

1. はじめに

この章ではビーム不安定について述べる。ビーム不安定性についてはこれまでも何度か取り上げられていて鈴木敏郎氏 (OHO' 86)、久保浄氏 (OHO' 91) のテキストがある。そこで今回は話題を絞ってできるだけ平易に説明しビーム不安定とはどのようなものか、なにがしらイメージを持っていただけるような入門編を目論んだ。しかしながら出来上がったものはかえって混乱を招くものかも知れない。筆者の浅学非才を恥じるばかりである。

この章の構成は以下の通りである。次節では、代表的なビーム不安定である single bunch の transverse instability と 2 個のバンチによる transverse coupled-bunch instability を説明する。3 節では「リングのインピーダンス」というあまり馴染みのないどちらかといえば解かりにくいものを導入して、意外にこのインピーダンスなる概念が便利なものであることを説明する。4 節では PF リングで見られる不安定についてビームの具体的な振る舞いを述べる。本章の表題からすると最後にビーム不安定の抑制について述べなければならないが、抑制の方法はリングのマシンパラメータに強く依存するので全てを網羅するのは筆者の手にあまる。そこで概略を申し訳程度に述べることでご勘弁を願うことにしたい。ビーム不安定を抑制するには原因を取り除くか、押さえつけるかしかないのであって、これが言うは易く行うは難しで世界中でビーム不安定のないリングを私は知らない。

2. ビーム不安定の易しい理論

2-1 前置き

この節では、ビーム不安定の初歩を説明するが、その前にビームの運動についていくつか頭のなかに入れておくことにする。まず対象となるリングは高エネルギーの電子/陽電子蓄積リングである。本研究所でいえば、PF リング (2.5 GeV)、AR リング (2.5-8 GeV)、MR リング (8-30 GeV) がこれにあたる。リングのなかには電子または陽電子がバンチとなってほぼ光速でまわっている。バンチの大きさは、長さが数センチで横幅 (水平方向) が数 mm 程度、垂直方向の幅が横幅の数バ

ーセントである。長い針を薄くつぶしたような形をしている。この中に電子 (または陽電子、以後'電子'とあるときは'または陽電子'と付け加えて読む) が $10^{11} \sim 10^{12}$ 個ほど詰まっている。電子は一様に詰まっているわけではなく、中心付近が一番多く、中心から離れるに従って少なくなる (裾を除けば水平、垂直また長さ方向に Gauss 分布と考えるとよい)。リング上に多数バンチが回ることもあるし (multi bunch) 一個の場合もある (single bunch)。多数個回る場合、可能な最も近い隣のバンチはリングの加速周波数の波長分だけ離れている (PF は 60 cm、AR、MR は 59 cm、時間でいえば約 2 ns 離れている)。

バンチ内の電子は水平 (x 方向とする)、垂直方向 (y 方向、x、y 方向は transverse 方向という) にはベータatron 振動しており、長さ方向 (longitudinal 方向) にはシンクロtron 振動している。ベータatron 振動数は電子が一周する間の振動の数で PF では水平方向に 8.45、垂直方向に 3.3 である。この数字はまたベータatron tune と呼ばれ、それぞれ ν_x , ν_y と書く。シンクロtron 振動は PF では 35 kHz 程度で f_s と書く。ベータatron 角周波数は、周回周波数 f_0 を用いて $\omega_\beta = 2\pi\nu f_0$ である。必要に応じてさらに x、y の添字をつける。PF では f_0 は約 1.6 MHz であるからベータatron 周波数はシンクロtron 周波数に比べてはるかに大きい。リングを一周する間電子は上下左右には数回振動するが前後にはほとんど動かないということであり、シンクロtron 振動の一周期 (たとえばバンチの先頭から一番後ろまで行ってまた帰ってくるまで) の間に 10^3 回以上上下左右にベータatron 振動するともいえる。

ビーム不安定がないときにはバンチ内の電子は互いに無関心に運動しているのであるが何らかの外力が働いて全体が一斉に振動し始め (ベータatron 振動またはシンクロtron 振動が coherent に振動すると言う) その振幅が発散し出すというのがビーム不安定である。バンチの大きさからわかるように通常ベータatron 振動の振幅は非常に小さいのである。従ってダクトの壁にぶつかるほどの振幅になるというのは確かに異常な事態であろう。

ビーム不安定は大別すると一個のバンチ内で起こる不安定 (single bunch instability) と複数のバンチが互いに影響を及ぼし合う不安定 (

coupled-bunch instability) に分けられる。さらに振動の方向によって transverse instability (ベータatron振動が異常になる) と longitudinal instability (シンクロtron振動が異常になる) に分けられる。

以下に single bunch および coupled-bunch の transverse instability について、バンチ内の電子を2つの集団に分けて、バンチが2個の粒子でできていると考え運動を記述してみよう (two macroparticle model)。このやり方は直感的に非常によくわかるのである。

2-2 BBU (Beam Break Up)

最初にこのビーム不安定を扱うのは直感的に理解できるからである。2個の macroparticle (電荷 $Ne/2$) を考え、先頭を行く方を1後方を2と番号をつける。先頭の粒子1が例えば加速管の中心から δ だけずれているとして後ろの粒子2が受ける力を考える。力は粒子1がその後方に電磁場を作ることから生じる。この電磁場を wakefield と言う。wakefield はまわりの壁が凸凹していたりダクトの中心軸から著しくずれたところを通ったりすると強く生じる。粒子2が感じる力 F は次のように表し、

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= -Ne \cdot eW_{\parallel} \\ F_{\perp} &= Ne \cdot e\delta W_{\perp} \end{aligned} \quad (1)$$

longitudinal および transverse wake function W_{\parallel}, W_{\perp} を定義する。ここで F_{\parallel}, F_{\perp} はそれぞれ longitudinal, transverse 方向の力である。さて粒子1は自分の作った wakefield から横方向の力を感じることは決してないので、ベータatron振動数で自由振動する。すなわち、

$$\ddot{y}_1 + \omega_{\beta}^2 y_1 = 0 \quad (2)$$

粒子2は力 F_{\perp} を感じるので、

$$\ddot{y}_2 + \omega_{\beta}^2 y_2 = \frac{Ne^2 W_0}{m_0 \gamma} y_1 \quad (3)$$

となる。ただし wakefunction W_{\perp} はバンチの長さ程度の範囲だけに存在し一定の値 W_0 をとると仮定する。粒子1は単振動の式であるから、解はあえてここには書かないが、これを (3) 式に入れると (3) 式は共鳴型の強制振動の式

である。よって粒子2の運動は、

$$y_2(t) = \tilde{y} \left[\cos \omega_{\beta} t + \frac{Ne^2 W_0}{4\omega_{\beta} m_0 \gamma} t \sin \omega_{\beta} t \right] \quad (4)$$

となり、右辺第2項は時間と共に増大するので粒子2つまりバンチの後方はベータatron振動の振幅がどんどん大きくなり、ついには壁にあたってしまう。この不安定は線型加速器でみられる。

2-3 Strong head-tail instability

さて、上で述べたBBUのモデルでは先頭を行く粒子1はなんの影響も受けずに走ることになるが、円形加速器では事情がことなる。それはバンチ内の粒子はシンクロtron振動するからで、この振動のため head と tail の粒子がシンクロtron振動の半周期 ($T_s/2$ とする) ごとにいれかわる。シンクロtron振動の効果を $0 < t < T_s/2$ の時、粒子1が前方で粒子2が後方として式 (2)、(3) が成り立つとする。もちろん残りの半周期 $T_s/2 < t < T_s$ では添え字の1と2を入れ替える。運動をこのように簡略化してシンクロtron振動の一周期後にベータatron振動がどうなるか見てみよう。まず、 $0 < t < T_s/2$ のとき、式 (2) の解を、

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t) &= \tilde{y}_1(0) e^{-i\omega_{\beta} t} \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \dot{y}_1 + \frac{i}{\omega_{\beta}} \dot{y}_1 \end{aligned} \quad (5)$$

と置く。phasor 表示を使うのは初期条件を取り込んだ解にしておくためである。式 (5) が式 (2) の解であることは実際代入すると直ちにわかる。一方粒子2の方は、

$$y_2(t) = \text{Re} \left[\tilde{y}_2(0) e^{-i\omega_{\beta} t} + i \frac{Ne^2 W_0}{4\omega_{\beta} m_0 \gamma} \tilde{y}_1(0) t e^{-i\omega_{\beta} t} \right] \quad (6)$$

となる。こちらも phasor 表示するため、 $\frac{\dot{y}_2(t)}{\omega_{\beta}}$ を計算して $\omega_s \ll \omega_{\beta}$ なる近似 (これは一般に十分成り立つ) を使うと、

$$\tilde{y}_2(t) = e^{-i\omega_{\beta} t} \left[\tilde{y}_2(0) + i \frac{Ne^2 W_0}{4\omega_{\beta} m_0 \gamma} \tilde{y}_1(0) t \right] \quad (7)$$

よって $t = T_s / 2$ のとき、

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix}_{t=T_s/2} = e^{-i\omega_p T_s/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\eta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix}_{t=0}$$

ここで、
$$\eta_1 = \frac{Ne^2 W_0 T_s}{8\omega_\beta m_0 \gamma} \quad (8)$$

である。さて、 $T_s / 2 < t < T_s$ では 1 と 2 を入れ替えて、同様な段取りを踏むとシンクロトロン振動の一周期で、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix}_{t=T_s} &= e^{-i\omega_p T_s} \begin{bmatrix} 1 & i\eta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\eta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix}_{t=0} \\ &= e^{-i\omega_p T_s} \begin{bmatrix} 1-\eta_1^2 & i\eta_1 \\ i\eta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix}_{t=0} \end{aligned} \quad (9)$$

となる。この振動が発散しないためには変換行列の対角和について次の条件を満たさなければならない (文献 1、2)。

$$\begin{aligned} T_s/2 = 1 - \frac{1}{2}\eta_1^2 < 1 \\ (\eta_1 > 0) \end{aligned} \quad (10)$$

したがって、 $\eta_1 > 2$ になると不安定になる。これが strong head tail instability と呼ばれるものである。

2-4. Head-tail instability

さて $\eta_1 < 2$ であってもクロマティシティが負の値を取ると、事情が全く変わり不安定が起こる。これが Head-tail instability である。(2-2 で述べた strong head-tail と区別して normal head-tail と呼ばれることがある) クロマティシティが負のときは中心の運動量をもった電子 (synchronous particle) より運動量がわずかに大きい電子のベータトロン振動数は少し小さくなる。即ち振動の位相が少し遅れる。さて transition energy よりも大きいエネルギーの電子が回るリングでは運動量の大きい電子はバンチの tail へ移動する。ある時点でバンチの head にいた電

子 (synchronous particle と同じ運動量である) は少しづつ運動量が大きくなって (もちろん RF で加速されるのである) バンチの tail に向かって動き始める、同時にベータトロン振動の位相が遅れ始める。位相の遅れは蓄積されるから tail にたどりついたときに head にいたときよりも最大の位相の遅れになる。tail から head に向かう間は逆に位相が進むので、head にもどったときには位相の遅れを取り戻しているのである。したがってクロマティシティが負のときは tail の電子は head の電子よりも確実にベータトロン振動の位相が遅れているのである。ブランコを漕ぐときを考えてみよう。あなたはブランコの振動に合わせて体を上下させるはずである。しかしでたらめに上下してもうまくブランコを振れない。ブランコとほぼ同じ周期で上下するはずで、さらにあなたは必ずブランコの振動よりも早めに「仕掛ける」はずで、これがあなたの上下の振動の位相の方が進んでいるということなのである。したがってクロマティシティが負のときは head の粒子はいつでも tail の粒子を効率良く励振することになるのである。この運動を記述してみよう。この Head-tail instability の two macro particle model は鈴木敏郎氏のテキストにきちんと書かれているのでここでは少々端折って述べることにする

クロマティシティ ξ がゼロでないとき off-momentum な電子のベータトロン振動数が変わる。即ち；

$$\begin{aligned} \omega_\beta(\delta) &= \omega_\beta + \omega_0 \xi \delta \\ \delta &= \Delta p/p \end{aligned} \quad (11)$$

ここで ω_0 は $2\pi f_0$ である。さて、振動数が (10) 式のように変わると振動の位相は (10) 式を積分して、

$$\int \omega_\beta(\delta) dt = \omega_\beta t - \frac{\omega_0 \xi}{\alpha} \tau(t) \quad (12)$$

ここで $\tau(t)$ は到着時間のずれである。head の粒子 1 および tail の粒子 2 のシンクロトロン振動を、

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tilde{\tau} \sin \omega_s t \\ \tau_2 &= -\tau_1 \end{aligned} \quad (13)$$

とすると (ω_s は $2\pi f_s$)、これらの粒子のベータatron振動は wake が無いときはそれぞれ次のように書きかたせる；

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \tilde{y}_1 \exp[-i\omega_\beta t + i\frac{\xi\omega_0\tilde{\tau}\sin\omega_s t}{\alpha}] \\ y_2(t) &= \tilde{y}_2 \exp[-i\omega_\beta t - i\frac{\xi\omega_0\tilde{\tau}\sin\omega_s t}{\alpha}] \end{aligned} \quad (14)$$

次に wakefield の影響を考慮する。まず $0 < t < \pi/\omega_s$ のときは粒子 1 が head であるからそのまま自由振動で粒子 2 の方は粒子 1 が作る wake W_0 を感じる。 W_0 による強制力を加えて粒子 2 の運動を書くと；

$$\ddot{y}_2 + \left(\omega_\beta + \frac{\xi\omega_0\tilde{\tau}\omega_s}{\alpha} \cos\omega_s t\right)^2 y_2 = \frac{Ne^2 W_0}{2m_0\gamma} y_1 \quad (15)$$

となる。ここで (15) 式の解は、

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2(t) &= \tilde{y}_2(0) + \frac{iNe^2 W_0}{4m_0\gamma\omega_\beta} \tilde{y}_1(0) \\ &\quad \left[t + \frac{2i\xi\omega_0\tilde{\tau}}{\alpha\omega_s} (1 - \cos\omega_s t) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

となる。(詳しくは前述のテキストを見よ) さて、シンクロトロン振動の一周期の間の変換行列は (9) 式で求めたのと同じようにつくることができ、(16) 式と (7) 式を比較すると (9) 式で、

$$\eta_1 = \frac{\pi Ne^2 W_0}{4m_0\gamma\omega_\beta\omega_s} \left[1 + \frac{4i\xi\omega_0\tilde{\tau}}{\alpha\pi} \right] \quad (17)$$

とすれば良いことがわかる。(17) 式の右辺第一項は strong head tail で述べた共鳴型の強制振動の項で第二項がクロマティシティによる位相のずれから生じる項である。(17) 式の η_1 の虚数部分がこの不安定の growth rate を与える。すなわち；

$$\tau_{\pm}^1 = -\frac{Ne^2 W_0}{2m_0\gamma\omega_\beta\pi} \frac{\xi\omega_0\tilde{\tau}}{\alpha} \quad (18)$$

\pm の符号は振動のモードが 2 つあり、(head と tail が同相で振動するモードが +、反対向きに振動するのが - モード) クロマティシティが負だと + モードが不安定になるのである。振動のモードについては後で述べる。この不安定には

strong head-tail のようなしきい値がない。したがってダンピングのメカニズムがないと必ず起こる。この不安定はほとんど全ての蓄積リングやシンクロトロンで見られるそうであるが、PFリングでも簡単に起こすことができる。実例はあとで述べる。

2-5. coupled-bunch instability

これまでに述べた不安定はいずれもバンチ内で起こる不安定であった。原因となる wakefield は精々バンチの長さ程度の範囲に存在しバンチが通り過ぎたあとは消えてしまうというような性格のものである。このような wakefield はビームダクトにありがちなステップ状の段差や凸凹を考えると理解できるであろう。段差や凸凹があまり大きくなければバンチが通過するときに生じた field はダクトを通じて一部は伝播してしまい、長くは残らないであろう。しかしバンチはリングを一周する間頻りにこの wakefield を感じ、全体として小さくはない力を受けるのである。

一方、別のタイプの wakefield もある。それは生じた field はそれほど大きくはない、つまりそれだけでバンチ内の不安定を引き起こすほどではないが、長い時間消えずに残って、続いてくるバンチ (もちろん同じバンチが一周して戻ってきたときにまだ残っているということでもよい) に力を及ぼすといった場合である。加速空洞の高次モードはそのような wakefield の典型である。このような wakefield によってもビーム不安定が引き起こされ、その不安定を coupled-bunch instability という。この不安定を 2 個のバンチ (構造を考えない) をもちいて運動を記述してみよう。2 個のバンチはちょうど半周だけ離れてリングを回っているとし、互いに相手の作った wakefield と自分が作った wakefield から力を受けるものとする。力は transverse とする。すると、バンチ 1 に対して；

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + \omega_\beta^2 y_1(t) &= \frac{Ne^2}{m_0\gamma} \sum_k [W(kT_0 + T_0/2) y_2(t - kT_0 - T_0/2) + W(kT_0) y_1(t - kT_0)] \end{aligned} \quad (19)$$

バンチ 2 に対しては (19) 式の添え字 1 と 2 を入れ替える。W は wake function で、k についての和時刻 t 以前のすべての周回についての和

を意味する。解を、

$$y_{1,2}(t) = \tilde{y}_{1,2}(0)e^{-i\Omega t} \quad (20)$$

として代入し、 $\Omega \approx \omega_\beta$ とすると、

$$\begin{bmatrix} \Omega - \omega_\beta + \omega_\beta \eta_a & \omega_\beta \eta_b \\ \omega_\beta \eta_b & \Omega - \omega_\beta + \omega_\beta \eta_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \eta_a &= \frac{Ne^2}{2\omega_\beta^2 m_0 \gamma^3} \sum_k W(kT_0) e^{i\omega_\beta k T_0} \\ \eta_b &= \frac{Ne^2}{2\omega_\beta^2 m_0 \gamma^3} \sum_k W(kT_0 + T_0/2) e^{i\omega_\beta (kT_0 + T_0/2)} \end{aligned} \quad (22)$$

である。式(19)が自明でない解を持つためには、

$$\Omega = \Omega^\pm = \omega_\beta [1 - (\eta_a \pm \eta_b)] \quad (23)$$

となる必要がある。Ωを式(21)に入れると、

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega^+ &\rightarrow \tilde{y}_1 = -\tilde{y}_2 \\ \Omega = \Omega^- &\rightarrow \tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 \end{aligned} \quad (24)$$

となる。よってこの2つのモードは図1のような振動を示している。

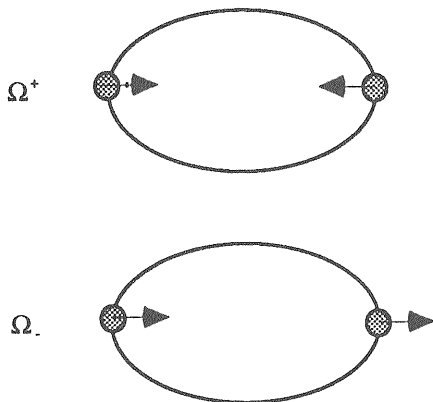


図1 2バンチによる transverse coupled-bunch instability の振動のモード

これまで述べたところで wakefield がどのようにビーム不安定に関わるかおおよそ理解されたであろう。

3. wakefield とインピーダンス

前節で述べたビーム不安定の説明はモデルが単純であり、運動の記述も直接的で理解しやすいものである。それでも、最後に述べた coupled-bunch instability は作用する力がビームの周回の和の形になっていてこれがどうして発散解 (instability) になるのかすぐにはわからない。ところが「時系列の事象は Fourier 変換によって周波数領域に置き換えることができる」という有り難い変換がある。これを使って前節で述べた不安定を周波数領域で扱ってみよう。時間領域ほど直裁的ではないが、全体像を見通し良く捕まえることができる。

まず impedance を定義しなければならないがここでは結果だけ書いておく (文献3がわかりやすい)。longitudinal impedance $Z_{||}(\omega)$ および transverse impedance $Z_{\perp}(\omega)$ は wakefunction $W_{||}(z)$ および $W_{\perp}(z)$ の Fourier 変換;

$$\begin{aligned} Z_{||}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{i\omega z/c} W_{||}(z) \\ Z_{\perp}(\omega) &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{i\omega z/c} W_{\perp}(z) \end{aligned} \quad (25)$$

であり、また impedance には次の重要な性質がある。

$$\begin{aligned} Z_{||}(-\omega) &= Z_{||}^*(\omega) \\ Z_{\perp}(-\omega) &= -Z_{\perp}^*(\omega) \end{aligned} \quad (26)$$

これらの関係を前節の(22)式に用いる (もちろん $Z_{\perp}(\omega)$ のほうである) と、

$$\begin{aligned}
\eta_a &= \frac{Ne^c}{2\omega_\beta^2 m_0 \gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{i\omega_\beta z/c} W_{\perp 1} \left(\frac{z}{c} \right) \delta \left(\frac{z}{c} - kT_0 \right) \\
&= \frac{Ne^2}{2\omega_\beta^2 m_0 \gamma} \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{i(n\omega_0 + \omega_\beta)z/c} W_{\perp 1} \left(\frac{z}{c} \right) \\
&= \frac{Ne^2 i}{2c\omega_\beta^2 m_0 \gamma T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_{\perp 1}(n\omega_0 + \omega_\beta) \quad (27)
\end{aligned}$$

を得る。ここでPoissonの和公式、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\mu - \frac{2\pi k}{\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_0 \mu} \quad (28)$$

を用いた。同様に η_b も得られ、これから、

$$\begin{aligned}
\Omega^\pm - \omega_\beta &= \\
&= \frac{iNe^2}{2c\omega_\beta^2 m_0 \gamma T_0^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{1 \pm (-1)^n\} Z_{\perp 1}(n\omega_0 + \omega_\beta) \quad (29)
\end{aligned}$$

となる。

この結果および(20)式から驚くほどいろいろなことがわかる。まず、(20)式から $Z_{\perp 1}(\omega)$ の実数部が解の発散(growth)減衰(damping)を決める。また $Z_{\perp 1}(\omega)$ は連続的な ω によるのではなくビームのline spectrum $n\omega_0 + \omega_\beta$ での値で寄与する。

一方虚数部は(この例ではベータトロン)振動数のシフト(実際に周波数が変わる)を引き起こす。

(29)式左辺は通常 $\Delta\omega$ と書かれ一般には複素数であるのでcomplex frequency shiftと呼ばれる。上の例からわかるようにビーム不安定を不安定がない時の周波数からのずれとして扱う近似((19)式)が成り立つ限り $\Delta\omega$ で議論できるのである。

ここまではバンチの構造は精々2個のmacroparticleで扱ってきたがもう少し現実的なバンチを考えてみる。2-3、2-4で述べた2個のmacroparticleのバンチと違ってより多くの振動モードが可能になる。これを周波数領域で考えれば、その振動モードに応じてバンチは振動モードの周波数スペクトルを持つということになる。この場合、バンチの振動モードのスペクトルとインピーダンス $Z(\omega)$ の重なりが重要

になるのである(この重なりがないと相互作用のしようがない)。バンチの振動モードのスペクトル(power spectrum)を $h_m(\omega)$ とすると $\Delta\omega$ へのインピーダンスの寄与は $h_m(\omega)$ と $Z(\omega)$ の重なり;

$$\Delta\omega \sum h_m(\omega) Z(\omega) \quad (30)$$

となる。

しかしながらこの $h_m(\omega)$ は簡単には決まらない。それはビーム不安定が起こった結果決まるものだからである。そこでバンチの振動モードを近似的(経験的)に定めてそのスペクトルで代用する方法がある。一つはsinusoidal modeと呼ばれるものでF. Sachererがパラボリック型のバンチに対して導入したものである。もう一つ、ガウス型のバンチに対してHermitian modeも良く使われる。

sinusoidal mode ;

$$\begin{aligned}
h_m(\omega) &= (m+1) \frac{2^{1+(-1)^m} \cos \pi y}{[y^2 - (m+1)^2]^2} \\
y &= \omega\tau/\pi \quad (31)
\end{aligned}$$

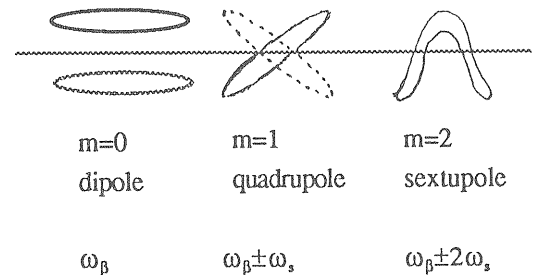
Hermitian mode ;

$$\begin{aligned}
h_m(\omega) &= \frac{1}{\Gamma(m+1/2)} y^{2m} e^{-y^2} \\
y &= \omega\sigma_\tau \quad (32)
\end{aligned}$$

である。ここで m はバンチの振動のモード数(mode number)で以下にいくつか例を示そう。

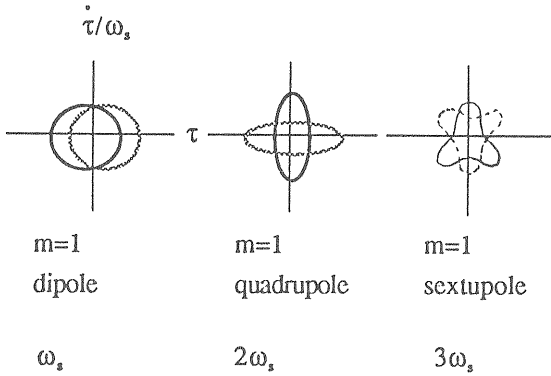
transverse :

transverse の場合は普通 head-tail mode と呼ばれる。



longitudinal :

longitudinal の場合はもちろん進行方向の変形である。こちらは phase space で考える方が分かりやすいので合わせて示す。



(30) 式で示したバンチの振動モードスペクトルとインピーダンスの重なりは effective なインピーダンスと言うのが相応しいわけでそれは次のように定義される；

longitudinal effective impedance;

$$[Z_{||}]_{\text{eff}}^{n,m} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{||}(\omega_p)}{(\omega_p/\omega_0)} h_m(\omega_p)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_m(\omega_p)} \quad (33)$$

$$\omega_p = pk+n+m\nu_s, \quad (n = \omega_p/\omega_0)$$

transverse effective impedance;

$$[Z_{\perp}]_{\text{eff}}^{n,m} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_{\perp}(\omega_p^{\perp}) h_m(\omega_p^{\perp} - \omega_{\xi})}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_m(\omega_p^{\perp} - \omega_{\xi})} \quad (34)$$

$$\omega_p^{\perp} = pk+n+\nu_{\perp}+m\nu_s$$

$$\omega_{\xi} = \frac{\xi\omega_0}{\alpha}$$

ここで k はバンチの数 (バンチはリング上等間隔に並ぶものとする) ω_{ξ} は chromatic frequency と呼ばれる。n は coupled-bunch mode number と呼ばれる数で、 $n = 1, 2, 3, \dots, k-1$ の値を取ることができ、バンチ間の振動の位相が $2\pi n/k$ 、

すなわちリング一周にわたるうねり (山谷) の数である。

complex frequency shift $\Delta\omega$ の虚数部は上記 effective impedance の実数部から生じ、これが growth rate を与える。

後は具体的にリングのインピーダンスを求めることである。加速空洞の高次モードのインピーダンスはそれぞれ；

$$Z_{||}(\omega) = \frac{R_0/2}{1+iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}$$

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{\omega_r}{\omega} \frac{R_{\perp}}{1+iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)} \quad (35)$$

ここで R_0 は shunt impedance, R_{\perp} は横方向 impedance である。 ω_r, Q はそれぞれ共鳴周波数、Q 値である。正確には真空ダクト全てのインピーダンスを調べなければならないが、細かな凸凹やバローズといったものはダクトの径とあまり変わらない小さな空洞の集まりとみなせる。これらの共鳴はカットオフ周波数付近に集中し Q 値もあまり高くはならない。これらは足し合わせるとちょうどダクトのカットオフ周波数付近に共鳴周波数を持つ Q 値 ~ 1 程度の 1 つの共鳴型インピーダンスとみなせる。これを broadband impedance という。すると、リング全体のインピーダンスは加速空洞などの高次モードによる非常に鋭いピーク (これは long range wake と呼ばれる) とビームダクトの凸凹などに起因する broadband なインピーダンス (これは short range wake である) を重ね合わせたようなものになるであろう。PF リングの例を図 2 に示す (文献 4)。また $\sigma_c = 50 \text{ p s}$ とし (PF の natural bunch length) Hermitian 型の $h_m(\omega)$ を計算したものを図 3 に示す。

この図 2、3 から多くのことが定性的に言えるのであるが、これは「問」ということにしておこう。なお effective impedance (33)、(34) 式は (26) 式の時と違って $Z_{\perp}(\omega), \frac{Z_{||}(\omega)}{n}$ の対称性が同じになることに注意しておこう。また半径 b の円形パイプでは、

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{2c}{b^2\omega_0} \frac{Z_{||}(\omega)}{n} \quad (35)$$

が厳密に成り立つ。近似的に他のチェンバーでも成り立つとすると Z_{\perp} と Z_{\parallel} / n は対称性は同じであるから形としては図2で両方扱える。

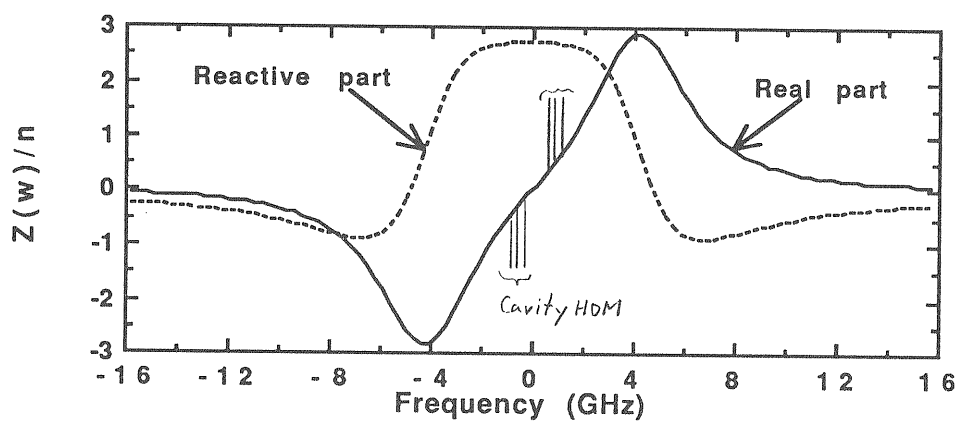


図2 Broadband impedanceの例。P F リングについて評価したものである。

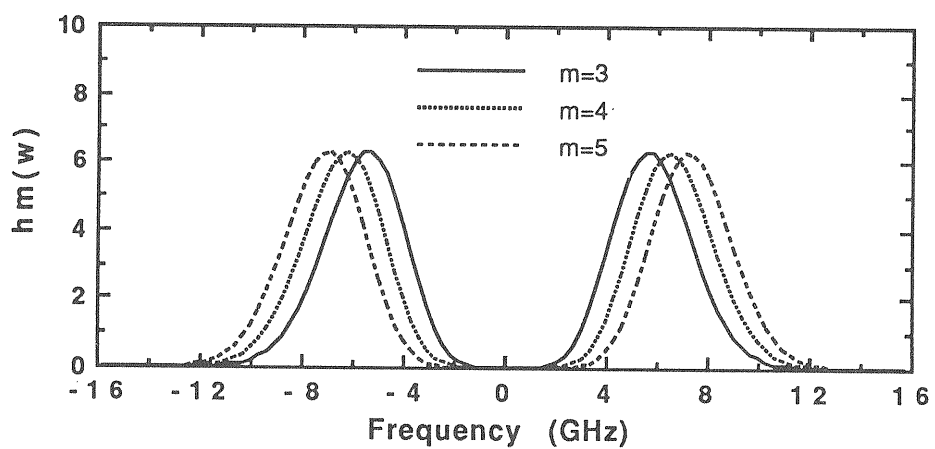
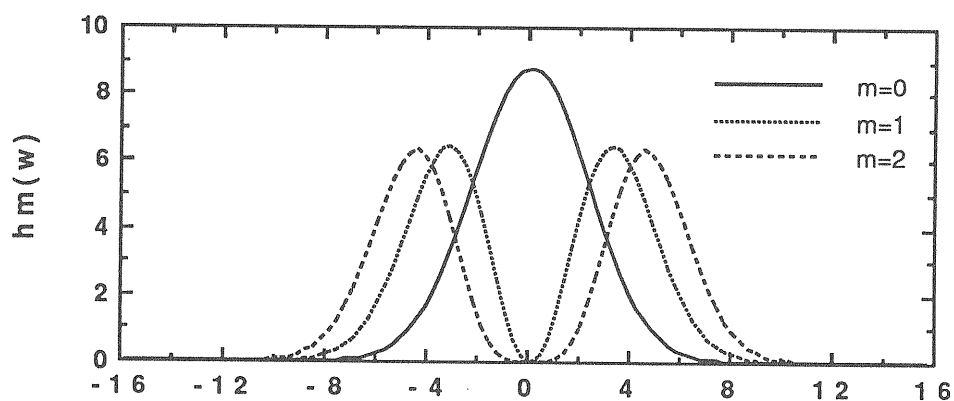


図3 $\sigma_{\tau} = 50$ ps のときの $h_m(\omega)$ ((3.2)式)

さて、クロマティシティ ξ がゼロでないときは $h_m(\omega)$ は $h_m(\omega - \omega_\xi)$ となることに注意して、ここでいくつか問題を解いてみよう。

- 1) head-tail instability ($m=0$ モード) は ω_ξ がどのような値をとるとき一番危険か?
- 2) クロマティシティを正の値で大きくすると $m=0$ の transverse coupled-bunch instability の growth rate ($=\text{Im}(\Delta\omega)$) が小さくなる。なぜか。
- 3) 図2で空洞の高次モード付近を拡大して描きQ値(共鳴周波数 f /共鳴の幅 Δf)が大きく、周回周波数より Δf が十分小さければその高次モードの寄与をほとんどなくすることができることを示せ(これは実際PFリングで行われている)。

4. ビーム不安定の観測

この節ではPFリングで見られるビーム不安定を実際に観測してみる。ビーム不安定がずっと身近に感じられるようになるだろう。

4-1. Head-tail instability

図4、5を見てみよう。図はリング上のある場所(偏向電磁石B21)で放射光(の可視光)を見たものである。測定装置の概略は図6に示す(文献5)。

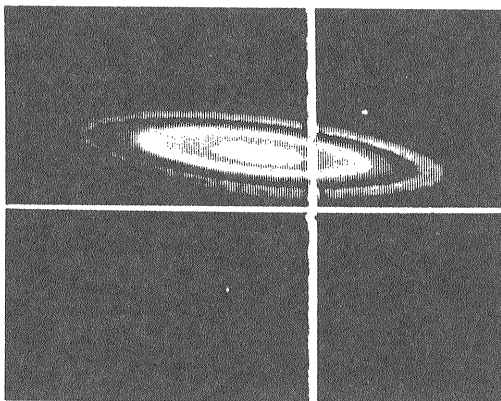


図4 放射光可視光プロフィールモニター instabilityがないときのプロフィール。

図6からわかるように偏向電磁石のなかを走るビームのプロフィールをみている。回っているビームは単バンチでビーム電流は2.2 mAである。図4は正常なビームであり図の上下が

ビームの垂直方向、左右がリングの内外を示している。

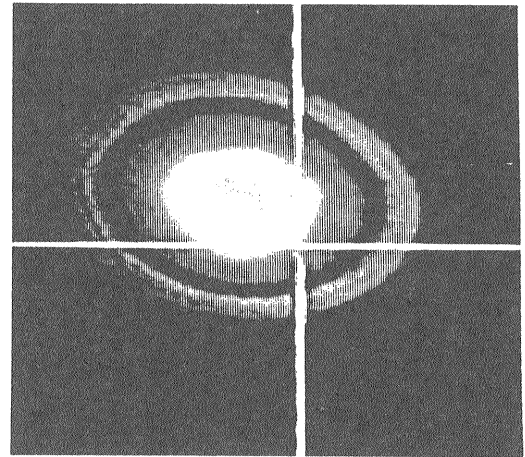


図5 instabilityが起こった状態のビームプロフィール

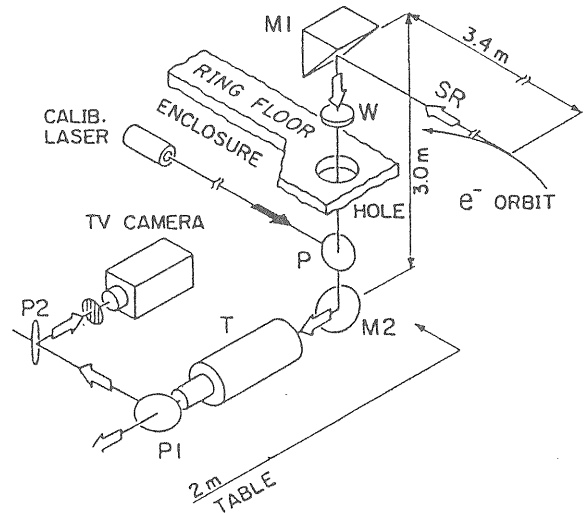


図6 プロファイルモニターの概略図

図5の方を見るとビームの垂直方向に blow-up していることがわかる。つまりビームが上下方向に激しく振動しているのである。このときポジションモニター(ボタン電極)にはどのような信号が観測されるだろうか。スペクトラムアナライザーに信号を入れて見ると、図7のようなスペクトルが見られる(single bunchのビームのスペクトルについては例えば文献6)。周波数の広い範囲にわたって丹念に調べると、 $n f_0 \pm f_{\beta y}$ ($f_{\beta y}$ は垂直方向のベータatronチューンの端数部に周回周波数 f_0 をかけたもの)が広い範囲に見られる。従ってこの不安定はバンチの形が変わらない $m=0$ の dipole 振動しているといえる。この不安定は6極電磁

石を使ってクロマティシティを変えると様子が変わる。クロマティシティをやや正の値にすると **blow-up** が止るのである。よってどうやらこの不安定は **head-tail instability** であるとわかる。

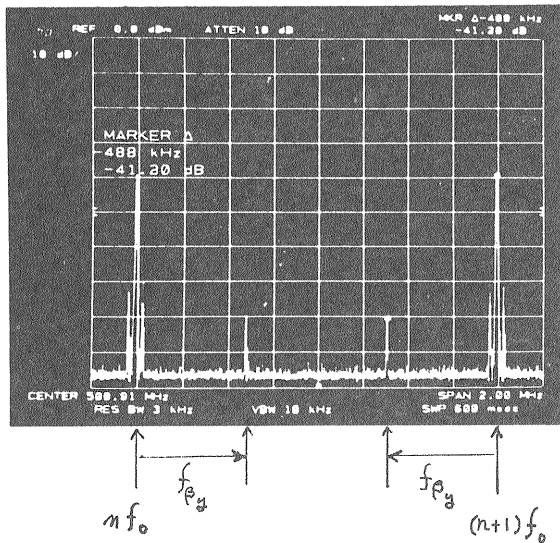


図7 instability が起こっているときにボタン電極でみたビームのスペクトル

この不安定は垂直方向だけで起こるわけではない。横方向の wakefield もまたゼロではないから水平方向のクロマティシティを負にすると図8に示すように水平方向に **blow-up** し図9に示すように $nf_0 \pm f_{\beta_x}$ (f_{β_x} は水平方向のベクトロンチューンの端数部に周回周波数 f_0 をかけたもの) にスペクトルが現われる。

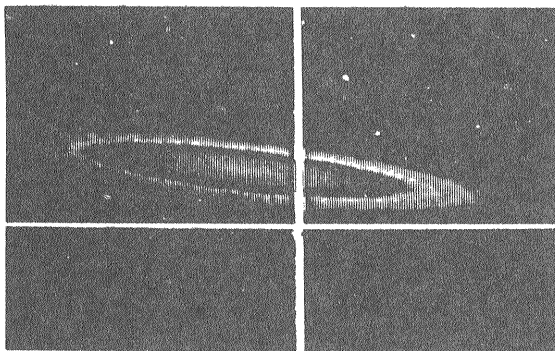


図8 水平方向の head-tail instability によるビームの blow-up

普通はこの不安定が起こるとビームが失われるのであるが8極電磁石によるダンピングメカニズムがある (amplitude dependent なダンピング

である) のでビーム電流値とクロマティシティを適当に選べばビームを落とさない程度の振動に抑えることができるのである。(クロマティシティを変える前は40 mAほど蓄積電流があったのであるがこの不安定が起こった直後に前述の電流値までビームを失った)

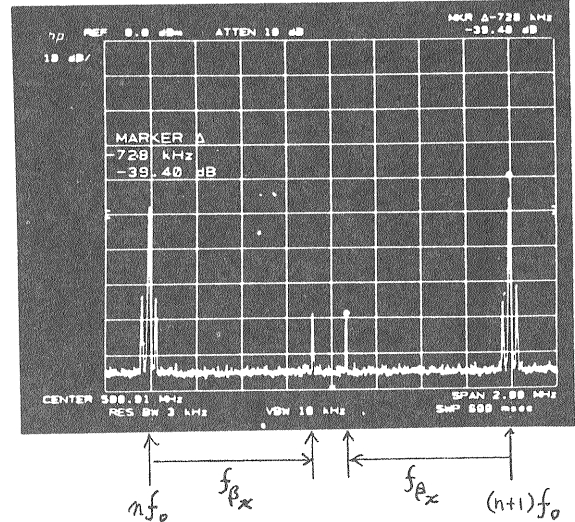


図9 水平方向の head-tail instability が起こったときのビームスペクトル

4-2 coupled-bunch instability

次に longitudinal coupled-bunch instability を見てみよう。この不安定はPFリングでは定常的に見られるものである。多くのリングで見られるようにこの不安定は直にビームを失うというほどではない。しかしながらエネルギー振動であるから dispersion がゼロでないところでは水平方向のビームサイズが大きくなる。この不安定が起こるとどのようなスペクトルが見られるだろうか。図10は同じくボタン電極の信号をスペクトラムアナライザーでみたものである。図7、9とは見ている周波数のレンジが大幅に違うので注意して欲しい。

ビームは全バケットにほぼ一様に詰めた multi bunch モード (全部のバケットに入れることをPFでは uniform filling といっている) である。この場合にはRF周波数 (500 MHz) の整数倍の周波数にスペクトルが現われる (図10の1、1.5、2 GHzに見られるピーク) がそれ以外にもいくつかスペクトルがみられる。実はこれらのスペクトルは加速空洞の高次モード (TM013、共鳴周波数1707 MHz) に起因する longitudinal coupled bunch

instability を示しているのである。

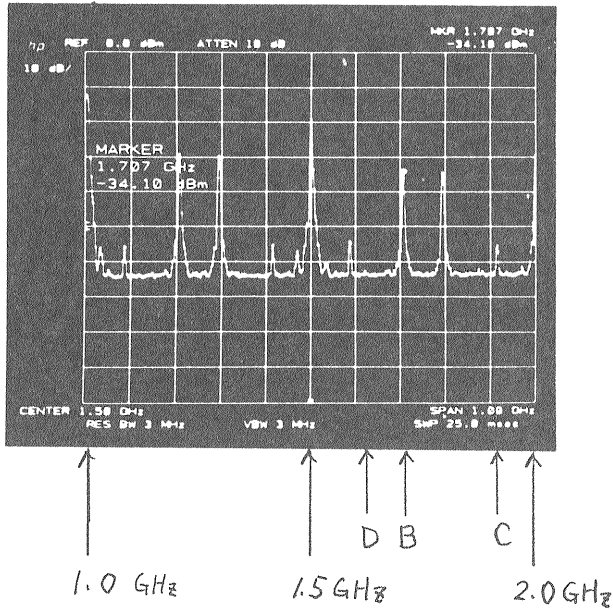
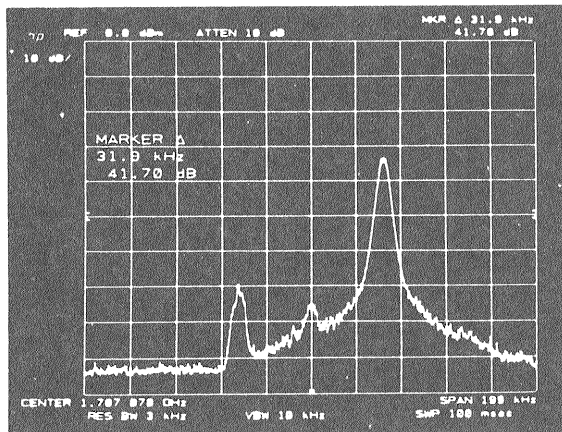


図10 Longitudinal coupled-bunch instability が起こっているときのビームスペクトル。スパン1GHz、中心1.5GHz。

図11~13はそれぞれのピークを拡大したものであるが、これらはいずれも同じ coupled-bunch oscillation から生じるスペクトルである。

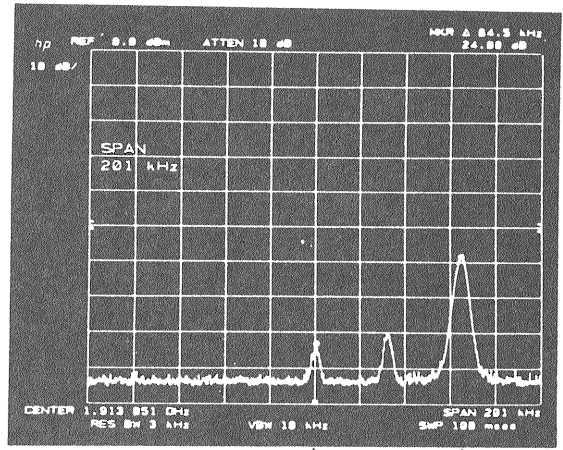


$$f_{center} = 1707.078 \text{ (MHz)}$$

$$f_{span} = 199 \text{ kHz}$$

$$1065f_0$$

図11 図10のピークB 付近を拡大したもの。+f_sの sideband がみられる。真ん中の小さいピークは1065f_0である

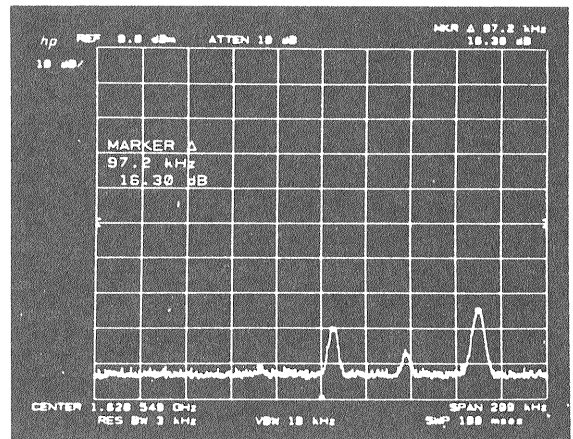


$$f_{center} = 1913.851 \text{ (MHz)}$$

$$f_{span} = 201 \text{ kHz}$$

$$1194f_0$$

図12 図10のピークCを拡大したもの。+2f_sが見られる。左端のピークは1194f_0である。



$$1011f_0$$

$$f_{center} = 1620.599 \text{ MHz } (\text{②}) \neq 1011f_0$$

$$f_{span} = 200 \text{ kHz}$$

$$1011f_0 = \frac{f_{RF}}{312} \times 1011 = \frac{500.10192}{312} \times 1011 \text{ (MHz)}$$

図13 右端のピークは+3f_sである。周回周波数は見えないが1011f_0の位置から+3f_sがわかる (図10 ピークDの拡大)

スペクトルの位置 (周波数) はどのようにして決まるのであろうか。ここでは文献12に従って解析してみよう。まずビーム不安定による振動がない場合、Gauss型のバンチの電流は

$$I(t) = Ce^{-t^2/2\sigma^2} \quad (37)$$

と書ける。バンチが形を変えずに τ だけずれたときは、

$$I(t+\tau) = Ce^{-(t+\tau)^2/2\sigma^2} \quad (38)$$

となる。ここで C は定数でこれ以降結果に影響しない定数を C と書く。 τ がゆっくり変わるとして式 (38) をフーリエ変換すると、その周波数成分は、

$$I(n\omega_0) = Cf_n e^{-in\omega_0\tau} \quad (39)$$

となる。ここで ω_0 は周回角周波数、 f_n は、

$$f_n = e^{-\sigma^2 n^2 \omega_0^2 / 2} \quad (40)$$

である。さて全バケットに一樣に電子を詰めたとすると、 k 番目のバンチ電流は、

$$I_k(t+\tau_k) = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega_0\tau_k} e^{-i\left(\omega_0 t - \frac{2\pi k}{h}\right)} e^{-in\omega_0\tau_k} \quad (41)$$

ここで h はハーモニク数である。 τ_k が μ 番目のモードの coupled-bunch oscillation によるとすると、 τ_k は、

$$\tau_k = \tilde{\tau} \cos\left(\Omega t + \frac{2\pi k \mu}{h}\right) \quad (42)$$

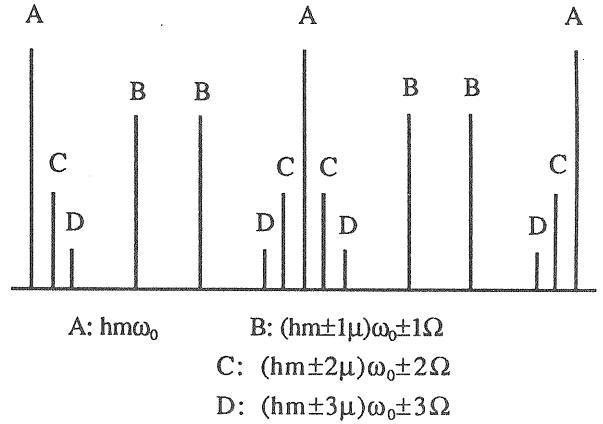
と書ける。 $\tilde{\tau}$ は μ 番目のモードの振幅、 Ω はシンクロトロン周波数である。これを式 (41) にいれて全てのバンチについて和をとるとモード μ の電流 (スペクトル) が得られる；

$$I_\mu(t) = C \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} -i^{|m_s|} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{|m|}\left[(hm-\mu m_s)\omega_0 \tilde{\tau}\right] f_{hm-\mu m_s} e^{-i(hm-\mu m_s)\omega_0 m_s \Omega t} \quad (43)$$

これからサイドバンド $m_s \Omega$ ($m_s = 1, 2, 3, \dots$) は、図 14 に示すように

$$\omega = (hm \pm \mu m_s)\omega_0 \pm m_s \Omega \quad (44)$$

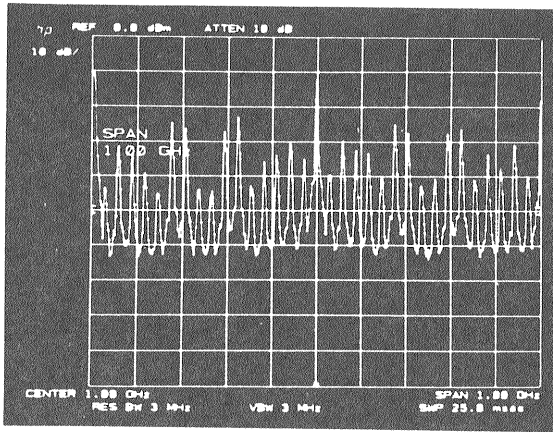
に現われることになる。図 11~13 の測定結果と良く一致していることがわかる。



PFリングでは $h=312$ 、 $m=3$ とすると図 10 と同じ周波数帯になる。 TM_{013} による不安定では $\mu=129$ である

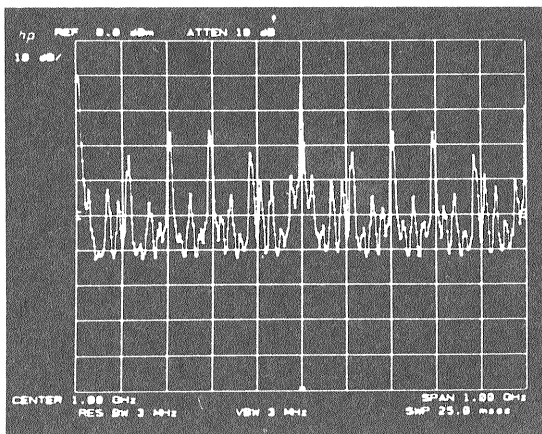
図 14 sideband $m_s \Omega$ がみえるはずの周波数。

さて、PFリングの加速空洞は冷却水の温度を正確に制御できるので空洞の温度を変えることができる。空洞の温度が変わって空洞が膨張/収縮すると各モードの共鳴周波数が変わる。高次モードの共鳴の幅程度には動かすことができるので上で述べたビーム不安定を起こさないようにもできる。図 10 をみれば TM_{013} の周波数を動かして不安定を避ければ不安定のないビームになるように見える。ところがそうではないのである。図 15 は実際 TM_{013} による不安定を避けた時のスペクトルであるが、同じ蓄積電流値でもかえってより多くのビーム不安定が起こりはじめるのである。また図のスペクトルは「安定」ではなく、図 16 のような予告もなく変わってしまったりするのである。この原因ははっきりわかっているわけではないが次のように定性的には説明できる。 TM_{013} による不安定の growth rate は図 15、16 の不安定よりもかなり大きい (不安定が起こる threshold 電流は TM_{013} の場合は $30 \sim 40$ mA、その他のものは 100 mA 前後である)。そのため TM_{013} による不安定が起こせる条件になっているとまずこの不安定の振動がはじまる。



$$f_{\text{center}} = 1 \text{ GHz} \quad f_{\text{span}} = 1 \text{ GHz}$$

図15 TM013の instability を避けたときに見られる instability (すべて longitudinal である)。

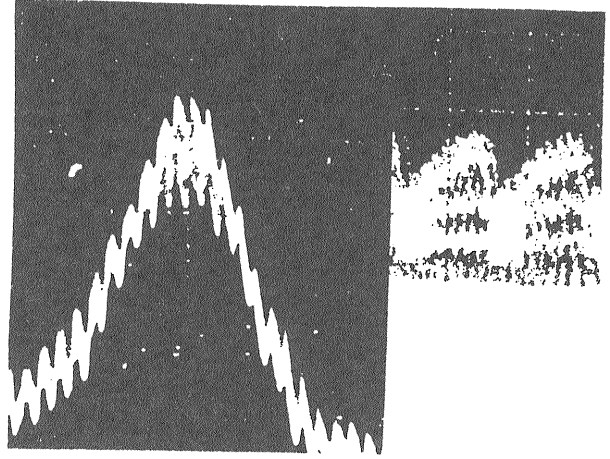


$$f_{\text{center}} = 1 \text{ GHz} \quad f_{\text{span}} = 1 \text{ GHz}$$

図16 図15のスペクトルが変わった例とところが振動の振幅が大きくなると amplitude dependent なダンピング (RFバケットの非線形性によりシンクロトロン周波数の幅が広がり Landau damping が起こると考えられる) によって不安定が抑えられる。しかしながら、シンクロトロン周波数の幅が再びもとにもどると不安定が再び成長する (これがビームがなくなるほどの激しい振幅に至らずに定常的な coupled oscillation が見られる理由と考えられる)。TM013による不安定が成長している間はこの growth rate よりずっと小さい不安定は成長しにくいであろうし少なくともこの不安定が抑えられている間はこの不安定の growth rate より小さい他の不安定は成長できないのである。

Longitudinal の coupled bunch instability についても少し付け加えておこう。図17に見られる激しい振動 (水平方向のビームサイズが激しく変化している) はかつてPFリングを悩ませたTM011による不安定に起因するものであ

る。この不安定はかなり強い (growth rate が大きい) ので上で述べた Landau damping が効きはじめるまでには momentum spread が大きくなってしまい dispersion のあるところでビームが横に広がっているのである。



Horizontal beam profile

図17 TM011による longitudinal coupled-bunch instability が起こり、ビームが blow-up した様子。左は 5 μs/div, 右は 5 ms/div。

(1986年3月のログブックから)

TM013による不安定では図17のような激しい振動はみられずビームサイズが360 mA蓄積時で約20%水平方向に大きくなるにとどまる。つまりTM011ほどひどくなく他の不安定を抑える程度に適度に「強い」のである。このためPFリングでは通常この不安定を起こすように調整して運転している。

5. ビーム不安定の抑制

不安定を抑制するには原因を取り除くか押さえ付けるかいずれかである。押さえ付けるというのは不安定となる振動の growth rate よりも大きい damping rate を獲得することで tune spread による Landau damping、Feedback system の利用などが考えられる。transverse instability についてはクロマティシティを大きくして dipole mode (rigid bunch mode) の growth rate を下げることが有効である。一般に高次モードの growth rate は小さいからである。しかしながらこれらの方法は対象となるリングのマシンパラメーターに

依存するのであって必ず利用できるとは限らない。最初に考えるべきは原因を取り除くことであることはいうまでもない。原因はリングのインピーダンスであるからひたすらこれを小さくすることに尽きる。この目的のためできる限り真空ダクトを滑らかにする努力がなされ、また現在世界中で高次モードを damp した加速空洞の開発が行われている。当研究所はこの分野でも世界の先端を走っている。おそらくここ1、2年の内にこれらの新世代空洞が実用化されるであろう。

このテキストでは single bunch の longitudinal instability には全く触れなかった。この instability は蓄積電流値が増えるに従ってバンチ長が長くなる (bunch lengthening) 原因となるもので重要なのであるが、このテキストで述べた初歩的な議論を越えた領域なのである。これについては文献2、3を参照されたい。また電子を蓄積すると ion trapping という現象が起こりこれもビーム不安定を引き起こす。これについては文献7を参照されたい。

参考文献

オリジナル論文は省略して特に参考、引用にしたものだけ記す。

- 1) 神谷幸秀 OHO '84
- 2) 鈴木敏郎 OHO '86
- 3) 久保浄 OHO '91
- 4) T.KIUCHI, M.IZAWA, S.TOKUMOTO, Y.HORI, S.SAKANAKA, M.KOBAYASHI and H. KOBAYAKAWA, KEKReport 92-4
- 5) Photon Factory Activity Report 82/83
- 6) 木代純逸 OHO '86
- 7) 坂中章吾 OHO '86
- 8) 高山健 OHO '92
- 9) A.W. CHAO, SLAC-PUB-2946,1982
- 10) Theoretical aspects of the behaviour of beams in a accelerators and storage rings, CERN 77-13
- 11) J. GAREYTE , CERN SPS/87-18
- 12) Yukihide KAMIYA and Masahiro KATOH, IEEE Particle Accelerator Conference Vol.2, p1313,1987