

はじめに

今年の高エネルギー加速器セミナーのテーマは、光源用加速器と放射光ビームラインということである。筆者は、光源用加速器として用いられている電子ストレージリングについて解説することをおおせつかった。与えられたタイトルは、電子ストレージリング I I (ビームの性質) である。電子ストレージリング I (入門) は、加藤氏によりこの連続講義の最初でなされるはずで、電子ストレージリングの入門編としてほぼ全般を網羅して話されるということである。しかし、電子ストレージリング I I の方は、筆者の能力と知識によって限定され、電子ストレージリングの軌道にまつわる話題に集中する。それゆえ、このテキストは大変偏っており、不足な点も多々あることをあらかじめご了承ください。幸か不幸か、過去のOHOセミナーで書かれたテキストをながめてみると、毎年のように電子シンクロトロンおよびストレージリングについて、大変詳しくかつ親切に解説されている。筆者も、これらのテキストを大いに参考にさせていただいた。このテキストで全く物足りない読者は、過去のOHOセミナーのテキストを読まれることをお勧めする。

このテキストの構成は、以下のようになっている。第1章を序論として、いくつかの光源加速器を紹介する。第2章と第3章で、電子ストレージリングにおける軌道理論の基本的なことを解説し、第4章では、PFリングにおいて軌道に関連するパラメータがどうなっているか、軌道パラメータ等の測定および歪の補正などについて述べる。なお、このテキストでは、電子と陽電子の区別はしていない、すべて電子という言葉に統一して使っている。

第1章 序論

1.1 光源用加速器

表1.1に、光源用加速器で、現在までにすでに稼働しているもの、あるいは建設中のもののリストを示した[2]。世界中には、リングラフィー用の小型のリングから大型のX線光源まで実に多くの光源用加速器が存在し、また建設も行なわれている。ここでは、これら全てにわたって紹介することは不可能であるので、筆者が実際に見たことのある

リングに限り簡単に紹介するに留める。また、紹介は筆者の偏見で、リングのラティスのことを中心にしており、性能およびリング構成すべてにわたって説明されるものではない。

高エネルギー物理学研究所

リング名：PF (Photon Factory)

PFリングは、エネルギー2.5 GeVの放射光専用蓄積リングとして、1982年より稼働した。昨年、運転開始から10周年を迎え、第3世代の光源加速器であるESRF、ALSが運転されるようになった現在、古い光源リングの仲間入りを余儀なくされた。しかし、過去10年間に、毎年のようにリングは改良され、またマシナスタディを重ねることによって、光源用加速器としては完成度の高いリングになっていると思う(PFリングに所属する筆者の偏見かも知れないが)。入射器は2.5 GeVリニアックである。以前リングには電子を蓄積していたが、5年前に陽電子に切り替えられ、陽電子運転が定着している。運転モードは、マルチバンチ(312バンチ)と単バンチがある。マルチバンチの場合、寿命が60時間以上にものぼるため、入射は1日1回のみで、350 mA蓄積される。平均電流値は300 mA程度になる。単バンチの場合は、現在のところ最初に55 mA蓄積されている。PFリングのラティスは、FODOセルを基本にしたノーマルセル部と直線部から構成されており、鏡対称性を持つ超周期は2のリングとなっている。リングの周長は、187 mである。直線部は、全部で10箇所あり、2箇所のRF部、入射部、そしてアンジュレータ、多極ウイグラー、超伝導ウイグラー等6台の挿入光源が設置されている。ラティスは過去に一度大きな変更が成されており、その変更によってビームのエミッタンスが約400 nmradから125 nmradへとほぼ1/3になった。2年前から、3 GeV運転も可能となり、またFEL実験のため0.75 GeVまで減速も行なわれている。最近では、リングのノーマルセル部を改造してさらにエミッタンスを1/5にする計画も成されている。

グラスベリー研究所

リング名：SRS2 (Synchrotron Radiation Source 2)

SRS2は、イギリスのリバプールの近くにあるグラスベリー研究所の専用放射光リングである。1980年代初めに運転が開始されている。SR

S2と呼んでいるのは、SRSのラティスを低エミッタンス化したことによる。入射器は、リニアックとシンクロトロンであるが、フルエネルギー入射ではなくストレージリングで加速を行う。ストレージリングへの入射エネルギーは0.6 GeVで、運転エネルギーは、2 GeVである。SRS2は、基本的に偏向電磁石からの放射光を利用しているが、現在5 Tと6 Tの超伝導ウイグラーも稼働している。ラティスは、FODOセルで構成されており、超周期16、周長は約1000mのリングである。エミッタンスは、約100 nmradである。

ESRF研究所

ESRFは、フランスのグルノーブルに建設された周長約800m以上にもおよぶ大型の専用放射光リングである。ストレージリングは、世界最初の大型第3世代光源用加速器で、7 nmradの低エミッタンスをねらっている。入射器は、リニアックとシンクロトロンであり、6 GeVのフルエネルギーで入射を行う。当面は、電子を蓄積することにしてはいるが、将来陽電子に切り替える可能性もある。昨年3月に、リングの運転調整が開始され、あっという間に蓄積電流値を100 mA以上に延ばし、世界の放射光関係者を驚かせた。現在は200 mAをめざしている。ラティスは、鏡対称性を有するDBA (Double Bend Achromat) セルで構成され、超周期は16である。

LBL研究所

リング名：ALS(Advance Photon Source)

アメリカ合衆国カリフォルニア州バークレーにあるLBL研究所に建設された専用放射光リングである。ストレージリングのエネルギーは、1.5 GeVで設計されており、入射器にはリニアックとシンクロトロンを用い、フルエネルギーで入射を行う。VUV領域の光源としては、世界初の

低エミッタンスリングで、エミッタンスのデザイン値は3 nmradと大変小さい。ラティスは、TBAの基本セルで構成され、超周期は12で、周長は約200mのリングである。12箇所の直線部があり、挿入光源主体の第3世代の光源である。TBAは、低エミッタンスを実現できる反面、クロマティシティ補正のためダイナミックアパーチャをなかなか大きくできないという不利な面があり、ALSの運転がうまく行くか心配されていた。しかし、今年の3月にリングの運転調整が開始され、4月には400 mA以上の電子が蓄積されたということで話題になっている。現在は、2ないし3機のアンジュレータを設置するためにシャットダウンになっている。

アルゴンヌ国立研究所 (ANL)

リング名：APS (Advance Photon Source)

APSは、アメリカ合衆国シカゴの近郊にあるアルゴンヌ国立研究所に建設されている大型放射光実験施設である。ストレージリングのエネルギーは、ESRFより高く7 GeVで設計されている。現在、急ピッチで建設が進められているが、入射器の陽電子発生用電子リニアック (200 MeV)、陽電子リニアック (450 MeV) はほぼ完成に近づいている。APSは、運転の最初から陽電子を予定しており、そのため7 GeVブースターシンクロトロンの前段に、もう一つの小型陽電子蓄積リング (PAR: 450 MeV) を用意している。ブースターからはフルエネルギーで入射される。ストレージリングのラティスは、ESRFと同じくDBAを基本セルにしている。周長は、約1 km、エミッタンスのデザイン値は8 nmradである。ESRFよりは、多少遅れるものの完成すればやはり強力なX線光源となるであろう。

表1.2に、ここで紹介した5つのリングにおける、おもな軌道パラメータを示しておいた。

Ring Name	Location	Country	Energy (GeV)	Lattice	Emittance (nm-rad)	Status
-----------	----------	---------	-----------------	---------	-----------------------	--------

Lithograph Rings

SUPER ALIS	Atsugi(NTT)	JAPAN	0.6	DFD		
NIJI 2	Tsukuba(ETL)	JAPAN	0.6	CG	3770	Operational
NIJI 3	Tsukuba(ETL)	JAPAN	0.62	CG	250	Operational
AURORA	Tokyo(SHI)	JAPAN	0.65	Weak Focus	2880	Operational
LUNA	Tsukuba(IHI)	JAPAN	0.8	FODO		Operational
NAR	Atsugi(NTT)	JAPAN	0.8	CG	147	Operational
SORTEC	Tsukuba(ETL)	JAPAN	1.0	FODO	500	Operational
HELIOS	E Fishkill, NY	USA	0.7	FdF	950	Operational

VUV Rings

HESYRL	Hefei	CHINA	0.8	TBA	27	Dedicate
ASTRIB	Asrhus	DENMARK	0.6	DBA	160	P.Dedicate
INDUS-1	Indore	INDIA	0.45	FDdDF	71	Construction
UVSOR	Okasaki	JAPAN	0.75	DB(NA)	80	Dedicate
SOR-RING	Tokyo	JAPAN	0.42	DB(NA)	320	Dedicate
TERAS	Tsukuba	JAPAN	0.8	DB(NA)	550	Dedicate
NIJI4	Tsukuba(ETL)	JAPAN	0.5	TBA	135	Operational
AmPS	Amsterdam	NETHERLAND	0.9	8BA	160	Construction
EUTERPE	Eindhoven	NETHERLAND	0.4	TBA	7.5	Construction
SIBERIA-1	Moscow	RUSSIA	0.45	Weak Focus	880	Dedicate
MAX	Lund	SWEDEN	0.55	CG	30	Dedicate
H-100	Kharkov	UKRAINE	0.1			Dedicate
SURF2	Gaithersburg, MD	USA	0.28	Weak Focus	350	Dedicate
NSLS-VUV	Brookhaven, NY	USA	0.744	CG	88	Dedicate

VUV/ SX Rings

UVX2	Campinas	BRAZIL	1.15	DBA	65	Construction
SRRC	Taipci	TAIWAN	1.3	TBA	20	Commitioning
SUPERACO	Orsay	FRANCE	0.8	DBA	37	Dedicate
BESSY	Berlin	GERMANY	0.8	TBA	20	Dedicate
DELTA	Dortmund	GERMANY	1.5	Triplet	11	Construction
ADONE	Frascati	ITALY	1.5	DBA	240	P.Dedicate
ELETTRA	Trieste	ITALY	1.5	DBA	4.2	Commitioning
VEPP2M	Novosibirsk	RUSSIA	0.7	DB(NA)	205	P.Dedicate
TNK	Zelcnograd	RUSSIA	1.6	4BA	31	Construction
MAX2	Lund	SWEDEN	1.5	DBA	8.6	Construction
CAMD	Baton Rouge, LA	USA	1.2	CG	210	Construction
ALADDIN	Stoughton, WI	USA	1.0	FODO	110	Dedicate
ALS	Barkley, CA	USA	1.5	TBA	3.4	Commitioning

X-Ray Rings

BEPC	Bejing	CHINA	1.5-2.8	FODO	190	P Dedicate
SRS	Darabury	ENGLAND	2.0	FODO	110	Dedicate
DCI	Orsay	FRANCE	1.8	Misc	1300	Dedicate
ELSA	Bonn	GERMANY	3.5	DBA	36	P.Dedicate
KEK-PF	Tsukuba	JAPAN	2.5(3.0)	FODO	130	Dedicate
VEPP3	Novosibirsk	RUSSIA	2.0	DBA	290	P Dedicate
SIBERIA2	Moscow	RUSSIA	2.5	4BA	78	Construction
PLS	Pohang	S.KOREA	2.0	TBA	13.5	Construction
SPEAR	Stanford, CA	USA	3.0	Triplet	105	Dedicate
NSLS-XRAY	Brookhaven, NY	USA	2.5	CG	80	Dedicate

Hard X-Ray Rings

ESRF	Grenoble	FRANCE	6.0	DBA	7	Commitioning
DORIS 3	Hamburg	GERMANY	4.5-5.3	Triplet	405	P.Dedicate
KEK-AR	Tsukuba	JAPAN	6.5	FODO	168	P.Dedicate
SPRING 8	Nishi Harima	JAPAN	8.0	DBA	7	Construction
VEPP 4	Novosibirsk	RUSSIA	6.0	Comb Func	270	P.Dedicate
CERS	Itaca, NY	USA	5.44	FODO	65	P.Dedicate
APS	Argonne,IL	USA	7.0	DBA	8	Construction

表1.1 世界の光源用加速器

Ring Name		PF	SRS2	ALS	ESRF	APS
Lattice Type		FODO	FODO	TBA	DBA	DBA
Energy	E (GeV)	2.5	2.0	1.5	6.0	7.0
Circumference	C (m)	187.07	96.00	196.8	844.4	1060
Super periodicity	Ns	2	16	12	16	40
Natural Emittance	ϵ (nmrad)	129	108	3.40	6.95	8.11
Momentum Compaction	α	0.0156	0.0289	0.00159	0.00282	0.00237
Natural Energy Spread	σ_ϵ	7.3×10^{-4}	7.1×10^{-4}	7.1×10^{-4}	1.1×10^{-3}	9.6×10^{-4}
Betatron Tune	ν_x / ν_y	8.45 / 3.30	6.25 / 3.25	14.27 / 8.18	36.20 / 11.20	35.21 / 14.30
Natural Chromaticity	ξ_x / ξ_y	-14.46 / -8.53	-10.29 / -5.38	-24.52 / -27.90	-114.9 / -32.61	-63.62 / -25.95
Radiation Damping Time	$\tau_x / \tau_y / \tau_\epsilon$ (msec)	7.8 / 7.8 / 3.9	5.5 / 5.0 / 2.4	13.1 / 17.6 / 10.7	7.1 / 7.1 / 3.6	9.1 / 9.1 / 4.5
Radiation Loss per Turn	U0 (MeV)	0.399	0.254	0.112	4.75	5.45

表1.2 光源用加速器の主要な軌道パラメータ

第2章 理想的なベータトロン振動

電子ストレージリングの目的は、あるエネルギーを持った電子ビームを長時間安定に貯蔵しておくことである。そのため、ストレージリングには、電子ビームをある一定の軌道に束縛しておくための電磁石、放射光を放出しエネルギーを失った電子に再びエネルギーを供給しエネルギーを一定に保つための高周波加速空洞（RF空洞）がある。また、長時間貯蔵するために、極力電子ビームが残留ガスと散乱して失われないよう、電子軌道は超高真空ダクト内に閉じこめられている。電子を一定の軌道に束縛しておく電磁石はおもに偏向電磁石と4極電磁石であるが、それらは強収斂の原理にもとづいて配置される。この原理によって、電子はある設計軌道（理想軌道や平衡軌道とも呼ばれる）の回りを微小振動しながら運動する。その振動は水平と垂直方向の2次元（横方向、Transverse Oscillation）をもち、一般にベータトロン振動と呼ばれる。一方、ビームは設計運動量（Design Momentum、Nominal Momentum）のまわりを微小振動する、あるいは進行方向の前後に微小振動する。この振動は、シンクロトロン振動（縦方向振動、Longitudinal Oscillation）と呼ばれている。通常は、これら3次元の振動は結合がない独立な振動として取り扱い、一次元の振動問題に還元して考察している。

この章では、まず円形加速器で用いられている座標系で記述された設計軌道のまわりを微小運動する電子の運動方程式から出発して、理想的な1次元ベータトロン振動について解説する。しかし、実際のリングでの電子の運動は、理想的ではない。例えば、電磁石に誤差磁場やアライメント誤差がある場合、エネルギーがずれた電子の運動や、また6極電磁石や8極電磁石といった非線形磁場が導入された場合等がある。これらは摂動として扱い、摂動がかかったベータトロン振動がどのようなようになるかについても重要であり、それは第3章で述べられることになる。

2.1 ベータトロン振動

円形加速器では、図2.1に示したような座標系によって粒子の運動を記述するのが一般的である。この座標系を用いて、ストレージリング内を周回する電子の運動は、ある設計軌道のまわりの微小

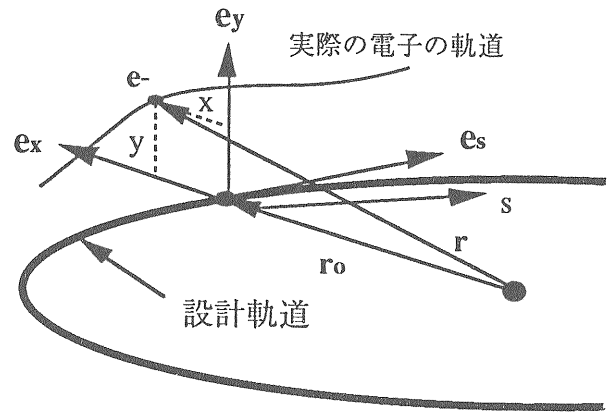


図2.1 電子の軌道と座標系

振動としてとらえた運動方程式によって表現される。電子の位置は、

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0(s) + x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y \quad (2.1.0)$$

で表され、 s は設計軌道に沿った距離、 x は設計軌道からの水平方向の変位、 y は垂直方向の変位を表している。一般座標で記述された電磁場中の荷電粒子のハミルトニアンから出発し、座標変換を施して、ベータトロン振動を記述する運動方程式を導く方法は、他の文献に譲る。ここでは導出の途中は省略して結果だけを抽出し、横方向の運動方程式を書くことにすると、水平方向および垂直方向の運動方程式は、それぞれ

$$\begin{aligned} x'' + \frac{p_0}{p} K_x(s) x &= \frac{p - p_0}{p} \frac{1}{\rho(s)} \\ y'' + \frac{p_0}{p} K_y(s) y &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

と与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} K_x(s) &= \frac{1}{\rho^2(s)} + K(s) \\ K_y(s) &= -K(s) \\ K(s) &= \frac{1}{B\rho} \left(\frac{dB_y}{dx} \right)_{x=y=0} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

とおり、また'は s の微分を示している。ここで、ストレージリングの電磁石は、偏向電磁石と4極電磁石のみとし、6極電磁石やねじれ4極

電磁石、ソレノイド電磁石は省略した。式の中で使われている $\rho(s)$ は曲率半径、 $B\rho$ は Magnetic Rigidity、 $K(s)$ は4極電磁石の強さ表している。 p と p_0 は、それぞれ実際の電子の運動量と設計運動量を示している。この章では、まず設計運動量の電子についてのみ考えることにする。そこで、式(2.1.1)において、 $p = p_0$ とおけるので、

$$\begin{aligned} x'' + K_x(s) x &= 0 \\ y'' + K_y(s) y &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

となり、運動方程式から p に関係する項はなくなった。また、水平と垂直方向の運動は独立運動であり、(2.1.2)に注意しておけば、これらの運動方程式は全く同じと考えることができるので、 z で代表させて

$$z'' + K(s) z = 0 \quad (2.1.4)$$

と表しておくことにする。ただし、簡単のため $K(s) = K_z(s)$ としておいた。ところで、円形加速器では、 $K(s)$ は s の関数であることはもちろんであるが、さらに

$$K(s + C) = K(s) \quad (2.1.5)$$

なる周期関数となっている。 C は、リングの周長を表している。たいていのストレージリングには、リングの周長より短い周期性が存在する。その周期性のことを、超周期 (Super Periodicity) と呼んでいる。もしリングの超周期が N であるとすると、(2.1.5)は、

$$K\left(s + \frac{C}{N}\right) = K(s) \quad (2.1.6)$$

という関係も成り立つことになる。超周期数が大きいと、effective に危険な共鳴の数が減るなど、リングの運転上有利な点が多い。しかしながら、実際のリングではさまざまな要因により、厳密に言えば、周期性が保たれていることはまれである。

運動方程式(2.1.4)において、 $K(s)$ が s によらず一定であるとすると、

$$z'' + K_0 z = 0 \quad (2.1.7)$$

$K_0 : \text{Constant}$

となる。これは、よく知られた1次元の調和振動子の方程式と全く同じである。(すなわち、ストレージリング全周にわたって、一定の収束力がある場合に相当する。) (2.1.7)式の解は、 $K_0 > 0$ の場合、安定な振動を与え、

$$\begin{aligned} z &= A \cos(\omega_0 s + \delta_0) \\ \omega_0 &= \sqrt{K_0} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

となる。一方、 $K_0 < 0$ の場合、振動は発散してしまい、

$$\begin{aligned} z &= A \cosh(\omega_0 s + \delta_0) \\ \omega_0 &= \sqrt{-K_0} \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

となる。ここで、 A および ω_0 は、運動の初期値によって決まる定数である。

さて、方程式(2.1.4)では、 $K(s)$ が s の関数であるので(実際のリングは、所々に収束力の異なる4極電磁石が配置されている)、調和振動子では定数であった A および ω_0 を s の関数とし、

$$\begin{aligned} A &\rightarrow a \omega(s) \\ \omega_0 &\rightarrow \psi(s) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

により(2.1.8)式を置き換える(不安定解には興味はないので(2.1.8)のみを考える。それは、わざわざ不安定なリングは設計しないからである)。ただし、 a は定数で、 $\omega(s)$ は周期関数とする。これより、解は

$$z = a \omega(s) \cos\{\psi(s) + \psi_0\} \quad (2.1.11)$$

と表すことができる。これが、実際に(2.1.4)の解であるための条件を求めてみよう。(2.1.11)の両辺を s で微分し、さらに2階微分まで求めると、

$$\begin{aligned} z' &= \\ &a \{\omega' \cos(\psi + \psi_0) - \omega \psi' \sin(\psi + \psi_0)\} \end{aligned}$$

$$z'' = a \{ (\omega'' - \omega \psi'^2) \cos(\psi + \psi_0) - (2\omega' \psi' + \omega \psi'') \sin(\psi + \psi_0) \} \quad (2.1.12)$$

となる。これらを(2.1.4)に代入して、方程式が任意の定数 ψ_0 (初期位相) について成立するためには、

$$\begin{aligned} \omega'' - \omega \psi'^2 + K(s)\omega &= 0 \\ 2\omega' \psi' + \omega \psi'' &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

を同時に満たさなくてはならない。まず、(2.1.13)の第2式より、積分をおこなって

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds_1}{\omega^2(s_1)} \quad (2.1.14)$$

が得られる。ただし、簡単のため積分の過程で任意定数はゼロとおいた。これを、第1式に代入すると、

$$\omega'' - \frac{1}{\omega^3} + K(s)\omega = 0 \quad (2.1.15)$$

が得られる。したがって、この2階微分方程式を満たす周期解 $\omega(s)$ が得られれば、(2.1.14)によって $\psi(s)$ が決まり、任意の初期値に対して運動が決定することになる。

ここで、(2.1.12)と(2.1.14)を使って、以下の関係式 W を計算すると、

$$W \equiv \frac{z^2 + (\omega' \omega z - \omega^2 z')^2}{\omega^2} = a^2 \quad (2.1.16)$$

の様になる。 a は定数であったから、 W も定数となり、 s によらず一定の量となることが分かる。後述するが、実は W は重要な量である。

さて、式(2.1.15)に戻る。式(2.1.15)を見ると、ベータトロン振動を記述するもともとの運動方程式(2.1.4)は線形であったのに、この式には $1/\omega^3$ なる非線形項が入っている。実に不思議なことのように思うかもしれないが、 ω はベータトロン振動の振幅に関係する量であることに注意しておきたい。

そして、この方程式の解 ω は、非線形項のゆえに一意的に決まることになる。しかしながら、これは解析的に解くことは困難であるため、一般には数値的に扱われることになる。実際には、以下で述べるように、トランスファー行列 (移送行列、Transfer Matrix) を導入し、その行列を利用してベータトロン振動を記述している。

2.2 トランスファー行列

一般に、線形微分方程式に従う (z, z') 位相空間内の点の移動は、トランスファー行列によって表現できる。いま、 s_1 と s_2 を結ぶトランスファー行列を $\mathbf{M}(s_2|s_1)$ とすると、位相空間内の点の移動は、

$$\begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(s_2|s_1) \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

と表される。 $\mathbf{M}(s_2|s_1)$ は2行2列の行列で、その要素を

$$\mathbf{M}(s_2|s_1) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

とおくことにする。さて、リング内の任意の2点 s_1 と s_2 間の $\mathbf{M}(s_2|s_1)$ は、1組の独立解 z_1 、 z_2 が求まっていれば、それらがともに(2.2.2)を満たすという条件より、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s_2|s_1) &= \\ & \begin{pmatrix} z_1(s_1) & z_2(s_1) \\ z'_1(s_1) & z'_2(s_1) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1(s_2) & z_2(s_2) \\ z'_1(s_2) & z'_2(s_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

と求まる。そこで、 $s=s_1$ における適当な1組の独立解 z_1 、 z_2 を、

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1 \\ \psi_{01} &= -\psi(s_1) \\ \psi_{02} &= \psi_{01} + \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

のようにとれば、(2.1.11)より

$$\begin{cases} z_1(s_1) = \omega_1 \\ z'_1(s_1) = \omega'_1 \\ z_2(s_1) = 0 \\ z'_2(s_1) = -\frac{1}{\omega_1} \end{cases} \quad (2.2.6)$$

となる。これが $s=s_2$ に移動した場合は、

$$\begin{cases} z_1(s_2) = \omega_2 \cos \psi_{12} \\ z'_1(s_2) = \omega'_2 \cos \psi_{12} - \frac{1}{\omega_2} \sin \psi_{12} \\ z_2(s_2) = -\omega_2 \sin \psi_{12} \\ z'_2(s_2) = -\omega'_2 \sin \psi_{12} - \frac{1}{\omega_2} \cos \psi_{12} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

と表されることになる。ここで簡単のため、

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \psi(s_2) - \psi(s_1) \\ \omega_1 &= \omega(s_1) \\ \omega_2 &= \omega(s_2) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

と置き換えた。したがって、(2.2.6)、(2.2.7)を(2.2.4)に代入して計算することにより、 $\mathbf{M}(s_2|s_1)$ が求まる。具体的に、 $\mathbf{M}(s_2|s_1)$ を記述すると以下のようなになる。

$$\begin{cases} m_{11} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \psi_{12} - \omega_1 \omega'_1 \sin \psi_{12} \\ m_{12} = \omega_1 \omega_2 \sin \psi_{12} \\ m_{21} = -\frac{1}{\omega_1 \omega_2} \{ (\omega_1 \omega'_1 - \omega_2 \omega'_2) \cos \psi_{12} \\ \quad + (1 + \omega_1 \omega'_1 \omega_2 \omega'_2) \sin \psi_{12} \} \\ m_{22} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \psi_{12} + \omega_2 \omega'_2 \sin \psi_{12} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

のようになる。

さらに、トランスファー行列 $\mathbf{M}(s_2|s_1)$ の行列

式 (Determinant) と対角和(Trace)を計算しておけば、

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M}(s_2|s_1) &= \\ m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{Trace } \mathbf{M}(s_2|s_1) &= \\ m_{11} + m_{22} &= \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \cos \psi_{12} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

となる。 $\det \mathbf{M}(s_2|s_1) = 1$ であることは本質的なことで、このことは位相空間における面積がトランスファー行列による変換によって不変であることを意味している。これは、リウヴィルの定理と呼ばれる。

2.3 ツイスパラメータ

2.2節では、トランスファー行列を、 ω と ψ で表せることを述べてきた。この節では、以下のように定義されたツイスパラメータと呼ばれる量を用いるとより簡単に表現することができるようになることを示す。ツイスパラメータは、

$$\begin{cases} \alpha(s) \equiv -\omega(s)\omega'(s) \\ \beta(s) \equiv \omega^2(s) \\ \gamma(s) \equiv \frac{1 + \omega^2(s)\omega'^2(s)}{\omega^2(s)} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

と定義する。特にこの $\beta(s)$ をベータ関数と呼んでおり、これはベータatron振動の振幅に関する重要な量である。また、この定義により、お互いには

$$\begin{cases} \alpha(s) = -\frac{\beta''(s)}{2} \\ \gamma(s) \equiv \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

の関係がある。ツイスパラメータの導入により、これまで述べてきた量をツイスパラメータに書き直す作業を以下で行なう。これは、重複になるように思うが、通常、電子ストレージリングで用いられる式は、ほとんどがツイスパラメータを使っ

で表されている。逆に言えば、ストレージリングの軌道を知るうえで、ツイスパラメータを知らないと不便である。

ではまず、位相を表す式(2.1.14)から見ていこう。これは、定義よりそのまま、

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds_1}{\beta(s_1)} \quad (2.3.3)$$

と書ける。すなわち、位相はベータ関数の逆数の積分となっているのである。では、式(2.1.15)はどうかと言え、しばしの計算ののち、ベータ関数のみで表せば、

$$\frac{1}{2} \beta'' \beta - \frac{1}{4} (\beta')^2 + K(s) \beta^2 = 1 \quad (2.3.4)$$

と表される。したがって、 $K(s)$ は、

$$K(s) = \frac{\alpha^2 + \gamma}{\beta} \quad (2.3.5)$$

となる。さらに、式(2.1.16)もツイスパラメータを用いることにより、

$$\begin{aligned} W &\equiv \frac{z^2 + (\alpha z - \beta z')^2}{\beta} \\ &= \gamma z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

のように書き換えることができる。この W は、クーラン・シュナイダー不変量と呼ばれるもので、 s によらない保存量となっている。 W を (z, z') 位相空間上で表すと、図2.2に示すような楕円になる。ここで、

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z}{\sqrt{\beta}} \\ P &= \frac{\alpha z - \beta z'}{\sqrt{\beta}} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

のように (z, z') 位相空間を規格化して (Z, P) 位相空間に変換してやると、 W は

$$W = Z^2 + P^2 \quad (2.3.8)$$

となるから、 (Z, P) 位相空間内において、 W は円

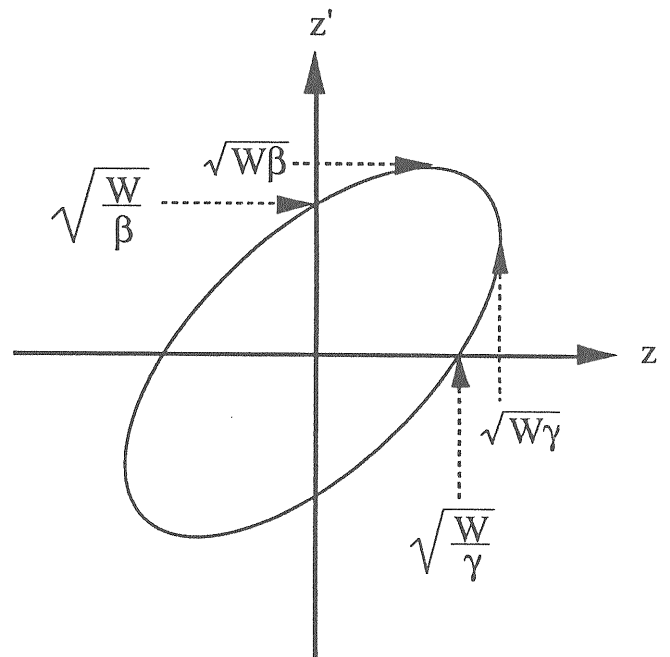


図2.2 (z, z') 位相空間におけるクーラン・シュナイダー不変量

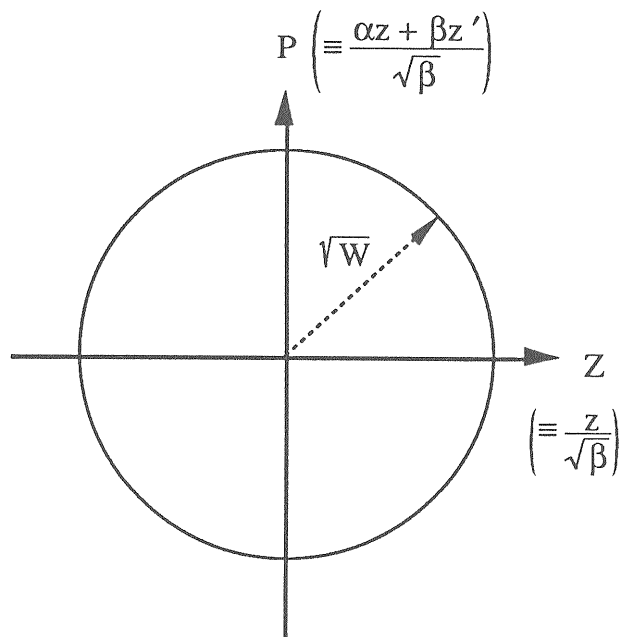


図2.3 規格化された (Z, P) 位相空間におけるクーラン・シュナイダー不変量

になることがわかる (図2.3)。

式(2.1.16)より、 $a^2 = W$ であるので、ベータatron振動の解 z をツイスパラメータとクーラン・シュナイダー不変量で表せば、

$$\begin{aligned}
z(s) &= \sqrt{W\beta(s)} \cos \{\psi(s) + \psi_0\} \\
z'(s) &= -\sqrt{\frac{W}{\beta(s)}} [\sin \{\psi(s) + \psi_0\} \\
&+ \alpha(s)\cos \{\psi(s) + \psi_0\}]
\end{aligned}
\tag{2.3.9}$$

と書くことができる。ここで、 W は通常 ε とも表現されており、 ε はエミッタンスと呼ばれている（エミッタンスは保存量である）。文字の違いの問題であるが、(2.3.9)の W を、 ε で置き換えると

$$\begin{aligned}
z(s) &= \sqrt{\varepsilon\beta(s)} \cos \{\psi(s) + \psi_0\} \\
z'(s) &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta(s)}} [\sin \{\psi(s) + \psi_0\} \\
&+ \alpha(s)\cos \{\psi(s) + \psi_0\}]
\end{aligned}
\tag{2.3.10}$$

となる。これは、設計軌道のまわりの微小振動であるベータatron振動を、ベータ関数およびエミッタンスで表した式となる。しかし、ここで述べたエミッタンスは、あくまでも1粒子の場合であること、また放射光を出さないとして電子の運動を扱っていることに注意しておく必要がある。項エネルギーの電子では、放射光をだすことによりベータatron振動は減衰（放射減衰）したり、また確率的に励起（放射励起または量子励起）されたりしており、振動の分布をとるとほぼガウス分布になる。そのため、電子ストレージリングでは、ガウス分布の 1σ をエミッタンスと定義している。したがって、放射光をほとんど出さない陽子シンクロtronや陽子ストレージリングのエミッタンスの定義とは異なっているので、気をつけておきたい。

さらに続けて、一般のトランスファー行列 $\mathbf{M}(s_2|s_1)$ をツイスパラメータで表現するときわめて簡単になる。すなわち、行列の要素はそれぞれ

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \{ \cos \psi_{12} + \alpha_1 \sin \psi_{12} \} \\
m_{12} &= \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \psi_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \{ (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \psi_{12} \\
&+ (1 + \alpha_1 \alpha_2) \sin \psi_{12} \}
\end{aligned}$$

$$m_{22} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \{ \cos \psi_{12} - \alpha_2 \sin \psi_{12} \}
\tag{2.3.11}$$

となる。

次に、リング一周を表すトランスファー行列を調べてみよう。それは $\mathbf{M}_C(s) = \mathbf{M}(s+C|s)$ であるから、(2.3.11)とツイスパラメータが周期関数であることを考慮すれば、

$$\begin{cases}
m_{11} = \cos \psi_C + \alpha \sin \psi_C \\
m_{12} = \beta \sin \psi_C \\
m_{21} = -\gamma \sin \psi_C \\
m_{22} = \cos \psi_C - \alpha \sin \psi_C
\end{cases}
\tag{2.3.12}$$

となり極めて簡単な式となる。ここで、

$$\psi_C = \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)}
\tag{2.3.13}$$

であり、これはリング一周の位相の進みを表している。さらに、これを 2π で割った量をベータatronチューン（または、ベータatron振動数）と呼び

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^C \frac{ds}{\beta(s)}
\tag{2.3.14}$$

で与えられる。ベータatronチューンは、 s によらない値である。 $\mathbf{M}_C(s)$ は、また、

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_C(s) &= I \cdot \cos \psi_C + J(s) \cdot \sin \psi_C \\
I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \quad (2.3.15)$$

と表せ、

$$J^2 = -I \quad (2.3.16)$$

であるので、リングを n ターンしたときのトランスファー行列は、簡単に

$$M_c^n(s) = I \cdot \cos(n\psi_c) + J \cdot \sin(n\psi_c) \quad (2.3.17)$$

と書ける。ここで、リング一周のトランスファー行列においても、行列式と対角和はそれぞれ、

$$\det M_c(s) = \cos^2(\psi_c) - \alpha^2(s)\sin^2(\psi_c) + \beta(s)\gamma(s)\sin^2(\psi_c) = 1 \quad (2.3.18)$$

で、やはりリウヴィルの定理が成り立っていることが確認される。また、対角和の方は、

$$\text{Trace } M_c = 2\cos(\psi_c) \quad (2.3.19)$$

となる。したがって、ベータatron振動が安定になるためには、この関係式により直ちに、

$$\text{Trace } M_c < 2 \quad (2.3.20)$$

でなくてはならないことがわかる。

2.4 ハミルトニアンおよび作用変数・角変数

これまでは、運動方程式をもととして、1次元のベータatron振動について調べてきた。ここで、少し解析力学の手法（正準変換）を導入することにしたい。それは、この方法を用いると非線形の摂動項があるときに比較的取り扱いが便利になるという理由からである。まず、この節で無摂動系の1次元ベータatron振動について準備をしておき、次章で摂動項がある場合について述べるこ

にする。

1次元ベータatron振動のハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2} K(s)z^2 + \frac{1}{2} p^2 \quad (2.4.1)$$

と書ける。ハミルトンの正準方程式は、

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial z} \end{cases} \quad (2.4.2)$$

であるから、これに(2.4.1)を代入すると、簡単に(2.1.4)式が得られる。(2.4.1)のハミルトニアンは、一組の正準変数 (z,p) で記述されているが、ここで作用変数 J および角変数 ψ と呼ばれる一組の正準変数 (ψ,J) に変換することにする（ある正準変数から新たな正準変数に変換することを正準変換するという）。この正準変換の母関数を、

$$F_1(z, \psi, s) = -\frac{z^2}{2\beta} (\tan \psi + \alpha) \quad (2.4.3)$$

とすると、正準変換によって得られる新旧の変数の関係および新しいハミルトニアン H_1 は、以下のようなになる。

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ J = -\frac{\partial F_1}{\partial \psi} \\ H_1 = H + \frac{\partial F_1}{\partial s} \end{cases} \quad (2.4.4)$$

したがって、具体的に F_1 を入れて計算すると、

$$\begin{cases} z = \sqrt{2J\beta(s)} \cos \psi(s) \\ p = -\sqrt{\frac{J}{2\beta(s)}} \{ \sin \psi(s) + \alpha \cos \psi(s) \} \\ H_1 = \frac{J}{\beta(s)} \end{cases} \quad (2.4.5)$$

が得られる。

新しいハミルトニアンを用いたハミルトンの正準方程式は、(2.4.4)と同様に

$$\begin{cases} \frac{dJ}{ds} = -\frac{\partial H_1}{\partial \psi} \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial H_1}{\partial J} \end{cases} \quad (2.4.6)$$

なので、新しいハミルトニアン H_1 を入れて計算すると、第1式より

$$J = \text{Constant}$$

となる。このことから、作用変数 J は運動の恒量となっていることがわかる。第2式からは、角変数が求められ、

$$\psi(s) = \psi(0) + \int_0^s \frac{ds_1}{\beta(s_1)} \quad (2.4.7)$$

となっている。ここで、 $\psi(0)$ は $\psi(s)$ の初期値を表していて、 $\psi(0)=0$ とすれば、(2.3.3)式と同じになる。また、(2.4.5)を用いて(2.3.6)で与えられる W を計算すると、

$$W = 2J \quad (2.4.8)$$

と求められる。すなわち、作用変数 J がクーラン・シュナイダー不変量を2で割った量となっている。そのため、作用変数 J は同時にエミッタンスに相当する量となっているのである。 (z, z') 位相空間上で、 J および ψ を示したのが、図2.4である。

さて、新しく正準変換されたハミルトニアン H_1 は、 J が一定であり、角変数 ψ にはよらないが、まだ $\beta(s)$ の存在により s の関数となっている。そこで、くどいようだが、さらに正準変換を施してハミルトニアンを s にもよらない完全な恒量にしておくことにする。その変換による新しい正準変数を、 (ψ_1, J_1) とし母関数 F_2 を

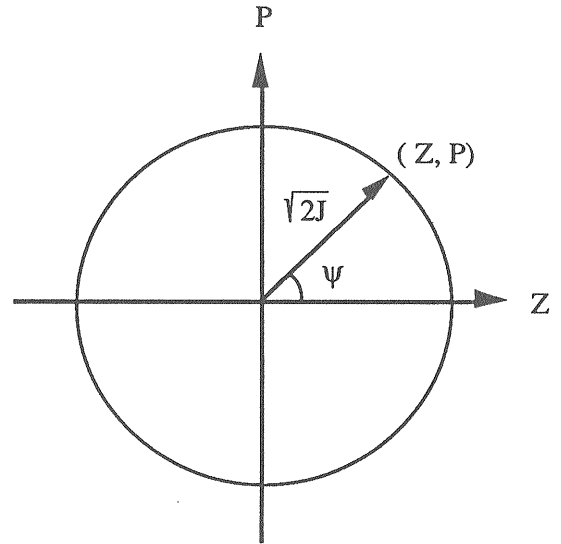


図2.4 規格化された (Z, P) 位相空間上での作用変数および角変数

$$F_2(\psi, J_1; s) = J_1 \left[\psi + \frac{v}{R} s - \int_0^s \frac{ds_1}{\beta(s_1)} \right] \quad (2.4.9)$$

にとる。ここで、 v と R はそれぞれベータトロンチューンとリングの半径である。正準変換の結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi + \frac{v}{R} s - \int_0^s \frac{ds_1}{\beta(s_1)} \\ J_1 &= J \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$H'_1 = \frac{v}{R} J_1$$

したがって、 v 、 R は定数であることから、新たな正準変換により、新しいハミルトニアンは s にもよらない恒量として表すことができるようになった。さらに、ハミルトニアンの独立変数 s を θ に変換した表現も書いておくことにする。 s と θ の関係は、

$$s = R \theta \quad (2.4.11)$$

により、

$$z = \sqrt{2J_1} \beta \cos(\psi_1 + \phi)$$

$$p = -\sqrt{\frac{J_1}{2\beta}} \times \{ \sin(\psi_1 + \phi) + \alpha \cos(\psi_1 + \phi) \}$$

$$\psi = \psi_1 + \phi, \quad \phi = \int_0^s \frac{ds_1}{\beta} - \nu \theta$$

$$J_1 = J$$

$$H'_1(\psi_1, J_1, \theta) = \nu J_1 \quad (2.4.12)$$

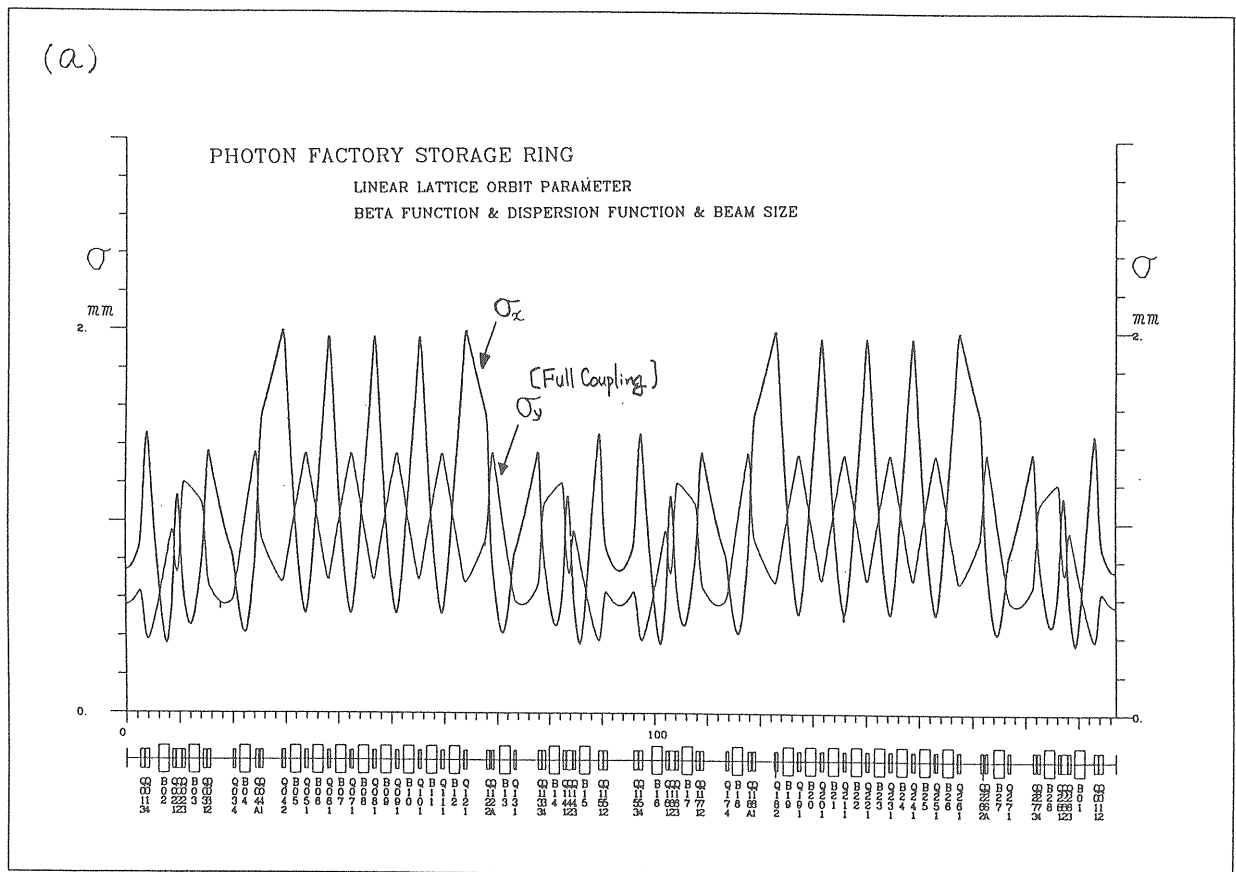
のようになる。

2.5 線形ラティス

これまで、設計運動量の電子について、理想的な場合の1次元のベータatron振動を概観してきた。その中で、ストレージリングの軌道でよく用いられているトランスファー行列およびツイスパラメータ等について簡単に解説してきた。理想的な場合のベータatron振動を考えることができたわけは、実はリングが偏向電磁石と4極電磁石だけで構成されていて、しかも線形項だけを取り入れ高次項は省略してきたからである。リングは、

さまざまな種類の電磁石の配列によって構成されているが、その配列のことをラティスと称している。電磁石が、荷電粒子に対して、プリズムやレンズのように光学的な働きをすることから、その配列をオプティクスと呼ぶこともある。偏向電磁石と4極電磁石そして何も置いていない空間（ドリフトスペース）だけで構成されているラティスのことを線形ラティス（リニアラティス、Linear Lattice）という。電子ストレージリングを設計するという場合、線形ラティスが最も基本であり、軌道に関するパラメータのほとんどが、この線形ラティスによって決まる。

線形ラティスの設計は、最近ではほとんど計算機によって行なわれるようになった。そのための計算機コードも数多く存在する。計算機のおかげで、手計算では扱えなかったような複雑なラティスも設計できるようになったし、最適化も行なえるようになった。線形ラティスの具体的な設計の話は、ここでは省略するが、実際、PFリングの線形ラティスについて、計算機コードMAGICを用いて計算されたおもな軌道パラメータ（ベータ関数、ディスパージョン関数とビームサイズ）を、図2.5に示す。なお、これらとともに同時に計算される他の軌道パラメータはすでに第1章の表1.2のなかに示されている。



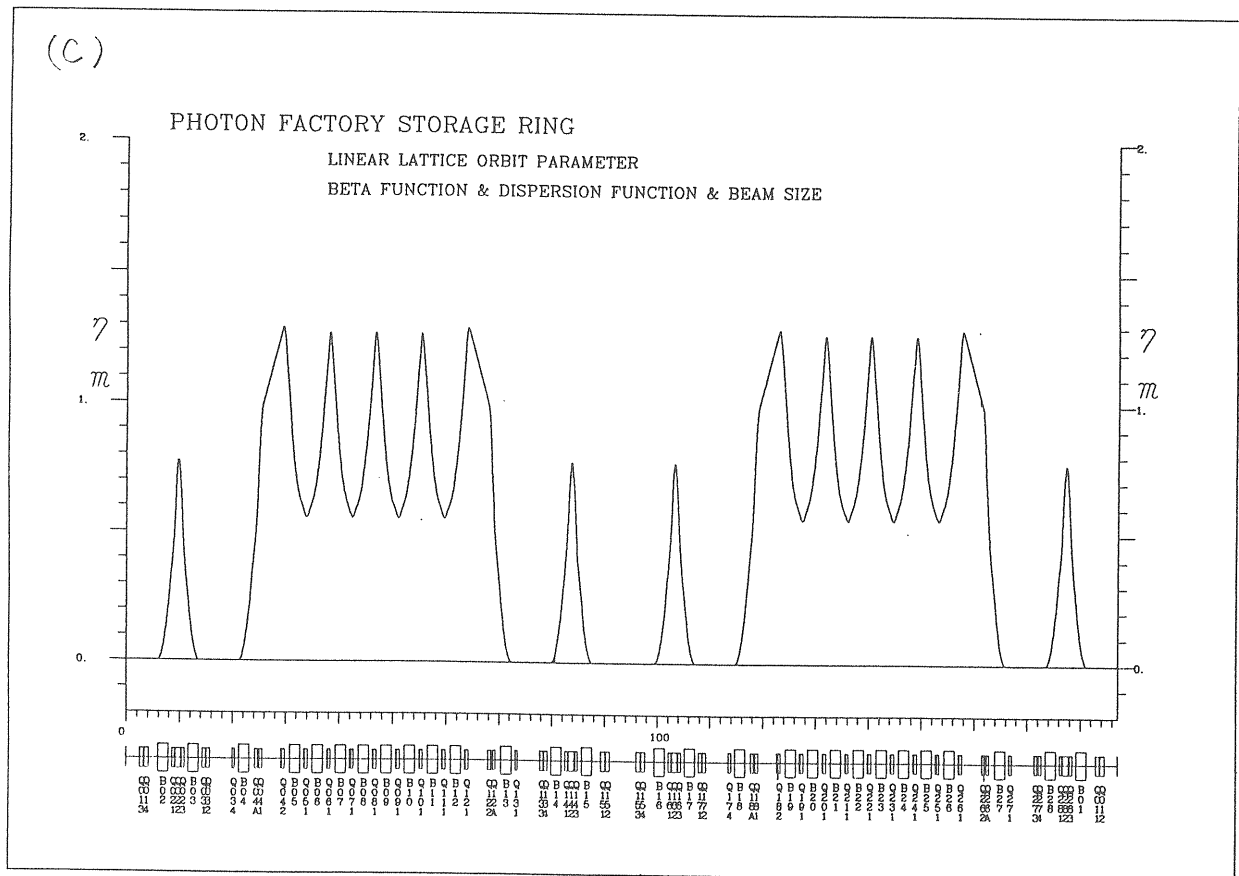
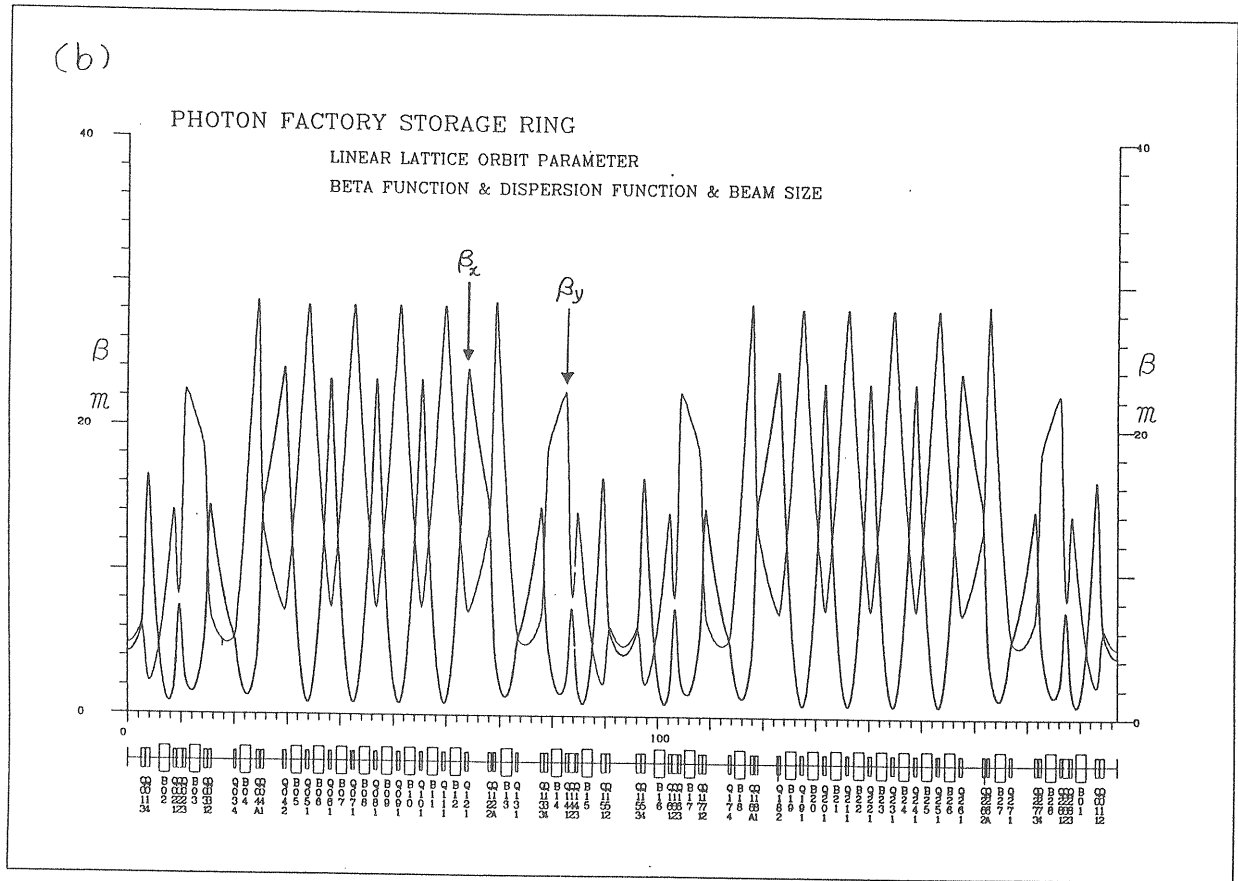


図2.5 PFリングの線形ラティスから得られる軌道パラメータ
 (a) ビームサイズ(ただし、垂直方向は、Full Couplingの時のビームサイズ)、
 (b) ベータ関数、(c) ディスパーション関数の順

第3章 摂動のかかったベータトロン振動

第2章では、理想的な場合の1次元ベータトロン振動について簡単に説明した。しかし、実際の電子ストレージリングには、さまざまな原因から発生する摂動が働いている。この摂動のため、ベータトロン振動の種々のパラメータが理想的な場合からずれてくる。例えば、実際に周回する電子の閉軌道が設計軌道からずれたり（閉軌道の歪、Closed Orbit Distortion、C.O.D.）、ベータトロン関数が歪んだり、ベータトロンチューンがずれる

（チューンシフト）、などが起こる。これらの歪あるいはずれがひどい場合には、ビームが安定にリングを周回する事ができなくなったりする。光源リングなどでは、たとえ電子がリングをまわったとしても、その軌道が設計軌道からずれてがたがたであるため、放射光がビームラインに導かれない、あるいは分光器・検出器にあたらないということなども起こってくる。したがって、リングの設計段階では、さまざまな摂動によってどの程度これら軌道のパラメータが歪むかを予測して、補正のための電磁石を配置し、できる限り歪やずれを小さく抑えるように配慮される。また、リングが運転されている場合にも、軌道パラメータを定期的に測定してずれや歪が起こっていないかを確認し、ずれている場合は逐次補正して安定な放射光を供給するよう努めている。

この章では、いくつかの原因から発生する摂動がおよぼすベータトロン振動について解説し、実際のリングでよく用いられる重要な式を導くことにしたい。

さて、摂動のかかったベータトロン振動の運動方程式は、理想的な場合の運動方程式(2.1.1)をもとに、

$$z'' + K(s)z = f \quad (3.1.1)$$

と書ける。ここで、 z は、水平方向 x と垂直方向 y を代表させたベータトロン振動を意味する。 f は、摂動を表す関数である（円形加速器の場合、 f は周期関数となる）。 f のタイプによってベータトロン振動のパラメータがいかににずれたり歪んだりするかが決まる。ここでは、良く知られた、以下の4つのタイプの摂動について解説する。

(1) 偏向磁場の誤差

偏向磁場の誤差を ΔB とすると、 f は次のように書ける。

$$f = F(s) = \frac{\Delta B(s)}{B\rho} \quad (3.1.2)$$

偏向磁場の誤差の原因となるものには、まず偏向電磁石の誤差磁場がある。それは偏向電磁石毎の磁場のばらつきによるもので、垂直方向の誤差磁場となる。また、偏向電磁石の回転誤差がある。これは、設計軌道に対して回転していると水平方向の磁場が生じることによる。さらに、4極電磁石の設置誤差、すなわち4極電磁石の磁場中心が設計軌道からずれている場合である。これは、ずれる方向により水平および垂直方向の誤差磁場となって現われる。

(2) 磁場勾配の誤差

磁場勾配の誤差を ΔG とすると、 f は次のように書ける。

$$f = -\frac{\Delta G(s)}{B\rho}z = -k(s)z \quad (3.1.3)$$

磁場勾配の誤差は、4極電磁石の誤差磁場である。偏向電磁石と同じように電磁石毎の磁場勾配のばらつきによる。それから、6極電磁石の設置誤差もきく。低エミッタンスリングなどでは、6極磁場が強いため、この誤差は無視できない。

(3) 運動量誤差

f は、次のように書ける。

$$f \propto \frac{\Delta p}{p} \quad (3.1.4)$$

設計運動量（設計エネルギー）からずれた電子の運動について調べる。

(4) 非線形磁場（多極磁場）

f は、次のように書ける。

$$f = \sum_{m,n} V_{mn} x^m y^n \quad (3.1.5)$$

6極電磁石や8極電磁石などの多極磁場がリングに導入された場合、これらの非線形磁場によりベータトロン振動がどのようになるか調べる。

では、(1) から (4) の摂動について、節ごとにわけて概観するとしよう。

3.1 偏向磁場の誤差

偏向磁場の誤差による摂動のかかったベータトロン振動の式は、(3.1.1) と(3.1.2)より、

$$z'' + K(s) z = F(s) = \frac{\Delta B}{B\rho} \quad (3.1.6)$$

となる。この方程式を解くために、まず以下の変換を施すことにする。

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{\beta}} \quad (3.1.7)$$

$$\phi = \frac{1}{v} \int_0^s \frac{ds_1}{\beta(s_1)} \quad (3.1.8)$$

ここで、 β 、 v はそれぞれベータ関数とベータトロンチューンである。(この変換は、クーラン・シュナイダー変換と呼ばれる) (3.1.6)式の右辺を0にした式、すなわち摂動のない場合の運動方程式の解は、(2.3.1)より

$$z = \sqrt{\epsilon\beta} \cos(\psi + \psi_0)$$

であり、またこの微分は

$$z' = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\beta}} \left\{ \alpha \cos(\psi + \psi_0) + \sin(\psi + \psi_0) \right\} \quad (3.1.9)$$

となる。ここで、 ϕ と ψ には

$$\psi = v\phi \quad (3.1.10)$$

の関係がある。(3.1.8)から、

$$\eta = \sqrt{\epsilon} \cos(\psi + \psi_0)$$

$$\frac{1}{v} \frac{d\eta}{d\phi} = -\sqrt{\epsilon} \sin(\psi + \psi_0) \quad (3.1.11)$$

であり、これを(3.1.9)に代入すると、

$$z' = -\alpha \frac{\eta}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}v} \frac{d\eta}{d\phi} \quad (3.1.12)$$

と求められる。(3.1.12)をさらにsで微分すると、

$$z'' = \left\{ \frac{1}{2} \beta'' \beta^{-1/2} - \frac{1}{4} (\beta')^2 \beta^{-3/2} \right\} \eta + \frac{1}{v^2 \beta^{3/2}} \frac{d^2 \eta}{d\phi^2} \quad (3.1.13)$$

となり、

$$\frac{1}{2} \beta'' \beta - \frac{1}{4} (\beta')^2 + K(s) \beta^2 = 1 \quad (3.1.14)$$

なる関係を使うと、(3.1.6)式は、

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + v^2 \eta = v^2 \beta^{3/2} F(s) \quad (3.1.15)$$

に変換される。さらに、

$$f(\phi) = \beta^{3/2} F(s) \quad (3.1.16)$$

とおき、

$$\frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + v^2 \eta = v^2 f(\phi) \quad (3.1.17)$$

としておく。クーラン・シュナイダー変換によって、もとの運動方程式が全く調和振動子の式と同じになっている。すなわち、この変換によりベータトロン振動が調和振動的に取り扱うことができるようになる。

さて、(3.1.18)式を具体的に解くわけであるが、求める解は周期解であるので、そのため $\eta(\phi)$ 、 $f(\phi)$ を、以下のようにフーリエ級数に展開しよう。

$$f(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\phi}$$

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \quad (3.1.18)$$

$$\eta(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k e^{ik\phi} \quad (3.1.19)$$

そして、(3.1.18)、(3.1.19)を(3.1.17)に代入して、 η_k を求めると、次の式を得る。

$$\eta(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{v^2 - k^2} e^{ik\phi} \quad (3.1.20)$$

さらに、 f_k を代入すると、

$$\eta(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi_1) d\phi_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{v^2 - k^2} e^{ik(\phi - \phi_1)} \quad (3.1.21)$$

を得る。 $\eta(\phi)$ は、Appendix Aより

$$\eta(\phi) = \frac{v}{2\sin(\pi v)} \int_0^{\phi+2\pi} f(\phi_1) \cos v(\pi + \phi - \phi_1) d\phi_1 \quad (3.1.22)$$

と表すことができる。この式に、(3.1.16)を代入し、変数 ϕ を s に、 η を z の戻してやると、

$$z(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sin(\pi v)} \times \int_s^{s+C} \sqrt{\beta(s_1)} F(s_1) \cos \{(\pi v + \psi(s) - \psi(s_1))\} ds_1 \quad (3.1.23)$$

が求まる。これが、偏向磁場の誤差 $F(s)$ による $C.O.D.$ (閉軌道の歪み)を与える式となる。 $C.O.D.$ は、分母の $\sin(\pi v)$ によって、ベータatronチューンが、整数に近づくにつれて大きくなる。

この現象は整数共鳴と呼ばれ、ビームを失わせる非常に危険な共鳴である。したがって、実際にストレージリングを運転するときには、ベータatronチューンを整数にすることは避けねばならない。また、(3.1.20)式より、 $C.O.D.$ は、ベータatronチューンに近いハーモニクスが大きく寄与していることが分かる(ただし、 f_k が極端に小さくない場合であるが)。逆に言えば、 $C.O.D.$ を測定してそれがリング一周で何回振動しているかを調べれば、ベータatronチューンの整数値をほぼ特定できることになる。

リング一周に存在するすべての偏向磁場の誤差 $F(s)$ が分かっているならば、(3.1.23)式より原理的に $C.O.D.$ を計算することはできる。しかし、リングの設計段階では誤差磁場がはっきりわかっていないことが多い。実際のリングでも、定量的にそれぞれの電磁石の誤差磁場を把握しているわけではないことが多い。そうではあるが、やはり大雑把な $C.O.D.$ の見積をしておくことは、設計段階で $C.O.D.$ 補正のための補正電磁石を何台配置するか、それらの磁場の強さをどの程度にする必要があるかを定めるうえで重要である。そのため、統計的な取り扱いをすることによって、 $C.O.D.$ の大きさがある程度推定する方法が用いられる。すなわち、リング一周にわたって、誤差磁場がランダムに分布していると仮定して、 $C.O.D.$ を見積るとする。そこで、

$$W(\phi) = \eta(\phi)^2 + \left\{ \frac{1}{v} \frac{d\eta(\phi)}{d\phi} \right\}^2 \quad (3.1.24)$$

で定義される量 $W(\phi)$ を考える。偏向磁場の誤差がない場合は、 $\eta(\phi)$ が(3.1.21)式で与えられるので、直ちに、

$$W(\phi) = \varepsilon \quad (3.1.25)$$

となる。これは、第1節にでてきた、クーラン・シュナイダー不変量であり、保存量となる。しかし、 $\eta(\phi)$ が $C.O.D.$ を表している場合は、(3.1.23)式となり、

$$\frac{1}{v} \frac{d\eta(\phi)}{d\phi}$$

$$= -\frac{v}{2\sin(\pi v)} \int_0^{\phi+2\pi} f(\phi_1) \sin v(\pi + \phi - \phi_1) d\phi_1 \quad (3.1.26)$$

であるから、

$$W(\phi) = \frac{v^2}{4\sin^2(\pi v)} \times \iint_0^{\phi+2\pi} f(\phi_1) f(\phi_2) \cos v(\phi_1 - \phi_2) d\phi_1 d\phi_2 \quad (3.1.27)$$

と求められる。これより、 $W(\phi)$ は保存量とはならないことが分かる。そこで、前に述べたように、誤差磁場がリングにランダムに分布しているとして、 $W(\phi)$ の期待値を計算してみよう。そのため、(3.1.27)を

$$W(\phi) = \frac{v^2}{4\sin^2(\pi v)} \times \sum_i \sum_j f(\phi_i) f(\phi_j) \cos v(\phi_i - \phi_j) \Delta\phi_i \Delta\phi_j \quad (3.1.28)$$

のように積分の形を級数に書き換えておき、 $F(\phi)$ に具体的な式を入れると、

$$W(\phi) = \frac{1}{4\sin^2(\pi v)} \sum_i \sum_j \times \sqrt{\beta_i} \sqrt{\beta_j} \left(\frac{\Delta B_i}{B\rho} \right) \left(\frac{\Delta B_j}{B\rho} \right) \cos v(\phi_i - \phi_j) l_i l_j \quad (3.1.29)$$

となる。ここで、

$$f(\phi) = \beta^{3/2} \frac{\Delta B}{B\rho}$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{v\beta} = \frac{l}{v\beta} \quad (3.1.30)$$

であり、 l は誤差磁場のある区間の長さとした。

この準備の後、数多くのリングを設計したとして、 $W(\phi)$ の期待値を計算する。それぞれ異なる磁石の誤差磁場には相関がないと考えると、

$$\left\langle \left(\frac{\Delta B_i l_i}{B\rho} \right) \cdot \left(\frac{\Delta B_j l_j}{B\rho} \right) \right\rangle = 0, \quad i \neq j \quad (3.1.31)$$

なので、期待値は

$$\langle W(\phi) \rangle = \frac{1}{4\sin^2(\pi v)} \sum_i \beta_i \left\langle \left(\frac{\Delta B_i l_i}{B\rho} \right)^2 \right\rangle \quad (3.1.32)$$

と得られる。($\langle \rangle$ は期待値を表す。)

これは、 η^2 の期待値であったわけだから、結局、 $C.O.D.$ の期待値は、

$$\langle z(s) \rangle = \sqrt{\frac{\beta(s)}{4\sin^2(\pi v)} \sum_i \beta_i \left\langle \left(\frac{\Delta B_i l_i}{B\rho} \right)^2 \right\rangle} \quad (3.1.33)$$

で与えられる。

次に、偏向磁場の誤差がリングの一ヶ所に局在している場合の $C.O.D.$ を考える。誤差磁場のある領域を l とすると、 $C.O.D.$ は(3.1.23)式より

$$z(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)} \sqrt{\beta(s_1)}}{2\sin(\pi v)} \cos \{ \pi v - |\psi(s) - \psi(s_1)| \} \cdot \theta_1$$

$$\theta_1 = F(s_1) l = \frac{\Delta B l}{B\rho} \quad (3.1.34)$$

で与えられる。ただし、リング上の位置 s と s_1 での位相の関係を考慮している。この式は、シングルキックによる $C.O.D.$ の式である。シングルキックは補正用ステアリング電磁石で与えることができるので、この式は、 $C.O.D.$ の補正やローカルバンブをつくる時に良く用いられる式である。

3.2 磁場勾配の誤差

次に磁場勾配の誤差がある時の、ベータトロン

振動について解説する。磁場勾配の誤差がある時の運動方程式は、(3.1.3)式より

$$z'' + K(s)z = -k(s)z \quad (3.2.1)$$

である。摂動項 $k(s)$ が小さく、またベータトロンチューンが危険な共鳴から離れている場合は、1次近似のトランスファー行列を用いるのが有効である。ここでは、まずこの方法で調べていくことにする。

摂動のない場合のリング一周のトランスファー行列 M_0 を、(2.3.12)より、

$$M_0 = \begin{pmatrix} \cos\mu_0 + \alpha\sin\mu_0 & \beta\sin\mu_0 \\ -\gamma\sin\mu_0 & \cos\mu_0 - \alpha\sin\mu_0 \end{pmatrix}$$

とおく。ここで、 μ_0 はリング一周の位相の進みを示す。リングの一ヶ所 s_1 にある長さ ds_1 の勾配誤差 $k(s_1)$ を表す行列 M_1 は、

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1)ds_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

で与えられる。摂動のかかった場合の行列 M は、

$$M = M_1 M_0 \quad (3.2.3)$$

であり、また

$$M = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha\sin\mu & \beta\sin\mu \\ -\gamma\sin\mu & \cos\mu - \alpha\sin\mu \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

とおいて、行列の計算を行ない、(3.2.3)と(3.2.4)のトレースを比較すると、

$$2\cos\mu = 2\cos\mu_0 - k(s_1)ds_1 \beta_0 \sin\mu_0 \quad (3.2.5)$$

である。ここで、

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu \quad (3.2.6)$$

とおき、式(3.2.5)に代入し $\Delta\mu$ が小さいとして整理

すると、

$$\Delta\mu = \frac{1}{2} k(s_1)\beta ds_1 \quad (3.2.7)$$

となる。磁場勾配の誤差がリング全体に分布している場合は、(3.2.7)をリング一周にわたって積分すればよい。さらに、ベータトロンチューンとリング一周の位相の進みは、

$$\Delta\mu = 2\pi \Delta\nu \quad (3.2.8)$$

であるので、結局、

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^c k(s_1)\beta(s_1)ds_1 \quad (3.2.9)$$

が得られる。これは、磁場勾配の誤差によって生ずるベータトロンチューンシフトを表す式となる。(3.2.9)式より、ベータ関数の大きな場所の勾配誤差が、チューンシフトに大きく寄与することがわかる。

さて、これまでの説明で、ベータトロンチューンがずれることがわかったと思うが、他のパラメータはどうなるであろうか。結論を言えば、ツイスパラメータも磁場勾配の誤差により歪むことになる。以下で、とくにベータ関数の歪みについて調べることにする。

まず、(2.3.4)式より、磁場勾配の誤差がない場合のベータ関数を β_0 とすると、

$$\frac{1}{2} \beta_0'' \beta_0 - \frac{1}{4} (\beta_0')^2 + K(s)\beta_0^2 = 1 \quad (3.2.10)$$

となる。勾配誤差 $k(s)$ があるときベータ関数が歪むとして、その歪みを $\Delta\beta$ で表し、歪んだ後のベータ関数を β とすると、

$$\frac{1}{2} \beta'' \beta - \frac{1}{4} (\beta')^2 + \{K(s) + k(s)\}\beta^2 = 1 \quad (3.2.11)$$

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta \quad (3.2.12)$$

と表される。具体的に、(3.2.12)を(3.2.11)に代入し

て、(3.2.10)を用いて整理すると、

$$\left[\beta_0 \left(\frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right)' \right]' + \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) + 2k(s)\beta_0 = 0 \quad (3.2.13)$$

が得られる。ただし、 $\Delta\beta$ が小さいとしてその2次以上の項は省略し、 $\Delta\beta$ と $k(s)$ の積の項も2次項と見なし省略した。また、(3.2.13)式を導くため、

$$\frac{\Delta\beta' \beta_0 - \Delta\beta \beta_0'}{\beta_0^2} = \left(\frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right)' \quad (3.2.14)$$

なる関係が用いられている。(3.2.13)式において、 s から ϕ への変換を施すと、以下ようになる。

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) + 4v^2 \left(\frac{\Delta\beta}{\beta_0} \right) = -2k(s)v^2\beta^2 \quad (3.2.15)$$

ここで、

$$f(\phi) = -\frac{1}{2}k(s)\beta^2 \quad (3.2.16)$$

とおく。ところで、 $\Delta\beta/\beta_0$ もやはり周期関数となるはずであるから、もつめる解はもちろん周期解である。そこで、前節のやり方と全く同じようにフーリエ級数による方法で周期解を得ることができる。すなわち、

$$\frac{\Delta\beta(\phi)}{\beta_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\phi} \quad (3.2.17)$$

$$f(\phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\phi}$$

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \quad (3.2.18)$$

のようにフーリエ級数に展開して、それぞれを(3.2.15)に代入し計算したのち

$$\frac{\Delta\beta(\phi)}{\beta_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2v^2)f_k}{(2v^2) - k^2} e^{ik\phi} \quad (3.2.19)$$

が得られる。さらに、 f_k 、(3.2.16)を代入し整理すると

$$\frac{\Delta\beta(\phi)}{\beta} = \frac{-1}{2\sin(2\pi v)} \times \int_s^{s+C} k(s_1)\beta^2 \cos\{2v(\pi + \phi - \phi_1)\} d\phi_1 \quad (3.2.20)$$

となる。そして、変数 ϕ を s に戻しておけば、

$$\frac{\Delta\beta(s)}{\beta} = \frac{-1}{2\sin(2\pi v)} \times \int_s^{s+C} k(s_1)\beta(s_1) \cos 2\{\pi v + \psi(s) - \psi(s_1)\} ds_1 \quad (3.2.21)$$

という式が得られる。これが、磁場勾配の誤差によるベータ関数の歪みを表す式である。ベータ関数の歪みは、分母の $\sin(2\pi v)$ によって、ベータトロンチューンが整数および半整数の場合に大きくなる。この現象は、*C.O.D.*の場合と同様で、やはりリングの運転に於ては避けなければならない。特に、ベータトロンチューンが半整数で起こる共鳴のことを、半整数共鳴あるいはHalf Interger Resonanceと呼ぶ。また、(3.2.19)を見れば分かるように、ベータトロンチューンの2倍のハーモニックスが、ベータ関数の歪みに大きく寄与している。

ここで、正準摂動論に基づいた手法により、磁場勾配の誤差によるチューンシフトを求めてみることにしよう。正準摂動論の簡単な解説は、Appendix Bに示した。まず、磁場勾配の誤差 $k(s)$ がある場合のハミルトニアンは、(2.4.1)をもとに次のように書ける。

$$H = \frac{1}{2}K(s)z^2 + \frac{1}{2}p^2 + V$$

$$V = \frac{1}{2}k(s)z^2 \quad (3.2.22)$$

第3項が、摂動項である。この式において正準変数 (z,p) から正準変数 (ψ,J) への正準変換を施す。するとこのハミルトニアンは、(2.4.12)から、

$$H(\psi, J, \theta) = vJ + RV(\psi, J, \theta)$$

$$V(\psi, J, \theta) = Jk\beta \cos^2(\psi + \phi)$$

$$\phi = \int_0^s \frac{ds_1}{\beta} - v\theta \quad (3.2.23)$$

となる。ここで、三角関数の倍角の公式より

$$\cos^2\psi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\psi) \quad (3.2.24)$$

であるから、

$$V(\psi, J, \theta) = \frac{1}{2}Jk\beta \{1 + \cos 2(\psi + \phi)\} \quad (3.2.25)$$

となる。Appendix Bより、

$$\langle V(J_1) \rangle = \frac{J_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} k\beta d\theta \quad (3.2.26)$$

となるので、結局チューンシフト Δv は

$$\Delta v = \frac{R}{\partial J_1} \langle V(J_1) \rangle = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} k\beta d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^c k(s)\beta(s) ds \quad (3.2.28)$$

と求められる。これは、トランスファー行列を用いて得られたベクトロン振動のずれの式(3.2.9)に完全に一致する。

3.3 運動量誤差

ここでは、設計運動量（エネルギー）からずれた電子の運動について調べることにする。運動量のずれた電子の運動方程式は、

$$x'' + \frac{p_0}{p}K_x(s)x = \frac{p - p_0}{p} \frac{1}{\rho(s)}$$

$$y'' + \frac{p_0}{p}K_y(s)y = 0 \quad (3.3.1)$$

で与えられる。ただし、 $K_{x,y}(s)$ はそれぞれ、

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2(s)} + K(s)$$

$$K_y(s) = -K(s) \quad (3.3.2)$$

である。まず、

$$\delta_p \equiv \frac{p - p_0}{p} \quad (3.3.3)$$

$$\delta_0 \equiv \frac{p - p_0}{p_0} \quad (3.3.4)$$

を定義する。 δ_p を δ_0 で表すと、

$$\delta_p = \frac{1 + \delta_0}{\delta_0} = \delta_0 - \delta_0^2 + \delta_0^3 - \dots \quad (3.3.5)$$

となり、1次近似（線形近似）では δ_p は δ_0 と一致する。したがって、(3.3.1)はその1次近似により、

$$x'' + K_x(s)x = \frac{\delta_0}{\rho(s)} + \delta_0 K_x(s)x$$

$$y'' + K_y(s)y = \delta_0 K_y(s)y \quad (3.3.6)$$

に書き換えられる。この式から、水平方向では、運動量のずれた電子の場合、2つの種類の摂動がかかることが分かる。すなわち、電子は偏向電磁石で、 $\delta_0/\rho(s)$ なる偏向磁場の誤差を感じ、4極電磁石では、 $\delta_0 K(s)$ に相当する磁場勾配の誤差

を感ずることになる。ただし垂直方向に関しては、4極電磁石の場合のみを考えればよい。そこで、水平方向において、次のように電子の軌道を分離する。すなわち

$$x = x_\beta + x_\varepsilon \quad (3.3.7)$$

とにおいて、

$$x_\beta'' + K(s) x_\beta = \delta_0 K_x(s) x_\beta \quad (3.3.8)$$

$$x_\varepsilon'' + K(s) x_\varepsilon = \frac{\delta_0}{\rho(s)} \quad (3.3.9)$$

に分離する。ここで、簡単のため $K_x(s)$ を $K(s)$ と書き直した。(3.3.9)は、3.1節で述べたC.O.D.を与える運動方程式と同じであり、(3.3.8)式は、3.2節で調べられた、チューンシフトやベータ関数などの歪みを与える運動方程式に相違ない。つまり、運動量のずれた粒子は、(3.3.8)式の周期解であるC.O.D.の周りを、ベータatronチューンがずれてまわっていることになる。以下、具体的に式を導いていくことにする。まず、(3.3.9)からはじめることにするが、 x_ε を。

$$x_\varepsilon = \eta(s) \delta_0 \quad (3.3.10)$$

のように定義する。ここで、 $\eta(s)$ は、ディスパージョン関数と呼ばれ、ベータ関数と同じくストレージリングの軌道において重要なパラメータである。(3.3.11)を(3.3.9)に代入すると δ_0 が約されて、

$$\eta'' + K(s) \eta = \frac{1}{\rho(s)} \quad (3.3.11)$$

が得られる。この式は(3.2.6)において、

$$F(s) = \frac{1}{\rho(s)} \quad (3.3.12)$$

とおいた運動方程式に等しいから、周期解は直ちに

$$\eta(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin(\pi \nu)} \times \int_s^{s+C} \frac{\sqrt{\beta(s_1)}}{\rho(s_1)} \cos \{(\nu \pi + \psi(s) - \psi(s_1))\} ds_1 \quad (3.3.13)$$

と求まる。したがって、運動量のずれた電子のC.O.D.は、

$$x_\varepsilon(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin(\pi \nu)} \delta_0 \times \int_s^{s+C} \frac{\sqrt{\beta(s_1)}}{\rho(s_1)} \cos \{(\pi \nu + \psi(s) - \psi(s_1))\} ds_1 \quad (3.3.14)$$

で与えられる。

以上から、運動量のずれた電子は、設計軌道とはずれた閉軌道持つことがわかったが、それに伴って、リング一周にわたる電子の軌道の長さが運動量に依存するようになる。たいていの電子ストレージリングでは、ディスパージョン関数はゼロまたは正の値にしてあるので(意識的に負にする場合もある)、 $\Delta p > 0$ の場合は $x_\varepsilon > 0$ であり、 $\Delta p < 0$ の場合は $x_\varepsilon < 0$ となる。リング一周の設計軌道の軌道長を C_0 とし、軌道長のずれを ΔC とすると、電子の運動量誤差との間には以下のような関係がある。

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha \frac{\Delta p}{p_0} \quad (3.3.15)$$

ここで、 α はモーメントコンパクションファクター(Momentum Compaction Factor)と呼ばれる量である(ツイスパラメータの α とは異なるので注意のこと)。また、 α はディスパージョン関数と関係した量であり、

$$\alpha = \frac{1}{C_0} \int_0^C \frac{\eta}{\rho(s)} ds \quad (3.3.16)$$

とかける。

次に、(3.3.8)式について調べてみる。(3.2.1)式と比べてみると、

$$k(s) = -\delta_0 K(s) \quad (3.3.17)$$

であるので、チューンシフトは、

$$\Delta v = -\frac{1}{4\pi} \int_0^c \delta_0 K(s_1) \beta(s_1) ds_1 \quad (3.3.18)$$

と求められる。この両辺を δ_0 で割ると、

$$\frac{\Delta v}{\delta_0} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^c K(s_1) \beta(s_1) ds_1 \quad (3.3.19)$$

となり、左辺の量を

$$\xi \equiv \frac{\Delta v}{\delta_0} \quad (3.3.20)$$

と定義して、これを線形クロマティシティ（またはナチュラルクロマティシティ）と呼ぶ。垂直方向も同様にして求められ、

$$\begin{aligned} \xi_x &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^c K(s_1) \beta_x(s_1) ds_1 \\ \xi_y &= +\frac{1}{4\pi} \int_0^c K(s_1) \beta_y(s_1) ds_1 \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

と書ける。線形クロマティシティは、 β の大きな場所に収束力の強い4極電磁石が置いてあるとその絶対値が大きくなる傾向にある。電子ストレージリングの場合は、一般に水平、垂直ともに線形クロマティシティは負となる。それは、(3.3.22)式では、 ξ_y の符号は+となっているが、通常 β_y の大きな場所には水平方向に発散型の4極電磁石（垂直方向は収束型になる）が置いてあり、 $K(s) < 0$ となっているためである。線形クロマティシティが大きいと、運動量誤差をもつ電子は、チューンシフトが大きくなり、危険な共鳴を横切る可能性が高くな

る。また、電子リングの場合、線形クロマティシティが負であると、ある蓄積電流値以上でヘッドテイル不安定性という電子の運動が不安定になる現象がおこり、瞬く間に電子ビームがリングより失われてしまうということが起こる。そのため、クロマティシティを補正して、ゼロか多少正の値にしている。この補正のことを、クロマティシティ補正あるいは補正に用いられる6極電磁石から6極補正などとも呼ばれている。クロマティシティ補正に関しては、次の節で述べることにする。さて、運動量のずれによるチューンシフトとともに、当然ベータ関数の歪みも起こってくる。やはり、前節で得られた磁場勾配の誤差がある場合のベータ関数の歪みを表す式(3.2.21)に従って、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \beta(s)}{\beta} &= \frac{1}{2 \sin(2\pi v)} \delta_0 \times \\ &\int_s^{s+C} K(s_1) \beta(s_1) \cos 2\{\pi v + \psi(s) - \psi(s_1)\} ds_1 \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

という式が導かれる。クロマティシティと同様に β の大きな場所に収束力の強い4極電磁石が置いてあると、運動量に依存したベータ関数の歪みもひどくなる。

3.4 非線形磁場の影響

ここでは、非線形磁場（多極磁場）によって摂動がかかった時にベータatron振動がどのように影響されるか概観する。一般にリングに非線形磁場を導入すると、軌道パラメータが線形の値からずれたり歪んだり、振幅や運動量誤差の複雑な関数となる。特に大振幅の振動や運動量誤差が大きい場合などは、高次項が無視できなくなり、運動の安定な領域を十分に確保することが難しくなったりする。いわゆる、ダイナミックアパーチャが狭くなるということが起こってくる。また、非線形磁場による高次の共鳴がでてくるようになり、運転時に避けるべき共鳴の数が増すことになる。しかしながら、現在のところ、電子ストレージリングでは、後で述べるクロマティシティ補正のため6極電磁石を用いるのが普通で、6極磁場による非線形の影響を考慮しておかざるを得ない。このように非線形効果はなかなか厄介なものではあるが、

加速器では積極的に非線形磁場を利用しているところも少なくない。PFリングでは、ある種のビーム不安定性を抑制するため8極電磁石を使用している。また、取り出しを行なうシンクロトロンでは、通常は避けるべき3次共鳴を積極的に用いているところもある。

非線形磁場を導入した運動方程式を解析的に解くことはほとんど不可能に近いので、一般には数値的に扱われる。非線形磁場の影響下での粒子の長時間にわたる運動を調べるには、今のところ粒子トラッキングと呼ばれる計算機シミュレーションがもっとも有効である。もう一つの方法として、正準摂動論を用いたやり方がある。これは、ある意味で近似であるので、粒子の運動を完全に記述するものではなく限界があるが、ある程度の予測をする場合には便利な方法である。すでに、2.3節で、磁場勾配の誤差がある場合に用いた方法である。

この節では、まず6極電磁石によるクロマチシティ補正について述べ、さらに6極電磁石を導入することでベータトロンチューンがどのようにずれるか、正準摂動論を用いて求める。同様のことを8極電磁石についても調べることにする。

3.4.1 クロマチシティ補正

さて、第2章では6極電磁石を省略して、偏向電磁石および4極電磁石だけによる運動方程式を扱った。6極電磁石を導入すると、電子の運動方程式は、

$$\begin{aligned} x'' + (1 - \delta_0)K_x(s)x \\ + \frac{1}{2}(1 - \delta_0)K'(s)(x^2 - y^2) &= \frac{\delta_0}{\rho(s)} \\ y'' + (1 - \delta_0)K_y(s)y \\ - (1 - \delta_0)K'(s)xy &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

のように表される。ここで、運動量誤差は1次までとることにして、 $\delta_p = \delta_0$ とおいた。また、 K' は6極電磁石の強さを表し、

$$K'(s) = \frac{1}{B\rho} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \quad (3.4.2)$$

である。4極電磁石によって生ずるクロマチシティは、すでに(3.3.9)式で求まっているから、4極電磁石による項は省略して、6極電磁石だけの運動方程式とすると

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\delta_0}{\rho(s)} - \frac{1}{2}(1 - \delta_0)K'(s)(x^2 - y^2) \\ y'' &= (1 - \delta_0)K'(s)xy \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

となる。4極電磁石の場合と同様にして、振動をベータトロン振動とディスパージョンによる振動に分離する。ただし、垂直方向のディスパージョンはゼロとする。すなわち、

$$\begin{aligned} x &= x_\beta + \eta\delta_0 \\ y &= y_\beta \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

とおき、これを(3.4.3)式に代入して整理する。すると、ディスパージョンは方程式

$$\eta'' = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2}(1 - \delta_0)K'\eta^2\delta_0^2 \quad (3.4.5)$$

を満たすことになり、また、ベータトロン振動を表す方程式は、

$$\begin{aligned} x_\beta'' &= -\frac{1}{2}(1 - \delta_0)K'(x_\beta^2 + 2\eta\delta_0x_\beta - y_\beta^2) \\ y_\beta'' &= (1 - \delta_0)K'(x_\beta y_\beta + \eta\delta_0 y_\beta) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

となる。ここで、 x_β 、 y_β および δ_0 が小さいと考えると1次の項のみを残すことにする（ここで x_β 、 y_β および δ_0 の2次以上の項を無視するわけだが、これらの項が、大きい場合には無視できなくなることに注意しておく必要がある）。そうすると、

$$\begin{aligned} x_\beta'' &= -K'\eta\delta_0x_\beta \\ y_\beta'' &= K'\eta\delta_0y_\beta \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

となり、線形の運動方程式になる。この式により、6極電磁石のところで、電子は水平および垂直方向それぞれ $-K'\eta\delta_0$ 、 $K'\eta\delta_0$ の磁場勾配誤差に相当する摂動を受けることがわかる。したがって、6極電磁石による1次の運動量誤差に依存したチュ

ーンシフト、すなわちクロマチシティを ξ_x^s 、 ξ_y^s とすると、

$$\begin{aligned}\xi_x^s &= + \frac{1}{4\pi} \int_0^c K'(s_1) \eta(s_1) \beta_x(s_1) ds_1 \\ \xi_y^s &= - \frac{1}{4\pi} \int_0^c K(s_1) \eta(s_1) \beta_y(s_1) ds_1\end{aligned}\quad (3.4.8)$$

と求められる。ここで、4極電磁石で発生するクロマチシティと6極電磁石とでは、クロマチシティの符号が反対であることに注意しておこう。6極電磁石によるクロマチシティは、上記の式より明らかであるが、ディスパージョンがゼロである場所では発生しない。逆に、ディスパージョンが大きいかつベータ関数の大きい場所では、効果的にクロマチシティ発生できる。したがって、4極電磁石で生じたクロマチシティを補正してゼロあるいは多少正の値にするためには、この点を考慮して6極電磁石をリング内に配置するのである。通常は、水平と垂直方向のクロマチシティを補正するため、ディスパージョンセクションに収束型(SF)6極電磁石は収束型4極電磁石の近くに、発散型(SD)は同じく発散型4極電磁石の近くに配置される。このような2種類の6極電磁石による補正を2ファミリー補正と呼んでいる。クロマチシティを補正するだけなら、2ファミリー補正で原理的に補正可能である。

ところで、磁場勾配の誤差に相当する摂動がある場合、ベータトロンチューンがシフトするとともに、ベータ関数が歪むことはすでに述べた。当然ながら、クロマチシティ補正のために入れられた6極電磁石によっても、ベータ関数は歪むことになる。その水平方向のベータ関数の歪みは、(3.2.20)式と同様に求まり、

$$\begin{aligned}\Delta\beta_x(s) &= - \frac{\beta_x(s)}{2\sin(2\pi\nu_x)} \delta_0 \times \\ &\int_s^{s+c} K'(s_1) \eta(s_1) \beta_x(s_1) \times \\ &\cos 2\{\pi\nu_x + \psi_x(s) - \psi_x(s_1)\} ds_1\end{aligned}\quad (3.4.9)$$

となる。垂直方向は、添え字を x から y に変え、さらに符号を正にした式となる。ここで、リング上の基準点 $s=0$ において、 $\psi_{x,y}(0)=0$ であるとすれば、4極電磁石による分も含めて、

$$\begin{aligned}\Delta\beta_x(0) &= \frac{\beta_x(0)}{2\sin(2\pi\nu_x)} \delta_0 \times \\ &\int_0^c \{K(s_1) - K'(s_1)\} \eta(s_1) \beta_x(s_1) \times \\ &\cos 2\{\pi\nu_x - \psi_x(s_1)\} ds_1 \\ \Delta\beta_y(0) &= - \frac{\beta_y(0)}{2\sin(2\pi\nu_y)} \delta_0 \times \\ &\int_0^c \{K(s_1) - K'(s_1)\} \eta(s_1) \beta_y(s_1) \times \\ &\cos 2\{\pi\nu_y - \psi_y(s_1)\} ds_1\end{aligned}\quad (3.4.10)$$

のように表すことができる。リングのある特定の場所での運動量誤差に起因するベータ関数の歪みを気にして、クロマチシティを補正し、さらに特定の場所のベータ関数の歪みも補正しようとする6極補正のやり方もある。実際、トリスタン主リングの6極補正は、水平垂直方向のクロマチシティ補正のほかに、クアドラントごとの衝突点および対称点（トリスタン主リングは、超周期が4で、4つのセルの繰り返しになっている。これをクアドラントと呼ぶ。1つのセルはさらにミラー対称性を持っている。そのミラー対称となる場所を対称点と呼んでいる。）におけるベータ関数の歪みをゼロにするようにしている。そのため、全部で6種類の6極電磁石が使われており、6ファミリー補正と呼ばれる。

これまでは、2次以上の高次項は小さいとして無視し、1次の運動量誤差の項のみを残して議論してきた。しかし、大振幅の振動や運動量誤差が大きい振動を考える場合、チューンシフトやベータ関数の歪みに振幅や運動量誤差に依存した高次項が効いてくることに気をつけておく必要がある。

3.4.2 6極磁場の影響

次に、6極磁場による非線形効果として、振幅

に依存したチューンシフトがどうなるか調べることにする。まず、6極磁場を含むハミルトニアンは、

$$H = H_0 + V \quad (3.4.11)$$

であり、

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2} \{K_x(s)x^2 + K_y(s)y^2\} + \frac{1}{2} \{p_x^2 + p_y^2\} \\ V &= \frac{1}{6} K'(s)(x^3 - 3xy^2) \\ K'(s) &= \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right)_{x=y=0} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

となっている。ここで、 H_0 は無摂動項、 V が6極磁場による摂動項である。6極磁場には、 $3xy^2$ という水平と垂直の振動が結合する項が含まれるが、このテキストでは、すべて1次元のベータatron振動のみを扱い、結合項を無視してきたので、簡単のため結合項を省略し、水平方向の1次元振動のみとして説明を続けることにする。結合項を省略することにより、1次元のハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2} \{K_x(s)x^2 + p_x^2\} + \frac{1}{6} K'(s)x^3 \quad (3.4.13)$$

と書ける。

ここで、3.2節と同様にして正準変換を施す。正準変換により、新しいハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H(\psi, J, \theta) &= H_0(J) + RV(\psi, J, \theta) \\ H_0(J) &= vJ \\ V(\psi, J, \theta) &= \frac{\sqrt{2}}{3} K'(J\beta)^{3/2} \cos^3(\psi + \phi) \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

となる。簡単のため添え字 x は省略した。また、三角関数の公式により、

$$\cos^3 \psi = \frac{1}{4} (\cos 3\psi + 3\cos \psi) \quad (3.4.15)$$

であるので、摂動項は、

$$\begin{aligned} V(\psi, J, \theta) &= \frac{1}{6\sqrt{2}} K'(J\beta)^{3/2} \times \\ &\quad \{ \cos 3(\psi + \phi) + 3\cos(\psi + \phi) \} \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

の書き直すことができる。Appendix Bより、1次のオーダーの振幅に依存したチューンシフトを求めるため、式(B.13)に、(3.4.16)を代入する。

$$\langle V(J_1) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\theta V(\psi, J_1, \theta) \quad (3.4.17)$$

計算の結果は、

$$\langle V(J_1) \rangle = 0 \quad (3.4.18)$$

となる。したがって、6極磁場の場合、1次のオーダーでは J_1 に依存したチューンシフトは現われないことがわかる。そこで、2次のオーダーまで近似をあげる。そのためには、(B.24)より

$$\begin{aligned} \langle V'(J_1) \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\theta V'(\psi, J_1, \theta) \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

を計算する必要がある。ところで、(B.21)より、 $V'(\psi, J_1, \theta)$ は、

$$V'(\psi, J_1, \theta) = \frac{\partial V}{\partial J_1} \frac{\partial \chi}{\partial \psi_1} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 V(J_1)}{\partial J_1^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \psi_1} \right)^2 \quad (3.4.20)$$

であるが、6極磁場では左辺の第2項は、(3.4.18)よりゼロであることがすぐにわかるので、第1項のみを求めればよいことになる。

ここで、 χ は(B.19)より、

$$\chi = \frac{i}{12\sqrt{2}} \int_0^{\theta+2\pi} d\theta' K'(J_1\beta)^{3/2} \times \left[\frac{\exp[i3\{\psi+\phi+\nu(\theta'-\theta-\pi)\}]}{\sin(3\pi\nu)} + \frac{\exp[i\{\psi+\phi+\nu(\theta'-\theta-\pi)\}]}{\sin(\pi\nu)} \right] \quad (3.4.21)$$

であり、したがって、

$$\frac{\partial\chi}{\partial\psi} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\theta+2\pi} d\theta' K'(J_1\beta)^{3/2} \times \left[\frac{\exp[i3\{\psi+\phi+\nu(\theta'-\theta-\pi)\}]}{\sin(3\pi\nu)} + \frac{3\exp[i\{\psi+\phi+\nu(\theta'-\theta-\pi)\}]}{\sin(\pi\nu)} \right] \quad (3.4.22)$$

となる。一方、

$$\frac{\partial V}{\partial J_1} = \frac{J_1^{3/2}}{4\sqrt{2}} K'\beta^{3/2} \times \{\cos 3(\psi+\phi) + \cos 3(\psi+\phi)\} \quad (3.4.23)$$

である。それゆえ、(3.4.22)、(3.4.23)を(3.4.19)に代入して、しばし計算を行ない整理すると、

$$\left\langle \frac{\partial V}{\partial J_1} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right\rangle = -\frac{J_1^2}{128\pi} \int_0^{2\pi} d\theta K'(\theta)\beta^{3/2}(\theta) \times \int_0^{\theta+2\pi} d\theta' K'(\theta')\beta^{3/2}(\theta') \times \left[\frac{\cos 3\{\phi+\nu(\theta'-\theta-\pi)\}}{\sin(3\pi\nu)} + \frac{3\cos\{\phi+\nu(\theta'-\theta-\pi)\}}{\sin(\pi\nu)} \right] \quad (3.4.24)$$

という結果になった。これから、求める2次のオーダーのチューンシフトは、以下ようになる。

ただし、独立変数は θ から s に戻している。

$$\Delta\nu = \frac{\partial}{\partial J_1} \left\langle \frac{\partial V}{\partial J_1} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right\rangle = -\frac{J_1}{64\pi} \int_0^c ds K'(s)\beta^{3/2}(s) \times \int_s^{s+c} ds' K'(s')\beta^{3/2}(s') \times \left[\frac{\cos 3\{\psi(s')-\psi(s)-\pi\nu\}}{\sin(3\pi\nu)} + \frac{3\cos\{\psi(s')-\psi(s)-\pi\nu\}}{\sin(\pi\nu)} \right] \quad (3.4.25)$$

ここで、

$$\psi(s') = \int_0^{s'} \frac{ds}{\beta(s)}, \quad \psi(s) = \nu\theta = \frac{\nu s}{R} \quad (3.4.26)$$

なる置き換えもおこなっている。

3.4.3 8極磁場の影響

次に、8極電磁石の場合について、振幅に依存したベータatronチューンシフトがどのようになるか調べてみる。

8極磁場を含んだ水平方向1次元のハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{2} \{K_x(s)x^2 + p_x^2\} + \frac{1}{4!} K''(s)x^4 \quad (3.4.27)$$

$$K''(s) = \frac{1}{B\rho} \left(\frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \right)_{x=y=0}$$

となる。6極磁場の同様に作用・角変数を用いて表すと、新しいハミルトニアンは、

$$H(\psi, J, \theta) = H_0(J) + RV(\psi, J, \theta)$$

$$H_0(J) = \nu J$$

$$V(\psi, J, \theta) = \frac{1}{12} K''(J\beta)^2 \cos^4(\psi + \phi)$$

(3.4.28)

と表される。三角関数の公式により、

$$\cos^4 \psi = \frac{1}{8} (\cos 4\psi + 4\cos 2\psi + 3) \quad (3.4.29)$$

であるから、摂動項は

$$V(\psi, J, \theta) = \frac{1}{48} K'' (J\beta)^2 \times \{ \cos 4(\psi + \phi) + 4\cos 2(\psi + \phi) + 3 \} \quad (3.4.30)$$

となる。8極磁場の場合は、6極磁場と異なり、1次のオーダーで ψ によらない項が存在する。それゆえ、最低次の摂動で満足することにすれば、

$$\langle V(J_1) \rangle = \frac{J_1^2}{16\pi} \int_0^{2\pi} K'' \beta^2 d\theta \quad (3.4.31)$$

と求まるので、8極磁場による J_1 に依存しチューンシフト Δv は、結局、独立変数を θ から s に戻して、

$$\Delta v = \frac{J}{16\pi} \int_0^c K''(s) \beta_x^2(s) ds \quad (3.4.32)$$

のようになる。得られた結果は、水平方向1次元の場合である。同様にして、垂直および水平垂直の結合項も考慮に入れると、8極磁場によるチューンシフトは、

$$\begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}$$

と書き表され、行列の要素はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{1}{16\pi} \int_0^c K''(s) \beta_x^2(s) ds \\ a_{12} = a_{21} = \frac{-1}{16\pi} \int_0^c 2K''(s) \beta_x(s) \beta_y(s) ds \\ a_{22} = \frac{1}{16\pi} \int_0^c K''(s) \beta_y^2(s) ds \end{cases} \quad (3.4.33)$$

このように、8極磁場をリングに入れると1次のオーダーで振幅に依存してチューンシフトが発生し、ある程度振幅に広がりをもつ電子ビームは、チューンも広がりを持つことになる。その広がりのことをチューンスプレッドとよぶ。PFリングで、8極電磁石を励磁するのは、ビームにこのチューンスプレッドを与えたいためである。なぜ、チューンスプレッドを与える必要があるかについては、このテキストのレベルを越えるので、ここでは触れないことにする。そのことに関しては、ビーム不安定性とその抑制についてのテキストを参照していただきたい。

3.5 危険な共鳴

これまで、偏向磁場の誤差および磁場勾配の誤差があるとき、ベータatronチューンを整数あるいは半整数の近くにとると、*C.O.D.*が大きくなったり、あるいは、ベータ関数の歪みが大きくなるため、実際の運転上は避けなくてはならないことを述べた。また、前節では詳しく述べなかったが、6極磁場や8極磁場などの非線形磁場があるときにも、避けるべきチューンが存在する。このような円形加速器における避けるべき危険なチューンのことを共鳴(Resonance)と呼んでいる。この共鳴は、

$$|k| |v_x| + |l| |v_y| = N n \quad (3.5.1)$$

の関係を満たすときにおきる。ここで、 v_x および v_y はそれぞれ水平と垂直方向のベータatronチューンであり、 N は超周期である。また、 k, l, n は整数である。 $|k| + |l|$ の値によって、共鳴の次数が決まり、例えばこの値が3の時は3次共鳴と

呼ばれる。一般に、 $|k| + |l|$ の値が4以下の共鳴が強いと考えられており、運転時のチューンはその条件を満たさない所に置かれる。なお、長時間リングにビームを貯蔵する蓄積リングでは、5次以上の高次共鳴にも気をつけなくてはならない場合もある。また、(3.5.1)より超周期 N の値が大きいと、低次の共鳴の成立条件が減ることがわかる。 N の整数倍で起こる共鳴のことは、構造共鳴とよばれ、系統的な誤差磁場や意図的に設置された非線形磁場などによって起こる非常に強い共鳴となる。 N の整数倍ではない共鳴は、非構造共鳴であり、ランダムに生ずる誤差や、*C.O.D.*があるために本来規則正しく配列されている非線形磁場の対称性を崩したりすることによって生ずる比較的弱い共鳴である。ただ、非構造共鳴であっても、実際のリングで調べると、瞬く間にビームを失ってしまうような強い共鳴もあるので注意しなければならない。

横軸に v_x 、縦軸に v_y をとって(3.5.1)の条件を満たす直線を描いた図のことを、チューンダイアグラムと呼んでいる。リングの運転時のチューン（オペレーティングポイントと呼ばれる）を測定し、その値をチューンダイアグラム上にプロットすることにより、強い共鳴の近くにいないかどうかを確認することができる。4次共鳴以下について、PFリングのオペレーティングポイントを含めたチューンダイアグラムを図3.1と図3.2に示す。図3.1は、2次共鳴と3次共鳴を、図3.2には4次共鳴を示した。

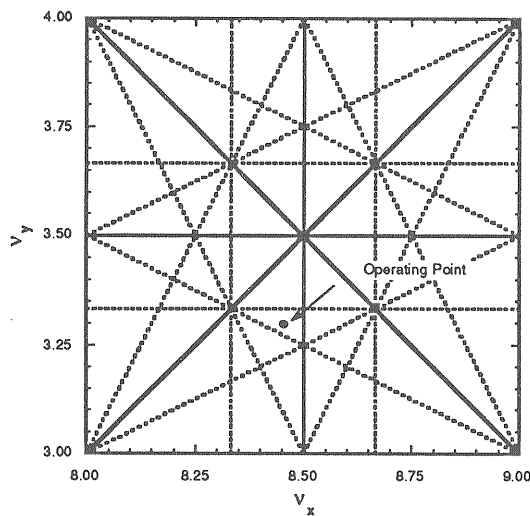


図3.1 チューンダイアグラム
実線は2次の共鳴を、点線は3次共鳴を示す。

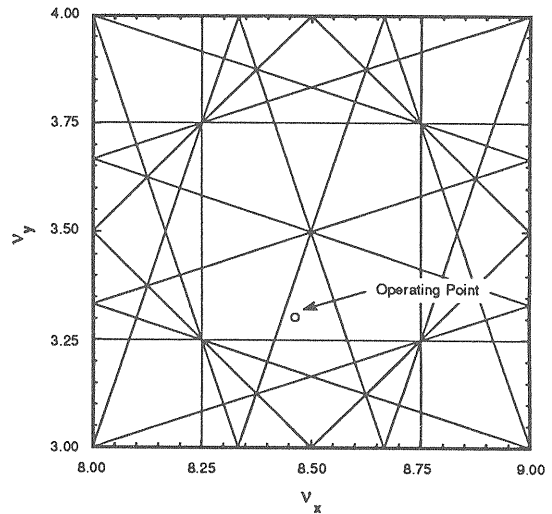


図3.2 チューンダイアグラム
実線は4次の共鳴を示す。

運動方程式に xy や xy^2 等の結合項があるときに生ずる共鳴がある。その共鳴のことを、とくに v_x と v_y の和の形で表される場合は、和共鳴(Sum Resonance)と呼ばれ、 v_x と v_y の差の形で表される場合は、差共鳴(Difference Resonance)と呼ばれている。たとえば、

$$\begin{aligned} v_x + v_y &= m \\ v_x - v_y &= n \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

となる共鳴である。それぞれの共鳴近くでは、水平と垂直方向のエミッタンスには、和共鳴の場合、

$$\epsilon_x - \epsilon_y = C \quad (3.5.3)$$

差共鳴の場合、

$$\epsilon_x + \epsilon_y = C \quad (3.5.4)$$

という関係がある。ここで、 $\epsilon_x, \epsilon_y > 0$ であり、 C は定数である。このため、差共鳴の場合には、 $\epsilon_x, \epsilon_y < C$ でありエミッタンスに上限が存在する。通常電子ストレージリングでは、 $\epsilon_x \gg \epsilon_y$ となっているが、差共鳴の近くでは、 $\epsilon_x \approx \epsilon_y$ でありビームの断面が丸くなる。この差共鳴は、 ϵ_x, ϵ_y の割合を変えたいときなどに用いられる場合がある。ただし、余りビームを丸くすると、垂直方向に狭いアパーチャを持つリングでは、ビームが失われる場合もあるので気をつけなくてはならない。

一方、和共鳴の場合は、エミッタンスに上限が存在しないため、ビームはどんどん大きくなってしまふ。そのため、和共鳴は、ビームを失わせる危険な共鳴である。

最後に、6極電磁石で励起される3次共鳴と8極電磁石で励起される4次共鳴を示す。

6極電磁石では、

$$\begin{aligned} 3v_x &= k \\ v_x + 2v_y &= l \\ v_x - 2v_y &= m \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

8極電磁石では

$$\begin{aligned} 4v_x &= k \\ 2v_x + 2v_y &= l \\ 2v_x - 2v_y &= m \\ 4v_y &= n \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

第4章 実際のストレージリングにおける軌道パラメータの測定と補正

この章では、実際のストレージリングにおける電子軌道に関連する内容について、PFリングの測定データをもとに解説する。前節では、設計軌道のまわりをベータatron振動する電子が、さまざまの摂動により、どのように理想的な場合からずれたり歪んだりするかを、摂動のかかった運動方程式を解きながら簡単に調べた。その結果、電磁石の誤差磁場やアライメント誤差等がある場合や運動量誤差のある場合は、電子の軌道が設計軌道からずれる、すなわちC.O.D.が発生することや、磁場勾配の誤差があるばあいは、ベータ関数が歪んだり、チューンシフトが発生することがわかった。さらに、それらの摂動によりリングには危険な共鳴が存在することになり、運転ではそれらの共鳴は避けなくてはならないこともなどについても述べた。実際のリングにおいて、ベータatron振動のパラメータがこのように設計値からずれることは致し方ないのだが、しかしこの状態をそのままにしておくと、リングの持つ性能を半減させてしまうことになる、あるいは最悪の場合、ビームがリングを回らないということも起こりえる。したがって、これらの軌道パラメータずれや歪みを補正して、それらをできるだけ設計値に近づけ

なる共鳴が励起される。ただし、スキュー6極、スキュー8極ではこれらとは異なり、以下の共鳴が励起される。

スキュー6極電磁石は、

$$\begin{aligned} 3v_y &= k \\ 2v_x + v_y &= l \\ 2v_x - v_y &= m \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

スキュー8極電磁石は、

$$\begin{aligned} 3v_x + v_y &= k \\ 3v_x - v_y &= l \\ v_x + 3v_y &= m \\ v_x - 3v_y &= n \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

ることが必要となる。そのために、まずリングに軌道パラメータを測定する装置（モニター）を置かなくてはならない。さらに、測定の結果、歪みやずれがあれば、それを補正する方法および実際に補正する装置も用意しておかなくてはならない。

このテキストでは、主に軌道理論に基づいたパラメータの測定法および歪みやずれの補正法を中心に述べられる。しかし、測定に用いられるモニター等の装置に関しては、ここでは触れないので、モニターに関する他の講義録を参照してもらいたい。また、ここで述べられる補正法は、PFで用いられている方法であることをお断りしておく。

4.1 C.O.D. の補正

まず最初に、C.O.D.の補正について述べる。一般に、C.O.D.は、リングを周回する電子ビームの位置（ビームの重心）を検出するモニターで測定される。PFリングにおけるビームの位置検出には、ボタン電極型のモニター（以後、単に位置モニターと呼ぶ）が使われていて、全部で46台設置されている。1個の位置モニターには6個の電極があり、それらから信号を取り出し処理して、水平と垂直方向のビームの位置が割り出される。位置モニターは、そのゼロ点が4極電磁石の中心（設計軌道上）にアライメントされている。アラ

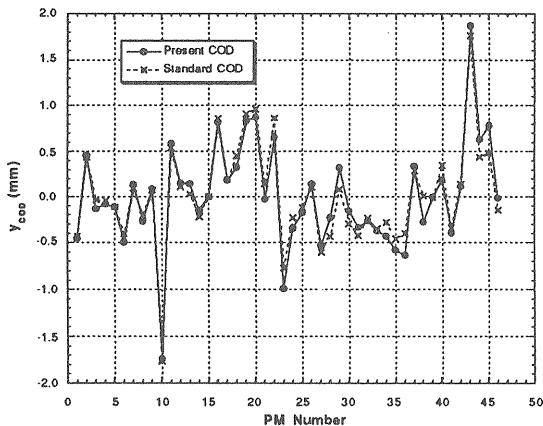
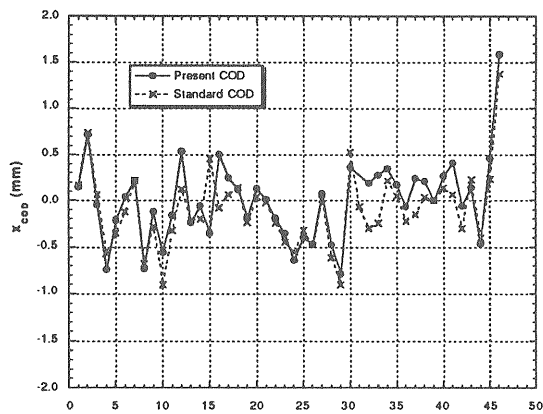


図4.1 PFリングの位置モニターで測定されたC.O.D.の一例および基準C.O.D.

イメントの精度は、0.05mmから0.1mm程度である。この位置モニターによってリング1周にわたるビームの位置が測定されれば、それがすなわちリングのC.O.D.である。図4.1にPFリングの位置モニターで測定されたC.O.D.を示す。この図は、実はすでに補正電磁石で補正された後のC.O.D.であり、補正しなければもっと大きな値である。リングが立ち上がった時や、リングの改造などがあり電磁石を動かしたりした後では、たいいてい大きなC.O.D.が発生するので、ある程度小さくする補正が必要となる。さらに、光源用リングでは毎日のようにC.O.D.補正を行なっている。ある基準となるC.O.D.をリング側と放射光ユーザー側とで決めておき、C.O.D.を測定したら、その基準C.O.D.との差を補正することになっている。図4.2に測定したC.O.D.と基準C.O.D.との差の一例を示す。リングの位置モニターでは、差がわずかであっても、これが30mも離れたビームライン下流の検出器では相当なずれとなる場合があるのでわずかでも補正するようにしている。例えば、光源点でC.O.D.による軌道の傾きが0.1mrad程度と微小であったとし

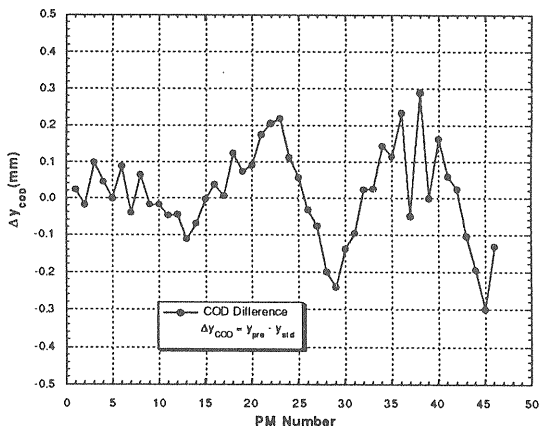
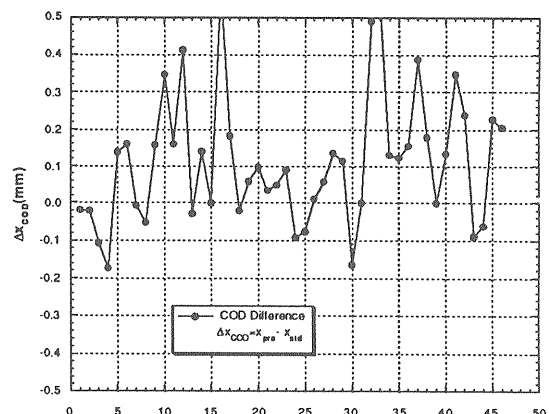


図4.2 基準C.O.D.との差

ても、30m先ではそれが3mmのずれになるからである。

さて、通常C.O.D.の補正に用いられる電磁石は、ステアリング電磁石と呼ばれる補正2極電磁石である。PFリングの場合は、垂直方向に42台のステアリング電磁石、水平方向は28台の偏向電磁石のバックレグ巻き線（補正コイル）をステアリングとして使用している。位置モニターで測定した基準C.O.D.との差を**b**とし、その補正に必要なステアリング電磁石の蹴り角を θ とすると、補正のための条件は、以下の式を満たすことである。すなわち、

$$A \cdot \theta + b = 0 \quad (4.1.1)$$

である。ここで、用いる位置モニターの数をもm個とし、ステアリング電磁石の数もn個とすれば、それぞれのベクトルの要素は、

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} \quad (4.1.2)$$

である。またAは行列で、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

となっている。行列Aの要素は、3.1節で表したステアリング電磁石のシングルキックによるC.O.D.の式(3.1.34)から、

$$a_{ij} = \frac{\sqrt{\beta_i} \sqrt{\beta_j}}{2 \sin(\pi v)} \cos(\pi v - |\psi_i - \psi_j|) \quad (4.1.4)$$

と書き表される。PFリングでは、位置モニターとステアリング電磁石におけるベータ関数および位相、さらにベータトロンチューンは線形ラティスによる計算値を使い、この行列要素を決めている。そのため、厳密に言えば実際のリングの行列要素と多少異なっているかも知れないが、PFではあまり問題になってはいない。もっと厳密に行ないたいければ、ステアリング電磁石1台ずつに単位キックを与えて、位置モニターでC.O.D.を測定して行列要素を決めていくこともできる（すなわち、応答関数を測定しておくわけである）。ただし、この場合、線形ラティスを変更した場合には、また測定し直す必要がある。

さて、(4.1.1)の一次連立方程式解けば、基準C.O.D.との差を補正するのに必要なステアリングの蹴り角 θ がでてくる。しかし、一般に位置モニターの数とステアリングの数が同じでないため、解は一意的に決まらない。そこで、解を求める方法として、PFでは固有値法を用いている。そのほかに、最小2乗法を用いた解き方もあるが、これについては福間氏のテキストに詳しく書かれているので、そちらを参照していただきたい。

まず(4.1.1)を固有値法によって解くために、方程式の両辺に左側から、行列Aの転置行列 A^T を乗ずる。すると、

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (4.1.5)$$

となる。ここで $A^T A$ は $n \times n$ の対称実行列となり、ゼロかまたは正の要素を持つことになる。もし、Aの一般逆行列を A^+ とすると、

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \quad (4.1.6)$$

となり、 $A^T A$ は

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T \quad (4.1.7)$$

と変換することができる。ここで、行列Uは、規格化された固有ベクトルUで構成される直交行列、 Λ は $A^T A$ の固有値 λ からなる対角行列であり、それぞれ、

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

となっている。 $A^T A$ をこのように分解できれば、逆行列は、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= (\mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T)^+ \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

となる。また、対角行列 Λ の逆行列は、簡単に

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

となる。ただし、固有値がゼロの場合は、その逆

数をゼロと仮定し行列内で置き換えを行なう。
 以上より、ステアリング電磁石の蹴り角は、

$$\theta = -A^+ \cdot b = -U\Lambda^{-1}U^T A^T b \quad (4.1.11)$$

のように求められる。したがって、個々のステアリングの蹴り角 θ_j は、固有ベクトルと固有値を用いて

$$\theta_j = \sum_k \frac{U_k \cdot A^T b}{\lambda_k} U_{jk} \quad (4.1.12)$$

で与えられる。実際問題としては、対称行列を $A^T A$ を(4.1.9)のように対角化する作業が必要となるが、PFリングではGivens-Householder法により対角化し、固有値と固有ベクトルを得ている。また、小さな固有値を持つ固有ベクトルは、ステアリングの蹴り角を小さくするため除かれる。実際には、何個かの小さい方の固有値を捨てているが、それは(4.1.10)において行列の要素をゼロに置き換える操作でなされている。

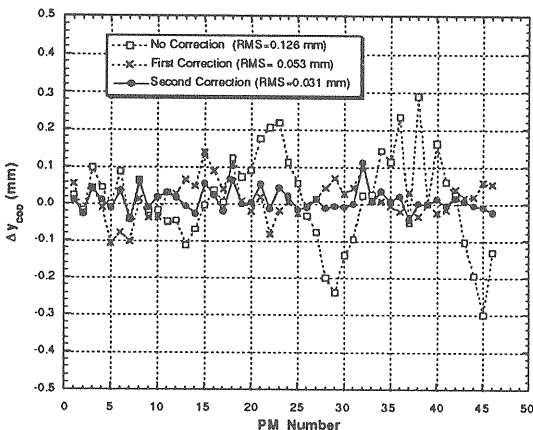
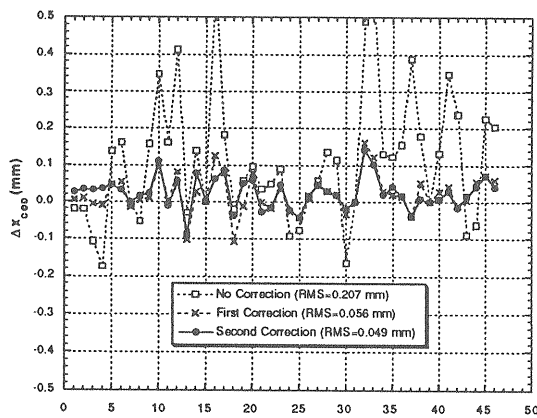


図4.3 C.O.D.を補正した後の基準C.O.D.との差

以上述べた方法に良って、ステアリング電磁石の蹴り角を求め、実際に図4.2の基準との差を補正したのち、再びC.O.D.を測定して基準との差を表したのが、図4.3である。差を取ってみて、許容できる範囲で補正されてはよしとし、もしまだ差が残っているようならば、一連の操作を繰り返して再度C.O.D.補正を試みることになっている。

4.2 ローカルバンブ

前節では、リング全体におよぶグローバルなC.O.D.補正について述べた。これに対して、グローバルなC.O.D.補正では補正しきれないある特定のC.O.D.を消したい時がある。あるいは、光源用リングなどでは、ある特定の放射光ビームラインで、光源の位置あるいはその傾きを変えたいという時がある。そのような時に用いられるのが、ローカルバンブ法である。これは、リングのある特定の領域において、局所的に軌道を歪ませ、その領域以外はもとの軌道のままにしておくというやり方である。そのような軌道の歪みのことをバンブと呼び、また他の領域で軌道が歪まないようになっている場合、バンブが閉じているという。たいていの場合、ローカルバンブは、グローバルなC.O.D.補正と同じく、ステアリング電磁石で作られる。それでは、以下にバンブをつくる方法について述べることにする。

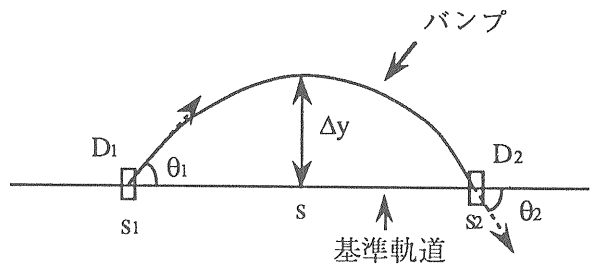


図4.4 2台のステアリング電磁石でつくるローカルバンブ

最も単純なバンブは、2台のステアリング電磁石によってつくることができる。図4.4にそのバンブの様子を示す。リング上の2ヶ所の点 S_1 、 S_2 にステアリング電磁石 D_1 、 D_2 が置かれていて、点 S で軌道が Δy ずれるようなバンブをつくりたいとする。その場合に必要な2台のステアリング電磁石の蹴り角 θ_1 、 θ_2 と、その他の満たすべき条件を求めてみる。

まず、リング上の軌道は位置と傾きで表し、 (y, y') とする。蹴る前の軌道の位置を $(0, 0)$ として、 D_1 で蹴った時の点 s_1 、 s_2 での軌道を求めると、2点間のトランスファー行列を用いて、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = M(s | s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y(s_2) \\ y'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

と表される。そして、 D_2 で蹴ってバンプを閉じるためには、

$$\begin{pmatrix} y(s_2) \\ y'(s_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

を満たさなくてはならない。リングの各場所のツイスパラメータおよび位相が線形ラティスから計算されていれば、トランスファー行列は M は(2.3.11)によって、ツイスパラメータで表せるので、(4.2.1)、(4.2.2)を具体的に書き下すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned} y(s) &= \sqrt{\beta_1 \beta_s} \sin \psi_{1s} \cdot \theta_1 = \Delta y \\ y(s_2) &= \sqrt{\beta_2 \beta_1} \sin \psi_{12} \cdot \theta_1 = 0 \\ y'(s_2) + \theta_2 &= \\ -\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \psi_{12} - \alpha_1 \sin \psi_{12}) \cdot \theta_1 + \theta_2 &= 0 \\ \psi_{12} = \psi_2 - \psi_1, \psi_{1s} = \psi_s - \psi_1 & \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

したがって、この連立方程式を解くことにより(ただし $\theta_1 \neq 0$)

$$\psi_2 = \psi_1 + \pi, \quad \frac{\theta_2}{\theta_1} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \quad (4.2.4)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\Delta y}{\sqrt{\beta_1 \beta_s} \sin \psi_{1s}} \\ \theta_2 &= \frac{\Delta y}{\sqrt{\beta_2 \beta_s} \sin \psi_{1s}} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

が得られる。(4.2.4)は、2台のステアリング電磁石でバンプを作る場合には、それらの位相差が π でなくてはならないことを示している。その条件のもとで、蹴り角はそれぞれ(4.2.5)になる。

ところで、意図的に2台のステアリング電磁石を位相差を π にして置く場合もあるだろうが、たいいてい、すでに設置されているステアリング電磁石間の位相差が必ずしも π にはなっていない。それゆえ、一般にはステアリングの台数を増やしてバンプをつくることになる。ただし、本来軌道をずらしたくない領域にまで広がってバンプが作られてしまう場合もあるので、実際にバンプをつくる時はこの点を考慮しておく必要がある。原理的には、何台のステアリング電磁石を用いてもバンプを作ることが可能であるが、位相差を気にしないである一定の大きさのバンプをつくるためには、最低3台のステアリングが必要となる。そこで、今度は3台でのバンプについて述べておこう。

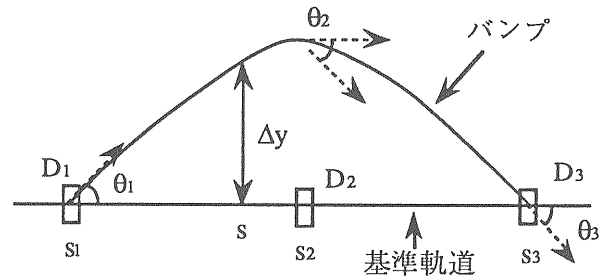


図4.5 3台のステアリング電磁石でつくるローカルバンプ

バンプの様子は、図4.5の様になる。2台の場合と同様に、3台により点 s で軌道が Δy ずれるようなバンプをつくりたいとする。それぞれ点 s 、 s_2 、 s_3 での軌道を2点間のトランスファー行列を用いて表し、またバンプが閉じる条件を加えると、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y(s_2) \\ y'(s_2) \end{pmatrix} = M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y(s_3) \\ y'(s_3) \end{pmatrix} = M(s_3 | s_2) \left(\begin{pmatrix} y(s_2) \\ y'(s_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= M(s_3 | s_2)M(s_2 | s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + M(s_3 | s_2) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \\
&= M(s_3 | s_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + M(s_3 | s_2) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} y(s_3) \\ y'(s_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

のように表される。ツイスパラメータで表し、整理すると

$$\begin{aligned}
y(s) &= \sqrt{\beta_1 \beta_s} \sin \psi_{1s} \cdot \theta_1 = \Delta y \\
y(s_3) &= \sum_{k=1}^2 \sqrt{\beta_3 \beta_k} \sin \psi_{k3} \cdot \theta_k = 0 \\
y'(s_3) + \theta_3 &= \\
&= - \sum_{k=1}^2 \sqrt{\frac{\beta_3}{\beta_k}} (\cos \psi_{k3} - \alpha_k \sin \psi_{k3}) \cdot \theta_k + \theta_3 \\
&= 0 \\
\psi_{ki} &= \psi_i - \psi_k
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

となる。したがって、蹴り角 θ は、上記の3元連立1次方程式の解として求められることになる。

以上のように、3台のステアリング電磁石を用いれば、ステアリング電磁石間の位相差を気にせず任意のバンプをつくることができることを示した。さらに、任意の点でのバンプの位置だけでなく傾きも同時に望みの値にしたい場合がある。その場合は、もう1台ステアリングの数を増やすことにより、そのようなバンプをつくることができる。すなわち、バンプの閉じる条件は、最後のステアリング電磁石で蹴ったのちの軌道が $(y, y') = (0, 0)$ という2つの条件を満たすことであり、条件が加算される毎にステアリング電磁石の数を増やしていけば良いのである。

4.3 ベータ関数とディスパージョン関数の測定と歪み

ここでは、リングの重要な軌道パラメータであるベータ関数とディスパージョン関数の測定とその歪みについて述べる。ベータ関数およびディス

パージョン関数はともにビームサイズと関係している量であるので、光源用リングでは放射光の輝度と係わってくる。例えば、ベータ関数が歪んでいたりすると、ベータ関数の大きくなった場所ではビームサイズが大きくなり放射光輝度がさがる。逆に、小さくなった場合は輝度はあがるということになる。しかし、ビームサイズが予想以上に大きくなると、ビームがリングの真空ダクトで削られるようになり、ビームの寿命が悪化するあるいはビームを落とすということにもなりうる。したがって、実際のリングでのベータ関数やディスパージョン関数の値が、線形ラティスから計算される値とどれくらいずれているのか測定しておくことは重要である。

4.3.1 ディスパージョン関数の測定

まず、ディスパージョン関数の測定から述べることにする。ディスパージョン関数の定義は、式(3.3.10)で与えられており、

$$x_E(s) = \eta(s) \delta_0 = \eta(s) \frac{\Delta p}{p_0} \tag{4.3.1}$$

である。すなわち、ディスパージョン関数は、1次の運動量誤差で規格化された*C.O.D.*と定義されている。したがって、ディスパージョン関数は、2つの異なる運動量をもつ電子で*C.O.D.*を測定しておき、その*C.O.D.*の差と運動量誤差の比として求めることができる。電子ストレージリングを周回する電子の運動量をずらすことは、それほどむずかしいことではなく、RF周波数をわずかにずらすことにより可能である。このテキストでは、縦方向の運動については全く述べていないので、以下に運動量誤差とRF周波数のずれとの関係を表す式だけを書き下すことにする。RF周波数を f_{RF} とし、その周波数に同期した電子(Synchronous electron)の運動量を p_0 、RF周波数をずらして $f_{RF} + \Delta f_{RF}$ としたときの電子の運動量のずれを Δp とすると、

$$\frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} = \frac{\Delta f_{rev}}{f_{rev}} = - \frac{\Delta \tau_{rev}}{\tau_{rev}} = - \frac{\Delta C}{C_0} \tag{4.3.2}$$

となり、ここで(3.3.15)の関係から、さらに

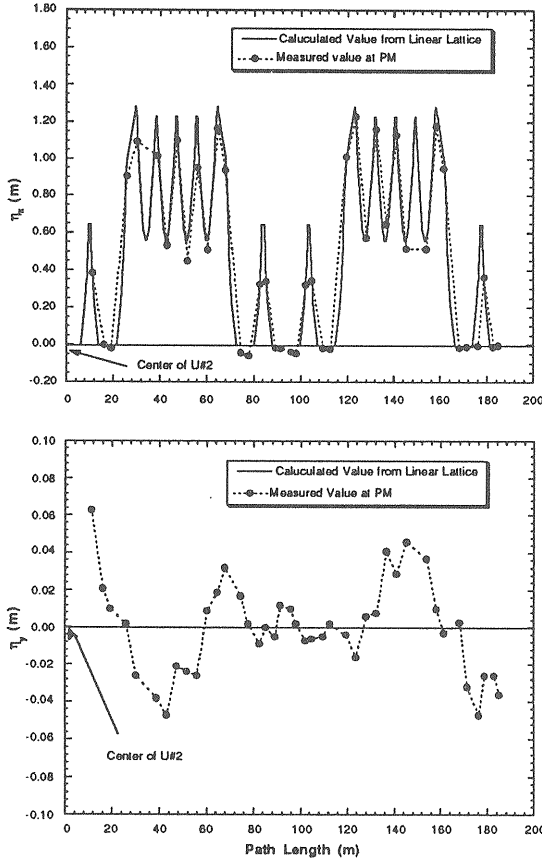


図4.6 PFリングにおけるディスパージョン関数の測定値

$$\frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} = -\frac{\Delta C}{C_0} = -\alpha \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4.3.3)$$

と表される。(4.3.2)中の f_{rev} 、 τ_{rev} はそれぞれ電子の周回周波数および周回時間であり、 α はモーメントコンパクトシオンファクターである。よって、運動量誤差は、

$$\frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} \quad (4.3.4)$$

で与えられる。RF周波数を $+\Delta f_{RF}$ 、 $-\Delta f_{RF}$ だけ動かして、位置モニターで測定したCODをそれぞれ、 $x_+(s)$ 、 $x_-(s)$ とすると、(4.3.4)によりディスパージョン関数は、

$$\eta(s) = -(x_+ - x_-) \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF}} \right)^{-1} \quad (4.3.5)$$

となる。ただし、 α の値は予め知っておく必要がある。通常、線形ラティスから計算された値が用いられている。図4.6は、PF一周についての線形ラティスによって計算されたディスパージョン関数の値と、この方法による測定値を示している。ディスパージョン関数の測定誤差は、位置モニターの感度および α の値のあいまいさ等を含めて10%程度であろう。

4.3.2 ベータ関数の測定

次に、ベータ関数の測定について述べる。ベータ関数の測定には、普通以下にあげる2つのどちらかが用いられる。まず、1つは、ステアリング電磁石のシングルキックより生ずるC.O.D.をその近くの位置モニターで測定する方法である。リング上の点 S_1 でキックを与えて、それによって生ずる点 S_1 でのC.O.D.は、式(3.1.34)により、

$$z(s_1) = \frac{\beta(s_1)}{2} \cot(\pi\nu) \cdot \theta_1 \quad (4.3.6)$$

で与えられる。したがって、点 S_1 でのベータ関数は、

$$\beta(s_1) = \frac{2z(s_1) \tan(\pi\nu)}{\theta_1} \quad (4.3.7)$$

により求めることができる。もちろん、ベータトロンチューンは既知であり、ステアリング電磁石の蹴り角(磁場の強さ)もわかっているものとする。したがって、キックしてC.O.D.を測定するという一連の作業を、リングの全ステアリングを使って行なえばリング全体にわたるベータ関数が求められる。ベータ関数の精度は、位置モニターの精度とステアリング電磁石の蹴り角の精度およびステアリング電磁石と位置モニターの位相関係による。ただし、ステアリングと位置モニターがあまりにも離れている場合には、位相関係をいれたC.O.D.の式を使うほうが良いであろう。

ベータ関数を測定するもう一つの方法は、4極電磁石に強制的に磁場勾配誤差 $k(s)$ を与えて、チューンシフトを発生させる方法である。すなわち、

チューンシフトは式(3.2.9)より、

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi} \int_0^c k(s)\beta(s)ds \quad (4.3.8)$$

で与えられ、ここで4極電磁石を薄肉レンズ近似 (Thin Lens Approximation) と呼ばれる近似 (これは磁場勾配誤差が、一ヶ所に集中していると考えられる近似である) により、

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi} \sum_s k(s)l \cdot \beta(s) \quad (4.3.9)$$

となる。ここで、 l は4極電磁石の磁石長である。もし、リング上の点 s_1 にある4極電磁石1台だけに誤差を与えてやることのできるならば、

$$\Delta v = \frac{1}{4\pi} k(s_1)l \cdot \beta(s_1) \quad (4.3.10)$$

となるから、よってベータ関数は、

$$\beta(s_1) = \frac{4\pi \Delta v}{k(s_1)l} \quad (4.3.11)$$

で与えられる。PFリングでは、4極電磁石1台ずつ誤差を与えてやることのできるようになっていく (電子負荷抵抗装置と4極電磁石1台ずつ個々に接続できるようにしてある) ので、4極電磁石58ヶ所のベータ関数を測定することが可能である。ストレージリングの4極電磁石は、通常電源と電磁石は1対1になっていないことがほとんどであり、1台の電源で数台から数十台の電磁石をシリーズに励磁している。そのため、電源で電流値を変えて誤差を与えただけであると、個々の4極電磁石におけるベータ関数は測定できない。すなわち、シリーズになっている4極電磁石での平均値として求まることになる (平均値でも、測定値が無いよりは良いのである)。

ところで、この方法によるベータ関数の測定には、チューンシフトを得るためベータトロンチューンそのものの測定が不可欠である。円形加速器において、ベータトロンチューンを測定することは、危険な共鳴を避ける等、オペレーティングポイントを知るうえでも欠かせない。PFでは、通常

はRFロックアウト法によってチューン小数部 (実際は、0.5以下の小数部) を測定している。これは、ベータトロン振動 (実際のビームでは、バンチの重心振動) にデフレクター電極より周波数可変の交流磁場を強制的に与える方法で、この時のベータトロン振動は、強制振動の方程式となり、

$$z'' + (v\omega_0)^2 z = f \sin(\omega s) \quad (4.3.12)$$

$$f = \frac{B_0}{B\rho}$$

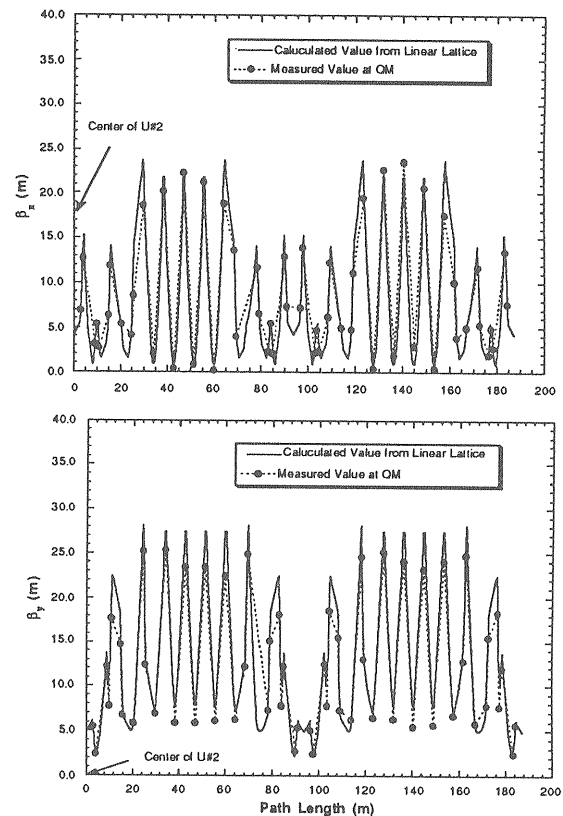


図4.7 PFリングにおけるベータ関数の測定値

となる。ここで、交流磁場の周波数 ω が、ベータトロン振動の周波数 $v\omega_0$ に近づくと、ベータトロン振動の振幅が増大する。したがって、交流磁場の周波数を変えながら、ビームのプロファイルをモニターしていて、もしビームのプロファイルの増大が最大となる周波数があれば、そこでベータトロンチューンの周波数 (小数部の周波数) はその周波数に一致したと判断し、その値をもってベータトロンチューンの測定値としている。

以上のように、個々の4極電磁石に誤差を与えて、チューンシフトを測定し、リング一周のベータ関数をプロットしたのが、図4.7である。実線は、

線形ラティスによる計算値、黒丸が測定値である。ベータ関数の測定誤差は、チューンシフトの測定誤差や薄肉近似になどにより、やはり10%程度であろう。この誤差の範囲で測定値をみれば、この時のベータ関数はほぼ線形ラティスの計算値と一致しているといえる。

4.3.3 ベータ関数の歪みの補正

ところで、もしベータ関数が歪んでいた場合、その歪みの補正はどのようにすればよいかを考えてみよう。磁場勾配誤差によるベータ関数の歪みは、(3.2.21)によって与えられる。今、4極電磁石でベータ関数の歪みを補正すると考え、リングの点 S_1 にある1台の4極電磁石に与える補正磁場強度を $k(S_1)$ とすると、薄肉近似を用いて、ベータ関数の歪みは、

$$\begin{aligned} \Delta\beta_x(s) &= -\frac{\beta_x(s)\beta_x(s_1)}{2\sin(2\pi\nu_x)} \times \\ &\quad \cos 2\{\pi\nu_x - |\psi_x(s) - \psi_x(s_1)|\} \cdot k(s_1)l \\ \Delta\beta_y(s) &= \frac{\beta_y(s)\beta_y(s_1)}{2\sin(2\pi\nu_y)} \times \\ &\quad \cos 2\{\pi\nu_y - |\psi_y(s) - \psi_y(s_1)|\} \cdot k(s_1)l \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

で与えられる。ここで、ベータ関数の場合もC.O.D. 補正の場合と同様に考え、基準となるベータ関数の値を決めておき（例えば、線形ラティスの計算値でも、基準となるような測定データでもよい。）、基準との差を補正することにする。その差を \mathbf{b} とすれば、補正のための式は、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{b} = 0 \quad (4.3.13)$$

である。ここで、補正のための4極電磁石の数を n 台とすると、それぞれのベクトルおよび行列の要素は、

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1l \\ k_2l \\ \vdots \\ k_nl \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \vdots \\ \Delta\beta_n \end{pmatrix} \quad (4.3.14)$$

となる。この連立方程式を解けば、補正に必要な4極磁場強度を求めることはできるはずである。しかし、ベータ関数の補正では、次の3点に注意しなくてはならない。まず第1点は、4極電磁石に補正磁場を与えて、ベータ関数を補正しても、一般には、補正に伴いチューンシフトが発生することである。もし、チューンシフトも押さえる必要があるなら、その条件も加えなくてはならない。第2点は、磁場勾配誤差は、水平垂直両方に寄与することである。水平方向を補正しても、垂直方向にさらに歪むことがありえる。第3点は、PFリングの場合ベータ関数の測定は4極電磁石個々に行なうことができるが、補正は個々にはできないということである。それゆえ、ベータ関数の平均値で対処しなくてはならない。これらのことを考慮すると、以下の方程式を満足するような、最適解を見いだす必要がある。すなわち、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_x \cdot \mathbf{k} + \mathbf{b}_x &= 0 \\ \mathbf{A}_y \cdot \mathbf{k} + \mathbf{b}_y &= 0 \\ \mathbf{A}_v \cdot \mathbf{k} + \mathbf{b}_v &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

である。要素は、

$$\mathbf{b}_x = \begin{pmatrix} \overline{\Delta\beta_{x1}} \\ \overline{\Delta\beta_{x2}} \\ \vdots \\ \overline{\Delta\beta_{xn}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_y = \begin{pmatrix} \overline{\Delta\beta_{y1}} \\ \overline{\Delta\beta_{y2}} \\ \vdots \\ \overline{\Delta\beta_{yn}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_v = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} \overline{a_{x11}} & \overline{a_{x12}} & \cdots & \overline{a_{x1n}} \\ \overline{a_{x21}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{xn1}} & \cdots & \cdots & \overline{a_{xnn}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} \overline{a_{y11}} & \overline{a_{y12}} & \cdots & \overline{a_{y1n}} \\ \overline{a_{y21}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{yn1}} & \cdots & \cdots & \overline{a_{yyn}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_v = \begin{pmatrix} a_{v11} & a_{v12} \\ a_{v21} & a_{v12} \end{pmatrix} \quad (4.3.16)$$

となっている。行列の要素は、すでに明らかであろう。また、要素のバーは、シリーズになっている。

る4極電磁石の平均値を表している。したがって、補正磁場強度は、この連立方程式を解いて求められるであろう。

このテキストでは、ディスパージョン関数が歪んでいる場合についての補正に関しては述べなかったが、C.O.D.補正やベータ関数の歪みの補正と同様の考え方で行なうことができるはずである。

4.4 クロマティシティの測定

この節では、クロマティシティの測定について解説する。電子ストレージリングでは、4極電磁石で生ずる線形クロマティシティを、6極電磁石のクロマティシティで打ち消し、ゼロ付近の値にしている。このことは、すでに3.4.1節で述べたが、実際のリングにおけるクロマティシティ補正のための6極電磁石の強さは、以下のように求められている。ただし、2ファミリー補正の場合について考えることにする。線形クロマティシティは、線形ラティスから計算され、 (ξ_x, ξ_y) であり、2ファミリーの6極電磁石の強さを、それぞれ (K'_{SF}, K'_{SD}) とすると、補正によってクロマティシティをゼロにするには、以下の式を満たせばよい。すなわち、式(3.4.8)により、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K'_{SF} \\ K'_{SD} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{SF=1}^m \eta(S_{SF}) \beta_x(S_{SF}) \\ a_{12} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{SD=1}^n \eta(S_{SD}) \beta_x(S_{SD}) \\ a_{21} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{SF=1}^m \eta(S_{SF}) \beta_y(S_{SF}) \\ a_{22} &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{SD=1}^n \eta(S_{SD}) \beta_y(S_{SD}) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

である。ここで、6極電磁石は薄肉近似で表しており、また m, n はそれぞれSF、SD型の6極電磁石の個数を示している。したがって、(4.4.1)を解けば、クロマティシティをゼロにする6極電磁石の強さが求められる。

次に、PFリングでのクロマティシティの測定について述べる。クロマティシティの定義は、1次

の運動量誤差で規格化したベータatronチューンシフトであった。

$$\xi \equiv \frac{\Delta v}{\delta_0} = \frac{\Delta v}{\Delta p/p_0} \quad (4.4.3)$$

運動量誤差は、ディスパージョン関数の場合と同様にRF周波数を変えることによって与えられるので、あとはRF周波数を変えたときのチューンシフトを測定すればよい。測定誤差は、チューンの測定精度とモーメントコンパクト化ファクターのあいまいさによる。

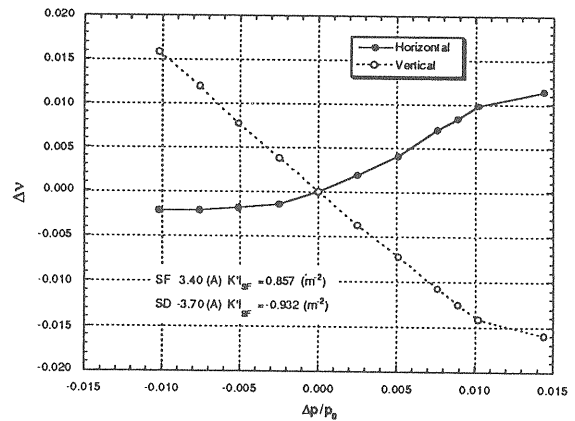


図4.8 運動量誤差に依存したチューンシフト (測定値)

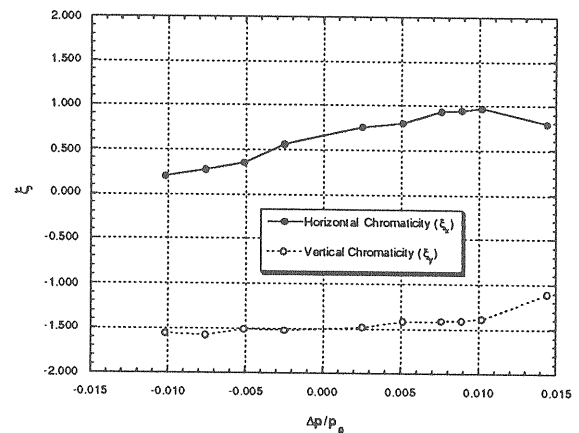


図4.9 運動量誤差に対するクロマティシティ (測定値)

以上のようにして求めた測定データを図4.8に示す。この時の6極電磁石の強さは、磁場測定値から $(K'_{SF}, K'_{SD}) = (0.857, -0.932) [1/m^2]$ であった。クロマティシティがゼロになっていれば、運動量誤差に依存したチューンシフトはないはずであるが、水平垂直両方に依存性が現われている。そこで、チューンシフトを運動量誤差で割り、運

動量誤差の関数としてクロマティシティをプロットしたのが、図4.9である。図より明らかに、クロマティシティの値ゼロではなく $(\xi_x, \xi_y) = (+0.76, -1.52)$ という値になった。

そこで、6極電磁石の強さをさらに調整して、完全にゼロになるように補正してみよう。補正に必要な6極電磁石の強さを、 $(\Delta K'_{SF}, \Delta K'_{SD})$ とすると、(4.4.1)式から、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta K'_{SF} \\ \Delta K'_{SD} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +0.76 \\ -1.52 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4.4)$$

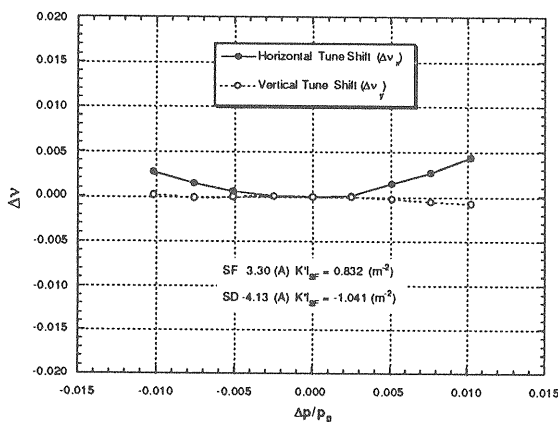


図4.10 微小補正後の運動量誤差に依存したチューンシフト

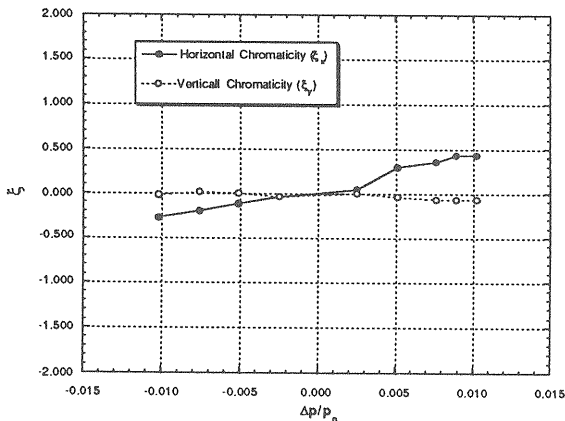


図4.11 微小補正後の運動量誤差に対するクロマティシティ

となる。行列要素 a_{ij} は、式(4.4.2)により線形ラティスによる値を用いて求めることができる。また、実際のリングを使って、決めることも可能である。すなわち、SF、SD 個々に適当な強さを与えて変化するクロマティシティを測定すれば決めることができる。PFリングでは、後者の方法により、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.9 & -0.8 \\ -1.7 & 3.2 \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

と求められている。この値を(4.4.4)に代入し、簡単な行列の計算により $(\Delta K'_{SF}, \Delta K'_{SD})$ を決め、以前の強さに加えれば、クロマティシティを完全にゼロにできるはずである。実際再度測定されたデータ (図4.10と図4.11)により、クロマティシティがゼロであることが確認された。ここで、クロマティシティをゼロにすることによって、顕著に現われてきた現象がある。それは、運動量誤差の2乗に依存したチューンシフトである (水平方向)。すなわち、線形近似の範囲では無視してきたものが、運動量誤差の大きいところで現われてきた訳である。現在のPFリングのラティスでは、まだこの高次の効果はそれほど大きくない。しかしながら、これから登場してくる第3世代の放射光リングでは、このような高次の効果が問題になってくるので、非線形磁場の影響を軽視することはできなくなってきている。

4.5 ダイナミックアパーチャ

これまで、実際のリングにおける軌道のパラメータについて、その測定法および歪みやずれがある場合の補正法について述べてきた。ただし、話題ほとんどが、線形ラティスに関することであった。もちろん、リングの設計においても運転する場合においても、線形ラティスが最も基本であり、これがきちんとできていなければ意味がない。しかしながら、線形ラティスをうまく設計することができ、またC.O.D.補正のためのステアリング電磁石も準備され、ベータ関数やディスパージョン関数の補正の対策も立てこれで良いと思っても、この線形ラティスを捨てざるを得ない状況に追い込む問題がある。それが、非線形磁場によってベータatron振動の安定領域が制限されてしまう、いわゆるダイナミックアパーチャの問題である。最近の電子ストレージリングでは、クロマティシティ補正のため6極電磁石を用いざるを得ないのであるが、3.4および3.5節において述べたように、6極磁場は振幅に依存したチューンシフトを生じ、また3次共鳴を強く励起する。加えて、クロマティシティはゼロに補正しても、運動量誤差の大きいところでは2次や3次といった効果が無視できな

なくなってくる。このようなことが合い重なって、振幅および運動量誤差の大きな場合のベータatron振動の安定領域が十分に確保できないということが起きてくる。すなわち、ダイナミックアパーチャが小さくなってしまふのである。ダイナミックアパーチャが小さくなったといっても、真空ダクト等でできる物理的なアパーチャより大きければ問題はないのであるが、それ以上に小さくなった場合にはリングの性能の低下を招くことになりかねない。リングのアパーチャが小さいと、まず入射が困難になる。入射方法にもよるが、たいいてい電子ストレージリングへの入射は、マルチターン入射と呼ばれる方法で行なわれる（詳しくは、加藤氏のテキストを参照）。この方法だとビームを蓄積しながらリングに入射できるのであるが、半面、ビームは大振幅のベータatron振動をしながら入射されてくるため、リングのアパーチャが狭いとビームがアパーチャで削られ、効率が低下する。もしくは、入射不可能となることもありえる。また、ストレージリングにうまくビームが入射されて蓄積された場合でも、アパーチャの大きさはビームの寿命を決める要因の一つとなっているので、これが小さいと極端に寿命が短くなることもありえる。

では、ダイナミックアパーチャを大きくするようなクロマティシティ補正の方法はないのかということになるのだが、これまでかなりの思考錯誤が繰り返され、いくつかの補正のスキームが提案されてきた。3.4節で扱った正準摂動法を利用し、近似的に2次3次といった高次の非線形効果を計算し、それらも補正できるように6極磁場を最適化するプログラムもある（HARMON）。しかし、2次のオーダーですでに複雑で押さえるべき項が多く、ましてそれ以上になるととても手に負えなくなる。しかも、摂動法では、ダイナミックアパーチャを予測することができない。それゆえ、結局、クロマティシティの補正法の善し悪しを決めるのは、粒子トラッキングによらざるを得ない

粒子トラッキングの基本は、リングを構成するエレメント（偏向および4極電磁石およびドリフトスペース）をトランスファーで行列で表し、ある大きさの振幅を初期値として与えて、その初期値からスタートして、1つ1つのエレメントによる粒子の運動を追跡していくことである。ただし、非線形の電磁石は、薄肉近似すなわちキックとして扱う。そして、電子ストレージリングではおよそ1000ターン程度リングを周回させて、電子の運

動が安定に周回するかどうかを調べるのである

（なぜ1000ターンかのはっきりした理由はない。あるとすれば、電子ストレージリングの場合は、大振幅のベータatron振動がそのまま続くのではなく、放射減衰により振動が減衰し、最終的にはビームサイズの大きさになる。その減衰する程度まで周回すれば良いであろうという程度の理由からである。）さらに、初期値である振幅を変えながら安定領域をさがしていく。ここでの安定領域とは、1000ターン以上するということである。したがって、粒子トラッキングによるダイナミックアパーチャとは、適当なターン数を粒子が安定に周回するか否かの境界を意味する。

粒子トラッキングのための計算機コードは、計算機の発達した現在ではかなり存在するであろう。しかし、残念ながら、筆者の知っているのは、SLACでつくられたPATRICIAとKEKで開発が進んでいるSADのみである。このテキストでは、PFリングの線形ラティスにクロマティシティ補正のための6極電磁石および8極電磁石を配置して、計算機コードPATRICIAを用いてダイナミックアパーチャを計算した結果を示すとどめる。

図4.12が粒子トラッキングによって求められたPFリングのダイナミックアパーチャを示している。アパーチャは、長直線部の中心で見たものである（ベータ関数の図でゼロ点）。計算のための線形ラティスは2.5節のものを使い、そのラティスに2ファミリーの6極電磁石でクロマティシティ補正を施し、さらに8極電磁石を徐々に励磁していきながら得られた結果である。8極電磁石は3(A)が最大である（電流値は、8極磁場の強さに相当する。プラスの極性にも励磁できるのであるが、ここでは省略する）。図4.13と図4.14は、それぞれ水平方向および垂直方向1次元に振幅を大きくしていった時の、位相空間における振動の様子をプロットしたものである。この時の8極電磁石は、最大に励磁されている。振幅が大きくなると、楕円は崩れてきて、しまいには不安定領域にはいつてしまい、振動が無限点にいつてしまう（実際には、1mのアパーチャリミットを決めて、それを越えたら計算をストップさせている。）また、その振動を高速フーリエ展開して振動のチューンを求め、それをチューンダイアグラム上にプロットしたのが、図4.15である。8極電磁石を励磁しているため、振幅に依存して激しくチューンが動いていく様子がわかるであろう。

最近の光源リング設計において、線形ラティス

はある程度パターンが決まってきたように思われる。しかし、クロマティシティ補正において、ダイナミックアパーチャを広げる決定的に有効な方法はなく、粒子トラッキングを駆使して、良い解を探す努力が今も続けられている。

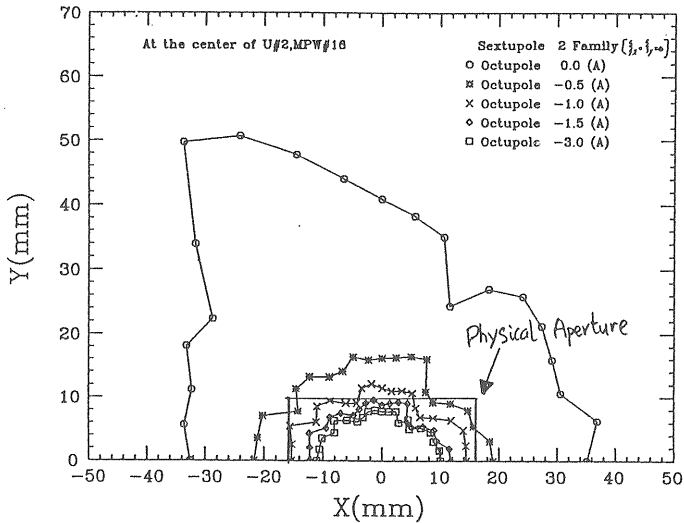


図4.12 粒子トラッキングによって得られたPFのダイナミックアパーチャ（8極磁場の依存性が顕著に見られる）。運動量誤差は与えていない。実線で描かれた長方形の箱は、真空ダクトで決まる物理的なアパーチャを示している。

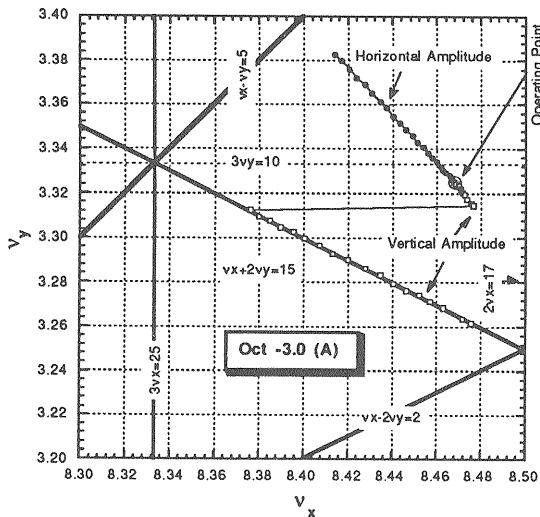


図4.15 8極磁場による振幅に依存したチューンシフト。振幅が大きくなるにつれて、ベータatronチューンが、シフトしていく様子が見られる。

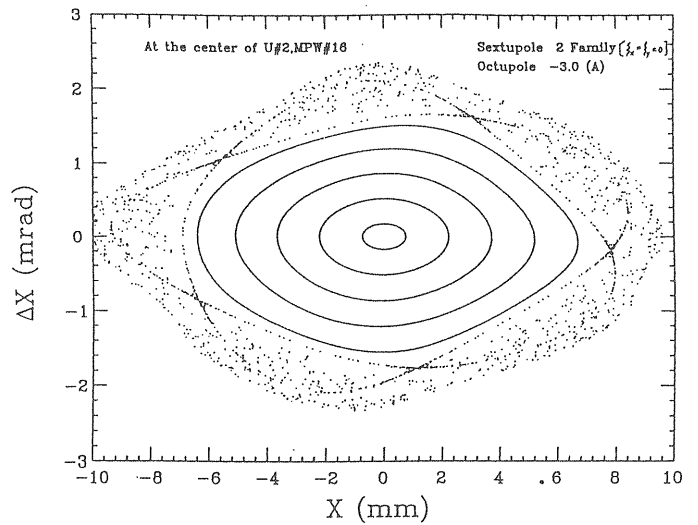


図4.13 粒子トラッキングにより得られた、水平方向における位相空間上でのプロット図。8極を最大に励磁して、初期振幅として、8つの振幅を与えて、シュミレーションを行なった結果である。

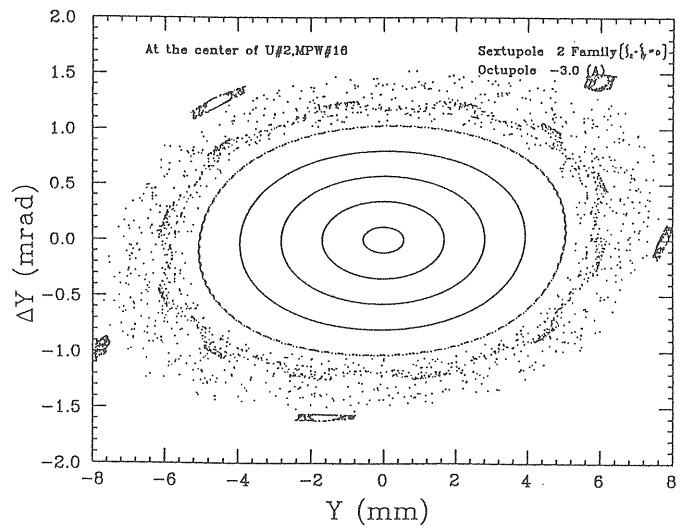


図4.14 粒子トラッキングの結果得られた、垂直方向における位相空間プロット図。水平方向と同様にして得られた結果である。

おわりに

加速器の世界で仕事をはじめて3年が過ぎようとしていたころ、筆者にOHOセミナーの講師の話がやって来て驚いた。まだ、知識も経験も乏しい筆者には、セミナー用のテキストを書き、また講師をするなど予想だにしていなかったのである。案の定、引受はしたものの、書く内容も決まらないうちに、時間ばかりが過ぎてしまった。結局、諸先輩が書かれた過去のOHOセミナーのテキストを大いに参考にさせていただき、どうかこうにか今回のセミナー用のテキストを書きあげた次第である。最初にも述べたが、このテキストは大変偏りがあり、電子ストレージリングの軌道に関係する中でもごくわずかしき書かれていない。水平と垂直方向の結合がある場合の2次元振動や縦方向の運動、放射減衰や放射励起についても触れていない。また、これから光源用加速器では主流になる挿入光源の軌道への影響等には全く省略してしまった。ぜひ、他の文献で補正していただくようお願いする次第である。さらに、知識の乏しさと勉強不足のゆえに、このテキストに大きな勘違いや計算における過ちがあるかも知れない。もし読んでいて間違いを見つけられたら、筆者に対するご叱責とともに正しい解答をお教え願えば幸いに思う。

テキストを書くのは、筆者にとってとても大変な作業ではあったけれど、普段あまり検討もしてみなかったことや計算が面倒であるという投げたおいた式などを、自分で計算し確かめることなどできて、大変勉強になった。

書き終えるにあたり、今回このような勉強の機会を与えてくださいました高エネルギー加速器科学奨励会並びに高エネルギー物理学研究所の木村嘉孝加速器研究部総主幹に感謝いたします。また、放射光実験施設の小早川久光源研究系主幹には激励をいただき、同じく小林正典教授には多大な励ましと原稿の催促をいただきました、ここに深く感謝いたします。最後に、未熟な筆者を指導し、また色々な議論や相談にのってくださった、光源研究系のスタッフの皆様にも心から感謝いたします。

参考文献

第1章の表は、文献[1]～[2]を参考に作成した。

第2章と第3章の内容は、文献[3]～[13]をもとに書かれている。ハミルトニアン形式、正準摂動法に関しては、文献[5]が大変詳しく、また[4]および[11]～[13]も参考にさせていただいた。第4章は、文献[14]～[16]を参考にし、図のデータおよびPFリングのパラメータなどは、PF Activity Report および PF Ring Report から抜粋した。計算機コードに関しては、文献[4]、[17]～[19]やユーザズガイドを参照していただきたい。トラッキングとは何かを知るには文献[5]がとても役に立つ。

[1]V.P. Suller, 「Review of Status of Synchrotron Radiation Storage Rings」、Proc. of 3rd. Euro.Part. Accel. Conf.(EPAC 92), Vol.1., p.77,1992

[2]J.B. Murphy, 「Synchrotron Light Source Data Book」

[3]神谷幸秀、OHO'84、「加速器の原理」

[4]鎌田 進、OHO'85、「加速器の原理と設計」

[5]平田光司、OHO'85、「ビームトラッキング」

[6]佐藤朝男、OHO'88、「ビームトラッキングの実際」

[7]小磯晴代、OHO'91、「ビーム貯蔵リングの基礎」

[8]大見和史、OHO'91、「低エミッタンスのラティス」

[9]高山 健、OHO'92、「加速器物理入門」

[10]E.D. Courant and H.S. Snyder, 「Theory of the alternating -gradient synchrotron」、Ann. Phys. 3, p.1-48,1958

[11] M. Sands, 「The Physics of Electron Storage Rings」、in proceedings of International School of Physics, " Enrico Fermi ", Course 46 (1971)

[12]R.D. Ruth, 「Single Particle Dynamics and Nonlinear Resonances in Circular Accelerators」、Lecture Notes in Physics 247, pp.37-63

[13]A. Ando, 「Distortion of Emittance with Non-Linear Magnetic Field」、Part.Accel.15,727,1984

[14]福間 均、OHO'88、「閉軌道の補正」

[15]A.Ando and K. Endo, 「Correction of Closed Orbit at Injection in Alternate-Gradient Synchrotron」、KEK-75-4,1975

[16]I. Honjo et al., 「Measurement of Betatron Function at the Photon Factory」、Proc. of the 1987 IEEE Part. Accel. Conf., p.1272,1987
計算機コード

[17]A.S.King et al., MAGIC, SLAC - 183, SPEAR-201, PEP-134

[18]H.Wiedemann, PATRICIA, PEP-220

[19]M. Domald, HARMON, PEP-331

Appendix A 複素積分のテクニック

無限級数の和を、複素積分のテクニック（留数定理）を用いて求める方法を以下に示しておく。

（留数定理）複素関数 $f(z)$ が、有限個の単一閉曲線 C を周とする領域 D において、内部に有限個の孤立特異点、 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ をもち、それ以外で正則であれば、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \text{Res}[f, a_1] + \dots + \text{Res}[f, a_n]$$

となる。ここで、 $\text{Res}[f, a]$ は特異点 a における f の留数を表している。

この定理を利用して、次の無限級数 S を求めてみよう。

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{v^2 - k^2} \quad (\text{A.1})$$

ここで、

$$f(z) = g(z) \frac{e^{i\theta z}}{e^{2\pi i z} - 1}$$

$$g(z) = \frac{1}{v^2 - z^2} \quad (\text{A.2})$$

なる複素関数 $f(z)$ を考え、 $f(z)$ の閉曲線 C 上での積分を I とすると、

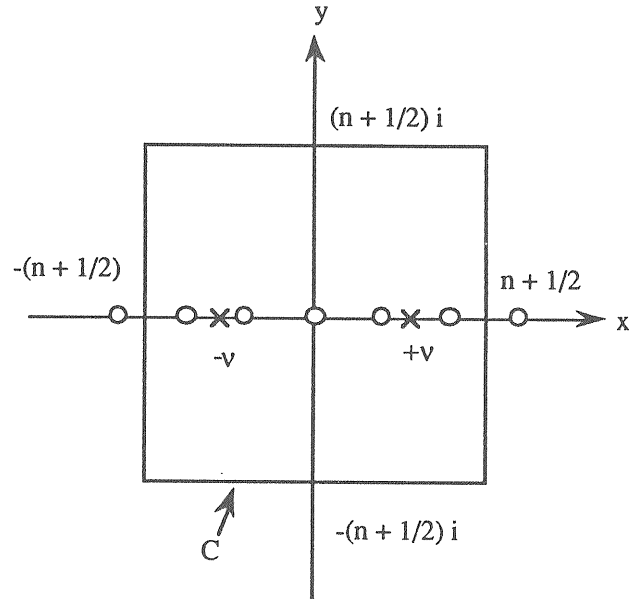
$$I = \oint_C g(z) \frac{e^{i\theta z}}{e^{2\pi i z} - 1} dz \quad (\text{A.3})$$

$(0 \leq \theta < 2\pi)$

である。ところで、閉曲線 C を図Aのようにとれば、 C に囲まれた領域内に存在する $f(z)$ の孤立特異点は、

$$z = 0, \pm 1, \dots, \pm n, \pm v \quad (\text{A.4})$$

であり、それ以外で $f(z)$ は正則であるので、留数定理により、留数和を求めることにより積分が求められる。それは、



図A 閉曲線 C の内部にある複素関数 $f(z)$ の孤立特異点（白丸とバツが特異点を示している）

$$I = 2\pi i \{ \text{Res}[f, -n] + \dots + \text{Res}[f, n] + \text{Res}[f, -v] + \text{Res}[f, +v] \} \quad (\text{A.4})$$

である。 $\pm n$ の範囲の整数特異点による留数 I_1 とすると、

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-n}^{+n} g(k) e^{i\theta k} \quad (\text{A.5})$$

あり、また $\pm v$ による留数 I_2 は、

$$I_2 = -\frac{1}{2v} \frac{e^{i\theta v}}{e^{2\pi i v} - 1} + \frac{1}{2v} \frac{e^{-i\theta v}}{e^{-2\pi i v} - 1} \quad (\text{A.6})$$

と計算される。ところで、 $k \rightarrow \infty$ とすると、Jordanの予備定理より、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $I \rightarrow \infty$ となるので、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I = \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi i (I_1 + I_2) = 0 \quad (\text{A.7})$$

であり、すなわち、

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{v^2 - k^2} = -2\pi i$$

$$\left(-\frac{1}{2v} \frac{e^{i\theta v}}{e^{2\pi i v} - 1} + \frac{1}{2v} \frac{e^{-i\theta v}}{e^{-2\pi i v} - 1} \right)$$

(A.8)

となる。結局、求める無限級数和は、

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{v^2 - k^2} = \frac{\pi}{v \sin(\pi v)} \cos v(\theta - \pi)$$

(0 ≤ θ < 2π)

(A.9)

となった。-2π < θ ≤ 0 の時は、g(z)が偶関数であることを利用して求めることができ、

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{v^2 - k^2} = \frac{\pi}{v \sin(\pi v)} \cos v(\theta + \pi)$$

(-2π < θ ≤ 0)

(A.10)

と表される。

Appendix B 正準摂動論

作用・角変数(ψ, J)と独立変数θで表したハミルトニアンを、

$$H(\psi, J, \theta) = H_0(J) + \varepsilon V(\psi, J, \theta)$$

(B.1)

と書けるとする。ここで、εは小さいとしておく。またVは角変数ψと独立変数θの周期関数であり、ともに周期は2πとする。もし、ある正準変換、

$$(\psi, J) \rightarrow (\bar{\psi}, \bar{J})$$

(B.2)

によって、新しいハミルトニアンが、

$$H_1 = \bar{H}_1(\bar{J})$$

(B.3)

のように、 $\bar{\psi}$ を含まない形に書けるとすると、

$$\bar{J} = \text{Constant}$$

$$\bar{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \theta + \bar{\psi}_0$$

(B.4)

となり、運動方程式は解析的に解けることになる。しかし、実際にそのような($\bar{\psi}, \bar{J}$)を見つけることは一般的にはできないので、εが小さいということにより、εの1次、2次、3次というように逐次的に摂動を行なっていく方法をとる。そこで、

$$(\psi, J) \rightarrow (\psi_1, J_1)$$

(B.5)

なる正準変換を考え、この正準変換の母関数F₁を以下のようにとる。

$$F_1(\psi, J_1, \theta) = \psi J_1 + \varepsilon \chi(\psi, J_1, \theta)$$

(B.6)

これによって、それぞれの正準変数の関係と新しいハミルトニアンは、

$$J_1 = J - \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \psi}$$

$$\psi_1 = \psi + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial J_1}$$

$$H_1 = H + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

(B.7)

となる。よって、新しいハミルトニアンは、

$$H_1 = H_0(J) + \varepsilon V(\psi, J, \theta) + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

(B.8)

と書ける。このハミルトニアンに、

$$J = J_1 + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \psi}$$

(B.9)

を代入して、

$$H_1 = H_0(J_1 + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \psi_1}) + \varepsilon V(\psi, J_1 + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \psi_1}, \theta) + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (\text{B.10})$$

と表し、 $\varepsilon \partial \chi / \partial \psi$ について H_0 と V をテーラー展開を施す。そうすると、ハミルトニアン H_1 は

$$H_1 = H_0(J_1) + V(\psi, J_1, \theta) + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial H_0}{\partial J_1} + \frac{\partial V}{\partial J_1} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial J_1^2} \right) \left(\varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^2 + \dots \quad (\text{B.11})$$

のようになる。この式を ε について整理すると、

$$v(J_1) = \frac{\partial H_0}{\partial J_1} \quad (\text{B.12})$$

になる。ただし、変換の母関数 F_1 による正準変換が1対1の変換であるためには、母関数 F_1 が ψ と θ に関して周期関数でなくてはならない。それには、 V が ψ と θ に関して周期関数であるだけでなく、その平均 $\langle V \rangle$ も0である必要がある。そこで、

$$V(\psi, J_1, \theta) = \langle V(J_1) \rangle + V(\psi, J_1, \theta) - \langle V(J_1) \rangle$$

$$\langle V(J_1) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\theta V(\psi, J_1, \theta) \quad (\text{B.13})$$

としてやると、 $V(\psi, J_1, \theta) - \langle V(J_1) \rangle$ は平均0の関数となるから、結局、ハミルトニアンは、

$$H_1 = H_0(J_1) + \varepsilon \langle V(J_1) \rangle + \varepsilon \left[V(\psi, J_1, \theta) - \langle V(J_1) \rangle + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + v(J_1) \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial V}{\partial J_1} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} + \frac{1}{2!} \frac{\partial v(J_1)}{\partial J_1} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \dots \quad (\text{B.14})$$

と表される。ここで ε の2次以上は捨てて1次までを考えることにすれば、1次項の係数が0であるとき、ハミルトニアンは J_1 のみの関数とすることができる。すなわち、

$$V(\psi, J_1, \theta) - \langle V(J_1) \rangle + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + v(J_1) \frac{\partial \chi}{\partial \psi} = 0 \quad (\text{B.15})$$

なる χ を見いだせば、

$$H_1 = H_0(J_1) + \varepsilon \langle V(J_1) \rangle \quad (\text{B.16})$$

となり、ハミルトニアンは、 J_1 のみの関数とすることができる。結果的にどうなったかと言えば、摂動項 V を分割して、 J_1 のみで書ける部分を無摂動項に含め、書けない部分は高次項に押し込めた形になっている。この様な操作を2次、3次と繰り返しながら J_1 のみで書ける部分を取りだして、解析的に解ける形もっていこうとするのが、正準摂動論である。

さて、 χ は周期関数であるから、(B.15)を満たす周期解を求めるために、 χ と V をフーリエ級数に展開する。

$$\bar{V}(\psi, J_1, \theta) = \sum_{k,p=-\infty}^{\infty} v_{kp}(J_1) e^{i(k\psi - p\theta)}$$

$$\chi(\psi, J_1, \theta) = \sum_{k,p=-\infty}^{\infty} g_{kp}(J_1) e^{i(k\psi - p\theta)}$$

$$v_{kp}(J_1) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \times \bar{V}(\psi, J_1, \theta) e^{-i(k\psi - p\theta)}$$

$$\bar{V}(\psi, J_1, \theta) = V(\psi, J_1, \theta) - \langle V(J_1) \rangle$$

(B.17)

より、これを(B.15)に代入すると、

$$g_{kp}(J_1) = \frac{i v_{kp}(J_1)}{k v(J_1) - p} \quad (\text{B.18})$$

となる。したがって、周期解は、

$$\chi(\psi, J_1, \theta) = \sum_{k,p=-\infty}^{\infty} \frac{i v_{kp}(J_1)}{k v(J_1) - p} e^{i(k\psi - p\theta)} \quad (\text{B.19})$$

と求まる。このような解が求まれば、ハミルトニアンは、

$$H_1 = H_0(J_1) + \varepsilon \langle V(J_1) \rangle + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial V}{\partial J_1} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} + \frac{1}{2!} \frac{\partial v(J_1)}{\partial J_1} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \dots \quad (\text{B.20})$$

と表せる。今度は、 ε の2次の項より J_1 のみで書ける部分を取り出すため、

$$V'(\psi, J_1, \theta) = \frac{\partial V}{\partial J_1} \frac{\partial \chi}{\partial \psi} + \frac{1}{2!} \frac{\partial v(J_1)}{\partial J_1} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^2 \quad (\text{B.21})$$

とおき、

$$\begin{aligned} \overline{V}(\psi, J_1, \theta) &= V(\psi, J_1, \theta) - \langle V(J_1) \rangle \\ V(\psi, J_1, \theta) &= \langle V'(J_1) \rangle + V'(\psi, J_1, \theta) - \langle V'(J_1) \rangle \\ \langle V'(J_1) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\theta V'(\psi, J_1, \theta) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

とすれば、ハミルトニアンは、

$$H_1 = H_0(J_1) + \varepsilon \langle V(J_1) \rangle + \varepsilon^2 \langle V'(J_1) \rangle + \varepsilon^2 [V'(\psi, J_1, \theta) - \langle V'(J_1) \rangle] + \dots$$

になる。したがって、 ε の2次項まで J_1 のみ項を取

り出したハミルトニアンを

$$H_{10} \equiv H_0(J_1) + \varepsilon \langle V(J_1) \rangle + \varepsilon^2 \langle V'(J_1) \rangle \quad (\text{B.23})$$

とおけば、結局ベータトロン振動数 $\nu(J_1)$ は、

$$\begin{aligned} \nu(J_1) &= \frac{\partial H_{01}(J_1)}{\partial J_1} \\ &= \nu_0 + \varepsilon \frac{\partial \langle V(J_1) \rangle}{\partial J_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial \langle V'(J_1) \rangle}{\partial J_1} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

と書けることになる。これで、 ε の2次の項まで取り出すことができたわけである。