場が弱くなり、一種のミラー磁場になる)も非線型方程式(3.2.16)式の近似解が2変数展開法/1/

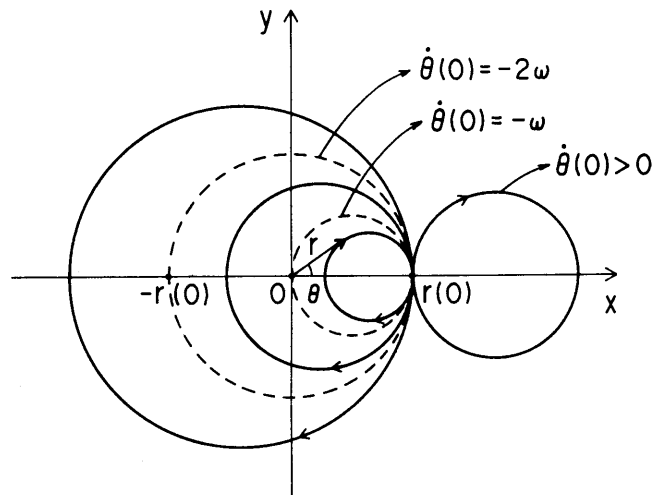


図3.5 投影されたサイクロトロン運動軌跡により見い出せるので下に示す、

$$r^2(s) = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega(0)}{\omega(s)} \right] \left\{ \left[r^2(0) + \frac{G^2}{\omega^2(0)r^2(0)} \right] + \left[r^2(0) - \frac{G^2}{\omega^2(0)r^2(0)} \right] \times \cos \left[2 \int_0^s \omega(s') ds' \right] \right\}$$

すると、x y 平面に斜影したサイクロトロン運動の案内中心 \bar{r} を瞬間的サイクロトロン半径 a_s は上の式を用いて、

$$\bar{r}^2 = \frac{\omega(0)}{\omega(s)} r^2(0)$$

$$a_s^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega(0)}{\omega(s)} \right] \left[r^2(0) - \frac{G^2}{\omega^2(0)r^2(0)} \right]$$

と書き得る。即ち、案内中心は磁力線に沿ってシフトし又回転半径も磁場に依りて変動する事が解る。倉本(1987)/2/は実際の円筒ビーム ($I_B=600A$, $V=150KV$) を用いて、この振る舞いを直接観測した。 $B_z(s)$ のプロフィールを図3.6に示し、3点で得られたビーム断面を示す。 B_z の関数として案内中心 \bar{r} をプロットすると、この理論的予測と概ね一致している。

自己場が無視出来ない場合に戻ろう。もしビーム半径 a の変動が小さい時には、方程式(3.2.16)の解は、やはり第1章で議論して来たEnvelope方程式のそれと同じである。特に、 $B_z(s) = \text{一定}$ であれば、初等関数で書ける解析解を持つ。即ち、下駄をはいた振動解でその振動数は、

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{1}{c^2 \beta^2} \left(\frac{\Omega}{2\gamma} \right)^2 - \frac{2}{(\beta\gamma)^3} \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \frac{1}{a^2}} \quad (3.2.17)$$

であたえられる。ここで E_z' の項は無視した。言うまでもなく、解が安定である為には ω は実数でなければならない。ここで特異例の一つを考えてみよう。初期条件として $P_0=0$ を選ぼう。この状態はカソードロッド内にバックレグコイル等を巻く事により、カソード面に垂直に入る B_z を安全に打ち消す事によって実現される。この時方程式(3.2.16)は調和振動型の方程式となる。その解は単なる振動解である。そして $r(s)$ は負の値も取る事を意味する。我々は円筒座標を選択して来た。この負になる解は何か変である。何か矛盾がある様に見えるが如何がであろうか? この点を認識する為には、z軸まわりの運動を調べねばならない。考察は読者の演習に残す。

Paraxial近似が使えない場合、即ち B_z の r 依存性が無視出来ない所では、オリジナルの方程式(3.2.14)に戻らねばならない。この場合、遠心力と空間電荷項以外が

r についての非線形項を含む様になり、これをNonparaxial Ray方程式と呼ぶ。この詳細な議論は入門を越えるので割愛する。又、ここに展開した理論的フレームワークは、従来電子ライナックの電子銃からプレバンチャーまでの低エネルギー領域でのビーム力学として、或いはクライストロンのビーム力学として議論されてきた物と本質的に同じである。但し、そこでは従来から各々の分野で独立した terminologyを用いて論じている。例えば、正準角運動量保存をBushの定理と呼ぶ。読者の演習に残したカソード面上で磁場がシールドされている場合の電子流を Brillouin流と言う。又、 $B_z(0) \neq 0$ 即ち $P_0 \neq 0$ の場合の電子流を界侵流 (Immersed Flow) とする。又(3.2.16)式において、自己場だけの発散力が存在する時、この方程式の解をユニバーサルカーブと呼ぶ。これらの全てが、電子銃からのビームおよびクライストロンの電子流の振る無いの特徴を促る上で非常に重要な道具であり概念なのである。より詳細な解説は福田(1988)、竹田(1990)、大沢(1990)の加速器セミナー講義録/3/にある。

加速を無視した(3.2.16)で $r = a$ とおいた方程式は、高エネルギー加速器分野で広く知られているKapchinskij-Vladimirskij Envelope (K-V) 方程式/4/ と全く同型である事を指摘しておきたい。もともとK-V方程式は高エネルギー線型加速器のベータートロン振動方程式に自己場を導入し、それを2章で論じた補助方程式で表現した時に得られる。一種の摂動ベータートロン補助方程式であった。混乱を避ける為、以後(3.2.16)式で $r = a$ とおいた方程式をK-V方程式と呼ぶ。もちろん任意の $B_z(s)$ についてこの方程式の一般解は知られていない。周期的ソレノイド磁場で遠心力が自己場に起因する発散力をはるかに凌ぐ時、近似解ではあるが周期解が文献5の中に与えられたに過ぎない。これは自己場による発散力が存在する場合の、周期的収束系の設計に役立て得る事を付け加えておこう。

イオンチャンネルガイディング

どの様にイオンチャンネルを作るかは、後述する事にして、先ずイオンチャンネル存りきの前提を置こう。ダイオードで加速された電子ビームがアノード面を通り抜けると、ただちにこの連続的イオンチャンネルを入射する状況を仮定する。このイオンチャンネルは一定のイオン密度 n_i 、半径 R のチャンネルサイズを持つと仮定する。イオンチャンネルが作る電場 E_r は図3.7に見られる様に $r \leq a$ までは r について線形、 $r > R$ で $1/r$ に比例する。

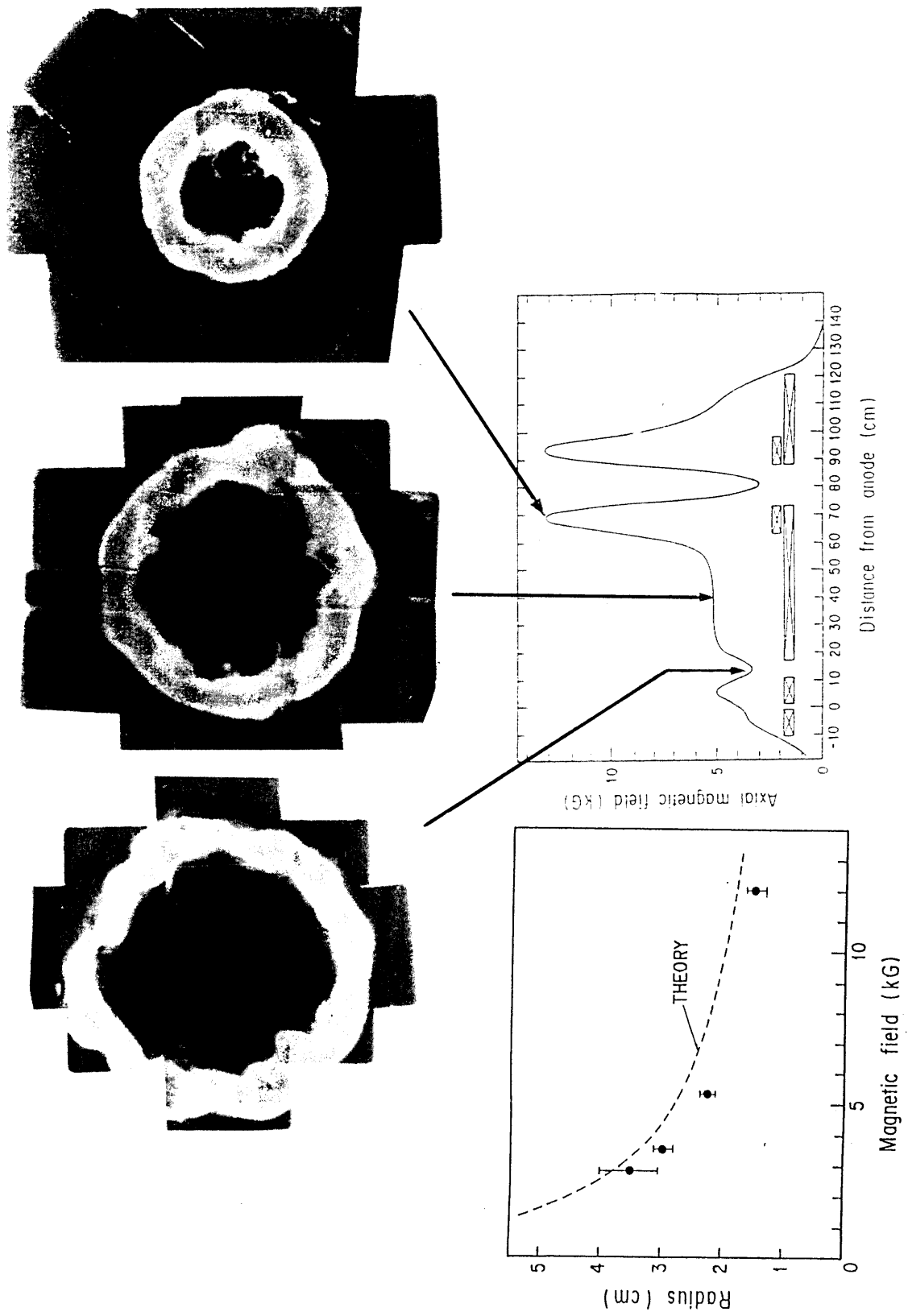


図3.6 円筒ビームプロフィール（断面）と磁場の関数としての円筒ビーム半径

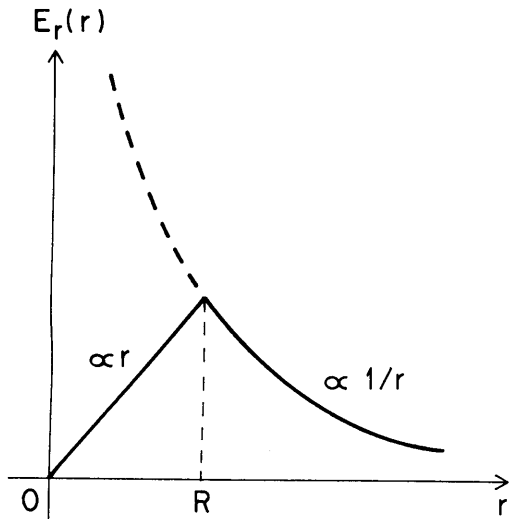


図3.7 動径方向の電場 $E_r(r)$

中心からの変位 r にある粒子がこの電場から受ける動径方向の力は

$$e \left(\frac{en_i}{2\epsilon_0} \right) \times \begin{cases} r & r \leq R \\ R^2/r & r > R \end{cases}$$

である。従ってParaxial Ray方程式の中には

$$F_r = \frac{1}{c^2 \beta^2} \left(\frac{e}{m\gamma} \right) \left(\frac{en_i}{2\epsilon_0} \right) \times \begin{cases} r & r \leq R \\ R^2/r & r > R \end{cases} \quad (3.2.18)$$

の形で収束力として取り込む事が出来る。後の都合で、イオンが一価だとして、等価的イオン電流 I_i (実際は静止イオンであるから、あくまで便宜的量である)

$$I_i = \pi R^2 en_i c \quad (3.2.19)$$

を導入する。収束 F_r もこの I_i を使うと、

$$F_r = \frac{2}{\beta^2 \gamma} \left(\frac{I_i}{I_0} \right) \times \begin{cases} r/R^2 & r \leq R \\ 1/r & r > R \end{cases} \quad (3.2.20)$$

となる。今、ソレノイド磁場 B_z が全く存在しないと仮定すると、Paraxial Ray方程式は

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{2(I_i/I_0)}{\beta^2 \gamma} \times \begin{cases} r/R^2 \\ 1/r \end{cases} - \frac{2(I_B/I_0)}{(\beta\gamma)^3} \frac{r}{a^2} = \frac{(P_\theta/m)^2}{(c\beta\gamma)^2} \frac{1}{r^3} \quad (3.2.21)$$

と書き下せる。動径方向運動の特徴は、 $r \leq R$ である限り、ソレノイドガイディングで見て来たものと全く同じである。電子がダイオードで生成加速される時、完全に軸対称に事が運ぶと仮定すれば、 $v_\theta(0) = 0$ とおくのは合理的である。又ダイオード領域にも B_z が存在しないとすれば、正準角運動量 P_θ は0になる。この時電子密度の一樣性が保持され(もちろんこの仮定は便宜的なものである)、イオンチャンネル半径 R と電子ビーム半径 a がほぼ同じだとすると、(3.2.21)式からビーム半径の平衡条件

$$I_i \approx \frac{I_B}{\gamma^2} \quad (3.2.22)$$

を見出す。電子ビームのエネルギーを大きくすればするだけ希薄なイオンチャンネルでのビームガイディングが可能となる。

平衡条件は一応の目安であり、実験等と比較しようとすると、もう少し正確な議論を必要とする。特に電子密度一樣の仮定は、少し乱暴過ぎる。電子密度変動の自由度を取り込む為に、Rigid電子ビームを多層円筒に分割し、円筒各々の軌道発展を追いかける、ビーム殻モデルを採用する。もちろんこれは系が完全軸対称性を持つソレノイドガイディングやイオンチャンネルガイディングにのみ有効な方法である。アイデアは簡単である、 m 番目の殻の半径を $r_m(s)$ とする。この殻上の電子が感じる電場 $E_r(r_m, s)$ はこの殻より内層に位置する殻のみによって決まる。即ち、

$$E_r(r_m, s) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c \beta} \frac{1}{r_m} \sum_{r_n < r_m} I_n \quad (3.2.23)$$

ここで I_n は n 番目の殻が分け持つ電流でこれは保存される。全ビーム電流はこの総和に外ならない、即ち

$$I_B = \sum_{n=1}^N I_n \quad (3.2.24)$$

磁場についても同様に取り扱える。かくして各殻の半径 r_m の軌道発展は次式、

$$\frac{d^2 r_m}{ds^2} + \frac{2(I_i/I_0)}{\beta^2 \gamma} f(r_m) - \frac{2}{(\beta \gamma)^3} \frac{1}{r_m} \sum_{r_n < r_m} \frac{I_n}{I_0} = 0 \quad (3.2.25)$$

ここで

$$f(r_m) = \begin{cases} r_m/R^2 & r_m \leq R \\ 1/r_m & r_m > R \end{cases}$$

で与えられる。茂中(1992)/6/ はKEKマイクロ波FELにおけるビームトランスポートを、この殻モデルで解析し実験結果と比較的良好一致する事を見出している。

Beam Front Erosion

この節の本論を始める前に述べた様に、イオンチャンネルは、ビームが入射する前にすでに存在するプラズマチャンネル内のプラズマ電子を Beam Headの空間電荷効果でラッセルして作られる訳であるから、Beam Headに収束はまだ及ばない。従って、このBeam Headは(3.2.25)式で $I_i = 0$ とおいた、発散力のみを持つRay方程式に従うので、その半径は軌道を進むに伴いどんどん大きくなる。これを Beam Front Erosion と呼ぶ。KEKマイクロ波FELにおける Beam Front Erosion は栗野(1990)/7/ によって詳しく解析された。トランスポートの全長が8mと余り長くない故、実験的に顕著な Erosionを確認するまでには到っていない。Livermore ATA でビームパルス長100nsec にわたってビームプロフィールを測定した/8/。期待に反し Beam Front Erosion が顕著に見い出されないどころか、ビームTailへ向けてのエミッタンス増大を報告している。その原因としてはイオンとのコヒーレントなカップリングによるsausage mode instabilityとか非均一な非線型収束に起因する等、色々憶測されているが原因はまだ良く解からない。この他にも重要な知見を報告した。その主な物はプラズマ電子ビームの存在である。レーザーで作られたプラズマ電子は加速間隙に誘導される電圧で下流方向へ加速される。そのエネルギーは発生した位置に依り、数MeV から最終エネルギーの50MeV にわたって分布する。プラズマ電子ビームの電流プロフィールを図3.8に示す。加速器全体がまるで一種のカソードレス電子銃である。

プラズマ電子の逆襲

プラズマ電子は Beam Headの空間電荷効果でラッセルされると述べたが、はたしてそんなに簡単なものであろうか？ もう少し正確にプラズマ電子の力学を考えてみ

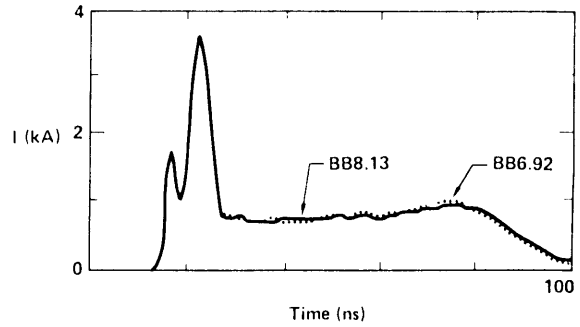


図3.8 AT Aにおけるプラズマ電子流
カソード電子はoffの状態、
約 90mにわたってプラズマチャンネルを作り加速電圧を印加した。

よう。Beam Headは電場 E_r と伴に磁場 B_θ を作り出す。もし壁等の遮る物が無ければ、この E_r と B_θ の下で図3.9に見られる様に、いわゆるドリフト運動を起こすだろう。

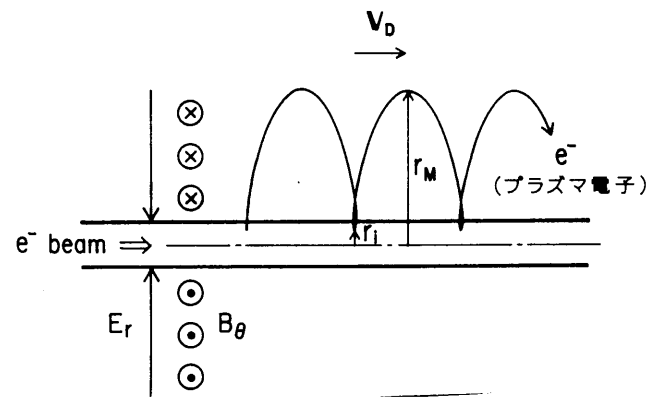


図3.9 プラズマ電子の運動

即ち、もし壁が無ければプラズマ電子は又戻って来るのである。Turning Radius r_M は E_r と B_θ の大きさ、別な言い方をすればビーム電流 I_B に依存する。ビームパイプ径が r_M より小さければ、プラズマ電子はビーム領域に戻り、結果としてイオンチャンネルは出来ない。従って、ビーム電流等の関数として、Turning Radiusを求めておく事はビームパイプのサイズを選択に欠かせない。

電子ビームとプラズマチャンネルは半径 a の一様分布と仮定すると、この電子ビームとイオンが作る電磁場は

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{I_B(1-fe)}{2\pi\epsilon_0 c a^2} r & r \leq a \\ \frac{I_B(1-fe)}{2\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{r} & r > a \end{cases} \quad (3.2.26)$$

$$B_{\theta}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_B}{2\pi a^2} r & r \leq a \\ \frac{\mu_0 I_B}{2\pi} \frac{1}{r} & r > a \end{cases} \quad (3.2.27)$$

を得る。ここで f_e は neutralization factor と呼び、ビーム粒子密度に対するプラズマ密度の比、 n_i/n_b である。(3.2.22)より概ね $f_e \sim 1/\gamma^2$ 程度である。この様な電磁場の中でのプラズマ電子の挙動は運動方程式

$$m \frac{d(\gamma v_z)}{dt} = e v_r B_{\theta} \quad (3.2.28)$$

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = e v_r E_r \quad (3.2.29)$$

$$\gamma = [1 - (v_r^2 + v_z^2)/c^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.30)$$

に従う。(3.2.26)を(3.2.29)に代入して、この微分方程式を解く事により

$$\gamma(r) = 1 + (1 - f_e) \frac{I_B}{I_0} \left[1 - \left(\frac{r_i}{a} \right)^2 \right] + 2(1 - f_e) \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (r > a) \quad (3.2.31)$$

を得る。一方、(3.2.27)を(3.2.28)に代入して、これを解けば、

$$\frac{\gamma(r) v_z(r)}{c} = \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \left[1 - \left(\frac{r_i}{a} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (r > a) \quad (3.2.32)$$

を得る。ここで r_i はプラズマ電子の初期値である。一方、(3.2.30)を変形して

$$\left[\frac{\gamma(r) v_r(r)}{c} \right]^2 = \gamma^2(r) - 1 - \left[\frac{\gamma(r) v_z(r)}{c} \right]^2$$

と書き、(3.2.31)と(3.2.32)を代入すれば、

$$\left[\frac{\gamma(r) v_r(r)}{c} \right]^2 = \left\{ 1 + i_b \cdot g \left[1 + \ln(r/a)^2 \right] \right\}^2 - 1 - i_b^2 \left[1 + \ln(r/a)^2 \right]^2 \quad (3.2.33)$$

を得る。ここで省略形 $i_b = I_B/I_0$ と $g = 1 - f_e$ を用いた。又、 $r_i \ll a$ を仮定した。図3.9を見て解かる様に、

Turning Radius r_M の位置で当然動径方向の速度成分は v_r は0である。従って(3.2.33)の左辺を0とおき、この方程式を満足する r が Turning Radius r_M となる。 $x = 1 + \ln(r_M/a)^2$ とおき、その様な方程式を解き、

$$i_b x [2g + (i_b g^2 - i_b) x] = 0 \quad \text{より}$$

$$x = \frac{2g}{i_b(1 - g^2)}$$

かくして、

$$\frac{r_M}{a} = \exp \left\{ \left(\frac{I_0}{I_B} \right) \frac{1 - f_e}{f_e(2 - f_e)} - \frac{1}{2} \right\} \quad (3.2.34)$$

図3.10に異なるビーム電流値について、neutralization factorの関数として r_M/a を示した。

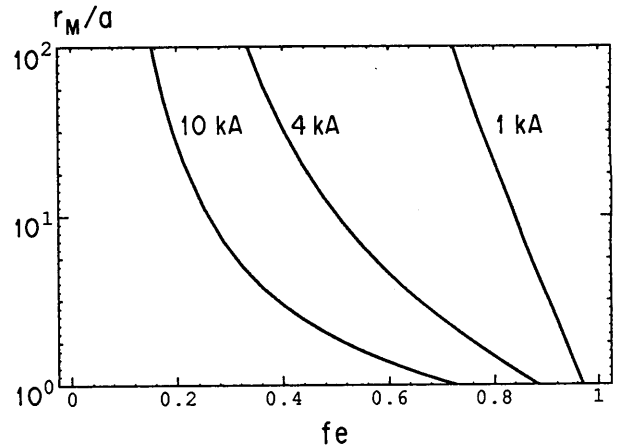


図3.10 Neutralization factor f_e の関数としての Turning Radius r_M

ここでは電子ビームとして Rigidビームを仮定したが、 r_M はビームの粒子分布に依存する。R. Briggs(1981)/9/が求めた、Bennettプロフィール

$$n(r) \propto \frac{I_B}{[1 + (r^2/a^2)]^2}$$

の場合は、

$$\frac{r_M}{a} = \left\{ \exp \left[2 \left(\frac{I_0}{I_B} \right) \frac{1 - f_e}{f_e(2 - f_e)} \right] - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.35)$$

である。もちろん(3.2.35)式中の a と(3.2.34)式のビーム半径 a とは同じではない。Bennettプロフィールでは、

$r = a$ において電場 E_r がピーク値を持つ。いずれにしても、ビームパイプサイズを b とすれば、 $b < r_M$ でなければならない。言い換えると、この $b < r_M$ がイオンチャンネル形成の必要条件と言える。

ここまでは、単にビームパイプの中にイオンチャンネルを作る事だけを議論した。しかし、マイクロ波FEL等でのイオンチャンネル形成はもっと複雑である。ここでは、数KGaussのウィグラー磁場 B_w 、そしてGWに及ぼうかと言う、強いマイクロ波が存在する。マイクロ波の大パワーがそこを伝播して行く故、プラズマ電子は急速に相対論的領域まで加速され重くなる。そして B_w によるサイクロトロン運動が加わるので、プラズマ電子の振る舞いは、この小節で与えた力学がそのままでは使えない。このような環境の中でのプラズマ電子の粒子ビームによるラッセルの力学は文献10の中で詳しく解析され、イオンチャンネル形成の条件が見い出されている。

光イオン化と電子衝撃イオン化

プラズマチャンネルを作る為に、光イオン化が用いられる。一般に分子のイオン化エネルギーは7eV以上であるが、単一光子によるイオン化がもっとも効率的である。この為には、 $h\nu = 8\text{ eV}$ 、即ち波長 $\lambda = 160\text{ nm}$ 程度のレーザー光を必要とする。残念ながら、この波長域のレーザーで十分なピークエネルギーを持った物は、市販品として無い。そこで2光子過程によるイオン化が期待される。ここでは、最初1番目の光子が分子最外殻電子を励起し、その励起状態にある分子を2番目に入射する光子でイオン化するものである。この目的の為超紫外レーザー光の利用が考えられる。KEKのマイクロ波FELでは、KrFエキシマレーザー($\lambda = 248\text{ nm}$)が用いられている。前小節の議論から必要なイオンチャンネルのイオン密度は知られている。その密度を著しく越えるとオーバーフォーカスになりEnvelope振動の振幅が大きくなり、ビーム使用に堪えなくなる。従って、与えられたレーザーの強度、パルス長、波長の下に、使用されるガスが、どのようにイオン化されるのか、又結果として得られるプラズマ密度の大きさを把握しておく事も重要なのである。もちろん実験中も含め、常時プラズマ密度が測定出来れば、余りこまかい事を考える必要はないのであるが、実際にはプラズマが形成される処は電子ビームの通り道でもあるし、又マイクロ波の伝播路でもある。その様な理由から、プラズマ密度を直接測定する事は中々困難なのである。

2光子過程によるイオン化モデルとしては、図3.11に見られる様に二つのチャンネルが想定される。

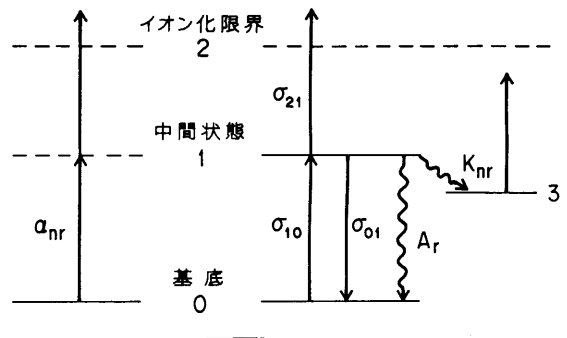


図3.11 2光子過程イオン化モデル

0と番号を付けた基底レベル、1の共鳴的中間レベル、2のイオン化された連続レベル、それからレベル1を経由して行く何か他の共鳴レベルを3で代表させた。 σ を各レベル間遷移に伴う光子の吸収断面積。中間状態1から基底状態及びレベル3への崩壊に伴うライフタイムを $1/A_r$ 、 $1/K_{nr}$ 。各状態のpopulationを N_i で表わすと、共鳴励起状態におけるRate方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dN_0}{dt} = \frac{I(t)}{h\nu} [\sigma_{01}N_1 - \sigma_{10}N_0] + A_r N_1 & (3.2.36a) \\ \frac{dN_1}{dt} = \frac{I(t)}{h\nu} [\sigma_{10}N_0 - (\sigma_{01} + \sigma_{21})N_1] - Q N_1 & (3.2.36b) \\ \frac{dN_2}{dt} = \frac{I(t)}{h\nu} \sigma_{21} N_1 & (3.2.36c) \\ \frac{dN_3}{dt} = K_{nr} N_1 \end{cases}$$

$$N_0(t) = N_0(0) - N_1(t) - N_2(t) - N_3(t)$$

$$Q = A_r + K_{nr}$$

の4式で書く事が出来る。 $I(t)$ は時間の関数としてのレーザー強度、 $h\nu$ はレーザー光の1光子エネルギーである。このRate方程式の解の中、我々が知りたいのはpopulation $N_2(t)$ であり、これが即プラズマ密度と考えて良い。初期条件として $N_0(0) = N_0(\infty n_0)$ (レーザー照射前のガス密度)はガス圧と温度 T との関係、 $p = n_0 k T$ (k : Boltzmann定数)によって知られている。又その他のpopulationは $N_i(0) = 0$ ($i=1, 2, 3$)と考えて良い。上のRate方程式を解くに当たって、 $N_0(t) \gg N_i(t)$ ($i=1, 2, 3$)の仮定を置く。すなわち、 $N_0(t) = N_0$ とする。関係するRate方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \frac{I(t)}{h\nu} \sigma_{10} N_0 - Q N_1 & (3.2.37a) \\ \frac{dN_2}{dt} = \frac{I(t)}{h\nu} \sigma_{21} N_1 & (3.2.37b) \end{cases}$$

表1 2光子イオン化吸収断面積その他(文献12より)

Molecule	λ_0 (nm)	σ_{10} (10^{-18} cm ²)	σ_{21} (10^{-18} cm ²)	Q (nsec ⁻¹)	α_{nr} (10^{-27} cm ¹ /W)	Intermediate State		
						State	Lifetime (nsec)	Fluorescence Quantum Yield
Benzene	248	0.37	4.4	0.022	<0.5	¹ B _{2u}	42-49	0.08-0.07
Fluorobenzene	248	1.2	2.4	0.12	3.6	¹ B ₁	8.16	0.096
			3.5	0.17	0(assumed)			
DEA	248	36.0	11.6	0.66	0(assumed)	—	—	—
TMA	248	0.75	2.8	0.022	3.4	—	45	0.97
			4.0	0.057	0(assumed)			
NO	248	0.0	—	—	≤0.0001	—	—	—
	225	0.012	14.0	0.0047	~0.1	A ² Σ (ν'=0)	215	—
	193	0.014	—	—	0.005	—	—	—

これはOlson, その他(1983)/11/によって、2光子過程イオン化機構に対する、レーザーパルスの時間構造を含めた解析に使ったモデルと同じである。(3.2.37a)を解けば、

$$N_1(t) = \frac{\sigma_{10}N_0}{h\nu} e^{-Qt} \int_0^t e^{Qt'} I(t') dt' \quad (3.2.38)$$

これを(3.2.37b)に代入して、時間について積分すれば、

$$\frac{N_2(t)}{N_0} = \frac{\sigma_{10}\sigma_{21}}{(h\nu)^2} \int_0^t dt' I(t') e^{-Qt'} \left[\int_0^{t'} e^{Qt''} I(t'') dt'' \right] \quad (3.2.39)$$

ここで規格化されたレーザー強度関数 $\phi(t)$

$$\phi(t) = I(t)/(E/S) \quad (3.2.40)$$

を導入する。Eはレーザーパルスエネルギー、Sはレーザービームサイズの断面積である。従って、

$$\int_0^\infty \phi(t) dt = 1 \quad (3.2.41)$$

すると(3.2.39)は $t = \infty$ において、

$$\frac{N_2(\infty)}{N_0} = \left(\frac{E}{S} \right)^2 \frac{\sigma_{10}\sigma_{21}}{(h\nu)^2} \int_0^\infty dt \phi(t) e^{-Qt} \left[\int_0^t e^{Qt'} \phi(t') dt' \right] \quad (3.2.42)$$

レーザーパルス長 τ の間で、中間状態1の基底、その他のレベルへの崩壊が無視出来るのであれば、即ち $Q\tau \ll$

1であれば、(3.2.42)の積分は、

$$X = \int_0^\infty dt \phi(t) e^{-Qt} \left[\int_0^t e^{Qt'} \phi(t') dt' \right] \\ \approx \int_0^\infty dt \phi(t) \left[\int_0^t \phi(t') dt' \right]$$

部分積分をして、

$$X = \int_0^t \phi(t') dt' \cdot \int_0^t \phi(t) dt \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dt \left[\int_0^t \phi(t') dt' \right] \phi(t) \\ = \int_0^\infty \phi(t) dt \cdot \int_0^\infty \phi(t) dt - X = 1 - X$$

かくして $X=1/2$ を得る。故に、

$$N_2(\infty) = \frac{N_0}{2} \left(\frac{E}{S} \right)^2 \frac{\sigma_{10}\sigma_{21}}{(h\nu)^2} \quad (3.2.43)$$

(3.2.43)の表式を妥当なものとして使用し得るか否か、即ち $Q\tau \ll 1$ かどうかは、分子に依る。表1を見ると、分子によって大きな違いがある事が解る。我々が日常使用するDEA(ジエチルアニリン $C_{10}H_9N(C_2H_5)_2$)では、Q値が0.66 (nsec⁻¹)。一方、レーザーパルス長はほぼ10~15nsec程度である。これは $Q\tau = 10 (\gg 1)$ を与えるので、(3.2.43)の使用は適当でない。DEAの様なガスの場合、レーザーパルス長 τ の間での中間状態の崩壊を考慮しなくては意味がない。積分Xを見直そう。

$$X = \int_0^\infty \phi(t) e^{-Qt} \left[\int_0^t \phi(t') e^{Qt'} dt' \right] dt \\ \approx \int_0^\infty e^{-Qt} \left[\int_0^t \phi(t) \phi(t') e^{Qt'} dt' \right] dt$$

部分積分を行ない、

$$X = -\frac{1}{Q} e^{-Q\tau} \left[\int_0^t \phi(t) \phi(t') e^{Q t'} dt' \right]_0^\infty + \frac{1}{Q} \int_0^\infty e^{-Q t} \left[\phi^2(t) e^{Q t} + \int_0^t \phi \phi(t') e^{Q t'} dt' \right] dt \quad (3.2.44)$$

$\phi(t)$ は有限な領域のみ 0 ではない。従って、 $t \rightarrow \infty$, $e^{-Q t} \rightarrow 0$ であるので、右辺第 1 項は 0 となる。

$$X = \frac{1}{Q} \int_0^\infty \phi^2(t) dt + \frac{1}{Q} \int_0^\infty e^{-Q t} \left[\int_0^t \phi \phi(t') e^{Q t'} dt' \right] dt$$

部分積分を続行すると、

$$= \frac{1}{Q} \left\{ \int_0^\infty \phi^2(t) dt + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{Q^{i+1}} \int_0^\infty \phi^{(i+1)}(t) \phi(t) dt \right\} \quad (3.2.45)$$

もし、

$$\left| \int_0^\infty \phi^{(i+1)}(t) \phi(t) dt \right| \leq \frac{1}{\tau^{i+1}} \int_0^\infty \phi^2(t) dt$$

を証明出来れば $Q\tau \gg 1$ の時、積分(3.2.45)の主要項が第 1 項である事が結論出来る。一般的証明は、中々難しい様であるから、パルス巾 τ を持つ典型的な $\phi(t)$ として Half sine 関数を取ってみよう。

$$\phi(t) \propto \begin{cases} \sin \frac{\pi}{\tau} t & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

$$|\phi^{(n)}(t)| = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^n \phi(t) \quad n : \text{even}$$

$$\int_0^\infty |\phi^{(i+1)}(t)| \phi(t) dt = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{i+1} \int_0^\infty \phi^2(t) dt & i : \text{odd} \\ 0 & i : \text{even} \end{cases}$$

かくして

$$X \leq \frac{1}{Q} \left\{ 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{\pi}{Q\tau}\right)^j \right\} \cdot \int_0^\infty \phi^2(t) dt \quad (3.2.46)$$

(i : evenのみ)

$Q\tau \gg \pi$ であれば、積分 X は

$$X = \frac{1}{Q} \int_0^\infty \phi^2(t) dt \quad (3.2.47)$$

で近似出来る。

ここで、レーザーパルス長を以下で、より厳密に定義しよう。

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{[\int_0^\infty I(t) dt]^2}{\int_0^\infty I^2(t) dt} = \frac{1}{2 \int_0^\infty \phi^2(t) dt} \quad (3.2.48)$$

もし、レーザーパルスが時間軸で Gaussian パルスであれば、full width at half-maximum T_P との関係は容易に求まり

$$\tau = \left(\frac{\pi}{8 \ln 2}\right)^{\frac{1}{2}} T_P \approx 0.753 T_P \quad (3.2.49)$$

で与えられる。この定義は Bischel その他(1985)/12/ に従った。(3.2.48)より、 $X = 1/(2Q\tau)$ とおけ、 $N_2(\infty)$ は、

$$\frac{N_2(\infty)}{N_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{S}\right)^2 \frac{\sigma_{10} \sigma_{21}}{(\hbar\nu)^2 (Q\tau)} \quad (3.2.50)$$

Gaussian パルスであれば、

$$\frac{N_2(\infty)}{N_0} = 0.664 \left(\frac{E}{S}\right)^2 \frac{\sigma_{10} \sigma_{21}}{(\hbar\nu)^2 Q T_P}$$

によって与えられる。吸収断面積 σ_{10} と σ_{21} は実験によって、求められており、DEA の場合、 $\sigma_{10} = 36 \times 10^{-18}$ cm^2 、 $\sigma_{21} = 11.6 \times 10^{-18}$ cm^2 である。典型的使用例では、 $E = 100$ (mJ)、 $S = \pi \cdot 1^2$ (cm^2)、 $\hbar\nu$ (4.98 eV) = 8×10^{-19} (J)、 $T_P = 15$ nsec であるので、イオン化効率 $\eta = N_2(\infty)/N_0 = 4.4 \times 10^{-2}$ を得る。但し、DEA について豊富な実験データがある訳ではなく、それら/12, 13/ を比較すると、 $\sigma_{10} \sigma_{21}/Q$ の値について最大ファクター 10 位の違いがあり、このイオン化効率もその程度の精度である事を注意しておく。

2 光子共鳴イオン化とは別に、もう一つ非共鳴イオン

化過程が考えられる。現時点ではこの過程の吸収断面積 α_{nr} をうまく独立に測定されている訳ではないが、無視し得る程度だと見做されている。

中性分子の電子ビームによるイオン化も、当然考慮せねばならない。これを電子衝撃イオン化 (Electron Impact Ionization) と呼ぶが、このイオン化によるイオン密度 $n_i(t)$ の時間変化は電子密度 n_b に比例し関係

$$\frac{\partial n_i(t)}{\partial t} = \frac{n_b(t)}{\tau_e} \quad (3.2.51)$$

に従う。ここで τ_e は電子衝撃イオン化時間と呼ばれる量で、中性分子との衝突をから衝突までの平均自由行程 λ_e を電子の速度 v で除した量、 $\tau_e = \lambda_e / v$ である。そしてこの平均自由行程は定義に従って、中性分子の密度 n_0 とイオン化断面積 σ の積の逆数、 $\lambda_e = (n_0 \sigma)^{-1}$ で与えられる。 n_0 の代わりに中性分子の圧力 p を用いれば、

$$\tau_e = \frac{kT}{p\sigma v}$$

$S_e = \sigma / (kT)$, $v = c\beta$ を導入すると、

$$\tau_e = [p(S_e\beta)c]^{-1} \quad (3.2.52)$$

文献14より、 $S_e\beta$ は電子ビームのエネルギーの関数として与えられるが、 $0.3 < E < 4 \text{ MeV}$ 程度では $S_e\beta$ の値は殆ど一定値であり、H. 分子の場合 $S_e\beta \sim 8 \times 10^{-3} (\text{cm} \cdot \text{Torr})^{-1}$ である。この値を (3.2.52) 式に代入すれば、 $\tau_e = 5.0 [P(\text{Torr})]^{-1} \text{ nsec}$ となる。電子ビームの密度は一定として (3.2.51) を時間について積分すれば、パルス長 τ の一様電子ビームが通過した後、蓄積したイオン密度は

$$n_i(\tau) = n_b \cdot (\tau / \tau_e) \quad (3.2.53)$$

によって与えられるが、日常的な実験条件では $\tau = 50 \text{ nsec}$ 、 $p = 10^{-1}$ であるので、 $\tau / \tau_e = 50 / 5 \times 10^1 = 10^{-3}$ 。従って、先の光イオン化に比すると問題にならない位低レベルのイオン化である事が解る。但し、DEAの正確な $S_e\beta$ のデータはまだ知られていないので、上の数値は不確定性を持つ。しかし実際のビームトランスポートの実験で、光イオン化によるプラズマチャンネル形成無しに、同じ圧力で電子ビームの伝播に成功した事は無い。

図3.12にイオンチャンネルガイドによる伝播実験の典型的例を示す/15/。入射ビームは800KeV、2kA全長約2mの伝播である。アノード下流40cm毎に置かれたログス

キーモニターで測定されたビーム電流プロフィールを示す。このデータはDEAのガス圧等十分に最適化される以前の実験結果であり、30%~35%程度のビーム電流ロスを示した。現在は、概ね95%以上の伝播効率が得られている。

3-3節 コヒーレント不安定

本論に入る前に然るべき動機を述べねばならない。高密度電子ビームに対する加速器社会の最近の興味は、それをマイクロ波FELやクライストロンの駆動ビームとして利用する事である。それも多段でなければ意味がない。何故なら低エネルギー ($\leq 20 \text{ MeV}$) ではあるが、十分に相対論的 ($v \approx c$) に加速した駆動ビームのウィグラー1段当りのエネルギー変換効率は100%が見込める。従って、失ったエネルギーを誘導加速器で補い多段にすれば、全体としてのエネルギー効率を限りなく100%に近付ける事も夢ではないからである。

この様な多段式のマイクロ波発生装置/1/は、見方を変えれば加速器と減速器とを周期的に組み合わせたシステムと言える。しかし、平均的ビームエネルギーが常に一定である事と、ビーム電流が極端に大きい事を別にすれば、その中での粒子ビーム力学は原理的に通常の線型加速器と余り変わりはない。断熱減衰が無いだけである。この様なシステムを模式的に図3.13に書く。

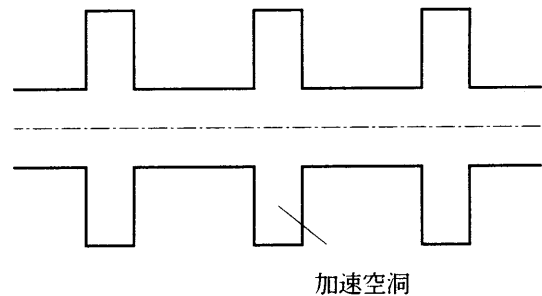
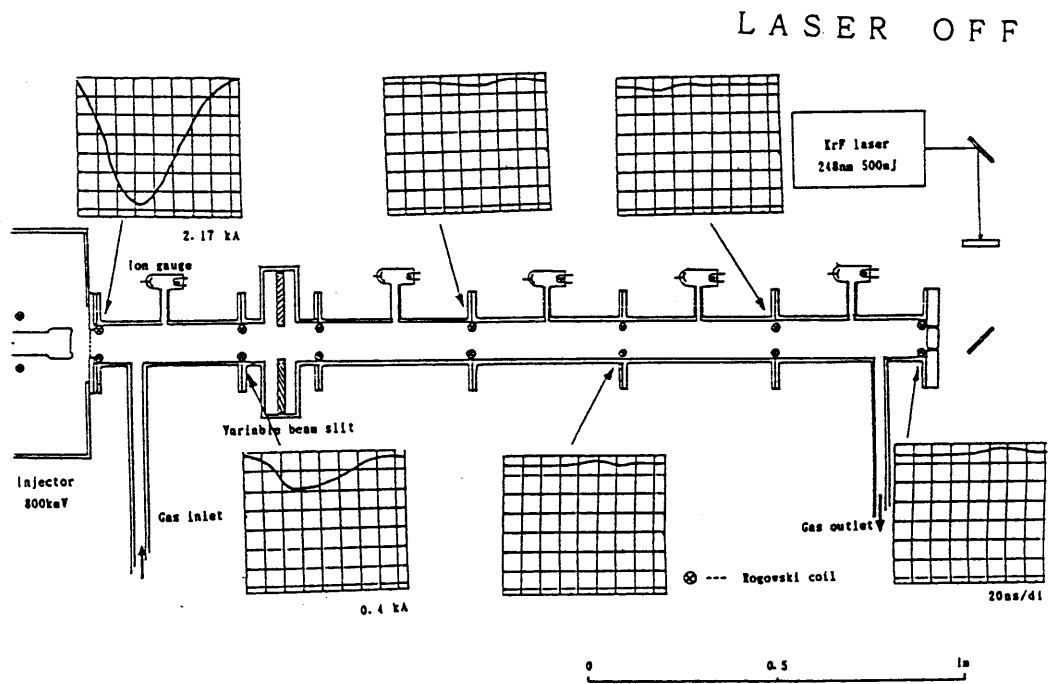
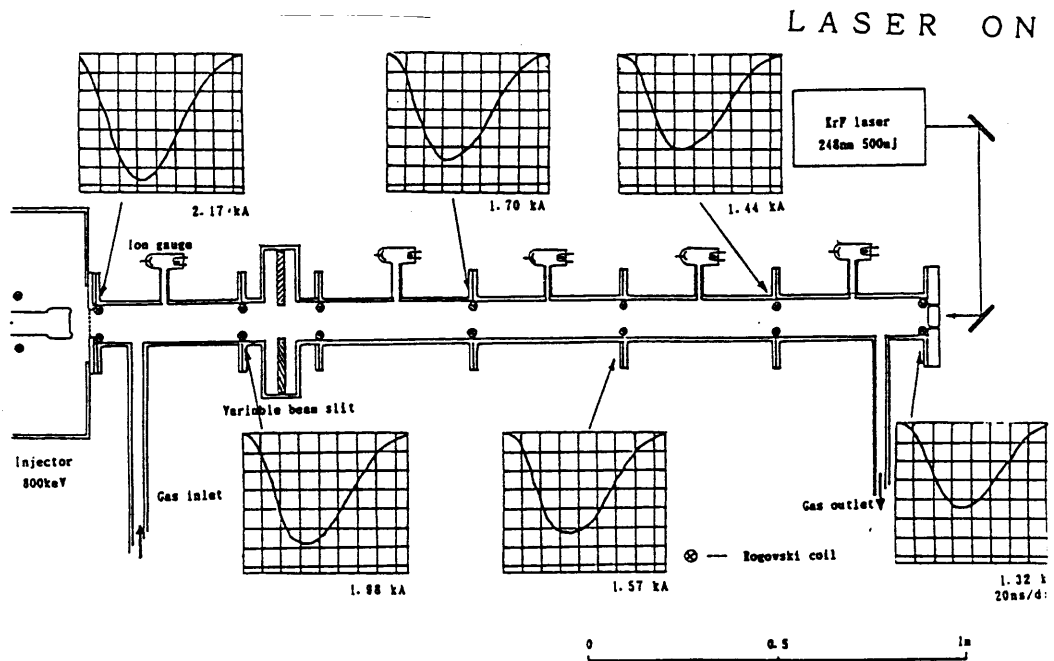


図3.13 ビーム伝播路モデル
周期的に並ぶ加速空洞とそれを結ぶ有限な抵抗値を持つ金属パイプ

粒子ビーム自身から見ると、なめらかなビームパイプと誘導加速ギャップに当る空洞構造が周期的に並んだ構造である。この様なビームラインを平均電流数kAの高密度ビームが伝播する時、その高密度故危惧されるのは、なめらかなビームパイプ部での壁抵抗不安定性と空洞構造に誘起するウェーク場との相互作用で発生するであろう Beam Break-Up 不安定性である。以下これら二つの不安定性の特徴とこれに対する救済策を理論的に解説する。



laser off, DEA pressure 4.0×10^{-4}



laser on, DEA pressure 4.0×10^{-4}

図3.12 KEKマイクロ波FELテストスタンドでのイオンチャンネルガイディング
全長2m 6ヶ所に置かれたログスキーコイルで見たビーム電流プロフィール
(ビームエネルギー 800keV、アノード電流 2.17kA)

壁抵抗不安定性

ビームパイプ中心からその重心が変位したパルス状の電子ビームはビームパイプの内面に非対称な表面電荷を誘導する。誘起された電場はこの変位を更に増大させる様に働く。一方偏心した電子ビームの作る磁場は、同様に非対称な表面電流を誘起するが、この表面電流によって生じる磁場は、偏心を中心に戻す様に電子ビームに力を及ぼす。すなわち、電場に由来する力は磁場に由来するローレンツ力によって相殺されるが、その程度は空間電荷効果と同様に $1/\gamma^2$ のオーダーである。しかし、時間と共に磁場はパイプの金属壁を拡散して行く。これに反して電場は変化しない。従ってビームHeadから下流に向けてビーム重心を変位させる力が相対的に増大する。かくしてビームTailは壁に向けて引っ張られる事が予想される。後述する様に、ビーム自身は外からの収束力の中を伝播しているので、一様に壁に向けてTailが引っ張られるわけではない。何れにしろ、ビーム重心のベータートロン振動の振幅が大きくなって行く事が予想される。この種の、有限な電氣的抵抗に起因するビーム重心の不安定を壁抵抗不安定 (Resistive Wall Instability) と呼ぶ。1960年代初め、電子リングでの典型的不安定性の一つとして、MURA (Midwestern University Research Association) の理論グループにより精力的に取り組まれた加速器物理における古典的問題²⁾ である。最近ではLLNL, LBL KEK/3/での研究がある。

この不安定性を定量的に議論する為には、先ず偏心したビームによって誘起される電磁場(以後Wake場と呼ぶ)の時間、空間的依存性を求めて、後続の粒子に加わるローレンツ力を求める必要がある。幸い、ビーム偏心が余り大きくない時、このWake場は近似的ではあるが解析的に求める事ができる(文献4参照)。今、このローレンツ力を重心の変位の大きさに除した量を Wake関数と定義すると、円筒型ビームパイプのWake関数は、

$$w(s, t) \propto \frac{1}{b^3 \sqrt{\sigma} \sqrt{ct - s}} \quad (3.3.1)$$

と書かれる。ここで b はビームパイプの半径、 σ は壁材料の導電率である。このWake関数は、軌道軸上の位置を偏心したビームスライスが時間 $t = s/c$ に速さ v ($\sim c$) で通過したと仮定して、後続のテスト粒子がこの位置 s で受けるローレンツ力 $eE_r + evB_\theta$ に比例する。Wake場を引き起こすビームスライスと後続のテスト粒子が同じ速度で進むと仮定すると、テスト粒子が感じるWake関数は軌道軸のどこにあって、ビームの相対的位置を時間軸で計量するパラメーター τ だけの関数、 $\sim 1/\sqrt{c\tau}$ 、で書

き表わせる。

今、長いビームパルスを考える。ビームHeadから τ だけ相対的に下流位置にあるビームスライス中の i 番目の粒子が軌道軸上 s で受ける力は、この τ の上流部にあるビームスライスが s の位置を通過した時に誘起したWakeの線形和に比例する。即ち、この粒子の横方向の運動は、方程式

$$\frac{d^2 \xi_i(\tau, s)}{ds^2} \propto \int_0^\tau \frac{\langle \xi(\tau', s) \rangle}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' \quad (3.3.2)$$

で記述される。ここで ξ_i は τ の位置にあるビームスライス中のテスト粒子 “ i ” のビームパイプ中心からの変位であり、 $\langle \xi(\tau', s) \rangle$ は τ' の位置にあるビームスライスの重心の軌道軸上 s の位置での変位を表わしている。前述した様に、ビームの伝播方向には四極電磁石、ソレノイド電磁石、イオンチャンネル等からなる集束系が用意してある。簡単の為、今一様な線型収束を仮定すると、有限な壁抵抗を持ったビームパイプ中のビーム伝播は次の様な摂動線型ベータートロン方程式

$$\frac{\partial^2 \xi_i(\tau, s)}{\partial s^2} + k_\beta^2 \xi_i(\tau, s) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{\langle \xi(\tau', s) \rangle}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' \quad (3.3.3)$$

に従う。ここで、

$$\beta \equiv \left(\frac{e}{mc} \right) \frac{I_B}{\pi \gamma b^3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma}} \quad (3.3.4)$$

k_β は空間電荷効果をも取り込んだベータートロン振動数である。 k_β が粒子に依存しないならば、(3.3.3)式から、ビームスライス重心に対する摂動線型ベータートロン方程式を得る事はわけもなく、

$$\frac{\partial^2 \langle \xi(\tau, s) \rangle}{\partial s^2} + k_\beta^2 \langle \xi(\tau, s) \rangle = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{\langle \xi(\tau', s) \rangle}{\sqrt{\tau - \tau'}} d\tau' \quad (3.3.5)$$

$$\langle \xi(\tau, s) \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i(\tau, s)$$

と書き下せる。(3.3.4)式を見て解る様に、(3.3.5)式右辺の摂動項は、ビーム電流値に比例、そしてビームパイプ径の3乗、エネルギー、導電率の2乗根に反比例する。壁材を電気抵抗の小さいアルミ等にしたと仮定しても、小さいサイズのビームパイプの中に、今問題にしている大電流、比較低エネルギー ($\leq 20\text{MeV}$) の電子ビー

ムを伝播させるのは、かなりやっかいであろうという事が予測される。一般に電磁石を用いた収束系の場合、ビームパイプのサイズが電磁石のサイズを決めてしまう。だから減多矢鱈と大きいビームパイプが使える訳ではない。その様な理由から、ビーム重心の挙動を決める方程式を解き、ビーム重心の不安定を各パラメーターの関数として表わす事が出来れば、伝播させ得るビーム電流値やパルス長等の評価に役に立つ。

摂動方程式(3.3.5)を解くのは、それ程難しい事ではない。この種の初期値問題を解くには、ラプラス変換によるのが適切である。x(≡ξ(τ, s))の変数τについてのラプラス変換x̄(ω, s)は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_\beta^2\right)\tilde{x}(\omega, s) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\omega}} \tilde{x}(\omega, s)$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left[k_\beta^2 - \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\omega}}\right]\right\}\tilde{x}(\omega, s) = 0 \quad (3.3.6)$$

を充たす。ここでたたみ込みの定理を使った。

たたみ込みの定理

h(τ) = f * g(τ) = ∫₀ᵀ f(τ-τ')g(τ')dτ'をfとgの“たたみ込み”と言う。この時h(τ)のラプラス変換は

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\omega) &= \int_0^\infty e^{-\omega\tau} \int_0^\tau f(\tau-\tau')g(\tau')d\tau'd\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\tau e^{-\omega(\tau-\tau')}f(\tau-\tau')e^{-\omega\tau'}g(\tau')d\tau'd\tau \\ &= \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \end{aligned}$$

即ち、fとgのラプラス変換の積に等しい。

(3.3.6)式の一次独立解は

$$\exp\left\{\pm i\left[k_\beta^2 - \frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\right]^{1/2}s\right\} \quad (3.3.7)$$

ここでΓ(1/2) = √πを使った。

摂動項が復元力項に比して十分小さいという仮定をおく。これを強収束の仮定(強収れん原理の意味と、とり違えない様に)と呼び、物理的には納得出来るものである。即ち、壁効果による deflection が収束力よりもはるかに強いという状況は問題外であるので取り上げない。

この仮定の下、独立解は

$$\exp\left\{\pm ik_\beta\left[1 - \frac{\beta}{2k_\beta^2\sqrt{\omega}}\right]s\right\} \quad (3.3.8)$$

で近似出来る。上式の位相部を

$$\Psi_\pm(\omega) = \pm ik_\beta\left[1 - \frac{\beta}{2k_\beta^2\sqrt{\omega}}\right]s$$

とおけば、x̄(ω, s)のラプラス逆変換は、

$$x(\tau, s) = \text{Re}\left\{\frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{x}(\omega, 0)[e^{\Psi_+(\omega)+\omega\tau} + e^{\Psi_-(\omega)+\omega\tau}]d\omega\right\} \quad (3.3.9)$$

である。x̄(ω, 0)は初期値 x(τ, 0)のラプラス変換

$$\tilde{x}(\omega, 0) = \int_0^\infty x(\tau, 0)e^{-\omega\tau}d\tau \quad (3.3.9)$$

である。ここで∂x(τ, 0)/∂s = 0を仮定している。単なる為、領域に入射するビームが一樣に x₁ だけ変位していると仮定すると、x̄(ω, 0) = x₁/ω である。積分範囲のcは、被積分関数の全ての極の実部より大きい値を取る。さもなければ、ラプラス変換が収束しない。(3.3.9)式を後半の計算の都合上、以下の様に少し書き換えておく。

$$\begin{aligned} x(\tau, s) &= \text{Re}\left\{\frac{x_1}{4\pi i} \left[e^{ik_\beta s} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sf_+(\omega)}}{\omega} d\omega \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-ik_\beta s} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sf_-(\omega)}}{\omega} d\omega \right] \right\} \quad (3.3.10) \end{aligned}$$

ここで

$$f_\pm(\omega) = \mp \frac{i\beta}{2k_\beta\sqrt{\omega}} + \frac{\omega\tau}{s}$$

十分に大きいsの近似で、上の積分を求めるには鞍部点法(method of steepest descent)/5/を用いれば良い。鞍部点法とは被積分関数 e^{sf_±(ω)} がある点 ω = ω₀ で非常に急な極大さを持つ場合に、その解析性を利用して積分路を変形し、その鞍部点を通り最も早く小さくなる様な道(峠道)を通る積分になおし、その鞍部点の付近の積分で全積分を近似する方法である。鞍部点は

$$\frac{df_{\pm}(\omega)}{d\omega} = \pm i \frac{\beta}{4k_{\beta}\omega^{\frac{2}{3}}} + \frac{\tau}{s} = 0 \quad (3.3.11)$$

から定められる。鞍部点は(3.3.11)を解いて

$$\omega_s^{\pm} = (\mp i)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\beta s}{4k_{\beta}\tau} \right)^{\frac{2}{3}} = e^{\mp \frac{2}{3}i} \left(\frac{\beta s}{4k_{\beta}\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.3.12)$$

を得る。次に、積分路 ($c - i\infty \rightarrow c + i\infty$) をこの鞍部点を通る様に変形させる (図3.14参照)。

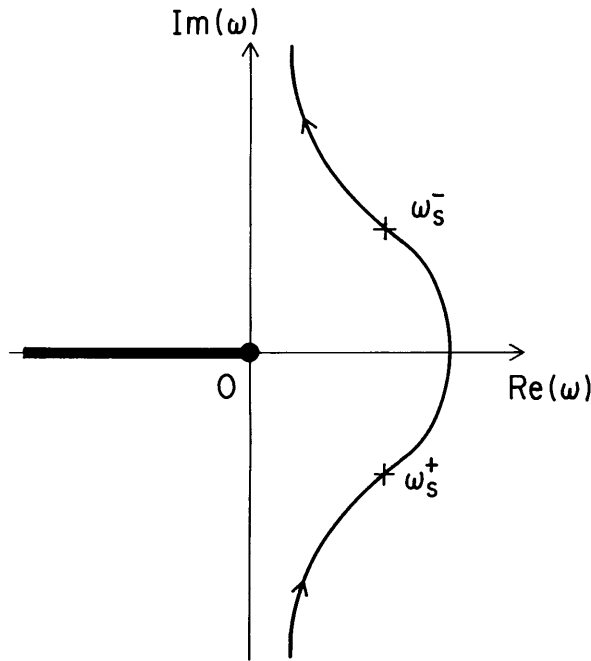


図3.14 積分路、鞍部点、分岐点、分岐

代数的分岐点 (Algebraic Cut) は原点であるから、図の様に切断を $Re(\omega)$ 軸を $0 \rightarrow -\infty$ に選ぶ。すると積分路は図3.14の実線で示した取り方がユニークに決まる。さて、(3.3.10)の積分は各々、

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sf_+(\omega)}}{\omega} d\omega \sim \frac{e^{sf_+(\omega_s^+)}}{\omega_s^+} \times (\dots\dots\dots) \\ \sim \exp \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\beta}{4k_{\beta}} \right)^{\frac{2}{3}} \tau^{\frac{1}{3}} s^{\frac{2}{3}} \right] \times (\dots\dots\dots) \quad (3.3.13)$$

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sf_-(\omega)}}{\omega} d\omega \sim \frac{e^{sf_-(\omega_s^-)}}{\omega_s^-} \times (\dots\dots\dots) \\ \sim \exp \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\beta}{4k_{\beta}} \right)^{\frac{2}{3}} \tau^{\frac{1}{3}} s^{\frac{2}{3}} \right] \times (\dots\dots\dots) \quad (3.3.14)$$

の形にもとまる。上の二式の Exponential でまとめなかった項は全て定数か振動項である。この節の議論では、数学的に複雑な初期値問題の厳密な解 (もともと鞍部点法は s が十分に大きい所でしか意味がない) というより、ビーム重心変位のグローバルな成長を知りたい。その目的の為には上の積分までで十分である。即ち、ビーム重心は大雑把に

$$x(\tau, s) = \langle \xi(\tau, s) \rangle \propto e^{\frac{3}{2} \left(\frac{\beta s}{4k_{\beta}} \right)^{\frac{2}{3}} \tau^{\frac{1}{3}}} \quad (3.3.15)$$

に従って変動する事が判る。この表式の意味は簡単である。ビームHeadから τ の相対的位置にあるビームスライスの重心が軌道上 s の位置に来た時、その初期値の成長の様子を端的に示す。ここで、

$$f(s) = \frac{3}{2} \left(\frac{\beta s}{4k_{\beta}} \right)^{\frac{2}{3}} \tau^{\frac{1}{3}}$$

とおき、 $f(L_R) = 1$ を満足する L_R を導入する。これを Exponential Growth Length と呼ぶ (厳密に言うと(3.3.15)式において s に関して1次依存性では無いので、e-folding distance ではない)。不安定性を定量化した結果の目安として利用する。そしてこの L_R を最初のパラメーターで表わすと、

$$L_R = 2\pi \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma \mu_0} \left(\frac{I_0}{I_B} \right) \frac{\gamma b^3}{\lambda_{\beta}} / \sqrt{\tau} \quad (3.3.16)$$

で書ける。ここで I_0 は Alfvén 電流 (17kA) であり、 λ_{β} はベータートロン波長 ($2\pi/k_{\beta}$) である。かくして、壁抵抗不安定のビーム及びビーム環境パラメーター依存性が明瞭となる。重要なポイントは、強い収束力で不安定の緩和は出来ても、本質的に取り除く事は出来ない事である。予想通りビームパイプ径がこの不安定性の鍵となる。典型的例として、今我々が計画している Two-Beam Accelerator 用の多段マイクロ波 FEL の駆動ビームを例にとってみよう (パラメーターは表2に示す)。そこでは $I_B = 2kA$, $\lambda_{\beta} = 3m$, $\sigma(SUS) = 3.64 \times 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$, $\gamma = 25$, $L_R \sim 158m$ を得る。極端に危険ではなさそうであるが、ビームパイプ径に大きく依存するのには変わりはない。

表2 多段式マイクロ波FELのパラメーター

ビーム電流	I_B	2kA
ビームエネルギー	γ	25
ベータートロン波長	λ_β	2.5m
パルス長	τ	50nsec
ビームパイプ径	b	3cm
導電率 (SUS)	σ	$3.64 \times 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$
加速空洞スペーシング	L	1.5m
BBUモード振動数	$\omega_0/2\pi$	800MHz
Q 値	Q	20
横方向インピーダンス	$\omega_0 Z_\perp$	$2 \times 10^{-1} m^{-1}/8/$
加速空洞長	d	3cm
ステージ数	N	200

Beam Break-Up (BBU)

図3.13に描かれた円筒型空洞構造の中心からその重心が変位した電子ビームが通過している状況を考える。偏心したビームソースは、円筒型空洞に TM_{110} , TM_{120} , TM_{130} モード等の電磁場を誘起する。これらのモードの固有周波数、Q値、インピーダンスは空洞構造の幾何学的形状と材質で決る。これらのモードが減衰する事無く、空洞に励起されたままであれば、後続のビームはこのモードの電磁場に由来するローレンツ力を受け、横方向に蹴られる。その様な理由から、これらのモードを Deflection Mode と呼ぶ。中心軸からのずれが大きくなれば、それに応じて、更にこれらのモードを強く誘起する。かくしてビームTail側では、益々状況が悪くなるであろう。

この様な状況における、ビーム重心の力学を定式化する為には、空洞構造におけるWake関数を知る事がエッセンシャルである。即ち、変位した単一粒子による deflection mode の励起を知れば良い。過渡現象としてのWake場の測定も、最近 Linacの単バンチ電子ビームを使ってやられる様になった。直接的測定によって deflection modeの時間的成長が知られれば実測Wake関数として、粒子ビーム力学の方程式に取り込む事も可能となり、少なくとも原理的には数値計算等で、Wake場によるBBUを定量的に把握出来る。しかし、多くの場合、実際のビームを使って、直面する空洞のWake関数が得られる訳ではない。ここではBBU全般に通じる一般論を展開するのが目的であるから、理想化した形ではあるが、Wake関数を理論的に求めた(付録B-2参照)。空洞における定在波の励起については、かなり昔から研究されていて、共鳴モードの励起についての理論的フレームワークはす

でCondon(1941)/6/ によって固有モード展開法を使って作られている。加速器物理では概ね彼の手法を踏襲して来た。付録も固有モード展開法の延長線上で為されたものである。

空洞での減衰を無視した場合のWake関数は、

$$W(\tau) = \frac{I_B \omega_\lambda^2 Z_\perp}{I_0 Q d \gamma} \sin(\omega_\lambda \tau) \quad (3.3.17)$$

で与えられる。

ここで I_B : ビーム電流、 ω_λ : 固有モード λ の角周波数、 Q : クオリティーファクター、 d : 加速ギャップ長、 γ : ビームエネルギー、 Z_\perp : 空洞固有モード λ に関する空洞の横方向のインピーダンス。

長いビームパルスを仮定すると、ビーム重心は次のBBU方程式に従う。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_\beta^2 \right) \langle \xi(\tau, s) \rangle = \int_0^\tau w(\tau - \tau', s) \langle \xi(\tau', s) \rangle d\tau' \Theta(s) \quad (3.3.18)$$

ここで $\Theta(s)$ はステップ関数であり、加速ギャップの処のみ値1を取り、他では0である。(3.3.18)式の右辺がステップ関数を持つと言う理由で、このBBU方程式は不連続モデルと呼ばれる。もしベータートロン波長 λ_β に比して、空洞の設置間隔 L が小さいならば、ステップ関数をフーリエ展開し、最低次オーダーの項のみ残し、(3.3.18)を連続モデルで近似できる。即ち、不連続な摂動のキックを平均してやる事に相当する。そして、このBBU連続モデルを解けば、ビーム重心の軌道発展について知見を得る。先の壁抵抗不安定性の議論の際用いたラプラス変換がここでも好都合である。何故なら、三角関数のラプラス変換は知られているし、たたみ込みの定理が使える。かくして $x(\equiv \langle \xi(\tau, s) \rangle)$ のラプラス変換 $\tilde{x}(\omega, s)$ は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left(k_\beta^2 - \frac{A \omega_\lambda^3}{\omega^2 + \omega_\lambda^2} \right) \right] \tilde{x}(\omega, s) = 0 \quad (3.3.19)$$

$$A = \frac{I_B}{I_0} \cdot \frac{Z_\perp}{Q L \gamma}$$

を充たす。(3.3.19)式において、その摂動部が $\omega = \pm i \omega_\lambda$ の近傍で急激に変動する事を考慮して、 $\omega = i \omega_\lambda + \chi$ を満足する χ を導入する。 $\omega^2 + \omega_\lambda^2 = (\omega + i \omega_\lambda)(\omega - i \omega_\lambda) = 2i \omega_\lambda \cdot \chi$ と近似すれば、強収束の仮定の下、(3.3.19)は一次独立解

$$\exp\left\{\pm ik_{\beta}\left[1 - \frac{A\omega_{\lambda}^2}{4ik_{\beta}^2\chi}\right]s\right\} \quad (3.3.20)$$

を持つ。位相部を $\Psi_{\pm}(\chi)$ おけば、 $\tilde{x}(\omega, s)$ のラプラス逆変換は

$$x(\tau, s) = 2\text{Re}\left\{\frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{x}(\omega, 0) [e^{\Psi_{+}(\chi)+(i\omega_{\lambda}+\chi)\tau} + e^{\Psi_{-}(\chi)+(i\omega_{\lambda}+\chi)\tau}] d\omega\right\} \quad (3.3.21)$$

$$\tilde{x}(\omega, 0) = \frac{x_1}{\omega}$$

右辺最初の項、ファクター2は $\omega = -i\omega_{\lambda}$ の近傍の寄与を考慮した。先の議論に習って、書き換えると、

$$x(\tau, s) = 2\text{Re}\left\{\frac{x_1}{4\pi i} \left[e^{ik_{\beta}s} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sf_{+}(\chi)}}{\omega} d\omega + e^{-ik_{\beta}s} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sf_{-}(\chi)}}{\omega} d\omega \right]\right\} \quad (3.3.22)$$

ここで $c > 0$ で

$$f_{\pm}(\chi) = \mp \frac{A\omega_{\lambda}^2}{4k_{\beta}\chi} + \frac{\chi\tau}{s} + \frac{i\omega_{\lambda}\tau}{s} \quad (3.3.23)$$

(3.3.22)の被積分関数は x についての一価関数である故分岐点は存在しない。従って積分路は単に鞍部点を通る様変形させれば良い。鞍部点は

$$\frac{df_{\pm}}{d\omega} = \frac{df_{\pm}(\chi)}{d\chi} \times \frac{d\chi}{d\omega} = \pm \frac{A\omega_{\lambda}^2}{4k_{\beta}\chi^2} + \frac{\tau}{s} = 0 \quad (3.3.24)$$

から定められる。(3.3.24)を解いて、

$$\chi_s^+ = \pm \frac{i\omega_{\lambda}}{2} \sqrt{\frac{As}{k_{\beta}\tau}} \quad (3.3.25)$$

$$\chi_s^- = \pm \frac{\omega_{\lambda}}{2} \sqrt{\frac{As}{k_{\beta}\tau}} \quad (3.3.26)$$

鞍部点 χ_s^+ は純虚数であるので、 $f_{+}(\chi_s^+)$ も又純虚数となり、Exponential Growth には寄与しないので以後、これを無視する。残り2つの鞍部点 $\chi = \pm \frac{\omega_{\lambda}}{2} \sqrt{\frac{As}{k_{\beta}\tau}}$ は丁度 $\text{Im}(\chi)$ を対称軸に両側に位置するが、もともとの積分

路が $\text{Re}(\chi)$ 部には取れない事を考慮すると、鞍部点 $\chi = -\frac{\omega_{\lambda}}{2} \sqrt{\frac{As}{k_{\beta}\tau}}$ へはアクセス出来ないと考えるのが合理的である。かくして(3.3.22)の積分は

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{sf_{-}(\chi)}}{\omega} d\omega \sim \frac{e^{sf_{-}(\chi_s^-)}}{\omega(\chi_s^-)} \times (\dots\dots\dots) \\ \sim \exp\left[\omega_{\lambda} \sqrt{\frac{As\tau}{k_{\beta}}}\right] \times (\dots\dots\dots) \quad (3.3.27)$$

で近似出来る。故にビーム重心の Exponential Growth は

$$x(\tau, s) = \langle \xi(\tau, s) \rangle \propto \exp\left[\omega_{\lambda} \left(\frac{As\tau}{k_{\beta}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad (3.3.28)$$

に従う。先の議論と同じように、Exponential Growth Length L_{BBU} を導入すると、

$$L_{\text{B.B.U}} = \frac{k_{\beta}}{A\omega_{\lambda}^2\tau} \\ = 2\pi \left(\frac{I_0}{I_B}\right) \frac{QL\gamma}{Z_{\perp}\omega_{\lambda}^2\lambda_{\beta}\tau} \quad (3.3.29)$$

各パラメーター依存性も、実に合理的に思える。表2で与えた典型的例では、 $L_{\text{BBU}} \sim 3.2\text{m}$ が与えられる。この値が e-folding distance でないにしても、可能な限りの多段化を期待する側としては、この値は小さい。図3.8(a)に純粋なBBU不安定のシミュレーション結果を示す。これは、 $\tau = 25\text{nsec}$ に位置するビームスライス重心の変位軌道発展であるが、(3.3.28)による予想と大体一致する。

不安定性の抑圧

(Landau減衰)

以上二種類の不安定性の性質について端的なモデルに基づき解説して来た。当然加速器利用の立場からは、このような不安定性を誰も望まない。たとえ、不安定性が起きるにしても出来るだけその程度を最小にしたい。この目的の為に取るべき処置は L_R 、 L_{BBU} のパラメーター依存性から判断がつく。この様な処置を越えて、もっと原理的な抑圧法は無いか周知を集め検討されて来た。

二つの不安定性に共通するのは、何れもビーム重心のベータートロン振動の振幅が指数関数的に増大し、それが壁にまで達してビームロスに到ると言う致命的なもの

である事だ。ビームを構成する粒子が同一のベータートロン振動数を持った場合、コヒーレンスの条件は初めから用意されているわけであるから事は最悪なのだろう。もし粒子個々が異なる振動数を持ったなら、どうなるのであろうか。即ち、粒子ビームがベータートロン振動数にいわゆる幅を持ったなら、事態はどう変わるものであろうか？ 今ビームHeadから下流側 τ ($\neq 0$) の位置にあるビームスライス中に存在する粒子が Δk の幅で一様に分散したベータートロン振動数 k_i を持つと仮定する。s 軸を進むにつれ、ベータートロン位相の進みは粒子一個一個によって異なる。そこで、s 軸上のある一点 ($s = 0$) で全ての粒子が同じ強さの摂動 F を受けた場合、この振動の影響は s 軸に沿って進むにつれ、ビーム重心からみると、コヒーレントな場合 ($\Delta k = 0$ の場合) と比較して、著しく小さくなって行く事が予想される。先ずこれを簡単に証明してみよう。

各粒子は次のベータートロン方程式に従う。

$$\ddot{x}_i + k_i^2 x_i = F \delta(s) \quad (3.3.30)$$

この方程式の解は

$$\begin{aligned} x_i(s) &= c_1 \sin k_i s + c_2 \cos k_i s \\ &+ \frac{F}{k_i} \int_0^s \sin[k_i(s-s')] \delta(s') ds' \\ &= c_1 \sin(k_i s) + c_2 \cos(k_i s) + \frac{F}{k_i} (k_i s) \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

であるが、 c_1 と c_2 は初期条件より決まる。ビーム重心はこれを粒子全部で平均すれば良い

$$\begin{aligned} \langle x(s) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i(s) \\ &= \langle x_0(s) \rangle + F \left\langle \frac{\sin(k_i s)}{k_i} \right\rangle \end{aligned}$$

右辺第 1 項は摂動が無い場合の重心を表わす。初期値として $\langle x_0(0) \rangle = 0$ を選択すれば、

$$\langle x(s) \rangle = F \left\langle \frac{\sin(k_i s)}{k_i} \right\rangle \quad (3.3.32)$$

粒子が全て、同一の振動数を持つのであれば、(3.3.32) は単に振動解を与えるだけである。すなわち、ある一ヶ処で受けた摂動の為重心自体がベータートロン振動を始め、おさまる事はない。他方ベータートロン振動数につ

いて全く一様分布

$$k_i = k_0 + \frac{\Delta k}{N} \cdot \left(i - \frac{N}{2} \right) (\Delta k \ll k_0) \quad (3.3.33)$$

を仮定すると

$$\begin{aligned} \langle x(s) \rangle &\approx \frac{F}{k_0} \frac{1}{N} \left\{ \sin \left[\left(k_0 - \frac{\Delta k}{2} \right) s \right] \sum_{i=0}^N \cos \left(\frac{\Delta k s}{N} i \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \left[\left(k_0 - \frac{\Delta k}{2} \right) s \right] \sum_{i=0}^N \sin \left(\frac{\Delta k s}{N} i \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

を得る。(3.3.34)式は簡単な以下の事実を教える。このビームスライスが s 軸上を $L = 2\pi/\Delta k$ 程度進めば、(3.3.34)式右辺の和は 0 になり、コヒーレントな重心のベータートロン振幅は消失する。この様な性質を、加速器物理では“Phase Mixing”と呼ぶ。実際この Phase Mixing で、先に議論したコヒーレント不安定がどの程度抑圧されるのか、以下に定量的に考察してみよう。

今、各粒子のベータートロン振動数を $k_0(1-\varepsilon)$ とおく。そして $-\frac{\sigma}{2} \leq \varepsilon \leq \frac{\sigma}{2}$ ($\sigma \ll 1$) に一様に分布すると仮定する。ビームHeadから下流へ相対位置 τ のビームスライス中ベータートロン振動数 $k_0(1-\varepsilon)$ を持つ粒子の中心軸からの変位 $\xi_\varepsilon(\tau, s)$ は次の振動ベータートロン方程式に従う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_\varepsilon(\tau, s)}{\partial s^2} + k_0^2 (1-\varepsilon)^2 \xi_\varepsilon(\tau, s) \\ = \int_0^\tau W(\tau, \tau') \langle \xi(\tau', s) \rangle d\tau' \\ W(\tau, \tau') = \begin{cases} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\tau-\tau'}} \\ A\omega_\lambda^2 \sin[\omega_\lambda(\tau-\tau')] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

すると、 $\xi_\varepsilon(\tau, s)$ の τ についてのラプラス変換 $\tilde{\xi}_\varepsilon(\omega, s)$ は

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_0^2 (1-\varepsilon)^2 \right] \tilde{\xi}_\varepsilon(\omega, s) = \tilde{W}(\omega) \langle \tilde{\xi}(\omega, s) \rangle \\ \tilde{W}(\omega) = \int_0^\infty W(\tau) e^{-\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

充たす。この方程式の形式解

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_\varepsilon(\omega, s) &= c_1 \sin(k_\varepsilon s) + c_2 \cos(k_\varepsilon s) \\ &+ \tilde{W}(\omega) \int_0^s G_\varepsilon(s, s') \langle \tilde{\xi}(\omega, s') \rangle ds' \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

ここで $G_\varepsilon(s, s')$ は Green関数

$$G_\varepsilon(s, s') = \frac{\sin[k_0(1-\varepsilon)(s-s')]}{k_0(1-\varepsilon)} \quad (3.3.38)$$

である。初期条件 $\tilde{\xi}_\varepsilon(\omega, 0) = x_1/\omega$, $\partial\tilde{\xi}_\varepsilon(\omega, 0)/\partial s = 0$ より $c_1 = 0$, $c_2 = x_1/\omega$ である。ここで(3.3.37)の両辺を粒子分布で平均を取れば、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\xi}(\omega, s) \rangle &= \frac{x_1}{\omega} \langle \sin(k_\varepsilon s) \rangle \\ &+ \tilde{W}(\omega) \int_0^s \langle G_\varepsilon(s, s') \rangle \langle \tilde{\xi}(\omega, s') \rangle ds' \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

$$k_\varepsilon = k_0(1-\varepsilon) \quad (3.3.40)$$

Green関数の粒子分布での平均は次の様に為される。

$$\begin{aligned} \langle G_\varepsilon(s, s') \rangle &= \frac{1}{\sigma} \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{\sin k_\varepsilon(s-s')}{k_\varepsilon} d\varepsilon \\ &\simeq \frac{1}{\sigma k_0} \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} \sin[k_0(s-s')(1-\varepsilon)] d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\sigma k_0^2} \left\{ -\frac{1-\cos[\alpha_-(s-s')]}{s-s'} + \frac{1-\cos[\alpha_+(s-s')]}{s-s'} \right\} \end{aligned} \quad (3.3.41)$$

ここで

$$\alpha_\pm = k_0(1 \pm \sigma/2)$$

一方、 $\langle \sin(k_\varepsilon s) \rangle$ も同様に計算され

$$\langle \sin(k_\varepsilon s) \rangle = \frac{1}{\sigma k_0} \left\{ -\frac{1-\cos[\alpha_-s]}{s} + \frac{1-\cos[\alpha_+s]}{s} \right\} \quad (3.3.42)$$

(3.3.41), (3.3.42)を(3.3.39)式に導入すれば、

$$\begin{aligned} x(\omega, s) &\equiv \langle \tilde{\xi}(\omega, s) \rangle \\ &= \frac{x_1}{\omega} \left(\frac{1}{\sigma k_0} \right) \left\{ -\frac{1-\cos(\alpha_-s)}{s} + \frac{1-\cos(\alpha_+s)}{s} \right\} \\ &+ \tilde{W}(\omega) \int_0^s \left\{ -\frac{1-\cos[\alpha_-(s-s')]}{s-s'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\cos[\alpha_+(s-s')]}{s-s'} \right\} x(\omega, s') ds' \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

x の s についてのラプラス変換を $\hat{x}(\omega, p)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \hat{x}(\omega, p) &= \frac{x_1}{\omega} \left(\frac{1}{\sigma k_0} \right) \left\{ -\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\alpha_-^2}{p^2}\right) + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\alpha_+^2}{p^2}\right) \right\} \\ &+ \tilde{W}(\omega) \sigma k_0^2 \left\{ -\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\alpha_-^2}{p^2}\right) + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\alpha_+^2}{p^2}\right) \right\} \hat{x}(\omega, p) \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

となり、 $\hat{x}(\omega, p)$ について整理すると、

$$\hat{x}(\omega, p) = \frac{\frac{x_1}{\omega} \left(\frac{1}{2\sigma k_0} \right) \log \frac{p^2 + \alpha_+^2}{p^2 + \alpha_-^2}}{1 - \frac{\tilde{W}(\omega)}{2\sigma k_0^2} \log \frac{p^2 + \alpha_+^2}{p^2 + \alpha_-^2}} \quad (3.3.45)$$

\hat{x} のラプラス逆変換は、

$$x(\omega, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\frac{x_1}{\omega} \left(\frac{1}{2\sigma k_0} \right) \log \frac{p^2 + \alpha_+^2}{p^2 + \alpha_-^2}}{1 - \frac{\tilde{W}(\omega)}{2\sigma k_0^2} \log \frac{p^2 + \alpha_+^2}{p^2 + \alpha_-^2}} e^{ps} dp \quad (3.3.46)$$

ここで c は被積分関数の全ての極の実部の右側に取らねばならない。

まず、この被積分関数は、4個の対数分岐点

$$p = \pm i\alpha_+, \pm i\alpha_- \quad (3.3.47)$$

と、2個の極

$$p_c^\pm = \pm i \left[\frac{-\alpha_-^2 + \alpha_+^2 e^{-\sigma\theta(\omega)}}{-1 + e^{-\sigma\theta(\omega)}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.3.48)$$

$$\theta(\omega) = 2\tilde{W}(\omega)k_0^2$$

を持つ事が指摘される。積分(3.3.46)を得る為に、先ず
図3.15の様に積分路 Γ を考える。

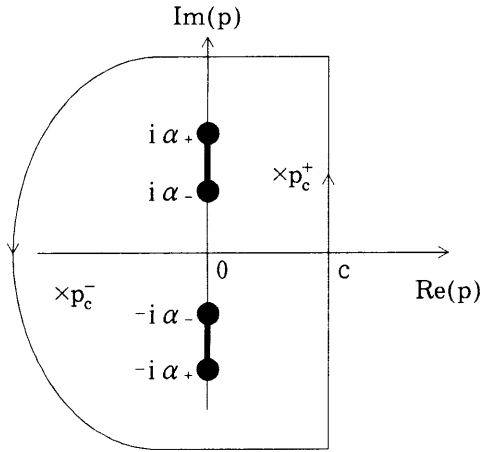


図3.15 積分路

半径 $R \rightarrow \infty$ において半円周上の積分を0にする為には、
 $p = c$ をはさんで左側の半円がユニークな取り方である。
切断はこの半円の中に入る故問題ない。又、二つの極も
常に半円の中にある。すると、この閉積分路 Γ に沿う積
分は(3.3.46)そのものとなる。更に留数定理を使えば、

$$x(\omega, s) \propto c_1(\omega)e^{p_c^+ s} + c_2(\omega)e^{p_c^- s} \quad (3.3.49)$$

を得る。後の議論に関係しない所を、 $c_1(\omega), c_2(\omega)$ で
代表させた。最後に残ったのは $x(\omega, s)$ のラプラス逆
変換でビーム重心の解を求める事である。それは、

$$\begin{aligned} \langle \xi(\tau, s) \rangle &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x(\omega, s) e^{\omega\tau} d\omega \\ &\propto \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c_1(\omega) e^{p_c^+(\omega)s + \omega\tau} d\omega \\ &+ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} c_2(\omega) e^{p_c^-(\omega)s + \omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (3.3.50)$$

ここに現れた積分を正確に実行する事は、これ又絶望的
である。そこで又もや、十分に大きい s の近似で、これ
らの積分の漸近形を知る必要がある。被積分関数の内、
 s に依存する指数部

$$X = \pm ik_0 \left[1 + \sigma \cdot \frac{e^{-\sigma\theta} + 1}{e^{-\sigma\theta} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} s$$

が $\sigma \rightarrow 0$ の極限で当然の事ながら(3.3.8)に帰着する事
を証明出来る。強収束の仮定より、

$$X = \pm ik_0 \left[1 + \frac{\sigma}{2} \frac{e^{-\sigma\theta} + 1}{e^{-\sigma\theta} - 1} \right] s \quad (3.3.51)$$

$\sigma \rightarrow 0$ の極限で

$$\begin{aligned} X &= \pm ik_0 \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\sigma}{2} \frac{2 - \theta\sigma}{(-\theta\sigma)} \right] s \\ &= \pm ik_0 \left[1 - \frac{\widetilde{W}(\omega)}{2k_0^2} \right] s \end{aligned}$$

となる事を注意しておく。先の議論と同様に、被積分関
数の ω にのみ依存するExponentialの項を $e^{sf_{\pm}(\omega)}$ とおけ
ば、

$$f_{\pm}(\omega) = \pm \frac{ik_0\sigma}{2} \cdot \frac{e^{-\sigma\theta(\omega)} + 1}{e^{-\sigma\theta(\omega)} - 1} + \frac{\omega\tau}{s} \quad (3.3.52)$$

である。さてこれで漸近形を求めるのに、鞍部点法を用
いる準備は出来た。

BBUの場合：即ち $\widetilde{W}(\omega) = \frac{A\omega_\lambda^3}{\omega^2 + \omega_\lambda^2}$ の時、

$\omega = i\omega_\lambda + \chi$ とおけば

$$\widetilde{W}(\omega) \simeq -\frac{iA\omega_\lambda^2}{2\chi} \quad (3.3.53)$$

すると $\theta(\omega)$ の代わりに

$$\theta(\chi) = i \frac{4k_0^2}{A\omega_\lambda^2} \cdot \chi \quad (3.3.54)$$

を用いて、鞍部点は、

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{d\chi}{d\omega} \cdot \frac{df_{\pm}(\chi)}{d\chi} = \pm \frac{ik_0\sigma^2 e^{-\sigma\theta}}{(e^{-\sigma\theta} - 1)^2} \left(\frac{d\theta}{d\chi} \right) + \frac{\tau}{s} = 0 \quad (3.3.55)$$

を解いて求め得る。 $e^{-\sigma\theta(\chi_s)} = Y$ とおけば

$$\pm ik_0\sigma^2 \cdot \left(i \frac{4k_0^2}{A\omega_\lambda^2} \right) \frac{Y}{(Y-1)^2} + \frac{\tau}{s} = 0$$

$$\mp \frac{4k_0^3 \sigma^2}{A\omega_\lambda^2} \frac{Y}{(Y-1)^2} + \frac{\tau}{s} = 0$$

$$(Y-1)^2 + B_\pm Y = 0$$

ここで

$$B_\pm = \mp \frac{4k_0^3 \sigma^2}{A\omega_\lambda^2} \left(\frac{s}{\tau} \right) (\equiv \mp D)$$

すると、

$$Y = [-B_\pm + 2 \pm \sqrt{B_\pm^2 - 4B_\pm}] / 2 \quad (3.3.56)$$

各々の積分について、2つずつの鞍部点の存在が認められる。この内、 $\sigma \rightarrow 0$ の極限で、先に求めた $\chi_s = \frac{\omega_\lambda}{2} \sqrt{\frac{As}{k_0 \tau}}$ に接続する鞍部点は、

$$\chi_s = i \frac{A\omega_\lambda^2}{4k_0^2 \sigma} \ln \left[\frac{-D+2-\sqrt{D^2-4D}}{2} \right] \quad (3.3.57)$$

である。 $0 < D < 4$ においては、対数項の中は複素数であるから、これを $\text{re}^{i\varphi}$ とおけば、

$$r = 1, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{D(4-D)}}{-2+D} \quad (3.3.58)$$

$D \geq 4$ において、対数項の中は負の値を取る。これを

$$\frac{-D+2-\sqrt{D^2-4D}}{2} = \frac{D-2+\sqrt{D^2-4D}}{2} \cdot e^{-\pi i} \quad (3.3.59)$$

とおく。すると χ_s は

$$0 < D < 4 \text{ で } \chi_s = -\frac{A\omega_\lambda^2}{4k_0^2 \sigma} \varphi \quad (3.3.60)$$

$$D \geq 4 \text{ で } \chi_s = \frac{A\omega_\lambda^2}{4k_0^2 \sigma} \pi + i \left(\frac{A\omega_\lambda^2}{4k_0^2 \sigma} \right) \left(\frac{D-2+\sqrt{D^2-4D}}{2} \right) \quad (3.3.61)$$

一方、この χ_s は

$$\frac{e^{-\sigma \theta(\chi_s)} + 1}{e^{-\sigma \theta(\chi_s)} - 1} = \sqrt{1 - 4/(\sigma^2 D)} \quad (3.3.62)$$

を与える。(3.3.60), (3.3.61)を用いて

$$\text{Re}[f-(\chi_s)] = \frac{k_0}{2} \sqrt{\frac{A\omega_\lambda^2}{k_0^3} \left(\frac{\tau}{s} \right) - \sigma^2} - \frac{A\omega_\lambda^2}{4k_0^2 \sigma} \left(\frac{\tau}{s} \right) \varphi \quad (3.3.63)$$

に到達する。

かくして、ビーム重心の Exponential Growth は近似的に

$$\begin{aligned} x(\tau, s) &= \langle \xi(\tau, s) \rangle \propto \exp\{s \text{Re}[f-(\chi_s)]\} \\ &= \exp \left\{ \frac{k_0 s}{2} \sqrt{\frac{A\omega_\lambda^2}{k_0^3} \left(\frac{\tau}{s} \right) - \sigma^2} - \frac{A\omega_\lambda^2 \tau}{4k_0^2 \sigma} \varphi \right\} \end{aligned} \quad (3.3.64)$$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{\sqrt{D(4-D)}}{-2+D} & D < 4 \\ -\pi & D \left(\equiv \frac{4k_0^3 \sigma^2}{A\omega_\lambda^2} \left(\frac{s}{\tau} \right) \right) \geq 4 \end{cases}$$

に従う。軌道を進むに従って(3.3.64)の Exponential 第1項は増大係数が小さくなり $D=4$ で虚数に転じる。又第2項は始め $\varphi \leq 0$ 故、増大に寄与するが、 $D \geq 4$ で定数になるので、それ以後ビーム重心のベータートロン振動の振幅が増大する事はない。これが定量的に見た Landau減衰である。

一方、壁抵抗不安定の場合は数学的計算がもっと複雑になる。腕力に覚えのある読者は試みると良いだろう。

ここで議論した抑圧機構を Landau減衰と呼ぶ。Landauは外場のない様なプラズマ中の粒子の分布関数に対する線形化された Vlasov方程式を初期値問題として解き、プラズマ中の縦波はもし粒子の速度分布が Maxwell分布なら必ず減衰する事を指摘したのであって、ここで取り上げた問題を直接解いたわけではない。

それでは、不安定抑圧に本質的に働きをする振動数の拡がりは一体どうやって産み出し得るだろうか？ 2章の議論の中で触れた様に、ベータートロン振動数は粒子のエネルギーによって異なる。実際の粒子ビームには、あるエネルギー拡がりがある。従って、コースティング・ビームの場合、このエネルギー拡がり、即ベータートロン振動数の拡がりとなる。一方バンチしたビームの場合では、バンチを維持する為、縦方向運動量空間中の RFバケツによって閉じ込められているので、粒子エネルギーはシンクロトロン運動に従って、中心エネルギーの廻りを振動する。シンクロトロン波長がベータートロン波長に比較して極端に長い超高エネルギー電子線型加速器ではバンチの運動量空間での拡がり、そ

のままベータートロン振動数の幅に寄与すると考えて良い。対コヒーレント不安定性に関しては、コースティングビームと同等と考えて良い。一方、多段マイクロ波 FEL の様にシンクロトロン波長とベータートロン波長とがほぼ同じオーダーの場合、事情は異なる。運動量空間での早い回転により、粒子エネルギーは同一の中心（共鳴）エネルギーであると考えねばならない。この為、ベータートロン振動数の拡がりによる不安定性の抑圧は起こらない。起きたとしても僅かである。この辺りの数学的証明については文献 7 に詳しい。

後者の例では、ビームのエネルギー幅によるベータートロン振動数の拡がり期待出来なかった。前者の例でも、エネルギー幅が十分でなければ、やはり不安定性は成長する。その様な状況で考えられるのは、エネルギー幅を期待するのではなく、ベータートロン振動数の拡がりを直接作り出す方法である。加速器の粒子はコヒーレントな不安定性が起きていなくても、各々異なる有限なベータートロン振幅を持つ。そこで、もしビーム収束に非線型の集束力が導入されれば、個々の粒子のベータートロン振動数はその振幅に応じて異なる。この手法は、ビームラインに多極電磁石を導入するか、イオンチャンネルガイディングの様に、始めから連続的非線型収束系を準備するか、どちらかによって実現し得る。

今の処、ビームの空間分布と非線型収束力を正確に取り込んで Landau 減衰を定量的に納得ゆく形で証明した仕事は無いが、実験的にはすでに証明済みである。リバモア研究所の A T A での結果 /8/ を図 3.16 に示す。

(B N S 減衰)

Landau 減衰はビーム重心に寄与する粒子のベータートロン振動数の拡がり本質的役割を果たした。しかし、ここで注目したいのは Wake 場を通じての相互作用はビーム Head からビーム下流側へ向った一方的なものである事だ。この特質に目を向けると次の様なアイデアが浮かぶ。もしビーム下流に沿ってベータートロン振動数が違っていたら、Head から Tail へ向かう相互作用のコヒーレンスを避け得るのではないかと。即ち、 k_β が τ の関数、一番簡単なのは $k_\beta(\tau) = k_0(1 + \alpha\tau)$ の様に τ の線型関数の時、不安定性は抑圧されるのではないかと。その様な発想の下、1983 年の加速器国際会議で、ロシアの Balakin, Novokhatsky, Smirnov/9/ がこの方法を提案した。彼らのアイデアが最初なのか、筆者はつづさにそれまでの文献を検討してはいないので解らないが、最近この方法による不安定抑圧を B. N. S 減衰と言う具合に固有名詞が冠され呼ばれるようになった。

先の議論で用いた Wake 関数の場合、B N S 減衰を定量

的に取り扱うのは数学的にかなり難しい。そこで、ここではビーム Head が誘起する Wake の時間的変動が無視出来るケースを論じてみよう。実際には、パルス長が、固有モードの振動周期に比して十分短い場合等がこれに該当する。ここで考えている様な高密度電子ビームの典型的な加速空洞では $2\pi\omega \sim 800\text{MHz}$ 程度であるから、パルス長 $< 1\text{nsec}$ でなくてはならない。従って、この議論がそのまま我々のビーム ($\tau \sim 50\text{nsec}$) に適用出来るわけではないが、その B N S 減衰の特徴を知る目的で以下に展開する。

$$\frac{\partial^2 \langle \xi(\tau, s) \rangle}{\partial s^2} + k_\beta^2(\tau) \langle \xi \rangle = A \int_0^\tau \xi(\tau', s) d\tau' \quad (3.3.65)$$

$$k_\beta(\tau) = k_0(1 + \alpha\tau) \quad (\alpha > 0)$$

に従う。 $x = \langle \xi(\tau, s) \rangle$ の s についてのラプラス変換 $\hat{x}(\tau, p)$ は

$$p^2 \hat{x} - px(\tau, 0) + k_\beta^2(\tau) \hat{x} = A \int_0^\tau \hat{x}(\tau', p) d\tau' \quad (3.3.66)$$

を充たす。ここで $x(\tau, 0) = x_1$ である。

(3.3.66) の両辺を τ について微分を取る。

$$\left[p^2 + k_\beta^2(\tau) \right] \frac{\partial \hat{x}}{\partial \tau} + 2k_\beta k'_\beta \hat{x} = A \hat{x}(\tau, p)$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial \tau} = \frac{A - 2k_\beta k'_\beta}{p^2 + k_\beta^2(\tau)} \hat{x}$$

$$k_\beta k'_\beta = k_0(1 + \alpha\tau) \cdot k_0\alpha \cong \alpha k_0^2 \quad \text{とおけば}$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial \tau} = \frac{A - 2\alpha k_0^2}{p^2 + k_\beta^2(\tau)} \hat{x} \quad (3.3.67)$$

(3.3.67) を初期条件

$$\begin{aligned} \hat{x}(0, p) &= \int_0^\infty x(0, s) e^{-ps} ds \\ &= \int_0^\infty x_1 \cos(k_0 s) e^{-ps} ds \\ &= \frac{x_1 p}{p^2 + k_0^2} \end{aligned} \quad (3.3.68)$$

の下に、解けば、

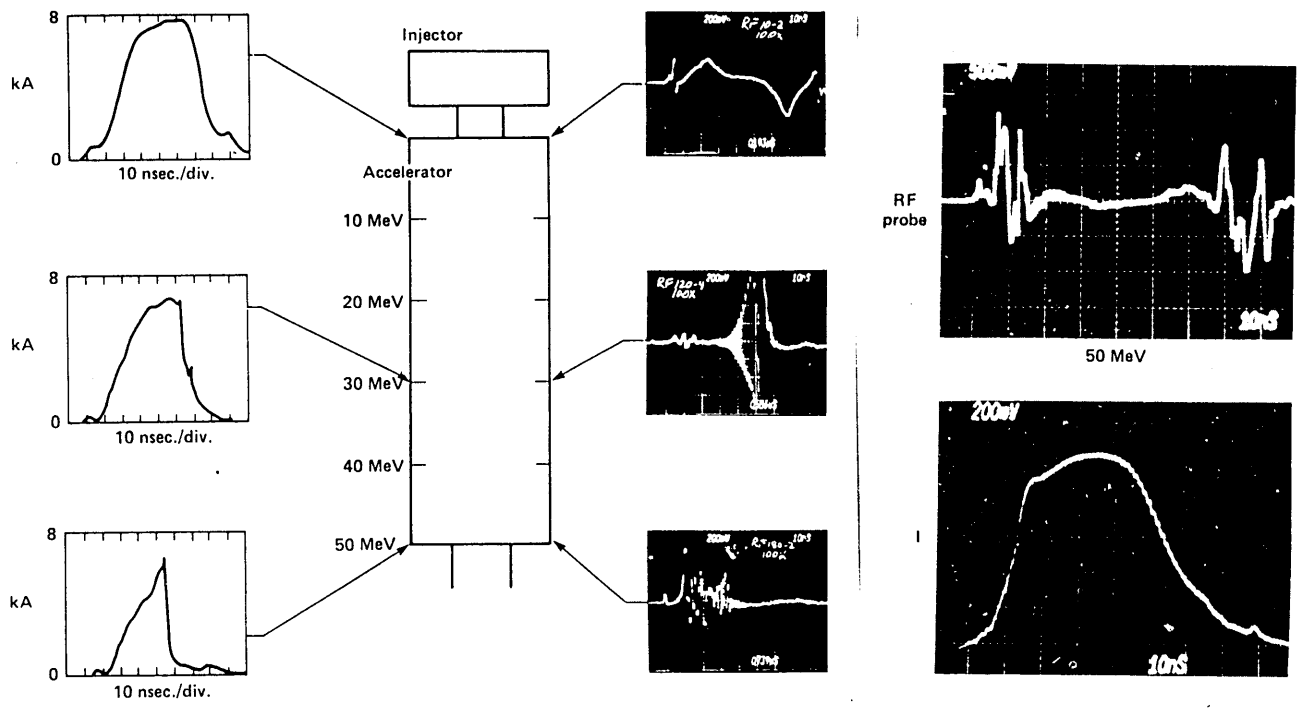


図3.16 ATAにおけるBBUのLandau減衰

左：ソレノイドガイディングの時のビーム電流プロフィール B_θ ループ信号（ビーム電流が作る B_θ の変動を観測、従ってビーム電流の立ち上がり、立ち下がり、及び重心の変動が促えられる）明らかにビームTail側に強いBeam Break-Up が見いだされる。

右：イオンチャンネルガイドの時の、加速器最下流で見た B_θ ループ信号と電流プロフィール。
ビームコアについては安定に伝播している事を示す。

$$\begin{aligned}\hat{x}(\tau, p) &= \frac{x_1 p}{p^2 + k_0^2} \exp \left[\int_0^\tau \frac{A - 2ak_0^2}{p^2 + k_\beta^2(\tau')} d\tau' \right] \\ &= \frac{x_1 p}{p^2 + k_0^2} \exp \left\{ (A - 2ak_0^2) \int_0^\tau \frac{d\tau'}{p^2 + k_\beta^2(\tau')} \right\}\end{aligned}\quad (3.3.69)$$

後の積分で $p = \pm ik_0$ 近傍の寄与が dominant である事を考慮して $p = +ik_0 + \varepsilon$ とおけば、

$$\begin{aligned}\frac{p}{p^2 + k_0^2} &\sim \frac{1}{2\varepsilon} \\ p^2 + k_\beta^2 &= (p + ik_\beta)(p - ik_\beta) \\ &\simeq 2ik_0[ik_0\tau + \varepsilon - ik_0(1 + \alpha\tau)] \\ &= 2ik_0(\varepsilon - iak_0\tau)\end{aligned}$$

で近似出来る。これらを (3.3.69) に導入すれば、

$$\begin{aligned}\hat{x}(\tau, p) &= \frac{x_1}{2\varepsilon} \exp \left\{ \frac{A - 2ak_0^2}{2ik_0} \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\varepsilon - iak_0\tau'} \right\} \\ &= \frac{x_1}{2\varepsilon} \exp \left\{ \frac{A - 2ak_0^2}{2ak_0^2} \ln \frac{\varepsilon - iak_0\tau}{\varepsilon} \right\}\end{aligned}\quad (3.3.70)$$

を得る。 \hat{x} のラップラス逆変換は

$$\begin{aligned}x(\tau, s) &= 2\text{Re} \left\{ \frac{e^{ik_0s}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. \exp \left[\frac{A - 2ak_0^2}{2ak_0^2} \ln \left(\frac{\varepsilon - iak_0\tau}{\varepsilon} \right) + \varepsilon s \right] d\varepsilon \right\}\end{aligned}\quad (3.3.71)$$

と書ける。右辺の積分は、例によって鞍部点法を用いて実行し得る。

$$f(\varepsilon) = \frac{A - 2ak_0^2}{2ak_0^2 s} \ln \left(\frac{\varepsilon - iak_0\tau}{\varepsilon} \right) + \varepsilon \quad (3.3.72)$$

とおけば鞍部点は、

$$\frac{df}{dp} = \frac{d\varepsilon}{dp} \cdot \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{A - 2ak_0^2}{2ak_0^2 s} \left[\frac{1}{\varepsilon - iak_0\tau} - \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 = 0$$

の解であり、即ち

$$\varepsilon_s^\pm = \frac{ak_0\tau}{2} \left\{ i \pm \sqrt{-1 - \frac{4iB}{ak_0\tau}} \right\} \quad (3.3.73)$$

$$B = \frac{A - 2ak_0^2}{2ak_0^2 s} (> 0) \quad (A > 2ak_0^2 \text{ を仮定})$$

(3.3.73) の平方根の中身を $re^{i\theta}$ とおけば、

$$\begin{cases} r = \sqrt{1 + \left(\frac{4B}{ak_0\tau} \right)^2} \\ \theta = \tan^{-1} \left(\frac{4B}{ak_0\tau} \right) \quad \left(-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (3.3.74)$$

(3.3.74) を用いて、 $\ln[(\varepsilon_s^+ - iak_0\tau)/\varepsilon_s^+]$ を計算すると、

$$\ln \frac{\varepsilon_s^+ - iak_0\tau}{\varepsilon_s^+} = \ln \frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \ln(r_2/r_1) + i(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.3.75)$$

ここで

$$\begin{cases} r_1^2 = r + 1 + 2r^{1/2} \sin \theta/2 \\ r_2^2 = r + 1 - 2r^{1/2} \sin \theta/2 \\ \tan \theta_1 = \frac{1 + r^{1/2} \sin(\theta/2)}{r^{1/2} \cos(\theta/2)} \\ \tan \theta_2 = \frac{-1 + r^{1/2} \sin(\theta/2)}{r^{1/2} \cos(\theta/2)} \end{cases}$$

ε_s^+ と (3.3.75) を用いると、先の被積分関数の位相部

$$\begin{aligned}sf(\varepsilon^+) &= \frac{sB}{2} \ln(r_2/r_1)^2 + r_1 \cos \theta_1 \frac{(\alpha\tau)(k_0s)}{2} \\ &\quad + i \left[sB(\theta_2 - \theta_1) + r_1 \sin \theta_1 \frac{(\alpha\tau)(k_0s)}{2} \right] \\ &= \frac{sB}{2} \ln \frac{r + 1 - 2r^{1/2} \sin(\theta/2)}{r + 1 + 2r^{1/2} \sin(\theta/2)} + r^{1/2} \cos(\theta/2) \frac{(\alpha\tau)(k_0s)}{2} \\ &\quad + i \left\{ sB(\theta_2 - \theta_1) + \left(1 + r^{1/2} \sin(\theta/2) \right) \frac{(\alpha\tau)(k_0s)}{2} \right\}\end{aligned}\quad (3.3.76)$$

と書き表わせる。この結果 Exponential Growth はこの位相の実部によって決まる。

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\operatorname{sf}(\varepsilon_s^+)] &= \frac{sB}{2} \ln \left[\frac{r+1-2r^{\frac{1}{2}}\sin(\theta/2)}{r+1+2r^{\frac{1}{2}}\sin(\theta/2)} \right] \\ &\quad + r^{\frac{1}{2}}\cos(\theta/2) \frac{(\alpha\tau)(k_0s)}{2} \\ &= \frac{sB}{2} \ln \left[\frac{\sqrt{r+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{r+1}-\sqrt{2}} \right] + \sqrt{\frac{r-1}{2}} \cdot \frac{(\alpha\tau)(k_0s)}{2} \end{aligned} \quad (3.3.77)$$

$\alpha \rightarrow 0$ の極限で(3.3.81)式右辺の第1項及び第2項が、それぞれ $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Ars}{k_0}}$ になる事が証明出来る。第2項をオリジナルのパラメーターで書き換えれば、

$$\frac{k_0\tau s}{2\sqrt{2}} \sqrt{\left[a^4 + \left[\frac{2(A-2ak_0^2)}{k_0^3\tau s} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} - a^2} \quad (3.3.78)$$

α の増大に比例して、この値は小さくなる。即ちベータートロン振動数の勾配が大きければ大きい程 Exponential Growth が抑圧される。しかし $A > 2ak_0^2$ である限り、 s 軸のあるところでこの Growth が飽和するという事はない。第1項の α 依存性はそれ程明瞭ではないが、第2項と傾向は同じである。 $\alpha = A/k_0^2$ では、鞍部点と分岐点完全に重なる。この時のビーム重心の挙動は(3.3.71)式

$$x(\tau, s) \propto e^{ik_0s} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\varepsilon s}}{\varepsilon} d\varepsilon \quad (3.3.79)$$

に戻った方が解り易い。積分は明らかに $e^{0 \cdot s}$ であるから、ビーム重心の Exponential Growth はない。次に $\alpha < 0$ の場合はどうであろうか？ 積分路上で取り得る鞍部点が変わる。 $\operatorname{Re}(\varepsilon)$ の正側に、 ε_s^- が位置する。そして Exponential Growth に寄与する位相実部は

$$\operatorname{Re}[\operatorname{sf}(\varepsilon_s^-)] = \frac{sB}{2} \ln \frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{r+1}+\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{r-1}{2}} \frac{(\alpha\tau)(k_0s)}{2} \quad (3.3.80)$$

と書ける。一見すると(3.3.77)と変わらない様に見えるかもしれないが、そうではない。(3.3.77)では α が $A/2k_0^2$ に近づくに従って、 B は急速に0に近づき、 $r \rightarrow 1$ となる。従って Growth は急速に消失してしまう。一方、 $\alpha < 0$ の場合も α の増大と共に r は1に近づくが、その程度ははるかに緩やかである。かくして、固定した s 、 τ において $|\alpha|$ が等しい正負の二つを比較すると Re

$[\operatorname{sf}(\varepsilon_s)]$ は完全にアンバランスになる。これが BNS 減衰の一つの特徴かもしれない。

ビームパルスに沿ってベータートロン振動数に傾きを付ける方法は二、三考えられる。もしビームパルス長が 50nsec 程度であれば、収束用電磁石に 2.5MHz で励磁される補助コイルを設ければ、時間的に変動する収束系を作り得る。収束力が時間軸で傾きを持った処で、このビームを通過させれば、ビーム Head から Tail にかけて、確かにベータートロン振動数は傾きを持つ。しかし早い立ち上がり故、渦電流が大きく、ビームパイプとして金属は使えない。内側に薄く導電性の金属をコーティングしたセラミックパイプしか無いだろう。

もう一つの方法は、ビームパルスの Head から Tail にかけてのビームエネルギーに傾きを付ける事である。即ち、 $\gamma(\tau) = \gamma_0(1 - \alpha\tau)$ 。誘導加速ギャップにかかる電圧のフラットトップにわずかに傾きを持つ様工夫する事によって、不可能ではないかもしれない。しかしながら、ビーム Head から Tail にかけてエネルギー差を持った粒子ビームを、マイクロ波 FEL の駆動ビームとして使用する場合は別な問題を誘起する。増幅されたマイクロ波の位相の一様性等のマイクロ波の質に、このビームエネルギーの非均一性が本質的に影響して来る事があるが、その様なケースにはこの方法は採用し得ない。何れにしろ、この方法で不安定性を抑圧したという実験報告を筆者はまだ聞かない。

(BBUモード Detuning)

ここで考える BBUモードは局在した空洞励起された Wake である事は先に断った。もしこのモードの固有振動数が、各空洞毎に異なっていたら、やはりコヒーレンスは避け得るだろう。特に、deflection mode の振動数が一様な勾配を持ってずれた加速空洞列を想定する。

ビーム重心の変動 $\langle \xi(\tau, s) \rangle$ は方程式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_\beta^2 \right] \langle \xi(\tau, s) \rangle = A\omega_\lambda^2(s) \int_0^\tau \sin[\omega_\lambda(s)(\tau - \tau')] \langle \xi(\tau', s) \rangle d\tau' \quad (3.3.81)$$

に従う。ここで $\omega_\lambda(s) = \omega_0(1 + as)$ であり、 α は detuning パラメーターと呼ぶ。 τ について $x = \langle \xi(\tau, s) \rangle$ のラプラス変換 $\tilde{x}(\omega, s)$ は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_\beta^2 \right) \tilde{x} = A \frac{\omega_\lambda^3(s)}{\omega^2 + \omega_\lambda^2(s)} \tilde{x} \quad (3.3.82)$$

を満足する。 $\omega = i\omega_0 + \chi$ とおき、主要項を残せば（当然 $\omega = -i\omega_0 + \chi$ も存在するが、これからの寄与は後でカウントする）、

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left[k_\beta^2 - \frac{4\omega_0^2}{2i(\chi - i\omega_0 as)} \right] \right\} \bar{\chi} = 0 \quad (3.3.83)$$

を得る。 $\alpha \ll 1$ を考慮すれば、ベータートロン波長に比して摂動項の変化はゆっくりであると考えて良いから、WKB近似で上の方程式を解く。その一次独立解は

$$k^{-\frac{1}{2}}(s) \exp\left[\pm i \int_0^s k(s') ds'\right] \quad (3.3.84)$$

ここで

$$k(s) = k_\beta \left[1 - \frac{A\omega_0^2}{4ik_\beta^2(\chi - i\omega_0 as)} \right] \quad (3.3.85)$$

(3.3.84)の位相項は

$$\Psi_\pm(s) = \pm ik_\beta \left[s - \frac{A\omega_0}{4ak_\beta^2} \ln \frac{\chi - i\omega_0 as}{\chi} \right] \quad (3.3.86)$$

と求まる。かくして、 \hat{x} のラプラス逆変換は

$$x(\tau, s) = 2\text{Re} \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{X_1}{\omega} [e^{\Psi_+(s)} + e^{\Psi_-(s)}] e^{\omega\tau} d\omega \right\}$$

右辺の頭のファクター2は先程述べた $\omega = -i\omega_0$ 近傍からの寄与を考慮した。鞍部点法によって大きい s での、上の積分の漸近形を求めてみよう。関数 $[\Psi_+(s) + \omega\tau]/s$ の鞍部点は純虚数になるので Exponential Growthに寄与しない。従って以下の議論から除く。一方関数 $[\Psi_-(s) + \omega\tau]/s$ の鞍部点は

$$\frac{d\Psi_-}{d\omega} + \frac{\tau}{s} = \frac{d\Psi_-}{d\chi} \frac{d\chi}{d\omega} + \frac{\tau}{s} = 0 \quad (3.3.87)$$

の解であり、

$$\chi_s^\pm = \omega_0 as \left\{ i \pm \left[\frac{A}{\alpha^2 \tau k_\beta s} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} / 2 \quad (3.3.88)$$

で与えられる。二つの鞍部点は、切断を図3.17に見られる様に $\text{Im}(\chi)$ 軸上を選ぶならば、これを挟んで対称に位置する。

$$s = s_c = A/(\alpha^2 \tau k_\beta) \quad (3.3.89)$$

で二つの鞍部点はマージしてしまう。その後 ($s > s_c$) は、 $\text{Im}(\chi)$ 軸を χ_s^+ は上へ χ_s^- は下方へスプリットして動く。そこでは χ_s^\pm が純虚数であるので Exponential Growthには寄与しない。即ち、これは Critical Point $s = s_c$ を越えて不安定は成長しない事を意味する。先ず $s < s_c$ の領域で成立する漸近形を求める為に積分路を χ_s^+ を通る様に歪めてやる。すると鞍部点近傍だけで積分を近似出来る。計算の詳細はオリジナルの文献10を参照してもらおう事にして、ビーム重心の Exponential Growthは以下の式で与えられる。

$$\xi(\tau, s) = \frac{\xi_1}{2\pi} \text{Re} \left\{ \frac{\Gamma(1/3)}{3i\omega_0} \left| \frac{1}{6} \frac{8\tau}{(as_c)^2 \omega_0^2} \left(\frac{3s_c}{s} - 4 \right) \right|^{-\frac{1}{3}} \times \exp \left[-\frac{A\omega_0}{4ak_\beta} \zeta + \frac{(\omega_0\tau)(as)}{2} \left(\frac{s_c}{s} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (3.3.90)$$

ここで

$$\zeta = \begin{cases} \tan^{-1} \left[\frac{-2\sqrt{(s_c/s) - 1}}{s_c/s - 2} \right] & s \leq s_c \\ -\pi & s > s_c \end{cases}$$

(上の式において Exponential項の前は、厳密に鞍部点法を使って計算した結果である。本来この種の項はいつも存在する。この小節の前半の議論では繁雑になるので省略した。) $\alpha \rightarrow 0$ の極限で、これは先に求めた(3.3.28)式、即ち $\exp(A\omega_0^2 \tau s / k_\beta)$ に一致する。

s_c を越え、不安定が成長しない事は述べたが、振動の振幅は飽和した状態を維持するであろう。この振幅の飽和値は(3.3.90)式から

$$|\xi|_{\text{sat}} = \frac{\xi_1}{\pi} \frac{\Gamma(1/3)6^{\frac{1}{3}}}{6} \left[\frac{(as_c)^2}{\omega_0\tau} \right]^{\frac{1}{3}} \exp \left[\frac{\pi}{4} (\omega_0\tau)(as_c) \right] \quad (3.3.91)$$

が期待される。 s_c とこの $|\xi|_{\text{sat}}$ の表式から解る様に、 α が大きければ大きい程飽和に達する Critical Point s_c と飽和値 $|\xi|_{\text{sat}}$ は小さくなる ($as_c = A/(\alpha \tau k_\beta)$) である事に注意)。

次に、この種の計算が実際のシミュレーション結果（ここで言うシミュレーションとは、一番原始的方程式 (3.3.81) のその前の段階にある不連続モデルを、馬鹿正直に計算機によって解く事を意味する）と、どの程度一致するのかを比較しておくのも参考になるだろう。表 2 の条件の下、 $0 \leq \alpha \leq 5 \times 10^{-4} \text{m}^{-1}$ の範囲で $\tau = 25 \text{ns}$ のビームスライス重心を s の関数として求めた。図 3.18(a) はそれを示す。図 3.18(b) は図 3.18(a) の拡大図で、この時の α 値は $3.3 \times 10^{-4} \text{m}^{-1}$ であった。N=100 段位まで Exponential に不安定が成長した後、飽和するのが見て取れるであろう。図 3.19 に飽和に到る s と飽和したビーム重心の振動振幅を α の関数としてプロットして、(3.3.89) と (3.3.91) から得られる理論値と比較される。かなり良い一致を見出すであろう。これが BBU モード Linear Detuning による BBU 不安定抑圧である。

Deflection Mode の周波数は一般に、空洞の幾何学的形状によって決まる。特に、空洞の径に依存する。設計の段階でこの径を少しずつずらした空洞の使用を前提にすれば、この方法は使える。実際 200 段、全長 300m 程度の多段システムで、BBU を抑止する為、最大約 10% 程度の Detuning が必要である。空洞半径にこの程度の自由度を持たせる事は、少なくとも建設前に準備すれば不可能ではない。

コヒーレント不安定性の議論は、初めの目論見より少し繁雑になった。全体として数学的に余り厳密ではないので、見落とした部分や、筆者の思い違いがあるかもしれない。しかし、ある程度最後まで解析的に取り扱えたのは、使った Wake 関数の形に依存するところが大きい。より現実に近い Wake が解析的に表現出来たとしても、最後まで解析的に議論を進め得るとは限らない。その様な場合、人は数値計算に頼るであろう。色々な条件の下に、ある種の不安定性抑止を計算の Output として見出すかもしれない。その背後にあるメカニズムを理解する際、ここで展開した議論が何等の形で役立つであろう。

繰り返す様であるが、高密度粒子ビームの応用は、将来加速器世界の大きな流れとなる筈である。その時、コヒーレント不安定は決して避けて通れない障害となる。その様な理由から、この入門の講義テーマとして選んだ。

3-4 節 エピローグ

この章の議論を通じてビームエミッタンスについては全く触れなかった。それには理由がある。本格的に論じるには、エミッタンス増大の原因となるメカニズムを考慮して、システムティックな議論を展開せねばならない故、もう一つ長い節を設けねばならないという事情があ

る。又、高密度電子ビームを利用する側でビームエミッタンスへの要求が大きく異なる為、余り一般論としては馴染みにくいという現実がある。したがって、マイクロ波 FEL の様な高密度電子ビームの応用面の解説をする時、取り上げるべきテーマと判断した次第である。

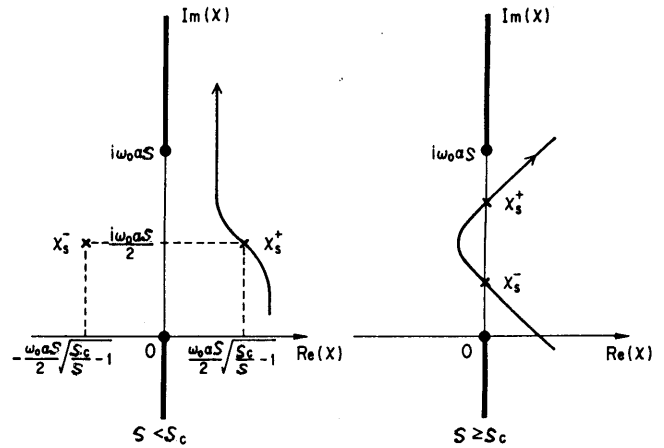
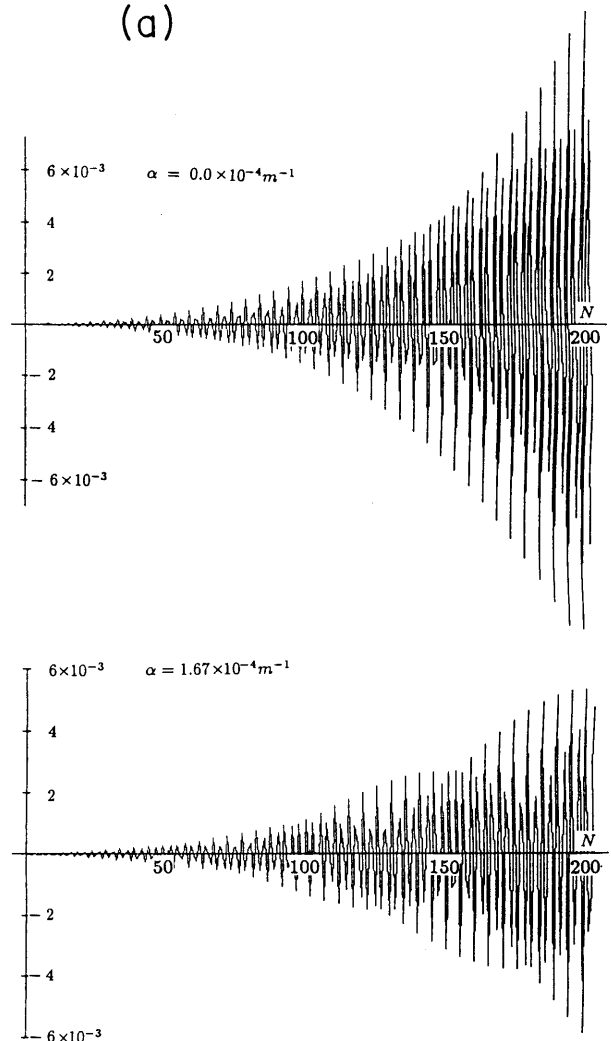


図 3.17 積 分 路

(a)



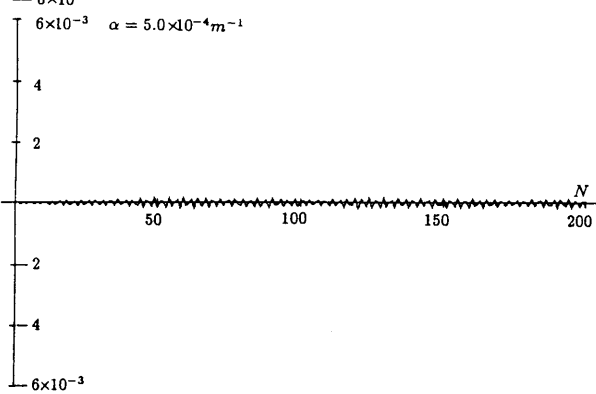
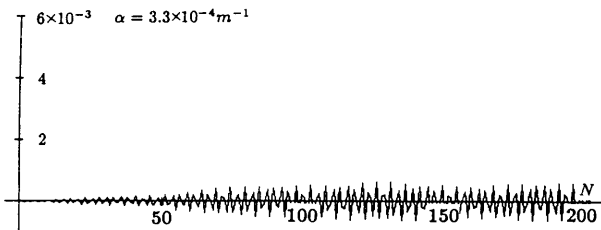
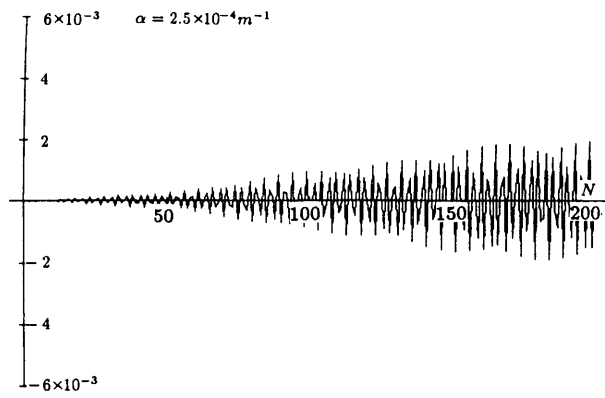


図3.18(a) detuningパラメーター α の関数としての $\xi(s, 25\text{sec})$ の成長(単位はm)
横軸は段数(1段 1.5m)

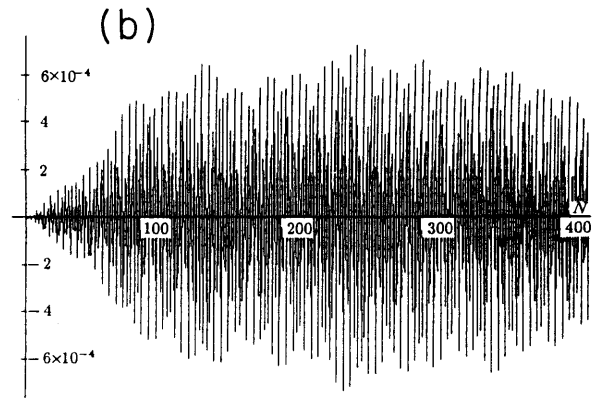


図3.18(b) $\alpha = 3.3 \times 10^{-4} \text{m}^{-1}$ の場合の拡大図
(単位はm)

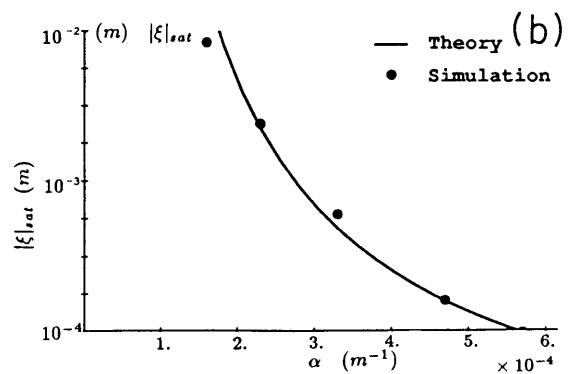
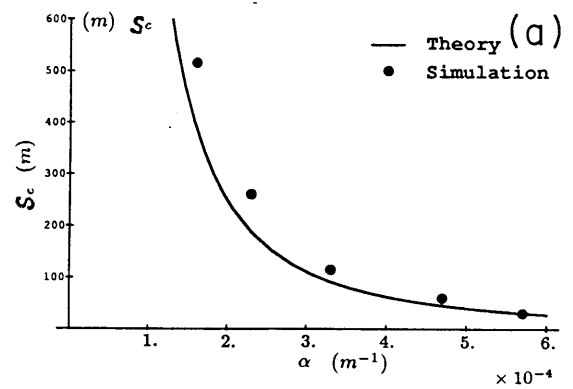


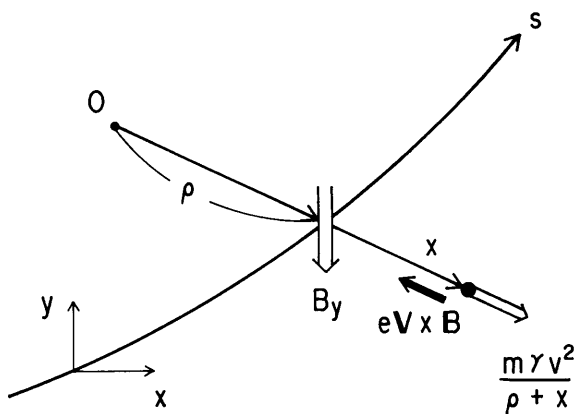
図3.19(a) α の関数としての臨界値 s_c
(b) α の関数としてのBBU飽和値
 $|\xi|_{\text{sat}}$

A-1 軌道方程式

やはり磁場中での荷電粒子の運動から始めねばならない。今円周 $2\pi\rho$ のリングを考える。この円周に沿って偏向電磁石を配置する。粒子がある一定の運動量をもっていると仮定する。偏向磁場の強さを一斉に上げて行くと、ある処で粒子の軌道が一周廻って来て閉じる。これを、中心軌道と呼ぶ。即ち、この中心軌道上の運動量 $m\gamma v$ を持った粒子が持つ慣性力と磁場に由来するローレンツ力はつりあっている。

$$\frac{m\gamma v^2}{\rho} = -e v B_y(0, 0, s) \quad (e > 0, B_y < 0) \quad (A. 1. 1)$$

ここで ρ は中心軌道の曲率半径、座標軸は中心軌道上粒子の進行方向を s 軸に取り、それに垂直な面を (x, y) 面とする (図A1) 参照)。



図A1 軌道座標と力のバランス

ここで、偏向磁場分布が中心軸を中心にある傾きを持った場合を考える。中心軌道から少しずれた粒子 ($r = \rho + x$) の運動は、次の運動方程式で記述できる。動径方向については、粒子は慣性力とローレンツ力の差を感じる故、

$$m \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dx}{dt} \right) = \frac{m\gamma v^2}{\rho + x} + e v B_y(x, y, s) \quad (A. 1. 2)$$

垂直方向に受ける力は、慣性力が無いので、磁場からのローレンツ力だけであり、

$$m \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dy}{dt} \right) = -e v B_x(x, y, s) \quad (A. 1. 3)$$

と書ける。粒子の速さ v ($\equiv ds/dt$) がすでに十分光速 c に近づいていると仮定すると、上の方程式中時間についての微分は軌道座標 s についての微分に書き換えられる。即ち、

$$\frac{d}{ds} \left(\gamma \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\gamma}{\rho + x} + \frac{e}{m v} B_y(x, y, s)$$

或いは、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{ds} \frac{dx}{ds} \simeq \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{x}{\rho} \right) + \frac{e}{m v \gamma} B_y(x, y, s) \quad (A. 1. 4)$$

$\rho_0 \gg x$ を仮定している。同様に、

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{ds} \frac{dy}{ds} = -\frac{e}{m v \gamma} B_x(x, y, s) \quad (A. 1. 5)$$

ここで、ゆっくりした加速を考慮して γ を一定値としなかった。 x, y の関数としての磁場 $B = (B_x, B_y)$ は Maxwell 方程式 $\nabla \times B = 0, \nabla \cdot B = 0$ を満たさねばならない。したがって、 B_y が x について一次の傾きを持つ場合、

$$B_y(x, y, s) = B_y(0, 0, s) + \frac{\partial B_y(0, 0, s)}{\partial x} x \quad (A. 1. 6)$$

B_x は、

$$B_x(x, y, s) = \frac{\partial B_x(0, 0, s)}{\partial y} y \quad (A. 1. 7)$$

であり、

$$\frac{\partial B_y(0, 0, s)}{\partial x} = \frac{\partial B_x(0, 0, s)}{\partial y} \quad (A. 1. 8)$$

を満たす。

Field Index

$$n = -\frac{\rho}{B_y(0,0,s)} \frac{\partial B_y(0,0,s)}{\partial x} (\equiv K(s)) \quad (\text{A. 1.9})$$

を導入し、(A. 1.1)の関係を利用すると、運動方程式(A. 1.4)と(A. 1.5)はより簡単な形、

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{ds} \frac{dx}{ds} = -\frac{1-n}{\rho^2} x \\ \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{ds} \frac{dy}{ds} = -\frac{n}{\rho^2} y \end{cases} \quad (\text{A. 1.10})$$

に書き直せる。もし加速を無視すれば、

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1-n}{\rho^2} x = 0 \\ \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{n}{\rho^2} y = 0 \end{cases} \quad (\text{A. 1.11})$$

かくして、もしField Indexを $0 < n < 1$ に選ぶならば、 x 、 y 方向どちらにも安定性が得られる事は自明である。この様に、偏向磁場に一定の傾きを付けて収束力を得ようとしたのが、Kerst/1/の発明によるベータートロンである。この収束方式を弱収束と呼ぶ/2/。強収束の場合の、Field Index の取り方は本論で述べた通りである。強収束加速器発明当時は、偏向磁石にこの Field Index を付加した電磁石を使った加速器が設計された。この様なタイプを Combined Function型と呼ぶ。加速器全体をコンパクトに出来るメリットがある。実際、BNLのAGS加速器KEKの500MeVブースターはこのタイプである。1953年偏向機能と収束機能を分離して、偏向磁石と四極磁石を独立に用いた加速器の提案が北垣/3/ によってなされた。明らかに、この方が磁石製作の容易さ、加速器運転の自由度等において優れており、以後多くのシンクロトロンはこの機能分離(Separated Function)型を採用した。

(A. 1.10)の演繹を見れば、運動量誤差を持った粒子の場合、また磁場誤差が存在する時の軌道方程式は容易に導く事が出来る。結果のみ書いておくと、

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{K_x(s)}{1+\Delta p/p} x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p} - \frac{(\Delta B)_y}{B_y \rho} \\ \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{K_y(s)}{1+\Delta p/p} y = -\frac{(\Delta B)_x}{B_y \rho} \end{cases} \quad (\text{A. 1.12})$$

ここで、

$$\begin{cases} K_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} + K(s) \\ K_y(s) = -K(s) \end{cases}$$

線型加速器、ビームトランスポート系において、偏向磁石を使わない処では、 $\rho_0 \rightarrow \infty$ とおけば、ここで演繹した方程式はそのまま成り立つ。ただし、

$$K(s) = +\frac{e}{mv\gamma} \frac{\partial B_y(0,0,s)}{\partial x} \quad (\text{A. 1.13})$$

とおくべき。

A-2 補助方程式の解

今、復元力係数が t に依存する。二階の微分方程式

$$\ddot{x} + K(t)x = 0 \quad (\text{A. 2.1})$$

の一次独立解を $x_1(t)$ とする。

補助方程式

$$\ddot{\rho} + K(t)\rho = \frac{1}{\rho^3} \quad (\text{A. 2.2})$$

の一般解を探してみよ。まず、(A. 2.2) の一般解を

$$\rho(t) = (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A. 2.3})$$

と仮定する。(A. 2.3) の両辺を t について微分して、次の関係

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho}^2 + 2\rho\ddot{\rho} &= 2c_1\dot{x}_1^2 + 2c_2x_1\dot{x}_1 + 2c_2\dot{x}_2^2 + 2c_2x_2\dot{x}_2 \\ &\quad + c_3\dot{x}_1x_2 + c_3x_1\dot{x}_2 + 2c_3\dot{x}_1\dot{x}_2 \end{aligned} \quad (\text{A. 2.4})$$

を得る。

(A. 2.1) と (A. 2.2) から $\ddot{x}_{1,2} = -K(t)x_{1,2}$ 、 $\dot{\rho} = -K(t)\rho + 1/\rho^3$ であるから、これを (A. 2.4) 式に代入すれば、

$$\left\{ \begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{(2c_1x_1\dot{x}_1 + 2c_2x_2\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_1x_2 + c_3x_1\dot{x}_2)^2}{2(c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2)} \\ &\quad + \frac{2}{c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2} \\ &\quad - 2K(t)(c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2) \\ \text{右辺} &= 2c_1\dot{x}_1^2 + 2c_2\dot{x}_2^2 + 2c_3\dot{x}_1\dot{x}_2 \\ &\quad - 2K(t)(c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_1x_2) \end{aligned} \right. \quad (\text{A. 2.5})$$

左辺=右辺とおき、共通項を落せば、

$$(c_3^2 - 4c_1c_2)(\dot{x}_1x_2 - x_1\dot{x}_2)^2 + 4 = 0 \quad (\text{A. 2. 6})$$

を得る。かくして c_1, c_2, c_3 は独立の係数でない事が解る。 c_3 を c_1, c_2 で表わせば、

$$c_3 = \pm 2\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}} \quad (\text{A. 2. 7})$$

ここで W はロンスキヤン $x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2$ であり、定数である。かくして、補助方程式の解

$$\rho^2(t) = c_1x_1^2(t) + c_2x_2^2(t) \pm 2\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}}x_1(t)x_2(t) \quad (\text{A. 2. 8})$$

を見出す。(A. 2. 8)式の正負記号は $\rho^2(t) > 0$ になる様にどちらかを選ぶ事になる。

今度は逆に、補助方程式の解 $\rho(t)$ が既知だとして、(A. 2. 1)の一次独立解を補助関数 $\rho(t)$ で表わしてみよう。(A. 2. 8)から

$$x_{1,2}(t) = \rho(t) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \Psi(t) \quad (\text{A. 2. 9})$$

の形を仮定するのが妥当である。やはり、

$$\dot{x}_{1,2} = -K(t)x_{1,2} = -K\rho \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \Psi(t)$$

$$\dot{\rho} = -K(t)\rho + \frac{1}{\rho^3}$$

を用いると、 $\Psi(t)$ は

$$\Psi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{\rho^2(t')} \quad (\text{A. 2. 10})$$

を充たさねばならない事を容易に知る。もし系 (A. 2. 1) がリングのベータートロン振動系であれば、この $\Psi(t)$ をベータートロン振動の Phase Advance と呼ぶ。又ベータートロン振動数 ν は

$$2\pi\nu = \int_0^C \frac{ds}{\rho^2(s)} \quad (C: \text{リング周長}) \quad (\text{A. 2. 11})$$

によって定義される。

補助方程式の周期解は 1 個である

以下に、補助方程式 (A. 2. 2) の周期解が存在するとすれば、それは 1 個しか存在しない事を証明してみよう。補助方程式の解を

$$\beta(s) = \rho^2(s) = c_1x_1^2(s) + c_2x_2^2(s) - 2\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}}x_1(s)x_2(s) \quad (\text{A. 2. 12})$$

と仮定する。 c_1 と c_2 は境界条件 $\beta(0) = \beta(C)$, $\dot{\beta}(0) = \dot{\beta}(C)$ から決定される。ここで、

$$\begin{cases} \beta(0) = x_1^2(0)c_1 + x_2^2(0)c_2 - 2x_1(0)x_2(0)\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}} \\ \beta(C) = x_1^2(C)c_1 + x_2^2(C)c_2 - 2x_1(C)x_2(C)\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}(0) = 2x_1(0)\dot{x}_1(0)c_1 + 2x_2(0)\dot{x}_2(0)c_2 - 2[\dot{x}_1(0)x_2(0) + x_1(0)\dot{x}_2(0)]\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}} \\ \dot{\beta}(C) = 2x_1(C)\dot{x}_1(C)c_1 + 2x_2(C)\dot{x}_2(C)c_2 - 2[\dot{x}_1(C)x_2(C) + x_1(C)\dot{x}_2(C)]\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}} \end{cases}$$

これらを境界条件に代入して、 c_1 と c_2 に関する代数方程式

$$\begin{cases} ac_1 + bc_2 = k\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}} \\ a'c_1 + b'c_2 = k'\sqrt{c_1c_2 - \frac{1}{W^2}} \end{cases} \quad (\text{A. 2. 13})$$

を得る。ここで以下の省略形を用いた。

$$\begin{aligned} a &= x_1^2(0) - x_1^2(C) \\ b &= x_2^2(0) - x_2^2(C) \\ k &= 2[x_1(0)x_2(0) - x_1(C)x_2(C)] \\ a' &= 2[x_1(0)\dot{x}_1(0) - x_1(C)\dot{x}_1(C)] \\ b' &= 2[x_2(0)\dot{x}_2(0) - x_2(C)\dot{x}_2(C)] \\ k' &= 2[\dot{x}_1(0)x_2(0) + x_1(0)\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(C)x_2(C) \\ &\quad - x_1(C)\dot{x}_2(C)] \end{aligned}$$

一次独立解 $x_1(s)$ と $x_2(s)$ 実数関数であるが、周期解ではないと仮定すると、 $a, a', b, b' \neq 0$ である。 $(k = k' = 0)$ になる場合は議論から除く。何故なら、その場合 $c_1 = c_2 = 0$ となり $\beta(s) = 0$ という特異解しか与えない。 $(A. 2. 13)$ を解いて、 c_1 と c_2 の関係

$$c_1 = \frac{b'k - bk'}{ak' - a'k} c_2 \equiv \kappa c_2 \quad (A. 2. 14)$$

を得る。 $(A. 2. 14)$ を用いて $(A. 2. 13)$ から c_1 を消去すれば、

$$c_2^2 = \frac{k^2}{W^2[k^2\kappa - (a\kappa - b)^2]} \quad (A. 2. 15)$$

$(A. 2. 15)$ から c_2 が実数である為には $\kappa > 0$ でなければならない事が解される。かくして

$$\begin{cases} c_2 = \pm \left| \frac{k^2}{W^2[k^2\kappa - (a\kappa - b)^2]} \right|^{\frac{1}{2}} \equiv \pm \xi (\xi > 0) \\ c_1 = \pm \kappa \xi \end{cases} \quad (A. 2. 16)$$

(複合順序)

$(A. 2. 16)$ は補助方程式の解として二つの存在を示唆する。即ち

$$\begin{cases} \beta_I(s) = \xi x_1^2(s) + \kappa \xi x_2^2(s) \\ \quad - 2\sqrt{\kappa \xi^2 - \frac{1}{W^2}} x_1(s)x_2(s) \\ \beta_{II}(s) = -[\xi x_1^2(s) + \kappa \xi x_2^2(s) \\ \quad + 2\sqrt{\kappa \xi^2 - \frac{1}{W^2}} x_1(s)x_2(s)] \end{cases} \quad (A. 2. 17)$$

しかしながら、 $x_1(s), x_2(s)$ が bounded solution である限り、 $x = 0$ をクロスする。その様な位置 s においても、正の値を取る補助関数 $\beta(s)$ は β_I しかあり得ない。

A-3 Courant-Snyderの楕円

広く使われている Twiss-parameter α, β, γ と補助関数との関係を整理しておく。Twiss-parameter は

$$\begin{cases} \alpha = -\rho\dot{\rho} = -\dot{\beta}/2 \\ \beta = \rho^2 = \beta \\ \gamma = \frac{1 + (\rho\dot{\rho})^2}{\rho^2} = \frac{1 + (\dot{\beta}/2)^2}{\beta} = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \end{cases} \quad (A. 3. 1)$$

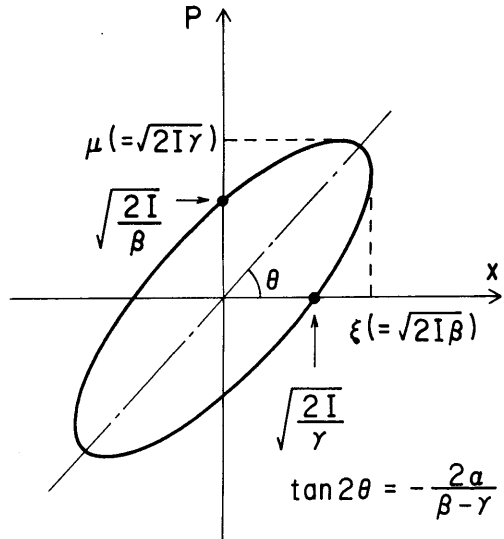
で定義される。 $(2. 2. 7)$ 式の不変量 I を x, p について整理すると、

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1 + (\dot{\beta}/2)^2}{\beta} \right] x^2 - \dot{\beta} x p + \beta p^2 \right\}$$

である。従って、Twiss-parameter を用いれば

$$2I = \gamma x^2 + 2\alpha x p + \beta p^2 \quad (A. 3. 2)$$

を得る。更にこの Twiss-parameter を用いて Courant-Snyder の楕円の有用な量を図示する。



図A2 Courant-Snyderの楕円

$2I$ を加速器物理ではエミッタンスと呼び、 $E = 2I$ と書く。このエミッタンスで楕円の面積を書くと πE である。図A2中の各量を演繹するのは単純な代数計算で済むから、初心者は自分で試みられよ。

A-4 摂動線型ベータートロン振動

Closed Orbit Distortion $x_{c.o.d}$ と平衡軌道 x_{eq}

運動量誤差、磁場誤差の存在の下で、粒子軌道を論ずる時、この軌道を三分割するのが便利である。

$$x(s) = \chi(s) + x_{c.o.d}(s) + x_{eq}(s) \quad (A. 4. 1)$$

$\chi(s)$ は、斉次の理想的軌道方程式

$$\ddot{x} + K(s)x = 0 \quad (A. 4. 2)$$

を充たす。 $x_{c.o.d}$ は Closed Orbit Distortion と呼ばれ、非斉次の方程式

$$\ddot{x}_{c.o.d} + K(s)x_{c.o.d} = -\frac{\Delta B(s)}{B\rho} \quad (A. 4. 3)$$

を充たす。 x_{eq} は off-momentum 粒子の平衡軌道と呼ばれ、同様の非斉次方程式

$$\ddot{x}_{eq} + K(s)x_{eq} = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p} \quad (A. 4. 4)$$

を充たす。もちろん、この様に分割して議論出来るのは、オリジナルの軌道方程式が線型だからである。非斉次方程式 (A. 4. 3), (A. 4. 4) の摂動項が少なくとも閉鎖周期性を持つという理由から、これら非斉次方程式は周期解を持ち得る。実際その様な周期解を捜す事は、数学上トリビアな事である。

今、 $x_{c.o.d}$ や x_{eq} を $y(s)$ とおき、摂動項を $f(s)$ とおけば、(A. 4. 3), (A. 4. 4) は

$$\ddot{y} + K(s)y = f(s) \quad (f(s+C) = f(s)) \quad (A. 4. 5)$$

で代表し得る。(A. 4. 5) の斉次方程式の一次独立解を、

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt{\beta(s)} \cos \Psi \\ y_2 = \sqrt{\beta(s)} \sin \Psi \end{cases}$$

$$\Psi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')}$$

の形で、我々は知っている。(A. 4. 5) の一般解は

$$y(s) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \int_0^s f(s') G(s, s') ds' \quad (A. 4. 6)$$

(c_1 と c_2 は任意定数)

で与えられる。 $G(s, s')$ はグリーン関数であり、

$$G(s, s') = \frac{1}{W} [-y_1(s)y_2(s') + y_1(s')y_2(s)] \quad (A. 4. 7)$$

W は Wronskian で、1 である。一次独立解 y_1, y_2 を (A. 4. 7) に代入すれば、

$$G(s, s') = \sqrt{\beta(s)\beta(s')} \sin[\Psi(s) - \Psi(s')] \quad (A. 4. 8)$$

を得る。(A. 4. 8) を (A. 4. 6) に代入する。周期条件 $y(0) = y(C)$, $\dot{y}(0) = \dot{y}(C)$ を補足する為には、任意係数 c_1 と c_2 は

$$\begin{cases} c_1 = c_1 \cos \Psi(C) + c_2 \sin \Psi(C) \\ \quad + \int_0^C \sqrt{\beta(s')} f(s') \sin[\Psi(C) - \Psi(s')] ds' \\ c_2 = -c_1 \sin \Psi(C) + c_2 \cos \Psi(C) \\ \quad + \int_0^C \sqrt{\beta(s')} f(s') \cos[\Psi(C) - \Psi(s')] ds' \end{cases} \quad (A. 4. 9)$$

を充たさねばならない。簡単の為起点 $s = 0$ として、 $\beta(s) = 0$ となる処を選ぶ。かくして、 c_1 と c_2 は代数演算の結果

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} \left\{ \int_0^C f \sqrt{\beta} \sin(\mu - \Psi) ds' \right. \\ \quad \left. + \int_0^C f \sqrt{\beta} \sin \Psi ds' \right\} \\ c_2 = \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} \left\{ \int_0^C f \sqrt{\beta} \cos(\mu - \Psi) ds' \right. \\ \quad \left. - \int_0^C f \sqrt{\beta} \cos \Psi ds' \right\} \end{cases} \quad (A. 4. 10)$$

$$\mu \equiv 2\pi\nu = \int_0^C \frac{ds'}{\beta(s')}$$

で与えられる。

かくして、周期解 $y(s)$ は、

$$\begin{aligned} y(s) = & \frac{1}{2(1 - \cos \mu)} \left\{ \int_0^C f(s') \sqrt{\beta(s')\beta(s)} \sin[\mu \right. \\ & \quad \left. + \Psi(s) - \Psi(s')] ds' \right. \\ & - \int_0^C f(s') \sqrt{\beta(s')\beta(s)} \sin[\Psi(s) - \Psi(s')] ds' \\ & \left. + 2(1 - \cos \mu) \int_0^s f(s') \sqrt{\beta(s')\beta(s)} \sin[\Psi(s) \right. \\ & \quad \left. - \Psi(s')] ds' \right\} \quad (A. 4. 11) \end{aligned}$$

と書ける。 $\Delta = \Psi(s) - \Psi(s')$ とおき、以下に変形を加え、より簡単な形にしてみよう。

$$\begin{aligned}
 y(s) &= \frac{1}{2(1-\cos\mu)} \left\{ \int_0^C f\sqrt{\sin(\mu+\Delta)} ds' \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^S f\sqrt{\sin\Delta} ds' \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^C f\sqrt{\sin\Delta} ds' + \int_0^S f\sqrt{\sin\Delta} ds' \right. \\
 &\quad \left. - 2\cos\mu \int_0^S f\sqrt{\sin\Delta} ds' \right\} \\
 &= \frac{1}{2(1-\cos\mu)} \left\{ \int_0^C f\sqrt{\sin(\mu+\Delta)} ds' \right. \\
 &\quad \left. + \int_C^{S+C} f\sqrt{\sin(\mu+\Delta)} ds' \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^C f\sqrt{\sin\Delta} ds' + \int_0^S f\sqrt{\sin\Delta} ds' \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^S f\sqrt{\sin(\Delta+\mu)} ds' - \int_0^S f\sqrt{\sin(\Delta-\mu)} ds' \right\} \\
 &= \frac{1}{2(1-\cos\mu)} \left\{ \int_0^C f\sqrt{\sin(\mu+\Delta)} ds' \right. \\
 &\quad \left. + \int_C^{S+C} f\sqrt{\sin(\mu+\Delta)} ds' \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^C f\sqrt{\sin\Delta} ds' + \int_0^S f\sqrt{\sin\Delta} ds' \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^S f\sqrt{\sin(\Delta+\mu)} ds' - \int_C^{S+C} f\sqrt{\sin\Delta} ds' \right\} \\
 y(s) &= \frac{1}{2(1-\cos\mu)} \left\{ \int_S^{S+C} f\sqrt{\sin(\mu+\Delta)} ds' \right. \\
 &\quad \left. - \int_S^{S+C} f\sqrt{\sin\Delta} ds' \right\} \\
 &= \frac{2\sin(\mu/2)}{4\sin^2(\mu/2)} \int_S^{S+C} f\sqrt{\cos\left(\frac{\mu}{2} + \Delta\right)} ds' \\
 &= \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sin(\mu/2)} \int_S^{S+C} f(s')\sqrt{\beta(s')}\cos\left[\frac{\mu}{2} - \Psi(s) \right. \\
 &\quad \left. - \Psi(s')\right] ds'
 \end{aligned}
 \tag{A. 4. 12}$$

ここで $f(s) = -\frac{\Delta B(s)}{B\rho}$ を選べば、 $y(s)$ のは $x_{c.o.d}$ となる。実際の加速器では、 $\Delta B(s)$ の発生要因は、以下の如く様々である。

- 偏向磁石の製作誤差
- 偏向磁石の設置誤差 (傾き)
- 四極磁石の設置誤差 (高さ, 横方向変位)

言うまでも無く、 $x_{c.o.d}$ は小さいに越した事はない。従って、加速器建設の段階で上記の考えられる要因は一応技術的に可能なレベルまで下げる様努力される。しかし、それでも測定器の精度、測定する人の個性により、ある程度は残る。この残留誤差を補正する為に、当初から補正用二極電磁石をリング一周にわたって配置しておき、実際のビームが作るC. O. D.を検出し、 $x_{c.o.d}$ が最小になる様に、これら二極電磁石を独立に励磁してやる、これをC. O. D. 補正と呼ぶ。

通常アーク部 x 方向の補正は、偏向磁石に巻いた補助コイルに、電流を流して為される。y 方向の補正には、独立の二極磁石を用いる。これらを出来るだけ $\beta_y(s)$ の大きくなる位置、即ち x 軸方向について発散用四極電磁石隣に置くのが効果的である。これは(A. 4. 12)式から理解出来るだろう。

トリスタンMRの日常的な運転では、このC. O. D. 補正が最も重要な作業の一つになっている。奇妙に思うかもしれないが本当である。約1時間の運転サイクルの間に、冷却水の温度変化により、磁石のギャップサイズが変化するのではないかと等々、議論百出であるが、今の処時間的に変化するC. O. D. の原因を明確につかむまでには到っていない。C. O. D. 補正に関する専門的解説は福間による'88 加速器セミナーの講義/4/ がある。

一方、 $f(s) = \frac{1}{\rho(s)} \cdot \frac{\Delta p}{p}$ の時は、 $y(s) = x_{eq}(s)$ である。運動量分散関数 $\eta(s) (x_{eq} = \eta \frac{\Delta p}{p})$ を導入し、

$$\eta(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sin(\mu/2)} \int_S^{S+C} \frac{\sqrt{\beta(s')}}{\rho(s')} \cos\left[\frac{\mu}{2} + \Psi(s) - \Psi(s')\right] ds'
 \tag{A. 4. 13}$$

と書く。この関数は運動量誤差によらないので、ベータ関数 $\beta(s)$ さえ知れば、ユニークに定まる。これは、 $x_{c.o.d}$ にも共通する事であるが、もしベータートロン振動数 ν が整数に近いと、(A. 4. 12)式あるいは(A. 4. 13)式の右辺の $\sin(\mu/2) = \sin(\pi\nu)$ が著しく小さくなり、 $x_{c.o.d}$ 、分散関数 $\eta(s)$ は途方もなく大きくなる。これは粒子の拡がりを出来るだけ小さくしようという努力に相反する。実際の粒子ビームは有限な運動量幅を持つので、一般に整数に近い ν での運転は避ける。

摂動ベータ関数

前節の摂動は、ベータートロン振動の中心軸に影響を与える摂動であった。ここでは、収束力に何等かの誤差が存在する場合を考える。まず原因としては、収束磁場勾配に、 $\Delta k(s)$ のエラーがある場合と粒子が運動量誤差 Δp を持つ場合が考えられる。粒子のベータートロン振動は各々、

$$\left\{ \frac{d^2x}{ds^2} + [K(s) + \Delta k(s)]x = 0 \right. \quad (A. 4. 14)$$

$$\left. \frac{d^2x}{ds^2} + K(s) \left(1 - \frac{\Delta p}{p} \right) x = 0 \right. \quad (A. 4. 15)$$

によって支配される。このような摂動は当然ベータ関数やベータートロン振動数にずれを生むだろう。これを評価してみよう。

補助方程式

$$\dot{\rho} + [K(s) + g(s)]\rho = \frac{1}{\rho^3} \quad (A. 4. 16)$$

$$g(s) = \begin{cases} \Delta k(s) \\ -K(s) \frac{\Delta p}{p} \end{cases}$$

の解を $\rho = \rho_0 + \varepsilon$ とおく。 ρ_0 は非摂動ベータ関数であり、

$$\dot{\rho}_0 + K(s)\rho_0 = \frac{1}{\rho_0^3} \quad (A. 4. 17)$$

を充たす。 $\rho = \rho_0 + \varepsilon$ を(A. 4. 16)式に代入して ε で展開すれば、 ε について一次オーダーの方程式

$$\ddot{\varepsilon} + \left[K(s) + \frac{3}{\rho_0^4} \right] \varepsilon = -g(s)\rho_0(s) \quad (A. 4. 18)$$

を得る。 $K(s), g(s), \rho_0$ が周期関数であるから、周期解が存在し得る。(A. 4. 18)式の齊次方程式の一次独立解が

$$\varepsilon_{1,2} = \rho_0(s) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} 2\Psi(s) \quad (A. 4. 19)$$

ここで

$$\Psi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\rho_0^2(s')}$$

と書ける事は容易に確かめ得る/5/。この一次独立解を

用いれば、(A. 4. 18)の一般解は

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= c_1 \varepsilon_1(s) + c_2 \varepsilon_2(s) + \int_0^s f(s') G(s, s') ds' \\ f(s) &= -g(s)\rho_0(s) \end{aligned} \quad (A. 4. 20)$$

と書ける。GはGreen関数、

$$G(s, s') = \frac{\rho_0(s)\rho_0(s')}{W} \sin 2[\Psi(s) - \Psi(s')] \quad (A. 4. 21)$$

である。WはWronskianで、この場合値は2である。さて周期条件 $\varepsilon(0) = \varepsilon(C)$, $\dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}(C)$ を満足する任意定数 c_1 と c_2 を求めよう。代数演算の結果、

$$c_1 = \frac{1}{2(1 - \cos 2\mu)} \left\{ \int_0^C \frac{f(s')}{2} \rho_0(s') \sin 2(\mu - \Psi) ds' + \int_0^C \frac{f(s')}{2} \rho_0(s') \sin \Psi ds' \right\}$$

$$c_2 = \frac{1}{2(1 - \cos 2\mu)} \left\{ \int_0^C \frac{f(s')}{2} \rho_0(s') \cos 2(\mu - \Psi) ds' + \int_0^C \frac{f(s')}{2} \rho_0(s') \cos \Psi ds' \right\}$$

を得、結局周期解 $\varepsilon(s)$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= \frac{\rho_0(s)}{4\sin\mu} \int_s^{s+C} f(s') \rho_0(s') \cos[\mu + 2\Psi(s) \\ &\quad - 2\Psi(s')] ds' \end{aligned} \quad (A. 4. 22)$$

$\rho_0(s)$ のかわりに $\sqrt{\beta(s)}$ を使うならば

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{2\rho_0\Delta\rho}{\beta} = 2 \frac{\varepsilon}{\rho_0} \quad (A. 4. 23)$$

であるから、良く知られたベータ関数Distortionの式

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta}{\beta} &= \frac{-1}{2\sin\mu} \int_s^{s+C} g(s') \beta(s') \cos[\mu + 2\Psi(s) \\ &\quad - 2\Psi(s')] ds' \end{aligned} \quad (A. 4. 24)$$

に到達する。エラー源に応じて、

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \begin{cases} \frac{-1}{2\sin\mu} \int_s^{s+C} \Delta k(s')\beta(s')\cos[\mu+2\Psi(s) - 2\Psi(s')]ds' \\ \frac{1}{2\sin\mu} \int_s^{s+C} K(s')\beta(s')\cos[\mu+2\Psi(s) - 2\Psi(s')]ds' \times \frac{\Delta p}{p} \end{cases} \quad (\text{A. 4. 25})$$

と書き直す。

平衡軌道の議論と似た様に、 ν の端数が1/2に近いと、ベーター関数のディストーションは著しく大きくなる。もちろん余り大きくなると、ここで取った“線型化”自体が意味を失うが、一般に Half integer tune近くでの運転は避ける。勾配誤差としては、四極電磁石の製作誤差が考えられる。例えば8台のトリスタン衝突点近傍の四極電磁石では、磁場勾配に約 7×10^{-4} 程度のバラつきがある。衝突点近傍ではベーター関数の値が大きいため、そこでの勾配誤差は、他のノーマルセクションでの誤差より、相対的に大きな影響となって現れる。

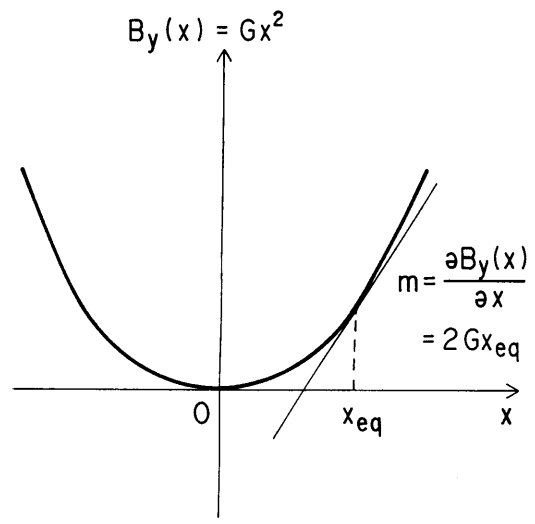
以上、線型摂動ベータートロン運動を一貫して微分方程式とその解析解を用いて論じて来た。円型加速器に表われる種々の概念は、実に単純な数学様式で記述出来る事が理解出来たのであろう。これを可能にした重要なポイントは非摂動ベータートロン方程式の解が $x(s) = \sqrt{\beta(s)} \frac{\sin \Psi(s)}{\cos \Psi(s)}$ の形に書ける事と、 $\ddot{x} + [K(s) + 3/\beta^2(s)]x = 0$ の解が本文中に見た様に、解析的に表現出来る事の二点であった。後者の利点を積極的に使って、粒子ビーム力学の基礎を論じるのは、余り知られていない様であるが、その類型的性質故、まとめて付録に納める。

Tune-Shift と Chromaticity補正

前節を補足する様な形で、この節を付け加える。先程述べた様に、勾配誤差はベータートロン振動数にずれを生み出す。これをTune-Shiftと呼ぶ。特に運動量誤差によって生じるTune-Shiftを $\Delta p/p$ で除した量を Natural Chromaticityと呼ぶ。この種のTune-Shiftがあると、リングを周回する粒子ビームは、その運動量に応じたベータートロン振動数を持つ事になる。運動量はシンクロトロン振動に従ってある幅で振動する。一般に、シンクロトロン振動数はベータートロン振動数よりかなり小さいので、もし非線型ベータートロン共鳴を起こす共鳴線が、Tuneの変動範囲内に存在すると、粒子のベータートロン振動振幅ははたちまち大きくなり、いずれ壁に当たって失われてしまう事になる。この様な理由から、運動量誤差に由来するTune-Shiftは可能な限り小さくなる事が望ま

れる。しかしながら、このTune-Shiftは必然的なものであり、線型 Latticeでは本質的対応策は無い。かくして、リングに配列した六極電磁石による補正が考えられた。これをChromaticity補正と呼ぶ。詳細は、本講義の視野の外にあるが、その原理はいたって簡単なものである。

平衡軌道 x_{eq} の処で述べた様に、運動量誤差 Δp を持った粒子の平衡軌道は $x = x_{eq} (\equiv \eta(s) \frac{\Delta p}{p})$ の上にある。ここでその中心が $x = 0$ に在る六極電磁石を仮定する。六極電磁石の磁場分布 $B_y(x)$ は x^2 に比例する。運動量誤差 Δp を持った粒子には、その振動中心が $x = x_{eq}$ にあるので、この近傍で六極磁場は、ある傾きを持った磁場、即ち四極磁場に見える(図A3を参照)。



図A3 六極磁場分布

適当に配列させた六極磁場から期待される、この磁場勾配でNatural Chromaticityを相殺してやろうという訳である。

この描像を数学的により性格に表現して、もう少し理解を深めてみよう。この目的の為に平均化 Hamiltonian による方法を解説する。少し大げさであるが、Chromaticity補正とその副作用、そして非線型ベータートロン運動との関係を垣間見るには、この扱いが便利である。

今、磁場誤差 $\Delta k(s)$ を持ったベータートロン振動の全ての情報は次の Hamiltonian に詰まっている。

$$H(x, p; s) = \frac{1}{2} [p^2 + K(s)x^2] + \frac{1}{2} \Delta k(s)x^2 \quad (\text{A. 4. 26})$$

これから知りたい情報を取り出す為には、適切な正準変換を施せばよい。独立変数 s 依存の線型正準変換

$$Q = \rho^{-1}x, \quad P = -\rho x + \rho p$$

(ρ は非摂動Envelope関数) の下に、Hamiltonian(A. 4. 26) は、

$$H'(Q, P; s) = \frac{\rho^{-2}}{2} [P^2 + Q^2 + \Delta k(s)\rho^4 Q^2] \quad (\text{A. 4. 27})$$

に帰着する。独立変数 s の代わりに以下で定義される変数

$$\theta = \frac{1}{\nu_0} \int \frac{ds}{\rho^2} \quad \left(\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\rho^2} \right) \quad (\text{A. 4. 28})$$

を導入すると、更に Hamiltonian H' は

$$H''(Q, P; \theta) = \frac{\nu_0}{2} (P^2 + Q^2) + \frac{1}{2} \nu_0 \rho^4 Q^2 \quad (\text{A. 4. 29})$$

と言う、その非摂動項が純粋な調和振動子型に変換し得る。更に、(Q, P) を作用変数、角変数 (J, Ψ) に変換すれば、対応する Hamiltonian H'' も

$$Q = \sqrt{2J} \sin \Psi, \quad P = \sqrt{2J} \cos \Psi \\ K(\Psi, J; \theta) = \nu_0 J + \nu_0 \Delta k(s) \rho^4 J \sin^2 \Psi \quad (\text{A. 4. 30})$$

となる。ここで Ψ は先に導入したベータートロン位相そのものである事が注意される。かくして、正準方程式

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = \frac{\partial K}{\partial J} = \nu_0 + \nu_0 \Delta k(s) \rho^4 \sin^2 \Psi \quad (\text{A. 4. 31})$$

の右辺の非摂動項に由来する項が、ベータートロン振動数として与えられる。第2項が摂動からの寄与である。その結果、ベータートロン振動に様々な摂動加えられたとき、ベータートロン振動数がどれだけずれるか、即ち Tune-Shift は始めに与えられた Hamiltonian H を K タイプに変換すれば、ただちに知られる事が理解出来ただろうと思う。(A. 4. 30) 式の摂動項は各項のべき次数が高い故、一般にベータートロン波長に比較して、はるかに短い振動波長を持つ。従って、早い振動の分は相互にキャンセルしてしまいリング一周にわたっての寄与としては残らない。この様な理由から Hamiltonian K をリング一周長にわたって平均した $\langle K \rangle$ を Averaged Hamiltonian と呼び、粒子ビームの局所的でないグロー

バルな振る舞いを記述するのに適切な量である。今問題にしているベータートロン振動数など、正にその様な例である。実際には、摂動項を θ についてフーリエ展開し、その非振動項のみ残す操作で得られる。つまり、

$$\langle K \rangle = \nu_0 J + \frac{1}{2} a_0 J \quad (\text{A. 4. 32})$$

ここで a_0 は $\nu_0 \Delta k(s) \rho^4$ の 0-th フーリエ項

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_0 \Delta k(s) \rho^4 d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \Delta k(s) \rho^4 \frac{ds}{\rho^2} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \Delta k(s) \beta(s) ds \quad (\text{A. 4. 33})$$

である。結局、Tune-Shift

$$\Delta \nu = \frac{\partial \langle K \rangle}{\partial J} - \nu_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^C \Delta k(s) \beta(s) ds \quad (\text{A. 4. 34})$$

が求められる。この手法は一般的である。高次極の磁場成分、ビーム自身の空間電荷が持つ非線型成分、ビーム・ビーム相互作用で受ける非線型力等に起因する Tune Shift はこの Averaged Hamiltonian を求める事によって一意に求まる。必要なのは計算の腕力だけである。

さて、六極磁場が存在する時の運動量誤差を持った粒子の Hamiltonian は

$$H(x, p; s) = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} K(s) x^2 + \Omega(s) \frac{\Delta p}{p} x \\ - \frac{1}{2} K(s) x^2 \frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{3} G(s) x^3 \quad (\text{A. 4. 35})$$

ここで $\Omega(s) = 1/\rho(s)$ (ρ : 偏向磁石での曲率半径) $G(s)$ はもちろん六極磁石の強さに比例する量である。簡単の為 (x, s) 平面の運動だけを議論する。平衡軌道 x_{eq} は知られているわけであるから、新しい変数

$$\begin{cases} \chi = x - x_{eq} \\ p_x = p - p_{eq} \end{cases} \quad (p_{eq} = \dot{x}_{eq}) \quad (\text{A. 4. 36})$$

を導入して、平衡軌道回りの運動に帰着させる。母関数

$$G(\chi, p) = -(x_{eq} + \chi)p + p_{eq} \cdot \chi \quad (\text{A. 4. 37})$$

を用いれば、新しいHamiltonian

$$\begin{aligned}
 H'(\chi, p_x; s) &= H + \frac{\partial G}{\partial s} \\
 &= \{x_{\text{eq}}, p_{\text{eq}} \text{ だけに依存する項} \} + \left\{ \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} K(s) \chi^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} K(s) \frac{\Delta p}{p} \chi^2 + G(s) x_{\text{eq}} \chi^2 + \frac{1}{3} G(s) \chi^3 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{A. 4. 38}$$

χ, p_x のみに依存する項だけ残せば、

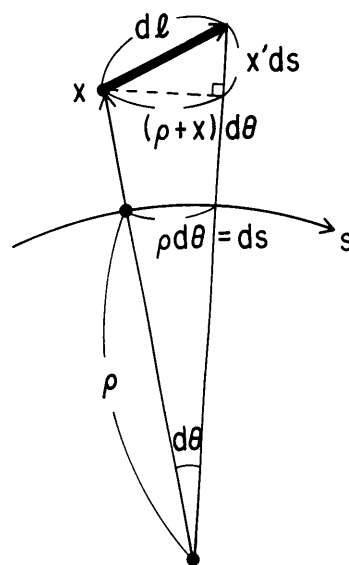
$$\begin{aligned}
 K(\chi, p_x; s) &= \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} K(s) \chi^2 \\
 &\quad + \frac{\Delta p}{p} \left[-\frac{1}{2} K(s) + G(s) \eta(s) \right] \chi^2 + \frac{1}{3} G(s) \chi^3
 \end{aligned}
 \tag{A. 4. 39}$$

を得る。もし右辺の最終項 $G(s)\chi^3/3$ が無視出来るならば期待された様に、運動量誤差による項が Tune-Shift を与える。

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^C [-K(s) + 2G(s)\eta(s)] \beta(s) ds \cdot \left(\frac{\Delta p}{p} \right)
 \tag{A. 4. 40}$$

与えた Lattice、即ち $K(s)$ でユニークに $\eta(s)$ は決まるので、この $\Delta\nu$ を 0 に近づける様に六極電磁石の種類、強さ、置く場所が最適化される。かといってやみくもにこれをやり、励磁された六極磁場が強過ぎると、Hamiltonian (A. 4. 39) の最終項 $G(s)\chi^3/3$ の影響が無視出来なくなる。即ちベータートロン運動が非線型になり、ある振幅以上の粒子に安定解はなくなる。これらは、非線型力学の興味あるテーマであるが入門の域を越えるのでここで終わりにする。

Momentum Compaction Factor



図A4 軌道長

運動量誤差 Δp を持った粒子のリング一周にわたる軌道長さを計算してみよう。

実際の軌道線素 $d\ell$ は

$$\begin{aligned}
 d\ell &= \left\{ [(\rho+x)d\theta]^2 + (x'ds)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\rho d\theta \equiv ds) \\
 &= \left[\left(1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 + (x')^2 \right]^{\frac{1}{2}} ds
 \end{aligned}
 \tag{A. 4. 41}$$

と書ける。すると軌道長 C は

$$\begin{aligned}
 C &= \int d\ell \\
 &= \int_0^{C_0} \left[\left(1 + \frac{x}{\rho(s)} \right)^2 + (x')^2 \right]^{\frac{1}{2}} ds \\
 &\approx \int_0^{C_0} \left(1 + \frac{x}{\rho(s)} \right) ds \\
 &= C_0 + \int_0^{C_0} \frac{\eta(s) \frac{\Delta p}{p}}{\rho(s)} ds
 \end{aligned}
 \tag{A. 4. 42}$$

と書き下せる。ここで、

Momentum Compaction Factor α を

$$\alpha = \frac{1}{C_0} \int_0^{C_0} \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds
 \tag{A. 4. 43}$$

と定義し、平均されたベータトロンの振動はゼロと仮定すれば、

$$C = C_0 \left(1 + \alpha \frac{\Delta P}{P} \right) \quad (\text{A. 4. 44})$$

を得る。即ち、 α は運動誤差によって規格化された相対的な軌道長のずれの大きさを表わす。

A-5 シンクロトロン振幅関数

一般解

復元力係数 $K(\tau) = k^2 \tau$ を持つ微分方程式の一次独立解はオーダー $-1/3$ のBessel関数とNeumann関数を使って、

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \tau^{\frac{1}{2}} N_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} k \tau^{\frac{3}{2}} \right) & (\text{A. 5. 1a}) \\ x_2(\tau) = \tau^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} k \tau^{\frac{3}{2}} \right) & (\text{A. 5. 1b}) \end{cases}$$

である事を知っている。この時シンクロトロン振幅関数 $S(\tau)$ は

$$\begin{aligned} S(\tau) = \tau \left[a N_{\frac{1}{3}}^2 \left(\frac{2}{3} k \tau^{\frac{3}{2}} \right) + b J_{\frac{1}{3}}^2 \left(\frac{2}{3} k \tau^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\ \left. - 2 \sqrt{ab - \frac{1}{W^2}} N_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} k \tau^{\frac{3}{2}} \right) J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} k \tau^{\frac{3}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 5. 2})$$

で表わされる。ここで W はWronskian

$$W = x_1(0)\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0)x_2(0) = \frac{3}{\pi}$$

である。

特解

初期条件 $S(\tau_1) = 1/k\tau_1^{\frac{1}{2}}$, $\dot{S}(\tau_1) = 0$ (5.2)の任意定数 a, b を決めよう。

(A. 5. 2)から、ただちに a, b に関する代数方程式

$$aN_{\nu}^2 + bJ_{\nu}^2 - 2 \left(ab - \frac{9}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\nu} N_{\nu} = \frac{6}{\pi^2 \theta_1} \quad (\text{A. 5. 3a})$$

$$\begin{aligned} aN_{\nu}N'_{\nu} + bJ'_{\nu}J'_{\nu} - \left(ab - \frac{9}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} (J'_{\nu}N'_{\nu} + J_{\nu}N'_{\nu}) \\ = -\frac{2}{\pi^2 \theta_1^2} \end{aligned} \quad (\text{A. 5. 3b})$$

$$\nu = \frac{1}{3}, \quad \theta_1 = \frac{2}{3} k \tau_1^{\frac{3}{2}}$$

ここでプライム“'”は $\theta (= \frac{2}{3} k \tau)$ についての微分を表わし、Bessel関数等の値は全て $\theta = \theta_1$ での値である。(A. 5. 3b)より、

$$\left(ab - \frac{9}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{aN_{\nu}^2 + bJ_{\nu}^2 - \sigma/\pi^2 \theta_1}{2J_{\nu}N_{\nu}} \quad (\text{A. 5. 4})$$

(A. 5. 4)を(A. 5. 3a)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{N_{\nu}(N'_{\nu}J_{\nu} - N_{\nu}J'_{\nu})}{2J_{\nu}} a + \frac{J_{\nu}(J'_{\nu}N_{\nu} - J_{\nu}N'_{\nu})}{2N_{\nu}} b \\ = -\frac{3(J'_{\nu}N_{\nu} + J_{\nu}N'_{\nu})}{\pi^2 \theta_1 J_{\nu} N_{\nu}} - \frac{2}{\pi^2 \theta_1^2} \end{aligned} \quad (\text{A. 5. 5})$$

を得る。公式、

$$J_{\nu}N'_{\nu} - J'_{\nu}N_{\nu} = 2/\pi\theta \quad (\text{A. 5. 6})$$

を使えば、

$$a = \frac{J_{\nu}^2}{N_{\nu}^2} b - \frac{3}{\pi N_{\nu}^2} \left(J'_{\nu}N_{\nu} + J_{\nu}N'_{\nu} + \frac{2J_{\nu}N_{\nu}}{3\theta_1} \right) \quad (\text{A. 5. 7})$$

と書ける。これを(A. 5. 4)式に代入して両辺を二乗し対応する項を比較すれば、

$$b = \frac{3}{2} \theta_1 N_{\nu}^2 + \frac{1}{6\theta_1 J_{\nu}^2} \left[\frac{3\theta_1}{2} (J'_{\nu}N_{\nu} + J_{\nu}N'_{\nu}) + J_{\nu}N_{\nu} + \frac{3}{\pi} \right]^2 \quad (\text{A. 5. 8})$$

を得る。更に、Bessel関数に関する漸化式

$$J'_{\nu} = J_{\nu-1} - \nu\theta^{-1}J_{\nu} \quad (\text{A. 5. 9})$$

と(A. 5. 6)から、

$$\begin{aligned}
J'_\nu N_\nu + J_\nu N'_\nu &= J'_\nu N_\nu + J'_\nu N_\nu + \frac{2}{\pi\theta_1} \\
&= 2\left(J_{\nu-1} - \frac{\nu}{\theta_1} J_\nu\right)N_\nu + \frac{2}{\pi\theta_1}
\end{aligned} \tag{A. 5. 10}$$

を得る。この(A. 5. 10)を(A. 5. 8)に代入して最終的に、

$$b = \frac{3}{2}\theta_1 N_\nu^2 + \frac{3}{2\theta_1 J_\nu^2} \left(\theta_1 J_{\nu-1} N_\nu + \frac{2}{\pi}\right)^2 \tag{A. 5. 11a}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{3}{2}\theta_1 J_\nu^2 + \frac{3}{2\theta_1 N_\nu^2} \left(\theta_1 J_{\nu-1} N_\nu + \frac{2}{\pi}\right)^2 \\
&\quad - \frac{6(\theta_1 J_{\nu-1} N_\nu + 1/\pi)}{\pi\theta_1 N_\nu^2}
\end{aligned} \tag{A. 5. 11b}$$

が演繹される。

S(0), \dot{S}(0)

シンクロトン振幅関数のトランジションでの値を求めてみよう。

$$\begin{aligned}
S(0) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \tau \left[a N_{\frac{1}{3}}^2(\theta) + b J_{\frac{1}{3}}^2(\theta) \right. \\
&\quad \left. - 2\left(ab - \frac{9}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}}(\theta) N_{\frac{1}{3}}(\theta) \right]
\end{aligned} \tag{A. 5. 12}$$

公式、

$$N_{\frac{1}{3}}(\theta) = \frac{1}{\sin(\pi/3)} \left[\cos(\pi/3) J_{\frac{1}{3}}(\theta) - J_{-\frac{1}{3}}(\theta) \right] \tag{A. 5. 13}$$

を用いれば、S(0)は、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \left\{ \frac{a}{3} \left[J_{\frac{1}{3}}^2 - 4J_{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}} + 4J_{-\frac{1}{3}}^2 \right] + b J_{\frac{1}{3}}^2 \right. \\
\left. - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(ab - \frac{9}{\pi^2}\right) \left(J_{\frac{1}{3}}^2 - 2J_{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{A. 5. 14}$$

となる。今、Bessel関数の θ について展開し、最低次の項のみ残せば、

$$J_{\frac{1}{3}}(\theta(\tau)) = \left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \tag{A. 5. 15a}$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(\theta(\tau)) = \left(\frac{k}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{\tau^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \tag{A. 5. 15b}$$

(A. 5. 15a)と(A. 5. 15b)を(A. 5. 14)に代入して、 $\tau = 0$ の極値を取れば、

$$S(0) = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left(\frac{k}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{2}{3})} \tag{A. 5. 16}$$

を得る。

S(0)も同様の方法で得られる。まず、

$$\begin{aligned}
\dot{S}(0) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left\{ \left[a N_{\frac{1}{3}}^2 + b J_{\frac{1}{3}}^2 - 2\left(ab - \frac{9}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{3}} N_{\frac{1}{3}} \right] \right. \\
&\quad \left. + 2\tau \theta \left[a N_{\frac{1}{3}} N'_{\frac{1}{3}} + b J_{\frac{1}{3}} J'_{\frac{1}{3}} - \left(ab - \frac{9}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(J'_{\frac{1}{3}} N_{\frac{1}{3}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + J_{\frac{1}{3}} N'_{\frac{1}{3}} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{A. 5. 17}$$

“..”は τ についての微分を表わす。

公式(A. 5. 10), (A. 5. 13)と漸化式(A. 5. 9)を用いれば、

$$N_{\frac{1}{3}} N'_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \left(J_{\frac{1}{3}} - 2J_{-\frac{1}{3}} \right) \left(J_{-\frac{2}{3}} + 2J_{\frac{2}{3}} - \frac{J_{\frac{1}{3}}}{3\theta} + \frac{2}{3\theta} J_{-\frac{1}{3}} \right) \tag{A. 5. 18a}$$

$$J_{\frac{1}{3}} J'_{\frac{1}{3}} = J_{\frac{1}{3}} \left(J_{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3\theta} J_{\frac{1}{3}} \right) \tag{A. 5. 18b}$$

$$J'_{\frac{1}{3}} N_{\frac{1}{3}} + J_{\frac{1}{3}} N'_{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(J_{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3\theta} J_{\frac{1}{3}} \right) \left(J_{\frac{1}{3}} - 2J_{-\frac{1}{3}} \right) + \frac{2}{\pi\theta} \tag{A. 5. 18c}$$

$J_{\frac{2}{3}}(\theta)$ と $J_{-\frac{2}{3}}(\theta)$ の θ に関して級数展開し、最低次項のみ残すと、

$$J_{\frac{2}{3}}(\theta) = \left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\tau}{\Gamma(\frac{5}{3})} \tag{A. 5. 19a}$$

$$J_{-\frac{2}{3}}(\theta) = \left(\frac{k}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{\tau^{-1}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \tag{A. 5. 19b}$$

を得る。 $\tau\theta = k\tau^{\frac{3}{2}}$ を用いて、(5.17)式中の $\tau \rightarrow 0$ での極限値を求めると、

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau\theta J_{\frac{1}{3}} J_{-\frac{2}{3}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} k \left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} \frac{\tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} = 0$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau\theta J_{\frac{1}{3}} J_{\frac{2}{3}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} k \left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \frac{\tau^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1}}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{5}{3})} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau\theta J_{-\frac{1}{3}} J_{-\frac{2}{3}} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} k \left(\frac{k}{3}\right)^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} \frac{\tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \\ &= \frac{3}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} \end{aligned}$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau\theta J_{-\frac{1}{3}} J_{\frac{2}{3}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} k \left(\frac{k}{3}\right)^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} \frac{\tau^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1}}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{5}{3})} = 0$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau\theta J_{\frac{1}{3}} J_{\frac{1}{3}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{3}{2} \left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \frac{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{4}{3})} = 0 \quad (\text{A. 5. 20})$$

(A. 5. 20)を(A. 5. 17)に代入し $\tau \rightarrow 0$ で有限な値を持つ項だけ残して、

$$\begin{aligned} \dot{S}(0) &= \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \left\{ \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[a \left(\frac{4}{3} J_{-\frac{1}{3}}^2 - \frac{8\tau\theta}{9\theta} J_{-\frac{1}{3}}^2 \right) \right. \right. \\ &\quad + a \left(-\frac{4}{3} J_{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}} + \frac{8\tau\theta}{9\theta} J_{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}} \right) \\ &\quad + \left(ab - \frac{9}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} J_{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}} - \frac{8\tau\theta}{3\sqrt{3}\theta} J_{\frac{1}{3}} J_{-\frac{1}{3}} \right) \left. \right. \\ &\quad + \left[-\frac{4a}{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} - 2 \left(ab - \frac{9}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \left. \left(-\frac{12}{\sqrt{3}\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})} + \frac{2\tau\theta}{\pi\theta} \right) \right] \right\} \quad (\text{A. 5. 21}) \end{aligned}$$

かくして、

$$\dot{S}(0) = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{a}{\sqrt{3}} + \left(ab - \frac{9}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{A. 5. 22})$$

を得る。

B-1 積分 $\int_1^\gamma \frac{d\gamma}{(\gamma^2-1)^{\frac{1}{4}}}$

次の積分を試みよう。

$$I = \int_1^\gamma \frac{d\gamma}{(\gamma^2-1)^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{B. 1. 1})$$

ここで変数変換

$$\omega = (\gamma^2-1)^{\frac{1}{4}} \left(\text{その時 } d\gamma = \frac{2(\gamma^2-1)^{\frac{3}{4}}}{\gamma} d\omega \right) \quad (\text{B. 1. 2})$$

をすれば、(B. 1. 1)は、

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{(\gamma^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{(\gamma^2-1)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{1+\omega^4}(\gamma^2-1)^{\frac{1}{4}}} d\omega \\ &= 2 \int_0^{(\gamma^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{\omega^2}{\sqrt{1+\omega^2}} d\omega \quad (\text{B. 1. 3}) \end{aligned}$$

になる。次に、更なる積分変数の変換

$$u = \frac{2\omega}{1+\omega^2} \quad (u < 1) \quad \text{あるいは} \quad \omega^2 = -1 + \frac{2}{u^2} + \frac{2\sqrt{1-u^2}}{u^2} \quad (\text{B. 1. 4})$$

$$\text{すると、} \quad d\omega = \frac{(1+\omega^2)^2}{2(1-\omega^2)} du$$

これから次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^4}} &= \frac{du}{2} \frac{(1+\omega^2)^2}{(1-\omega^2)} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^4}} \\ &= \frac{du}{2} \frac{(1+\omega^2)^2}{\sqrt{(1+\omega^2)^2 - 4\omega^2} \sqrt{(1+\omega^2)^2 - 2\omega^2}} \\ &= \frac{du}{2\sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{(1+\omega^2)^2}} \sqrt{1 - \frac{4\omega^2}{2(1+\omega^2)^2}}} \\ &= \frac{du}{2\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}} \end{aligned}$$

これと(B. 1. 4)式を用いると、

$$I = \int_0^{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}} \left[-1 + \frac{2}{u^2} + \frac{2\sqrt{1-u^2}}{u^2} \right] \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}} \quad (\text{B. 1.5})$$

$$\alpha \equiv (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

今、次の様な省略形を用いると

$$I_1 = \int_0^{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}=\beta} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}}$$

$$I_2 = \int_0^\beta \frac{du}{u^2 \sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}}$$

$$I_3 = \int_0^\beta \frac{du}{u^2 \sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}}$$

(B. 1.5)式は

$$I = -I_1 + 2I_2 + 2I_3 \quad (\text{B. 1.6})$$

と書ける。

定積分 I_1, I_2, I_3 は次の様に計算する。

まず、

$$I_1 = \int_0^\beta \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}} = F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{B. 1.7})$$

$$\sin\varphi = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad \text{あるいは} \quad \cos\varphi = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad (\text{B. 1.8})$$

次に I_2 は、不定積分

$$I[m] = \int \frac{u^m}{\sqrt{\phi(u)}} du, \quad J[m] = \int \frac{du}{u^m \sqrt{\phi(u)}} \quad (\text{B. 1.9})$$

に関する漸化式から、

$$2\phi(0)J[2] + \phi'(0)J[1] - \frac{1}{6}\phi'''(0)J[-1] - \frac{1}{12}\phi''''(0)J[-2] = -\frac{2\sqrt{\phi(u)}}{u} \quad (\text{B. 1.10})$$

ここで

$$\begin{aligned} \phi(u) &= (1-u^2)\left(1-\frac{1}{2}u^2\right) \\ &= \frac{1}{2}u^4 - \frac{3}{2}u^2 + 1 \end{aligned}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= 2u^3 - 3u & \phi'(0) &= 0 \\ \phi''(u) &= 6u^2 - 3 & \phi''(0) &= -3 \\ \phi'''(u) &= 12u & \phi'''(0) &= 0 \\ \phi''''(u) &= 12 & \phi''''(0) &= 12 \end{aligned}$$

であるから、(B. 1.10)式は次の様な簡単な式になる。

$$2J[2] - J[-2] = -\frac{2\sqrt{\phi(u)}}{u}$$

あるいは、

$$J[2] = \frac{1}{2}J[-2] - \frac{\sqrt{\phi(u)}}{u} \quad (\text{B. 1.11})$$

一般に、次の関係、

$$\begin{aligned} J[-2] &= I[2] \\ I[2] &= 2I[0] + 2 \int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}}{1-u^2} \end{aligned}$$

があるので、結局 $J[2]$ は次式で書き下せる。

$$J[2] = I[0] - \int \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}u^2}{1-u^2}} du - \frac{\sqrt{\phi(u)}}{u} \quad (\text{B. 1.12})$$

かくして、定積分 I_2 は第1種及び第2種楕円積分で書く事が出来る。

$$\begin{aligned} I_2 &= F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{\phi(u)}}{u} \Big|_0^\beta \\ &= F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\frac{1}{2}\beta^2)}}{\beta} \\ &\quad + \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1-u^2)(1-\frac{1}{2}u^2)}}{u} \end{aligned} \quad (\text{B. 1.13})$$

一方、定積分 I_3 は容易に求まる。

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_0^\beta \frac{du}{u^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}u^2}} = \int_0^{\sin^{-1}(\beta/\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}\cos\theta d\theta}{2\sin^2\theta \sqrt{1 - \sin^2\theta}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sin^{-1}(\beta/\sqrt{2})} \frac{d\theta}{\sin\theta} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cot\theta \Big|_0^{\sin^{-1}(\beta/\sqrt{2})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \left[\sin^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} \right) \right] - \lim_{\theta \rightarrow 0} \cot\theta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\beta^2}}{\beta/\sqrt{2}} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}u^2}}{u} \\
 &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2/2}}{\beta} - \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}u^2}}{u}
 \end{aligned} \tag{B. 1. 14}$$

(B. 1. 7), (B. 1. 13), (B. 1. 14)を(B. 1. 6)に代入すれば

$$\begin{aligned}
 I &= -F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &\quad - \frac{2\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}}{\beta} + 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \frac{1}{2}u^2)}}{u} \\
 &\quad + \frac{2\sqrt{1 - \beta^2/2}}{\beta} - 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}u^2}}{u} \\
 &= F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &\quad + 2 \left\{ -\frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}}{\beta} + \frac{\sqrt{1 - \beta^2/2}}{\beta} \right\} \\
 &\quad + 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{(1 - u^2)(1 - \frac{1}{2}u^2)}}{u} - \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}u^2}}{u} \right\}
 \end{aligned} \tag{B. 1. 15}$$

ここで、A, Bを下のように定義して簡単化すると、

$$\begin{aligned}
 A &\equiv -\frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \frac{1}{2}\beta^2)}}{\beta} + \frac{\sqrt{1 - \beta^2/2}}{\beta} \\
 &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2/2}}{\beta} (1 - \sqrt{1 - \beta^2}) \\
 &= \frac{(1 + \alpha^2)}{2\alpha} \sqrt{1 - \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}} \right] \\
 &= \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1 + \alpha^4}}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{(1 + \alpha^2) - (1 - \alpha^2)}{1 + \alpha^2} \\
 &= \frac{\alpha^2 \sqrt{1 + \alpha^4}}{\alpha(1 + \alpha^2)} \\
 &= \frac{(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{4}} \gamma}{1 + (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{B. 1. 16}$$

$$\begin{aligned}
 B &\equiv \lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{(1 - u^2)(1 - u^2/2)}}{u} - \frac{\sqrt{1 - u^2/2}}{u} \right] \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - u^2} - 1)}{u} \cdot \sqrt{1 - u^2/2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{B. 1. 17}$$

かくして、

$$\begin{aligned}
 I &= F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2\gamma(\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{4}}}{1 + (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\
 \varphi &= \cos^{-1} \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \cos^{-1} \frac{1 - (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{1 + (\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned} \tag{B. 1. 18}$$

B-2 BBUモードのWake関数

具体論に入る前に、空洞における固有モード励起の一般論を述べる。先ず、Condon(1941)が導入した Resonator Coordinate法と呼ばれる、電磁場と電流、電荷密度に対する固有モード展開法に従って、励起を Dynamical方程式で記述してみる。

電流密度 i と電荷密度 ρ が存在する空洞内の電磁場は

ベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ を用いて、それぞれ

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{B. 2. 1})$$

と書ける。空洞表面が完全導体と仮定すると \mathbf{E} , \mathbf{B} は境界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B. 2. 2})$$

(\mathbf{n} は空洞壁面に垂直な単位ベクトル)

を満足する。今 Coulomb ゲージ、 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ 、を採用すると、Maxwell 方程式は

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{i} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{B. 2. 3a})$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{B. 2. 3b})$$

となる。 ϕ は空洞内の電荷のみで決まる静電ポテンシャルそのものである事を注意する。境界条件(B. 2. 2) は

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{B. 2. 4a})$$

壁面上で

$$\phi = 0 \quad (\text{B. 2. 4b})$$

と書き換えられる。

空洞に励起され得る定在波としての固有モード \mathbf{a}_λ の振動数を ω_λ とすると、 \mathbf{a}_λ は齊次の波動方程式から得られる

$$\Delta \mathbf{a}_\lambda + k_\lambda^2 \mathbf{a}_\lambda = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{a}_\lambda = 0 \quad (\text{B. 2. 5})$$

$$\left(k_\lambda = \frac{\omega_\lambda}{c} \right)$$

を満足する筈である。境界値条件から波数 k_λ が知られ、振動数 ω_λ が結果的に得られる。ここで固有モード \mathbf{a}_λ が直交性を有する事が以下に証明される。(B. 2. 5)を用いると、先ず

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_{\lambda'} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}_\lambda)] - \mathbf{a}_\lambda \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}_{\lambda'})] \\ &= \mathbf{a}_{\lambda'} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}_\lambda) - \Delta \mathbf{a}_\lambda] - \mathbf{a}_\lambda \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}_{\lambda'}) - \Delta \mathbf{a}_{\lambda'}] \\ &= \mathbf{a}_{\lambda'} \cdot (k_\lambda^2 \mathbf{a}_\lambda) - \mathbf{a}_\lambda \cdot (k_{\lambda'}^2 \mathbf{a}_{\lambda'}) \\ &= (k_\lambda^2 - k_{\lambda'}^2) \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{a}_{\lambda'} \end{aligned} \quad (\text{B. 2. 6})$$

計算される。ベクトル解析の公式

$$\nabla(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

を用いれば、(B. 2. 6)式の左辺を

$$\nabla \cdot [\mathbf{a}_\lambda \times (\nabla \times \mathbf{a}_{\lambda'}) + (\nabla \times \mathbf{a}_\lambda) \times \mathbf{a}_{\lambda'}]$$

と変形させ得る。そうした上で、(B. 2. 6)の両辺を空洞内全域で体積積分すれば、ガウスの定理より、右辺の積分は空洞内壁面上での面積分となる、

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla \cdot [\mathbf{a}_\lambda \times (\nabla \times \mathbf{a}_{\lambda'}) + (\nabla \times \mathbf{a}_\lambda) \times \mathbf{a}_{\lambda'}] d^3x \\ &= \int_S [\mathbf{a}_\lambda \times (\nabla \times \mathbf{a}_{\lambda'}) + (\nabla \times \mathbf{a}_\lambda) \times \mathbf{a}_{\lambda'}] \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

空洞表面上での境界条件 $(\nabla \times \mathbf{a}_\lambda) \cdot \mathbf{n} = 0$ よりこの表面積分は 0 になる。従って、直交条件

$$\int_V \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{a}_{\lambda'} d^3x = 0 \quad (k_\lambda \neq k_{\lambda'}) \quad (\text{B. 2. 7})$$

を得る。又 \mathbf{a}_λ を

$$\int_V \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{a}_\lambda^* d^3x = V \quad (V: \text{空洞の体積}) \quad (\text{B. 2. 8})$$

によって正規化しておくと後で都合が良い。 \mathbf{a}_λ^* は \mathbf{a}_λ の複共役関数である(体積 V が実数であるので (B. 2. 8)の右辺の被積分関数は実関数でなければならない)。

さて道具立ては出来た。今ベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、電流密度 \mathbf{i} 、この固有系 $\{\mathbf{a}_\lambda\}$ で展開する、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_\lambda q_\lambda(t) \mathbf{a}_\lambda(\mathbf{x}) \quad (\text{B. 2. 9})$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = \sum_\lambda J_\lambda(t) \mathbf{a}_\lambda(\mathbf{x}) \quad (\text{B. 2. 10})$$

ここで、

$$\begin{aligned}\int_V \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{a}_\lambda^* d^3\mathbf{x} &= \sum_{\lambda'} J_{\lambda'}(t) \int_V \mathbf{a}_{\lambda'} \cdot \mathbf{a}_\lambda^* d^3\mathbf{x} \\ &= \sum_{\lambda'} J_{\lambda'}(t) V \delta_{\lambda\lambda'} \\ &= V J_\lambda(t)\end{aligned}$$

より

$$J_\lambda(t) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_\lambda^* d^3\mathbf{x} \quad (\text{B. 2. 11})$$

即ち、展開係数は時間だけの関数であり、 $q_\lambda(t)$ は固有モード λ の振動振幅を表す。一方 $J_\lambda(t)$ は与えられた電流密度 \mathbf{i} から (B. 2. 11) 式に従って、一意に求められる。

一方、スカラーポテンシャルについても、固有モード φ_λ を導入する。この φ_λ も斉次の Helmholtz 方程式

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_\lambda + k_\lambda^2\varphi_\lambda &= 0 \\ (\text{壁面上で}\varphi_\lambda &= 0)\end{aligned} \quad (\text{B. 2. 12})$$

を満足すると仮定すると、 φ_λ について以下の直交性が認められる。部分積分により、

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_0}{2} \int_V \nabla\varphi_\lambda \cdot \nabla\varphi_\lambda^* d^3\mathbf{x} &= \frac{\epsilon_0 k_\lambda^2}{2} \int_V \varphi_\lambda \cdot \varphi_\lambda^* d^3\mathbf{x} \\ \text{or } \frac{\epsilon_0 k_{\lambda'}^2}{2} \int_V \varphi_{\lambda'} \varphi_\lambda^* d^3\mathbf{x}\end{aligned}$$

故に、

$$(k_\lambda^2 - k_{\lambda'}^2) \int_V \varphi_\lambda \varphi_{\lambda'}^* d^3\mathbf{x} = 0$$

かくして

$$\int_V \varphi_\lambda \varphi_{\lambda'}^* d^3\mathbf{x} = V \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\text{B. 2. 13})$$

スカラーポテンシャル ϕ と電荷密度 ρ を、この固有系 $\{\varphi_\lambda\}$ で展開する。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_\lambda r_\lambda(t) \varphi_\lambda(\mathbf{x}) \quad (\text{B. 2. 14})$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_\lambda g_\lambda(t) \varphi_\lambda(\mathbf{x}) \quad (\text{B. 2. 15})$$

ここで

$$g_\lambda = \frac{1}{V} \int_V \rho \varphi_\lambda^* d^3\mathbf{x}$$

(B. 2. 14) と (B. 2. 15) を Maxwell 方程式の後半 (B. 2. 36) に代入して、

$$\begin{aligned}r_\lambda k_\lambda^2 &= \frac{g_\lambda}{\epsilon_0} \\ g_\lambda &= \epsilon_0 \left(\frac{\omega_\lambda}{\nu} \right)^2 r_\lambda\end{aligned} \quad (\text{B. 2. 16})$$

を得る。駆動項を持った波動方程式 (B. 2. 3a) に (B. 2. 9), (B. 2. 10), (B. 2. 14), (B. 2. 15) を代入すれば、各モードについて、

$$\begin{aligned}q_\lambda \Delta \mathbf{a}_\lambda - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_\lambda \mathbf{a}_\lambda &= -\mu_0 J_\lambda \mathbf{a}_\lambda + \frac{1}{c^2} \nabla \left[\frac{\partial}{\partial t} (r_\lambda \varphi_\lambda) \right] \\ -k_\lambda^2 q_\lambda \mathbf{a}_\lambda - \frac{1}{c^2} \ddot{q}_\lambda \mathbf{a}_\lambda &= -\mu_0 J_\lambda \mathbf{a}_\lambda + \frac{1}{c^2} \frac{\partial r_\lambda}{\partial t} \nabla \varphi_\lambda \\ [\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda] \mathbf{a}_\lambda &= c^2 \mu_0 J_\lambda \mathbf{a}_\lambda - \frac{\partial r_\lambda}{\partial t} \nabla \varphi_\lambda\end{aligned} \quad (\text{B. 2. 17})$$

を得る。ここで (B. 2. 16) より、

$$\begin{aligned}-\frac{\partial r_\lambda}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{c}{\omega_\lambda} \right)^2 \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{c}{\omega_\lambda} \right)^2 \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \varphi_\lambda^* d^3\mathbf{x}\end{aligned}$$

電荷保存側を用いて、

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{c}{\omega_\lambda} \right)^2 \frac{1}{V} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{i}) \varphi_\lambda^* d^3\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{c}{\omega_\lambda} \right)^2 \frac{1}{V} \sum_{\lambda'} J_{\lambda'} \int (\nabla \cdot \mathbf{a}_{\lambda'}) \varphi_\lambda^* d^3\mathbf{x}\end{aligned}$$

ゲージ条件 $\nabla \cdot \mathbf{a}_\lambda = 0$ より

$$= 0$$

従って、(B. 2. 17) 式右辺第 2 項は消失する。かくして

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{c^2 \mu_0}{V} \int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_\lambda^* d^3\mathbf{x} \quad (\text{B. 2. 18})$$

を得る。これを固有モードの時間的成長を記述する Dynamical 方程式と呼ぶ。強制振動を受けた調和振動子の方程式に外ならない。

これら固有モードの励起に伴って空洞にはエネルギーが蓄積されて行く訳であるが、今空洞内電磁場エネルギーを固有モードのパラメーターで表現してみよう。この

エネルギーが

$$W = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) d^3x$$

で表わされる事は知っている。右辺の各項は、磁場エネルギーについては、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_0} \int_V |\mathbf{B}|^2 d^3x &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* d^3x \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B}^* \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d^3x \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \int_S (\mathbf{B}^* \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} ds \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}^*) d^3x \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{B}^* ds \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}^*) d^3x \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}^*) d^3x \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^*)] d^3x \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}^*) - \Delta \mathbf{A}^*] d^3x \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{A}^* d^3x \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \sum_{\lambda, \lambda'} q_\lambda q_{\lambda'}^* \int_V \mathbf{a}_\lambda \cdot \Delta \mathbf{a}_{\lambda'}^* d^3x \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\lambda, \lambda'} \left(\frac{\omega_{\lambda'}}{c} \right)^2 q_\lambda q_{\lambda'}^* \int_V \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{a}_{\lambda'}^* d^3x \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \sum_{\lambda, \lambda'} \left(\frac{\omega_{\lambda'}}{c} \right)^2 q_\lambda q_{\lambda'}^* \delta_{\lambda\lambda'} \\ &= \frac{V}{2\mu_0 c^2} \sum_{\lambda, \lambda'} \omega_\lambda^2 |q_\lambda|^2 \end{aligned}$$

となる。又、電場エネルギーは、

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 d^3x &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* d^3x \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} + \nabla \phi^* \right) d^3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} d^3x + \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \nabla \phi^* d^3x + \int_V \nabla \phi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} d^3x \right. \\ &\quad \left. + \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* d^3x \right] \end{aligned}$$

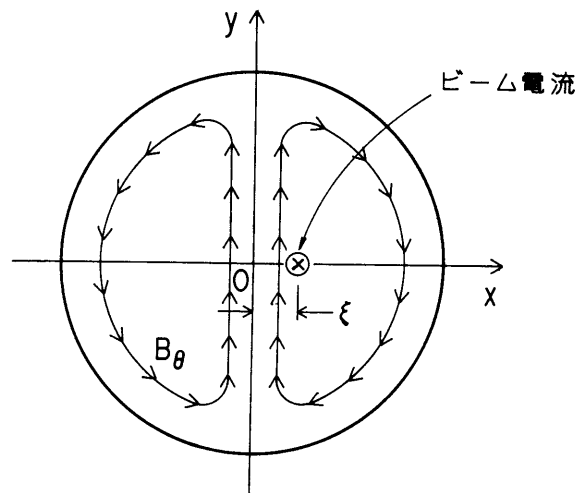
右辺各項は、

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} d^3x &= \sum_{\lambda, \lambda'} q_\lambda q_{\lambda'}^* \int_V \mathbf{a}_\lambda \cdot \mathbf{a}_{\lambda'}^* d^3x \\ &= V \sum_{\lambda} |q_\lambda|^2 \\ \int_V \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \nabla \phi^* d^3x &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \phi^* d^3x \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'} q_\lambda^* r_{\lambda'} \int_V \mathbf{a}_\lambda \cdot \nabla \phi_{\lambda'}^* d^3x = 0 \\ \int_V \nabla \phi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} d^3x &= \sum_{\lambda, \lambda'} r_\lambda q_{\lambda'}^* \int_V \nabla \phi_\lambda \cdot \mathbf{a}_{\lambda'}^* d^3x = 0 \\ \int_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* d^3x &= \sum_{\lambda, \lambda'} r_\lambda r_{\lambda'}^* \int_V \nabla \phi_\lambda \cdot \nabla \phi_{\lambda'}^* d^3x \\ &= V \sum_{\lambda} k_\lambda^2 |r_\lambda|^2 \end{aligned}$$

となり、結局

$$W = \frac{V\epsilon_0}{2} \sum_{\lambda} [|q_\lambda|^2 + \omega_\lambda^2 |q_\lambda|^2 + k_\lambda^2 |r_\lambda|^2] \quad (\text{B. 2. 19})$$

となる。予想された様に、全エネルギーは輻射場各モードの振動エネルギーと静電エネルギーの和に相当する。さてここから具体論に入ろう。空洞を円筒型のピルボックスであると仮定する。その断面を図B 1に示す。



図B 1 変位したビーム重心とTM₁₁₀モード

この空洞を励起する電流密度（ビーム電流密度） i を円筒型座標系を使って

$$i = \frac{I_B}{\rho} \delta(\rho - \xi(t)) \delta(\theta) \cdot e_z \quad (\text{B. 2. 20})$$

と書く。ビーム重心の変位を $\xi(t)$ で表わしている（図B 1参照）。危険なBBUモードは TM_{110} である。そこでモード λ は TM_{110} と仮定する。円筒空洞の TM_{110} モード a_λ の z 成分が

$$a_\lambda^z \propto J_1(\nu\rho) \cos\theta \quad (\text{B. 2. 21})$$

で書ける事は知っている $1/\rho$ 。 J_1 はオーダー1のBessel関数であり、 ν は $J_1(\nu b) = 0$ を満足する。固有モードベクトルを座標原点のまわりで展開し、1次のオーダーで

$$a_\lambda^z(\rho, \theta, z) = a_\lambda^z(0, \theta, z) + \frac{\partial a_\lambda^z}{\partial \rho} \rho$$

$J_1(\nu 0) = 0$ より、右辺第1項は消失するので、

$$a_\lambda^z(\rho, \theta, z) = + \frac{\partial a_\lambda^z(0, \theta, z)}{\partial \rho} \rho \quad (\text{B. 2. 22})$$

と書ける。今(B. 2. 20)と(B. 2. 22)を(B. 2. 18)の右辺に代入し、駆動項を具体的に計算してみると、

$$\begin{aligned} \int_V i \cdot a_\lambda^z d^3x &= I_B \int_0^b \int_0^{2\pi} \int_0^d \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \xi) \delta(\theta) \\ &\quad [a_\lambda^z(\rho, \theta, z)]^* \rho d\rho d\theta dz \\ &= I_B \xi(t) \int_0^d \frac{\partial [a_\lambda^z(0, 0, z)]^*}{\partial \rho} dz \end{aligned}$$

である。かくして Dynamical方程式は、

$$q_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{c^2 \mu_0 I_B}{V} \xi(t) \int_0^d \frac{\partial [a_\lambda^z(0, 0, z)]^*}{\partial \rho} dz \quad (\text{B. 2. 23})$$

右辺の積分はモードを指定しているので、時間的に変動しない定数である。右辺においてビーム重心の変位 $\xi(t)$ が唯一時間変動の自由度を持つ。もし重心の変位が一定($\xi(t) = \xi_0$)であるならば、ビームHead到達以前に何も励起されていなかったと仮定すると、このBBUモードの時間的変動は

$$q_\lambda(t) = \frac{c^2 \mu_0 I_B \xi_0}{V \omega_\lambda} \left[\int_0^d \frac{\partial a_\lambda^z}{\partial \rho} dz \right] \sin \omega_\lambda t \quad (\text{B. 2. 24})$$

によって与えられる。振動の振幅が増大し続ける事は無い。しかし実際のビームでは、 $\xi(t)$ はやはり時間の関数である。但し、 $\xi(t)$ の従うビーム重心のベータートロン運動方程式を同時に解かなければ、具体的時間依存性は知り得ない。即ち、実際のビームによる空洞の励起は Dynamical方程式だけでは求まらないのである。

励起されている空洞を通過する電子が受ける動径方向の力は

$$\begin{aligned} F_\rho &= eE_\rho - ev_z B_\theta \\ &= e \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial t} - v_z \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \right] \\ &= e \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A_\rho + v_z \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] \quad (\text{B. 2. 25}) \end{aligned}$$

を表わせる。粒子のベータートロン波長 λ_β が空洞ギャップサイズ d に比して十分大きいと、粒子は空洞ギャップを中心軸(z 軸)に平行に通過したと看做せる。又、粒子の速度 v_z は一定であるとする、空洞ギャップを通過する間に受ける動径方向の運動量は、上式の右辺第1項が消失するので

$$\begin{aligned} P_\perp &= m\gamma \Delta p = ev q_\lambda(t) \int_0^{d/v} \frac{\partial a_\lambda^z}{\partial \rho} dt \\ &= ev q_\lambda(t) \int_0^d \frac{\partial a_\lambda^z}{\partial \rho} dz \quad (\text{B. 2. 26}) \end{aligned}$$

ここで $1/(2\pi\omega_\lambda) \gg d/v$ を仮定している。この関係は、モードの励起状態 $q_\lambda(t)$ と、そこで電子が得る動径方向の運動量は1対1に線型対応する事を意味する。(B. 2. 26)より

$$q_\lambda(t) = \frac{P_\perp}{e \int_0^d \frac{\partial a_\lambda^z}{\partial \rho} dz} \quad (\text{B. 2. 27})$$

(B. 2. 27)を(B. 2. 23)に代入すると、

$$\frac{\dot{P}_\perp}{e \int_0^d dz} + \omega_\lambda^2 \frac{P_\perp}{e \int_0^d dz} = \frac{c^2 \mu_0 I_B}{V} \xi(t) \int_0^d \frac{\partial (a_\lambda^z)^*}{\partial \rho} dz$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_\lambda^2 \right) \Delta = \frac{ec \mu_0 I_B}{mV} \xi(t) \left[\int_0^d \frac{\partial a_\lambda^z}{\partial \rho} dz \right]^2 \quad (\text{B. 2. 28})$$

ここで

$$\Delta = \frac{P_\perp}{mc}$$

ここで定義に従って Transverse Impedance Z_{\perp}' を導入しよう。Q を空洞の Quality Factor だとすると、

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\perp}'}{Q} &= \frac{V_{\perp}^2}{2\omega_{\lambda} W_{\lambda}} \quad (V_{\perp} = \int_0^d v B_{\theta} dz) \\ &= \frac{c^2 |q_{\lambda}|^2 \left[\int_0^d \frac{\partial a_{\lambda}^2}{\partial \rho} dz \right]^2}{2\omega_{\lambda} W_{\lambda}} \end{aligned} \quad (\text{B. 2. 29})$$

輻射場モード λ の蓄積エネルギーは (B. 2. 19) より

$$\begin{aligned} W_{\lambda} &= \frac{V \epsilon_0}{2} [|q_{\lambda}|^2 + \omega_{\lambda}^2 |q_{\lambda}|^2] \\ &= \frac{V \epsilon_0}{2} \omega_{\lambda}^2 |q_{\lambda}|^2 \quad (q_{\lambda} = 0 \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

これを (B. 2. 29) に代入して

$$\left[\int_0^d \frac{\partial a_{\lambda}^2}{\partial \rho} dz \right]^2 = \frac{V \epsilon_0 \omega_{\lambda}^3}{c^2} \left(\frac{Z_{\perp}'}{Q} \right) \quad (\text{B. 2. 30})$$

を得る。更にこれを (B. 2. 28) に代入すれば、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_{\lambda}^2 \right) \Delta = \omega_{\lambda}^3 \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \left(\frac{Z_{\perp}'}{Q} \right) \xi(t) \quad (\text{B. 2. 31})$$

となる。

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} I_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{e} \\ Z_{\perp} \equiv 4\pi\epsilon_0 Z_{\perp}' \end{cases}$$

初期条件 $\Delta(0) = 0, \dot{\Delta}(0) = 0$ (空洞はビーム Head 到達以前、何も励起されていないと仮定している) を用いれば

$$\Delta(t) = \omega_{\lambda}^3 \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \left(\frac{Z_{\perp}'}{Q} \right) \int_0^t \xi(t') \sin[\omega_{\lambda}(t-t')] dt' \quad (\text{B. 2. 32})$$

空洞はビームの通る軸上に並ぶ。従って、各々の空洞で励起されている Deflection mode の振幅は軌道座標 s で specify し得る。即ち、 $q(t, s)$ という具合に。又、空洞各々の励起開始時間はビーム Head が到達した時と考えて良い。そうすると、 s 軸上のある位置 s に局在する空洞で、ビーム Head がそこを通過して τ だけ時間が経過した時の固有モード振幅は $q(\tau, s)$ で表わし得る。かくして、ビーム Head から時間座標軸で τ だけ下流に位置するビー

ムスライス中の電子が s の位置にある空洞を通過する時に受ける動径方向の規格化運動量は (B. 2. 32) 式から

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, s) &= \frac{P_{\perp}}{mc} = \omega_{\lambda}^2 \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \left(\frac{Z_{\perp}'}{Q} \right) \\ &\quad \int_0^{\tau} \xi(\tau', s) \sin[\omega_{\lambda}(\tau - \tau')] d\tau' \end{aligned} \quad (\text{B. 2. 33})$$

によって表現し得る。この運動量変化を空洞ギャップ長 d で平均を取り、ビーム重心のベータートロン振動方程式に導入すれば、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} + k_{\beta}^2 \right] \xi(\tau, s) = \frac{\Delta(\tau, s)}{d\gamma} \Theta(s) \quad (\text{B. 2. 34})$$

$$\Theta(s) = \begin{cases} 1 & \text{空洞中} \\ 0 & \text{空洞外} \end{cases}$$

を得る。

かくして、ビームから見た BBU モードの Wake 関数は

$$W(\tau, \tau') = \frac{\omega_{\lambda}^2}{d\gamma} \left(\frac{I_B}{I_0} \right) \left(\frac{Z_{\perp}'}{Q} \right) \sin[\omega_{\lambda}(\tau - \tau')] \quad (\text{B. 2. 35})$$

として求められる。

Deflection mode の励起に電流密度が寄与するのは見て来た通りである。当然エネルギー保存側から、空洞内の蓄積エネルギーはビームエネルギーから供給されねばならない。エネルギー交換に直接磁場は関与しない。電場が寄与するだけである。即ち、電子ビームは Deflection mode の進行方向の電場成分 ($E_z = -q_{\lambda} a_{\lambda}^2$) との相互作用で、その運動エネルギーをロスして行く。しかし、空洞でロスするエネルギーは電子エネルギー $mc^2 \gamma$ と比してはるかに小さいので、第 0 次近似の議論の中では、このロスエネルギーを考慮しない。

参 考 文 献

1 章

網羅している訳ではないが、例えば、

- 1) 神谷幸秀、“加速器の原理”、OH0'84 (1984)。
将来円型加速器のプロになろうと思っている読者には余りに過保護な教科書である。しかし、プロの言に煙に巻かれたくないアマとセミプロには、この上ない助人である。
- 2) 鈴木敏郎、“ビーム不安定性の理論”、OH0'86(1986)。
円型加速器における粒子ビームのコヒーレント不安定性全般について、かなり専門的に書かれた、初めての日本語教科書。
- 3) CERN, US加速器スクールテキスト。
ヨーロッパでは1984年から、アメリカでは1981年から加速器スクールが毎年開催されている。講義の一つ一つはかなりテーマを絞っており、一応その分野で実績の有る人が講師を勤めている。著名な講師の場合、スクール一二年後発行される講義録は若い人に書かせている場合もある。

2 章

2-1 節

- 1) E. D. Courant, M. S. Livingston, and H. S. Snyder, “The Strong-Focusing Synchrotron - A New High Energy Accelerator”, Phys. Rev. 88, 1190 (1952).
N. C. Christofilos, “Focusing System for Ions and Electrons”, US Patent No. 2-736-799 (1950).
順番を付けるなら、後者が第一発見者である。しかし前者は彼らの論文を投稿するまで後者の存在を知らなかった由。
- 2) W. Magnus and S. Winkler, “Hill's Equation”, (Dover Pub. Inc., 1966).
- 3) N. M. McLachlan, “Theory and Application of Mathieu functions”, (Oxford, 1947).
- 4) K. Takayama, “Note on Solvable Hill Equations”, Phys. Rev. A 34, 4408 (1986).

2-2 節

- 1) C. J. Eliezer and A. Gray, “A Note on the Time-Dependent Harmonic Oscillator”, SIAM J. Appl. Math. 30, 463 (1976).
- 2) V. P. Ermakov, Univ. Izv. Kiev 20 No. 9, 1 (1880).
- 3) W. E. Milne, “The Numerical Determination of

Characteristic Number”, Phys. Rev. 35, 863 (1930).

- 4) E. D. Courant and H. S. Snyder, “Theory of the Alternating Gradient Synchrotron”, Ann. of Phys. 3, 1 (1958).
- 5) H. Goldstein, “Classical Mechanics” 2nd Edition, 邦訳 “古典力学” (吉岡書店, 1984) p756.

2-3 節

- 1) 平松成範、“新しい加速方式”、OH0'84。80年代前半までに提案されたアイデアの解説である。8年後の今全く話題にのぼらなくなった物もいくつか見いだす。
- 2) 二宮重史、“陽子シンクロトロンの高周波加速装置” OH0'89。
- 3) E. M. McMillan, “The Synchrotron - A Proposed High Energy Particle Accelerator”, Phys. Rev. 68, 143 (1945).
- 4) V. Veksler, J. Phys. U. S. S. R. 9, 153 (1945).
- 5) D. Bohm and L. Foldy, “The Theory of the Synchrotron”, Phys. Rev. 70, 249 (1946).
- 6) B. V. Chirikov, “A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems”, Phys. Rep. 52, No. 5 (1979).
- 7) H. G. Hereward, CERN Report MPS/DL Int. 66-3(1966)
- 8) K. Takayama, “Phase Dynamics near Transition Energy in the Fermilab Main Ring”, Part. Accel. 14, 201 (1984).
- 9) E. Keil and W. Schnell, CERN-ISR-TH-RF/69-48(1969).
- 10) 二宮重史、庄司善彦、私信 (1992)。
- 11) K. Johnsen, “Transition”, '84 CERN Accelerator School, 178 (1984).
- 12) A. Ando and K. Takayama, “Synchrotron Oscillation with Very Small η ”, IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-30, 2604 (1983).
- 13) 大沼昭六、私信 (1982, 1991)。
- 14) J. E. Griffin, “Synchrotron Phase Transition Crossing Using An RF Harmonic”, Fermilab TM-Note (1991).

2-4 節

- 1) F. Hertweck and A. Schluter, “Die diabatische Invarianz des magnetischen Bahnmomentes geladener Teilchen”, Z. Naturforsch 12A, 844 (1957).
V. G. Backus, A. Lenard, and R. Kulsrud,

"Bemerkungen über die adiabatische Invarianz des Bahnmomentes geladener Teilchen", Z. Naturforsch 15A, 1007(1960).

P. O. Vandervoort, "The Nonconstancy of the Adiabatic Invariants" Ann. of Phys. 12, 436 (1961).

J. E. Howard, "Nonadiabatic Harmonic Oscillator" Phys. of Fluids 13, 2407 (1970).

- 2) K. Symon, "The Adiabatic Invariant of the Linear and Nonlinear Oscillator", J. of Math. Phys. 11, 1320 (1970).
- 3) K. Takayama, "An Exact Study of Adiabaticity", Phys. Rev. A 45, 2618 (1992).

2 - 5 節

- 1) T. Collins, "Concepts in the Design of Circular Accelerators", '82 US accelerator school.
P. J. Bryant, "Design of a Ring Lattice", '90 CERN Accelerator School.
鎌田進、"加速器の原理と設計"、OH0'85.
野田章、"陽子シンクロトロン of イオン光学系"、OH0'89。
大見和史、"低エミッタンスリングのラティス" OH0'91.
- 2) A. Ando, "Distortion of Beam Emittance with Nonlinear Magnetic Fields", Part. Accel. 15, 177(1984)

3 章

- 1) J. Beal, N. C. Christofilos, and R. Hester, "The Astrom Linear Accelerator", IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-16 No. 3, 294 (1969).
- 2) L. Reginato, "The Advanced Test Accelerator (ATA), A 50MeV 10-kA Induction Linac", IEEE Nucl. Trans. NS-30, 2970 (1983).
- 3) S. Humphries, Jr, "Principles of Charged Particle Acceleration", (John Wiley & Sons, 1986).
色々な加速器がバランス良く初等的に書かれている。
テキストとして、誘導加速器の記述はこの本が最初だろう。
- 4) D. S. Prono et al., "Electron-Beam Guiding and Phase-Mix Damping by an Electrostatically Charged Wire", Phys. Rev. Lett. 51, 723 (1983).
- 5) W. E. Martin et al., "Electron-Beam Guiding and Phase-Mix Damping by a Laser-Ionized Channel", Phys. Rev. Lett. 54, 685 (1985).

6) H. Kurino et al., "Beam Guiding in the Ion Focused Regime at the KEK FEL Test Stand", Part. Accel. 31, 89 (1990).

7) T. Ozaki et al., "First Result of the KEK X-band Free Electron Laser in the Ion Channel Guiding Regime", Nucl. Inst. Meth. A318, 101 (1992).

3 - 1 節

- 1) A. C. Paul and V. K. Neil, "High-Current Relativistic Electron Guns", in Applied Charged Particle Optics, Advanced in Electronics and Electron Physics, Supplement 13C, (Academic Press, 1983) p141.
LLNLに於ける誘導電子銃の変遷を知るのには興味深い。
- 2) I. Langmuir, "The Effect of Space-Charge and Initial Velocities on the Potential Distribution and Thermionic Plane Electrodes", Phys. Rev. 21, 419 (1923).
Childの論文は何故か見つかからない。
- 3) H. R. Jory and A. W. Trivelpiece, "Exact Relativistic Solution for the One-Dimensional diode", J. Appl. Phys. 40, 2294 (1969).
テキストは大体この論文に基づいている。ここでは最後の積分を公式集から引用している。
- 4) W. B. Hermannsfeldt, "EGUN-An Electron Optics and Gun Design Program", SLAC-331 (1988).
この外にも、有名無名のプログラムがあまた在る筈である。

3 - 2 節

- 1) J. Kevorkian and J. D. Cole, "Perturbation Methods in Applied Mathematics", (Springer, 1980), P. 264
- 2) M. Kuramoto, "Production of High Power Electron Beams", MS Thesis (Hirosima Univ.) (1987).
- 3) 福田茂樹、"クライストロンとその周辺"、OH0'88.
竹田誠之、"リニアックの基礎"、OH0'90。
大沢哲、"電子銃"、OH0'90.
- 4) I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirkij, "Limitations of Proton Beam Current in a Strong Focusing Linear Accelerator Associated with the Beam Space Charge", Proc. of Conf. on High Energy Accelerators and Inst., CERN, Geneva (1959), p274.

- 5) K. Takayama, "An Analytically Derived Periodic Solution of the Kapchinskij-Vladimirskij Envelop Equation in the Emittance Dominated Regime", Part. Accel. 21, 259 (1987).
 - 6) T. Monaka, "X-band Free Electron Laser in the Ion Channel Guiding Regime", PhD Thesis (The Graduate University for Advanced Studies) (1992).
 - 7) H. Kurino, "Ion Channel Guiding in the FEL Test Stand for the Future TBA Linear Collider" PhD Thesis (Tohoku Univ.) (1990).
 - 8) Y. P. Chong et al., "Beam Profile of the Advanced Test Accelerator under Laser-Ion Guiding", in Proc. of 6th Int. Conf. on High-Power Particle Beams, 735 (1986).
 - 9) R. Briggs, LLNL UCID-19187 (1981).
 - 10) K. Takayama and S. Hiramatsu, "Ion-Channel Guiding in a Steady-State Free-Electron Laser", Phys. Rev. A 37, 173 (1988).
 - 11) C. L. Olson, "The IFA-2 Collective Ion Accelerator System", IEEE Trans, NS-30, No. 4, 3189 (1983).
 - 12) Bischel et al., "Absolute Two-Photon Ionization Yields for Selected Organic Molecules at 248nm" J. of Opt. Soc. Am. B 2, 877 (1985).
 - 13) J. B. Woodworth, T. A. Green, and C. A. Frost, "Ionization of Organic Molecules with Ultraviolet Lasers: A Technique for Generating Large Well-Defined Ionized Volumes", J. Appl. Phys. 57, 1648(1985).
 - 14) C. L. Olson, "Charge-Neutralization Processes for Intense Relativistic Electron Beams in Low-Pressure Neutral Gases", Phys. Rev. A 11, 288 (1975).
- 3 - 3 節
- 1) S. Hiramatsu et al., "Conceptual Design of a Linear Collider in the TBA/FEL Regime", Part. Accel. 31, 75 (1990).
 - 2) V. K. Neil and A. M. Sessler, "Longitudinal Resistive Instabilities of Intense Coasting Beams in Particle Accelerators", Rev. Sci. Instr. 36, 429 (1965).
- L. J. Laslett, V. K. Neil, and A. M. Sessler, "Transverse Resistive Instabilities of Intense Coasting Beams in Particle Accelerators", Rev. Sci. Instr. 36, 436 (1965).
- 3) G. J. Caporaso, W. A. Barletta, and V. K. Neil, "Transverse Resistive Wall Instability of a Relativistic Electron Beam", Part. Accel. 11, 71 (1980).
- K. Takayama, "Beam Break-Up and Resistive Wall Instability in A Steady-State Free Electron Laser in the Microwave Regime", in Proc. of 1988 Linac Conf., 318 (1988).
- D. H. Whittum, A. M. Sessler, and V. K. Neil, "Transverse Resistive Wall Instability in the Two-Beam Accelerator", Phys. Rev. A 43, 294 (1991).
- 4) S. Bodner, V. K. Neil, and L. Smith, "Decay of Image Currents and Some Effects on Beam Stability", Part. Accel. 1, 327 (1970).
- A. W. Chao, "Coherent Instabilities of a Relativistic Bunched Beam", 1982 US Accelerator School.
- これはオリジナルな文献ではないが、要領良くまとめて解り易い。
- 5) 例えば、N. Bleistein and R. A. Handelsman, "Asymptotic Expansions of Integrals", (Dover Pub. Inc. (1975).
 - 6) E. U. Condon, "Forced Oscillations in Cavity Resonators", J. of Appl. Phys. 12, 129 (1941).
- E. U. Condon, "Principles of Micro-Wave Radio", Rev. of Mod. Phys. 14, 341 (1942).
- Bane(SLAC)が現代風にアレンジし直し、広く用いられている。
- 7) K. Takayama, "Crucial Aspect of Beam Break-up in A Steady-State Free-Electron Laser in the Microwave Regime", Phys. Rev. A 39, 184(1989).
 - 8) G. J. Caporaso, et al., "Laser Guiding of Electron Beams in the Advanced Test Accelerator", Phys. Rev. Lett. 57, 1951 (1986).
 - 9) V. E. Balakin, A. V. Novokhatsky, and V. P. Smirnov, "VLEPP: Transverse Beam Dynamics", in Proc. of 12-th Int. Accel. Conf., Chicago, (1983) p119.
 - 10) K. Takayama, "Beam Break-up Suppression in A Multistage Klystronlike Free-Electron Laser : Linear Detuning". Phys. Rev. A 45, 1157(1992).
- 付録
- A
- 1) D. W. Kerst, "Acceleration of Electrons by Mag-

- netic Induction", Phys. Rev. 58, 841 (1940);
ibid. 59, 110 (1941)
- 2) D.W. Kerst and R. Serber, "Electronic Orbits in the Induction Accelerator", Phys. Rev. 60, 53 (1941)
 - 3) T. Kitagaki, "A Focusing Method for Large Accelerators", Phys. Rev. 89, 1161 (1953).
 - 4) 福間均、OHO'88.
 - 5) K. Takayama, "A Class of Solvable Second-Order Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients", J. of Math. Phys. 27, 1747 (1986).

B

- 1) V.K. Neil, L.S. Hall, and R.K. Cooper, "Further Theoretical Studies of the Beam Breakup Instability" Part. Accel. 9, 213 (1979).