

第1章 はじめに

以前、放射光学会講習会というもので「光源用蓄積リング概論」という題目で講義をやらされた(?)ことがあった。このときは、放射光ユーザーのために電子ストレージリングの基礎的なことを解説せよ、ということであった。なるべく数式等を用いずにストレージリングの原理をわかりやすく解説することをめざして講義録等を用意したつもりであったが今読み返すとなかなか恥ずかしいものがある。

今回は由緒ある「高エネルギー加速器セミナー」において(ただし放射光学会講習会が由緒がないというわけではない)「電子ストレージリング入門」ということで講義をせよとのことである。ストレージリングについてはこれまでも何回かこのセミナーでも講義が行われており、それらの優れた講義録等を読むと今更私のような若輩者がこのこ出てきて講義録など書いても仕方がないようにも思われる。しかし引き受けた以上何らかの特色ある講義録にしたいといろいろ考えた結果、これまでの高尚な講義録に対抗してできるだけ平易に書いてみることにした。厳密さよりも、基本的なことをわかりやすくということをめざして講義録を用意したつもりであるが、筆者の力量不足に加えて、短期間で慌てて準備したこともあり、読み返すとなかなか思い通りにはいってないようである。

講義の主な対象としては、

- ・これから放射光光源用ストレージリングの設計、建設、運転といった仕事に参加するのであるが加速器のことは何も知らない。
- ・放射光の利用研究の方に興味があるがストレージリングのこともある程度のことは知っておきたい。

というような人達を想定したつもりである。従って加速器物理学や軌道理論の大家を目指すというような人達にはこれまでのOHOセミナーの歴代の優れた講義録や今回のセミナーの他の講師の方々の講義録の方を読むことをお勧めする。講義の内容は恐らく大学の教養部程度の知識で充分ついていけるはずである。これは別に読者のことを考えてそうしたわけではなく筆者の知識レベルがその

程度であるというだけのことである。

この講義の構成は次の通りである。まず第2章ではストレージリングというものがどんなものか見当もつかないという方々のために、ストレージリングの概要、その構成機器等について極く簡単に解説する。次に第3章ではストレージリングの原理のうち、リングのデザイン軌道近傍に電子を束縛する強収斂という方法とその結果生ずるベータatron振動と呼ばれる電子の運動について説明する。第4章では高周波加速とその結果生ずるシンクロtron振動と呼ばれる電子の運動について説明する。第5章では特に放射光利用にとっては重要である蓄積ビームの太さがどのようにして決まっているかを説明する。第6章ではストレージリングにどうやってビームを入れるのかを説明する。第7章では蓄積されている電子が失われていく様々な過程を紹介する。

なおできるだけ具体的な例をあげながら説明するようにしたいと思っていたのであるが、時間切れで原理的なことの説明だけで終わってしまっているところが多い。その辺りは講義のほうでできるだけ補いたいと考えている。また、ストレージリングの構成機器のハードウェアの説明はほとんどなされていない。これは筆者の手に余ることなので他の講義やこれまでのOHOセミナーの講義録を参考にさせていただきたい。

第2章 ストレージリングとは

この章では電子ストレージリングというものがどんなものか見当もつかないという方を対象にして電子ストレージリングの概要を大雑把に説明しておくことにする。

ストレージリング (Storage Ring: 蓄積リング、貯蔵リング) というものをひとことでは、高エネルギーの荷電粒子をエネルギーを一定に保ちながら概ね円形の閉じた軌道上を周回させることにより長時間貯蔵する装置ということになる。蓄積された荷電粒子を何につかうかは様々である。例えば高エネルギー実験では蓄積粒子を何かにおつけたり、あるいは反対方向に運動する荷電粒子同士を衝突させてみたりしてどのような反応がおきるかをながめたりする。また今回のセミナーのテーマである放射光光源用ストレージリングでは電子または陽電子を蓄積するが、これらの粒子そのものを利用するのではなく、電子や陽電子が磁場で進行方向を曲げられるときに放出するシ

クロトン放射光を取り出して様々な目的に利用しようというものである。放射光光源用ストレージリングの概念図を図2-1-1に示す。以下ストレージリングの原理や各構成要素の働きを順を追って見ていこう。

ストレージリングがその名の通りリングであるためには蓄積されている電子の集団 (ビーム) の進行方向を曲げてやる装置が必要である。この働きをするのが偏向電磁石 (Bending Magnet) である。偏向電磁石は一樣磁場を発生する。その中でビームは円弧を描いて進みある角度だけ進行方向を曲げられる。偏向電磁石を出たビームは直進し次の偏向電磁石によって再び進行方向をまげられる。これを繰り返しながら、ビームはある閉じた軌道上を周回することになる。この軌道をデザイン軌道 (Design Orbit) と呼ぶ。

このデザイン軌道上を周回しているビームはそのままではどんどん発散していってしまう。これを防ぐために四極電磁石 (Quadrupole Magnet) が設置されている。四極電磁石は光学におけるレンズのようにビームを収束させる働きを持つ。ただし水平垂直のどちらか一方には収束作用、もう一方には発散作用を及ぼす点が光学のレンズと異なっている。ビームを収束するには極性が反対の四極電磁石を交互にうまく配置してやる必要があるが、このようなビームの収束方法を強収縮と呼ぶ。何らかの原因でデザイン軌道を離れた電子は四極電磁石の収束作用によりデザイン軌道の近傍を上下左右に振動しながら周回する。この振動のことをベータトロン振動と呼ぶ。

現実のリングでは様々な理由により本来あってはならない磁場がデザイン軌道上に存在する。このためにビームの軌道がデザイン軌道からずれてしまう。これを補正するための小型の偏向電磁石 (ステアリング電磁石) がリング内に多数設置されている。これに加えて、光学でいう色収差にあたる効果を補正するための六極電磁石等、様々な種類の電磁石が設置されている。

上で述べたビーム軌道のずれを補正するためにはまず軌道位置を測定する必要がある。それ以外にも例えば蓄積ビームの強度 (ビーム電流値) 等運転に必要なビームのパラメータを測定するための各種のモニター装置がリングの随所に設置されている。

蓄積されているビームはビームパイプ或いは真空チャンバーと呼ばれる細い管の中を進む。ビームが空気分子等との衝突散乱によって失われるこ

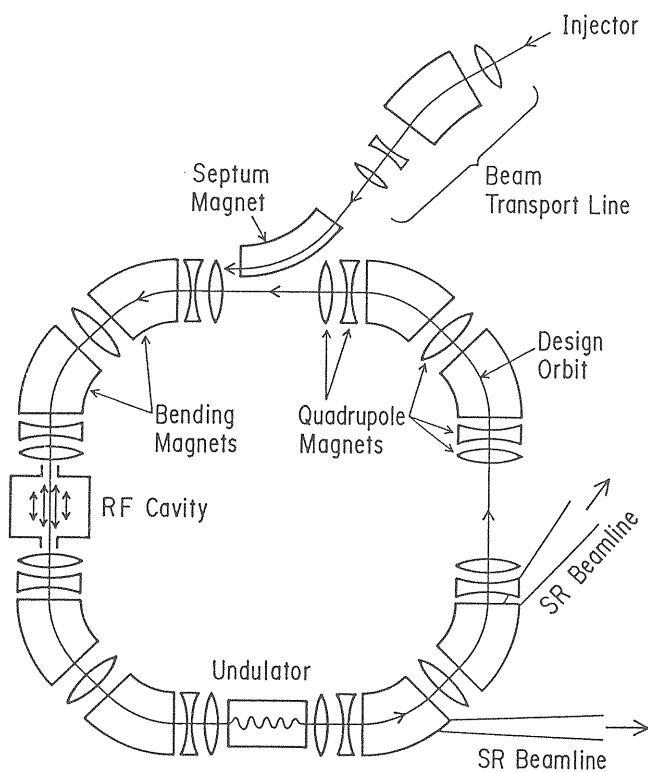


図2-1-1 ストレージリングの概念図。

とがないようにビームパイプ内部は各種の真空ポンプを用いて超高真空状態に保たれている。

リングを周回している電子はシンクロトロン放射によりエネルギーを失う。失ったエネルギーは高周波加速空洞 (RF Cavity) によって補われる。高周波加速空洞はデザイン軌道の接線方向に振動する電場を発生する。電場の向きがうまく電子を加速してくれる向きになっているときに空洞を通過した電子は加速されてエネルギーを補うことができる。この振動電場によってビームは連続ビームではなくなり、幾つかの塊 (バンチ) にわかれることになる。バンチの中で個々の電子はバンチの中心に対して前後方向に振動する。これをシンクロトロン振動と呼ぶ。この振動は電子のエネルギーの振動でもあり、蓄積電子のエネルギーはある一定の値の近傍で振動することになる。

シンクロトロン放射によりエネルギーを失い、それを高周波加速空洞によって補われるという過程繰り返すうちに、シンクロトロン振動やベータトロン振動は次第に減衰していく。これを放射減衰と呼ぶ。放射減衰により蓄積電子はデザイン軌道上に、そして、バンチの中心に (或いは中心エネルギーに) どんどん集中していくことになるが、逆に振動を励起するような過程も存在する。これは放射励起と呼ばれ、シンクロトロン放射が光子という形で放射される、即ち、電子のエネルギー変化が不連続であり確率的であるために起きる。これら二つの過程がつり合うことにより、電子はデザイン軌道の近傍、あるいは、バンチ中心 (エネルギー中心) の近傍にガウス分布する。このようにしてビームの太さやエネルギー拡がりが決まることになる。

ストレージリングに蓄積される電子や陽電子は線形加速器やシンクロトロン等の入射器 (Injector) によりあらかじめあるエネルギーまで加速された後でストレージリングに輸送される。入射器の終端部からストレージリング入口まではビーム輸送路 (Beam Transport line) で結ばれている。ビーム輸送路の役割は途中でビームを失うことなくストレージリングの入口まで運ぶことであり、リングと同じく偏向電磁石、四極電磁石、ビームパイプ等で構成されている。

ビーム輸送路を通してストレージリングの入口まで運ばれたビームはセプタム電磁石 (Septum Magnet) と呼ばれる電磁石によってストレージリングの軌道と平行に近くなるように曲げられた後リングに打ち込まれることになる。入射の際には

リングのデザイン軌道の一部を瞬間的に入射ビーム側へ近づけるといふ操作が必要になる。このためにキッカー電磁石と呼ばれるパルス的に動作する偏向電磁石がリング内の数箇所に設置されている。

電子は偏向電磁石中で軌道を曲げられるときに軌道の接線方向にシンクロトロン放射光を放出する。放射光利用実験ではこの光を取り出して利用することになる。またアンジュレタやウイグラ等、挿入光源と呼ばれる装置を設置して特に強力な放射光を発生させる場合もある。これらの装置はデザイン軌道上に周期的に極性の変わる磁場を発生する。その中でビームは蛇行運動をしデザイン軌道の接線上に強力な放射光を放出することになる。これら偏向電磁石や挿入光源からの放射光を取り出すためのビームライン (SR Beamline) がリングの随所に設けられている。

以上本当に簡単ではあるが光源用ストレージリングについて述べてみた。次の章以降ではストレージリングのなかでの電子の運動についてももう少し詳しくみていくことにしよう。

第3章 ベータトロン振動

3-1. 磁場の中での電子の運動

磁場の中で電子や陽電子に働く力 (Lorentz力) は、よく知られているように

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} \quad (3-1-1)$$

で与えられる。ここで v は速度、 B は磁束密度、 e は素電荷である (ただし陽電子の場合は $e > 0$ 、電子の場合は $e < 0$ とする。なお以降電子、陽電子は特に区別せず電子と総称することにする)。このような力を受けた場合、粒子のエネルギー

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma mc^2 \quad (3-1-2)$$

の変化は

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot (e\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (3-1-3)$$

となる。従って、磁場中では粒子のエネルギー、或いは運動しているときの質量 (γm) は一定になる。また運動量

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \equiv \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma m\vec{v} \quad (3-1-4)$$

の変化は

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m\vec{v} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} \quad (3-1-5)$$

となり、質量を静止質量の代わりに運動しているときの質量をとれば、Newton力学の運動方程式と同じになる。ストレージング内を運動している電子の速度はほぼ光速度に等しく ([例題3-1-1]参照) 完全に相対論的なのであるが、その運動の様子は古典的な形の運動方程式で記述できる。

ストレージングでは例題3-1-1で述べるような様々な種類の磁場をビームの軌道に発生させて電子の運動を制御する。まず、最も単純な磁場分布である一様磁場の中での電子の運動をみてみよう。運動方程式3-1-5を磁場に平行な成分と磁場に垂直な面内への射影とに分けてみると

$$\gamma m \dot{v}_{\parallel} = 0 \quad (3-1-6)$$

$$\gamma m \vec{v}_{\perp} = e\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (3-1-7)$$

となる。これから即座に磁場方向には速度一定と

なることがわかる。また先に述べたように磁場中では速度 v は一定、即ち

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \text{const.} \quad (3-1-8)$$

になることから v_{\perp} も一定であることがわかる。

磁場に垂直な面内での運動を調べるために電子の軌道に沿って移動する図3-1-1に示すような座標系を考える。この座標軸の単位ベクトルを用いると速度とその時間微分は、

$$\vec{v}_{\perp} = v_{\perp} \vec{e}_s \quad (3-1-9)$$

$$\dot{\vec{v}}_{\perp} = \frac{dv_{\perp}}{dt} \vec{e}_s + v_{\perp} \dot{\vec{e}}_s = -\frac{v_{\perp}^2}{\rho} \vec{e}_x \quad (3-1-10)$$

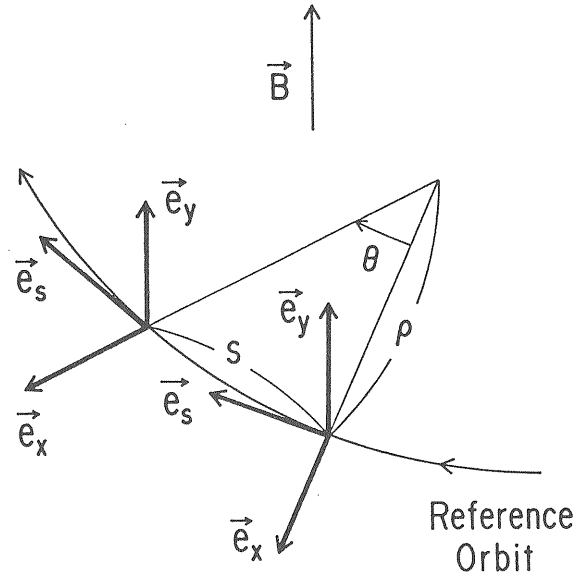


図3-1-1 電子とともに移動する座標系。

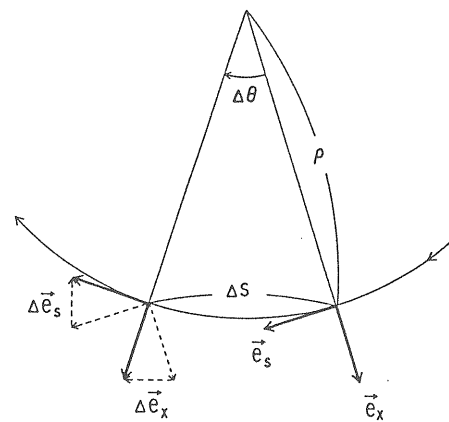


図3-1-2 座標軸の移動。 $\Delta\theta = \Delta s/\rho$ より $\dot{\theta} = v_s/\rho$ となる。

となる。ここで v_{\perp} が一定であることを用いた。また

$$\vec{e}_s = -\frac{v_{\perp}\vec{e}_x}{\rho} \quad (3-1-11)$$

を用いたが、これは図3-1-2のように考えるとすぐわかる。なお ρ は軌道の曲率半径である。一方式3-1-7の右辺、即ちLorentz力は

$$\vec{F} = ev_{\perp}\vec{e}_s \times \vec{B} = -ev_{\perp}\vec{e}_x \quad (3-1-12)$$

となることから、式3-1-7は

$$\gamma m \frac{v_{\perp}^2}{\rho} = ev_{\perp}B \quad (3-1-13)$$

となる。従って

$$\rho = \frac{\gamma m v_{\perp}}{eB} = \frac{p}{eB} = \text{const.} \quad (3-1-14)$$

が得られ、磁場に垂直な面内では速度(v_{\perp})一定で曲率半径(ρ)一定の軌道、即ち、円軌道を描いて運動することがわかる。

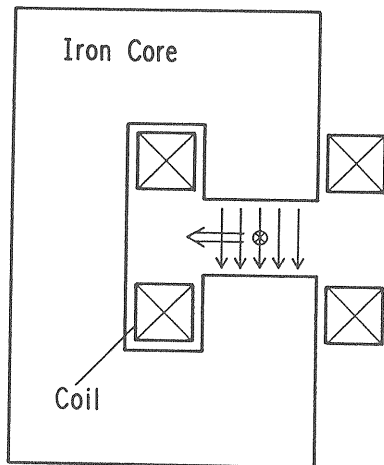


図3-1-3 偏向電磁石の概念図。力の方向は $e>0$ の場合。

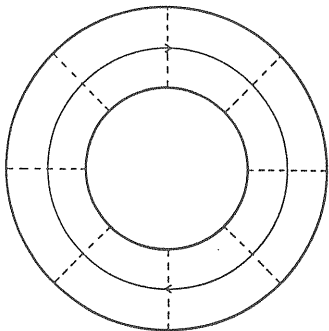


図3-1-4 偏向電磁石を隙間無く並べて作ったリング

偏向電磁石は図3-1-3に示すように粒子の軌道上に一様磁場を発生する(例題3-1-3参照)。従って図3-1-4に示すように偏向電磁石をぎっしりと並べて、それらの発生する磁場と垂直な面内に電子を打ち込んでやるとその電子は半径 ρ の円軌道上をぐるぐる回り続けることになる。これでストレージリングがひとつできたことになるが、もう少し現実的に、運転に必要な様々な機器類を設置するために、図3-1-5のように偏向電磁石の間に空間をとってみよう。この場合電子は偏向電磁石内では半径 ρ の円弧を描いて進み偏向電磁石の間では直進することを繰り返しながらある閉じた軌道(円というよりは偏向電磁石を頂点とする多角形といったほうがよい)を周回することになる。このように偏向電磁石の配置を決めると軌道の形(=リングの形)が決まることになるが、この軌道をデザイン軌道あるいは基準軌道等と呼ぶ。

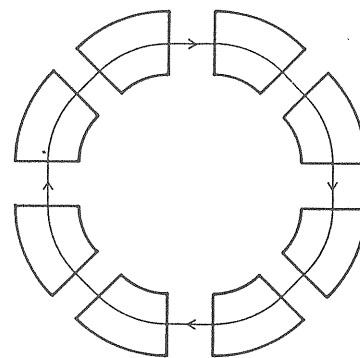
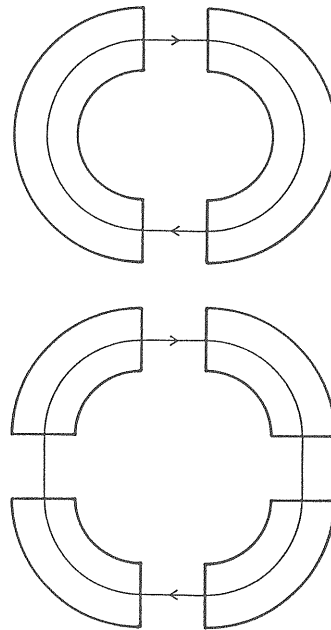


図3-1-5 様々なリングの形状。偏向電磁石をどう並べるかでリングの形が決まる。

それではこのように偏向電磁石のみでできたストレージリングでの電子の運動は安定であろうか。もし何らかの外乱を受けてデザイン軌道からはずれた場合、その後の運動は元の軌道の近傍に留まってくれてくれるであろうか。これをみるためにまず円軌道上の電子が動径方向の外乱を受けた場合を考えてみよう。外乱を受けた電子のその後の軌道はやはり円軌道になるはずである。ただしその中心が元の軌道の中心からずこしずれることになる(図3-1-6)。この運動をもとの円軌道上から眺めると、元の軌道の近傍のある一定の範囲を右に左に振動しながら進んでいるように見える。従って動径方向の外乱に対しては安定であることがわかる。

それでは元の軌道面に垂直な方向に外乱を受けた場合はどうなるであろうか。この場合は図3-1-7のように螺旋運動をしながら元の軌道からどんどんはなれていってしまうであろう。従って軌道面に垂直な方向の外乱に対しては安定ではない。

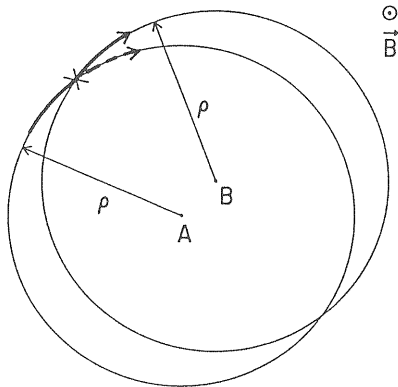


図3-1-6 一様磁場中で動径(水平)方向の外乱を受けた電子の軌道。外乱を受けることにより円軌道の中心がAからBへ移動する。

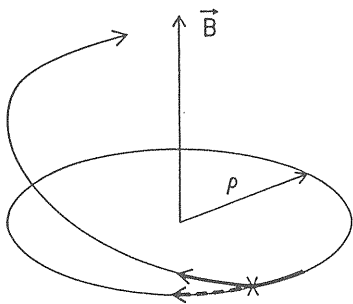


図3-1-7 一様磁場中で垂直方向(磁場方向)の外乱を受けた電子の軌道。

電子を安定に蓄積するには垂直方向の運動も安定にする何らかの手段が必要であるがこのために四極電磁石が用いられる。四極電磁石中の磁場は図3-1-8に示すようになっていて(例題3-1-4)。磁束密度は中心からの距離に比例しており、特に磁場中心では零になっている。このため四極電磁石の中心を通る電子は何の作用も受けないが、中心からずれた場所を通る電子は水平方向には中心に引き戻すような作用を、また、垂直方向には中心から遠ざけるような作用を受けることになる。また電磁石の極性(N-S)を変えればその逆になる。同じ極性の四極電磁石を並べても、水平垂直方向のどちらかは安定になるかもしれないが、もう一方は安定ではないであろう。しかし、極性の異なる四極電磁石を交互に配置してやれば、粒子の運動を水平垂直両方向とも安定にできるかもしれない。実際後で述べるようにある条件を満たすように四極電磁石の配置や強さを選べばそれは可能である。このようにして電子を基準軌道に束縛する方法を強収縮と呼ぶ。

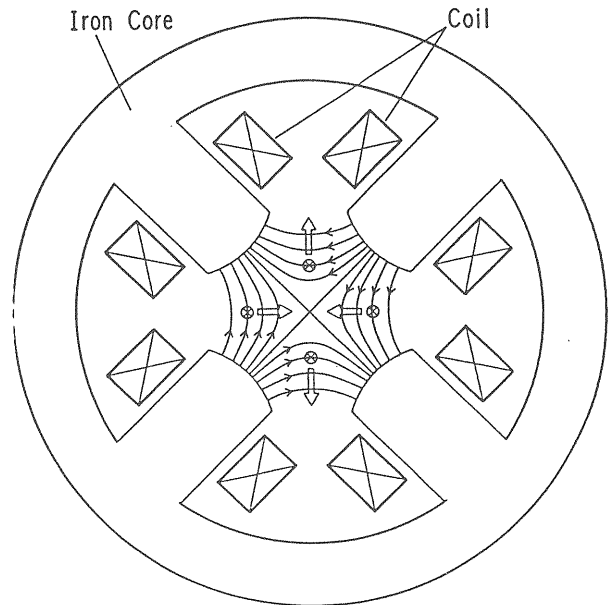


図3-1-8 四極電磁石の概念図。力の方向は $e>0$ の場合。

例題3-1-1 PFリングを周回する陽電子の質量と速度

PFリングに蓄積されている陽電子のエネルギーは2.5GeV (2.5×10^9 eV)である。なお1 eVは素電荷

($= 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb)を持つ荷電粒子を1Voltの電圧で加速した場合に得られるエネルギーであり、 1.6×10^{-19} Jouleに等しい。

2.5GeVの陽電子のLorentz因子(γ)は

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{2.5 \text{ [GeV]}}{0.511 \text{ [MeV]}} = 4900$$

となる。ここで電子の静止エネルギー(mc^2)が0.511 MeVであることを用いた。従って2.5GeVの電子の質量(γm)は静止質量の4900倍になっている。また電子の速度は

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4900^2}} = 0.99999998$$

より、ほぼ光速であることがわかる。

ところでこのような場合運動量($p = \gamma mv$)とエネルギー($E = \gamma mc^2$)は

$$p = \frac{Ev}{c^2} \cong \frac{E}{c} \quad (v \cong c) \quad (3-1-15)$$

という関係がある。これにより運動量とエネルギーの変化量は

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta E}{E} \quad (3-1-16)$$

という関係をもつことになる。

例題3-1-2 磁場の多極展開

電子ストレージリングでは電子の運動を制御するのに、偏向電磁石、四極電磁石、六極電磁石等、様々な種類の電磁石を用いる。これらの電磁石中での磁束密度の一般的な表式を求めてみよう。

今問題にしている領域に電流が存在しないとすると磁束密度 (B) は、Maxwellの方程式より

$$\text{rot } \vec{B} = 0 \quad (3-1-17)$$

に従う。このような場合の B はあるスカラーポテンシャル ϕ_m を用いて

$$\vec{B} = \text{grad } \phi_m \quad (3-1-18)$$

と書ける。これをMaxwellの方程式に代入すると

$$\text{div } \vec{B} = \Delta \phi_m = 0 \quad (3-1-19)$$

となる。従って ϕ_m はLaplaceの方程式に従うことがわかる。

通常加速器で用いる電磁石はビーム進行方向の磁場を発生しないことから、図3-1-9に示すような円筒座標形を用いると式3-1-19は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3-1-20)$$

となる。この式の原点で正則な解は一般に

$$\phi_m = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n r^n \sin(n\theta) + b_n r^n \cos(n\theta) \} \quad (3-1-21)$$

と書ける。右辺第一項はノーマル成分、第二項はスキュー成分と呼ばれ、また n に関する各項がそれぞれ $2n$ 極磁場に対応する。ストレージリングで使用される磁場の多くはノーマル成分である。そのポテンシャルを直交座標形 $(x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ で書き直すと

$$\phi_m = a_1 y + a_2 \cdot 2xy + a_3 (3x^2 - y^2) + a_4 \cdot 4(x^3 y - xy^3) + \dots \quad (3-1-22)$$

となる。 x, y 方向の磁場は式3-1-18より

$$(B_x, B_y) = \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x}, \frac{\partial \phi_m}{\partial y} \right) \quad (3-1-23)$$

とすれば得られる。

ストレージリングの各電磁石はこれらの磁場成分のどれかひとつを軌道上に発生するように作られることが多いが、二つ以上の成分を同時に発生するように作られる場合もある。鉄心を用いた電磁石で希望する磁場成分を発生するためには磁極面が、式3-1-22のポテンシャルが一定となるような面(等ポテンシャル面)となるように作ればよい。

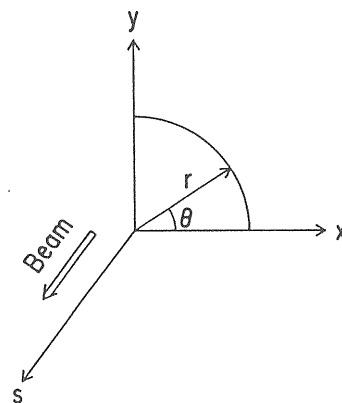


図3-1-9 ビームの進行方向を軸とする円筒座標系。

例題3-1-3 二極磁場

上の例題で求めた式を用いて二極磁場の磁場分布を求めてみよう。これは式3-1-21において $n=1$ の場合である。このときポテンシャルは

$$\phi_m^1 = a_1 y \quad (3-1-24)$$

となる。式3-1-23を用いると水平垂直方向の磁場成分は

$$(B_x, B_y) = \left(\frac{\partial \phi_m^1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_m^1}{\partial y} \right) = (0, a_1) \quad (3-1-25)$$

となり、これは y 方向の一様磁場であることがわかる。この磁場成分はビームの進行方向を曲げる働きをするため、二極磁場を発生する電磁石は偏向電磁石と呼ばれる。

このような磁場を作るためには電磁石の磁極面を ϕ_m が一定、即ち、式3-1-24より

$$\phi_m^1 = a_1 y = \text{const.} \quad (3-1-26)$$

となるようにすればよい。

偏向電磁石の概念図は図3-1-3に示してある。放射光リングで使用される偏向電磁石は軌道の接線方向に放出される放射光を取り出すためこの図のようにリターンヨークの片方が開いたような形状(C型)になっていることが多い。

PFリングの偏向電磁石は約1Tの磁場を軌道上に発生する。従って偏向半径は

$$\rho = \frac{p}{eB} = \frac{E/c\beta}{B} = \frac{2.5 \times 10^9 [\text{eV}] / 3 \times 10^8 [\text{m}]}{1 [\text{T}]} = 8.3 [\text{m}]$$

となる。PFリングは同一形状の28個の偏向電磁石からなる。一個の偏向電磁石による曲げ角は

$$\theta = \frac{2\pi}{N_{BM}} = \frac{360 [\text{deg}]}{28} \cong 13 [\text{deg}]$$

である。偏向電磁石の(軌道に沿った)長さは偏向半径に曲げ角度を掛けたものに等しい。いまの場合は

$$L_{BM} = \rho \theta = \frac{2\pi \rho}{N_{BM}} = \frac{2\pi \times 8.3}{28} \cong 1.9 [\text{m}]$$

となる。

例題3-1-4 四極電磁石

式3-1-21において $n=2$ の場合を考えると、ポテンシャルは

$$\phi_m^2 = a_2 2xy \quad (3-1-27)$$

となり、水平垂直方向の磁場成分は

$$(B_x, B_y) = \left(\frac{\partial \phi_m^2}{\partial x}, \frac{\partial \phi_m^2}{\partial y} \right) = (2a_2 y, 2a_2 x) \quad (3-1-28)$$

となる。このとき

$$B' \equiv \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = 2a_2 = \text{const.} \quad (3-1-29)$$

より磁場勾配(B')が一定となっていることがわかる。 B' を用いて式3-1-28を書き替えると

$$(B_x, B_y) = (B' y, B' x) \quad (3-1-30)$$

となる。

このような磁場を四極磁場と呼び、本文中で述べたようにビームを収束させる働きがある。このような磁場を発生するためには磁極面を

$$\phi_m^2 = a_2 2xy = \text{const.} \quad (3-1-31)$$

となるようにすればよい。四極電磁石の概念図は図3-1-8に示してある。

例題3-1-5 六極電磁石

式3-1-21において $n=3$ の場合を考えるとポテンシャルは

$$\phi_m^3 = a_3 (3x^2 y - y^3) \quad (3-1-32)$$

となり、水平垂直方向の磁場成分は

$$(B_x, B_y) = \left(\frac{\partial \phi_m^3}{\partial x}, \frac{\partial \phi_m^3}{\partial y} \right) = (6a_3 xy, 3a_3(x^2 - y^2)) \quad (3-1-33)$$

となる。この場合

$$B'' \equiv \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = 6a_3 = \text{const.} \quad (3-1-34)$$

より磁場の二階微分 (B'') が一定になる。B''を用いると式3-1-33は

$$(B_x, B_y) = (B''_{xy}, \frac{1}{2}B''(x^2 - y^2)) \quad (3-1-35)$$

となる。このような磁場は六極磁場と呼ばれ、後で述べるようにビームのクロマティシティと呼ばれる量を補正するのに用いられる。

3-2. ベータトロン振動の方程式

前の節で、偏向電磁石と四極電磁石をうまく組み合わせれば電子をある閉じた軌道に安定に蓄積できる可能性があることを述べた。ここでは、このような電磁石配列の中での電子の運動方程式を導いてみる。

偏向電磁石の配置が決まり基準軌道が決まったとする。電子の運動をこの基準軌道からのずれで表わすことを考えてみよう。このために、前の節でも用いた電子とともに動くような座標系 (図3-1-1参照) を用いて運動方程式3-1-5を書き替えてみる。

この座標系を用いるとまず電子の位置ベクトルとその微分は

$$\vec{r} = (\rho+x)\vec{e}_x + y\vec{e}_y \equiv \vec{r}_x + y\vec{e}_y \quad (3-2-1)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}_x\vec{e}_x + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{y}\vec{e}_y \quad (3-2-2)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_x + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{y}\vec{e}_y \quad (3-2-3)$$

となる。ここでρは軌道の曲率半径、xは動径方向 (図3-1-1でベクトル \vec{e}_x 方向) の、またyは軌道面に垂直方向 (図3-1-1でベクトル \vec{e}_y 方向) の基準軌道からのずれを表わす。なお軌道の曲率半径ρはここでは場所の関数になる。偏向電磁石中では式3-1-14で決まる一定値になり、また、偏向電磁石間では基準軌道は直線であり、従ってρは無限大になる。式3-2-1~3の導出で

$$\dot{\vec{e}}_x = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (3-2-4)$$

$$\dot{\vec{e}}_y = 0 \quad (3-2-5)$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_x \quad (3-2-6)$$

を用いたがこれは前の節の図3-1-2をみればすぐに

わかる。

通常の光源用ストレージリングでは進行方向に磁場成分を持つような電磁石は使用しないので、基準軌道近傍の磁場を一般的な形

$$\vec{B} = B_x(s, x, y)\vec{e}_x + B_y(s, x, y)\vec{e}_y \quad (3-2-7)$$

に書いておこう。この具体的な表式は電磁石によって異なる (例題3-1-3~5参照)。このときLorentz力は

$$\begin{aligned} \vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} &= e(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_s\vec{e}_s) \times (B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y) \\ &= -ev_s B_y\vec{e}_x + ev_s B_x\vec{e}_y + e(v_x B_y - v_y B_x)\vec{e}_s \end{aligned} \quad (3-2-8)$$

となる。これらを用いるとx方向、y方向の運動方程式として

$$\gamma m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = ev_s B_y \quad (3-2-9)$$

$$\gamma m\ddot{y} = -ev_s B_x \quad (3-2-10)$$

が得られる。或いは

$$\dot{\theta} = \frac{v_s}{r} \quad (3-2-11)$$

を用いれば

$$\gamma m\ddot{r} = \frac{\gamma m v_s^2}{r} - ev_s B_y \quad (3-2-12)$$

$$\gamma m\ddot{y} = ev_s B_x \quad (3-2-13)$$

となる。なお、進行方向 (s方向) についても方程式が得られるが、これは基準軌道からずれた電子の基準軌道に沿った速度 (v_s) の変化を記述している。しかし、ここでは基準軌道からのずれが小さいとして

$$v_s = \sqrt{v^2 - v_x^2 - v_y^2} \approx v = \text{const.} \quad (3-2-14)$$

という近似を用いる。ここで時間tの代わりに、tの間に進んだ距離 $s = vt$ をパラメタとして用いることにすると

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = v_s \frac{d}{ds} \equiv v \frac{d}{ds} \quad (3-2-15)$$

となる。なおxやyのsについての微分は電子の軌道の基準軌道に対する傾きを表していることを指摘しておく。この変換により式3-2-12, 13は

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\rho+x} - \frac{eB_y}{\gamma m v} \cong -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{B_y}{[B\rho]} \quad (3-2-16)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{eB_x}{\gamma m v} \cong \frac{B_x}{[B\rho]} \quad (3-2-17)$$

と書ける。なおここで[Bρ]は後の例題3-2-1で述べてあるmagnetic rigidityである。

ビーム進行方向に垂直な方向(x方向やy方向)は横方向(transverse)と呼ばれるが、式3-2-16, 17は横方向の電子の運動を記述する基礎方程式である。ちなみにビーム進行方向は縦方向(longitudinal)と呼ばれる。こちらの方は第4章で取り扱う。

それでは式3-2-16, 17を用いて偏向電磁石中での運動方程式を導いてみよう。偏向電磁石中では

$$(B_x, B_y) = (0, B) \quad (B = \text{const.}) \quad (3-2-18)$$

となることを用いれば

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} - \frac{B}{[B\rho]} = -\frac{x}{\rho^2} \quad (3-2-19)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 0 \quad (3-2-20)$$

となる。式3-2-19は調和振動子の式であり、前の節で述べた一様磁場中の水平方向の運動の安定性

(図3-1-6参照)を反映している。一方垂直方向は自由運動である(図3-1-7参照)。なお偏向電磁石が水平方向に関して収束作用を持っていることは図3-2-1のように考えてもわかる。

次に四極電磁石中での方程式はどうなるであろうか。例題3-1-4より四極電磁石中の磁場は

$$(B_x, B_y) = (B'x, B'y) \quad (B' \equiv \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = \text{const.}) \quad (3-2-21)$$

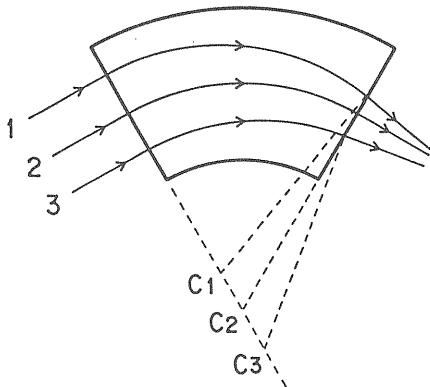


図3-2-1 偏向電磁石による収束作用。

と書ける。これを式3-2-16, 17に代入し、また $\rho = \infty$ を考慮すれば

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{B'}{[B\rho]} x \quad (3-2-22)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{B'}{[B\rho]} y \quad (3-2-23)$$

となる。従って、 $B'/[B\rho] > 0$ のときは水平方向には収束、垂直方向には発散力を及ぼし、 $B'/[B\rho] < 0$ のときはその逆になる(図3-1-8参照)。

実際のリングでは偏向電磁石や四極電磁石がぎっしりと隙間なく並んでいるわけではない。電磁石と電磁石の間の空間は磁場のない自由空間になる。このような空間はドリフト空間と呼ばれる。ドリフト空間での運動方程式は $\rho = \infty$ でかつ

$$(B_x, B_y) = (0, 0) \text{ とすれば}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad (3-2-24)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 0 \quad (3-2-25)$$

という極く当然の結果が得られる。

ストレージリングは偏向電磁石と四極電磁石が並びその間をドリフト空間が埋めるという風に構成されているが、このような電磁石やドリフト空間の配列をラティスと呼ぶ。リングを運動する電子はこれらの電磁石や自由空間を次々と通過しその作用を受けることになる。このような場合の電子の運動方程式は上で述べた式をまとめて

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_x(s)x = 0 \quad (3-2-26)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + K_y(s)y = 0 \quad (3-2-27)$$

の形に書ける。ここで $K_{x,y}(s)$ はそれぞれの電磁石や自由空間の持つ収束・発散力を表わす。繰り返しになるが、式3-2-19から25を見れば、偏向電磁石中では

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} \quad (3-2-28)$$

$$K_y(s) = 0 \quad (3-2-29)$$

四極電磁石中では

$$K_x(s) = \frac{B'}{[B\rho]} \quad (3-2-30)$$

$$K_y(s) = -\frac{B'}{[B\rho]} \quad (3-2-31)$$

ドリフト空間中では

$$K_x(s) = K_y(s) = 0 \quad (3-2-32)$$

となることがわかる。\$K_{x,y}(s)\$は例えば下の例題3-2-2の図に示すような形になる。

リングを周回する粒子はこれらの電磁石を次々と通過しそれらの作用を受けるが、リングを1周して帰ってくるとまた同じ電磁石を通過することになる。従って\$K_{x,y}(s)\$はリングの周長をCとすると

$$K_{x,y}(s) = K_{x,y}(s+C) \quad (3-2-33)$$

という周期性をもっている。

リングの電磁石をうまく配置すれば電子は基準軌道の近傍を、式3-2-26, 27に従い安定に振動しながらリングを周回することになる。この振動をベータトロン振動と呼ぶ。ベータトロン振動の様子をみるためにはこの方程式を解く必要があるが次の節でその方法について述べる。

例題 3-2-1 magnetic rigidity

運動量を電荷で割った量はmagnetic rigidityと呼ばれるが、式3-1-4より

$$\frac{p}{e} = \frac{\gamma m v}{e} = B\rho \quad (3-2-34)$$

となる。なお通常\$[B\rho]\$と書いてmagnetic rigidityを表わすことが多い。実用的な単位を用いると

$$[B\rho] [\text{Tm}] = \frac{p[\text{GeV}/c]}{0.3} \quad (3-2-35)$$

と書ける。例えばPFリングでは\$p=2.5[\text{GeV}/c]\$であるので

$$[B\rho] = \frac{2.5 [\text{GeV}/c]}{0.3} = 8.3 [\text{Tm}]$$

である。本文中で示すように磁場を\$[B\rho]\$で規格化すると運動方程式は単純な形になる。

例題3-2-2 FODOセルの収束力

電子を安定に収束できるかもしれない電磁石配

列の例として、図3-2-2に示すような電磁石の配列を考えてみよう。これは偏向電磁石の間に、極性が反対の四極電磁石を1個ずつ交互に置いたものである。このようなラティスはFODOセルと呼ばれる。この場合の式3-2-26, 27における収束力\$K_{x,y}(s)\$はどのようになるであろうか。

まずビームのエネルギーは1.5 GeVとしよう。この場合のmagnetic rigidityは

$$[B\rho] = \frac{1.5 [\text{GeV}/c]}{0.3} = 5 [\text{Tm}]$$

となる。ここで偏向電磁石の偏向半径を5mとし、また、四極電磁石の磁場勾配をQFと呼ばれる四極電磁石については2.5 T/m、また、QDは-1.5 T/mとしよう。このとき偏向電磁石中では

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{5^2} = 0.04 [\text{m}^{-2}]$$

$$K_y(s) = 0 [\text{m}^{-2}]$$

また四極電磁石では

$$K_x(s) = \frac{B'}{[B\rho]} = \frac{2.5 [\text{T/m}]}{5 [\text{Tm}]} = 0.5 [\text{m}^{-2}]$$

$$K_y(s) = \frac{-B'}{[B\rho]} = \frac{-1.5 [\text{T/m}]}{5 [\text{Tm}]} = -0.3 [\text{m}^{-2}]$$

となる。これを図示すると図3-2-2のようになる。この例に限らず、ある程度エネルギーの高いリングでは\$\rho\$が大きく、従って偏向電磁石の収束作用は四極電磁石のそれに比べてかなり小さい。

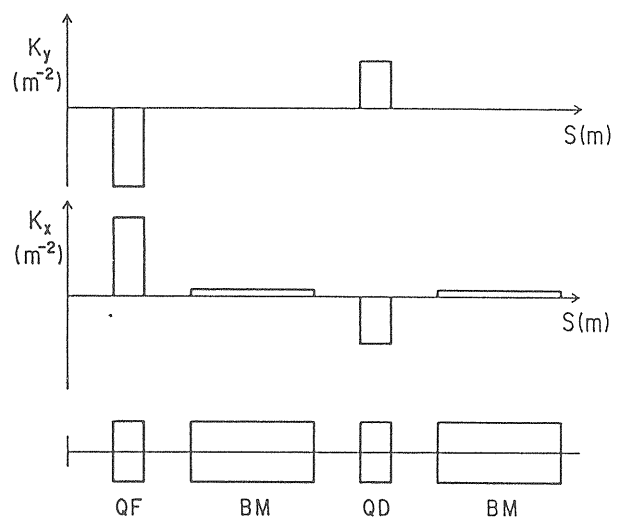


図3-2-2 FODOセルにおける収束力。

3-3. 輸送行列

前の節で導いたベータトロン振動の方程式は、収束力 $K_{x,y}(s)$ が一般にリングの場所 (s) の複雑な関数であるため(例題3-2-2参照)、これを解析的に解くのは実際的ではない。ところが一方で、リングを構成する個々の電磁石やドリフト空間(これらをラティス要素と呼ぶことにする)の中では $K_{x,y}(s)$ は定数になり(式3-2-28~32参照)方程式は容易に積分できそうである。

$K_{x,y}(s)$ が定数である場合、ベータトロン振動の方程式は

$$\frac{d^2z}{ds^2} + Kz = 0 \quad (K=\text{const.}) \quad (3-3-1)$$

の形になる。なお、ここで z は x, y のいずれかを表わす。ここで $K>0$ の場合の解を求めてみよう。この場合の解は一般に \sin 関数と \cos 関数の線形結合で

$$z(s) = A\cos(\sqrt{K}s) + B\sin(\sqrt{K}s) \quad (3-3-2)$$

と書ける。また z の s についての微分 $z'(s)$ (これは前にも述べたが電子の軌道の基準軌道に対する傾きである)は

$$z'(s) = A(-\sqrt{K})\sin(\sqrt{K}s) + B\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}s) \quad (3-3-3)$$

となる。ここで $s=0$ をラティス要素の入口とすると、定数 A, B は入口での位置 $z(0)$ と傾き $z'(0)$ を用いてあらわせる。それを式3-3-3に代入すれば

$$z(s) = z(0)\cos(\sqrt{K}s) + z'(0)\frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}s) \quad (3-3-4)$$

$$z'(s) = z(0)(-\sqrt{K})\sin(\sqrt{K}s) + z'(0)\cos(\sqrt{K}s) \quad (3-3-5)$$

となる。

$K<0$ の場合、式3-3-1の解は一般に \cosh 関数と \sinh 関数の線形結合でかける。上と同様にして解を求めると

$$z(s) = z(0)\cosh(\sqrt{|K|}s) + z'(0)\frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh(\sqrt{|K|}s) \quad (3-3-6)$$

$$z'(s) = z(0)\sqrt{|K|}\sinh(\sqrt{|K|}s) + z'(0)\cosh(\sqrt{|K|}s) \quad (3-3-7)$$

となる。

ラティス要素の長さを L とすると、その出口での位置と傾きは $s=L$ とおくことで得られる。その結果を、例えば $K>0$ の場合について、行列を用いて表

すと

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_{\text{out}} = M \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}L) & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}L) \\ -\sqrt{K}\sin(\sqrt{K}L) & \cos(\sqrt{K}L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_{\text{in}} \quad (3-3-8)$$

という形式に書ける。この行列を用いれば、電磁石入口での位置と傾きを初期値として与えてやれば電磁石出口での位置と傾きは即座に計算できる。このような行列を輸送行列(Transfer Matrix)と呼ぶ。

リングの電磁石の配列(ラティス)が決まれば、各ラティス要素(電磁石や自由空間)の輸送行列をあらかじめ計算しておくことができる。ある場所を (x_0, x'_0) で出発した粒子のその後の運動の様子は、 (x_0, x'_0) に通過する各電磁石や自由空間の輸送行列を次々と掛けていくことで得られる。例えば n 個の電磁石や自由空間を通過した後の位置と角度は

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_n = M_n M_{n-1} \cdots M_3 M_2 M_1 \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 \quad (3-3-9)$$

となる。このようにしてある初期値を持つ電子のその後の運動の様子が計算できる。即ちベータトロン振動の方程式は解けたということになる。実際計算機で様々な初期値を持つ個々の電子の運動を計算するときにはこの方法を用いる。

リング一周の輸送行列はリングを構成する各要素の輸送行列を全て掛け合わせることで求められる。これを M_C とすると、リングのある場所を初期値 $(z, z)_0$ で出発した粒子がリングを1周した後の位置と角度は

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_1 = M_C \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 \quad (3-3-10)$$

となり、 n 周した後の位置と角度は

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_n = M_C^n \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 \quad (3-3-11)$$

となる。

それでは周回をどんどん重ねていったとき(n をどんどん大きくしていったとき)に (z, z') は有限な範囲に留まってくれてくれるであろうか。これは要するにある与えられたラティスでベータトロン振動が安定になるかどうかということである。先に

も述べたが電磁石をどのように並べても運動が安定になるわけではない。

式3-3-11においてベクトル(z,z)が有限に留まる条件を求めてみると(例題3-2-5参照)、輸送行列M_Cの対角和(trace)の絶対値が2よりも小さい、即ち

$$-2 \leq \text{Tr}(M_C) \leq 2 \quad (3-3-12)$$

となっていることが必要であることがわかる。従ってラティスを設計する場合にはリング一周の輸送行列がこの条件を満足するように電磁石の配置や強度を決めてやる必要がある。そうすれば電子の運動は安定になることが保証される。なおこの条件はx, y 両方向について成り立たなければならない。

例題3-3-1 自由空間の輸送行列

自由空間の輸送行列は本文中の式3-3-8においてK=0とすればx, y両方向とも

$$M_{x,y}^{\text{Drift}} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-3-13)$$

となる。

例題3-3-2 偏向電磁石の輸送行列

偏向電磁石の輸送行列は本文中の式3-3-8においてK=1/ρ²とすれば

$$M_x^{\text{Bend}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3-3-14)$$

$$M_{\text{out}}^{\text{Bend}} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-3-15)$$

となる。なおここでL=ρθという関係を用いた。ここでθは偏向電磁石の曲げ角である。

なおここで求めた式はsector型と呼ばれる偏向電磁石(図3-2-1)の場合の式である。rectangular型と呼ばれる偏向電磁石(図3-3-1)の輸送行列はedge focusと呼ばれる効果を考慮して求める必要がある。これは電磁石端面に対してビームが垂直に入射しないことから起きる。詳細は参考文献に譲るとして、edge focusの効果はsector型の輸送行列の前後に

$$M_{x,y}^{\text{edge}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm \frac{\tan(\theta/2)}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (3-3-16)$$

を掛けることで取り入れることができる。ただし+は水平方向、また、-は垂直方向である。この結果輸送行列は

$$M_x^{\text{BM}} = M_x^{\text{edge}} M_x^{\text{sector}} M_x^{\text{edge}} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-3-17)$$

$$M_y^{\text{BM}} = M_y^{\text{edge}} M_y^{\text{sector}} M_y^{\text{edge}} = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan(\theta/2) & \rho\theta \\ -\frac{1}{\rho} \tan(\theta/2)(2 - \theta \tan(\theta/2)) & 1 - \theta \tan(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (3-3-18)$$

となる。この結果を眺めると、水平方向の行列はドリフト空間と同じであり、従って収束作用がないことがわかる。rectangular型の偏向電磁石で収束作用がないことは図3-3-1を眺めれば理解できる。

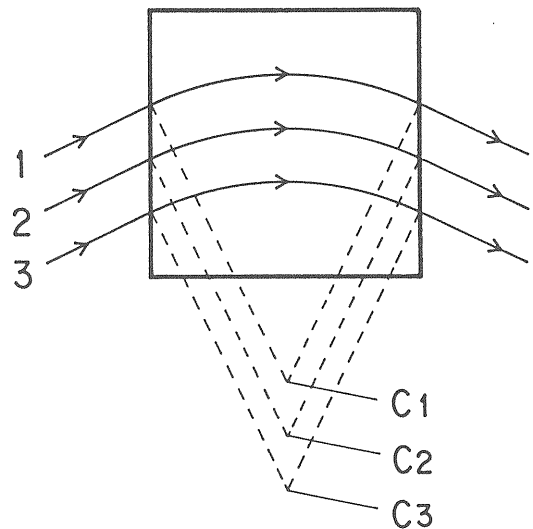


図3-3-1 rectangular型の偏向電磁石の概念図。

例題3-3-3 四極電磁石の輸送行列

四極電磁石の輸送行列は式3-3-8のKをB'/[Bρ]とみなせば本文中の結果そのままである。K>0の場合は

$$M_x^{QM} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}L) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}L) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}L) & \cos(\sqrt{K}L) \end{pmatrix} \quad (3-3-19)$$

$$M_y^{QM} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{K}L) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}L) \\ \sqrt{K} \sinh(\sqrt{K}L) & \cosh(\sqrt{K}L) \end{pmatrix} \quad (3-3-20)$$

また、 $K < 0$ の場合は

$$M_x^{QM} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{|K|}L) & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}L) \\ \sqrt{|K|} \sinh(\sqrt{|K|}L) & \cosh(\sqrt{|K|}L) \end{pmatrix} \quad (3-3-21)$$

$$M_y^{QM} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{|K|}L) & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin(\sqrt{|K|}L) \\ -\sqrt{|K|} \sin(\sqrt{|K|}L) & \cos(\sqrt{|K|}L) \end{pmatrix} \quad (3-3-22)$$

となる。

次にthin lens近似というものについて述べておく。式3-3-19~22において $K=B'/[B\rho]$ であることに注意して $B'L$ を一定に保ちつつ L が零の極限をとると

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad (3-3-23)$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad (3-3-24)$$

が得られる。ここで

$$k \equiv KL = \frac{B'L}{[B\rho]} \quad (3-3-25)$$

とした。このように電磁石の作用 ($B'L$) を一定に保ちながら長さ (L) が零の極限を取る、即ち電磁石の作用をある一点に集中させて考えるようなやり方をthin lens近似という。

例題3-3-4 輸送行列のdeterminant

輸送行列のdeterminantは常に1であることを示す。初期値 $(x,x')=(1,0)$ と $(x,x')=(0,1)$ に対する方程式

3-2-26~27の解をそれぞれ $C(s)$, $S(s)$ とする。これらを用いると0と s の間を結ぶ輸送行列が

$$M = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \quad (3-3-26)$$

と書けることは $(1,0)$, $(0,1)$ に M を掛けれてみればすぐわかる。 M のdeterminantは

$$\det(M) = C(s)S'(s) - C'(s)S(s) \quad (3-3-27)$$

この s に関する微分を取ってみると

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \{\det(M)\} &= C'(s)S'(s) - C'(s)S'(s) + C(s)S''(s) - C''(s)S(s) \\ &= C(s) \{-K(s)S(s)\} - \{-K(s)C(s)\} S(s) = 0 \end{aligned} \quad (3-3-28)$$

となり $\det(M)$ は s に依らず一定の値になることがわかる。ここで $C(s)$, $S(s)$ は方程式3-2-26~27の解であることを用いた。 $s=0$ のときの輸送行列のdeterminantは1であることから輸送行列のdeterminantは常に1であることがわかる。

例題3-3-5 ベータatron振動の安定条件

リング一周の輸送行列を M としその固有値を λ_1 , λ_2 また固有ベクトルを v_1 , v_2 とする。初期値 (z_0, z'_0) を固有ベクトルの線形結合で書くと

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 \quad (3-3-29)$$

となる。ここで c_1 , c_2 は定数。リング一周後の位置と角度は

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_1 = c_1 M \vec{v}_1 + c_2 M \vec{v}_2 = c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2 \vec{v}_2 \quad (3-3-30)$$

また n 周後は

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_n = c_1 M^n \vec{v}_1 + c_2 M^n \vec{v}_2 = c_1 \lambda_1^n \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \vec{v}_2 \quad (3-3-31)$$

となる。

ところで固有値 λ_1 , λ_2 は固有値方程式

$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} m_{11} - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3-3-32)$$

或いは

$$\lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 0 \quad (3-3-33)$$

の解である。従って

$$\lambda_1 + \lambda_2 = m_{11} + m_{22} \equiv \text{Tr}(M) \quad (3-3-34)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \equiv \det(M) = 1 \quad (3-3-35)$$

の関係が即座に得られる。ここで一般に輸送行列のdeterminantが1になる(例題3-3-4参照)ことを用いた。式3-3-35より固有値を

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\mu} \quad (3-3-36)$$

と書くことができるが、これを式3-3-31に代入すると

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_n = c_1 e^{i\mu} \vec{v}_1 + c_2 e^{-i\mu} \vec{v}_2 \quad (3-3-37)$$

従って(z, z')が有限に留まるにはμが実数であることが必要である。式3-3-36を式3-3-34に代入すれば

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos \mu = \text{Tr}(M) \quad (3-3-38)$$

従ってμが実数である、即ちベータatron振動が安定であるという条件は

$$-2 \leq \text{Tr}(M) \leq 2 \quad (3-3-39)$$

となる。ところでリング一周の輸送行列といってもどこを起点にとるかで一般には異なっている。しかしtraceはどこを起点にとるかは依らない。これは例えば次の節の式3-4-27を眺めればわかる。

3-4. Twissパラメタ

基準軌道近傍での電子の運動は輸送行列を用いて簡単に計算できることがわかった。しかし、その一方で式3-2-26~27の解を形式的にせよある程度解析的な形で表しておくとお見通しがよくなる場合

も多い。実際前の節で出てきた式を眺めてをベータatron振動の様子がイメージとして頭に浮かんで来た人はまずいないであろう。

証明は省略するがベータatron振動の方程式

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K_z(s)z = 0 \quad (3-4-1)$$

においてK_zが

$$K_z(s) = K_z(s+C) \quad (3-4-2)$$

のような周期性を持っている場合の安定な解は

$$z(s) = A_{\beta z} \sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \psi_{z0}] \quad (3-4-3)$$

$$\psi_z(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta_z(s)} \quad (3-4-4)$$

という形にかけられる。ここでA_{βz}、ψ_{z0}は積分定数である。この解は調和振動子の解に似ているが、収束・発散力が場所の関数であることに対応して、振幅や位相の進みも場所の関数になっている。β_zはベータatron関数と呼ばれリングの周長をCとする

$$\beta_z(s) = \beta_z(s+C) \quad (3-4-5)$$

という周期性を満たす。ψ_z(s)は振動の位相でありsとともに単調に増加する。式3-4-3から明らかなようにψ_z(s)が2π増加するごとに粒子は基準軌道の近傍で一回振動する。従ってリングを一周する間に何回振動するかは

$$\nu_z = \frac{1}{2\pi} \{\psi_z(C) - \psi_z(0)\} = \int_0^C \frac{ds}{\beta_z(s)} \quad (3-4-6)$$

で与えられる。ν_zはベータatron振動数とよばれる。

式3-4-3を微分すれば傾きz'は

$$\begin{aligned} z'(s) &= -\frac{A_{\beta z}}{\sqrt{\beta_z(s)}} [\alpha_z(s) \cos\{\psi_z(s) + \psi_{z0}\} + \sin\{\psi_z(s) + \psi_{z0}\}] \\ &= -A_{\beta z} \sqrt{\gamma_z(s)} \sin\{\psi_z(s) + \psi_{z0}\} \end{aligned} \quad (3-4-7)$$

$$\alpha_z(s) = \frac{1}{2} \frac{d\beta_z(s)}{ds} \quad (3-4-8)$$

$$\gamma_z(s) = \frac{1 + \alpha_z^2(s)}{\beta_z(s)} \quad (3-4-9)$$

となる。ここで導入した α_z 、 γ_z に β_z を加えた3つをTwissパラメタと呼ぶ。 α_z や γ_z は β_z と同じ周期性(式3-4-5)を満たす。

ベータatron振動の解が式3-4-3, 7のような形に書けたとしてTwissパラメタ等はどうやって計算すればよいのであろうか。実はこれらは例題で述べるように輸送行列を用いて計算できるのである。以下ではTwissパラメタ等が求まっているとして、これらの形式解からなにがいでえるかをみてみよう。

式3-4-3, 7を書き替えると

$$z = A_{\beta z} \sqrt{\beta_z} \cos[\psi_z + \psi_{z0}] \quad (3-4-10)$$

$$\beta_z z' + \alpha z = -A_{\beta z} \sqrt{\beta_z} \sin[\psi_z + \psi_{z0}] \quad (3-4-11)$$

となる。これより

$$\frac{1}{\beta_z} \{ z^2 + (\beta_z z' + \alpha z)^2 \} = \gamma_z z^2 + 2\alpha_z z z' + \beta_z z'^2 = A_{\beta z}^2 = \text{const.} \quad (3-4-12)$$

という関係が導かれる。この $A_{\beta z}^2$ はCourant-Snyder不変量と呼ばれ、調和振動子等における振動系の全エネルギーに相当する保存量である。式3-4-12の関係を (z, z') の平面(これを位相空間: Phase Spaceと呼ぶ)で表わすと図3-4-1のような楕円となる。その面積は

$$\frac{\pi A_{\beta z}^2}{\sqrt{\gamma_z \beta_z - \alpha_z^2}} = \pi A_{\beta z}^2 \quad (3-4-13)$$

である(ここで式3-4-9を用いた)。

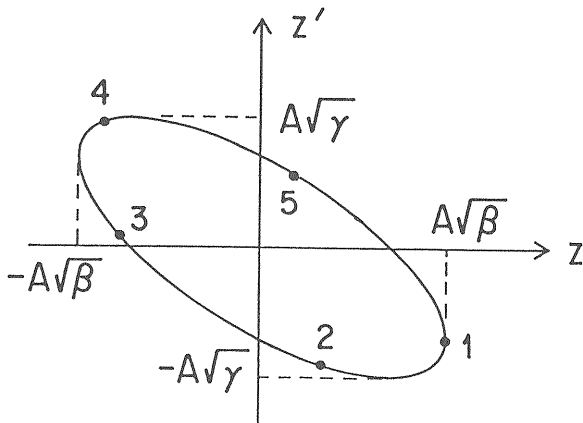


図3-4-1 位相空間上の楕円とTwissパラメタの関係。電子は周回毎に1, 2, 3...の位置に現われる(図は $\Delta v \sim 0.2$ の場合)。

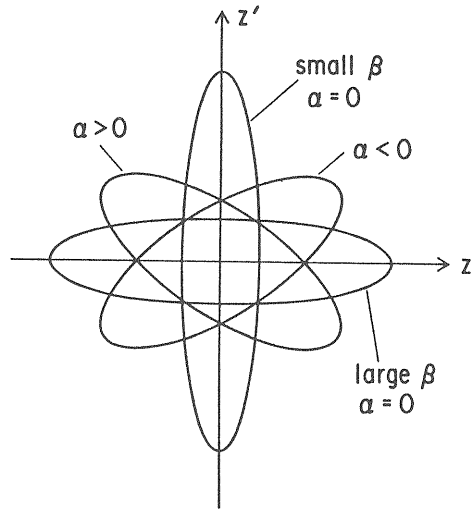


図3-4-2 Twissパラメタの違いによる楕円形状の変化。

リングのそれぞれの地点でこのような楕円が書けるがその形状はその場所のTwissパラメタによって様々に変わる(図3-4-2)。ある初期値 (z_0, z'_0) を持って出発した電子のリングの各地点での位相空間上の位置は、それぞれの地点での楕円の上に乗ることになる。楕円の形状は様々に変わるがその面積は常に

$$\pi A_{\beta z}^2 = \pi (\gamma_z z_0^2 + 2\alpha_z z_0 z'_0 + \beta_z z'^2_0) \quad (3-4-14)$$

に等しい。この様子はこの後の例題3-4-2の図3-4-6を見れば良く分かる。

次にリングのある一箇所で電子の運動を観測する場合を考えてみよう。いまベータatron振動数を整数部分と端数部分にわけて

$$v_z = m + \Delta v_z \quad (m = \text{integer}) \quad (3-4-15)$$

とする。これを用いるとある一つの電子が周回毎に観測地点を通過するときのベータatron振動の位相は

$$\psi_z(s_0) = 2\pi v_z n = 2\pi m n + 2\pi \Delta v_z n \quad (3-4-16)$$

となる。ここで n は周回数である。これを式3-4-3, 7に代入すれば

$$z(s_0) = A_{\beta z} \sqrt{\beta_z(s_0)} \cos(2\pi \Delta v_z n + \psi_{z0}) \quad (3-4-17)$$

$$z'(s_0) = -A_{\beta z} \sqrt{\gamma_z(s_0)} \sin(2\pi \Delta v_z n + \psi_{z0}) \quad (3-4-18)$$

となる。この運動の様子を位相空間上で表すと図3-4-1のようになり、式3-4-12の楕円上をとりとびに移動する。後で述べるように一般に Δv は共鳴現象を避けるために「中途半端な」値になっており、その場合何回も周回を重ねるうちには楕円上のほとんどの場所を通過することになる。いまこの場所のビームパイプの内径を b とすると

$$A_{\beta z} \sqrt{\beta_z(s)} \geq b \quad (3-4-19)$$

或いは

$$A_{\beta z}^2 \geq \frac{b^2}{\beta_z(s)} \quad (3-4-20)$$

であるような初期値 $A_{\beta z}$ を持った電子は周回を重ねるうちにビームパイプに当たってしまうことになる。一般にビームパイプの内径は場所によって異なっている場合が多い(図3-4-3参照)。あるリングで電子がビームパイプに衝突することなく周回できる $A_{\beta z}^2$ の最大値は

$$(A_{\beta z})_{\text{lim}} = \text{Min} \left(\frac{b(s)^2}{\beta_z(s)} \right) \quad (3-4-21)$$

と書ける。ここでMinはリング内での最小値を意味する。したがって電子がビームパイプにあたることなく周回を続けるには $(A_{\beta z})_{\text{lim}}$ に対応した面積の楕円の内部にいる必要がある。このような電子が安定に周回できる位相空間上の領域をアクセプタンスと呼ぶ。

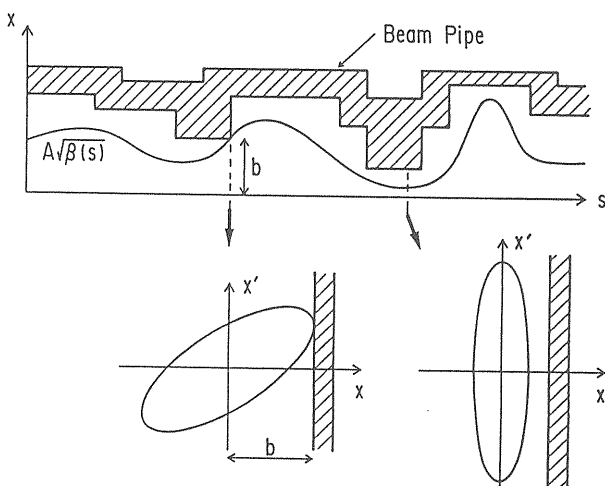


図3-4-3 アクセプタンスの概念。 $b/\sqrt{\beta}$ が最小になる場所でアクセプタンスが決まる。

次に多数の電子が周回している場合を考えてみる。今仮に振幅の初期値については0から $A_{\beta z}$ までの間で、また位相の初期値 ψ_0 については0から 2π の間で一様に分布しているような電子の集団が周回しているとしよう(図3-4-4)。このような粒子の集団は位相空間上では式3-4-12で表わされる楕円の内側を埋め尽くすことになる。蓄積電子の集団即ちビームが位相空間上に占める面積をエミッタンスと呼ぶ。或いはこの面積を $\pi\varepsilon$ としたときの ε をエミッタンスと呼ぶこともある。本講義では後者の定義を用いる。なお現実の電子ビームは中心軌道の周りでガウス分布している。従ってガウス分布の1シグマに相当するエミッタンスをそのビームのエミッタンスと称している。

エミッタンス ε_z のビームは図3-4-4から明らかなように、空間的には

$$-\sqrt{\varepsilon_z \beta_z} \leq z \leq \sqrt{\varepsilon_z \beta_z} \quad (3-4-22)$$

の間に拡がっており、これがビームの幅(ビームサイズ)ということになる。また、傾きに関しては

$$-\sqrt{\varepsilon_z \gamma_z} \leq z' \leq \sqrt{\varepsilon_z \gamma_z} \quad (3-4-23)$$

の間に拡がっており、これがビームの角度拡がり

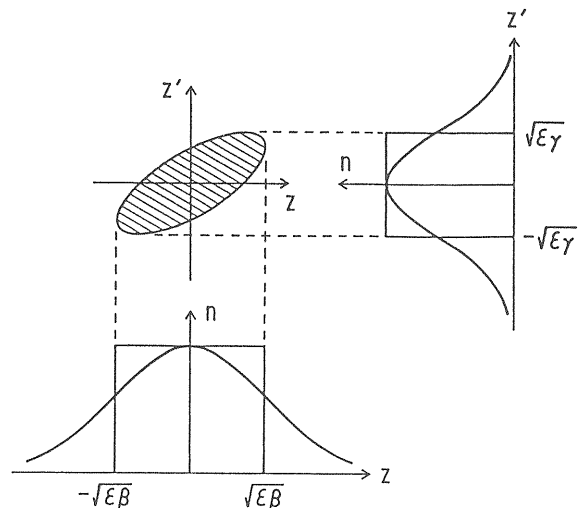


図3-4-4 エミッタンスの概念。

を表わしている。式3-4-9からもわかるように一般に β_z が大きいと γ_z は小さくなり、また β_z が小さいとその逆になる。従って、 β_z が大きい場所ではビームサイズが大きく角度発散が小さい。また、 β_z が小さいところではその逆になる。

なお最後に z は x または y を表していることを確認しておこう。従ってTwissパラメタやベータatron振動数など上で出てきたパラメタや概念はすべて x, y 両方について存在している。

例題3-4-1 輸送行列とTwissパラメタの関係

Twissパラメタと輸送行列の関係を求めてみる。なお x, y については同様の話であるので特に区別せず話をする。式3-4-3, 7を

$$z(s) = \sqrt{\beta(s)} \{ A \cos \psi(s) + B \sin \psi(s) \} \quad (3-4-24)$$

$$z'(s) = \frac{1}{\sqrt{\beta(s)}} \{ (-\alpha(s)A + B) \cos \psi(s) - (\alpha(s)B + A) \sin \psi(s) \} \quad (3-4-25)$$

と書き替えておこう。ここで A, B は定数である。 $s=0$ として A, B を $z(0), z'(0)$ で表わして、結果を行列を用いた形式で書くと

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_s = M(s \leftarrow 0) \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}} (\cos \Delta\psi + \alpha_0 \sin \Delta\psi) \\ -\frac{1 + \alpha_0 \alpha_s \sin \Delta\psi + \alpha_0 - \alpha_s \cos \Delta\psi}{\sqrt{\beta_0 \beta_s}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\beta_0 \beta_s} \sin \Delta\psi \\ \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}} (\cos \Delta\psi - \alpha_s \sin \Delta\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 \quad (3-4-26)$$

となる。ここで $\Delta\psi = \psi(s) - \psi(0)$ は2点間の位相差である。これで0から s の間の輸送行列がTwissパラメタを用いて書けたことになる。特にリング一周の

輸送行列はTwissパラメタが周期関数であることを考慮して $\beta_0 = \beta_s, \alpha_0 = \alpha_s, \Delta\psi = \mu = 2\pi\nu$ とおけば

$$M_C = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (3-4-27)$$

となる。ただし ν はベータatron振動数。

いまリング一周の輸送行列が計算できているとしてその行列要素を m_{ij} とする。安定性をみるためまずtraceを計算して

$$|\text{Tr}(M_C)| = |(m_{11} + m_{22})| = 2 |\cos \mu| \leq 2 \quad (3-4-28)$$

となっていることを確認する。式3-4-27より β は

$$\beta = \frac{m_{12}}{\sin \mu} = \frac{m_{12}}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \mu}} \geq 0 \quad (3-4-29)$$

として計算できる。ここで右辺分母の符号は β が正になる様を選ぶ。また、 α は

$$\alpha = \frac{m_{11} - m_{22}}{2 \sin \mu} \quad (3-4-30)$$

として計算できる。 α, β を用いて γ は式3-4-9から計算できる。

このようにしてリング一周の輸送行列から、その輸送行列の起点でのTwissパラメタが計算できる。

それでは他の任意の場所での場所でのTwissパラメタはどのようにして計算すればよいであろうか。リング内の二箇所(図3-4-5の1と2)を起点とするリング一周の輸送行列を $M_C(1)$ と $M_C(2)$ とし、また、1から2への輸送行列を $M(2 \leftarrow 1)$ とする。1を起点としてリングを一周してさらに2まで進むということは、1から2まで進んだのち2を起点としてリングを一周することと同じであるから

$$M_C(2)M(2 \leftarrow 1) = M(2 \leftarrow 1)M_C(1) \quad (3-4-31)$$

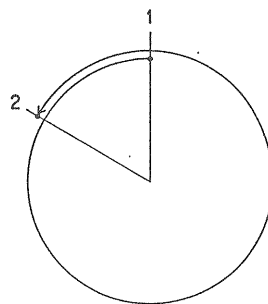


図3-4-5

となる。ここで $M_C(1)$ を

$$\begin{aligned} M_C(1) &= \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha_1 \sin\mu & \beta_1 \sin\mu \\ -\gamma_1 \sin\mu & \cos\mu - \alpha_1 \sin\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\mu + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \sin\mu \\ &\equiv I \cos\mu + J_1 \sin\mu \end{aligned} \quad (3-4-32)$$

また $M_C(2)$ も同様にして

$$\begin{aligned} M_C(2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos\mu + \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \sin\mu \\ &\equiv I \cos\mu + J_2 \sin\mu \end{aligned} \quad (3-4-33)$$

と書きなおしておく。式3-4-31は式3-4-32を用いると

$$\begin{aligned} M_C(2) &= M(2\leftarrow 1)M_C(1)M^1(2\leftarrow 1) \\ &= M(2\leftarrow 1)\{I \cos\mu + J_1 \sin\mu\}M^1(2\leftarrow 1) \\ &= I \cos\mu + M(2\leftarrow 1)J_1M^1(2\leftarrow 1) \end{aligned} \quad (3-4-34)$$

これを式3-4-33と比較すると

$$J_2 = M(2\leftarrow 1)J_1M^1(2\leftarrow 1) \quad (3-4-35)$$

となる。これを行列要素を使って書くと

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\gamma_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{22} - m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \quad (3-4-36)$$

となり、1におけるTwissパラメタと2のそれらとが輸送行列 $M(2\leftarrow 1)$ を用いて関係付けられたことになる。これは最終的に次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21} & -m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{21}m_{22} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (3-4-37)$$

各要素について上の3行3列の行列を計算しておき、起点でのTwissパラメタ (β, α, γ) に次々と掛けていけばリングの任意の場所でのTwissパラメタが計算

できる。

最後にあるラティス要素でのベータatron振動の位相進みは式3-4-26より

$$m_{11} = \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos\Delta\psi + \alpha_1 \sin\Delta\psi) \quad (3-4-38)$$

$$m_{12} = \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin\Delta\psi \quad (3-4-39)$$

となることから

$$\Delta\psi = \tan^{-1} \left(\frac{m_{12}}{m_{11}\beta_1 - m_{12}\alpha_1} \right) \quad (3-4-40)$$

として計算できる。ただし $0 < \Delta\psi < 2\pi$ とする。各ラティス要素中での位相進みを次々と足してゆけば起点からの位相進みが得られる。

例題 3-4-2 FODOセル中での電子の運動

これまで導出してきた式の数々を用いてFODOセル中でのTwissパラメタやベータatron振動の様子を見てみよう。ただし四極電磁石はthin lens近似するものとする。また偏向電磁石の収束力は弱いとしてこれを無視した。以下結果のみ示しておく。なお電磁石の強さはQFが

$$k = \frac{BL}{[Bp]} = 0.25 \quad [m^{-1}]$$

QDが

$$k = \frac{BL}{[Bp]} = -0.25 \quad [m^{-1}]$$

またQF, QD中心間距離は4 mとして計算している。

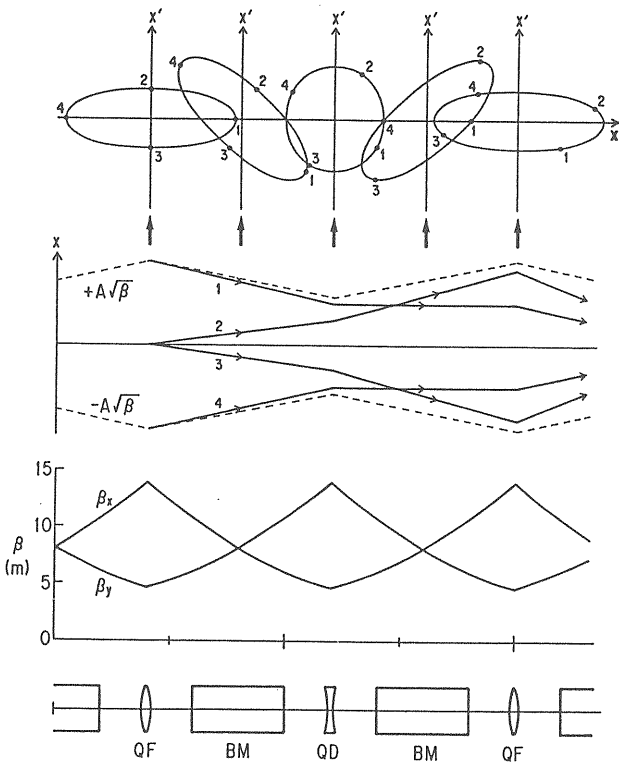


図3-4-6 FODOセル中での電子の運動。下段はthin lens近似で求めたベータatron関数。中段は同じ $A\beta^2$ を持ち最初のQFでの位相が $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ である電子の水平方向のベータatron振動。上段はそれらの位相空間での表現。なお最初のQFから次のQFまでの間の位相進みは $\pi/3$ となっている。

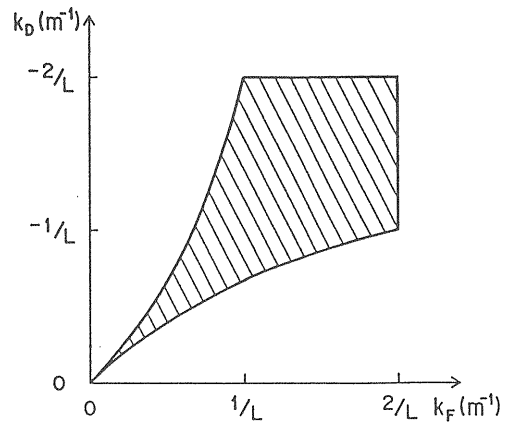


図3-4-8 図3-4-6のFODOセルでベータatron振動が安定になる条件 (式3-3-12)。 k_F, k_D はQF, QDの強さ。ただし $k=B'/[B\rho]$ 。 L はQF-QD間の距離。QF, QDの強さが図の斜線の領域にあるときに水平垂直両方向のベータatron振動が安定になる。

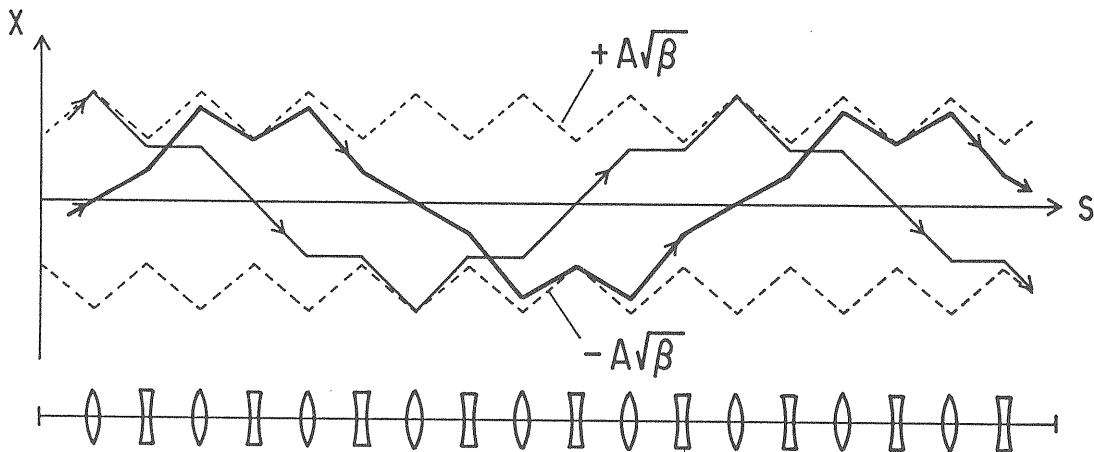


図3-4-7 図3-4-6のFODOセルの繰り返しの中での電子の運動。 $A\sqrt{\beta}$ を包絡線として振動する様子がわかる。

3-5. 磁場誤差の影響

前節までの話ではリングは設計通り完璧にできているとしてきた。しかし実際のリングでは様々な原因で本来あってはならない余分な磁場が存在する。この節ではそのような余分な磁場があった場合にベータトロン振動の様子はどう変わるかということの説明をする。

まず磁場誤差 ΔB がある場合の運動方程式であるがこれは式3-2-16, 17において本来の偏向磁場や四極磁場に ΔB という余分な磁場が加わっていると考えれば

$$\frac{d^2z}{ds^2} + K_z(s)z = -\frac{\Delta B(s)}{[B\rho]} \quad (3-5-1)$$

となることがすぐに分かる（なおここでも z は x, y のいずれかを表す）。このように磁場誤差はベータトロン振動の方程式に非斉次項として現われる。 ΔB は一般には多極磁場であり x, y の関数である。磁場誤差の一般的な取り扱いについては小林氏の講義で述べられる。ここでは磁場誤差が二極磁場である場合について何が起きるかを見てみよう。

磁場誤差が存在しない場合にはデザイン軌道上にいる電子は何らかの外乱がないかぎりこの軌道上を周回し続ける。即ちデザイン軌道は力学的な平衡軌道である。平衡軌道は閉じた軌道でもあるので閉軌道とも呼ばれる。それではこのデザイン軌道上に本来あってはならない磁場誤差（二極磁場）が存在したらどうであろうか。この場合デザイン軌道上を進んできた粒子は磁場誤差によって

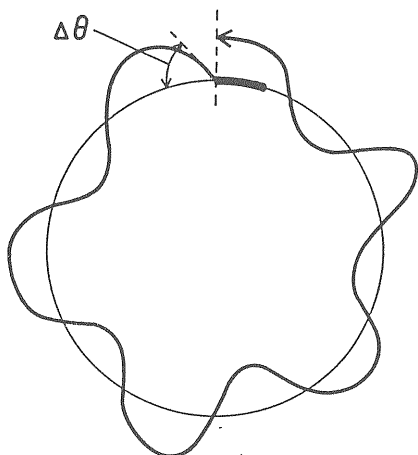


図3-5-1 磁場誤差で蹴飛ばされた電子の運動。軌道は一般に閉じていない。

蹴飛ばされてデザイン軌道からはずれてベータトロン振動を始めてしまう（図3-5-1）。従ってやはりデザイン軌道は平衡軌道ではない。このような場合には図3-5-2に示すような閉じた軌道が新しい平衡軌道になる。このようにビームの平衡軌道（閉軌道）がデザイン軌道からずれることを閉軌道歪みと呼ぶ。

以下磁場誤差 ΔB がある短い距離 Δs に局在しているとして閉軌道を表す式を求めてみよう。軌道が閉じていることから、起点（磁場誤差の直後）を (z_0, z'_0) で出発した粒子がリングを一周し磁場誤差によって $\Delta\theta$ だけ蹴飛ばされた後起点に戻ったときの位置と傾きが出発時の位置と傾きと等しいはずである。これを輸送行列を用いて表すと

$$M_C \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 \quad (3-5-2)$$

これより

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 = (I - M_C)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta \end{pmatrix} \quad (3-5-3)$$

となる。ここで I は単位行列である。なお式3-5-1をみれば

$$\Delta\theta = \frac{dz}{ds} \Delta s = -\frac{\Delta B \Delta s}{[B\rho]} \quad (3-5-4)$$

となることがわかる。 M_C に式3-4-27を用いると

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\beta\cot(\pi\nu)\cdot\Delta\theta \\ \frac{1}{2}\{1-\alpha\cot(\pi\nu)\}\cdot\Delta\theta \end{pmatrix} \quad (3-5-5)$$

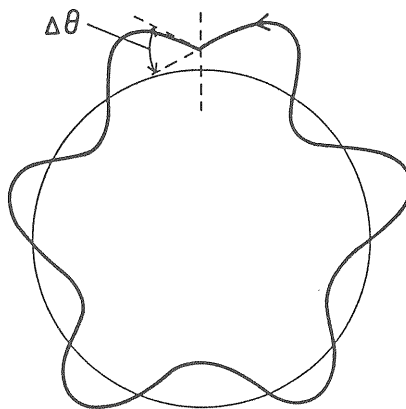


図3-5-2 磁場誤差のある場合の閉軌道。

これで磁場誤差の発生した場所（の直後）での閉軌道位置と傾きが求まったが、他の任意の場所での閉軌道は式3-4-26を用いて計算できる。

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}_s = M(s \leftarrow 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \beta \cot(\pi\nu) \cdot \Delta\theta \\ \frac{1}{2} \{1 - \alpha \cot(\pi\nu)\} \cdot \Delta\theta \end{pmatrix} \quad (3-5-6)$$

位置についての結果を書き下すと

$$z_{\text{cod}}(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta_0}}{2\sin(\pi\nu)} \cos(\Delta\psi - \pi\nu) \cdot \Delta\theta \quad (3-5-7)$$

となる。ここで $\Delta\psi$ ($0 < \Delta\psi < 2\pi\nu$) は磁場誤差の場所と観測点のベータトロン振動の位相差である。

式3-5-7から、磁場誤差の場所のベータトロン関数が高いほどCODは大きくなるのがわかる。また、ベータトロン振動数が整数に近いと式3-5-7の分母がゼロに近づくためCODは大きくなる。完全に整数に一致する場合はCODは無限大になる。即ち閉軌道（平衡軌道）が存在せずベータトロン振動は安定でない。これは整数共鳴と呼ばれる現象である。現実のリングでは大小はともかく何らかの磁場誤差はかならず存在するので、ベータトロン振動数を整数にとることはできない。

それでは二極磁場成分を持つような磁場誤差の原因にはどのようなものがあるのだろうか。リングを設計する段階からある程度覚悟しておかなくてはならないのは次の3つである。

- ・四極電磁石の水平垂直方向の変位。
- ・偏向電磁石の傾き。
- ・個々の偏向電磁石の磁場強度のばらつき。

最初の二つは電磁石をリングに設置するときの設置誤差によるものである。また、最後のものは電磁石製作段階での誤差ということになる。これらの誤差があまりに大きいと、CODが大きくなり場合によっては閉軌道がビームパイプの外に出てしまうことすらありうる。このような場合はビームが蓄積できないことはいうまでもない。従って電磁石の製作精度や設置精度はできるだけ高くしておく必要がある。

CODの補正について小林氏や芳賀氏の講義でも述べられることになるのでここでは極く簡単に触れておくだけにする。CODはリングに設置された小型の偏向電磁石（ステアリング電磁石という）

を励磁することによって補正できる。ステアリング電磁石を励磁すると式3-5-7に従って新たなCODが発生する。各ステアリング電磁石の磁場強度をうまく選んで、この新たに発生したCODで元々有るCODを打ち消すようにしてやればよいわけである。

最後に共鳴というものについて簡単に触れておく。先に述べたように磁場誤差が二極磁場であると整数共鳴が起きベータトロン振動が不安定になってしまう。磁場誤差が多極磁場である一般の場合にはベータトロン振動数が

$$lv_x + mv_y = n \quad (l, m, n = \text{integer}) \quad (3-5-8)$$

のような単純な関係を満たすときに共鳴が起きる可能性がある。従って、リングを運転する際にはこれらの条件を満たす振動数を避ける必要がある。共鳴現象の詳細は小林氏の講義で述べられるはずである。

3-6. エネルギー分散とクロマティシティ

これまでの話は粒子のエネルギー（運動量）は設計上決められたある値に完全に一致していると話をしてきた。しかし、後述するように実際にリングを周回している粒子のエネルギーは中心値の近傍である幅をもって分布している。この節ではエネルギーのずれた粒子のベータトロン振動について述べる。

偏向電磁石にエネルギーの異なる粒子が飛び込んだとするとエネルギーの低い粒子ほど大きく曲げられる（図3-6-1）。これは曲率半径が

$$\rho = \frac{p}{eB} \quad (3-6-1)$$

と運動量に比例することを考えればすぐにわかる。このことからエネルギーの異なる粒子は異なった軌道を描いて運動し、特にリングの場合にはその閉軌道も異なったものになるであろうことは容易に想像できる。

まず始めに簡単な例として偏向電磁石のみでできたリングでのエネルギーの違いによる閉軌道の違いを考えてみる。この場合エネルギーの高い粒子ほど偏向半径が大きくなり外側を大回りすることになる（図3-6-2）。これに伴い閉軌道の周長も長くなる。実際のリングでは四極電磁石の作用により形は複雑になるが（図3-6-3）おおざっぱな振

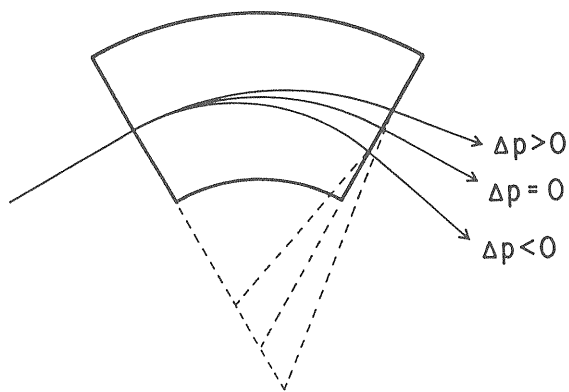


図3-6-1 エネルギー分散。

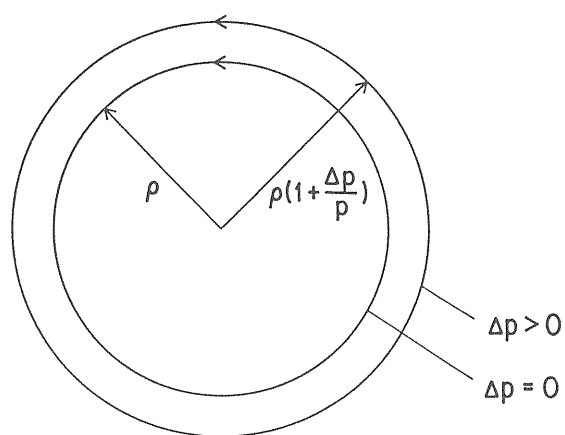


図3-6-2 異なるエネルギーを持った電子の一樣磁場中の閉軌道の違い。

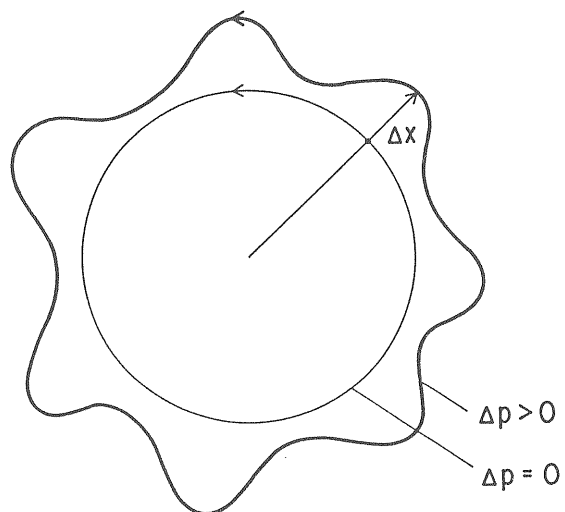


図3-6-3 異なるエネルギーを持った電子の閉軌道の違い。

る舞いは同じである。この場合もやはりエネルギーの高い粒子の閉軌道ほど外側へ大きくふくらみ軌道の周長も長くなる。エネルギーが ΔE だけずれた粒子の閉軌道がリングのある場所で Δx だけずれたとする。このとき

$$\Delta x(s) = \eta(s) \frac{\Delta E}{E} \quad (3-6-2)$$

とにおいて比例係数 η をエネルギー分散関数と呼ぶ。このエネルギー分散関数は例題3-6-3で述べるように輸送行列を用いて計算できる。

上でも述べたがエネルギーが異なると閉軌道の長さも異なる。エネルギーのずれに対する閉軌道長の変化率を

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha \frac{\Delta E}{E} \quad (3-6-3)$$

と書いたときの比例定数 α を momentum compaction factor と呼ぶ。 α はエネルギー分散関数を用いて

$$\alpha = \frac{1}{C} \int_0^C \frac{\eta(s)}{\rho(s)} ds \quad (3-6-4)$$

で与えられる (例題3-6-4参照)。

電子ストレージリングでは粒子の速度はほとんど光速に等しく、少々エネルギーが違ってても速度はおなじと考えてよい。従ってエネルギーが高い粒子ほど閉軌道の周長が長くなり、リングを一周するのに時間がかかる。このことは後で述べるシンクロトロン振動の安定性にとって重要である。

エネルギー分散はエネルギーの異なった粒子に対して偏向電磁石中での軌道の曲率が異なることにより発生する。それでは四極電磁石については何が起きるであろうか。この場合は収束・発散力が変化する (例題3-6-5)。このことにより真っ先に影響をうけるのはベータトロン振動数である。エネルギーが ΔE だけずれた粒子のベータトロン振動数が $\Delta \nu$ だけずれたとして

$$\Delta \nu_{x,y} = \xi_{x,y} \frac{\Delta E}{E} \quad (3-6-5)$$

と置いたときの比例定数 $\xi_{x,y}$ をクロマティシティと呼ぶ。クロマティシティは

$$\xi_{x,y} = -\frac{1}{4\pi} \int \beta_{x,y}(s) K(s) ds \quad (3-6-6)$$

で与えられる (例題3-6-5)。

後で述べるように、リングを周回している粒子のエネルギーはある幅をもって分布している。従ってクロマティシティが大きいと、粒子のエネルギーによってはベータトロン振動数が危険な共鳴条件に当たるなどして運動が不安定になる可能性がある。また、Head-Tail不安定と呼ばれるビーム不安定性が起きるのを防ぐためにはクロマティシティをほぼ零にする必要がある。クロマティシティを補正して零に近い値にするために六極電磁石が用いられる (例題3-6-6)。

クロマティシティ補正のために導入された六極電磁石は非線形な力 (例えば水平方向には変位の二乗に比例した力) を粒子に及ぼす。このような非線形力が存在するとある程度以上の振幅の粒子の運動が不安定になる可能性が出てくることは容易に想像できる。このように力学的に決まるベータトロン振動の安定領域をダイナミックアパーチャと呼ぶ。

例題3-6-1 エネルギー分散関数の方程式

エネルギー分散関数の従う方程式を求めてみる。これには運動方程式

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{B_y}{[B\rho]} \quad (3-6-7)$$

まで戻る必要がある。運動量が Δp だけずれた場合には

$$[B\rho] = \frac{p}{e} \rightarrow \frac{p+\Delta p}{e} = [B\rho] \left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right) \quad (3-6-8)$$

となることから ($\Delta p/p$ の高次の項を無視すれば) 最終的に

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} \quad (3-6-9)$$

が得られる。これを考慮してベータトロン振動の一般的な式3-2-26を書き替えると

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_x(s)x = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p} \quad (3-6-10)$$

となる。この方程式の周期解 (閉じた解) が運動量 $p+\Delta p$ を持つ粒子の閉軌道になる。ここで

$$x = \eta \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-11)$$

を代入すると最終的に η の従う方程式として

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + K_x(s)\eta = \frac{1}{\rho(s)} \quad (3-6-12)$$

が得られる。

なお相対論的な電子では運動量のずれとエネルギーのずれは $\Delta p/p = \Delta E/E$ という関係があることを確認しておく (例題3-1-1)。

例題3-6-2 エネルギーのずれを含んだ輸送行列

エネルギーのずれた粒子の運動を輸送行列で記述してみる。運動の様子が変わるのは偏向電磁石中である。まず、sector型の偏向電磁石について考えてみる。運動方程式

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p} \quad (3-6-13)$$

の一般解は、特殊解が

$$x = \rho \frac{\Delta p}{p} \quad (3-6-14)$$

であることを考慮すると

$$x(s) = A \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + B \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \rho \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-15)$$

と書ける。またこの微分は

$$x'(s) = -\frac{A}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \frac{B}{\rho} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \quad (3-6-16)$$

となる。 $s=0$ として $x(0)$, $x'(0)$ で A , B を表すと

$$x(s) = x(0) \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + x'(0) \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \rho \{1 - \cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\} \frac{\Delta p}{p} \quad (3-6-17)$$

$$x'(s) = x(0) \left(-\frac{1}{\rho}\right) \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + x'(0) \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) + \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \frac{\Delta p}{p} \quad (3-6-18)$$

となる。 $s=L$ とにおいて輸送行列の形に書き替えると

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{in}} + \begin{pmatrix} \rho(1 - \cos\theta) \\ \sin\theta \end{pmatrix} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-19)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}_{\text{out}} = M_x^{\text{sector}} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}_{\text{in}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho\sin\theta & \rho(1-\cos\theta) \\ -\frac{1}{\rho}\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \frac{\Delta p}{p} \end{pmatrix}_{\text{in}}$$

(3-6-20)

とも書ける。なお四極電磁石やドリフト空間の輸送行列も3行3列の形式に書けるが、これらはエネルギー分散に寄与しないことから $m(1,3)$, $m(2,3)$ といった成分は零になる。sector型の電磁石のy方向の輸送行列はドリフト空間と同じであり、式3-3-15を3行3列の形式に書き替えると

$$M_y^{\text{sector}} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-6-21)$$

となる。

次にrectangular型の場合であるが、これはsector型の輸送行列にedge focusの効果としてthin lensの収束作用を表わす行列を掛けることによって得られる。edge focusを表わす行列3-6-16を3行3列の形式で書くと

$$M_{x,y}^{\text{edge}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \pm \frac{1}{\rho}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-6-22)$$

となる。これをsector型の輸送行列の前後に掛けることで

$$M_x^{\text{rect}} = M_x^{\text{edge}} M_x^{\text{sector}} M_x^{\text{edge}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \rho\sin\theta & \rho(1-\cos\theta) \\ 0 & 1 & 2\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-6-23)$$

またy方向については式3-3-16, 18を用いて

$$M_y^{\text{rect}} = M_y^{\text{edge}} M_y^{\text{sector}} M_y^{\text{edge}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\theta\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) & \rho\theta & 0 \\ -\frac{1}{\rho}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(2-\theta\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)) & 1-\theta\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-6-24)$$

となる。

例題3-6-3 エネルギー分散関数の輸送行列を用いた計算法。

エネルギー分散関数を輸送行列を用いて計算してみる。まずリング一周の3行3列の輸送行列を求めておく。これを用いてビームの運動は

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_0 \quad (3-6-25)$$

と書ける。CODの計算のときと同じく $(x, x')_0$ と $(x, x')_1$ を等しいとおけば運動量が Δp だけずれた場合の閉軌道の従う方程式になる。あるいは

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta(\Delta p/p) \\ \eta'(\Delta p/p) \end{pmatrix} \quad (3-6-26)$$

を代入して両辺を $\Delta p/p$ で割れば

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_0 \quad (3-6-27)$$

となる。これを变形すると

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_0 + \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (3-6-28)$$

CODの計算と同様にして

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_0 = (I - M_C)^{-1} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (3-6-29)$$

と輸送行列 M_C の起点での $(\eta, \eta')_0$ が求まる。これを式3-4-27を使って書き替えると

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix}_0 = \frac{1}{2(1-\cos\mu)} \begin{pmatrix} m_{13}+m_{12}m_{23}-m_{22}m_{13} \\ m_{23}+m_{21}m_{13}-m_{11}m_{23} \end{pmatrix} \quad (3-6-30)$$

となる。任意の場所での (η, η') は輸送行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_s = M(s \leftarrow 0) \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix}_0 \quad (3-6-31)$$

とすれば計算できる。

例題3-6-4 Momentum Compaction Factor

式3-6-4を導いてみる。偏向電磁石中でのある場所でエネルギー分散関数とその微分が (η, η') であるとすると、運動量が Δp だけずれた電子の閉軌道の(基準軌道からみた)位置と傾きは

$$x = \eta \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-32)$$

$$x' = \eta' \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-33)$$

になる。図3-6-4のように偏向電磁石中の微小な一部分で考えると、この閉軌道に沿った軌道長 $(\delta s')$ と基準軌道に沿った軌道長 (δs) はそれぞれ

$$\begin{aligned} \delta s' &= \sqrt{\{(\rho+x)\delta\theta\}^2 + \{x'(\rho+x)\delta\theta\}^2} \\ &= (\rho+x)\delta\theta \sqrt{1+x'^2} \cong (\rho+x)\delta\theta \quad (x' \ll 1) \end{aligned} \quad (3-6-5)$$

$$\delta s = \rho\delta\theta \quad (3-6-6)$$

したがってこの微小部分の閉軌道長の変化 (ΔC) への寄与は

$$\delta(\Delta C) = \delta s' - \delta s = x\delta\theta = \frac{x}{\rho}\delta s = \frac{\eta}{\rho}\delta s \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-7)$$

となる。これを積分してやれば偏向電磁石の寄与が求まることになる。また四極電磁石や自由空間軌道長の変化には寄与しない。これは上の計算で軌道の曲率が無限大になると考えれば分かる。従って閉軌道長の変化率として

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{C} \int_0^C \frac{\eta}{\rho} ds \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \equiv \alpha \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-8)$$

となりmomentum compaction factorとして式3-6-4が得られる。

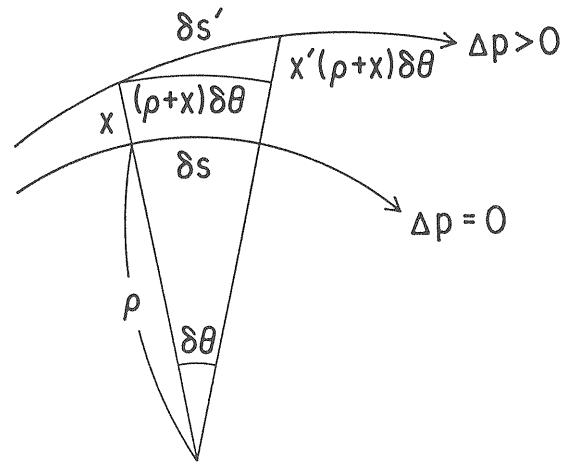


図3-6-4 異なるエネルギーを持った電子の閉軌道長の違い。

例題3-6-5 クロマティシティ

四極電磁石のエネルギーのずれに対する収束力の変化を磁場勾配誤差として扱いクロマティシティの一般的な式を求めてみる。

運動方程式3-2-22に戻って考えてみる。式3-2-22において前の例題と同様にして運動量のずれの効果を取り入れると(式3-6-8参照)

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = - \frac{\pm B'}{[B\rho](1+\frac{\Delta p}{p})} z \cong - \frac{\pm B'}{[B\rho]} \left[1 - \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \right] z \quad (3-6-9)$$

となり、エネルギーのずれ $\Delta p/p$ に対して四極電磁石の収束力が

$$\Delta B' = - \{ \pm B'(s) \} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) \quad (3-6-10)$$

だけ変化することが分かる。ここで \pm は x, y に対応する。四極電磁石の収束力が変化したときに真っ

先に影響を受けるのはベータトロン振動数である。

リングのある場所に $\Delta B'$ という余分な磁場勾配がある短い距離 Δs の長さにわたって局在する場合のベータトロン振動数の変化を輸送行列を使って求めてみる。磁場誤差の場所を起点とする輸送行列 M_0 が磁場誤差によって M に変わったとすると

$$M = M_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k & 1 \end{pmatrix} \quad (3-6-11)$$

ここで

$$\Delta k = \frac{\Delta B' \Delta s}{[B\rho]} \quad (3-6-12)$$

とおき、磁場誤差をthin lens近似している(例題3-2-3参照)。式3-4-27を用いて両辺を書き下しトレースを比較すると

$$\cos(2\pi v) = \cos(2\pi v_0) - \frac{1}{2} \beta \Delta k \sin(2\pi v_0) \quad (3-6-13)$$

ここで $v = v_0 + \Delta v$ ($\Delta v \ll 1$)とおいて高次の項を無視すると

$$\Delta v = \frac{\beta}{4\pi} \Delta k \quad (3-6-14)$$

が得られる。磁場誤差がリングの中に分布している一般の場合には

$$\Delta v_{x,y} = \frac{1}{4\pi} \int \beta_{x,y}(s) \frac{\pm \Delta B'(s)}{[B\rho]} ds \quad (3-6-15)$$

と書ける。ここで \pm はそれぞれ x, y に対応する。

式3-6-15に式3-6-10を代入すると

$$\Delta v_{x,y} = -\frac{1}{4\pi} \int \beta_{x,y}(s) \frac{\pm B'(s)}{[B\rho]} \left(\frac{\Delta p}{p} \right) ds \quad (3-6-16)$$

従ってクロマティシティは

$$\xi_{x,y} = -\frac{1}{4\pi} \int \beta_{x,y}(s) \frac{\pm B'(s)}{[B\rho]} ds \quad (3-6-17)$$

となる。

例題3-6-6 六極電磁石によるクロマティシティ補正

六極電磁石中の磁場は

$$(B_x, B_y, B_z) = \left(\frac{1}{2} B'' 2xy, \frac{1}{2} B'' (x^2 - y^2), 0 \right) \quad (3-6-18)$$

となる(例題3-1-5参照)。これを運動方程式3-2-16, 17に代入すると

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{B''}{[B\rho]} (x^2 - y^2) \equiv -\lambda (x^2 - y^2) \quad (3-6-19)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{B''}{[B\rho]} 2xy \equiv \lambda 2xy \quad (3-6-20)$$

が得られる。

今、六極電磁石をエネルギー分散関数が零でない場所に設置したとしよう。エネルギーが $\Delta E/E$ だけずれた粒子の六極電磁石の場所での位置をエネルギー分散による閉軌道のずれとその周りでのベータトロン振動分に分けると

$$x = x_\beta + \eta \left(\frac{\Delta E}{E} \right) \quad (3-6-21)$$

$$y = y_\beta \quad (3-6-22)$$

と書ける。これを運動方程式に代入し $x_\beta, y_\beta, \Delta E/E$ について高次の項を無視すると

$$\frac{d^2 x_\beta}{ds^2} \equiv -2\lambda \eta \left(\frac{\Delta E}{E} \right) x_\beta \quad (3-6-23)$$

$$\frac{d^2 y_\beta}{ds^2} \equiv 2\lambda \eta \left(\frac{\Delta E}{E} \right) y_\beta \quad (3-6-24)$$

が得られる。なおここで六極電磁石中では偏向磁場も線形な収束力もないことから $d^2 \eta / ds^2 = 0$ とした(式3-6-12参照)。

この式から六極電磁石をエネルギー分散が有限の場所へ設置すると $\Delta E/E$ に比例した収束力即ちクロマティシティを新たに発生することがわかる。六極電磁石によって発生するクロマティシティは前の例題と同様に考えれば

$$\xi_{x,y}^{sx} = \frac{1}{4\pi} \int \beta_{x,y}(s) \{ \pm 2\lambda(s) \eta(s) \} ds \quad (3-6-25)$$

となる。適当な強さの六極電磁石をリングにうまく配置してやることにより本来のクロマティシティを打ち消して零にすることができる。

第4章 シンクロトロン振動

4-1. 放射損失

これまでの話では電子のエネルギーは一定としてきた（エネルギー分散やクロマチシティの項ではエネルギーのずれた場合を考えたがその場合でもずれたエネルギーを一定に保ちながら周回しているとした）。実際のリングを周回している電子はシンクロトロン放射という形で次第にエネルギーを失っていく。これを放射損失と呼ぶ。電子が磁場中で単位時間当りに失うエネルギーは

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_e c^3}{(mc^2)^3} E^2 B^2 \quad (4-1-1)$$

で与えられる。ここで

$$p = \frac{E}{c} = eB\rho \quad (4-1-2)$$

を用いると

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_e c}{(mc^2)^3} \frac{E^4}{\rho^2} \quad (4-1-3)$$

またリングを一周する間に失うエネルギーは

$$U_0 = \int_0^{T_{rev}} \left(\frac{dE}{dt} \right) dt = \int_0^c \left(\frac{dE}{dt} \right) \frac{ds}{c} \\ = \frac{2}{3} \frac{r_e}{(mc^2)^3} E^4 \int_0^c \frac{ds}{\rho^2(s)} \quad (4-1-4)$$

となる。特に偏向電磁石による放射損失は、偏向半径が一定であるとする

$$U_0 = \frac{2}{3} \frac{r_e}{(mc^2)^3} E^4 \int_0^c \frac{ds}{\rho_{BM}^2} \\ = \frac{2}{3} \frac{r_e}{(mc^2)^3} E^4 \frac{2\pi\rho_{BM}}{\rho_{BM}^2} = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(mc^2)^3} \frac{E^4}{\rho_{BM}} \quad (4-1-5)$$

となる。ここで偏向電磁石中の軌道長の総和は $2\pi\rho_{BM}$ となることを用いた。実用的な単位では

$$U_0[\text{keV}] = 88.5 \frac{E^4[\text{GeV}]}{\rho_{BM}[\text{m}]} \quad (4-1-6)$$

となる。光源用リングでは偏向電磁石以外に挿入

型光源による放射損失等も考慮する必要がある。

例題4-1-1 PFリングの偏向電磁石による放射損失。

PFリングのビームエネルギーは2.5GeVである。また偏向半径は約8.7mである。従って式4-1-6よりリングを一周する間に

$$U_0 = 88.5 \frac{2.5^4[\text{GeV}]}{8.7[\text{m}]} = 400 [\text{keV}]$$

のエネルギーを失う。これは元々のエネルギーの

$$\frac{U_0}{E_0} = \frac{400 [\text{keV}]}{2.5 [\text{GeV}]} = 0.016[\%]$$

に相当する。

この放射損失を何らかの形で補ってやらないと電子のエネルギーはどんどん下がっていくことになる。エネルギーが下がるとエネルギー分散関数に従いその軌道はリングの内側に向かって収縮していく。いま仮にリングのエネルギー分散関数の最大値が1mであり、また水平方向のビームパイプの内径は一律50mmであったとする。するとエネルギーが5%下がるとビームはビームパイプの内壁に衝突することになる。放射損失でエネルギーが5%下がるのは

$$N[\text{turn}] \equiv \frac{0.05 E_0}{U_0} = \frac{0.05 \times 2.5[\text{GeV}]}{400[\text{keV}]} = 320 [\text{turn}]$$

より320周後である。PFリングの場合リングを一周するのに約600nsecかかる。従って約200μsecで壁に衝突してしまうことになる。

4-2. 高周波加速と位相安定性

シンクロトロン放射で失われたエネルギーは高周波加速空洞によって補われる。高周波加速空洞の内部にはデザイン軌道に平行な向きに振動電場が生成されており（図4-2-1）、電場がちょうど電子を加速するような方向になっているときに空洞を通過した電子はエネルギーを得る。

空洞内部の振動電場による加速電圧を

$$V(t) = V_0 \sin(2\pi f_{RF} t) \quad (4-2-1)$$

とする。電子がリングを一周する間に失うエネルギー(U_0)を補ってもらうためには

$$U_0 = eV(t_s) = eV_0 \sin(2\pi f_{RF} t_s) \quad (4-2-2)$$

を満たすような時刻 t_s に空洞を通過する必要がある (図4-2-2)。ここで

$$q \equiv \frac{eV_0}{U_0} = \frac{1}{\sin(2\pi f_{RF} t_s)} \quad (4-2-3)$$

として q を over voltage factor と呼ぶ。RF加速で放射損失を補うためには $q > 1$ となっている必要があることはいうまでもない。

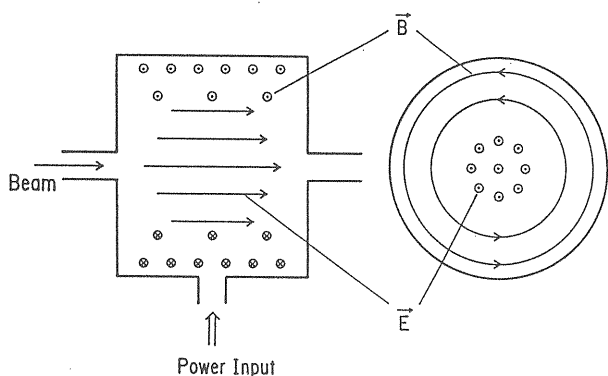


図4-2-1 高周波加速空洞の概念図

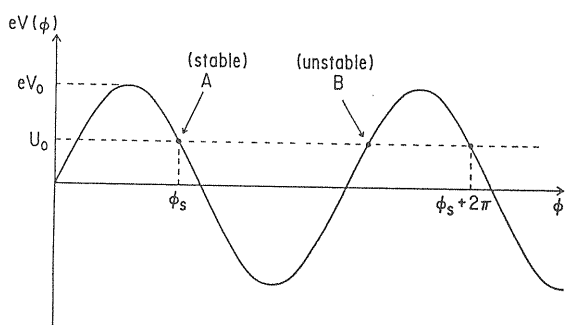


図4-2-2 加速空洞内部の加速電圧。ただし $\phi = 2\pi f_{RF} t$

ある電子が時刻 t_s に空洞を通過したとして、この電子がその後の周回でも式4-2-2の関係を満たすようなタイミングで空洞を通過するためには、振動電場の周波数(f_{RF})が電子がリングを周回する周波数(f_{rev})の整数倍になっていけばよい。即ち

$$f_{RF} = h f_{rev} \quad (h : \text{integer}) \quad (4-2-4)$$

ここで h はハーモニック数と呼ばれる。このようにして式4-2-2を満たすような時刻に空洞を通過した電子はその後エネルギーを一定に保つことができる。このような電子をシンクロナスであるという。

次にシンクロナスでない電子のエネルギーについて考えてみよう。いまある電子が図4-2-2のAのような場所にいるシンクロナスな電子から少しだけ遅れて空洞を通過したとする。この電子が空洞を通過する時刻には加速電圧は少し下がっており、放射損失分を完全には補うことができない。このため電子のエネルギーは少し下がってしまう。3-6節で述べたように、エネルギーの低い電子ほどリングを短い時間で周回する。従ってこの電子は前を行くシンクロナスな電子に追いつき追い越すことになる。シンクロナスな電子の前に出ると、この電子が空洞を通過する際には放射損失分より少しだけ高い加速電圧を受けることになりエネルギーが上がってくる。エネルギーが上がるとリングの周回に長く時間がかかり、シンクロナスな電子に追いつかれ追い越されることになる。このようにして、図4-2-2のA点のような場所の近傍にいる電子はシンクロナスな電子の前後に振動しながら周回することになる。また、そのエネルギーはある中心値の近傍で振動しながら安定に保たれる。これを位相安定性と呼ぶ。またこの振動のことをシンクロトロン振動と呼ぶ。

ところで図4-2-2のBのような場所も式4-2-2を満たすが位相安定性はない。例えばB点から少しだけ遅れて空洞を通過する電子は少しだけ高い電圧を受けエネルギーが上がるためますます遅れてしまう。従って電子が安定に加速されるためには図4-2-2のAのようなタイミングないしはその近傍で空洞を通過することが必要である。リングにはA点のような場所(タイミング)はハーモニック数分だけある。

例題4-2-1 高周波加速空洞

高周波加速空洞の概念図は図4-2-1に示してある。

以下ビームの進行方向をz軸とする円筒座標系（磁場のときに用いた図3-1-9と同様なものである）を用いて電磁場の様子を見てみよう。空洞内に存在できる電磁波のうち、加速空洞で用いるのは $E_z \neq 0$ 、 $H_z = 0$ のものでありTM波と呼ばれる。空洞内部の電場はMaxwellの方程式より

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = 0 \quad (4-2-5)$$

という波動方程式に従う。ここで電場の時間変動を

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad (4-2-6)$$

とおくと、

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E}_0 = 0 \quad (4-2-7)$$

となる。空洞が完全導体であるとするとき境界条件は

$$E_z(r=R) = 0 \quad (4-2-8)$$

$$E_{r,\theta}(z=0, L) = 0 \quad (4-2-9)$$

となる。式4-2-7を E_z について書き下すと

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0 \quad (4-2-10)$$

となる。境界条件式4-2-8, 9を満たすこの式の解は一般に

$$(E_z)_{mnl} = A_{mnl} J_m \left(\frac{j_{mn}}{R} r \right) e^{im\theta} \cos \left(\frac{\pi l}{L} z \right) \quad (4-2-11)$$

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \left(\frac{j_{mn}}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi l}{L} \right)^2 \quad (4-2-12)$$

$$m=0, 1, 2, \dots, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad l=0, 1, 2, \dots,$$

という形に書け、それぞれ TM_{mnl} モードと呼ばれる。ここで J_m は m 次の第1種Bessel関数。また j_{mn} は

$$J_m(j_{mn}) = 0 \quad (4-2-13)$$

を満たす J_m の n 番目の零点である。

加速空洞で用いられるのは TM_{010} モードであり

その電磁場の様子は図4-2-1のようになる。このモードの共振周波数は式4-2-12より空洞の半径と

$$\frac{\omega_{RF}}{c} = \frac{j_{01}}{R} = \frac{2.405}{R} \quad (4-2-14)$$

の関係を持つ。

PFリングのRF空洞の半径は約23cmである。従って共振周波数は

$$f_{RF} = \frac{\omega_{RF}}{2\pi} = \frac{c j_{01}}{2\pi R} = \frac{3 \times 10^8 \times 2.405}{2\pi \times 0.23} \cong 500 \text{ [MHz]}$$

となる。

ところで空洞の長さ(L)があまりに長いと電子が空洞を通過している間に電場の向きが変わってしまう可能性がある。即ち、空洞に入った最初のころはうまく加速されていても出ていく頃には電場の向きが反転して逆に減速されてしまうなどということが起きる。電子が空洞を通過する時間の間に電場の向きが変わってしまわないという条件は

$$\omega_{RF} \Delta t \cong \omega_{RF} \frac{L}{c} \leq \pi \quad (4-2-15)$$

或いは、空洞の共振波長 ($\lambda_{RF} = 2\pi c / \omega_{RF}$) を用いると

$$L \leq \frac{\lambda_{RF}}{2} \quad (4-2-16)$$

となる。PFリングの空洞の共振波長は

$$\lambda_{RF} = \frac{c}{f_{RF}} = \frac{3 \times 10^{10} \text{ [cm]}}{500 \text{ [MHz]}} = 60 \text{ cm}$$

従って空洞の長さは30 cm以下でなくてはならない。実際は約20 cmになっている。

PFリングの周長は187 mである。ほぼ光速で周回する陽電子は

$$t_{rev} = \frac{C}{v} \cong \frac{C}{c} = \frac{187 \text{ [m]}}{3 \times 10^8 \text{ [m/sec]}} = 624 \text{ [nsec]}$$

でリングを一周する。周回周波数（1秒間に何回リングを回るか）は

$$f_{rev} = \frac{1}{t_{rev}} = 1.603 \text{ [MHz]}$$

となる。PFリングの加速空洞の周波数は約500 MHzであるから

$$\frac{f_{RF}}{f_{rev}} = \frac{500 \text{ [MHz]}}{1.603 \text{ [MHz]}} = 311.9$$

となる。ハーモニックナンバーを312にすることになるとRF周波数は正確には

$$f_{RF} = hf_{rev} = 312 \times 1.603 \text{ [MHz]} = 500.3 \text{ MHz}$$

でなくてはならない。

ところでもしRF周波数が上で求めた値から少しだけずれてしまったら何が起きるであろうか。ある電子がシンクロナスであるためにはRF電場がちょうどハーモニック数だけ振動する時間の間にリングを一周しなくてはならない。即ち式4-2-4の関係が成り立っている必要がある。従ってRF周波数が $\Delta f_{RF}/f_{RF}$ だけずれた場合には周回周波数が

$$\frac{\Delta f_{rev}}{f_{rev}} = \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}}$$

だけ大きい電子がシンクロナスになる。ところで式3-6-7をみれば周回周波数と電子のエネルギーには

$$\frac{\Delta f_{rev}}{f_{rev}} = -\frac{\Delta T_{rev}}{T_{rev}} = -\frac{\Delta C}{C} = -\alpha \left(\frac{\Delta E}{E} \right)$$

という関係がある。従ってRF周波数がずれた場合には

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}}$$

だけエネルギーのずれた電子がシンクロナスになる。要するにRF周波数が高くなるとリングを短い時間でまわる電子即ちエネルギーの低い電子がシンクロナスになり、また、低くなるとその逆になるということである。シンクロナスな電子のエネルギーというのはビームの中心エネルギーであるのでRF周波数が変わるとビームのエネルギーが変わることになる。これにともなって水平方向の閉軌道もエネルギー分散関数に従って変化することになる。

4-3. シンクロトロン振動の方程式

前節で定性的に述べたシンクロトロン振動を記述する方程式を導いてみよう。

エネルギー分散の項で述べたように、エネルギーが ΔE だけずれた電子はシンクロナスな電子に比

べて、一周当り、

$$\Delta t = T_{rev} \alpha \left(\frac{\Delta E}{E} \right) \quad (4-3-1)$$

だけ遅れてしまう。従って単位時間あたりには

$$\frac{d\Delta t}{dt} \equiv \frac{\Delta t}{T_{rev}} = \alpha \left(\frac{\Delta E}{E} \right) \quad (4-3-2)$$

ずつ遅れていくことになる。ここで Δt は周回時間に比べてゆっくり変化するとした。シンクロナスな電子に対して Δt だけ遅れた電子の一周あたりのエネルギー変化は空洞で受け取るエネルギーと放射損失の差であるから

$$\Delta E = eV(t_s + \Delta t) - U_0 \quad (4-3-3)$$

従って単位時間当りのエネルギー変化は

$$\frac{d\Delta E}{dt} \equiv \frac{\Delta E}{T_{rev}} = \frac{eV(t_s + \Delta t) - U_0}{T_{rev}} \quad (4-3-4)$$

となる。4-3-2式と4-3-4式を用いると

$$\frac{d^2 \Delta t}{dt^2} \equiv \frac{\alpha \{eV(t_s + \Delta t) - U_0\}}{T_{rev} E_0} \quad (4-3-5)$$

となる。ここで式4-2-2を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta t}{dt^2} &= \frac{\alpha e \{V(t_s + \Delta t) - V(t_s)\}}{T_0 E_0} \\ &\equiv \frac{\alpha e}{T_{rev} E_0} \frac{dV(t_s)}{dt} \cdot \Delta t \equiv -\Omega^2 \Delta t \end{aligned} \quad (4-3-6)$$

ただしここで Δt の変化量はRF周期 ($1/2\pi f_{RF}$) に比べて小さいとした。従って、 $e dV/dt(t_s)$ が負のとき (即ち図4-2-2のA点のようになっているとき) シンクロトロン振動は安定な振動となり、その周波数は

$$f_s = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\alpha e}{T_{rev} E_0} (-) \frac{dV}{dt}(t_s)} \quad (4-3-7)$$

で与えられる。また、リングを一周する間に何回振動するかは

$$v_s = \frac{f_s}{f_{rev}} \quad (4-3-8)$$

で与えられシンクロトロン振動数と呼ばれる。これは

$$v_s = \sqrt{\frac{\alpha h U_0 (q^2 - 1)^{1/2}}{2\pi E_0}} \quad (4-3-9)$$

と書ける。ここで q はover voltage factorである。

例題4-3-1 PFリングのシンクロトロン振動数

PFリングの放射損失 U_0 は400keVである。通常運転での加速電圧 V_0 は1.7MV、従って eV_0 は1.7 MeV。これよりover voltage factorは

$$q = \frac{1.7 [\text{MeV}]}{400 [\text{keV}]} = 4.3$$

となる。またエネルギー2.5GeV、momentum compaction factor 0.016、ハーモニク数312を用いるとシンクロトロン振動数は

$$v_s = \sqrt{\frac{0.016 \times 312 \times 400 [\text{keV}] (4.3^2 - 1)^{1/2}}{2\pi \times 2.5 [\text{GeV}]} = 0.023$$

となる。ちなみにベータトロン振動数は8.4と3.3 (水平/垂直) である。この例に限らず、シンクロトロン振動というのは一般にベータトロン振動に比べて非常にゆっくりしている。

4-4. RF bucket

前節では微小振動即ち ($\Delta t \ll 1/2\pi f_{RF}$) の場合を考えた。しかしシンクロトロン振動の振幅 (Δt や $\Delta E/E$) が大きくなると振動は調和振動ではなくなり、ある限度を越えると振動は不安定になる。シンクロトロン振動が安定になる (Δt 、 $\Delta E/E$) の位相空間の領域をRF bucketと呼ぶ。また、 $\Delta E/E$ の最大値をRF bucket heightと呼ぶ。この節ではこのような大振幅のシンクロトロン振動の様子を調べてみよう。

記述を簡単にするために

$$\omega_{RF} \equiv 2\pi f_{RF} \quad (4-4-1)$$

$$\phi \equiv \omega_{RF} t = \omega_{RF} (t_s + \Delta t) \quad (4-4-2)$$

とおく。ここで ω_{RF} はRF加速の角周波数、 ϕ は電子が空洞を通過する際の加速電場の位相角になる。

RF加速電圧は

$$V(\phi) \equiv V_0 \sin \phi \quad (4-4-3)$$

となり、特にシンクロナスな電子については

$$U_0 = V_0 \sin \phi_s \quad (4-4-4)$$

となる。この記述法を用いて式4-3-5を書き替えると

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dt^2} &= \omega_{RF}^2 \frac{\alpha e V_0}{T_{rev} E_0} (\sin \phi - \sin \phi_s) \\ &= \omega_{RF}^2 \frac{\alpha e V_0}{2\pi h E_0} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{aligned} \quad (4-4-5)$$

となる。ここで、 $\phi = \phi_s + \Delta \phi$ において微小振動の場合 ($\Delta \phi \ll 2\pi$) を考えると

$$\frac{d^2 \Delta \phi}{dt^2} = \omega_{RF}^2 \frac{\alpha e V_0}{2\pi h E_0} \cos \phi_s \Delta \phi \equiv -\Omega_s^2 \Delta \phi \quad (4-4-6)$$

となり、これは式4-3-6を位相角を用いて書き直したものである。この解は

$$\Delta \phi = \Delta \phi_{\max} \sin (\Omega_s t + \Omega_0) \quad (4-4-7)$$

あるいは

$$\Delta t = \frac{\Delta \phi_0}{\omega_{RF}} \sin (\Omega_s t + \Omega_0) \equiv \Delta t_{\max} \sin (\Omega_s t + \Omega_0) \quad (4-4-8)$$

となる。エネルギーは式4-3-2より

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\Delta t}{dt} = \frac{1}{\alpha \omega_{RF}} \frac{d\Delta \phi}{dt} = \frac{\Delta \phi_{\max} \Omega_s}{\alpha \omega_{RF}} \cos (\Omega_s t + \Omega_0) \\ &\equiv \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{\max} \cos (\Omega_s t + \Omega_0) \end{aligned} \quad (4-4-9)$$

となり、やはり角周波数 Ω_s で振動する。

大振幅の場合には式4-4-5を近似無しで解く必要がある。この式は、 ϕ を位置を表わす変数と考え、力(右辺)が位置のみに依存する力学系の運動方程式と同じである。両辺に $(d\phi/dt)$ を掛けて積分すると「エネルギー保存」の式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \omega_{RF}^2 \frac{\alpha e V_0}{2\pi h E_0} \{ \cos \phi - \cos \phi_0 + (\phi - \phi_0) \sin \phi_0 \} \\ \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + U(\phi) = \Phi_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (4-4-10)$$

ここで Φ_0 は系の全エネルギーであり保存量である。

これはベータトロン振動の不変量 $A_{\beta z}^2$ に相当するも

のと考えてよい。左辺第2項は「ポテンシャルエネルギー」であり図4-4-1のようになる。 $(\Delta E/E, \phi)$ の位相空間での電子の運動の様子も合わせて示してある。従って Φ_0 が小さいときには、運動はある一定の範囲での安定な振動になり位相空間上では楕円軌道を描く（これは式4-4-7,9を眺めればわかる）。 Φ_0 がある限度を越えると運動はもはや束縛されてはおらず不安定になる。運動が安定になる最大の Φ_0 を求めてみる。図4-4-1から

$$\Phi_0^{\text{lim}} = U(\phi_{\text{saddle}}) \quad (4-4-11)$$

ここで ϕ_{saddle} は

$$\frac{dU(\phi_{\text{saddle}})}{d\phi} = \omega_{\text{RF}}^2 \frac{\alpha e V_0}{2\pi h E_0} (-\sin\phi_{\text{saddle}} + \sin\phi_0) = 0 \quad (4-4-12)$$

の解で

$$\phi_{\text{saddle}} = \pi - \phi_0 \quad (4-4-13)$$

である。

式4-4-10を式4-4-9を用いて書き替えると

$$\frac{\alpha^2 \omega_{\text{RF}}^2}{2} \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 + U(\phi) = \Phi_0 \quad (4-4-14)$$

これより、シンクロトロン振動が安定になる $\Delta E/E$ の最大値 (RF bucket height) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{\text{lim}}^2 &= \Phi_0^{\text{lim}} \frac{2}{\alpha^2 \omega_{\text{RF}}^2} \\ &= \frac{eV_0}{\pi \alpha h E_0} \{ \cos(\pi - \phi_s) - \sin\phi_s + (\pi - 2\phi_s)\sin\phi_s \} \\ &= \frac{U_0}{\pi \alpha h E_0} 2 \left\{ \sqrt{q^2 - 1} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{q}\right) \right\} \equiv \frac{U_0}{\pi \alpha h E_0} F(q) \end{aligned} \quad (4-4-15)$$

より

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{U_0}{\pi \alpha h E_0} F(q)} \quad (4-4-16)$$

となる。ここで式4-2-3を用いた。F(q)はEnergy aperture functionと呼ばれる。

例題4-4-1 PFリングのRF bucket height

PFリングの通常運転での加速電圧 V_0 は1.7MVであり、また放射損失は400keVである。over voltage factorは先に求めたように4.3になる。このときenergy aperture functionは

$$F(q) = 2 \times \left\{ \sqrt{4.3^2 - 1} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{4.3}\right) \right\} = 5.6$$

従ってRF bucket heightは

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{\text{lim}} &= \sqrt{\frac{400 [\text{keV}]}{\pi \times 0.016 \times 312 \times 2.5 [\text{GeV}]} \times 5.6} \\ &= 7.6 \times 10^{-3} = 0.76 [\%] \end{aligned}$$

となる。この値は後で述べるビームのエネルギー拡がりの約10倍になっている。

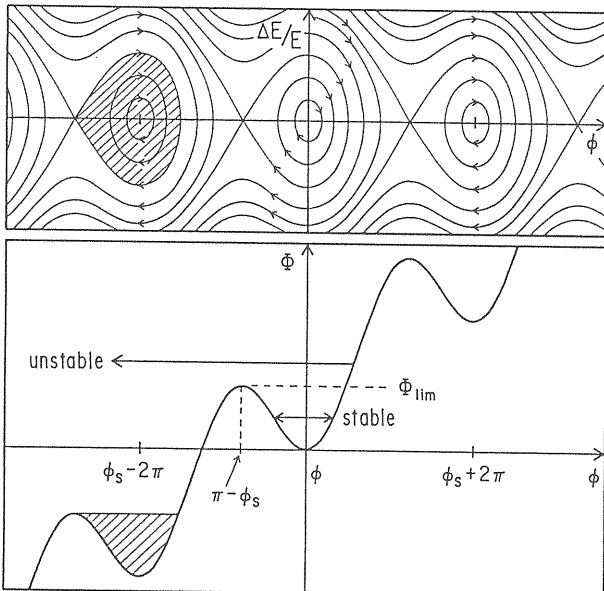


図4-4-1 $(\Delta E/E, \phi)$ の位相空間での電子の軌跡（上段）。図の右側が「遅れている」即ち後ろになる。RF bucketの一つを斜線で示す。

第5章 放射減衰と放射励起

5-1. 放射減衰

ベータトロン振動やシンクロトロン振動はシンクロトロン放射によりエネルギーを失い、高周波加速によって加速されるという過程を繰り返すうちに次第に小さくなっていく。言い換えるとこれらの振動の保存量（式3-4-12の $A_{\beta z}^2$ や式4-4-10の Φ ）が時間とともに次第に小さくなっていく。これを放射減衰と呼ぶ。ここでは放射減衰がなぜ起こるかを説明し減衰の時間スケールを導いてみる。

ベータトロン振動の放射減衰を説明するために、電子が光を出すときと高周波加速空洞で加速されるとき電子の位置と傾き (z, z') の変化を考えてみる（ここでも z は x, y のいずれかを表すものとする）。まず光を出すときは位置の変化はなく、また、図5-1-1を見れば傾きも

$$z' = \frac{pz_0}{p_0} \rightarrow \frac{pz_1}{p_1} = \frac{pz_0 - \Delta pz}{p_0 - \Delta p} = \frac{pz_0}{p_0} \quad (5-1-1)$$

となり変化しないことがわかる。従って光の放出によって $A_{\beta z}^2$ は変化しない。一方加速空洞で加速されるときは、位置の変化は無いが、傾きは図5-1-2より

$$z'_{in} = \frac{pz_1}{p_1} \rightarrow \frac{pz_2}{p_2} = \frac{pz_1}{p_1 + \Delta p} \cong \frac{pz_1}{p_1} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_1}\right) = z'_{in} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_1}\right) \quad (5-1-2)$$

のように減少する。従って A_{β}^2 は

$$\begin{aligned} A_{\beta zin}^2 &= \gamma z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 \\ \rightarrow A_{\beta zout}^2 &= \gamma z^2 + 2\alpha z \left\{ z' \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right) \right\} + \beta z'^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right)^2 \\ &= A_{\beta zin}^2 - 2\alpha z z' \frac{\Delta p}{p} - 2\beta z'^2 \frac{\Delta p}{p} \\ &= A_{\beta zin}^2 \left(1 - \frac{\Delta p}{p}\right) \end{aligned} \quad (5-1-3)$$

のように減少する。ここで $z z'$ と z'^2 については様々な初期値について平均するとそれぞれ $-A_{\beta}^2 \alpha/2$ 、 $A_{\beta}^2 \gamma/2$ となることを用いた（ベータトロン振動の解3-4-3、3-4-7を用いて初期位相について平均をとれば即座にでてくる）。ここで加速空洞を通過する際には放射損失分だけのエネルギーを受け取るこ

とを考慮して

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{U_0}{E} \quad (5-1-4)$$

とすれば、リング1周当りの A_{β}^2 の変化は

$$\Delta A_{\beta z}^2 = -A_{\beta z}^2 \frac{U_0}{E_0} \quad (5-1-5)$$

となる。これより単位時間当りの変化は

$$\frac{dA_{\beta z}^2}{dt} \cong \frac{\Delta A_{\beta z}^2}{T_{rev}} = -A_{\beta z}^2 \frac{U_0}{E_0 T_{rev}} \cong -\frac{2A_{\beta z}^2}{\tau_{\beta}} \quad (5-1-6)$$

となる。ここで

$$\tau_{\beta} = \frac{2E_0 T_{rev}}{U_0} \quad (5-1-7)$$

とにおいて、これをベータトロン振動の減衰時間と呼ぶ。なおもう少し厳密な計算をすれば

$$\tau_{\beta z} = \frac{2E_0 T_{rev}}{J_{\beta z} U_0} \quad (5-1-8)$$

という形になる。この $J_{\beta z}$ はベータトロン振動のDamping Partition Numberと呼ばれるが通常は $J_{\beta z} \sim 1$ である。

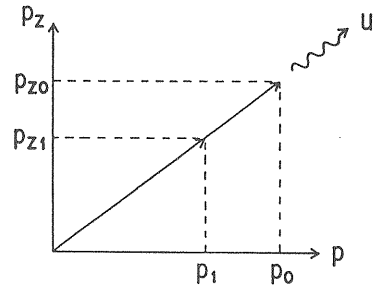


図5-1-1 光の放出による電子の運動量の変化。

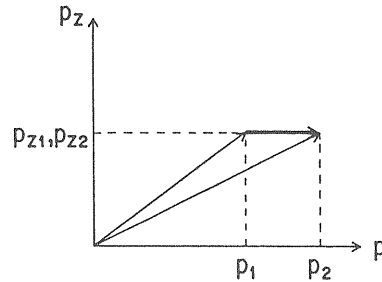


図5-1-2 高周波加速による電子の運動量の変化。

ベータトロン振動と同様にシンクロトロン振動も次第に減衰していく。この効果は、電子のエネルギーが異なると放射損失が異なっているということから説明できる。

シンクロトロン振動の方程式4-3-1を導いたときには、シンクロナスな電子もそうでないものもリングを一周する間に失うエネルギーは同じ値 (U_0) であるとした。しかし実際には4-1-1式からわかるように、放射損失はエネルギーの二乗に比例する。即ちエネルギーの大きな電子ほど放射損失も大きい。そしてこのことがシンクロトロン振動に対して減衰力のように働く。

このことを考慮してシンクロトロン振動の式を書きかえてみよう。まず、4-3-5式において U_0 を

$$U(E_0 + \Delta E) \equiv U(E_0) \cdot \left(1 + 2\frac{\Delta E}{E_0}\right) \equiv U_0 \cdot \left(1 + 2\frac{\Delta E}{E_0}\right) \quad (5-1-9)$$

で置き換えて

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta t}{dt^2} &= \frac{\alpha \left[eV(t_0 + \Delta t) - U_0 \left\{ 1 + 2\left(\frac{\Delta E}{E_0}\right) \right\} \right]}{T_0 E_0} \\ &= \frac{\alpha e \{ V(t_0 + \Delta t) - V(t_0) \}}{T_0 E_0} - \frac{2\alpha U_0 \left(\frac{\Delta E}{E_0}\right)}{T_0 E_0} \quad (5-1-10) \\ &= \frac{\alpha e}{T_0 E_0} \frac{dV(t_0)}{dt} \Delta t - \frac{2U_0}{T_0 E_0} \frac{d\Delta t}{dt} \end{aligned}$$

これを Δt の代わりに $\Delta\phi$ (式4-4-2参照) を用いて書きかえておこう。結果は

$$\frac{d^2 \Delta\phi}{dt^2} + \frac{2}{\tau_E} \frac{d\Delta\phi}{dt} + \Omega_s^2 \Delta\phi = 0 \quad (5-1-11)$$

となり減衰力の働く振動子の式になる。ここで τ_E は

$$\tau_E = \frac{E_0 T_0}{U_0} \quad (5-1-12)$$

でありこれがシンクロトロン振動の減衰時間である。ベータトロン振動の場合と同じく、もう少し厳密な計算をすると

$$\tau_E = \frac{2E_0 T_0}{J_E U_0} \quad (5-1-13)$$

となる。ただし通常 $J_E \sim 2$ である。

不変量 Φ の変化を式5-1-6のように書いておこう。式4-4-10より

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + U(\phi) \\ &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \Omega_s^2 \Delta\phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \alpha^2 \omega_{RF}^2 \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2 + \frac{1}{2} \Omega_s^2 \Delta\phi^2 \end{aligned} \quad (5-1-14)$$

あるいは規格を変えて

$$A_E^2 \equiv \frac{2\Phi}{\alpha^2 \omega_{RF}^2} = \left(\frac{\Delta E}{E} \right)^2 + \frac{\Omega_s^2}{\alpha^2 \omega_{RF}^2} \Delta\phi^2 \quad (5-1-15)$$

をシンクロトロン振動の保存量と考えてもよいであろう。式5-1-11の解は

$$\Delta\phi = \Delta\phi_0 e^{-t/\tau_E} \cos(\Omega_s t + \psi_0) \quad (5-1-16)$$

とかけることから ΔE も $\exp(-t/\tau_E)$ のように減衰していくことになる。これを考慮すれば A_E^2 の変化を

$$\frac{dA_E^2}{dt} = -\frac{2A_E^2}{\tau_E} \quad (5-1-17)$$

という形に書ける。

例題5-1-1 PFリングの減衰時間

PFリングのエネルギー (E_0) は2.5 GeV、またリング一周当りの放射損失 (U_0) は例題4-1-1で求めたように400 keVである。周回時間は例題4-2-1で見たように620 nsec。これらを用いると減衰時間として

$$\tau_{\beta z} = \frac{2 \times 2.5 [\text{GeV}] \times 620 [\text{nsec}]}{400 [\text{keV}]} = 7.8 [\text{msec}]$$

が得られる。ちなみにこの減衰時間の間に電子はリングを1万周以上する。

一方、式5-1-7と5-1-12を見ればシンクロトロン振動の減衰時間はベータトロン振動の1/2になっていることがわかる。従って減衰時間は

$$\tau_E = \frac{1}{2} \tau_{\beta z} = \frac{7.8 [\text{msec}]}{2} = 3.9 [\text{msec}]$$

となる。

5-2. 放射励起

ベータトロン振動やシンクロトロン振動の不変量は放射減衰により時間と共にどんどん小さくなっていくことがわかった。しかしこれとは逆にこれらの振動を励起する現象も存在する。これは放射光の放出が光子という不連続な形でおきる確率的な過程であることに起因するもので放射励起と呼ばれる。証明は省略するが、この放射励起と放射減衰が釣り合うことによりベータトロン振動やシンクロトロン振動の振幅はある幅を持ってガウス分布することになる。この結果電子は空間的には基準軌道やバンチ中心の周りで、またそのエネルギーは中心値の周りでガウス分布することになる。ここでは放射励起がどのようにして起きるかを説明しこれらの分布の幅を与える式を導いてみる。

まずベータトロン振動の放射励起がどのようにして起きるか見てみよう。今閉軌道上を運動している電子がエネルギー分散関数が零でない場所でエネルギー u の光子を放出したとする。このとき電子の位置も角度も変化しない。しかし電子のエネルギーが変わることで閉軌道の方が変わってしまう(図5-2-1)。即ちこれまで乗っかっていた閉軌道はもはやこの電子にとって平衡軌道ではなくなり、この電子はエネルギーが u だけ小さい電子用の閉軌道の周りを振動し始める。このようにしてエネルギー分散関数が零でない場所で光子を放出するとベータトロン振動が励起されることになる。

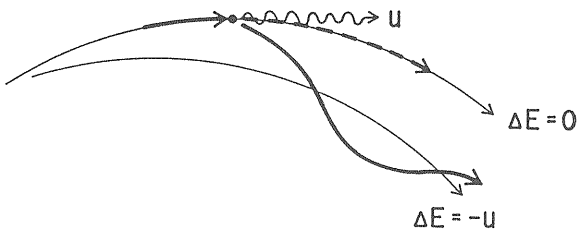


図5-2-1 光の放出によるベータトロン振動の励起。光の放出後はエネルギーが $-u$ だけずれた閉軌道の周りを振動し始める。

電子の位置と傾きはエネルギー分散による閉軌道分(x_β, x'_β)とその周りでのベータトロン振動分(x_β, x'_β)にわけて

$$x = x_\beta + x_e \quad (5-2-1)$$

$$x' = x'_\beta + x'_e \quad (5-2-2)$$

と書ける。光子の放出の際には位置、角度とも変化しないことから

$$\delta x = \delta x_\beta + \delta x_e = \delta x_\beta + \eta \left(\frac{-u}{E} \right) = 0 \quad (5-2-3)$$

$$\delta x' = \delta x'_\beta + \delta x'_e = \delta x'_\beta + \eta' \left(\frac{-u}{E} \right) = 0 \quad (5-2-4)$$

従って、光子放出後のベータトロン振動の初期値は

$$\delta x_\beta = \eta \left(\frac{u}{E} \right) \quad (5-2-5)$$

$$\delta x'_\beta = \eta' \left(\frac{u}{E} \right) \quad (5-2-6)$$

となる。これを式3-4-12に代入すると $A_{\beta x}^2$ の増加量として

$$\Delta A_{\beta x}^2 = (\eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2) \left(\frac{u}{E} \right)^2 \equiv H \left(\frac{u}{E} \right)^2 \quad (5-2-7)$$

が得られる。単位時間当りではリング一周の平均をとって

$$\frac{d\langle A_{\beta x}^2 \rangle}{dt} \equiv \frac{\langle \Delta A_{\beta x}^2 \rangle}{T_{\text{rev}}} = \frac{1}{T_{\text{rev}}} \int_0^C \frac{\langle Nu^2 \rangle}{E^2} H ds \equiv Q_\beta \quad (5-2-8)$$

となる。ここで $\langle Nu^2 \rangle$ は光子のスペクトル分布に関する平均を意味する。なおここで光子の放出が確率過程であるために $A_{\beta x}^2$ は平均値 $\langle A_{\beta x}^2 \rangle$ になる。これを式5-1-6と組み合わせると

$$\frac{d\langle A_{\beta x}^2 \rangle}{dt} = -\frac{2\langle A_{\beta x}^2 \rangle}{\tau_\beta} + Q_\beta \quad (5-2-9)$$

となり定常状態では

$$\langle A_{\beta x}^2 \rangle = \frac{\tau_{\beta x}}{2} Q_\beta \quad (5-2-10)$$

となる。この不変量を持ったベータトロン振動は

$$x_\beta = \sqrt{\langle A_{\beta x}^2 \rangle} \beta_x \cos \psi_x \quad (5-2-11)$$

と書けるが、この振幅の二乗の平均値を β で割っ

たもの、即ち

$$\varepsilon_x = \frac{\langle x\beta \rangle}{\beta_x} = \langle A_{\beta_x}^2 \rangle \langle \cos^2 \psi_x \rangle = \frac{\tau_{\beta_x} Q_{\beta}}{4} \quad (5-2-12)$$

をエミッタンスと定義する。これを用いるとビームサイズは

$$\sqrt{\langle x\beta \rangle} = \sqrt{\varepsilon_x \beta_x} \quad (5-2-13)$$

と計算できることになる。

それでは次にシンクロトロン振動の放射励起を見てみよう。エネルギー u の光子の放出によって電子のエネルギーは突然 u だけ変化し、その結果シンクロトロン振動を始めることになる。エネルギー u の光子の放出に対しては ΔE が $-u$ へ、また $\Delta\phi$ は変化しないことから式3-1-5で定義した A_E^2 の変化量として

$$\Delta A_E^2 = \left(\frac{u}{E}\right)^2 \quad (5-2-14)$$

また、単位時間当りの変化量としては

$$\frac{d\langle A_E^2 \rangle}{dt} \equiv \frac{1}{T_{\text{rev}}} \int_0^c \frac{\langle Nu^2 \rangle ds}{E^2 c} \equiv Q_E \quad (5-2-15)$$

となる。これより $\langle A_E^2 \rangle$ の時間変化の式として

$$\frac{d\langle A_E^2 \rangle}{dt} \equiv -\frac{2\langle A_E^2 \rangle}{\tau_E} + Q_E \quad (5-2-16)$$

が得られる。定常状態では

$$\langle A_E^2 \rangle = \frac{\tau_E Q_E}{2} \quad (5-2-17)$$

となる。これを用いるとエネルギー振動は

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right) = \sqrt{\langle A_E^2 \rangle} \cos \Omega_s t \quad (5-2-18)$$

となる。これよりエネルギーの拡がり（の二乗）は

$$\left(\frac{\sigma_E}{E}\right)^2 \equiv \left\langle \left(\frac{\Delta E}{E}\right)^2 \right\rangle = \langle A_E^2 \rangle \langle \cos^2(\Omega_s t) \rangle = \frac{\langle A_E^2 \rangle}{2} = \frac{\tau_E Q_E}{4} \quad (5-2-19)$$

で与えられる。また、位相差 $\Delta\phi$ の拡がりも同様にして

$$\langle \Delta\phi^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{\alpha \omega_{\text{RF}}}{\Omega_s}\right)^2 A_{\text{EC}}^2 \cos^2(\Omega_s t) \right\rangle = \left(\frac{\alpha \omega_{\text{RF}}}{\Omega_s}\right)^2 \left(\frac{\sigma_E}{E}\right)^2 \quad (5-2-20)$$

と求められる。この位相差の分布は電子の進行方向（縦方向）の空間分布に対応している。バンチ中心からの空間距離を Δz とすると

$$\Delta z = \frac{\Delta t}{c} = \frac{\Delta\phi}{c\omega_{\text{RF}}} \quad (5-2-21)$$

となっていることは式4-4-2等を眺めればわかる。従って電子の縦方向の拡がり即ちバンチの長さは

$$\sigma_z \equiv \sqrt{\langle \Delta z^2 \rangle} = \frac{\alpha}{c\Omega_s} \left(\frac{\sigma_E}{E}\right) \quad (5-2-22)$$

で与えられる。

ここで電子の横方向の分布に対するエネルギー分散関数の効果について述べておこう。先ほど基準軌道の周りでの空間分布の幅を求めたときにはベータトロン振動のみ考慮したが、ビームにエネルギー拡がりがある場合にはエネルギー分散関数による横方向の拡がりも考慮する必要がある。エネルギーのずれがある場合の電子の軌道はベータトロン振動とエネルギー分散による閉軌道のずれの和として

$$x = x_{\beta} + x_E = x_{\beta} + \eta \left(\frac{\Delta E}{E}\right) = A_{\beta_x} \sqrt{\beta_x} \cos \psi_x + \eta A_E \cos \Omega_s t \quad (5-2-23)$$

と書ける。この場合の空間分布の幅を求めると

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x^2 \rangle} &= \sqrt{A_{\beta_x}^2 \beta_x \langle \cos^2 \psi_x \rangle + \eta^2 A_E^2 \langle \cos^2 \Omega_s t \rangle} \\ &= \sqrt{\varepsilon_x \beta_x + \eta^2 \left(\frac{\sigma_E}{E}\right)^2} \end{aligned} \quad (5-2-24)$$

となる。ここでベータトロン振動とシンクロトロン振動には相関がないとした。

最後に垂直方向のビームサイズについて述べておこう。ベータトロン振動の放射励起はエネルギー分散のある場所で光子の放出があることを述べたが通常ストレージリングでは垂直方向のエネルギー分散は設計段階では零である。従って垂直方向には放射励起は起きず放射減衰によってエミッタンスは限りなく小さくなることになる。ただし実際のリングでは垂直方向のエネルギー分散は完全に零ではない。また水平方向と垂直方向のベータトロン振動の結合を引き起こすような誤差磁場が存在するため、垂直方向にも有限のエミッタンスを持つことになる。通常は水平方向のエミッタンスの1/10以下である。

第6章 ビーム入射

ビームの入射というのは、入射器（シンクロトロン、ライナック等）から供給されるビームを輸送路を通じてリングまで運び、リングの所謂アクセプタンス（3-4節参照）内になんとかして入れてやる作業である。詳細は参考文献に譲り、ここでは入射というものの基本的な考え方を簡単に解説することにしよう。

入射器（シンクロトロン、ライナック等）から供給されるビームはビーム輸送路を通してリングに運ばれる。ビーム輸送路はリングと同じく偏向電磁石、四極電磁石、ビームパイプ等で構成される。入射路のラティス計算はリングの場合と同様に行われるが、ただし、リングの場合Twissパラメータやエネルギー分散関数等を周期的な条件のもとで計算するのに対して、ビーム輸送路では入射器等の終端部のパラメータを初期値にして計算することになる。

輸送路の役割はビームを失うことなくリングまで運ぶことはいうまでもないが、それ以外にも、ビームのエネルギー診断などの役割もある。輸送路途中でエネルギー分散関数の大きい場所を作っておいて、そこにビーム位置を検出できるようなモニター装置を置いておけば、ビームのエネルギーを測定することができる（3-6節の図3-6-1参照）。

ビーム輸送路の終端部にはセプタム電磁石と呼ばれる電磁石が設置される。これは図6-1-1に示す

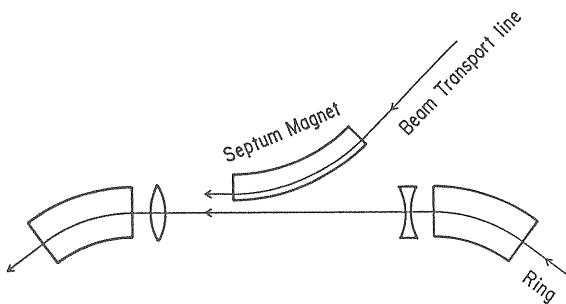


図6-1-1 入射点付近の概念図。

ようにリングの基準軌道に対するビームの入射角度がなるべく小さくなるようにする働きをする。セプタム電磁石の概念図を図6-1-2に示す。当たり前であるが入射点近くではリングを周回しているビームと入射路を通ってくるビームの軌道が非常に接近することになる。リングと入射路はセプタムと呼ばれる板で仕切られており、このセプタムは磁場がリング側へ漏れださないようにシールドの役割をしている。これにより入射ビームの軌道には磁場を発生し、その一方、リング内の蓄積ビームには影響を与えないようにできる。

ビーム輸送路を運ばれてくる電子は（当たり前であるが）入射される前はリングの外にいる。従って、3-4節で説明した横方向のアクセプタンスの外にいるわけである。これを何とかしてアクセプタンス内にいれてやらなければビームは蓄積できない。このあたりの事情をもう少し具体的にみるために、まず何の工夫もなく図6-1-3のようにビームを打ち込んだ場合を考えてみる。ここで簡単のため入射ビームのエミッタンスはアクセプタンスに比べて小さく無視できるとしよう。またリングの水平方向のアクセプタンスはセプタムで決まっているものとする。このとき入射点でのアクセプタンスは図6-1-4のようになる。当たり前であるが入射ビームはアクセプタンスの外にいる。従って、このままビームを打ち込んだ場合、何回かリングを周回する内にはセプタムに当たって失われることになってしまう。そこで何か一工夫あるわけである。

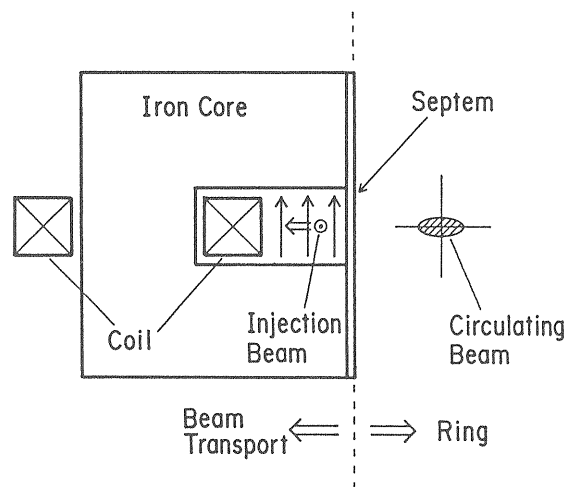


図6-1-2 セプタム電磁石の概念図。

大部分のストレージリングで用いられているやり方はビームが入ってくる瞬間に、図6-1-5のようにリングの基準軌道を入射ビームの方へ近づけるというものである。このときアクセプタンスは基準軌道とともに移動しその一部がリングの外へ出る(図6-1-6)。そこへビームを打ち込んでやればよい。ただしアクセプタンスを図6-1-6の位置で固定してしまつたら、入射ビームが何周かする内にはやはりセプタムに当たってしまう。従つてビームが打ち込まれたらなるべく早く軌道を元の位置に戻してやる必要がある(図6-1-7)(なおこの例では4周するとセプタムに当たってしまうのでこの間に軌道を戻す必要がある)。

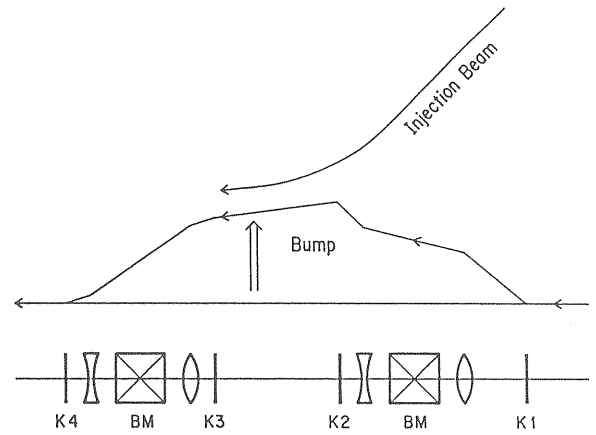


図6-1-5 入射バンプ軌道の概念図。

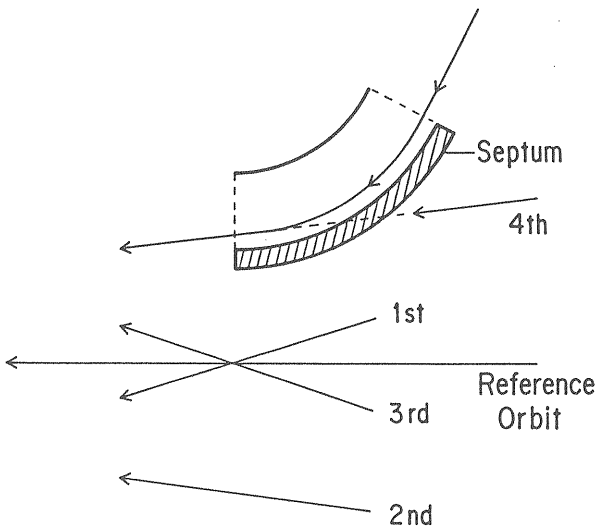


図6-1-3 入射電子の各周回ごとの軌跡。ただしセプタム電磁石から出てきた電子をそのままリングに打ち込んだ場合。ベータatron振動数の端数部分は0.25とした。この場合4周目の周回でもとの場所に戻るためセプタムに衝突することになる。

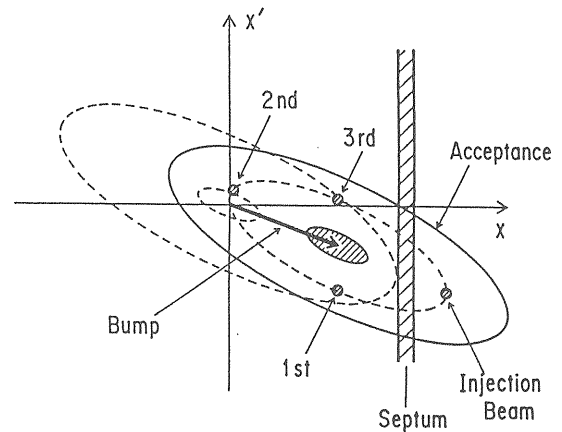


図6-1-6 バンプ軌道によるアクセプタンスの移動と入射電子の軌跡。アクセプタンスを移動したままにしておくと4周目の周回でセプタムに当たってしまう。

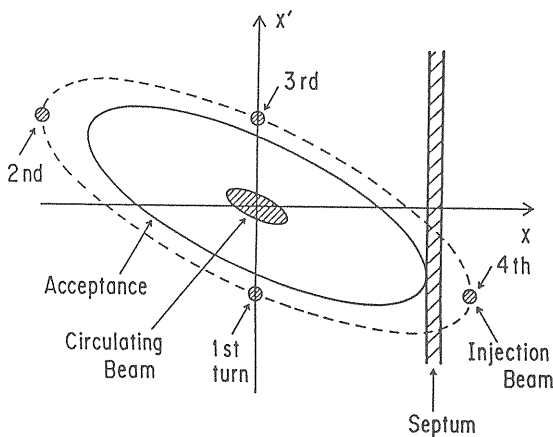


図6-1-4 図6-1-3の位相空間での表現。

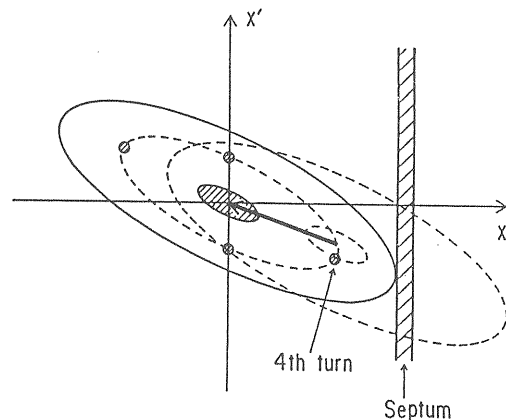


図6-1-7 バンプ軌道をもとに戻すことによるアクセプタンスの移動。入射電子が4周して戻ってくる前に軌道を戻してやれば電子はセプタムに当たらない。

図6-1-5のように基準軌道を入射路側へ寄せるにはバンプ軌道の方法を用いる。バンプ軌道とは何個かの偏向電磁石を用いてリングの一部で軌道を図6-1-8のようにもとの軌道位置からずらすというものである。以下バンプ軌道の概念を簡単に説明しておこう。今リングのある場所で小型の偏向電磁石（ステアリング電磁石）を励磁しビームをある角度だけ蹴飛ばしたとする。ビームは図6-1-8に示すように基準軌道からはなれてベータatron振動を始めることになる。ベータatron振動の位相が180度進んだところでビームは基準軌道を横切って反対側へ行こうとするが、ここに第2のステアリング電磁石を設置してビームが元の基準軌道に戻るように蹴り戻してやる。このようにすればリングのある一部分だけビームの軌道を基準軌道からずらすことができる。ちょうど180度分だけ位相の進んだ場所にステアリング電磁石を設置できない場合にはステアリング電磁石の数を増やしてやればよい（図6-1-8b, c）。入射のためのバンプ軌道を発生するためには非常に短い時間間に軌道をずらし、また元に戻すということを繰り返すことからパルス的に動作する偏向電磁石（キッカー電磁石と呼ばれる）が用いられる（図6-1-9）。

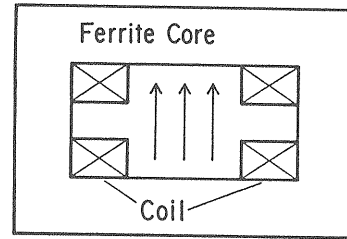


図6-1-9 キッカー電磁石の概念図。

最後に入射されたビームのその後について述べておこう。入射されたビームは、アクセプタンスの内側に入ったとはいえ平衡状態のエミッタンスに比べると大振幅で振動している。しかしその振動は5-1節で述べたように放射減衰で決まる時間スケールで減衰していき、最終的には平衡状態のエミッタンスを持つに至る。これで入射の1サイクルが終了したことになる。もっとビームを入れたければこの過程を繰り返せばよい。このとき先に入射したビームの振動が充分減衰してないうちに次の入射を行うと大振幅で運動している入射直後のビームがセプタムに当たって失われてしまう可能性がある。従って入射の繰り返しは少なくとも放射減衰時間程度の間隔を置いて行うことが望ましい。

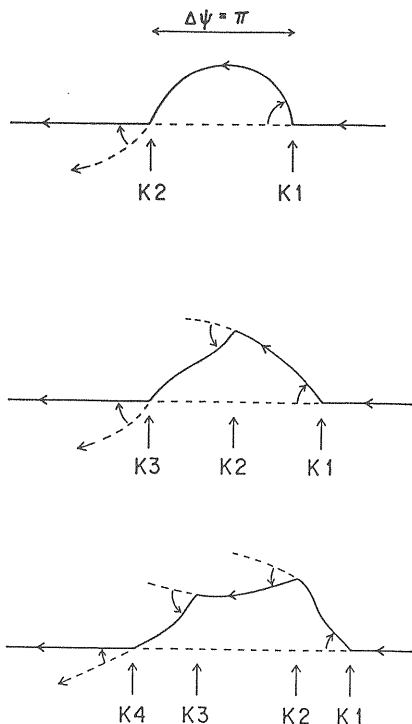


図6-1-8 バンプ軌道の概念図。

第7章 ビーム寿命

7-1. ビーム電流とビーム寿命

前の章では如何にしてビームをリングのアクセプタンスに入れるかについて述べた。しかしせっかく苦勞して入射したビームは悲しいことに少しずつ縦横両方向のアクセプタンスからこぼれて失われていく。以下どのような過程でビームが失われていくのかを解説する。なお簡単のため横方向のアクセプタンスはビームパイプで、また、縦方向のアクセプタンスはRF bucketで決まっているものとして話をする。

今リングにN個の電子が蓄積されているとして、Nの時間変化を

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau} \quad (7-1-1)$$

と書いたときの τ をビーム寿命と呼ぶ。これは

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \quad (7-1-2)$$

とも書け、このとき右辺は単位時間当りに失われる電子の割合になっている。様々な過程で電子が失われていく場合の寿命は、それぞれの過程による損失率の和をとることによって得られ

$$\frac{1}{\tau} = \sum_k \left(-\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \right)_k = \sum_k \frac{1}{\tau_k} \quad (7-1-3)$$

となる。ここで τ_k はkという過程で決まる寿命である。

ところでストレージリングでは、蓄積ビームの強度は、通常、蓄積粒子数Nではなくリングのある場所を単位時間に通過する電荷量、即ち電流値で表わすことが多い。蓄積粒子数がNのときの電流値は、上で述べた定義から

$$I = eNf_{rev} \quad (7-1-4)$$

となる。ここで f_{rev} は単位時間に何回リングを周回するかを表わす数、即ち周回周波数である。当たり前のことであるが、これを式7-1-1に代入するとビーム電流値の変化は

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{\tau} \quad (7-1-5)$$

となる。

7-2. 量子寿命

第5章で述べたようにストレージリングに蓄積されている個々の電子のベータトロン振動やシンクロトロン振動の振幅は確率的であり、ある幅をもってガウス分布をしている。従って平均的には5-2節で述べたようなエミッタンス或いはエネルギー幅に相当する振幅を持っているわけであるが、一方確率的に小さいとはいえ平均的な振幅に比べて何倍も大きいような振幅を持つものも出てくる。当然のことながらアクセプタンスを越えるような大きな振幅を持ってしまった電子は失われてしまうことになる。このような原因で決まるビーム寿命を量子寿命と呼ぶ。

横方向、縦方向のアクセプタンスで決まる量子寿命はそれぞれ次のような式で見積ることができる。

$$\tau_{q\beta} = \tau_{\beta} \frac{\sigma_x^2}{x_{lim}^2} \exp\left(\frac{x_{lim}^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad (7-2-1)$$

$$\tau_{qE} = \tau_E \frac{(\sigma_E/E)^2}{(\Delta E/E)_{lim}^2} \exp\left(\frac{(\Delta E/E)_{lim}^2}{2(\sigma_E/E)^2}\right) \quad (7-2-2)$$

ここで x_{lim} は横方向のアクセプタンスを制限している場所でのビームパイプの内径、 σ_x はそこでのビームサイズ、 $(\Delta E/E)_{lim}$ はRF bucket height、 σ_E/E はエネルギー拡がりである。また τ_{β} 、 τ_E はそれぞれベータトロン振動とシンクロトロン振動の減衰時間である。この式から分かるように許容最大振幅が大きくなると急激に量子寿命は長くなる。従ってリングの設計段階で、ビームパイプの大きさやRF bucket heightをある程度の安全をみて設計しておけば量子寿命は極めて長くなり、実際の運転ではこの後で述べるような他の過程で寿命が決まることになる。

例題7-1-1 量子寿命の例

いま減衰時間を10msec程度としよう。このとき量子寿命の式において

$$x_{lim} = 6\sigma_x$$

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{lim} = 6\left(\frac{\sigma_E}{E}\right)$$

即ちビームパイプの内径やRF bucket heightをそれ

ぞれビームサイズやエネルギー拡がりの6倍（即ち 6σ ）にとると寿命は数100分程度になることがすぐにわかる。 6σ より少しパイプの内径やRF bucket heightが大きければ寿命は急激に大きくなり、また、逆にこれより少し小さいと寿命は急激に短くなり実用とは程遠い値になる。通常は安全をみて 10σ 程度をとることが多い。例えばPFリングのエネルギー拡がりは 7×10^{-4} であり、RF bucket height は約10倍の 7×10^{-3} になっている（例題4-4-1）。

7-3. ガス散乱

蓄積粒子の通り道であるビームパイプの中は高真空状態に保たれているが、それでも微量な残留ガスは必ず存在する。蓄積粒子がこの残留ガス分子と衝突して散乱されたりエネルギー損失を被ったりするとリングのアクセプタンスから飛び出し、この衝突の過程としては

- ・原子核による弾性散乱（Rutherford散乱）
- ・原子核による制動放射
- ・核外電子による散乱（Moeller散乱）

等がある。ガス散乱寿命に関しては堀氏の講義で詳しく述べられるはずである。ここではビーム損失の過程を理解するために上記のうち比較的主要なRutherford散乱と制動放射を取り上げることにしよう。

まずRutherford散乱であるが、以下、簡単のため、リングのある場所でビームパイプの垂直方向の内径が非常に小さくなっているとし、リングの垂直方向のアクセプタンスがこの場所で決まっているとする。垂直方向アクセプタンスの大きさはこの場所のビームパイプの内径を b_{lim} 、そこでのベータatron関数を β_{lim} として

$$A_{\beta_{ylim}}^2 = \frac{b_{lim}^2}{\beta_{ylim}} \quad (7-3-1)$$

と書ける。また水平方向のアクセプタンスはこれに比べて十分大きいとしてその影響を無視する。

いま電子が原子番号 Z_1 の原子核によって図7-3-1のように弾性散乱された場合を考える。この散乱の微分断面積は $\beta = v/c \sim 1$ の場合

$$d\sigma_R \cong \frac{1}{2} \frac{Z_1^2 r_e^2}{\gamma^2} \cot^2 \frac{3\theta}{2} d\theta d\varphi \quad (7-3-2)$$

となる。

この散乱の様子を垂直方向の位相空間で眺めると図7-3-2のようになる。ただし散乱の起きた場所のベータatron関数を β_{scat} とする。この図より散乱角が

$$\theta_y = \theta \sin\varphi \geq \frac{A_{\beta_{ylim}}}{\sqrt{\beta_{scat}}} = \frac{b_{lim}}{\sqrt{\beta_{scat}\beta_{lim}}} \quad (7-3-3)$$

或いは

$$\theta \geq \theta_c = \frac{b_{lim}}{\sqrt{\beta_{scat}\beta_{lim}}} \frac{1}{\sin\varphi} \quad (7-3-4)$$

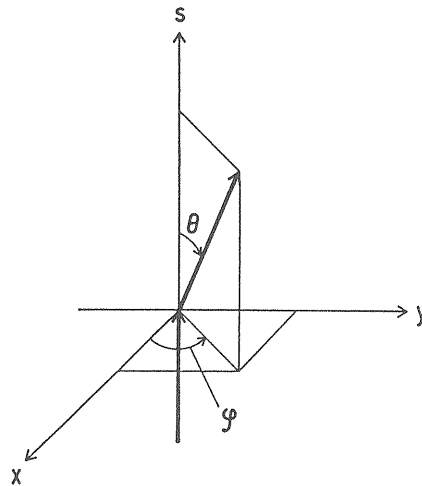


図7-3-1 散乱角 (θ, φ) の定義。散乱角のy方向の成分は $\theta \sin\varphi$ になる。

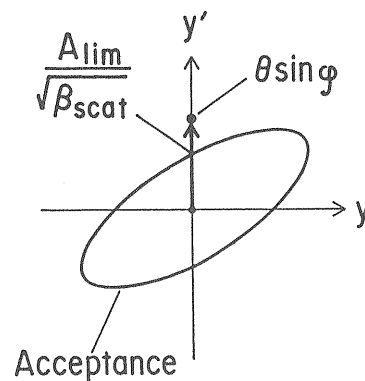


図7-3-2 散乱の位相空間での表現。

となると電子は失われる。このことから電子が失われる全断面積は式7-3-2を式7-3-4の条件内で積分すれば得られる。従って

$$\sigma_R = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\theta_c}^{\pi} d\theta \left(\frac{1}{2} \frac{Z_i^2 r_e^2}{\gamma^2} \cot^3 \frac{\theta}{2} \right) \equiv \frac{4\pi Z_i^2 r_e^2}{\gamma^2} \langle \frac{1}{\theta_c^2} \rangle \quad (7-3-5)$$

となる。ここで

$$\frac{1}{\langle \theta_c^2 \rangle} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\theta_c^2} = \frac{1}{2} \frac{A_{\text{lim}}^2}{\beta_{\text{scat}} \beta_{\text{lim}}} \quad (7-3-6)$$

である。散乱はリングの至る所で同じ確率で起きる、言い換えれば、リングの残留ガス圧が場所によらず均一であるとする、式7-3-6の β_{scat} はベータトロン関数のリング一周の平均値と置き換えることができる。この断面積に電子が単位時間当りに出会う残留ガス分子数を掛ければ、電子の単位時間当りに失われる割合が求まる。即ち

$$\frac{1}{\tau} = - \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \sum_{Z_i} n_{Z_i} \sigma_R \quad (7-3-7)$$

となる。ここで n_{Z_i} は原子番号 Z_i の原子核の数密度、 c は光速である（電子の速度はほぼ光速であるとしている）。また右辺では残留ガス中の様々な元素について和を取っている。

次に制動放射によるビーム損失を考えてみよう。これは制動放射で大きなエネルギー損失が起きることによってRF bucketから飛び出してしまうというものである（なおエネルギー分散の大きな場所で制動放射によるエネルギー損失が起きると閉軌道がずれるとともにその周りで大振幅の水平ベータトロン振動を始める。従ってエネルギー損失により水平方向のアクセプタンスから飛び出してしまうということもありうるが、ここでは水平方向のアクセプタンスは十分大きいとしてこの効果は無視する。）。原子番号 Z_i の原子核による制動放射の微分断面積は

$$d\sigma_B = \frac{2r_e^2 Z_i^2 dk}{137 k \gamma} \left\{ 2 \ln(183 Z_i^{1/3}) \left(\frac{\gamma^2 + \gamma'^2}{\gamma \gamma'} - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{9} \right\} \quad (7-3-8)$$

で与えられる。ここで γ と γ' はそれぞれ散乱前後の粒子のLorentz因子 (E/mc^2)、また $k = \gamma - \gamma'$ はエネルギー損失（を mc^2 で規格化したもの）である。ここで、ビーム損失はエネルギー損失がRF bucket

heightより大きくなった場合に起きることを考えると、ビーム損失の断面積は

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \int_{(\frac{\Delta E}{E})_{\text{lim}}}^{\gamma} \frac{2r_e^2 Z_i^2 dk}{137 k \gamma} \left\{ 2 \ln(183 Z_i^{1/3}) \left(\frac{\gamma^2 + \gamma'^2}{\gamma \gamma'} - \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{9} \right\} \\ &= \frac{4r_e^2 Z_i^2}{137} \left\{ \frac{4}{3} \ln \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{\text{lim}} - \frac{5}{6} \right\} \ln(183 Z_i^{1/3}) \end{aligned} \quad (7-3-9)$$

となる。これをRutherford散乱の場合と同様に式7-3-7のように書けばビーム寿命が得られることになる。

7-4. Touschek効果

この講義では同時に周回している電子同士の相互作用というのはこれまで考えたことはなかったが、ここで紹介するTouschek効果というのは、蓄積電子同士の衝突によるビーム損失である。個々の蓄積電子はバンチの重心系で見た場合、横方向にベータトロン振動、縦方向にシンクロトロン振動をしバンチの中を動き回っている。従ってたまにはお互いに衝突することもある。例題4-3-1で見たように一般的にシンクロトロン振動はベータトロン振動に比べて非常にゆっくりしている。従ってバンチ内での電子の運動は通常ベータトロン振動が支配的である。このような場合、蓄積電子同士が衝突すると横方向の運動量が縦方向に移り、散乱後のこれら2つの電子はシンクロトロン振動を始める。この振幅が大きいと場合によっては縦方向のアクセプタンス即ちRF bucketからこぼれることになる。このようにして電子が失われる過程がTouschek効果である。

Touschek効果によるビーム寿命は

$$\frac{1}{\tau_T} = \frac{\sqrt{\pi} r_e^2 N_b}{\gamma^3 V_b \sigma_x} F(\epsilon_A) \quad (7-4-1)$$

と書ける。ここで V_b はバンチ体積、 N_b はバンチ内粒子数、 σ_x は水平方向のビームの角度拡がりである。また $F(\epsilon_A)$ は

$$F(\epsilon_A) = \frac{1}{(\gamma \sigma_x)^2} \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{\text{lim}}^2 \quad (7-4-2)$$

$$F(\epsilon_A) = \int_1^{\infty} \{2u - 2 - \ln(u)\} \frac{\exp(-\epsilon_A u)}{2u^2} du \quad (7-4-3)$$

で定義される。

式7-4-1を眺めると、当たり前であるがバンチの体積が小さくバンチ内粒子数が大きいと寿命は短くなる。一般に低エミッタンスリングではバンチ断面積が小さくなることに加えて、バンチ長も小さくなる傾向がある。このためバンチ体積が小さくなり、Touschek寿命が短くなる。また、ビームエネルギーが小さい (γ が小さい) ほど寿命が短くなることもわかる。このためエネルギーの比較的低い低エミッタンスリングではTouschek効果が寿命を制限する最大の要因になるようである。また放射光利用実験によっては単バンチ運転、即ち、リングのRF bucketのうち一つだけに電子を詰め込んで運転する場合がある。このような場合、バンチ内粒子数が大きくなるためTouschek効果が効いてくる場合がある。

参考文献

この講義録に書かれている内容は大抵の加速器の教科書に書いてあることなので本文中でいちいち参考文献をあげることはしなかった。この講義録をまとめるにあたって参考にした文献は以下の通りである。

<電磁気学>

Panofsky & Phillips

"Classical Electricity and Magnetisms"

<加速器の原理全般>

M. Sands "The Physics of Electron Storage Rings",
Proc. of International School of Physics
"Enrico Fermi" Course 46

D. A. Edwards & M. J. Syphers

"An Introduction to the Physics of Particle
Accelerators" AIP Conf. Proc. 184

神谷幸秀 OHO'84講義録

<軌道理論>

鎌田進 OHO'85講義録

<電磁石>

熊谷教孝 OHO'84講義録

<高周波加速空洞>

山崎良成 OHO'84講義録

<ビーム入射>

佐藤康太郎 OHO'87講義録

<ビーム寿命>

堀洋一郎 日本放射光学会第2回講習会講義録

中村典雄 OHO'91講義録