

§ 1. はじめに

良く知られているように荷電粒子が加速されると電磁波を放射するが、加速度を受ける電荷が光速に近い速度で動いている場合には日常なじみの薄い相対論的効果があらわれる。円形電子加速器では相対論的速度の電子が円軌道に沿って受ける向心加速によって、大強度で指向性の強く広い波長範囲の光を発生する。(シンクロトン放射)

円形加速器で電子を加速するという立場から見るとこのシンクロトン放射は放射損失による加速の限界を決めるという厄介な問題であるが、これを利用する立場から見ると非常に広範囲の研究分野において最も強い紫外線～X線光源として活躍しているということはいままでのない。しかし放射光利用の技術が進むにつれてより強い光強度をもつ光源が望まれるようになった。この答がアンジュレータまたはウィグラーと呼ばれる挿入光源 (Insertion device) である。挿入光源とは蓄積リングの直線部に多数の磁石列を配置し電子を蛇行運動させることで積極的に光を取り出すものである。挿入光源からの放射光は従来の円軌道放射と比べ、干渉効果によって指向性が鋭くバンド幅の狭い高輝度の放射光である。

放射光の発生機構については既にいろいろな解説があるが、^{1)~6)} 本セミナーにおいては”放射光をつくる”という立場から挿入光源からの放射光の発生について述べて行きたいと思います。

(なお、単位系はMKS系を使っています。)

いろいろな角度から挿入光源からの放射を考えることに重点をおいたため、放射光を実験の実験に使うユーザーに役に立つ知識を与えるという観点からはかなりずれたものになりました。その部分については他の解説を参照して下さい。また本解説は筆者の理解の程度に従って大変たどたどしいものとなったことをはじめにお断りしておきます。

§ 2. 放射光の発生原理 (一個の電子からの放射)

加速器中の電子からの放射を考えるとき他の加速器の問題と同じく、一個の電子についてのみを考え、そこからの放射を最後に足し合わせれば十分である。(加速器内での電子密度は充分薄く、電子同士の相互作用は考えなくても良い)

そこで一個の電子からの放射を考えることになるが、そもそも光を放射するということはどのようなことであろうか。もちろんここには光とは何かという深遠な問題があるだろうが、ここでは放射の原理を単に ”電子が周波数 ω の調和振動を受けると $\hbar\omega$ の光子を放射する確率をもつ” といおう。一般に電子が加速度を受ければ放射がおこるが、これは運動を様々な周波数の調和振動の重ね合わせと考え、各フーリエ成分に相当する光子の放射が生じると考えられる。逆に $\hbar\omega$ の光を得るためには電子を ω で振動させればよいことになる。ただしこれは電子の速度が光速に比べて無視できる非相対論的な場合である。加速器の中を飛ぶ電子はほとんど光速に近い速度をもっているので相対論のドップラー効果があらわれてくる。

電子と同じ速さで動く系からみたとき ω で振動する電子は $\hbar\omega$ の光を放射するが、この光を静止系にいる観測者が受け取るときにはドップラーシフトした別の周波数 $\hbar\omega'$ の光に見える。

$$\omega' = \omega \frac{\gamma^{-1}}{1 - \beta \cos \theta} \quad \dots \dots (2-1)$$

$$; \beta = v/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E}{mc^2}$$

$$\approx 1957 E_{GeV}$$

ここで θ は光源の運動方向と観測者のなす角度である。また γ はローレンツ係数であり相対論的電子に対して $\gamma \gg 1$ である。(PFリングの場合では $E=2.5\text{GeV}$ であり $\gamma \approx 5000$ である。)

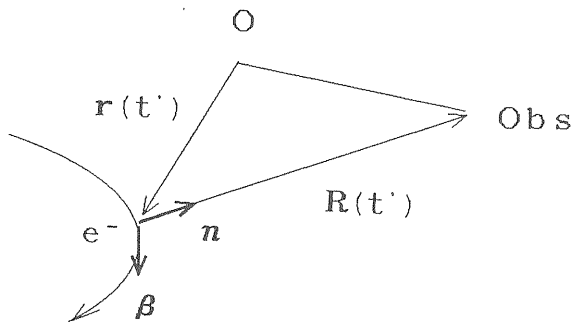
電子の運動方向 ($\theta = 0$) で見た場合、(2-1)は

$$\omega' = \omega \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = (1+\beta)\gamma\omega \doteq 2\gamma\omega \quad \dots (2-2)$$

となり γ が大きくなると観測される光は著しく短波長側にシフトして見えることになる。このことが相対論的電子からの放射の重要な特徴のひとつである。

さて、一般の放射光の問題は古典電磁気学で十分良く記述されるが、これからこれを定量的に取り扱って行こう。放射の電磁気学については著名な教科書による解説が数多くあるので⁷⁾ここでは簡単に要点のみを記していく。

まず一個の電子が任意の運動をする際につくる電磁場を考える。このとき電子のつくるポテンシャルはリエナール・ヴィーヘルトポテンシャルと呼ばれ次のように表される。



[図1]

スカラーポテンシャルを $\phi(t)$, ベクトルポテンシャルを $A(t)$ とすると

$$\phi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R(t') - \frac{R(t') \cdot v(t')}{c}}$$

$$A(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e v(t')}{R(t') - \frac{R(t') \cdot v(t')}{c}}$$

... (2-3)

但し t' は遅延時間と呼ばれ

$$t = t' + \frac{R(t')}{c}$$

の関係がある。これは時刻 t' における電子のつくる場の情報が観測者には $R(t')/c$ だけ遅れて届くという事実をあらわしている。

(2-3)のポテンシャルを使って

$$E = -\text{grad}\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad \dots (2-4)$$

$$B = \text{rot} A$$

から電場, 磁場を求めれば良い。

このとき R 方向の単位ベクトルを

$$n(t') = R(t')/R(t') \text{ として}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R(t')}{R(t') - \frac{R(t') \cdot v(t')}{c}}$$

$$= \frac{1}{1 - n(t') \cdot \beta(t')}$$

に気をつけて丁寧に微分して行けば次の結果を得る。

$$E(t) = E_v(t') + E_a(t') \quad \dots (2-5)$$

$$E_v(t') = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1-\beta^2)}{R^2} \frac{(n-\beta)}{(1-n \cdot \beta)^3} \right]_{t'}$$

$$E_a(t') = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{n \times \{(n-\beta) \times \dot{\beta}\}}{c R (1-n \cdot \beta)^3} \right]_{t'}$$

ここで $E_v(t')$, $E_a(t')$ はそれぞれ電子の速度と加速度に比例した成分である。また添え字の t' は括弧のなかの変数が遅延時間で表されていることを示している。

ここで E_v は R の2乗に反比例して減衰し遠方まで届くのは $1/R$ に比例する E_a のみである。つまり E_a が放射の電場成分をあらわしている。

同様に磁場にたいしても

$$B(t) = \frac{1}{c} n(t') \times E(t) \quad \dots (2-6)$$

という関係があるのがわかる。

式(2-5), (2-6)によって観測者の位置での電磁場が正確に決まる。この結果には電子の速度が光速よりずっと小さいといった近似は使っていないため、相対論的な効果を含んだ正しいものである。これよりこの場所でのエネルギーの流れはポインティングベクトルから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\mu_0} E_a \times B_a = \frac{1}{\mu_0 c} E_a \times (n \times E_a) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} E_a^2 n \end{aligned}$$

である。

これがこの位置で単位時間 (dt) に放射されてくるエネルギー量である。これを単位立体角あたりになおし

$$dP_{(t)} = (S \cdot n) R^2 d\Omega \quad \text{より}$$

$$\frac{dP_{(t)}}{d\Omega} = \frac{E_a^2 R^2}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c |R E_a|^2$$

しかし E_a は遅延時間で書かれているので上の式を単位遅延時間 (dt') あたりの放射エネルギーに書き直したほうが便利である。それには

$$\begin{aligned} \frac{dP_{(t')}}{d\Omega} &= \frac{dP_{(t)}}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} \\ &= \epsilon_0 c |R E_a|^2 (1 - n \cdot \beta) \end{aligned} \quad \dots (2-7)$$

(2-5)を(2-7)に代入することで電子が単位加速時間あたりに観測者の単位立体角あたりに放射するエネルギーが求めることができる。すると

$$\begin{aligned} \frac{dP_{(t')}}{d\Omega} &= \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \\ &\times \left[\frac{[n \times \{(n - \beta) \times \dot{\beta}\}]^2}{(1 - n \cdot \beta)^5} \right]_{t'} \end{aligned} \quad \dots (2-8)$$

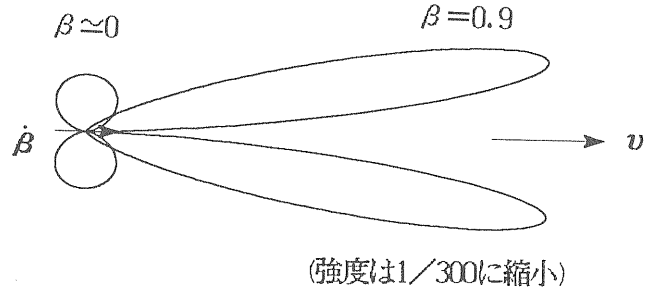
式(2-8)は放射の角分布を表している。

この様子を調べるために $\beta, \dot{\beta}$ が平行である運動をしている電子の放射を考えてみる。 n と β のなす角度を θ とすると

$\beta \times \dot{\beta} = 0$ であるから(2-8)は

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\beta}^2}{16\pi^2 c \epsilon_0} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (2-9)$$

この放射の角分布の β による変化を図2に示す。



[図2]

電子の速さが光速に近づくに従い、放射の角分布は電子の進行方向へ鋭く傾いていき、かつその放射強度も増大する。この特徴は $\beta, \dot{\beta}$ がどう向いても変わらない。というのは(2-8)の分母に $1 - \beta \cos \theta$ の高次のべきがあらわれるため β が1に近いとき $\theta \ll 1$ のときのみ(2-8)は大きな値がとれる。そこで $(1 - \beta \cos \theta)^{-1}$ が最大値の半分になる θ の値は $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ として

$$\begin{aligned} \theta &\approx \sqrt{2(1 - \beta)} \approx \sqrt{(1 + \beta)(1 - \beta)} \\ &= \sqrt{1 - \beta^2} = 1/\gamma \end{aligned}$$

となり相対論的電子からの放射の大部分は電子の進行方向から $1/\gamma$ の角度に入ることになる。これがシンクロトロン放射光の特徴である指向性の強さの理由である。

以上により観測者の位置において相対論的電子からの放射の全エネルギー(観測者が受け取る全ての光子のエネルギーの合計)が計算できるが、ここにはどんな波長の光がどのくらい含まれているのだろうか。この放射のスペクトル分布を求めることがこれからの主題とする。

(注) 放射の全エネルギーの計算については、

Appendix Aに付けておく。

まず、基礎となる考え方を示そう。観測者からみて運動が周波数 ω の調和振動にみえるならば、そのとき観測者が受け取る放射は $\hbar\omega$ の光のみである。

電子の運動が調和振動ではないが周期的である場合は運動はフーリエ級数へと展開できる。このときの放射は運動の基本振動数 $\omega = 2\pi/T$ (T : 周期) の整数倍の振動数を含むこととなる。

さらに一般的に運動が何の周期性も持たない場合 (例えば制動放射など) は、電子が無限遠から来て相互作用を受け、その結果光を放射し、また無限遠に去っていくと考える。このとき運動はフーリエ積分へと展開され、その放射光は連続した振動数からなる連続スペクトルとなる。

この一般の場合に観測者が受け取る単位周波数あたりの放射パワー (単位立体角あたり) は

$F(t) = RE_a$ として、

$$\frac{dP(t)}{d\omega d\Omega} = \frac{\epsilon_0 c}{\pi} |F_\omega|^2 \quad \dots (2-10)$$

である。

ここで F_ω は $F(t)$ のフーリエ積分変換で

$$F_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega \exp(i\omega t) d\omega$$

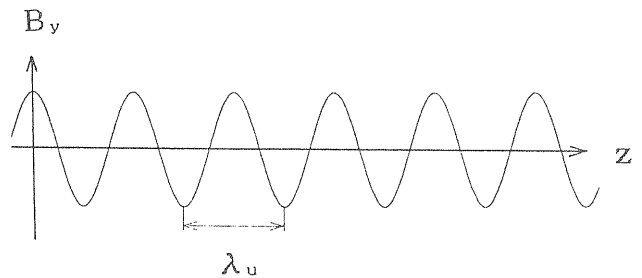
式(2-10)が一般の電子の運動による放射のスペクトルを求める上で重要であるが、これについては§4でアンジュレータの放射スペクトルを求める際に詳しく述べる。

これで放射光の定量的な取扱いのための基礎が整った。これより挿入光源からの放射スペクトルを計算していくことができるが、そのまえに次章では挿入光源からの放射について別の角度から考えてみたい。

§3. 周期磁場内での電子の運動

実際に相対論的速度で動く電子を周期的に揺さぶる具体的な手段としては電場でも磁場でも良いが、ここでは挿入光源としてもっとも一般的に利用される周期静磁場をとりあげて、この中で電子の運動を考える。

3-1. リニアアンジュレータ磁場内での電子の運動^{8), 9)}

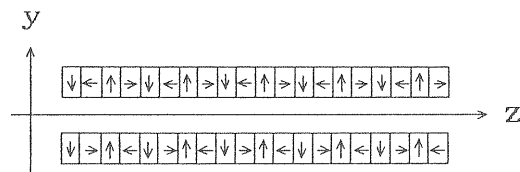


[図3]

図3のような z 軸上でサイン型の周期磁場を仮定し電子が z 軸方向に入射したと考える。便宜上、磁場を次のようにおく。

$$B = (0, B_0 \cos \kappa_u z, 0) ; \kappa_u = \frac{2\pi}{\lambda_u} \quad (3-1)$$

このような磁場は例えば図4のような磁石列によって得られ、これをリニアアンジュレータと呼ぶ。



[図4]

(注意) (3-1)の磁場はマクスウェル方程式

$\nabla \times B = 0$ を満たさないので、本当は(3-1)を

$$B = (0, B_0 \cosh(\kappa_u y) \cos \kappa_u z, B_0 \sinh(\kappa_u y) \sin \kappa_u z)$$

と仮定したほうがよいが電子は $y=0$ のごく近傍

しか通らないとき $\cosh=1$, $\sinh=0$ としても十分良い近似である。今はこの場合を考えることとする。

さて(3-1)の磁場のもとで電子は蛇行軌道をとるのであろう。これを調べるために電子の運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を各成分で書いて

$$\begin{aligned} m\gamma \dot{v}_x &= -e B_0 v_z \cos \kappa_u z \\ m\gamma \dot{v}_y &= 0 \\ m\gamma \dot{v}_z &= e B_0 v_x \cos \kappa_u z \end{aligned} \quad (3-2)$$

これより
y方向への力はなし。

x方向に対しては

$$v_x = \frac{e B_0 \lambda_u}{2\pi m \gamma} \sin \kappa_u z \doteq \frac{K}{\gamma} v \sin \kappa_u z \quad \dots (3-3)$$

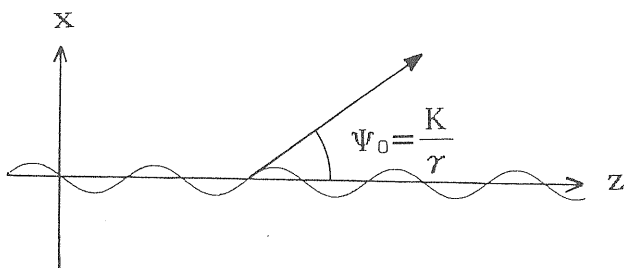
$$; K = \frac{e B_0 \lambda_u}{2\pi m c} = 93.4 B_0 (T) \lambda_u (m) \quad \dots (3-4)$$

$$\psi_0 \equiv K \gamma^{-1} \quad \dots (3-5)$$

ただしKは電子の揺さぶりの程度を表す量で挿入光源からの放射を特徴づける重要なパラメーターである。

またx方向への蛇行の最大振れ角は

$$v_{x0}/v = \psi_0 (=K\gamma^{-1}) \text{ で与えられる。}$$



[図5] 蛇行の最大振れ角

いまKとして $K \lesssim 1$ を考えることにする。一般に $K \lesssim 1$ のとき、この周期磁場からなる挿入光源をアンジュレータと呼ぶ。逆にK値が大きいとき ($K \gtrsim 10$) は、これを多極ウィグラーと呼

ぶ。ウィグラーの放射については §5 で扱う。

ここで例えばK値として

$$B_0 = 0.5 T, \lambda_u = 0.1 m \quad (K=5)$$

$$\gamma = 5000 \quad (2.5 GeV)$$

を仮定し(3-5)に入れてみると

$\psi_0 \doteq 1 \times 10^{-3}$ (rad) となり軌道の振れ角自体は小さなものとなる。このためアンジュレータでは放射の大部分が最前方(z軸上)に集中し、特徴である干渉効果があらわれる。

次にz方向の運動は(3-3)から

$$\begin{aligned} v_z &= \sqrt{v^2 - v_x^2} \doteq v \left(1 - \frac{1}{2} \psi_0^2 \cos^2 \kappa_u z \right) \\ &= v \left(1 - \frac{\psi_0^2}{4} \right) - \frac{v \psi_0^2}{4} \cos 2\kappa_u z \quad \dots (3-6) \end{aligned}$$

となる。これより電子はz方向の平均的な速さ

$$\langle v_z \rangle = v (1 - \psi_0^2/4) \quad \dots (3-7)$$

のまわりで振動しながら飛んでいることがわかる。

そこで電子の軌道を求めると

$$z = \langle v_z \rangle t', \quad \omega_0 = \kappa_u \langle v_z \rangle \quad \dots (3-8)$$

と置き換えることで ($\langle v_z \rangle \doteq v$)

$$x = \frac{-\psi_0 v}{\omega_0} \cos \omega_0 t' \quad (3-9)$$

$$z = \langle v_z \rangle t' - \frac{\psi_0^2 v}{8\omega_0} \sin 2\omega_0 t' \quad (3-10)$$

これはz方向への $\langle v_z \rangle$ での等速度運動とx-z平面内での8字運動の重ね合わせである。リニアアンジュレータでは、このz方向の振動があるため調和振動からズレて、放射には基本振動数とその各高調波成分があらわれることになる。

このとき観測者が受け取る放射光の基本振動数を求めよう。これは電子の速度が遅いときは ω_0 そ

のものである。しかし §2 で述べたように電子速度が光速に近いためにドップラー効果が生じる。この効果を考えるためには、まず電子と共に動く系（電子の静止系）での振動数 ω^* を求め、それを(2-1)で観測者系での振動数 ω_1 に直せばよい。電子の静止系ではアンジュレータの長さがローレンツ収縮して $\lambda_u^* = \lambda_u \sqrt{1 - (v_z/c)^2}$ と見えるはずである。すると ω^* は

$$\omega^* = \frac{2\pi}{\lambda_u^*} v_z \doteq \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - (v_z/c)^2}} \quad (3-11)$$

(2-1), (3-11) より観測者系での振動数 ω_1 は

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{1 - (v_z/c)^2}}{1 - \frac{v_z}{c} \cos \theta} \omega^* = \frac{\omega_0}{1 - \frac{v_z}{c} \cos \theta} \dots (3-12)$$

となる。いまの場合、

$$v_z \doteq \langle v_z \rangle = v \left(1 - \frac{K^2 \gamma^{-2}}{4} \right)$$

$$\cos \theta \doteq 1 - \theta^2/2$$

$$\beta = v/c = \sqrt{1 - \gamma^{-2}} \doteq 1 - \gamma^{-2}/2$$

であることを使えば

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v_z}{c} \cos \theta &\doteq 1 - \left(1 - \frac{\gamma^{-2}}{2} \right) \left(1 - \frac{K^2 \gamma^{-2}}{4} \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \\ &\doteq \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \end{aligned}$$

よって ω^* は

$$\omega_1 = \omega_0 \left\{ \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \right\}^{-1}$$

これを波長に直せば

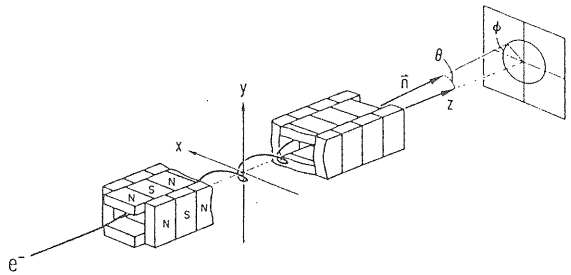
$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \dots (3-13)$$

となる。

この λ_1 とその高調波 ($\lambda_k = \lambda_1/k$) が観測者が受け取る放射光の波長であり、これらの光が z 軸上に集中してくる。 ($\theta \ll 1$)

またリニアアンジュレータでは電子が $x-z$ 平面内で運動するため、 z 軸上ではその放射光もまた線偏光している。

3-2. ヘリカルアンジュレータ磁場内での電子の運動^{10), 11)}



[図6] 11)

もうひとつの例として図6のような互いに位相が $\pi/2$ ずれた2つの直交した磁石列がつくる磁場

$$B = \left(-B_x \sin \kappa_u z, B_y \cos \kappa_u z, 0 \right) \dots (3-14)$$

を考える。(3-14)で

$B_x = B_y \equiv B_0$ の場合¹⁰⁾ をヘリカルアンジュレータ $B_x \neq B_y$ の場合を楕円アンジュレータ¹¹⁾ と呼ぶ。ここではヘリカルアンジュレータ磁場内での電子の運動を考える。この場合、運動方程式を解くとただちに

$$v_x = -\psi_0 v \sin \kappa_u z$$

$$v_y = \psi_0 v \cos \kappa_u z$$

$$v_z = \{ v^2 - (v_x^2 + v_y^2) \}^{1/2} \doteq v \left(1 - \frac{\psi_0^2}{2} \right)$$

となる。これは z 方向に等速のラセン運動である。すると z 軸上でみる観測者に対しては電子は完全な円軌道を描く。つまり z 軸上での放射光は基本波 ω_1 のみとなり、その波長は前と同様にして

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + K^2 + \theta^2 \gamma^2) \dots (3-15)$$

となる。またこの光は電子の運動を反映して円偏光している。

(なお、 $B_x \neq B_y$ の楕円アンジュレータの場合の運動は、 $x-y$ 平面の斜影が楕円軌道で z 方向はリニアアンジュレータと同じく振動成分を持つ。この放射光は楕円偏光である。)

3-3. 進行電磁波内での電子の運動

これまでは電子軌道を振る手段として周期的な静磁場を考えてきたが、次に古典的な電磁場として記述できるレーザー光の中での電子の運動を考え、アンジュレータ磁場のときと比較する。

まず初めに $-z$ 方向へ進む円偏光の電磁波を考えよう。この電場ベクトル E を

$$\begin{aligned} E &= (E_0 \cos(\omega t + \kappa z), \\ &E_0 \sin(\omega t + \kappa z), 0); \kappa = \frac{\omega}{c} \\ &= (E_0 \cos \omega \xi, E_0 \sin \omega \xi, 0) \end{aligned} \dots (3-16)$$

とすれば (ただし $\xi = t + z/c$)

磁場 B は

$$B = \left(-\frac{E_0}{c} \sin \omega \xi, \frac{E_0}{c} \cos \omega \xi, 0 \right) \dots (3-17)$$

この光の場の中での電子の運動方程式

$$\dot{p} = e(E + v \times B) \text{ に (3-16), (3-17) を入れて}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= e E_0 (1 + v_z/c) \cos \omega \xi \\ \dot{p}_y &= e E_0 (1 + v_z/c) \sin \omega \xi \\ \dot{p}_z &= 0 \end{aligned} \quad (3-18)$$

となるが(3-18)は

$$\frac{d}{dt} (\sin \omega \xi) = \omega (1 + v_z/c) \cos \omega \xi$$

$$\frac{d}{dt} (\cos \omega \xi) = -\omega (1 + v_z/c) \sin \omega \xi$$

を使って直ちに積分できて

$$p_x = \frac{e E_0}{\omega} \sin \omega \xi$$

$$p_y = -\frac{e E_0}{\omega} \cos \omega \xi$$

$$p_z = \text{const}$$

となる。これは、 z 方向に一定速度で進むラセン運動でありヘリカルアンジュレータの場合の結果と全く同じである。電子の速度が非相対論的な場合、電子系で電子の軌跡は $x-y$ 平面上での振動数 ω の円軌道をとる。したがって電子は $\hbar \omega$ の放射光をだす。このことは電子による光の散乱 (トムソン散乱) として知られている。また電子速度が相対論的なときはヘリカルアンジュレータと同じく電子の進行方向に鋭く指向した、非常に短波長にシフトした放射光が得られるだろう。これは光の逆コンプトン散乱といわれる。

次に線偏光した平面電磁波の中での電子の運動はどうなるだろうか。やはりこの結果はリニアアンジュレータ磁場中での運動と一致することがわかる。つまり線偏光した平面波のなかでの電子の運動は、 z 方向の等速運動と $x-z$ 平面での8字運動の合成となる。このとき電子はリニアアンジュレータと同様の放射光を出す。

3-4. 電子からみたアンジュレータ磁場

このように挿入光源の周期磁場からの放射と古典的電磁波 (レーザー光) の散乱は似ているが、両者の関係についてももう少し考察しよう。

まず相対論的電子からアンジュレータ場がどう見えるかを考えてみる。

そのためには電場と磁場のローレンツ変換が必要であるがそれは次の通りである。

観測者系（基準静止系）に対し速度 $v = \beta c$ で z 方向に動く系（ダッシュ系）での E' 、 B' は

$$E_x = \gamma (E'_x + \beta c B'_y), B_x = \gamma \left(B'_x - \frac{\beta}{c} E'_y \right)$$

$$E_y = \gamma (E'_y - \beta c B'_x), B_y = \gamma \left(B'_y + \frac{\beta}{c} E'_x \right)$$

$$E_z = E'_z, B_z = B'_z$$

... (3-19)

の関係がある。また z 、 t のローレンツ変換は

$$z = \gamma_z (z' + \beta_z c t')$$

$$c t = \gamma_z (c t' + \beta_z z')$$

... (3-20)

である。

アンジュレータ磁場としてリニアアンジュレータを考え、

$$B = (0, B_0 \sin \kappa_u z, 0) \quad \dots (3-21)$$

$;\ \kappa_u = 2\pi / \lambda_u$

とおこう。(3-20)、(3-21)を(3-19)に代入すれば電子から見たアンジュレータ磁場は

$$B' = (0, \gamma_z B_0 \sin A, 0)$$

$$E' = (-\gamma_z B_0 \sin A, 0, 0)$$

$;\ A = \kappa_u \gamma_z (z' + c \beta_z t')$

... (3-22)

となり、動く電子からは磁場だけではなく電場成分もみえ、この電磁場が向こうから光速に近い速度でやってくるように見える。

さて、電子系でみた(3-22)の場を再度ローレンツ変換して観測者系に戻すと(3-21)の静磁場に当然戻るが、いま電子速度がほとんど光速であるという条件の下で(3-22)において $\beta_z \approx 1$ とすると事情が変わる。(3-22)は

$$B' = (0, \gamma_z B_0 \sin \chi, 0)$$

$$E' = (-c \gamma_z B_0 \sin \chi, 0, 0)$$

$;\ \chi = \kappa_u \gamma_z (z' + c t')$

... (3-23)

となる。(3-23)を再びローレンツ変換すると

$$B'_y = \gamma_z B'_y + \gamma_z \frac{\beta_z}{c} E'_x$$

$$= (1 - \beta_z) \gamma_z^2 B_0 \sin \chi$$

$$= \frac{(1 - \beta_z^2)}{1 + \beta_z} \gamma_z^2 B_0 \sin \chi$$

$$\approx \frac{1}{2} B_0 \sin \chi$$

であり、同様に $E'_x = -\frac{1}{2} B_0 \sin \chi$

また(3-20)を用いて χ を z 、 t で表せば

$$\chi = \kappa_u \gamma_z (z' + c t')$$

$$= \kappa_u \gamma_z^2 (1 - \beta_z) (z + c t)$$

$$= \frac{\kappa_u}{2} (z + c t)$$

となるから結局、ローレンツ変換で元の観測者系に戻した結果は

$$B'' = \left(0, \frac{B_0}{2} \sin \left\{ \frac{\kappa_u}{2} (z + c t) \right\}, 0 \right)$$

$$E'' = \left(-\frac{B_0}{2} \sin \left\{ \frac{\kappa_u}{2} (z + c t) \right\}, 0, 0 \right)$$

... (3-24)

(3-24)は $-z$ 方向に進む擬似的な電磁波と見なせる。(本物の電磁波との違いは比 $|E|/|B|$)

つまりアンジュレータの周期静磁場(3-21)は相対論的電子にとって(3-24)の擬似電磁波と等価である。(ただし波長は2倍になっていることに注意) したがってアンジュレータからの放射は電子による擬似電磁波の散乱(逆コンプトン散乱)と考えることもできる。

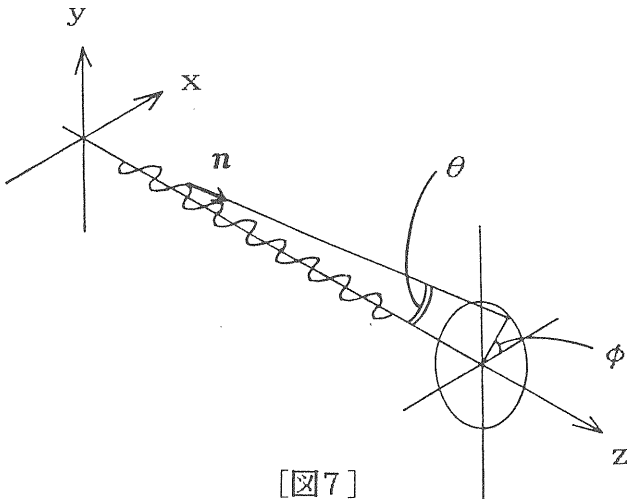
(補足) 上の擬似電磁波の波長はアンジュレータ周期長の2倍になっている。そこでレーザー光が相対論的電子によって逆コンプトン散乱されたときの波長は(3-13)、(3-15)から、おおむね $\lambda_1 \approx \lambda_0 / 4\gamma^2$ になると予想されるが、これはコンプトン散乱を考えたときの結果と一致する。

§ 4. アンジュレータの放射スペクトル

4-1. 挿入光源の放射スペクトルの求め方

挿入光源の周期磁場の中で、電子が§ 3で求めたように蛇行運動をしたとき放射する光のスペクトルを求めよう。

観測者の座標を図7のようにとる。



【図7】

§ 2の結果から、観測者の単位立体角あたりへの放射パワーは

$$\frac{dP}{d\Omega} = c \epsilon_0 |RE|^2 \quad \dots (4-1)$$

で与えられる。ここで

$$F(t) \equiv RE$$

$$= \left[\frac{e}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{[n \times (n - \beta) \times \dot{\beta}]}{(1 - n \cdot \beta)^3} \right] t' \quad \dots (4-2)$$

$$; t' + \frac{R(t')}{c} = t \quad \dots (4-3)$$

とおこう。

運動が周期Tをもつとき、F(t)はフーリエ級数に展開できて

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \exp(i \omega_1 k t) \quad (4-4)$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \exp(-i \omega_1 k t) dt$$

$$; \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

これは無限周期のアンジュレータからの放射をあらわす。

このとき観測者は $\hbar \omega_1$ の整数倍(k倍)の光子を受け取ることになる。この光の量を求めるために $|F(t)|^2$ の一周期あたりの平均を計算すると

$$\begin{aligned} \langle |F(t)|^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_m \sum_n F_m F_n \times \right. \\ &\quad \left. \exp\{i \omega_1 (m+n) t\} \right\} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 \quad (4-5) \end{aligned}$$

であり、これから電子が一周期運動する間に観測者が単位立体角あたりに受けるk次成分の光の全エネルギーは

$$\int \frac{dP_k}{d\Omega} dt = 2 \epsilon_0 c T |F_k|^2 \quad \dots (4-6)$$

となる。これを $k \hbar \omega_1$ で割ればk次光の光子数になる。

上の結果はアンジュレータの周期磁場が無限に続く場合のものである。

実際の有限周期のアンジュレータのなかでの電子の運動は、この周期Tの無限運動のある一部分にStep関数がかかったものとして

$$F^\#(t) = F(t) \cdot G(t) \quad (4-7)$$

$$; G(t) = 1 \quad \dots \quad 0 \leq t \leq NT$$

$$G(t) = 0 \quad \dots \quad t < 0, t > NT$$

と考えよう。

$F^\#(t)$ のスペクトル分解を行うためには今度は一般的な運動をした場合と同じくフーリエ変換しないと行けない。というのは、遠方の観測者から見たとき電子は無限遠からやってきてアンジュレータの区間でのみ蛇行運動し、また無限遠に去っていくように見えるからである。

つまり

$$F_\omega^\# = \int_{-\infty}^{\infty} F^\#(t) \exp(-i\omega t) dt \quad \dots (4-8)$$

$$F^\#(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega^\# \exp(i\omega t) d\omega$$

$$; (F_\omega^\#)^* = F_{-\omega}^\#$$

これらの関係を使えば単位立体角あたりの全放射強度は以下のように求めることができる。

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{total} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP}{d\Omega} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} c \epsilon_0 |F^\#(t)|^2 dt$$

$$= c \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} F^\#(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F_\omega^\# \exp(i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \right] dt$$

$$= c \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega^\# \left[\int_{-\infty}^{\infty} F^\#(t) \exp(i\omega t) dt \right] \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$= c \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega^\# (F_\omega^\#)^* \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\because F_{-\omega} = F_\omega^*)$$

$$= \frac{c \epsilon_0}{\pi} \int_0^{\infty} |F_\omega^\#|^2 d\omega \quad \dots (4-9)$$

これより電子が1ど挿入光源を通り抜けたときに出す放射のスペクトルは(単位周波数、単位立体角あたり)

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{c \epsilon_0}{\pi} |F_\omega^\#|^2 \quad \dots (4-10)$$

となる。

この結果は電子が一般的な運動をしたときの放射スペクトルを求める際にも使うことができる。

(§2.(2-10)参照)

そこでこの $F_\omega^\#$ を式(4-7),(4-8)を使い求めていく。

$$F_\omega^\# = \int_{-\infty}^{\infty} F^\#(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot G(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$= \int_0^{NT} F(t) \exp(-i\omega t) dt$$

$$= \int_0^{NT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \exp(i\omega_1 k t) \times \exp(-i\omega t) dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \frac{\exp\{i(k\omega_1 - \omega)NT\} - 1}{i(k\omega_1 - \omega)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \frac{\exp\{2\pi N i(k - \omega/\omega_1)\} - 1}{i(k\omega_1 - \omega)} \quad \dots (4-11)$$

よって

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{c \epsilon_0}{\pi} |F_\omega^\#|^2 = \frac{c \epsilon_0}{\pi} F_\omega^\# (F_\omega^\#)^* \quad \dots (4-12)$$

において

$$F_\omega^\# (F_\omega^\#)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_k F_j^*$$

$$\times \frac{[\exp\{i \cdot 2\pi N(k - \omega/\omega_1)\} - 1]}{(k\omega_1 - \omega)}$$

$$\times \frac{[\exp\{i \cdot 2\pi N(j - \omega/\omega_1)\} - 1]}{(j\omega_1 - \omega)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k F_k^* \frac{2[1 - \cos(2\pi N(k - \omega/\omega_1))]}{(k\omega_1 - \omega)^2} \quad \dots (4-13)$$

ここで各次数のピークが十分に離れているという仮定のもとに k と j のクロスタームは落とした。これより

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} &= \frac{4c\epsilon_0}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \\ &\times \frac{\sin^2\{\pi N(k-\omega/\omega_1)\}}{\omega_1^2 (k-\omega/\omega_1)^2} \\ &= \frac{4\pi c\epsilon_0}{\omega_1^2} N^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \\ &\times \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2 \\ &\dots (4-14) \end{aligned}$$

となる。

ここで関数

$$\begin{aligned} \delta_N(\omega/\omega_1) &= \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2 \\ &\dots (4-15) \end{aligned}$$

の部分アンジュレータの放射スペクトルの形を特徴づけている。

第k次光成分の強さは $|F_k|^2$ で決まりこれは

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \exp(-i\omega_1 k t) dt \\ F(t) &= \left[\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{[\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_t \\ &\dots (4-16) \end{aligned}$$

から求める。

通常この計算を行う際に、現実の観測者が光源から十分に遠方に離れているというfar-field近似を用いる。これは遠方から見たとき上式の \mathbf{n} が一定であるとみなすものである。すると

$$dt = (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) dt' \quad \text{であり}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} &= \frac{d}{dt'} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right] \\ &\dots (4-17) \end{aligned}$$

などを使い式(4-16)を1回部分積分することができて、

$$F_k = \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k) \dots (4-18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_k &\equiv \int_0^T \boldsymbol{\beta} \exp\left\{-ik\omega_1 \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}\right)\right\} dt' \\ &\dots (4-19) \end{aligned}$$

を計算すればよいことが判る。

そして、この積分部 \mathbf{Q}_k はアンジュレータ中の電子の運動を知ることで求めることができる。

以上の手順をまとめておくと

- ① 各ケースでのアンジュレータ磁場中の電子の運動から $\mathbf{r}(t), \boldsymbol{\beta}(t)$ を求める。
 - ② 積分 \mathbf{Q}_k の計算
 - ③ F_k の計算
- これらの結果から
- ④ 有限周期のアンジュレータのk次光スペクトルは

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} \right)_k &= \frac{4\pi c\epsilon_0}{\omega_1^2} N^2 |F_k|^2 \\ &\times \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2 \\ &\dots (4-20) \end{aligned}$$

で決まる。ここでリニアアンジュレータの場合には(3-13)より

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \theta^2 \gamma^2 \right) \quad (4-21)$$

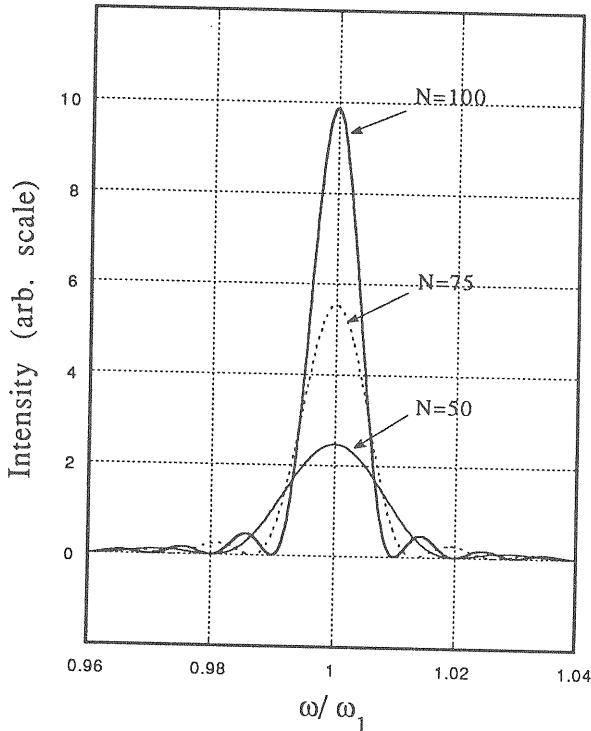
(4-20), (4-21)の結果から、実際に②、③の計算をしなくとも以上の結果からアンジュレータ放射の重要な特徴が判る。

- まず前に述べたように観測者が見る光はドップラー効果によって波長がたいへん短くなること。
($\omega_0 \rightarrow \omega_1$)
- 各次数の光の強度はアンジュレータの周期数Nの2乗に比例する。
- アンジュレータ放射スペクトルの形は関数

$$\delta_N(\omega/\omega_1) = \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2$$

できまり、その幅は約 $1/N$ である。このことから周期数が増えればスペクトルの幅も狭くなり無限周期の場合の線スペクトルへと近づいていくことが事わかる。

この $\delta_N(\omega/\omega_1)$ のNによる変化を図8に示しておく。



【図8】アンジュレータスペクトルの周期数Nによる変化

4-2. アンジュレータの放射スペクトル

4-1の手順に従い実際のアンジュレータからの放射光スペクトル(単位周波数、単位立体角あたりの放射強度)を求めてみよう。ここでは最も普通のリニアアンジュレータを例にとって計算する。なお、さらに一般的な楕円アンジュレータおよびヘリカルアンジュレータの場合をAppendix (2)につけておく。

また計算中に少し特殊関数(ベッセル関数)の知識が必要な所がありますが適宜、物理数学の本を見て下さい。

① 無限周期のリニアアンジュレータ磁場中での電子の運動

リニアアンジュレータ磁場

$$B = \left(0, B_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} z, 0 \right)$$

のなかでの電子の運動は(3-9), (3-10)で求めたように進行方向への一定速度の運動とそのまわりでの8字運動の合成である。

このときの $\beta(t')$, $r(t')$ はそれぞれ

$$\beta_x = \beta \Psi_0 \cos \omega_0 t', \quad \beta_y = 0$$

$$\beta_z = \beta \left\{ \left(1 - \frac{\Psi_0^2}{4} \right) - \frac{\Psi_0^2}{4} \cos 2\omega_0 t' \right\} \quad \dots (4-21)$$

$$r_x = \frac{\Psi_0 v}{\omega_0} \sin \omega_0 t', \quad r_y = 0$$

$$r_z = v \left\{ \left(1 - \frac{\Psi_0^2}{4} \right) t' - \frac{\Psi_0^2}{8\omega_0} \sin 2\omega_0 t' \right\} \quad \dots (4-22)$$

である。ここで Ψ_0 は前出ではあるが再度かけば

$$\Psi_0 = K \gamma^{-1}, \quad K = \frac{e B_0 \lambda_u}{2\pi m c}$$

また観測者方向への単位ベクトル n は

$$n = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad \dots (4-23)$$

とする。(図7参照)

② Q_k の計算

$$Q_k = \int_0^{T'} \beta \exp \left\{ -i k \omega_1 \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \right\} dt'$$

の計算にあたり、やはり(3-13)から

$$T = \delta T', \quad \omega_1 = \omega_0 / \delta$$

$$; \quad \delta = 1 - \beta \left(1 - \frac{\Psi_0^2}{4} \right) \cos \theta$$

$$\doteq \frac{1}{2\gamma^2} \left(1 + \gamma^2 \theta^2 + \frac{K^2}{2} \right)$$

であり、これらを使って Q_k の各成分を計算していく。しばらくわずらわしい計算が続きますがご辛抱ください。

まず $Q_{ky} = 0$ であり $\Psi_0 = K/\gamma \ll 1$ として Ψ_0^2 の項は落とす。すると

$$Q_{kx} = \beta \Psi_0 \int_0^{T'} \cos \omega_0 t' \times \exp \left\{ -i k \omega_1 \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \right\} dt' \quad \dots (4-24)$$

$$Q_{kz} \doteq \int_0^{T'} \exp \left\{ -i k \omega_1 \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \right\} dt' \quad \dots (4-25)$$

被積分部の \exp のなかは(4-22), (4-23)式をもちいて

$$\begin{aligned} & -i k \omega_1 \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \\ &= -i k (\omega_0 t' - A \sin \omega_0 t' \\ & \quad + B \sin 2\omega_0 t') \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta \Psi_0}{\delta} \cos \phi \sin \theta \\ &\doteq \frac{2K\gamma\theta \cos \phi}{1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2} \end{aligned}$$

$$B = \frac{\beta \Psi_0^2}{8\delta} \cos \theta \doteq \frac{K^2}{4(1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2)}$$

すると(4-24), (4-25)で問題となる積分は

$\int \exp(i x \sin y) dy$ の形をしているが、こ

れをベッセル関数 $J_n(x)$ であらわす。

ベッセル関数は

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(x/2)^{n+2j}}{(n+j)!} \dots (4-26)$$

で定義されるが、その母関数 $f(u)$ との間に関係がある。

$$f(u) \equiv \exp\left(\frac{x}{2}u\right) \exp\left(\frac{-x}{2}u^{-1}\right) \dots (4-27)$$

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cdot u^n \dots (4-28)$$

(4-28)において $u = \exp(iy)$ とおけば、ただちに

$$\begin{aligned} \exp(ix \sin y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cdot \exp(iny) \dots (4-29) \end{aligned}$$

となる。

これを使い(4-21), (4-22)を変形すると

$$\begin{aligned} Q_{kx} &= \beta \Psi_0 \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_q(kA) J_p(kB) \\ & \times \int_0^{2\pi} \cos \omega_0 t' \\ & \times \exp\{-i \omega_0 t' (k - q + 2p)\} dt' \dots (4-30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{kz} &= \beta \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_q(kA) J_p(kB) \\ & \times \int_0^{2\pi} \exp\{-i \omega_0 t' (k - q + 2p)\} dt' \dots (4-31) \end{aligned}$$

これらの積分部を計算して

(Q_{kx} の積分部)

$$\frac{\pi}{\omega_0} \dots q=2p+k\pm 1 \text{ のとき}$$

$$0 \dots q \neq 2p+k\pm 1 \text{ のとき}$$

(Q_{kz} の積分部)

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \dots q=2p+k \text{ のとき}$$

$$0 \dots q \neq 2p+k \text{ のとき}$$

ここで $\beta \approx 1$ として

$$S_j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k+j}(kA) \dots (4-32)$$

とおくと、結果として次のようになる。

$$Q_{kx} = \frac{\pi \Psi_0}{\omega_0} \{S_{-1} + S_1\}$$

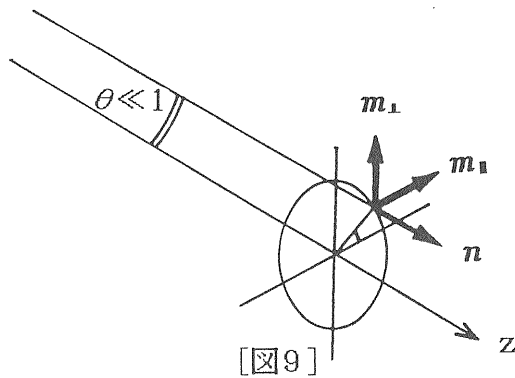
$$Q_{ky} = 0 \quad (4-33)$$

$$Q_{kz} = \frac{2\pi}{\omega_0} S_0$$

ここまでくれば後は③のベクトル積を勘定して出来上がり。

$$\textcircled{3} F_k = \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k] \text{ の計算}$$

この計算を行う前に \mathbf{n} と $\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k]$ は垂直なので図9のように互いに \mathbf{n} と直交する単位ベクトル $\mathbf{m}_{\parallel}, \mathbf{m}_{\perp}$ を導入すると便利である。



\mathbf{m}_{\parallel} を $x-z$ 平面に平行にとれば

$$\mathbf{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$$

であるから

$$\mathbf{m}_{\parallel} = (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi)^{-1/2} \times (\cos \theta, 0, -\cos \phi \sin \theta)$$

遠方において $\theta \ll 1$ として

$$\mathbf{m}_{\parallel} = (1, 0, -\theta \cos \phi) \dots (4-34)$$

となる。同様に

$$\mathbf{m}_{\perp} = (1, 0, -\theta \sin \phi) \dots (4-35)$$

ベクトル公式

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

を使って

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k]]_{\parallel} &= [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k]] \cdot \mathbf{m}_{\parallel} \\ &= -Q_{kx} + Q_{kz} \theta \cos \phi \end{aligned} \dots (4-36)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k]]_{\perp} &= [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k]] \cdot \mathbf{m}_{\perp} \\ &= -Q_{ky} + Q_{kz} \theta \sin \phi \end{aligned} \dots (4-37)$$

これより、 F_k として得られる結果は

$$\begin{aligned} F_{k\parallel} &= \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\pi}{\omega_0} \\ &\quad \times \{-\Psi_0(S_{-1} + S_1) + 2S_0 \theta \cos \phi\} \end{aligned} \dots (4-38)$$

$$F_{k\perp} = \frac{ik\omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{2\pi}{\omega_0} S_0 \theta \sin \phi \dots (4-39)$$

ここで

$$S_j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kB) J_{2p+k+j}(kA) \dots (4-40)$$

$$A = \frac{2K\gamma \theta \cos \phi}{1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2} \dots (4-41)$$

$$B = \frac{K^2}{4(1 + \gamma^2 \theta^2 + K^2/2)} \dots (4-42)$$

④ リニアアンジュレータからの放射スペクトル

リニアアンジュレータからの放射スペクトルとしては③の結果を式(4-20)に入れば得ることができる。しかし、ここでは特に興味のあるZ軸上 ($\theta=0$) の場合の結果を求めることにする。

③からただちに $F_{k\perp}=0$ がわかるが、これは電場ベクトルがx-z平面内のみ存在することを意味する。つまり軸上で放射光は線偏光している。また

$$S_{\pm 1} = \sum_p J_p \left(\frac{kK^2/4}{1+K^2/2} \right) J_{2p+k\pm 1}(0) \quad (0)$$

であるが $J_0(0)=1, J_{n\geq 1}(0)=0$ であるから $p = -\frac{k\pm 1}{2}$ となりkは奇数となる。これより軸上で高調波は奇数次のみで偶数次光はない。よって

$$S_{\pm 1} = J_{-(k\pm 1)/2} \left(\frac{kK^2/4}{1+K^2/2} \right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\omega_0\gamma^2}{1+K^2/2}$$

を使い $F_{k\parallel}$ を書きあらわせば

$$F_{k\parallel} = \frac{-i k e \gamma^3}{\epsilon_0 \lambda_u} \frac{K}{(1+K/2)^2}$$

$$\times [J_{-(k+1)/2}(k\xi) + J_{-(k-1)/2}(k\xi)] \quad \dots (4-43)$$

$$F_{k\perp} = 0 \quad \dots (4-44)$$

$$; \xi = \frac{K^2/4}{1+K^2/2} \quad \dots (4-45)$$

さらに公式 $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ を考慮し、最終的に軸上でのリニアアンジュレータの放射スペクトル分布として次の結果が得られる。

$$\left(\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} \right)_{\theta=0} = \frac{2e^2 \gamma^2 N^2}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{K^2/2}{(1+K^2/2)^2}$$

$$\times \sum_{k=odd} k^2 [J_{(k-1)/2}(k\xi) - J_{(k+1)/2}(k\xi)]^2$$

$$\times \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2 \quad \dots (4-46)$$

$$; \xi = \frac{K^2/4}{1+K^2/2}$$

$$\lambda_k(\theta=0) = \frac{k \lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad \dots (4-47)$$

また、3-2. で扱ったヘリカルアンジュレータの場合の軸上での放射スペクトルも結果だけ書いておく。(導出はAppendix B、(B-34)、(B-35))

$$\left(\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} \right)_{k=0} = 2 \frac{e^2 \gamma^2 N^2}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{K^2}{(1+K^2)^2}$$

$$\times \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2 \quad \dots (4-48)$$

$$\lambda_1(\theta=0) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1+K^2) \quad \dots (4-49)$$

これらの結果をながめるとアンジュレータ放射の特徴として周期数 (N) の2乗に比例していることがわかる。また ω が含まれているのは

$$\delta_N(\omega/\omega_1) = \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2$$

のみでありこれがスペクトルの形を決めて、N (周期数) が多くなるほどスペクトルの幅は狭くなり δ 関数に近づいていく。(図8参照)

§ 5. 偏向電磁石からの放射スペクトルと
多極ウィグラーからの放射スペクトル

この章ではアンジュレータ内での電子の蛇行角が大きくなった場合(多極ウィグラー)の放射の特徴を調べていく。そのためにまず、通常の偏向部からの円軌道放射を前章と同じ手法で求め、アンジュレータ放射と比較する。

5-1. 偏向部の放射スペクトル

リングの中を回る電子の運動は周期運動であるからフーリエ級数へと展開できて、(4-6)により放射のスペクトルを求めることができる。

そこで前と同じように座標をとり電子の運動を求める。周期をT、曲率半径をρ、振動数をω₀とすると

$$\rho = \frac{E}{e c B} \doteq \frac{E(\text{GeV})}{0.3 B(T)} \quad \dots (5-1)$$

$E = m c^2 \gamma$ より

$$\rho = \frac{m c \gamma}{e B} \quad \dots (5-2)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{\rho} \doteq \frac{c}{\rho} \quad \dots (5-3)$$

を用いて、 $\beta(t')$, $r(t')$ は

$$\beta(t') = \beta(-\sin \omega_0 t', 0, \cos \omega_0 t') \quad \dots (5-4)$$

$$r(t') = \rho(\cos \omega_0 t', 0, \sin \omega_0 t') \quad \dots (5-5)$$

ここでt' は遅延時間で

$$t = t' + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \quad \text{である。そして観測者を} y-z \text{面内にとり単位ベクトル} \mathbf{n} \text{を次のようにおく。}$$

$$\mathbf{n} = (0, \sin \psi, \cos \psi) \quad \dots (5-6)$$

$$t = t' + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}$$

$$= t' + \frac{\rho}{c} \cos \psi \sin \omega_0 t' \quad \dots (5-7)$$

またT=T' である。

これらの関係を使って前と同じく F_k, Q_k を計算し(4-6)へ代入する。そこで、(4-18), (4-19)に対応してfar-field近似のもとで F_k, Q_k を書くと

$$F_k = \frac{i k \omega_0 e}{4\pi \epsilon_0 c T} \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k] \quad \dots (5-8)$$

$$\mathbf{Q}_k = \int_0^{T'} \beta \exp \left\{ -i k \omega_1 \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \right\} d t' \quad \dots (5-9)$$

ここで

$$\eta = -\omega_0 t', \quad \xi = k \beta \cos \psi \quad \dots (5-10)$$

とおき、(5-6)を(5-9)に代入して Q_k を成分で書けば

$$Q_{kx} = \frac{\beta}{\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin \eta \exp(i X) d \eta$$

$$Q_{ky} = 0 \quad (5-11)$$

$$Q_{kz} = \frac{\beta}{\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos \eta \exp(i X) d \eta$$

ここで

$$X = k \eta - \xi \sin \eta \quad \dots (5-12)$$

と置いた。

この積分はベッセル関数の積分表示

$$J_k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i X) d \eta \quad (5-13)$$

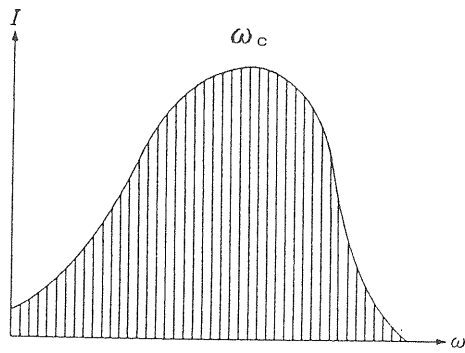
$$J'_k(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \sin \eta \exp(i X) d \eta$$

を使って表せる。次の関係式に注意すれば

$$\cos \eta = \frac{1}{2} \{ \exp(i \eta) + \exp(-i \eta) \}$$

$$\frac{2k}{\xi} J_k(\xi) = J_{k+1}(\xi) + J_{k-1}(\xi) \quad (5-14)$$

図10にこの円軌道放射の特徴を示す。²⁾



〔図10〕 円軌道放射のスペクトル

通常のリニアアンジュレータ ($K \sim 1$) では基本波 ($k=1$) を最大とする $k < 10$ の成分が顕著であるが円軌道放射では $k > 10^{10}$ にもおよぶ。

そのため円軌道放射スペクトルでは基本波の非常に高次の成分を計算しなくてはならないが、 $J_k(\xi)$ の計算は困難である。

しかし $k \gg 1$ のときベッセル関数 $J_k(\xi)$ は以下のように近似していくことができる。

$$\xi = k\beta \cos \psi \equiv ku \quad (5-21) \text{ として}$$

$$\beta \approx 1 - \gamma^{-2}/2, \quad \psi \ll 1 \text{ より}$$

$$u \approx 1 - \frac{1}{2} \delta \quad \dots (5-22)$$

$$; \delta = \gamma^{-2} + \psi^2 \quad (5-23)$$

とおくと $J_k(\xi)$ はベッセル関数の積分表示で

$$J_k(ku) = \frac{1}{\pi} \int \cos[k(q - u \sin q)] dq \quad \dots (5-24)$$

と表せる。ここで $k \gg 1$ より(5-24)の積分に寄与するのは $q \ll 1$ の部分である。(被積分関数は $q \geq 1$ で激しく振動する。)

そこで(5-24)の \sin 部を q のべきに展開して

$$J_k(ku) = \frac{1}{\pi} \int \cos \left[k \left(\frac{\delta}{2} q + \frac{1}{6} q^3 \right) \right] dq \quad \dots (5-25)$$

ここでエアリー関数を

(5-11)は最終的に

$$Q_{kx} = \frac{2\pi i \beta}{\omega_0} J'_k(\xi) \quad \dots (5-16)$$

$$Q_{kz} = \frac{2\pi \beta k}{\omega_0 \xi} J_k(\xi) \quad \dots (5-17)$$

と書ける。

次に $n \times [n \times Q_k]$ の計算。§4と同様に n と互いに垂直なベクトル m_{\parallel}, m_{\perp} を導入して

$$[n \times [n \times Q_k]]_{\parallel} = -Q_{kx}$$

$$[n \times [n \times Q_k]]_{\perp} = Q_{kz} \sin \psi \cos 2\psi \quad \dots (5-18)$$

これより F_k は(5-17), (5-18)を(5-8)に代入して

$$F_{k\parallel} = \frac{-ek\omega_0}{4\pi \epsilon_0 c} J'_k(\xi) \quad \dots (5-19)$$

$$F_{k\perp} = \frac{iek\omega_0}{4\pi \epsilon_0 c} J_k(\xi) \psi \quad \dots (5-20)$$

ただしここで、 $\psi \ll 1, \beta \approx 1$ とした。

以上により電子が一周回るときの観測者が受ける光のエネルギーの k 次成分が(4-6)

$$\int_0^T \frac{dP_k}{d\Omega} = 2\epsilon_0 c T F_k F_k^*$$

から求めることができる。

さて、この結果(5-19), (5-20)を前章で求めたアンジュレータ放射の場合と比較しよう。

アンジュレータ放射では N_{\perp} 周期ぶん揺すられた電子からの放射光がほとんど軸上に集中して観測者の元にやってくる。それに対し偏向部からの放射では、観測者から見える放射光は円軌道のうちごく短い接線部分からでたものである。そのため観測者にとって電子が加速度を受けるのは接線部のみである、調和振動からは著しくズレたものとなる。

このため円軌道放射では k の非常に大きな光の群が放射の主要部分を占める連続スペクトルとなる。

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \left(x t + \frac{1}{3} x^3 \right) dx \quad \dots (5-26)$$

で定義すると、エアリー関数は変形ベッセル関数 $K_{\frac{1}{3}}, K_{\frac{2}{3}}$ と次の関係がある。

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} t^{2/3} \right) \quad \dots (5-27)$$

$$\Phi'(t) = \frac{-t}{\sqrt{3\pi}} K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} t^{2/3} \right) \quad \dots (5-28)$$

式(5-25), (5-26)を見比べると

$$J_k(ku) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{k} \right)^{\frac{1}{3}} \Phi \left\{ \left(\frac{k}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \delta \right\} \quad \dots (5-29)$$

これと(5-28)を使い

$$J_k(ku) = \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{3\pi}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{k}{3} \delta^{2/3} \right) \quad \dots (5-30)$$

また(5-27)の両辺を微分し(5-29)を使えば

$$J'_k(ku) = \frac{\delta}{\sqrt{3\pi}} K_{\frac{2}{3}} \left(\frac{k}{3} \delta^{2/3} \right) \quad \dots (5-31)$$

この近似式(5-30), (5-31)を(5-19), (5-20)に適用すれば F_k として

$$F_{k\parallel} = \frac{-ek\omega_0\delta}{4\sqrt{3}\pi^2\epsilon_0c} \left[K_{\frac{2}{3}}(Y) \right] \quad \dots (5-32)$$

$$F_{k\perp} = \frac{iek\omega_0\psi\sqrt{\delta}}{4\sqrt{3}\pi^2\epsilon_0c} \left[K_{\frac{1}{3}}(Y) \right] \quad (5-33)$$

$$; Y = \frac{k}{3} \delta^{2/3} \quad (5-34)$$

ここで変形ベッセル関数 $K_\nu(z)$ は積分表示

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t - z \cosh(\nu t)} dt$$

を用いて数値積分できる。

以上により円軌道放射の各高調波の1周期あたりのエネルギーが(4-6)から決まるが、高調波の列が非常に密なため単位周波数あたりのパワー密度に書き換えて置く。

それには $\omega = k\omega_0$ から

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d^2P}{dk d\Omega} = \frac{1}{\omega_0} \frac{dP_k}{d\Omega}$$

となり1周期あたりの放射パワー密度は

$$\int_0^T \left(\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} \right)_{\parallel} dt = \frac{1}{\omega_0} \int_0^T \frac{dP_{k\parallel}}{d\Omega} dt$$

$$= \frac{e^2\omega^2\delta^2}{12\pi\epsilon_0c\omega_0^2} \left[K_{\frac{2}{3}}(Y) \right]^2$$

; $\omega = k\omega_0$

ここで

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} = \frac{3}{2}\omega_0\gamma^3 \quad \dots (5-35)$$

とすれば

$$\int_0^T \left(\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} \right)_{\parallel} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 (1 + \gamma^2\psi^2)^2$$

$$\times \left[K_{\frac{2}{3}}(Y) \right]^2 \quad \dots (5-36)$$

$$; Y = \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2\psi^2)^{3/2}$$

同様に

$$\int_0^T \left(\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} \right)_{\perp} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 (1 + \gamma^2\psi^2)^2$$

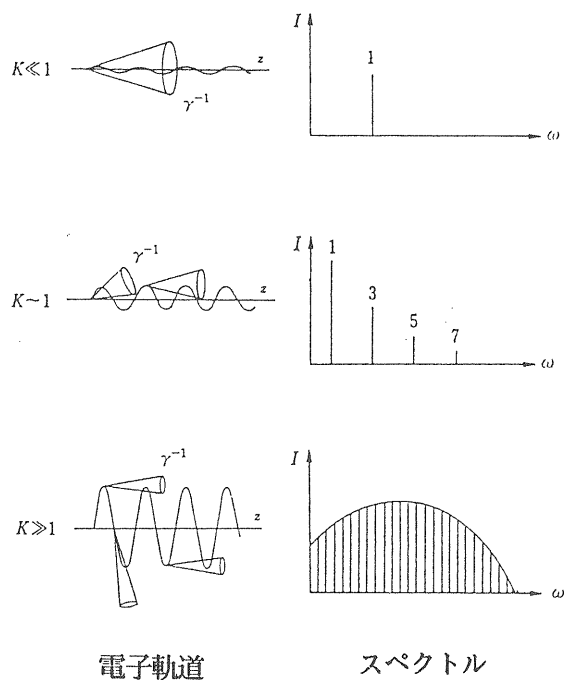
$$\times (\gamma\psi)^2 \left[K_{\frac{2}{3}}(Y) \right]^2 \quad (3-37)$$

ここで(5-35)の ω_c は臨界振動数と呼ばれ偏向部の円軌道放射スペクトルの極大域をあらわしており。(図10参照) 円軌道放射を特徴づける振動数で

ある。(5-35)から電子のエネルギー大きく、曲率半径が小さいほど ω_c は大きくなる。つまり放射光は短波長域へと延びていく。

5-2. 多極ウィグラーの放射スペクトル

多極ウィグラーはアンジュレータのK値が $K \gg 1$ となったときの名称である。このとき電子はアンジュレータの場合よりもずっと大きく振られる。これが極端になった場合、運動は調和振動から大きくずれ非常に多くの高調波成分が発生するだろう。K値をかえたときのアンジュレータ放射の様子を図11に示す。²⁾



[図11] アンジュレータ放射スペクトルのK値による変化

この高調波の列スペクトルの包絡線は各磁極からの円軌道放射の重ね合わせとして近似できる。

そこで軸上でのウィグラーの放射スペクトルを円軌道放射の重ね合わせとして考えよう。それには(3-36), (3-37)で $\phi = 0$ としたものを挿入光源の磁極数 $2N$ 倍すればよい。

やはり軸上では線偏光 ($F_{k,1} = 0$) であり

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{2N}{4\pi\epsilon_0} \frac{3e^2\gamma^2}{4\pi^2c} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \left[K \frac{2}{3} \left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \right]^2 \dots (3-38)$$

$$; \omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho}, \rho = \frac{\lambda_u\gamma}{2\pi K}$$

$K \ll B$ だから通常、磁石列を持った挿入光源では向かい合った磁石列の間隔(ギャップ)を変えて磁場をかえることでアンジュレータモード ($K \leq 1$) と多極ウィグラーモード ($K \gg 1$) を使い分けることができるが、そのどちらに使用の重点をおくかで、その挿入光源の呼称をアンジュレータと多極ウィグラーに使い分けている。

(補足)

ここでよく混乱することであるが電子のエネルギーが一定のとき挿入光源のギャップを変えると光の波長はどうなるだろうか。

一般には磁場を強くすると放射の波長は短くなるようなイメージがあるかもしれない。

しかし、磁場を強くするとアンジュレータ放射の基本波($k=1$)の波長は長くなる。(3-13参照) そのためアンジュレータモードで使う場合、ギャップを閉じれば長波長側にシフトする。しかし磁場が強くなればなるほど電子の蛇行軌道の振れも大きくなり、より高い高調波が発生してくる。そのためウィグラーモードでは磁場を強くすると観測者は、円軌道放射の場合と同様、放射の主要部としては、より短波長の光を多く受け取ることになる。

§ 6. 挿入光源の実効的な放射強度

6-1. n個の電子による放射強度

今までは、一個の電子による放射を考えてきたが、この章ではn個の電子による放射を考えよう。実際、蓄積リングの中では電子の個数は非常に多いから $n \gg 1$ としよう。

まず、n個の電子が全て $\hbar\omega$ の光による単色平面波を出したとする。このときの電場を各波の重ね合わせとして

$$E = \sum_{i=1}^n E_i \sin(kz - \omega t - \phi_i) \quad (6-1)$$

とあらわす。ここで ϕ_i は各波の位相である。

また $\theta = kz - \omega t$ とおく。

光の強度を考えるために E^2 を調べていく。

①位相 ϕ が同位相 (コヒーレント) な場合

全ての光が同位相の場合、 $\phi_i = 0$ として

$$E^2 = \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 \cos^2 \theta \quad \dots (6-2)$$

(6-2)の一周期あたりの平均を求めると

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 \cos^2 \theta \right\rangle \\ &= n^2 \frac{E_0^2}{2} \quad \dots (6-3) \end{aligned}$$

ここで各光の電場の大きさは等しいとし、それを E_0 とすると $\sum_{i=1}^n E_i = nE_0$ $\dots (6-4)$

また $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/2$

②位相 ϕ がインコヒーレントな場合

各々の光の位相がバラバラな場合 E^2 は

$$\begin{aligned} |E|^2 &= \sum_{i=1}^n E_i \cos(\theta - \phi_i) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^n E_j \cos(\theta - \phi_j) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n E_i \cos \phi_i \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n E_j \cos \phi_j \right\} \cos^2 \theta \\ &\quad + \left\{ \sum_{i=1}^n E_i \sin \phi_i \right\} \left\{ \sum_{j=1}^n E_j \sin \phi_j \right\} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i \cos \phi_i E_j \sin \phi_j \right\} \\ &\quad \times \cos \theta \sin \theta \\ &\quad \dots (6-4) \end{aligned}$$

(6-4)の一周期あたりの平均を求めると

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \theta \rangle &= \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2} \\ \langle 2 \cos \theta \sin \theta \rangle &= 0 \end{aligned}$$

だから

$$\langle |E|^2 \rangle = \frac{\langle A \rangle}{2} + \frac{\langle B \rangle}{2} \quad \dots (6-5)$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n E_i^2 \cos^2 \phi_i \\ &\quad + \sum_{i \neq j} E_i E_j \cos \phi_i \cos \phi_j \\ &\quad \dots (6-6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^n E_i^2 \sin^2 \phi_i \\ &\quad + \sum_{i \neq j} E_i E_j \sin \phi_i \sin \phi_j \\ &\quad \dots (6-7) \end{aligned}$$

ϕ_i, ϕ_j は $0 \sim 2\pi$ の間の様々な値をとるとして平均すると A, B の第2項は0となる。すると

$$\langle A \rangle = \langle B \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^n E_i^2 \right\rangle = n \frac{E_0^2}{2} \quad \dots (6-8)$$

ひとつの電子による光の強度は $E_0^2/2$ だから (6-3), (6-8) を比べると n個の電子からの放射強度 I は

- ① $I \propto n^2$ \dots コヒーレントな放射の場合
- ② $I \propto n$ \dots インコヒーレントな放射の場合の2通りがある。

この両者の場合に対応する電子ビームの条件を考えよう。電子ビームが完全に糸状であり進行方向に対してのみ広がりを持っているとする。(角度発散が0、サイズが無限小)

このとき電子ビームが光の波長の程度よりも狭い領域に固まっているとき、光からみると電子群はあたかも1つの電荷(電荷量: ne)に見える。放射強度は電荷の2乗に比例するので、 $I \propto n^2$ のコヒーレントな放射となる。

電子ビームの進行方向の長さ(バンチ長)が光

の波長よりずっと大きくなれば、各電子から放射された光の位相はバラバラになり放射は②のタイプとなる。

PFリングの場合、パンチ長は～3cm程度であるから可視～x線にいたる大部分の波長領域で放射強度は電子数nに比例するインコヒーレント放射となる。

この場合、軸上での挿入光源からの放射光強度を実用的な単位で求めてみる。

ビーム電流をI(A)とすると1秒間に挿入光源を通過する電子数は

$$N_e = I(A) / e \quad (\text{個/sec}) \text{ である。}$$

すると軸上で周波数が $\omega \rightarrow \omega + \Delta\omega$ の間にある光子数は単位立体角あたり毎秒

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} \right)_{\theta=0} \times \Delta\omega \times \frac{N_e}{\hbar\omega} \\ &= \left(\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} \right)_{\theta=0} \times \frac{I(A)}{\hbar e} \times \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (\text{個/sec}) \end{aligned}$$

である。

通常、相対バンド幅を $\Delta\omega/\omega = 0.1\%$ (0.1%バンド幅) にとり

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{I}{\hbar e} = 4.555 \times 10^{16} I(A) \text{ を使えば、}$$

軸上でリニアアンジュレータのk次光に対して

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right)_{\theta=0} = 4.555 \times 10^7 \frac{\gamma^2 N^2 k^2}{(1+K^2/2)^2} \\ & \times \left[J_{\frac{k-1}{2}}(k\xi) - J_{\frac{k+1}{2}}(k\xi) \right]^2 \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \end{aligned} \quad \dots (6-9)$$

(photons/s · mrad² 0.1% b.w)

ここで

$$\delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) = \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2$$

$$\xi = \frac{K^2/4}{1+K^2/2} \quad \text{である。}$$

6-2. 実効的な放射光の強度

実際の電子ビームは有限の太さ(サイズ)、角度発散をもつ。このときの軸上での挿入光源からの実効的な放射強度を考えよう。例えばリニアアンジュレータでは

$$\lambda_k = \frac{k\lambda_u}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \text{ であるので電子}$$

ビームの角度広がりか特に影響を与えるだろう。

電子リングでは電子ビームの各広がりにはガウス分布で表され、それらの標準偏差を

サイズ : σ_x (水平方向), σ_y (垂直方向)

角度発散 : σ'_x, σ'_y

とする。このとき軸上での実効的なスペクトルは

$\left(\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} \right)_{\theta=0}$ とガウス分布とのconvolutionで求められ、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2 P(\omega)}{d\omega d\Omega} \right)_{eff} \\ &= \sum_k \int f(\theta', \phi') \left(\frac{d^2 P_k(\omega, \theta', \phi')}{d\omega d\Omega'} \right) d\Omega' \end{aligned} \quad \dots (6-10)$$

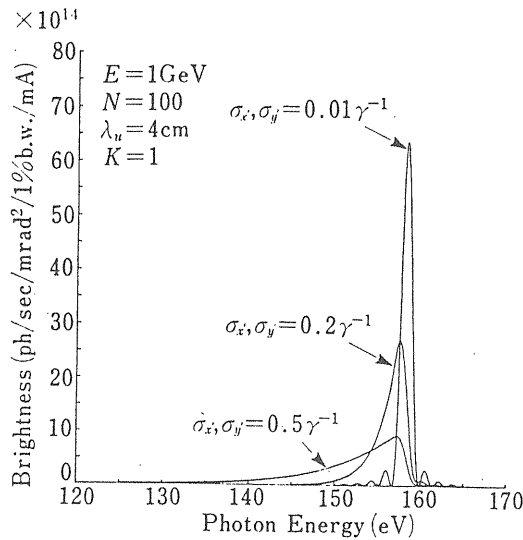
$$d\Omega' = \theta' d\theta' d\phi' \quad \dots (6-11)$$

となる。

ここで $f(\theta', \phi')$ は電子ビームの角度分布で

$$\begin{aligned} & f(\theta', \phi') = \frac{1}{2\pi\sigma'_x\sigma'_y} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{\theta'^2}{2\sigma'^2_x} \cos^2\phi' - \frac{\theta'^2}{2\sigma'^2_y} \sin^2\phi' \right\} \end{aligned} \quad \dots (6-12)$$

図12²⁾ による角度分布がある場合のアンジュレータ放射の計算例を示した。電子ビームの角度発散が大きくなるとスペクトルは長波長側(低エネルギー側)にテールを引くことがわかる。



[図12] アンジュレータ放射スペクトルの電子ビームの角度分散による影響

実際に(6-10)の積分を行いスペクトルを求めるのは大変である。実用上は各高調波のピーク値を見積もることができれば十分であることが多いため、このための方法を紹介する。しかし詳細に関しては他の解説にゆずり^{1), 4), 5)}、ここでは簡単に述べるだけにする。

ゼロエミッタンスの電子ビームから出た放射光も光子である以上、そのサイズ(σ_p)と角度広がり(σ'_p)の間に一種の不確定性原理に似た関係

$$\sigma_p \sigma'_p = \frac{\lambda}{4\pi} \quad \dots (6-13)$$

が成り立つ。¹²⁾

挿入光源の場合、自然角度発散 σ'_p は放射の角分布をガウス分布として近似することで

$$\sigma'_p \doteq \sqrt{\frac{\lambda}{N\lambda_u}} \quad \dots (6-14)$$

となり、(6-13), (6-14)から自然光源サイズ σ_p は

$$\sigma_p \doteq \frac{\sqrt{N\lambda_u\lambda}}{4\pi} \quad \dots (6-15)$$

これより、広がりのない電子ビームが挿入光源から単位時間に全立体角に放射する光子数は

$$\mathcal{F} = 2\pi \sigma'_p{}^2 \left(\frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega} \right)_{\theta=0} \quad \dots (6-16)$$

(photns/s · 0.1%b.w)

と表され、 \mathcal{F} を光束 (photon flux) と呼ぶ。

現実の電子ビームに対し、光源全体の角度発散は(σ'_p)と σ'_x, σ'_y のガウス分布の重ね合わせと考え、

$$\Sigma_x = \sqrt{\sigma'_p{}^2 + \sigma'_x{}^2} \quad \dots (4-17)$$

$$\Sigma_y = \sqrt{\sigma'_p{}^2 + \sigma'_y{}^2}$$

すると、現実の電子ビームが挿入光源から単位時間に単位立体角に放射する光子数は(4-16), (4-17)から

$$\mathcal{D} = \mathcal{F} / 2\pi \Sigma_x \Sigma_y \quad \dots (6-18)$$

(photns/s · mrad² 0.1%b.w)

この \mathcal{D} は光束密度 (photon flux density) と呼ばれる量である。

さらに \mathcal{D} を光源の単位面積あたりに直した量を輝度 \mathcal{B} (brilliance) と呼び

$$\mathcal{B} = \mathcal{D} / 2\pi \Sigma_x \Sigma_y \quad \dots (6-19)$$

ただし Σ_x, Σ_y は光源サイズで

$$\Sigma_x = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_x^2} \quad \dots (6-20)$$

$$\Sigma_y = \sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_y^2}$$

である。

(6-19)からわかるように、より高い輝度を求めようとすれば、電子ビームのエミッタンスをできる限り小さくしなくてはならない。

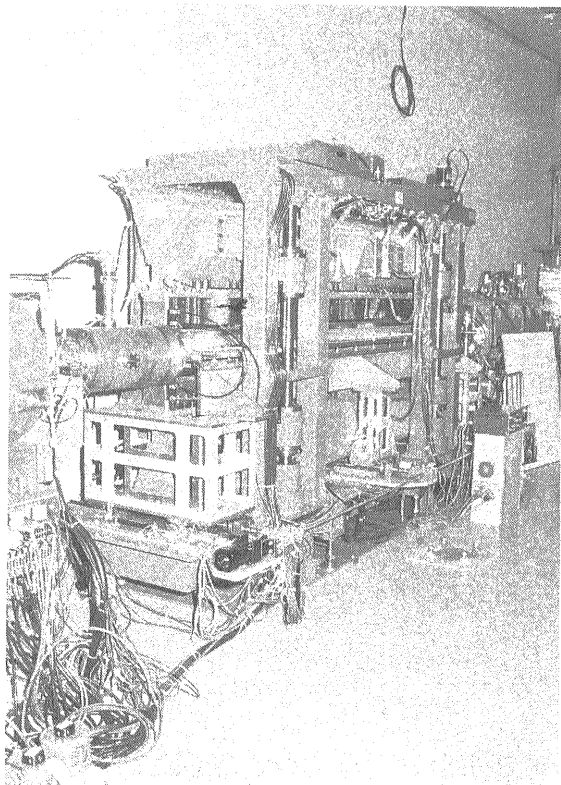
6-3. PFの挿入光源の例

ここではPFの2つの挿入光源を紹介する。

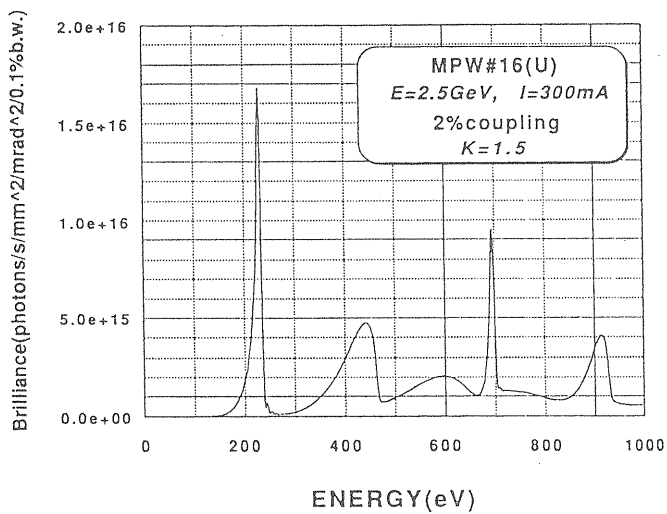
[図13] MPW#16 (多極ウィグラー)

周期長: $\lambda_u = 12 \text{ cm}$, 周期数: $N = 26$

最大磁場: $B_{\text{max}} = 1.47 \text{ T}$ ($K_{\text{max}} = 16.8$)



[図14] アンジュレータモードでの放射スペクトルの例⁴⁾

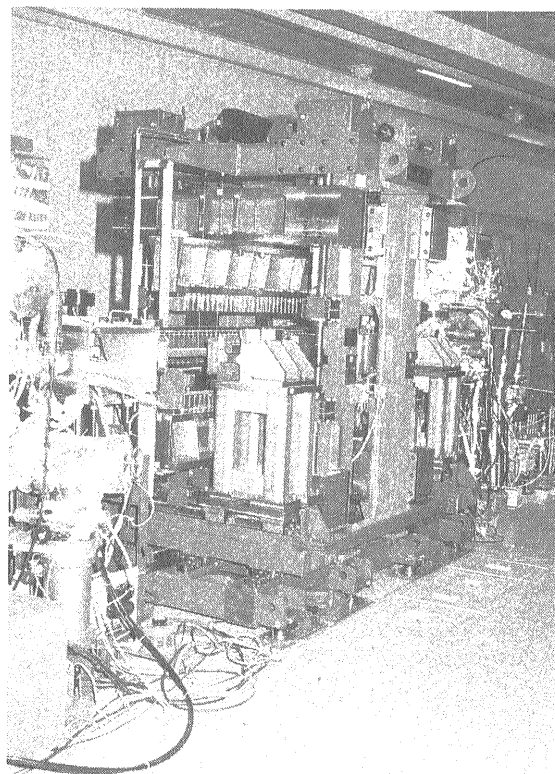


[図15] EMPW#28 (円偏光多極ウィグラー)

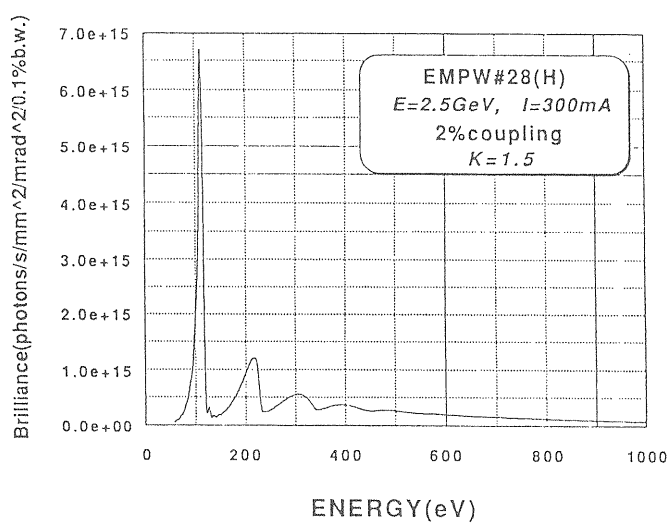
周期長: $\lambda_u = 16 \text{ cm}$, 周期数: $N = 12$

最大磁場: $B_{y_{\text{max}}} = 1.0 \text{ T}$ ($K_{y_{\text{max}}} = 15$)

$B_{x_{\text{max}}} = 0.2 \text{ T}$ ($K_{x_{\text{max}}} = 3$)



[図16] ヘリカルアンジュレータモードでの放射スペクトルの例⁴⁾



§ 7. 自由電子レーザーとコヒーレント放射

いままで行ってきた放射の理論は完全に古典論的なものであった。この章では、量子論的な効果について少し考え、将来の光源といわれる自由電子レーザー (FEL) などのコヒーレント放射について述べたいと思う。

7-1. 擬似電磁波の逆コンプトン散乱¹⁵⁾

§ 3 で考えたようにアンジュレータからの放射は、アンジュレータ磁場と等価の擬似電磁波の相対論的電子による逆コンプトン散乱と考えることができる。これについてもう少し調べよう。

ここではリニアアンジュレータの放射 ($k=1$ 、軸上: $\theta=0$) を逆コンプトン散乱として考える。

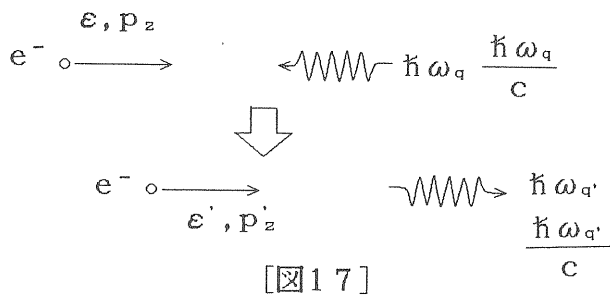


図 17 のように電子と擬似電磁波の始状態と終状態をおこう。擬似電磁波は z 軸上で電子と正反対の方向からやってきて 180° 逆向き (電子の進行方向) に散乱されるとする。

エネルギーと運動量の保存則は

$$\varepsilon + \hbar \omega_q = \varepsilon' + \hbar \omega_q' \quad \dots (7-1)$$

$$p_z - \frac{\hbar \omega_q}{c} = p'_z + \frac{\hbar \omega_q'}{c} \quad \dots (7-2)$$

ここで求めたいのは散乱波の振動数 ω_q' だから、これを以下の関係を用いて $\omega_q, \gamma, \beta_z$ で表していく。(cf. § 3)

$$\varepsilon^2 = (m c^2 \gamma)^2 = (p c)^2 + (m c^2)^2$$

$$\varepsilon'^2 = (m c^2 \gamma')^2 = (p' c)^2 + (m c^2)^2$$

$$p_z = m c \gamma \beta_z \quad \gamma^2 = (1 + K^2/2) \gamma_z^2$$

$$p'_z = m c \gamma' \beta'_z \quad \gamma'^2 = (1 + K^2/2) \gamma_z'^2$$

$$\beta_z \approx \langle \beta_z \rangle = \beta (1 - \Psi_0/4) ; \Psi_0 = K/\gamma$$

(7-1), (7-2) から

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = 1 - \frac{\hbar}{m c^2 \gamma} (\omega_q' - \omega_q) \quad \dots (7-3)$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma} \beta'_z = \beta_z - \frac{\hbar}{m c^2 \gamma} (\omega_q' + \omega_q) \quad (7-4)$$

ここで

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \beta'_z \right)^2 &= \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 (1 - \gamma_z'^{-2}) \\ &= \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 \{ 1 - (1 + K^2/2) \gamma'^{-2} \} \\ &= \left(\frac{\gamma'}{\gamma} \right)^2 - \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \frac{1}{\gamma^2} \quad (7-5) \end{aligned}$$

(7-3), (7-4) を (7-5) に代入して

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \frac{\hbar}{m c^2 \gamma} (\omega_q' - \omega_q) \right\}^2 - \frac{1 + K^2/2}{\gamma^2} \\ = \left\{ \beta_z - \frac{\hbar}{m c^2 \gamma} (\omega_q' + \omega_q) \right\}^2 \quad \dots (7-6) \end{aligned}$$

(7-6) を展開して ω_q' について解くと

$$\omega_q' = \frac{(1 + \beta_z)^2 \omega_q}{(1 - \beta_z^2) + 2(1 + \beta_z) \frac{\hbar}{m c^2 \gamma} \omega_q}$$

ここで $(1 - \beta_z^2) = \gamma_z^{-2} = (1 + K^2/2) / \gamma^2$

$(1 + \beta_z) \approx 2$ として

$$\begin{aligned} \omega_q' &= \frac{4 \omega_q \gamma^2}{(1 + K^2/2) + \frac{4 \hbar \omega_q \gamma}{m c^2}} \\ &\approx \frac{4 \omega_q \gamma^2}{(1 + K^2/2)} \left\{ 1 - \frac{4 \hbar \omega_q \gamma}{m c^2 (1 + K^2/2)} \right\} \end{aligned}$$

ここで 3-4 から擬似電磁波の波長はアンジュレータ周期長の 2 倍だから

$\omega_q = \omega_0/2$; $\omega_0 = 2\pi/\lambda_u$ を使うと

$$\omega'_q = \frac{2\omega_0\gamma^2}{1+K^2/2} \left\{ 1 - \frac{\hbar}{mc^2\gamma} \frac{2\omega_0\gamma^2}{1+K^2/2} \right\} \dots (7-7)$$

ここでアンジュレータからの放射光は(3-13)から

$$\omega_1 = \frac{2\gamma^2\omega_0}{1+K^2/2} \dots (7-8)$$

だから、(7-8)で(7-7)を書き直すと

$$\omega'_1 \equiv \omega'_q = \omega_1 \left(1 - \frac{\hbar\omega_1}{mc^2\gamma} \right) \dots (7-9)$$

(7-9)が本当のアンジュレータ放射の振動数である。古典論による結果(7-7)との違いは電子の放射反跳をあらわす非常に小さな項 $\frac{\hbar\omega_1}{mc^2\gamma}$ である。

これより放射光のエネルギー $\hbar\omega_1$ が電子ビームのエネルギーに比べ無視できるときは古典論の結果は全く正しいことがわかる。

ここでアンジュレータからの放射を別の角度からみて、アンジュレータの場にトラップされた電子が $\hbar\omega_1$ の光を自然放射し、下のエネルギー準位に落ちたと考える。すると逆に光の吸収により上の準位に上がることもできる。このとき吸収できる光の振動数は電子の反跳分も考えて

$$\omega^\dagger = \omega_1 \left(1 + \frac{\hbar\omega_1}{mc^2\gamma} \right) \dots (7-10)$$

となることが同じように示される。

(7-9), (7-10)のわずかな振動数の違いが、次の自由電子レーザーを考えると重要になる。

7-2. 自由電子レーザー (FEL) ^{16), 17)}

これまでに扱っていた電子からの放射はすべて自然放射であった。しかし、アンジュレータの中を進む電子は自然放射だけではなく、そのまわりには $\hbar\omega_1$ の光子があればこの光子数に比例する誘導

放射をおこす。また同時に吸収もおこる平衡状態だと考える。

普通、平衡状態の2準位原子系では上の準位から下の準位への遷移確率と下から上への遷移確率が等しいため誘導放射を多く起こさせる(レーザー)ためには外部から仕事をして、強制的に上の準位が多い反転分布をつくる。

しかしアンジュレータ内の自由電子の場合は前節の放射反跳があり、少しだけ誘導放射と吸収の確率が異なる。この差を利用してFELが期待できる。

以下、これを調べていこう。

まず、電子がリニアアンジュレータのz軸上に $k=1$ の放射光を出す確率を考える。§4の古典論による結果(4-46)を電子の反跳を考えたものになおすには $\omega_1 \rightarrow \omega'_1$ と置き換えればよく

$$W \equiv \left(\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} \right)_{k=1} = \frac{e^2\gamma^2 N^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{K^2}{(1+K^2/2)^2} \times [J_0(\xi) - J_1(\xi)]^2 \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega'_1} \right) \dots (7-11)$$

ここで何度も書くが

$$\delta_N \left(\frac{\omega}{\omega'_1} \right) = \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega'_1} - 1 \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega'_1} - 1 \right)} \right\}^2 (6-12)$$

ここでアンジュレータ内にz軸を中心軸とした円柱形のキャビティ

(長さ: $L = N\lambda_u$, 断面積: Σ_L) を考え、電子ビームが軸上に強度Wで出した光が入るとする。

するとこのキャビティ内には $\omega \rightarrow \omega + d\omega$ の範囲の光子が単位立体角あたり1秒間に

$$\frac{W}{\hbar\omega} \frac{I(A)}{e} d\omega d\Omega \dots (7-13)$$

放射されてくる。

さて、量子力学によれば1つのモードに n_L 個の光子があるときの放射と吸収の確率は

$$P_{rad} = (n_L + 1) \Gamma_{rad} \quad \dots (7-14)$$

$$P_{abs} = n_L \Gamma_{abs} \quad \dots (7-15)$$

である。(1秒間あたりの確率としておく)

一方、体積 $\Sigma_L L$ のキャビティ内のモードの数は単位立体角、単位周波数あたり

$$\frac{\Sigma_L L}{(2\pi c)^3} \omega^2 d\omega d\Omega \quad \dots (7-16)$$

であるから(7-13), (7-14), (7-16)より、1秒間に周波数 ω の1つのモードへの放射確率は

$$\begin{aligned} \Gamma_{rad} &= \left(\frac{W}{\hbar \omega} \frac{I}{e} \right) \div \left\{ \frac{\Sigma_L L}{(2\pi c)^3} \omega^2 \right\} \\ &= \frac{W}{\hbar \omega^3} \frac{I}{e} \frac{(2\pi c)^3}{\Sigma_L L} \quad \dots (7-17) \end{aligned}$$

となる。(7-17)へ(7-11)を代入して

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + K^2/2)^2 \quad \text{などに注意}$$

すれば

$$\Gamma_{rad} = C_i \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) \quad \dots (7-18)$$

$$; C_i = \frac{N}{4\pi \epsilon_0} \frac{e}{\hbar c} \frac{K^2}{4\gamma^2} \frac{\lambda \lambda_u I}{\Sigma_L} F(\xi) \quad \dots (7-19)$$

$$; F(\xi) = [J_0(\xi) - J_1(\xi)]^2 \quad (4-20)$$

となる。

これに対して吸収の確率は(7-9), (7-15)より

$$\Gamma_{abs} = C_i \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) \quad \dots (7-21)$$

となる。

そこで(7-14), (7-15), (7-18), (7-21)から誘導放射と吸収を合わせ

$$\begin{aligned} \frac{d n_L}{d t} &= (\Gamma_{rad} - \Gamma_{abs}) n_L \quad \dots (7-22) \\ &\equiv \alpha \end{aligned}$$

$$\alpha = \Gamma_{rad} - \Gamma_{abs}$$

$$= C_i \left\{ \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) - \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) \right\} \quad \dots (7-23)$$

ここで $n_L \gg 1$ として自然放射分は無視した。

これより光が長さ L のキャビティを通ったとき、光は $\exp(\alpha L/c)$ 倍されることがわかる。

そこで光の増幅率を知るために α を求めていく。まず(7-9)から

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_i} &= \frac{\omega}{\omega_1} \left(1 - \frac{\hbar \omega_1}{m c^2 \gamma} \right)^{-1} \\ &\approx \frac{\omega}{\omega_1} \left(1 + \frac{\hbar \omega_1}{m c^2 \gamma} \right) \end{aligned}$$

であるから

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad \text{と改めておけば}$$

$$\begin{aligned} \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) &= f(x + \Delta) \approx f(x) + \Delta f'(x) \\ &\quad ; \Delta = \pi N \frac{\hbar \omega}{m c^2 \gamma} \end{aligned}$$

$$\text{同様に } \delta_N \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right) = f(x) - \Delta f'(x)$$

よって α は

$$\begin{aligned} \alpha &= C_i \times 2\Delta f'(x) \\ &= C_i \times 2\pi N \frac{\hbar \omega}{m c \gamma} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \quad \dots (7-24) \end{aligned}$$

$$; x = \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right) \quad \dots (7-25)$$

以上によって光の増幅率が計算できる。光が1度キャビティを通り抜ける前後の光子数を各々、 n_{in}, n_{out} とすれば

$$n_{out} = n_{in} \exp \frac{\alpha L}{c} = n_{in} \exp \frac{\alpha N \lambda_u}{c}$$

通常、 $\frac{\alpha N \lambda_u}{c} \ll 1$ であり、このとき

$$n_{out} = n_{in} (1 + \hat{G}) \quad \dots (7-26)$$

$$; \hat{G} = \frac{\alpha N \lambda_u}{c} \quad \dots (7-27)$$

この \hat{G} は small single gain と呼ばれ(7-19), (7-24), (7-27) から

$$\hat{G} = \frac{N^3}{4\pi \epsilon_0} \frac{e \pi^2 K^2 \lambda_u^2}{m c^3 \gamma^3} \frac{I}{\Sigma_L} F(\xi) \times \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \quad \dots (7-28)$$

これを $\gamma^{-3} = 2^{3/2} \lambda^{3/2} \lambda_u^{-3/2} (1 + K^2/2)^{-3/2}$ を使い書き直すと

$$= \hat{G} = \frac{e \pi^2 2^{3/2} N^3 \lambda^{3/2} \lambda_u^{1/2}}{4\pi \epsilon_0 m c^3} \frac{I}{\Sigma_L} F(\xi)$$

$$\times \frac{K^2}{(1 + K^2/2)^{3/2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \quad (7-29)$$

ここで

$$F(\xi) = [J_0(\xi) - J_1(\xi)]^2$$

$$; \xi = \frac{K^2/4}{1 + K^2/2}$$

$$\text{また } x = \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right)$$

これでリニアアンジュレータに共振器をつけたときの FEL ゲインが(7-29)から求めることができる。光ゲインと共振器損失の差が正味の利得となる。

いままで述べてきた FEL はリングのように電子密度が小さく一電子近似が成り立つ場合で、これを誘導コンプトン散乱領域の FEL という。

(7-29) をみるともっとも特徴的なのはゲインがアンジュレータのスペクトル形の微分に比例するということである。

この様子を見るために $f'(x)$ を電子のエネルギー γ の関数に書き直す。

ここでアンジュレータからの軸上放射の振動数が(7-8)の関係を満たす γ を γ_r としよう。つまり

$$\gamma_r^2 = \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{2}{1 + K^2/2} \text{ である。}$$

これを使って(7-25)の x を書き直すと

$$\begin{aligned} x &= \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right) = \pi N \left(\frac{\gamma_r^2}{\gamma^2} - 1 \right) \\ &\approx \pi N \left(\frac{(\gamma_r + \gamma)(\gamma_r - \gamma)}{\gamma_r^2} \right) \\ &\approx -2\pi N \left(\frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_r} \right) \quad \dots (7-30) \end{aligned}$$

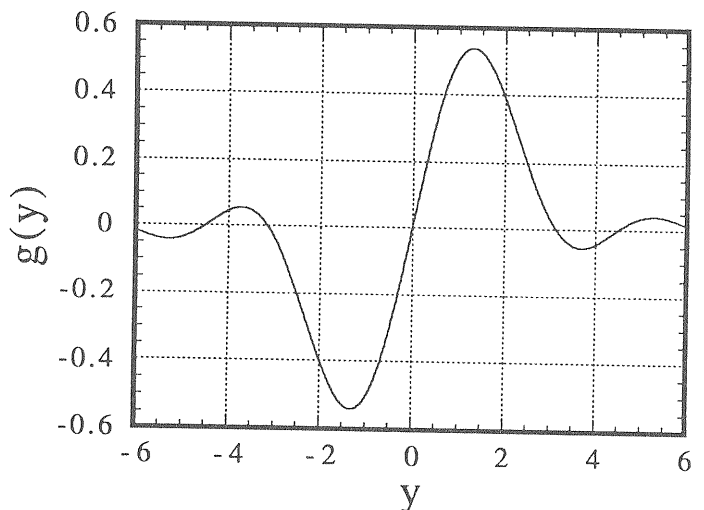
そこで

$y = -x$ として $g(y) = f'(x)$ とおき

$$g(y) = -\frac{d}{dy} \left(\frac{\sin^2 y}{y^2} \right) \text{ の様子を図18}$$

に示した。

GAIN-FUNCTION



[図18] ゲイン関数 $g(y)$

これから電子のエネルギーが $\gamma = \gamma_r$ のときはゲインは0である。このとき誘導放射と光の吸収が等しく起こり、放射は自然放射だけとなる。

誘導放射が起こるのは入射エネルギー γ がほんの少しだけ γ_r より大きい場合である。このとき

$$\frac{\gamma - \gamma_r}{\gamma_r} \approx \frac{1}{5N} \text{ のとき } \{g(y)\}_{max} = 0.54$$

となる。

また、面白いことに γ が γ_r より少し小さいとゲインが負になる。このとき光の吸収がおこることを意味する。すると電子は加速される。このことから、 γ とアンジュレータパラメータをこの条件にセットし外部から ω_1 のレーザー（メーザー）光を電子に同期して入れてやると電子ビームは加速される。これはFELの逆過程である。

（補足）

ゲインの式(7-29)の導出過程である(7-23)の α をみると重要なのはスペクトルの形とその微分だけであり(7-19)で定義した C_L はただの定数となっている。上の結果はリニアアンジュレータの場合のものであるが C_L を書き直すことで、ただちにヘリカルアンジュレータの場合の結果も得ることができる。それには(4-46)と(4-48)を見比べて、 C_L で $K^2/2 \rightarrow K^2$, $F(\xi) \rightarrow 1$ と置き換えればよい。

7-3. FELの古典論による説明

前節のFELは純粋な量子論的な効果だろうか。FELゲインの式(7-29)を見るとここには \hbar が含まれていない。これは(7-19), (7-24)で \hbar が打ち消しあったためである。そのため、FELは古典論でも説明でき、古典論から導かれる結果は、前節のFELゲイン(7-29)と全く同じになる。

ここではこの導出については書かないが、基礎となる現象について述べていくことにする。

そのためにアンジュレータと光の場の中で電子が受ける力について考えよう。

（ここでは振動数 ω_1 の光を考えることにする。）

前節の補足でふれたようにアンジュレータとしてはリニア型でもヘリカル型でもFELの現象は変わらないので、本質的ではない8字運動のないヘリカルアンジュレータを例にとる。

ヘリカルアンジュレータ磁場のベクトルポテンシャルを

$$A_u = -i \left(\frac{e_x + i e_y}{\sqrt{2}} \right) A_u \exp(-i k_u z) \dots (7-31)$$

とおく。すると $B_0 = k_u A_u / \sqrt{2}$ とすれば

$B_u = \text{rot } A_u$ より

$$B_u = B_0 (-\sin k_u z, \cos k_u z, 0) \text{ となり}$$

ヘリカルアンジュレータ磁場(3-14)になる。

同様に円偏光した光の場を次のように書こう。

$$A_L = \left(\frac{e_x + i e_y}{\sqrt{2}} \right) A_L \exp\{-i(\omega_1 t - k_1 z)\} \dots (7-32)$$

ここで光の場はあまり強くなく電子の軌道はヘリカルアンジュレータ磁場によってのみ決まると考える。このとき電子はz軸に沿ったラセン運動をする。光の場はz方向にのみ力を及ぼし、x, y方向(transverse方向)には影響を与えないとする。

この場合の運動をみるにはハミルトン形式が便利である。電磁場を含んだときのハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sqrt{(P - eA)^2 c^2 - (mc^2)^2} \quad (7-32)$$

である。ここで P は一般化運動量で

$$P = p + eA \quad \dots (7-33)$$

運動をz方向とtransverse方向に分けるために
 $P = P_z + P_T$

$$P_z = p_z + e A_z = p_z \quad (\because A_z = 0)$$

$$P_T = p_T + e A_T$$

また $A = A_T = A_u + A_L$

とおけば(7-32)のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sqrt{(p_z + P_T - e A_T)^2 c^2 + (m c^2)^2} \quad \dots (7-34)$$

となる。

ここで光の場がない ($A_L = 0$) ときは、横方向の運動は円運動であり、このときの一般化運動量 $P_T = 0$ である。いまの仮定では $A_u \gg A_L$ であり、横方向の運動には光があっても影響しないとしている。つまり $P_T = 0$ のままである。

すると(7-34)は

$$\mathcal{H} = \sqrt{(p_z - e A_T)^2 c^2 + (m c^2)^2} \quad (7-35)$$

これよりz方向の運動方程式はハミルトン方程式

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad \text{から}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} \\ &= -\frac{e^2}{2m c^2 \gamma} \frac{\partial}{\partial z} \{(A_T)^2\} \quad (7-36) \end{aligned}$$

したがってz方向に電子に力を及ぼすポテンシャルは

$$\begin{aligned} (A_T)^2 &= A_u^2 + A_L^2 \\ &- i A_u A_L \exp[i\{\omega_1 t - (k_u + k_1) z\}] \\ &+ i A_u A_L \exp[i\{(k_u + k_1) z\} - \omega_1 t] \\ &= A_u^2 + A_L^2 \\ &+ 2A_u A_L \sin\{\omega_1 t - (k_u + k_1) z\} \quad \dots (7-37) \end{aligned}$$

であるからzに依存した有効ポテンシャルは

$$U_z = \frac{A_u A_L}{m c^2 \gamma} \sin\{\omega_1 t - (k_u + k_1) z\} \quad \dots (7-38)$$

さて、(7-38)のポテンシャルは進行波であるが、この位相速度を求めてみよう。

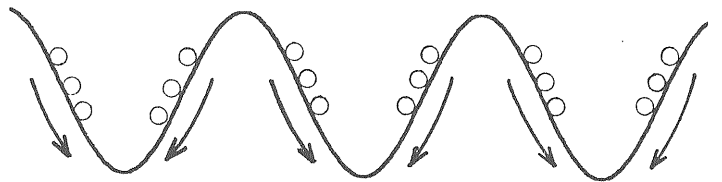
位相速度は $\omega_1 / (k_u + k_1)$ であるが

$$\omega_1 = \frac{2\gamma^2 \omega_0}{1 + K^2}, \quad k_1 = \frac{\omega_1}{c}, \quad k_u = \frac{\omega_0}{v_z} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{k_u + k_1} &= \frac{v_z}{\frac{v_z}{c} + \frac{1 + K^2}{2\gamma^2}} \\ &\approx v \left\{ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \frac{1 + K^2}{2\gamma^2} \right\} \\ &\approx v \left\{ 1 - \frac{K^2}{2\gamma^2} \right\} = v_z \quad \dots (7-39) \end{aligned}$$

(7-39)から、この有効ポテンシャル U_z は電子と同じ速度 v_z で動く。

逆に v_z で動く系から見ると U_z は静止して見える。つまりこの系で電子はポテンシャルの谷へ集まっていく力を受ける。(図19)



[図19] 電子と同じ速度で動くポテンシャル U_z の中で電子が受ける力

また U_z の周期長は

$$\lambda(U_z) = \frac{2\pi}{k_1 + k_u} = \frac{\lambda_1 \lambda_u}{\lambda_1 + \lambda_u} \approx \lambda_1 \quad (7-40)$$

となり、ほぼ光の波長に等しい。

これより電子はz方向に v_z の速度で動きながら光の波長 (λ_1) でバンチングしていく。これをマイクロバンチングという。

ここで注意することは、電子ビームは光の波長でマイクロバンチするが、電子ビームの全エネルギーは変わらないということである。というのは U_z により加速される電子と減速される電子が同数存在するからである。これは前節で $\gamma = \gamma_r$ としたときに相当する。

次に入射電子の速度が上の v_z より少し速い場合を考えよう。すると、電子ビームは U_z より少し速いため減速される電子のほうが多くなる。そのため電子ビームの全エネルギーは減少するが、これは光を放射すること意味している。 $\gamma \geq \gamma_r$ のとき FEL ゲインが正であり誘導放射がおこるという前節の結果に対応する。

また $\gamma \leq \gamma_r$ のとき光による電子ビームの加速が起こるのも理解できる。

以上が FEL の古典論的な説明である。実際に、 U_z と電子ビームとのエネルギーのやり取りを計算することで FEL ゲイン(7-29)が得られるのは前に話した通りである。

7-4. コヒーレント放射について

この FEL の最初の実験は、1977年、Stanford の Madey らのグループによりなされ¹⁸⁾、彼らは 24MeV 線形加速器を使い $3.4 \mu\text{m}$ の遠赤外線 FEL の発振に成功した。それ以来さまざまな実験が行われてきているが、主にマイクロ波領域で大強度を得ようとするものと、より短波長を目指すものに分けられる。ここでは短波長域でのコヒーレント放射について考えたいと思う。

今までの最も短波長の FEL 発振は Novosibirsk の電子蓄積リング VEPP III による紫外線領域の 240 nm である。現在でも真空紫外 (VUV) より短い波長領域での FEL はまだ実現されていない。この主な理由として次のことが挙げられる。

- ① (7-29) から FEL ゲインが波長の $3/2$ 乗に比例するため短波長域は増幅度が小さくなること。
- ② VUV 域より短い波長域では反射率の高いミラ

ーがないため共振器損失が大きくなること。

- ③ 電子ビームに対する要求が厳しくなること。(低いエミッタンスと狭いエネルギー広がり)

このように短波長域では挿入光源にキャビティをつけ、誘導放射を行わせることが難しくなる。特に、この方法で x 線レーザーを狙うのは不可能と考えられる。

しかし、アンジュレータ内で電子が光の波長にバンチングすることが別の可能性を与える。マイクロバンチングが非常に進んだ場合を考えると、これは光の波長より狭い領域に集まった各電子群が光の波長間隔で整列していると考えられる。このとき各電子群が出す波の位相がそろるので、放射は § 6 で述べたコヒーレント放射になるだろう。この放射は誘導放射ではなく自然放射であるが電子数 n の 2 乗に比例する強い強度をもったコヒーレントな放射となる。

電子ビームをバンチングさせる光として 7-3 では位相のそろった ω_1 の光を考えたが、位相がバラバラの光でもかまわない。(これはなぜか?) 非常に長いアンジュレータを考えると電子ビームはこの中を進むうちに、自分の出した ω_1 の放射光との相互作用でマイクロバンチする。マイクロバンチが十分形成されたとき、まだアンジュレータの中であれば放射はコヒーレントな自然放射と変わっていくだろう。このときスペクトルは通常アンジュレータ放射と変わらないが放射強度は大幅にエンハンスされ電子数 n の 2 乗に比例する非常に大強度の放射となる。

この放射は自然放射であるが、各周波数の光の位相がそろったコヒーレントな放射である。

これを SASE (self amplified spontaneous emission) と呼ぶ。これによりコヒーレントで大強度の x 線を得ることが可能となる。このような長尺のアンジュレータは将来の x 線領域のコヒーレントな放射光源として期待される。

Appendix A

シンクロトロン放射光のパワーについて

電子が加速度運動によって放射する全エネルギーを求めよう。

§2の結果から電子が加速度を受けたとき単位時間あたりに放射するエネルギーは、単位立体角あたり

$$\frac{dP}{d\Omega} = \epsilon_0 c |RE(t')|^2 \quad \dots (A-1)$$

$$E(t') = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{cR(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'} \quad \dots (A-2)$$

であるから、

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\epsilon_0 e^2}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{4\pi\epsilon_0(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]^2 \quad \dots (A-3)$$

となる。

まず、(A-3)で $\beta \ll 1$ とおこう。このとき \mathbf{n} と $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ のなす角を θ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \{ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \}^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{c} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \theta \quad \dots (A-4) \end{aligned}$$

(A-4)を全立体角で積分すれば

$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ より

$$P_{total} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \quad \dots (A-5)$$

一般の β の場合には(A-5)に相対論的修正が加わり¹⁹⁾、それは

$$P_{total} = \frac{\gamma^6}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} \left[(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{c^2} \right] \quad \dots (A-6)$$

これを円軌道放射の場合に当てはめてみよう。磁場中では $\mathbf{v} \perp \dot{\boldsymbol{\beta}}$ であり

$$v = \rho\omega, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \rho\omega^2 = \frac{\beta^2 c^2}{\rho}$$

$$\therefore (\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \frac{\beta^4 c^4}{\rho^2}$$

$$\frac{v}{c} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\beta^3 c^2}{\rho}$$

これより(A-6)は

$$\begin{aligned} P_{total} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 (1 - \beta^2) \frac{\beta^4 c^4}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2 c \gamma^4 \beta^4}{3\rho^2} \text{ (Jou l/s)} \quad \dots (A-7) \end{aligned}$$

これが円軌道放射の全放射パワーである。

(A-7)をeVで表しておけば

$$\begin{aligned} P_{total} &= 4.22 \times 10^{12} \frac{E^4 (\text{GeV})}{\rho^2 (\text{m})} \text{ (eV/s)} \\ &= 3.79 \times 10^{11} E^2 (\text{GeV}) B^2 (\text{T}) \text{ (eV/s)} \quad \dots (A-8) \end{aligned}$$

また、これを電子の1周あたりの放射エネルギー U_0 に直せば

$$\begin{aligned} U_0 &= P_{total} \times \Delta t \quad ; \quad \Delta t = \frac{2\pi\rho}{c} \\ &= 8.85 \times 10^4 E^4 (\text{GeV}) / \rho (\text{m}) \text{ (eV/s)} \quad \dots (A-9) \end{aligned}$$

次に挿入光源からの全放射パワーを求めよう。電子が挿入光源を1回通ったときの放射エネルギーは、(A-9)の B^2 を挿入光源の周期磁場の平均値

$$\langle B^2 \rangle = \left\langle B_0^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right\rangle = \frac{B_0^2}{2}$$

で置き換える事で得られ、

$$\begin{aligned} U_0 &= 3.79 \times 10^{11} E^2 \frac{B_0^2}{2} \Delta t \quad ; \quad \Delta t = \frac{N\lambda_u}{c} \\ &= 6.23 \times 10^2 E^2 (\text{GeV}) \\ &\quad \times N\lambda_u (\text{m}) B_0^2 (\text{T}) \text{ (eV)} \quad \dots (A-10) \end{aligned}$$

となる。

Appendix B

楕円アンジュレータの放射光スペクトル¹¹⁾

§4でリニアアンジュレータの放射スペクトルを求めたのと同様にして楕円アンジュレータ及びヘリカルアンジュレータの放射光スペクトルを求めていく。

楕円アンジュレータのz軸上での磁場は

$$B = \left(B_{x0} \cos \frac{2\pi}{\lambda_u}, B_{y0} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u}, 0 \right) \quad \dots (B-1)$$

である。このなかでの電子の運動を求めたための運動方程式 $\dot{p} = e v \times B$ は

$$\begin{aligned} m\gamma \dot{v}_x &= -v_z e B_{y0} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} \\ m\gamma \dot{v}_y &= v_z e B_{x0} \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} \end{aligned} \quad (B-2)$$

$$m\gamma \dot{v}_z = e \left(v_x B_{y0} \sin \frac{2\pi}{\lambda_u} - v_y B_{x0} \cos \frac{2\pi}{\lambda_u} \right)$$

これより $\beta(t')$ は

$$\beta_x = K_y \gamma^{-1} \beta \cos \omega_0 t' \quad \dots (B-3)$$

$$\beta_y = K_x \gamma^{-1} \beta \sin \omega_0 t' \quad \dots (B-4)$$

$$\begin{aligned} \beta_z &= \{ \beta^2 - (\beta_x^2 + \beta_y^2) \}^{1/2} \\ &\doteq \frac{\langle v_z \rangle}{c} + \beta \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 - K_y^2) \cos 2\omega_0 t' \end{aligned} \quad \dots (B-5)$$

$$; \frac{\langle v_z \rangle}{c} = \beta \left\{ 1 - \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \quad (B-6)$$

ここで $\langle v_z \rangle$ はz方向への電子の平均的な速度である。また

$$\begin{aligned} \omega_0 t' &\equiv \frac{2\pi}{\lambda_u} \langle v_z \rangle t' = \frac{2\pi}{\lambda_u} z \quad \text{であり} \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{\lambda_u} \beta c \left\{ 1 - \frac{1}{4\gamma^2} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \end{aligned} \quad (B-7)$$

これよりただちに $r(t')$ は

$$x = K_y \gamma^{-1} \beta \frac{c}{\omega_0} \sin \omega_0 t' \quad \dots (B-8)$$

$$y = -K_x \gamma^{-1} \beta \frac{c}{\omega_0} \cos \omega_0 t' \quad (B-9)$$

$$z = \langle v_z \rangle t' + \frac{\beta c}{4\gamma^2} (K_x^2 - K_y^2) \frac{\sin 2\omega_0 t'}{2\omega_0} \quad \dots (B-10)$$

以下、§4とまったく同様に計算していく。

まず、

$$n = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad \dots (B-11)$$

であり $\theta \ll 1$ として観測者がみる周波数は

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 / \delta \quad (T = \delta T') \\ ; \delta &= \frac{1}{2\gamma^2} \left\{ 1 + \theta^2 \gamma^2 + \frac{1}{2} (K_x^2 + K_y^2) \right\} \end{aligned} \quad \dots (B-12)$$

となる。

次に Q_k を求める。そのために必要な計算は、

$$\begin{aligned} \omega_1 \left(t' - \frac{n \cdot r}{c} \right) &= \omega_0 t' - A \sin \omega_0 t' \\ &\quad + B \cos \omega_0 t' \\ &\quad + C \sin 2\omega_0 t' \\ &\equiv W \quad \dots (B-13) \end{aligned}$$

ここで

$$A = \frac{2K_y \gamma \theta \cos \phi}{1 + \theta^2 \gamma^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \quad (B-14)$$

$$B = \frac{2K_x \gamma \theta \sin \phi}{1 + \theta^2 \gamma^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \quad (B-15)$$

$$C = \frac{-(K_x^2 - K_y^2)}{4\{1 + \theta^2 \gamma^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2\}} \quad (B-16)$$

これらを用いて

$$Q_k = \int_0^{r'} \beta \exp \left\{ -i k \omega_1 \left(t' - \frac{n \cdot r}{c} \right) \right\} d t$$

の各成分を求めて行けば良い。

なお途中でまたベッセル関数の性質

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} \text{ を使う。計算は前}$$

と同様なので Q_{kx} のみ示す。

$$Q_{kx} = \int \frac{K_y \beta}{\gamma} \cos \omega_0 t' \exp(-i k W) d t'$$

このWの中で $\omega_0 t' = \eta$ とし三角関数の合成を使えば

$$-A \sin \eta + B \cos \eta = -D \sin(\eta - \zeta)$$

$$; D \equiv \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$= \frac{2\gamma \theta \sqrt{K_x^2 \sin^2 \phi + K_y^2 \cos^2 \phi}}{1 + \theta^2 \gamma^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2}$$

$$\tan \zeta \equiv B/A = \frac{K_x}{K_y} \tan \phi$$

とおくことで

$$e^{-ikW} = e^{-ik\eta} \exp\{i k D \sin(\eta - \zeta)\}$$

$$\times \exp\{i k C \sin 2\eta\}$$

$$= e^{-ik\eta} \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(kD) e^{iq(\eta - \zeta)} \right\}$$

$$\times \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kC) e^{-2ip\eta} \right\}$$

であるので

$$Q_{kx} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} k_y \gamma^{-1} \beta J_q(kD) J_p(kC) \times e^{-iq\zeta} \int_0^{2\pi} \cos \eta e^{i\eta(-k+q-2p)} d t'$$

ここで $\cos \eta = (e^{i\eta} + e^{-i\eta})/2$ を使えば

(積分部) は

$$\int_0^{2\pi} [e^{i\eta(-k+q+2p+1)} + e^{i\eta(-k+q-2p-1)}] \frac{d\eta}{2\omega_0}$$

$$= \frac{\pi}{\omega_0} \dots \dots q = 2p + k \pm 1 \text{ のとき}$$

$$0 \dots \dots q \neq 2p + k \pm 1 \text{ のとき}$$

$$\therefore Q_{kx} = K_y \frac{\beta \pi}{\omega_0 \gamma} \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kC)$$

$$\times \{ J_{2p+k+1}(kD) e^{-i\phi(2p+k+1)} + J_{2p+k-1}(kD) e^{-i\phi(2p+k-1)} \}$$

Q_{ky}, Q_{kz} も同じように求めることができ Q_k の最終的な結果を示せば、

$$Q_{kx} = K_y \frac{\beta \pi}{\omega_0 \gamma} (S_1 + S_{-1}) \dots \dots (B-17)$$

$$Q_{ky} = -i K_x \frac{\beta \pi}{\omega_0 \gamma} (S_1 - S_{-1}) \dots \dots (B-18)$$

$$Q_{kz} = \frac{2\pi \beta}{\omega_0} S_0 \dots \dots (B-19)$$

ただし

$$S_j = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(kC) \cdot J_{k+2p+j}(kD) \times \exp\{-i(k+2p+j)\zeta\} \dots \dots (B-20)$$

$$; C = \frac{-(K_x^2 - K_y^2)/4}{1 + \theta^2 \gamma^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \dots \dots (B-21)$$

$$D = \frac{2\gamma \theta \sqrt{K_x^2 \sin^2 \phi + K_y^2 \cos^2 \phi}}{1 + \theta^2 \gamma^2 + (K_x^2 + K_y^2)/2} \dots \dots (B-22)$$

最後に F_k を求めれば

$$F_k = \frac{i k \omega_1^2 e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k] \text{ において}$$

$$[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k]]_{\parallel} = -\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{m}_{\parallel} = \frac{\pi \beta}{\omega_0 \gamma} \{2\gamma S_0 \theta \cos \phi - K_y (S_1 + S_{-1})\} \dots \dots (B-23)$$

$$[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{Q}_k]]_{\perp} = -\mathbf{Q}_k \cdot \mathbf{m}_{\perp} = \frac{\pi \beta}{\omega_0 \gamma} \{2\gamma S_0 \theta \sin \phi + i K_x (S_1 + S_{-1})\} \dots \dots (B-24)$$

となる。

以上の計算から一般的な楕円アンジュレータの放射スペクトルが得られる。ここでは特に軸上での結果を示しておく。やはり軸上では奇数次高調波のみが存在して

$$\left(\frac{d^2 P_k}{d\omega d\Omega}\right)_{\theta=0} = \frac{e^2 \gamma^2 N^2}{4\pi \epsilon_0 c} G_K(K_x, K_y) \times \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right)} \right\}^2 \quad \dots (B-25)$$

$$G_K(K_x, K_y) = \xi^2 [K_y^2 \{J_{(k-1)/2}(Y) - J_{(k+1)/2}(Y)\}^2 + K_x^2 \{J_{(k-1)/2}(Y) + J_{(k+1)/2}(Y)\}^2] \quad \dots (B-26)$$

ただし

$$\xi = \frac{k^2}{\{1 + (K_x^2 + K_y^2)/2\}^2}, Y = \frac{\xi}{4} (K_x^2 - K_y^2)$$

ここで $K_x = 0$ とすれば前出のリニアアンジュレータの結果(4-46)と一致する。

また $K_x = K_y \equiv K_0$ の特別な場合をヘリカルアンジュレータと呼ぶ。

このヘリカルアンジュレータの中で電子は完全なラセン軌道を描く。そのため軸上の観測者からは電子は円運動しているように見える。このため軸上では円偏光した基本波のみが得られる。(運動が円運動であるために調和振動からのズレから生じる高調波は軸上では見えない。しかし軸外から見れば運動は歪んだ円運動(楕円運動)にみえ、高調波成分もあらわれる。

この円偏光した単色の放射光は実験的にも重要であるのでこの放射スペクトルも求めておく。

(B-17)~(B-22)で $K_x = K_y \equiv K_0$ とおき、 ϕ の対称性から $\phi = 0$ の場合を考える。

するとベッセル関数の漸化式

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{1}{2} \{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\} \quad \dots (B-27)$$

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) \quad \dots (B-28)$$

を使い、 $\beta = 1$ とおけば Q_k は

$$Q_{kx} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{K_0}{\gamma} \frac{k}{\xi} J_k(\xi) \quad \dots (B-29)$$

$$Q_{ky} = i \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{K_0}{\gamma} J'_k(\xi) \quad \dots (B-30)$$

$$Q_{kz} = \frac{2\pi}{\omega_0} J_k(\xi) \quad \dots (B-31)$$

ここで

$$\xi = \frac{2k\gamma\theta K_0}{1 + K_0^2 + \gamma^2\theta^2} \quad \dots (B-32)$$

このとき軸上での放射スペクトルを求めてみる。軸上で $\theta = 0$ とし、また

$$J'_k(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{J_k(\xi)}{\xi} = \begin{cases} 1/2 & \text{at } k=1 \\ 0 & \text{at } k \geq 2 \end{cases}$$

であるから F_k は結局、次のようになる。

$$F_{k\perp} = \frac{e\gamma^3}{\epsilon_0 \lambda_u} \frac{K}{(1 + K^2)^2} \quad \dots (B-33)$$

$$F_{k\parallel} = -i F_{k\perp} \quad \dots (B-34)$$

$$; \omega_1 = \frac{2\omega_0 \gamma^2}{1 + K^2}, \omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_u} \quad (B-35)$$

ここでは $k = 1$ の基本波のみが存在する。

以上より軸上でのヘリカルアンジュレータの放射スペクトルとして

$$\left(\frac{d^2 P}{d\omega d\Omega}\right)_{\theta=0} = 2 \frac{e^2 \gamma^2 N^2}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{K^2}{(1 + K^2)^2} \times \left\{ \frac{\sin \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right)}{\pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right)} \right\}^2 \quad \dots (B-36)$$

$$\lambda_1(\theta=0) = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} (1 + K^2) \quad \dots (B-37)$$

が得られる。

(参考文献)

- 1) K-J.Kim: AIP No.184 vol.1 565.
- 2) 北村 英男: 数理科学 No.243,(1983)
- 3) 北村 英男: 日本物理学会誌 44 574 (1989)
- 4) 北村 英男編: 挿入光源のトピック('90)
KEK Report 89-24
- 5) 山本 樹: 放射光学会 第二回講習会予稿集
- 6) 高良 和武:” シンクロトロン放射利用技術 ”
(サイエンスフォーラム社)
- 7) 例えば
ランダウ:” 場の古典論 ” (東京図書)
J.D.Jackson:” Classical Electrodynamics ”
(WILEY)
砂川 重信:” 理論電磁気学 ” (紀伊國屋書店)
- 8) H.Motz: J.Appl.Phys, 22 527 (1951)
- 9) D.F.Alferov, Yu.A.Bashmakov and E.G.
Bessonov: Sov.Phys.Tech.Phys.18 1336(1974)
- 10) B.M.Kincaid: J.Appl.Phys. 48 2684 (1977)
- 11) S.Yamamoto and H.Kitamura:
Jpn.J.Appl.Phys. 26 L1613 (1987)
- 12) D.T.Attwood, K.Halbach and K-J.Kim:
Science 228 1265 (1985)
- 13) T.Shioya, S.Yamamoto, S.Sasaki, M.Katoh,
Y.Kamiya, and H.Kitamura:
Rev.Sci.Instrum. 60 1855 (1989)
- 14) S.Yamamoto, T.Shioya, S.Sasaki, and
H.Kitamura: Rev.Sci.Instrum. 60 1834 (1989)
- 15) 平井 康晴:” 自由電子レーザー ”
シンクロトロン放射利用技術 (I . 第4節)
- 16) 近藤 淳: 電子技術総合研究所調査報告
第200号 (1979)
- 17) J.M.J.Madey: J.Appl.Phys. 42 1906 (1971)
- 18) L.R.Elias, W.M.Fairbank, J.M.J.Madey,
H.A.Schwettman, and T.I.Smith:
Phys.Rev.Lett, 36 717 (1976)
- 19) 神谷 幸秀: OHO '84 テキスト