

第1章 Introduction

1.1 本テキストについて

本テキストが想定している読者は、理工系の大学の学部卒程度の物理の知識はあるが、電子貯蔵リングについては、全く知識のない学習者である。具体的には、これから電子貯蔵リングに関する仕事を始めようとしている人々、あるいは、これまで加速器の仕事をしてきたが、ビーム・ダイナミクスについて学ぶ余裕がなかった人々、更に、高エネルギー物理実験や放射光を用いた実験をしている人々で、加速器について一応の知識を得たいと思っている人々等等である。

これらの人々を対象に、まずこの第1章の1.2節では、電子貯蔵リングについて入門的な解説を行う。第2章から第5章までは、本テキストの中心的な部分で、ここで、電子貯蔵リングにかかわる人々が一応知っておくことが望ましい、ビーム・ダイナミクスの基礎について詳細に説明する。ここまでは、電子貯蔵リング一般の話であるが、最後の第6章で、本年のセミナーのテーマであるBファクトリに関連して、KEKのBファクトリ(KEKB)のデザイン・パラメータがどのようにして決まっているかを簡単に説明する。

本テキストでカバーしている範囲は、参考文献[1]および[10]とほぼ同じである。(これらはどちらも名著といわれているもので、筆者自身も加速器の仕事をしたときに、[1]を勉強して加速器の基礎的な知識を身に付けた記憶がある。)筆者としては、内容はほぼ同じであっても、全体の流れの見通しをよくすることや、個々の記述をわかりやすくする等の工夫をしたつもりであるが、それがどこまで成功していかは、読者の判断にまかせるしかない。もし、何らかの理由で、本テキストが読みにくいと感じられる読者は、上に挙げた二つの参考文献のどちらかを読まれても同じような(またはより以上の)効果があると思う。

本テキストで、電子貯蔵リングについて学習しようとする読者に勧めたいことは、本テキストの内容を一度で完璧に理解しようとするより、何度か繰り返し読むことである。筆者の経験では、そのほうが同じ時間を使っても効果が大きいと思う。また、本テキストでは[1]にならって、所々「問」を設けたが、ほとんどが簡単な計算であるので、

ぜひ億劫がらずに問に答えていただきたい。これも、筆者の経験上、理解を深めるのに効果がある方法である。また、ビーム・ダイナミクスについて一応の知識を得たい読者は別にして、この知識を基にして先に進みたいと思う読者は、この基礎知識を確実なものにするために、実際の加速器の運転に参加して、そこで起こる色々な問題に関連して本テキストを学習していただきたい。加速器について学習するには、実際の加速器から学ぶのが最も効果的であるということも、筆者が経験したことである。

最後に。本テキストでは、基本的にMKSA単位系を用いている。また、本テキストで、「電子」というときは、特に断らないかぎり「陽電子」も含んでいると思っていただきたい。また、本テキストでは、Magnet という意味で「電磁石」と言っているが、現実には、永久磁石を用いることもあるので、それらを総称する言葉として、「磁石」という言葉を使うべきであったかもしれない。(但し、実際には、挿入型光源などの特殊な場合を除いて永久磁石を用いることは少ない。)

1.2 電子貯蔵リングとはどのようなものか?

1.2.1 電子貯蔵リングの基本的な構成

ここでは、電子貯蔵リングについて全く知らない読者を仮定して、その基本的なコンセプトについて概説を試みる。但し、電子貯蔵リングに不案内な読者は、以下の説明を完全には理解できないだろうし、また完全に理解する必要もないと思う。電子貯蔵リングについての漠然としたイメージが描ければ、(このところは)それで良いであろう。

電子貯蔵リングの定義

電子貯蔵リング(Electron Storage Ring)とは、「多数個の高エネルギーの電子、又は陽電子を、おおむね丸く閉じた軌道上(又はその近傍)を(ほぼ)一定のエネルギーで周回させ、その状態を出来るだけ長時間保つことにより、それらの電子(又は陽電子)をビームの形で貯蔵することを目的とするマシンである」と定義することも出来

る。こう簡単に言ってしまうと賢明な読者は、ただちに、いくつもの疑問を抱くであろう。

ビームとは？

例えば、上の定義で、ビームという言葉を使ったが、ビームとは何かという疑問をもたれる読者もあるかも知れない。ビームとは、岩波理化学辞典（第3版）によると「粒子の集団または波長の短い波が共通の進行方向（進路上の位置によって変わってもよい）を持って、細い流れとなって進行するもの。」とある。ほぼこの定義通りと思ってよいだろう。

電子のエネルギーは？

次に、高エネルギーの電子というのが、どのぐらいのエネルギー領域を指すのか？という疑問があるかも知れない。これについては、例えば、世界最初の放射光実験専用の電子貯蔵リングは、1974年に運転を開始した、東大原子核研究所のSOR-RINGと呼ばれるマシンで、そこに貯蔵されている電子のエネルギーは、0.38 GeVであった（GeVというエネルギーの単位に不案内な読者は、2.1.1を参照のこと）。これに対して、現在世界最高のエネルギーを誇る電子貯蔵リングは、CERNのLEPと呼ばれるマシンで、そのエネルギーは約50 GeVである。現存する電子貯蔵リングのエネルギーは、ほぼこれら二つのマシンのエネルギーの間に入るようである（但し、低いほうのエネルギーについては、SOR-RINGより低い0.1 GeV程のマシンも存在するようである）。

エネルギーに大体対応して、電子貯蔵リングの大きさが、決まってくる。核研SOR-RINGのリングの周長は、17.4 mであり、LEPの周長は、約27 kmである。このように、一口に電子貯蔵リングと言っても、そのマシンの規模、電子のエネルギーに非常に大きな広がりがある。しかし、この大きな広がりにもかかわらず、そのマシンの動作原理は、どのマシンでも、ほとんど全く同じであることに注意すべきである。また、このように電子貯蔵リングにおいては、電子のエネルギーに大きな広がりがあるが、それらはほぼ全て、超相対論的な領域にあるので、電子は、ほぼ光速でリングを周回していると考えてよい。

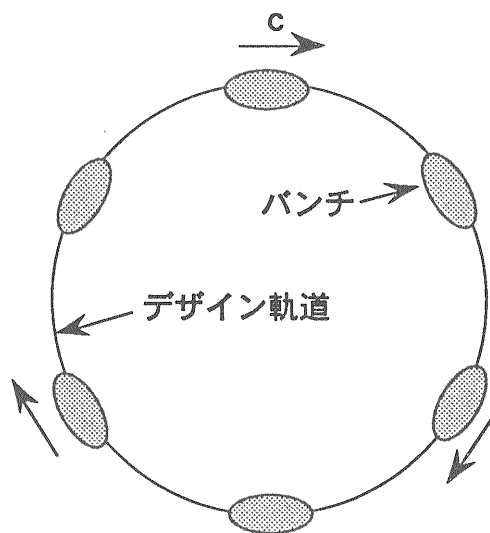


図 1.1

電子の数は？

次の疑問は、多数個の電子とは、どのぐらいの数を指すのか？ということかも知れない。この疑問に答える前に、電子がリング内でどのような分布をもって、周回しているのかを述べる。電子は、リング内に一様に分布しているのではなく、図1.1に示すように、塊（これをバンチと呼ぶ）となって運動している。バンチの数は、マシンによって異なるが、最低1個、最大数千個程度である。一つのバンチに含まれる電子の数は、（筆者の知る限りでは） $10^9 \sim 10^{12}$ 個の範囲に入っているようである。この数は、もちろん十分多数個といえる数字ではあるが、（巨視的な対象と見做せる目安としての）アボガドロ数に比べると十分少ないともいえる。

さて、リング内を周回する電子の量を示すとき、通常、電子の数ではなく（DC）電流値を用いる。電流値とは、リングのある場所を単位時間当りに通る電荷の総量である（リング全体に貯蔵されている電子の総数が同じでも、リングの周長が異なるマシンでは、電流値が異なることに注意せよ）。物理実験においては、電子の数そのものより、電流値の方が重要なことが多いので、通常、マシンの性能を示すパラメータとしては、この電流値の方を用いることが多い。この電流値としては、既存のマシンの通常の運転条件では、0.1 mA ~ 500mA の範囲に入っているようである。

電子の寿命は？

次に、電子貯蔵リングの定義で、「できる限り長時間」と述べたが、その長時間とはどれくらいか？という疑問もあるだろう。これに対しては、通常のマシンでは、数十分から数十時間に一回ビームの入射を行っているようである。つまり、一度ビームを入射すると、そのビームが、数十分から数十時間の間使えるということである。

電子貯蔵リングの基本的な構成

さて、ではどのような方法を用いると、電子ビームをこのように長時間貯蔵できるのであろうか？この疑問に答えるべく、以下に、電子貯蔵リングの基本的な構成について述べる。図1.2にその概念図を示す。

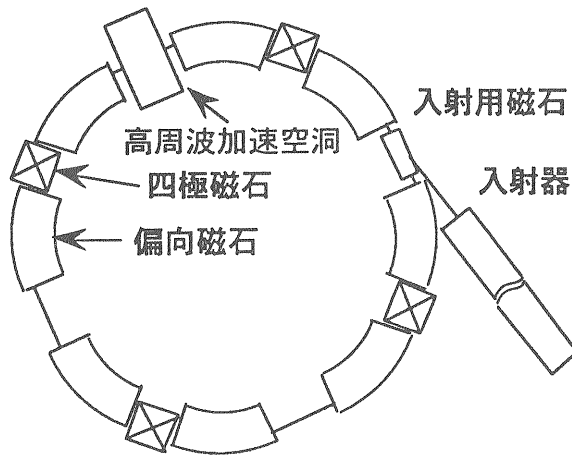


図 1.2

偏向電磁石

まず、電子貯蔵リングには、ビームの軌道を丸く閉じさせるための偏向電磁石が、必要である。偏向電磁石とは、一様磁場を作り出し、その一様磁場で電子ビームを曲げるためのものである（一様磁場中で電子が曲がる（より正確には円運動すること）に関しては、2.1.1を参照）。この偏向電磁石をどのように配置するかで、リングの大きさや形が決まる。また、電子のデザイン軌道というものも決まる。このデザイン軌道とは、電子をその軌道上を周回させたい軌道である。理想的には、このデザイン軌道上を走る電子は、ずっと同じ軌道上を走り続けることになる（ここで、「理想的には」と言葉には、実は、様々な意味が含ま

れているのだが、それらについては、このテキストを読み進むにつれて明らかになってくるはずである）。

収束電磁石

さて、もしリングが偏向電磁石だけで出来ていたら、デザイン軌道を逸れた電子の運動は（一般には）安定ではなく、デザイン軌道からどんどん遠ざかってしまう。このような事態を防ぐために、電子貯蔵リングでは、収束電磁石（又は四極電磁石とも言う）を用いる。この収束電磁石のために、デザイン軌道を逸れた電子は、この軌道の周りに束縛され、この軌道の周りを上下左右に振動することになる（この振動を「ベータatron振動」と呼ぶ。この振動については、第2章で詳しく述べる）。この収束電磁石は、光学のアナロジーでいうと、レンズに当たるものであるが、光学でのレンズとの大きな違いは、光学のレンズでは、（レンズが鉛直方向に立てて置いてあるとして）水平、垂直の両方向ともに収束（凸レンズ）、又は、両方向ともに発散（凹レンズ）のどちらかであるのに対して、収束電磁石の場合、水平方向に収束である場合、垂直方向には発散、逆に水平方向に発散の場合、垂直方向には収束になるということである。そして、この場合のミソは、（例えば水平方向に）収束、発散の四極電磁石を交互に配置すると、強い収束作用が得られるということである。この収束、発散の四極電磁石を交互に配置することにより、強い収束作用を得る方法を「強収束の原理」と呼び、この原理の発見は、シンクロトロン発展の歴史において、一つの大きな画期をなす発見であった。

高周波加速空洞

次に、電子貯蔵リングにおいて、周回する電子は、偏向電磁石で曲げられるとき、そのエネルギーの一部を光を放出することにより失う（この光をシンクロトロン放射光（Synchrotron Radiation）と呼ぶ）。従って、電子を一定エネルギーで周回させるためには、失ったエネルギーをそのつど補ってやる必要がある。この目的のために、高周波加速空洞（Radio-Frequency Accelerating Cavity）をリングに設置し、この空洞に電磁波を送り定在波を立てる。この定在波の電場成分をビームの進行方向に作るようにし、この電場によりビームの加速を行う。但し、空洞内に立つ電磁場は、高周波なので、この高周波の最適な位相（の近傍）でしか最

適なビーム加速が行えない（最適なビーム加速とは、電子が、リングを一回周回する間に失ったのと、ちょうど同じエネルギーを加速空洞から得る場合をいう）。つまり、高周波の一周期に一度最適な位相が現われることになる（注、厳密にいうと、ここでいう最適な位相は、高周波の一周期に一度ではなく二度現われる。しかし、そのうちの一つは、後で述べる位相安定性の原理が働かないので、ビーム加速には使えない）。このため、電子ビームは、その進行方向に一様な分布を作らず、（進行方向に）塊（バンチ）となって進行する。このバンチとバンチの間隔は、高周波の一周期の整数倍になる。

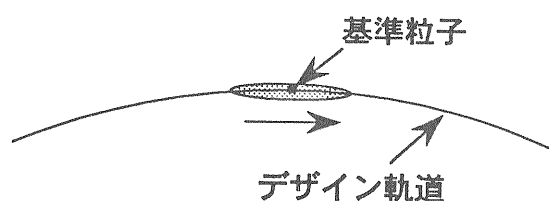


図 1.3

さて、図 1.3 に示すように、バンチの中に理想的な基準粒子（Synchronous Particle とも呼ばれる）を想定する。この基準粒子に対しては、最適な加速が行われているので、リングのある場所で見ていると、この粒子が何度周回してもそのエネルギーは変わらない。また、加速空洞の最適な位相の上に乗っており、何度周回してもこの最適な位相からずれることがない。ところが、この基準粒子の前後にいる粒子、又はこの基準粒子のエネルギーと異なったエネルギーを持つ粒子は、この基準粒子の前後を進行方向に振動することになる。また、その際エネルギーも、基準粒子のエネルギーより小さくなったり、大きくなったりして振動する。このような、電子の位置の進行方向の振動とエネルギーの振動（これら二つの振動は、不可分のものである）をシンクロトロン振動と呼ぶ（このシンクロトロン振動については第 3 章で詳しく述べる）。言い換えると、粒子を加速する場合、加速に用いる高周波に対して、最適な位相があり、最適な加速条件からずれた場合でも（そのズレが

余り大きくなければ）、収束力が働き、この最適な位相からどんどんずれていってしまうことはなく、最適な位相の周りを（シンクロトロン）振動する。このことは、もちろん自明のことではなく、むしろ、このような安定位相が存在するということを見出したことは、シンクロトロンの発展の歴史の中で、「位相安定性の原理」の発見として、（強収束の原理の発見と並んで）一大画期をなすものであった。

放射減衰と放射励起

さて、次に電子貯蔵リングに特有の放射減衰（Radiation Damping）と放射励起（Radiation Excitation）について簡単に述べる。放射光の放出と加速空洞での加速を繰り返す間に、先に述べた、ベータトロン振動とシンクロトロン振動は、しだいに減衰していく、これを放射減衰と呼ぶ。しかしながら、この放射減衰のために、これらの電子の振動が全く無くなって、バンチ内の全ての電子が一点に集まってしまうわけでは、実はなく、放射減衰に逆行するプロセスとして放射励起というものがある。放射励起とは、放射光の放出が実は量子論的なプロセスで、光子というエネルギーの塊として、確率的に生じることに起因するものである。これらのことより、電子は、定常状態では、この放射減衰と放射励起との釣り合いで、ある確率的な振動振幅で振動することになる。この確率的な振動振幅は、多数の電子の平均をとるとある確定的な広がりとなり、こうして、水平、垂直、進行方向のビームサイズが決まることになる。この放射減衰、放射励起については、第 4 章で述べる。

高真空

最後に、リングを周回している電子は、様々な原因でビームから失われうる。電子ビームを物理実験に用いる場合、この電子のビームからの損失をできる限り少なくして、出来るだけ長時間ビームを貯蔵したいと思うのは当然である。粒子損失の様々なプロセスについては、第 5 章で簡単に触れる。それらのプロセスの中で、通常のマシンで、まず問題になるのは、電子の残留ガスとの衝突の過程である。即ち、電子がその軌道上で、残留ガスと衝突し、制動輻射を放出することによりエネルギーを失い、安定に運動できるエネルギー領域から外れてしまうプロセスが重要である。このプロセスによる粒子損失を出来るだけ少なくするた

めには、ビームの軌道近傍の真空度を、出来るだけ高くすることが重要である。電子ビームは、真空パイプ、又は真空チェンバーと呼ばれる細い管の中を運動するが、電子貯蔵リングの場合、この真空パイプ内を特に高真空に保つことが必要である。この場合、高真空とは、 10^{-7} Pa 以下ぐらいである。

以上、電子貯蔵リングの基本的な構成要素として、偏向電磁石、収束電磁石、高周波加速空洞、高真空の真空パイプについて述べたが、実際の電子貯蔵リングで、電子ビームを安定に貯蔵するには、これだけでは不十分である。これらのほかに電子貯蔵リングに必要な要素については、後で、電子貯蔵リングの構成要素として述べることにし、その前に電子貯蔵リングが、加速器一般の中でどのような位置にあるのかを簡単に述べることにする。

1.2.2 電子貯蔵リングが加速器一般の中で占める位置

共鳴加速

加速器を大別すると、直線加速器と円形加速器に分かれるが、電子貯蔵リングは言うまでもなく円形加速器に含まれる。加速器を円形にすることの最大のメリットは、共鳴加速の方法を用いることができるということである。即ち、加速は高周波電場を用いて行われるが、粒子を曲げて円形に近い軌道を描いて運動させることにより、加速器内に局在して存在する加速装置を何度も通るようにできる。そして、粒子の周回運動の周波数と高周波電場の周波数の間の同期をうまく取ることができれば、粒子は加速装置を通る度に加速されることになり、非常に効率の良い加速の方法が得られる。この方法を共鳴加速の方法と呼ぶ。この方法は、非常に普遍的な方法であり、ほぼ全ての円形加速器で、この共鳴加速の方法が用いられる。

(唯一の例外は、ベータトロンと呼ばれる加速器で、このベータトロンでは、変動磁場によって生じる誘導電場を加速に用いる。)

サイクロトロンとシンクロトロン

この共鳴加速の方法を採る円形加速器を大別すると、サイクロトロンとシンクロトロンに分かれ

るが、電子貯蔵リングは広い意味では、シンクロトロンに分類できる。(但し、電子貯蔵リングは、シンクロトロンから派生した新しいジャンルの加速器とみなし、シンクロトロンとは区別するのが普通のようなものである。) シンクロトロンは、サイクロトロンの進化したものと考えることができるが、このシンクロトロンをサイクロトロンから区別する最大の特徴は、粒子の軌道であろう。即ち、サイクロトロンでは、粒子が加速されエネルギーが大きくなるに従って、周回運動の半径が大きくなり、軌道が渦巻き状になるのに対して、シンクロトロンでは、軌道半径は常に一定に保たれる。(こうなるように、シンクロトロンでは、エネルギーに応じて粒子を曲げるための磁場の強さを変えていく。これに対して、サイクロトロンでは、粒子を曲げるための磁場は一定に保たれる。) このように、シンクロトロンでは、粒子の軌道が一定であるため、この軌道の近傍にのみ、加速器を構成する電磁石や真空装置などの装置を配置すればよい。

上に述べた(広い意味での)シンクロトロンのうち、比較的短い時間に粒子加速を行い、加速された粒子を取り出して、物理実験に用いたり、あるいは他の加速器に入射したりするものを、通常単にシンクロトロンと呼ぶ。

電子貯蔵リング

シンクロトロンと同じような構造を持つ加速器のうち、次のような特徴を持つものを、通常の意味でのシンクロトロンと区別して電子貯蔵リングと呼ぶ。まず、扱う粒子は電子または陽電子である。次に、リング内に(陽)電子を長時間ためて実験に用いる。もう一つの特徴としては、電子貯蔵リングは、加速器でありながら、必ずしも加速を行うとは限らないことである。もちろん加速を行う電子貯蔵リングも数多く存在する(このようなマシンは、シンクロトロンと電子貯蔵リングの性質を合わせ持つ加速器ともいえるだろう)が、中には、実験エネルギーで(陽)電子を入射し、そのままのエネルギーで貯蔵するマシンも多く存在する。(但し、この場合でも(陽)電子は、磁場中で放射光と呼ばれる光を放出することによりエネルギーを失うので、失った分のエネルギーを加速装置で、補給する必要がある。その意味で、この場合でもマシンは加速器と呼ばれる資格があるのである。)

1.2.3 電子貯蔵リングの用途

電子貯蔵リングの二大用途として、高エネルギー物理実験と放射光物理実験が挙げられる。

高エネルギー物理実験

まず、高エネルギー物理実験のための電子貯蔵リングであるが、この場合マシンは、すべて衝突型加速器（コライダー、Collider）として（またはその一部として）用いられる。衝突型加速器とは、一つ、または二つのリングで、二つのビームを逆向きに旋回させ、それらをリングの一カ所または数カ所で衝突させるための加速器である（但し、衝突型加速器と言った場合、円形加速器を用いるとは限らず、二つの直線加速器を用いてビームを衝突させる場合もある。これをリニア・コライダーと呼ぶ）。物理実験は、その衝突で生じる素粒子反応を観測する事により行われる。ビームを構成する粒子の組み合わせによって、陽子-陽子、陽子-反陽子、電子-陽電子、電子-陽子、などいくつかのタイプのコライダーが存在する。これらの内、陽子-反陽子コライダー、電子-陽電子コライダーで、二つのビームのエネルギーが等しければ、一つのリングで二つのビームを回すことができ、それだけでコライダーになる。これをシングルリング・コライダー（Single Ring Collider）と呼ぶ。例えば、KEKで、1994年現在稼働中であるトリスタンは、電子-陽電子のシングルリング・コライダーで、電子、陽電子のエネルギーは共に約30 GeVである。これに対して、本年のセミナーのテーマであるBファクトリは、電子-陽電子コライダーではあるが、電子と陽電子のエネルギーが同じではない。例えば、KEKのBファクトリ（KEKB）の場合、電子は8 GeV、陽電子は3.5 GeVである。この場合、一つのリングで二つのビームを回すことができなくなり、二つのリングが必要になる。このようなコライダーをダブルリング・コライダー（Double Ring Collider）と呼ぶ。

放射光実験

次に放射光実験についてであるが、この場合マシンユーザーは電子ビーム（または陽電子ビーム）そのものではなく、これらが磁場で曲げられるときに放出する光（放射光、Synchrotron Radiation）を実験に用いる。この放射光実験は、歴史的には、1960年代に、高エネルギー実験に用いられる

電子シンクロトロンに寄生する形で始められた。これを第一世代の放射光実験と呼ぶ。この第一世代においては、ビームが偏向電磁石でその軌道を曲げるときに放出される放射光のみが実験に用いられていた。この第一世代では、シンクロトロンを用いていたので、ビームエネルギーが（ビーム加速により）変化し、それに伴って、放射光のスペクトルが変化するという光源としては致命的な欠点を持っていた。また、ビーム軌道の安定性や光の強度の各加速サイクルでの再現性にも問題があった。さらに、高エネルギー実験に寄生する形で実験が進められていたので、マシンの運転条件を自由に選べないという問題もあった。

この様な状況の中で、当然の成り行きとして、放射光実験専用の、しかも、ビームのエネルギーを一定に保つ電子貯蔵リングを建設したいという気運が世界的に高まり、実際1970年代から1980年代にかけて数多くのマシンが建設された。これを第二世代のマシンと呼ぶ。KEKで現在稼働中である2.5 GeVのPFリング（Photon Factory Ring）も第二世代に属する放射光マシンである。この第二世代では、偏向電磁石からの光に加えて、リングの直線部に、アンジュレータまたはウイグラーと呼ばれる挿入型光源を積極的に設置し、より質の高い放射光が利用できるようになった。挿入型光源とは、多数の比較的小さな磁石をその極性を反転させながら並べたものである。電子はこれらの電磁石を蛇行運動しながら通過するが、そのとき、干渉効果によって指向性が高く、バンド幅の狭い、高輝度の放射光が得られる。

第二世代において、放射光源用加速器、及び挿入型光源の研究が大いに進み、最適化された光源としての第三世代のマシンが提案されるようになった。フランスのグルノーブルで1992年に運転を始めた6 GeVのESRFと呼ばれるマシンがその走りといわれている。この第三世代のマシンの特徴としては、まず第一に、 10^9m のオーダーの低いエミッタンスを目標とすることである。（エミッタンスについては第4章で詳しく説明する。）低いエミッタンスが得られると、ビーム径が小さくなり、またビームを構成する粒子の運動の角度広がりも小さくなる。これらは、より高い輝度の放射光を得るには不可欠の条件である。第二の特徴として、（偏向電磁石からの光を用いるのではなく）挿入型光源を主力とすることが挙げられる。このためリングに長い直線部が必要となり、必然的にリングの周長が長くなる。放射光物理実験で

主に用いられる放射光の波長領域は、真空紫外領域とX線領域であるが、アンジュレータの利用を前提とすると、真空紫外用の光源では、1～2 GeV、X線の光源では、6～10 GeVのビームエネルギーを持つマシンが必要だといわれている。最後に、最適化された放射光マシンという意味では、電子ではなく陽電子を用いる方がよい。これは、電子ビームの場合、イオン化された残留ガスが、ビーム軌道の周辺にトラップされ、電子の運動が攪乱されることがあるためである。

1.2.4 電子貯蔵リングの構成要素

ここでは、電子貯蔵リングがどのようなものからなり立っているのか簡単に概観してみる。

(1) 入射器

電子貯蔵リングでは、電子のエネルギーが電子の静止エネルギーより十分大きいことを前提としている。このため、電子のエネルギーを、あらかじめ電子貯蔵リングの入射可能なエネルギーまで上げておくための入射器が必要である。この入射器としては、通常、電子線形加速器、又は、電子シンクロトロンを用いる。例えば、KEKのPFリングの場合入射器は、線形加速器、トリスタンMRの場合の入射器は、トリスタンARというシンクロトロンである。

(2) ビームトランスポートシステム

ビームトランスポートとは、この場合、入射器から電子貯蔵リングまでビームを輸送するシステムを意味する。ビームトランスポートシステムは、ビーム輸送路の部分とビーム入射部に大別できる。ビーム輸送路とは、ここでは、入射器から貯蔵リングの直前までビームが運ばれてくる通り道のこと、偏向電磁石、収束電磁石、真空パイプ、等からなる。ビーム輸送路の構成要素としては、このほかに、スクリーンモニタ、ビーム位置モニタ、電流トランス、等のモニタ類が輸送路の随所に据え付けられている。スクリーンモニタとは、真空パイプの中に挿入して、ビームの位置や形状を調べるためのモニタである。ビーム位置モニタとは、ビームにほとんど影響を与えないことなしに、ビームの重心位置を求めるためのモニタで、ボタン型やストリップライン型等がある。電流トラン

スとは、ビームがトランスのコアの内側を通るときに、コアに巻いたコイルに誘起される電圧を調べることにより、主に、ビームのあるパルスに含まれる電荷の量を知るためのモニタである。

次に、ビーム入射部の構成要素は、セプトム及びキッカーと呼ばれるパルス電磁石である。セプトム電磁石とは、ビーム輸送路の最後、貯蔵リングの直前に置き、ビーム輸送路を通ってきたビームを、リングを回っているビームの軌道とほぼ平行になるところまで曲げるための電磁石である。キッカー電磁石とは、リングの入射点の近傍の何箇所かに設置し、入射の瞬間だけ励磁することにより、リングのデザイン軌道を一時的に入射してくるビームに近付けてやるための電磁石である。こうすることにより、元々リングの外にいたビームを、リングの中で周回させることが可能になる。

以上、ビームトランスポートシステムの基本的な構成要素について述べたが、これらのほかに、電磁石の電源、真空ポンプ、全てのコンポーネントに対する制御システムなどが必要である。さらに、パルス電磁石に対しては、入射器とリングの同期をうまく取り、正しいタイミングで、これらの電磁石を励磁するためのタイミングシステムが必要である。

(3) 電磁石システム

電子貯蔵リングの構成要素としての電磁石としては、先程述べた、偏向電磁石と収束電磁石のほか、いくつかの補正電磁石が必要である。まず、補正2極電磁石（又は、ステアリング電磁石とも呼ばれる）が必要である。色々な原因で、デザイン軌道上の磁場が設計通りでない場合、ビームの中心軌道は、デザイン軌道と違ってくる。ステアリング電磁石は、この違いを補正し、ビームの軌道をデザイン軌道に近付けるために用いられる。ステアリング電磁石は、磁場のパターンという意味では、偏向電磁石と同じものでありが、（偏向電磁石との）違いは、その磁場の強さが、通常、偏向電磁石よりずっと小さいことであり、その意味でステアリング電磁石は、小型の偏向電磁石と考えることも出来る（偏向電磁石のコアに別のターン数のずっと少ないコイルを巻き、このコイルに別の電源をつないでステアリング電磁石の代わりにすることも多い）。偏向電磁石とステアリング電磁石のもう一つの違いは、偏向電磁石は、多くの場合、水平方向にだけ曲げるために用いられるが、ステアリング電磁石としては、垂直方向に

曲げるものも必要となることである。

次に、六極電磁石と呼ばれる補正電磁石が必要である。この電磁石の目的は、一言で言って、エネルギーが基準粒子のエネルギーからずれた粒子の運動を、できる限り、基準粒子のそれに近づけることである（このような補正を広い意味でのクロマティシティ補正、Chromaticity Correctionという）。光学とのアナロジーで言うと、これは、色収差の補正に当たる。このような補正は、あるいは高次の補正で余り重要でないと感じる読者もあるかも知れないが、実は、この補正は電子貯蔵リングでは、ほとんどの場合必要不可欠で、この補正なしでは、ビームが全く貯蔵できないか、できても、パンチ当りの電流値が非常に低い値に押さえられてしまう。

次に、高エネルギー物理実験に用いられる電子貯蔵リングにおいて、物理実験の検出器の一部として、ソレノイド電磁石を用いることが多い。この電磁石の磁場により、本来独立である水平方向の運動と垂直方向の振動が、カップルすることになる。その影響を補正するために、収束電磁石を45度回転させた電磁石が用いられる。これをスキュー収束電磁石 (Skew Quadrupole Magnet) と呼ぶ。

さて、以上に述べた補正電磁石のほかにも、いくつか電子貯蔵リングで用いられる電磁石がある。まず、八極電磁石を用いるマシンがある。目的は、ビーム不安定性を押さえ、ビーム電流を増やすことであるが、この電磁石は、必ずしも必要なものではなく、全くこの電磁石を用いない電子貯蔵リングも多い。次に、先に述べた、ウイグラー、及びアンジュレータと呼ばれる電磁石を放射光マシンでは用いる。(ウイグラー電磁石は、高エネルギー物理実験用のマシンでも、放射減衰の早さを早くする目的で用いることがある。)さらに、これ以外に、先に述べたように、ビームトランスポートシステムで用いられる、キッカーやセプタムがある。

電磁石システムといった場合、これらの電磁石のほかに、それらの電源（多くは定電流電源）が必要である。また、電源と電磁石を結ぶケーブルが必要であることはいうまでもない。また、多くの電源の電流値を同期を取って変えていくためのコントロールシステムが必要とされる場合が多い。

(4) 高周波加速空洞システム

高周波加速空洞は、先に述べたように電子貯蔵

リングの基本的な構成要素の一つだが、システムとしてみた場合、空洞本体以外に、空洞へ高電力の電磁波を送り込むための電力源が必要である。この電力源としては、クライストロン (Klystron) と呼ばれるものが用いられる。また、クライストロンから空洞まで、高電力の電磁波を運ぶための立体回路としての導波管や、空洞に入りきらず、空洞から反射してきたパワーを吸収して熱に変える負荷 (ダミーロード、Dummy Load と呼ばれる) なども必要である。また導波管の所々には、電磁波を分岐させたり、進行する方向を操作したりするために、方向性結合器やサーキュレータと呼ばれるもの等が設置されている。さらに、このようなシステムを、ビームの存在の下で安定に動かすためには、何重にもわたるフィードバックループを含むコントロールシステムが必要である。このようなコントロールシステムを (クライストロンから空洞に高電力の電磁波を供給する、ハイパワー系に対して) ローレベル系 (Low Level System) と呼ぶ。

以上述べた高周波加速空洞システムについては、今年のセミナーで、赤井和憲氏の講義で概説されるはずである。

高周波加速空洞には、空洞表面が常伝導体の銅からなる常伝導加速空洞とニオブ (Nb) 等の超伝導体を用いる超伝導加速空洞がある。この超伝導加速空洞は、KEKで開発され、トリスタンで始めて用いられた技術である。超伝導加速空洞を液体ヘリウムで冷却し、超伝導状態で運転することにより、消費電力が節約でき、また、高い加速電場が得られる。この超伝導加速空洞については、今年のセミナーで、古屋貴章氏の講義で解説される。この超伝導空洞システムを運転するには、既に述べた常伝導加速空洞の運転にも必要なシステムに加えて、空洞に液体ヘリウムを安定に供給する大掛かりな冷凍機システムが必要である。

(5) 真空システム

電子貯蔵リングでは、電子ビームを長時間貯蔵するために、他の加速器に増して、真空システムの重要性が高い。この真空システムの概要については、今年のセミナーでも、末次佑介氏の講義で詳しく説明されるはずである。

真空システムの構成要素としては、真空パイプ、真空ポンプ、真空ゲージ、ゲートバルブ等が挙げられる。真空パイプの材質としては、アルミ、銅、ステンレスなどがある。真空ポンプとしても色々

なものが用いられるが、電子貯蔵リングで主ポンプとして用いられる（又は用いることが計画されている）ものは、イオンポンプやNEGと呼ばれるゲッター・ポンプなどである。真空ゲージとは、真空度をモニターするためのものである。ゲートバルブとは、リングの真空パイプの一部を他の部分から隔離するためのものである。このゲートバルブは、例えばある場所で真空の漏れがおこったとき、その場所を（二つの）ゲートバルブですばやく隔離することにより、他の場所が悪い真空度に曝されることから守るために用いられる。また、リングの真空パイプのある場所で真空を破って作業するとき、やはりその場所を隔離するのに用いられる。

この外に、真空システムとしては、真空パイプを加熱して、パイプの内壁に付着したガスを取り除くためのベイキング・システムが用いられる場合がある。

（6）ビーム・モニタ・システム

ここまで、ビーム・モニタについては、ほとんど触れなかったが、実際には加速器を安定に運転するためには、ビームの状態を常に監視し、また必要があれば補正を行うためのビーム・モニタ・システムが、必ず必要である。

ビーム・モニタの種類としては、ビームの電流値を測定する電流モニタ、ビームの重心位置を測定する位置モニタ、ビームの横方向の大きさを測定するビームサイズ・モニタ（又は、ビームの横方向の形状をモニタするプロファイル・モニタ）、バンチを構成する電子の角度広がりを測定するモニタ、バンチの縦方向の大きさを測定するバンチ長モニタ等がある。これらの内、電流モニタには、バンチ毎の電流を測定するバンチ電流モニタと、ビームのDC電流値を測定するDC電流モニタがある。また、位置モニタとしては、バンチの重心位置を一周毎に測定する Single Pass Monitor と、ある程度長い間の平均的な重心位置だけを測定するものがある。

これらのモニタのほかにも、ビームのベータatron振動や、シンクロtron振動の振動数を測定するためのモニタがある。また、ビーム・モニタという言葉からは、やや外れるが、ビーム・フィードバックと呼ばれるシステムがある。このビーム・フィードバック・システムは、Single Pass Monitor 等によって得られた、バンチの横方向、又は縦方向の振動から得られたシグナルを適当に処

理して、ビームに戻すことにより、ビームの振動を止めることを目的とするものであり、Bファクトリのようなマシンでは、特に重要であると考えられている。この、ビーム・フィードバックについては、本年のセミナーにおいて、飛山真理氏によって解説されるはずである。

（7）コントロール・システム

近来、加速器の規模が大掛かりになりつつあり、それに伴って、加速器全体を計算機コントロールするシステムの重要性が高まりつつある。また、近来の計算機環境の長足の進歩によって、コントロール・システムにとって、実現可能な性能の範囲が広がりつつある。コントロール・システムは、このように、急速に変化しつつある分野であり、その全貌を捕えるのは、困難であるが、ここでは極く簡単に、システムを3つの層に分けて概説することを試みる。

まず第一の層は、計算機と制御したい機器（例えば電磁石の電源）とのインターフェースである。これには、例えばCAMACやVMEと呼ばれる規格を用いる。第二の層は、制御機器に（CAMAC等を通して）指令を出す計算機から構成される。これには、例えば小型計算機等をネットワークでつないで、分散的な制御が行われることが多い。又は、VME上のマイクロ・コンピュータで代用することもある。第三の層は、マン・マシン・インターフェースの部分である。これには、インテリジェンスを持たない、グラフィック・ディスプレイとタッチ・パネル又はトラック・ボールのような機器と第二層の指令用計算機で構成されることもあるし、ワークステーションやパーソナル・コンピュータを用いることもある。

また、容易に想像がつくように、これらのシステムを実現するには、色々なレベルのソフト・ウェアが必要である。また、ここに述べたもの以外に、最近の傾向として、大容量のメモリが利用できるようになったことに伴って、加速器の色々なパラメータをその時間的な履歴を含めて記録するデータ・ベースのシステムを持つことが流行になっている。このシステムにより、色々なパラメータの時間的な変動の様子はもちろんのこと、パラメータ間の相関などが一目瞭然になり、加速器の性能向上に大きく貢献するものと期待されている。

（8）その他

この外、加速器の運転に不可欠な施設として、

加速空洞や電磁石などを冷却するための冷却水系、また、加速器が存在するトンネル内の温度を一定に保つための空調のシステムなどがある。また当然ながら加速器の各機器に必要な電力を供給する電気系統の施設も必要である。

また、放射線の発生源である加速器を安全に運転するために、放射線のモニタや人間のトンネル内への入出を管理するシステム、さらに安全を保つためのインターロック等が重要である。

1.3 本テキストで扱う範囲と扱わない問題

本テキストで解説するのは、個々の電子または陽電子が、磁場や電場の中でどの様に運動するかということであり、その意味で本テキストで扱うのは、基本的に、一粒子のビーム・ダイナミクスのみである。

しかし、実際の加速器では、電子どうしが相関をもって運動している。その相関を考えるうえで最も重要なものは、電子が真空パイプを通った後に電磁場を残し（この残った電磁場をWake Fieldと呼ぶ）、このWake Fieldが後から来る電子の運動に影響するという効果である。この「後から来る電子」という場合、バンチの前の方にいる電子がバンチの後ろにいる電子に影響する場合もあるし、バンチが全体として作ったWake Fieldが後から来るバンチに影響する場合もある。このWake Fieldによるバンチとバンチの運動のカップリングは、Bファクトリにおいて特に重要な（あるいは重大な）ものと考えられている。更に、たとえ、リングにバンチが一バンチしかなくても、そのバンチが作ったWake Fieldが、一周（あるいは何周か）周回してきた自分自身に影響する場合すらある。これらのWake Fieldの効果の問題は、本テキストの範囲外である。

上では、電子どうしの運動の相関を考える際にWake Fieldのみを問題にしたが、ビームを構成する電子どうしの相互作用として、電子の作る電磁場が直接他の電子に力を及ぼさないか考える読者もあるだろう。しかし、ほぼ光速で走る電子の場合、電子が作る電場による力とその電子が作る磁場による力は打ち消し合って、他の電子はほとんどその電子から力を受けないのである。このようにWake Fieldの影響を除いて、バンチないの電子は

ほぼ独立して運動していると考えられる。ところが、衝突型の加速器では、二つのバンチがぶつかる時に、同じバンチないでは打ち消し合っていた電場による力と磁場による力が、衝突する相手のバンチないの電子（または陽電子）に対しては、足し算になる。この衝突する際に相手のビームから力を受ける効果をビーム・ビーム効果と呼び、衝突型加速器では、その性能に大きな影響を及ぼす効果である。このビーム・ビーム効果も本テキストの範囲外である。

本テキストでは、一粒子のビームダイナミクスを扱うが、その中でも主に線型の場合を扱い、非線型磁場の影響は極く表面的に述べるに留める。

第2章 Transverse Beam Dynamics

本章を通じて、電子のエネルギーは常に一定であると仮定する。即ち、実際の電子貯蔵リングでは、電子は、放射光を放出することにより、そのエネルギーを失ったり、又、失ったエネルギーを高周波加速空洞で補償されたりして、そのエネルギーは絶えず変動しているのであるが、本章では、電子は、放射光を放出せず、又、リングに高周波加速空洞も存在しないと仮定するのである。このような条件の下で、本章では、ビームの進行方向に垂直な方向 (Transverse 方向) の電子の運動を扱う。

2.1 運動方程式の導出

2.1.1 電磁場中での電子の運動

電子の運動方程式を導出する第一歩として、ここでは、電磁場中での電子の運動について述べる。電子貯蔵リングと呼ばれるマシンでは、電子のエネルギーは、全て相対論的な領域にあると考えてよい。そこでまず、運動が相対論的な場合の (古典) 力学について簡単に復習する。なお、このテキストでは、MKSA 単位系を採用する。

相対論的力学

まず、相対論的な場合の運動量は、次のように定義される。

$$\mathbf{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{v} = m_0 \gamma \mathbf{v} \quad (2.1)$$

ここで、 m_0 は粒子の静止質量、 \mathbf{v} は粒子の速度、 c は光速である。 γ は、Lorentz factor と呼ばれる。また、粒子の質量は、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0 \gamma \quad (2.2)$$

と定義される。即ち、粒子の質量がその速度によっ

て変化することになる。こうすることにより、相対論的な場合でも、 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ という関係式が成り立つ。次に、粒子のエネルギーに関しては、有名なアインシュタインの関係式がある。

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2.3)$$

(2.1) と (2.3) を組み合わせて得られる次の式もよく用いられる。

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (2.4)$$

(問、(2.4) 式を導け) この式より、超相対論的な場合、エネルギーと運動量の間に、次の簡単な近似式が成り立つことがわかる。

$$E \equiv p c \quad (2.5)$$

ここで、超相対論的な場合というのが、どのぐらいのエネルギー領域かという、(2.4) より、

$$E \gg m_0 c^2 \quad (2.6)$$

が成り立つ場合であり、電子の場合、その全エネルギーが、エネルギー換算された静止質量 (511 keV) より十分大きな場合である。大部分の電子貯蔵リングで、この条件は成り立っている。

このような運動量等の定義を用いると、相対論的な運動に対しても、次の形のニュートン方程式が適用できる様になる。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.7)$$

ここで一つ注意すべきことは、相対論的な場合、粒子の速度の大きさは、ほぼ光速に等しいが、質量が変化することにより、その運動量が変化するということである。次に以下で、右辺の \mathbf{F} (粒子に働く力) について考える。

加速器においては、特殊な場合を除いて、電磁場による力のみを考えればよい。一般に電磁場中を運動する荷電粒子が電磁場から受ける力 (Lorentz Force) は、よく知られた次の式で与えられる。

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.8) \quad \text{および (2.8) より、}$$

ここで、 \mathbf{F} は荷電粒子に働く力（単位はニュートン(N)）、 q は粒子の電荷（単位はクーロン(C)、電子の場合は $-e$ で -1.602×10^{-19} C、陽電子ではその逆符号になる）、 \mathbf{E} は電場（単位はニュートン/クーロン(N/C)）、 \mathbf{B} は磁場（単位はテスラ(T)）である。さて、このように、荷電粒子に力を及ぼすには、電場による方法と、磁場による方法があるが、どちらの方が有利であろうか？このことを見るために、(2.8) の \mathbf{E} と $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の絶対値を比べてみよう。電場と磁場の典型的な値として、それぞれ、 $E = 1 \times 10^6$ V/m、 $B = 1$ T を取ろう（V/m と N/C は同じ単位である）。これらの値は、適当な努力で到達可能な数字である。粒子の速度の大きさは、ほぼ光速（ 3×10^8 m/sec）と考えてよいので、

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| \approx 3 \times 10^2 |\mathbf{E}| \quad (2.9)$$

となり、磁場を用いるほうが圧倒的に有利である。（しかし、このことは加速器において電場が不要であるということの意味しない。後で見るように電場には電場の使い道があるのである。）

さて、(2.4) 式より、

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (2.10)$$

が成り立つ。（問、これを示せ）(2.8) より、外力 \mathbf{F} が磁場による場合 (2.10) は、常にゼロになる（問、これを示せ）。つまり、磁場によって、電子のエネルギーは変化しない。（問、磁場による力では、エネルギーが変化しないことの物理的な意味を考えよ）逆に言うと、粒子の加速に磁場は使えないことになる。ここに電場の使い道があるのであって、加速器では、粒子の加速には、電場が用いられ、その他の目的（粒子の偏向、収束、等）には（低エネルギーのマシンの場合を除いて、通常）磁場が用いられる。この第2章では、粒子のエネルギーは変化しないものと仮定している（粒子の加速は第3章で扱う）ので、以下では、電場は存在しないものと仮定する。

さて、電子のエネルギーが変化しないと、(2.3) より電子の質量も変化しないから、(2.7)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.11)$$

が導かれる。（問、これを示せ）以下、この式をもとにして議論を進める（この式も、もちろん運動方程式と呼ばれるべきものではあるが、我々が今導こうとしている、第2章の出発点になるべき運動方程式ではない）。ここで注意すべきことは、(2.11) は、非相対論的な場合の方程式と同じ形をしていることである。言い換えると、(2.11) は、相対論的な場合と非相対論的な場合の両方に適用可能である。このことに起因して、以下の議論では、相対論の知識をほとんど全く必要としないのである。

エネルギー、運動量の単位

ここで、本テキストで用いられるエネルギー、運動量の単位について述べておく。本テキストでは、基本的には MKS A 単位系が用いられるが、これらの量に関しては特別な単位を用いる。まず、エネルギーに関しては、eV (electron Volt, 電子ボルト) を用いる。1eV とは、電子を1V の電場で加速したときに、電子が得るエネルギーとして定義される。MKS A でのエネルギーの単位（ジュール、J）との関係は、

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (2.12)$$

となる。（問、これを示せ）また、

$$\begin{aligned} 1 \text{ keV} &= 10^3 \text{ eV}, & 1 \text{ MeV} &= 10^6 \text{ eV} \\ 1 \text{ GeV} &= 10^9 \text{ eV}, & 1 \text{ TeV} &= 10^{12} \text{ eV} \end{aligned}$$

等もよく用いられる。高エネルギー物理学研究所 (KEK) にある電子貯蔵リングのエネルギーは、全て、GeV（通常“ジエブ”と発音される）を単位として計られる。また、(2.3) より、相対論的力学においては、粒子が静止しているときでも、その全エネルギーはゼロではなく、静止質量に対応したエネルギーを持つ。電子の場合、その静止質量 ($m_0 = 9.1095 \times 10^{-31}$ kg) を用いて、

$$m_0 c^2 \cong 511.0 \text{ keV}$$

となる。(問、これを示せ) 次に、陽子の場合、その静止質量 ($m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{kg}$) を用いて、

$$m_p c^2 \cong 938.27 \text{MeV}$$

となる。(問、これを示せ)

ここで、一つ注意すべきことは、加速器で単に“ビームのエネルギー”という場合、通常それは、ビームを構成する各粒子の全エネルギーを指すのではなくて、次の式で定義されるように、全エネルギーから、その静止エネルギーを差し引いた、運動エネルギーを指すということである。

$$T = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^4} - m_0 c^2 \quad (2.13)$$

この区別は、電子貯蔵リングでは、余り問題にならないが、低エネルギーの特に陽子マシンでは重要である。例えば、KEK-P S (Proton Synchrotron) の初段の加速器は、コッククロフトと呼ばれる静電型の加速器で、このコッククロフトにより、陽子は、0.75 MeV まで加速される。このときのエネルギーは、もちろん運動エネルギーを言うのであって、このときの全エネルギー (約 939.02 MeV) とは、大きな差がある。また、KEK-P S の主リングで、陽子は約 12 GeV まで加速されるが、このときの陽子の全エネルギーは、約 13 GeV である。

次に、運動量であるが、粒子が静止しているときは、運動量はゼロであるから、(2.1) で定義される運動量から何かを差し引いた量を定義することはもちろんなく、加速器においても (2.1) がそのまま用いられる。さて、運動量の単位であるが、運動量の大きさに光速 c をかけるとエネルギーの次元の量が得られるが、このエネルギーの大きさでもって、運動量の大きさを表し、GeV/c 等の単位を用いる。平たく言うと、例えば、運動量の大きさに、光速をかけた量が、1 GeV になったとすると、この運動量の大きさを 1 GeV/c というのである。この単位が便利なのは、超相対論的な場合であって、(2.5) より、粒子のエネルギーが例えば 1 GeV の場合、その運動量の大きさは、1 GeV/c となる。しかし、(2.5) が成り立たない場合、話はやや複雑になり、注意が必要である。運動量とエネルギーのあいだの関係として、(2.1) と (2.3) から、次の式が導かれる。

$$pc = E \frac{v}{c} = (T + m_0 c^2) \frac{v}{c} \quad (2.14)$$

(問、これを示せ) 先程、超相対論的な場合として、(2.5) を導いたが、これは、この式においては、粒子の速度が、光速にほぼ等しいことを意味する。さて、この式より、例えば、 $T = 1 \text{ GeV}$ の場合、電子では、その運動量の大きさは、ほぼ、1 GeV/c であるが、陽子においては、1.70 GeV/c になる。(問、これを示せ)

2.1.2 運動を記述する座標系

ここで、以下で必要になる、運動を記述するために用いられる座標系について述べておこう。

第1章で述べたように、電子貯蔵リングにおける電子の運動を記述するのに、デザイン軌道というものを想定し、この軌道を基準にして、この軌道の周りでの運動を考える。デザイン軌道とは、デザイン値通りのエネルギー (これを、nominal energy という) をもつ粒子が、(少なくともマシンの設計上は) 一度その軌道上を走れば、永遠に同じ軌道上を走り続けるような軌道のことをいう。実際のマシンでは、設計どおりにマシンができることは絶対になく、ある程度のマシンエラーは避けられない。この意味で、実際のマシンでは、デザイン軌道上を回り続ける粒子は存在しない。また、この章では、粒子のエネルギーは変化しないと仮定しているが、実際のマシンでは、電子は放射光を放出したり、RF 空洞で加速されたりして、そのエネルギーは、常に変動している。この意味でも、デザイン軌道を回り続ける電子は存在しない。従って、デザイン軌道というものは仮想的なものに過ぎないとも言える。しかし、このような理想化された軌道というものは、これを基準軌道と考え、そこからのズレを考えていくという意味で有用である。多くのマシンでは、このデザイン軌道が一平面内に来るように設計される。簡単のため、本テキストでは、デザイン軌道が、ある平面内に、しかも水平面内にあると仮定する。図 2.1 のように、電子のある瞬間の位置は、 (x, y, s) で指定することができる。ここで、 s は、デザイン軌道上のある (任意の) 点を基準点として、そこからデザイン軌道に沿って計った、電子の位置ま

での距離である。x,y はそれぞれ、水平、垂直方向のズレを表し、これらとこの点におけるデザイン軌

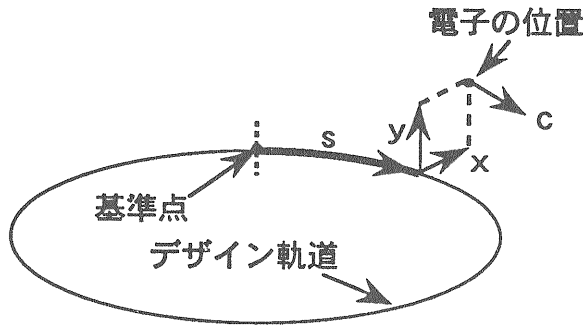


図 2.1

道の接線はそれぞれ直交するよう取る。x,y の方向は、それぞれリングの外側、上側を正に取る。

2.1.3 電磁石の種類とその役割

電子の運動方程式を導出する次のステップとして、電子に働く外力の源としての電磁石について述べなければならない。電子貯蔵リングを構成する電磁石は、第1章で述べたように、その機能から3つのタイプに分類できる。即ち、

- (a) 偏向電磁石
- (b) 四極電磁石
- (c) その他の補正電磁石

である。これらのうち (c) その他の補正電磁石に分類される主な電磁石として、

- (c-1) ステアリング電磁石
- (c-2) 六極電磁石

の二つが挙げられる。以下に、これら4種類の電磁石について、その電磁石としての特性、および加速器の構成要素としての役割について述べる。

(本テキストでは扱わないが、上に挙げたもの以外で加速器で用いられる電磁石として、八極電磁石、またビームのリングへの入射、リングからの取り出しに用いられるキッカー、およびセプタムと呼ばれるパルス電磁石、さらに、高エネルギー実験の検出器の一部として用いられるソレノイド電磁石等がある(このソレノイド電磁石については、本章の最後に簡単に触れる)。また、放射

光リングにおいて、リングに挿入して、目的に応じた種々のタイプの放射光を発生させるために用いられる、色々の種類の磁石があり、それらは、総称して、アンジュレータ、およびウイグラーと呼ばれる。これらの磁石も本テキストの扱う範囲外である。)

(1) 偏向電磁石 (Bending Magnet)

偏向電磁石は、Bending Magnetまたは Dipole Magnetとも呼ばれる。偏向電磁石は、ビームの軌道上に一樣な磁場を作り出し、ビームを曲げることにより、軌道をリング状に閉じさせることを目的とするものである。偏向電磁石の形状等について述べる前に、まず(広い)一樣磁場中で荷電粒子がどのような運動をするのかを復習してみよう。

一樣磁場中の荷電粒子の運動

図2.2のように、x-y-z座標軸で、z軸と平行な一樣磁場があるとする。この時(2.11)より、

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B_z \quad (2.15)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B_z \quad (2.16)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (2.17)$$

が成り立つ(問、これを示せ)。

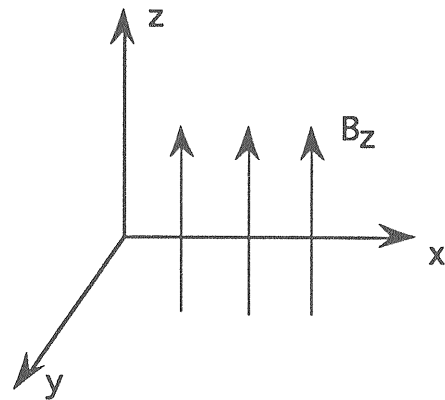


図 2.2

まず(2.17)より、 $v_z = \text{一定}$ 、であることがわかる。以下の議論では、簡単のため $t=0$ で、 $v_z = 0$ 、 $z=0$ であったと仮定しよう。こう仮定する

と、運動は、完全に $x - y$ 平面内に閉じ込められる。次に、

$$\tilde{V} = v_x + i v_y \quad (2.18)$$

と置こう。(2.15)、(2.16)より、

$$m \frac{d\tilde{V}}{dt} = -iqB_z \tilde{V} \quad (2.19)$$

となる。従って、

$$\tilde{V} = C \exp\left[\frac{-iqB_z t}{m}\right] \quad (2.20)$$

となる。ここで、 C は、任意の(複素数の)定数で、初期条件から決まる。次に、

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad (2.21)$$

より、

$$\begin{aligned} x + iy &= \int \tilde{V}(t) dt \\ &= \frac{m}{-iqB_z} C \exp\left[\frac{-iqB_z t}{m}\right] + C_1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

と解が求まる。ここで、 C_1 は、任意の(複素数の)定数で、やはり初期条件から決まる。

$$\begin{aligned} C_1 &= x_0 + iy_0 \quad (x_0, y_0 \text{ は実数の定数}) \\ C &= A_0 e^{i\delta} \quad (A_0, \delta \text{ は実数の定数}) \end{aligned}$$

と置くと、(2.22)は、

$$(x - x_0) + i(y - y_0) = \frac{imA_0}{qB_z} \exp\left[\frac{-iqB_z t + \delta}{m}\right] \quad (2.23)$$

となり、従ってまた、

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left[\frac{mA_0}{qB_z}\right]^2 \quad (2.24)$$

が成り立つので、荷電粒子は、点 (x_0, y_0) を中心とする円運動を行うことがわかる。円運動の回転半径を求めるために、 A_0 を求めてみよう。(2.20)より、

$$A_0 = |\tilde{V}| = |v| = \frac{|p|}{m} \quad (2.25)$$

となる。(問、これを示せ)この式から、粒子の、速度の絶対値、従って、その運動量と質量は運動の定数、即ち、保存量になることがわかる。(ここでは、磁場による力だけを考えているから、質量、運動量の絶対値が保存するのは当然である。)この式から、円運動の軌道半径(これを Larmor 半径と呼ぶことがある) ρ は、粒子の運動量が与えられると決まり、

$$\rho = \frac{p}{qB_z} \quad (2.26)$$

となる。さらに(2.23)より、円運動の周回角振動数は、

$$\omega_c = \frac{qB_z}{m} \quad (2.27)$$

となり、これをサイクロトロン振動数と呼ぶ。非相対論的な領域(速度が変化しても質量の変化が無視できるエネルギー領域)では、このサイクロトロン振動数は、(粒子の速度によらず)一定になる。因に、E. O. Lawrence は、1929年に、このことと、高周波電場による共鳴加速の方法を組み合わせた、サイクロトロンの基本原理を見だし、1931年にこのサイクロトロンによるビーム加速に成功している。

(2.23)式からもう一つわかることは、 q と B_z の符号が同じときは、円運動が右回り、逆符号の時は、左回りになるということである。(問、トリスタンでは、リングの上から見て、電子は右回り、陽電子は左回りにリング内を運動する。このとき、トリスタンの偏向電磁石の磁場は上下どちらを向いているか?)

(2.26)もよく用いられる式である。磁場の、荷電粒子への影響は、軌道半径 ρ の大きさで計ることができるが、この大きさは、磁場の強さだけ

では決まらず、 p/q に比例する。電子の場合に、この量は、

$$\frac{p}{e} = B\rho \quad (2.28)$$

となり、この量を Magnetic Rigidity と呼び、 $B\rho$ と書くことが多い (単位は、Tm)。後で示すように、いろいろの電磁石の磁場の強さを示すときに、この Magnetic Rigidity で割って、規格化しておく、いちいち電子の運動量を与えなくても、磁場による電子の運動を決めることができ、都合がよい。また、電子の場合に (2.26) を我々が用いる単位系を用いて書き直すと、

$$p[\text{GeV}/c] = 0.3B[\text{T}]\rho[\text{m}] \quad (2.29)$$

となる。(問、これを示せ)

さて、最後に、上に述べた運動を求める際に、簡単のため $t=0$ で、 $v_z=0$ 、であったと仮定したが、この仮定をはずすと何が起きるであろうか？

(2.12) ~ (2.14) より、 z 方向の運動は、 $x-y$ 方向の運動と完全に独立であるから、粒子の運動は、円運動プラス等速度運動、即ち、らせん運動になることがわかる。つまり、粒子の軌道を $x-y$ 平面に射影すると、射影された点は、やはり円運動をすることになり、また z 軸上に射影すると射影された点は、等速度運動をするのである。以上、一様磁場中の荷電粒子の運動について長々と述べたが、次にその一様磁場を作り出す偏向電磁石についてみてみよう。

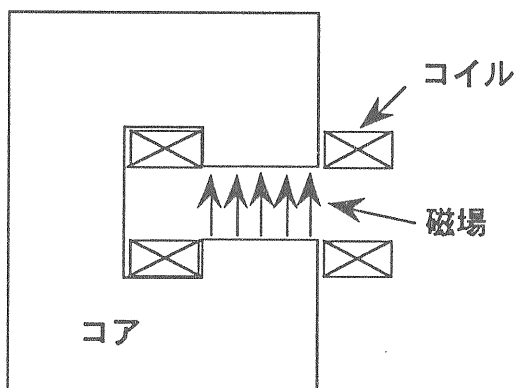
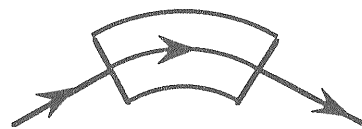


図 2.3

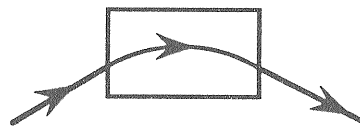
偏向電磁石の構造

そのコアの構造からいくつかのタイプの偏向電磁石が存在するが、代表的なものとして、C型と呼ばれるタイプの偏向電磁石の断面の模式図を図 2.3 に示す (C型という名前は、図に見られるようにコアの鉄の部分が、アルファベットの C の文字に読めることに由来する)。

次に、ビームが偏向電磁石に入る時と出る時に、ビームの方向と電磁石のエッジがなす角度により、セクター型、rectangular 型、等の偏向電磁石がある。図 2.4 に示すように、セクター型の偏向電磁石とは、ビームが入る時と出る時の両方とも、ビームの方向が、電磁石のエッジと垂直になるものをいう。また、rectangular 型の偏向電磁石とは、図からわかるように、長方形の電磁石で、通常、入射角と出射角の大きさが等しく (符号は逆) なるように設置する。電子貯蔵リングでは、rectangular 型の偏向電磁石を用いることが多い。これは、構造が簡単で、製作し易いためである。



(a) セクター型偏向電磁石



(b) rectangular 型偏向電磁石

図 2.4

さて、偏向電磁石の強さを表す量としては、まず磁場の強さそのものを取るの其自然に思われるが、前に述べたように、電子の運動を考える場合は、磁場の強さを Magnetic Rigidity で割った量を用いる方が都合がよい。すなわち、

$$\frac{B}{B\rho} = \frac{1}{\rho} \quad (2.30)$$

となり、回転半径（またはその逆数）を用いて、偏向電磁石の強さを表すのが、（ビーム・ダイナミックスの立場からは）一般的である。また、偏向電磁石のビームに対する影響を考える際には、その磁場の強さと共に、当然、磁石の長さを考えなければならない。即ち、(2.30)に偏向電磁石のデザイン軌道に沿った有効長 L をかけて、

$$\vartheta = \frac{L}{\rho} \quad (2.31)$$

となるが、この量は、偏向電磁石の積分された効果を表している。容易にわかるように、この量は、偏向電磁石によって電子が曲げられる角度（偏向角）を表している（問、これを示せ）。

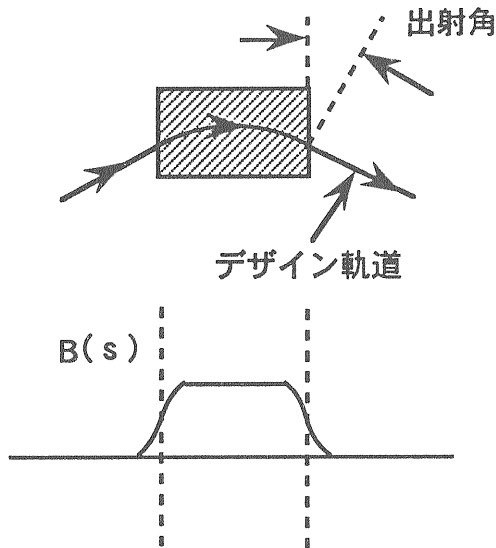


図 2. 5

なお、ここで、有効長という言葉を使ったが、有効長とは、電磁石の磁極の長さではなくて、磁極の端（エッジ、Edge という）で、磁場が次第に弱くなっていく効果を考慮に入れた、有効な磁場の長さのことである。即ち、偏向電磁石の磁場は、図、2.5に示すように変化していくが、その有効長は、

$$L = \frac{1}{B_0} \int B ds \quad (2.32)$$

で定義される。ここで、積分は、デザイン軌道に沿って取られる。また、 B_0 は、磁場のデザイン値である。以上述べたことをまとめると、偏向電磁石の影響を表すパラメータとして、回転半径（の逆数）と偏向角が用いられる。

この様に偏向電磁石は、ビームを曲げ、軌道を丸く閉じさせるために、リング加速器では不可欠のものであるが、もし、偏向電磁石だけでリングを作ったら何が起こるかを次に見てみよう。

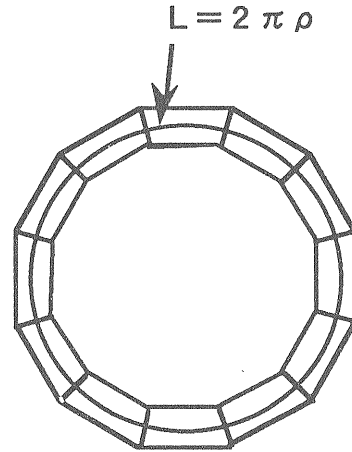


図 2. 6

偏向電磁石のみでできたリング

図 2.6 に示すように、同じ偏向電磁石を隙間なくぎっしり詰めて、リングを作ったとしよう。そうすると、リング全周にわたって、一様な磁場が得られるから、適当な初期条件を持った電子は、デザイン軌道上を回り続けることになる（この電子を基準電子と呼ぼう）。次に、この基準電子と、わずかに初期条件が違った電子の運動がどうなるか考えてみよう。まず、初期条件として、垂直方向の速度がゼロでない場合（これは、基準電子に、垂直方向に力をわずかに加えた場合と考えてもよい）は、先に述べたように、粒子の運動は、円運動ではなく螺旋運動になり、デザイン軌道からどんどん離れていってしまう。この意味で、偏向電磁石のみでできたリングは、垂直方向の運動に関しては安定ではない。次に、垂直方向の初期条件は基準電子と同じだが、水平面内での位置または速度（の初期値）が、わずかに基準電子と違って

いる場合を考えよう。この場合は、先に述べた事からわかるように、電子は、中心がわずかにずれた円運動を行う（問、これを示せ）。従って、この場合は、電子はデザイン軌道の近傍に留まって運動することになる。この意味で、偏向電磁石のみでできたリングは、水平方向の運動に関しては安定である。

この様に、偏向電磁石のみでできたリングは、水平方向の運動に関しては安定であるが、垂直方向の運動に関しては安定ではない。従って、電子ビームを安定して貯蔵するには、垂直方向の運動をも安定にすることが必要である。このために、歴史的には、今日「弱収束」と呼ばれる方法が、まず用いられた。これは、偏向電磁石の磁極の形状を変形して、垂直方向にも収束作用を持たせるようにする方法であるが、今日では、この弱収束の方法は、全く用いられなくなり、次に述べる「強収束」の方法にとって代わられている。

(2) 収束電磁石

強収束の方法

通常、強収束のマシンでは、ビームの収束に偏向電磁石とは別の、収束電磁石と呼ばれる電磁石を用いる。この電磁石は、光学のアナロジーでいうと、レンズに当たるものであるが、光学でのレンズとの大きな違いは、光学のレンズでは、水平、垂直の両方向ともに収束（凸レンズ）、又は、両方向ともに発散（凹レンズ）のどちらかであるのに対して、収束電磁石の場合、水平方向に収束である場合、垂直方向には発散、逆に水平方向に発散の場合、垂直方向には収束になるということである。この章の後で示すが、（例えば水平方向に）収束、発散の収束電磁石を交互に配置すると（収束作用が、相殺されるのではなく）逆に、強い収束作用が得られる。この様にして、強い収束作用を得る方法を、強収束の方法と呼ぶ。また、収束、発散の電磁石が交互に並んでいることから、この様なマシンを A G S（Alternating Gradient Synchrotron）のマシンとも呼ぶ。

現在の通常の加速器では、粒子の偏向と収束を別の型の電磁石に受け持たせる separate 型と呼ばれるタイプのものが一般的であるが、場合によっては、偏向作用と収束作用を合わせ持った combined 型と呼ばれる電磁石を用いる場合がある。但し、この場合でも収束、発散の電磁石を交互に配置する強収束の原理に従うことに違いはない。本テキ

ストでは、特に断らない限り、separate 型の加速器を仮定する。

次に、この様な収束作用を与える収束電磁石の構造を見てみよう。

収束電磁石の構造

図 2.7 に、収束電磁石（四極電磁石）の断面の模式図を示す。図からわかるように、収束電磁石は、四つの磁極を持ち、N 極と S 極が交互に並んでいる。磁極の（断面の）形状は、（この節の後の磁場の多重極展開の項で示すように）双曲線になる様にする。この様になると、電磁石の中心ではゼロで、一定の傾きを持つ磁場が得られる。すなわち、

$$B_x = ay \quad (2.33)$$

$$B_y = ax \quad (2.34)$$

となる。ここで、 x, y は、2.1.2 で述べた粒子の位置のデザイン軌道からの水平、垂直方向のずれを表す座標である。このことは、収束電磁石は、その磁場中心をデザイン軌道にくるように、配置されることを意味している。また、 a は定数であるので、

$$a = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=y=0} = B' \quad (2.35)$$

とおける。（2.33）、（2.34）より、水平方向に収束（発散）の場合、垂直方向には、反対に発散（収束）になることがわかる（問、これを示せ）。図 2.7 には、粒子（この場合は陽電子）に働く力の向きが示されている。力の大きさは、（2.33）、（2.34）からわかるように、電磁石の中心でゼロで、変位 x, y に比例して大きくなる。収束電磁石の強さを表すパラメータとして、この B' （Field Gradient と呼ばれる）を用いることができる（単位は、T/m）。しかし、偏向電磁石のところでも述べたように、ビームに対する影響を表すパラメータとしては、この量を Magnetic Rigidity で割った量を用いることが一般的である。即ち、

$$K = \frac{B'}{B\rho} \quad (2.36)$$

で表される、K 値を用いる（単位は、/m²）。また、その積分値として、

$$k = KL = \frac{1}{B\rho} \int B' ds \quad (2.37)$$

を用いて収束電磁石の積分された効果をを表す（単位は、/m）。日常、加速器屋がK 値という言葉を使う場合、(2.36)と(2.37)の両方の意味に用いることがあり、混乱を起こすことがあるが、このテキストでは、これら大文字と小文字で区別することに（但し、この様にしても、発音するときは、どちらも、ケーチ、になってしまうので注意を要する）。

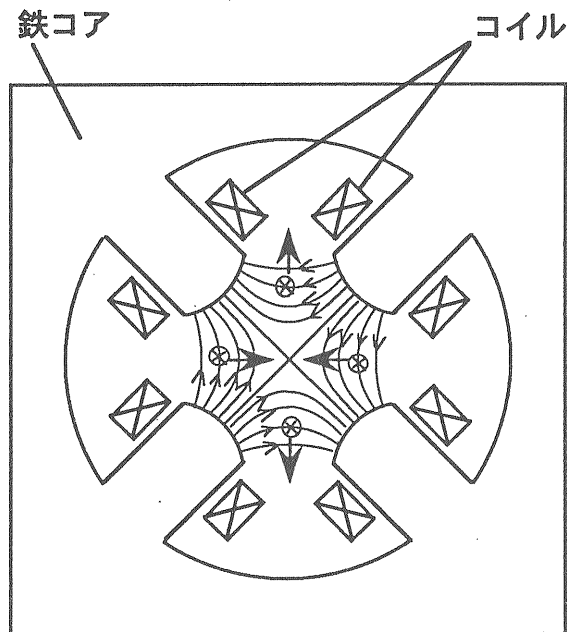


図 2.7

(3) ステアリング電磁石

ステアリング電磁石は、基本的に偏向電磁石と同じ構造で、それを小型にしたものと考えられるので、ここでは、詳しく述べない。

ステアリング電磁石と偏向電磁石の違いは、第一にその強さであるが、もう一つの違いは、偏向電磁石は、通常水平方向にビームを曲げることに

使われることが多いが、ステアリング電磁石は、2.3.1節で述べるように、軌道補正に使われるため、垂直方向に曲げるものも必要になるということである。

(4) 六極電磁石

第1章で簡単に述べたように、実際の電子貯蔵リングでは、補正電磁石としての六極電磁石が必要不可欠で、これなしでは、ビームがほとんど蓄積できない。この六極電磁石の必要性やどのように用いられるか等は、後で2.3.6節で述べられる。ここでは、六極電磁石の形状とどのような磁場が得られるかを述べる。

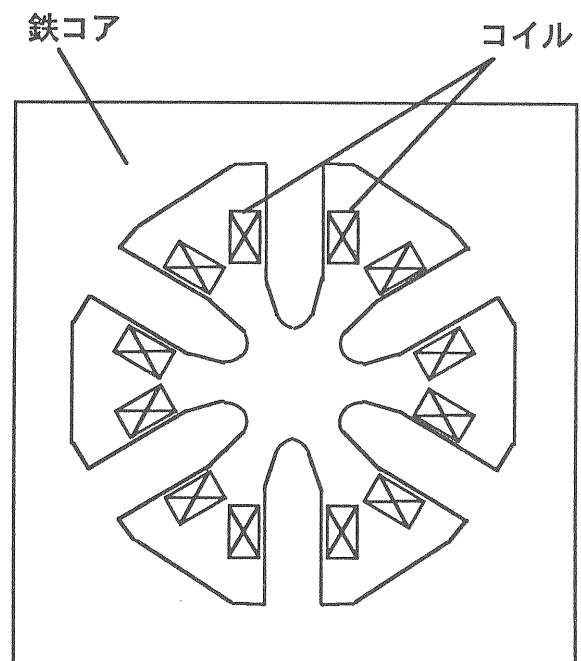


図 2.8

六極電磁石の構造

図2.8に、六極電磁石の断面の模式図を示す。図からわかるように、六極電磁石は、六つの磁極を持ち、N極とS極が交互に並んでいる。磁極の（断面の）形状については、後の磁場の多重極展開の項で述べる。六極電磁石の磁場分布は、次のようになる。

$$B_x = axy \quad (2.38)$$

$$B_y = \frac{1}{2}a(x^2 - y^2) \quad (2.39)$$

となる。ここで、 x, y は、2.1.2で述べた粒子の位置のデザイン軌道からの水平、垂直方向のずれを表す座標である。このことは、六極電磁石も、その磁場中心をデザイン軌道上にくるように、配置されることを意味している。また、 a は定数であるので、

$$a = \left. \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right|_{x=y=0} = B'' \quad (2.40)$$

とおける。六極電磁石の強さを表すパラメータとして、この B'' を用いることができる（単位は、 T/m^2 ）。しかし、収束電磁石のところでも述べたように、ビームに対する影響を表すパラメータとしては、この量をMagnetic Rigidityで割った量を用いることが一般的である。即ち、

$$K_2 = \frac{B''}{B\rho} \quad (2.41)$$

で表される、 K_2 値を用いる（単位は、 $/m^3$ ）。また、その積分値として、

$$k_2 = K_2 L = \frac{1}{B\rho} \int B'' ds \quad (2.42)$$

を用いて六極電磁石の積分された効果をを表す（単位は、 $/m^2$ ）。ここで、 L は六極電磁石の有効長である。以上、六極電磁石の強さを表すパラメータとして、本テキストでは、 K_2 および k_2 という記号を用いたが、加速器の世界で、(2.41) と (2.42) の右辺の量をどういう記号で表すかは、必ずしも統一されてはいないようである（ K_2 の代わりに、 S を用いるテキストも見かける）。これに対して、収束電磁石の場合の K 値は、加速器用語として、ほぼ標準になっているようである。

以上、六極電磁石について述べたが、(2.38)、(2.39) の磁場分布の形が不自然に見える読者もあるかも知れない。この様な磁場分布は、磁場の多重極展開の観点から見ると自然なものである。次に、この磁場の多重極展開に述べるが、この多

重極展開を考えると、偏向電磁石、収束電磁石、六極電磁石による磁場が統一的に理解できる。また、各電磁石の磁極の形状をどういう構造にすべきかもわかる。この様な意味で、多重極展開は重要なものである。

(5) 磁場の多重極展開

電磁石というものは、通常、（超伝導電磁石などを除いて）鉄のコアの部分とコイルの部分から成り立っている。コイルに流れる電流が作る磁場によって鉄が磁化して、鉄の表面に磁荷が現れる。磁極の間に、発生する磁場は、コイルに流れる電流そのものが作る磁場と、鉄の表面の磁荷が作る磁場の重ね合わせになるが、コイル電流が作る磁場は、通常小さいので無視できる。次に、偏向電

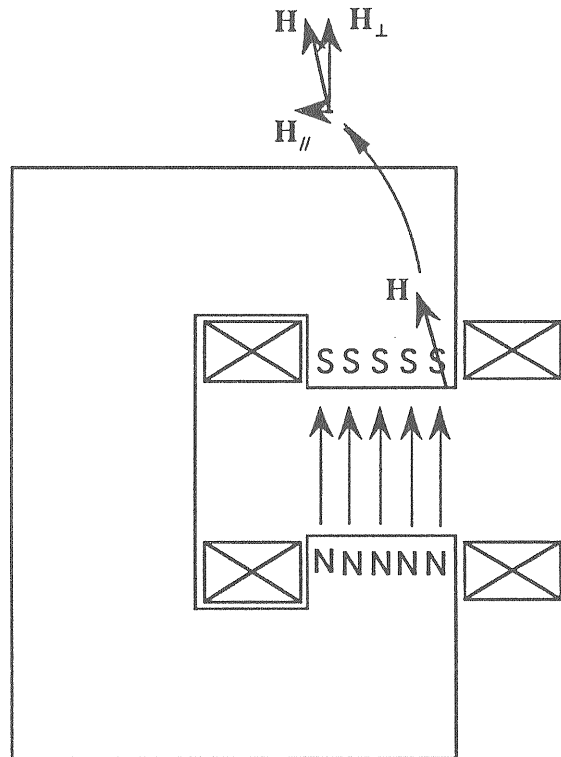


図 2.9

磁石を例にとって、この辺の事情をやや詳しく説明しよう。図2.9に偏向電磁石の断面図を示すが、磁極表面に現れた磁化によって生じる、鉄の表面近くの（鉄中の）磁場 H は、磁極面に垂直に近い。垂直に近いが、完全に垂直ではないので、鉄の表

面近くの磁場を磁極面に垂直な成分 H_{\perp} と磁極面に平行な成分 H_{\parallel} に分けて考えよう。このとき、

$$|H_{\perp}(Fe)| \gg |H_{\parallel}(Fe)| \quad (2.43)$$

となる。さて、今考えた磁場は鉄の中の磁場であったが、磁極面の近くの空気中の磁場がどうなるかを見るために、磁極面での磁場の境界条件を示そう。まず、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、ガウスの定理を用いると、磁極面に垂直な方向の磁束密度は連続になることがわかる。

$$B_{\perp}(Air) = B_{\perp}(Fe) \quad (2.44)$$

(問、これを示せ)。次に、磁極表面には、電流が流れないから、 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ より、ストークスの定理を用いて、磁場の磁極面に平行な成分が連続であることがわかる。

$$H_{\parallel}(Air) = H_{\parallel}(Fe) \quad (2.45)$$

(問、これを示せ)。(2.44)より、鉄中と空気中の透磁率の比を μ_r ($\gg 1$)とすると、

$$H_{\perp}(Air) = \mu_r H_{\perp}(Fe) \quad (2.46)$$

となる。(問、これを示せ)。(2.43)、(2.45)、(2.46)より、磁極表面(近傍)で、空気中の磁場はほとんど磁極と垂直であると思ってよいことがわかる。従って、磁極表面は、等ポテンシャル面であると思ってよい。

さて、電流の存在しない領域では、 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ 即ち、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ が成り立つから、磁場は、スカラー・ポテンシャルより導ける。

$$\mathbf{B} = -\nabla\phi \quad (2.46)$$

また、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、結局、スカラー・ポテンシャルに対して、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.47)$$

という、ラプラス方程式が成り立つことがわかる。上に示したように、磁極表面は、等ポテンシャル面であると思ってよいので、磁極間の磁場は、磁

極表面にあるポテンシャルを与えて、境界値問題としてラプラス方程式(2.47)を解くことにより、求めることができる。

今、ビームの進行方向には磁場成分がないとすると、ラプラス方程式は2次元問題として取り扱うことができる。ビームの進行方向をz軸とする円筒座標を用いると

$$B_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad B_{\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \quad (2.48)$$

となり、また、ラプラス方程式は、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \quad (2.49)$$

となる。(問、これを示せ)。この方程式の解をrだけの関数R(r)と、 θ だけの関数 $\Theta(\theta)$ の積の形の解を持つと仮定すると、

$$\phi = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.50)$$

となる。これを(2.49)に代入して整理すると、

$$\frac{1}{R} \left(r \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d^2R}{dr^2} \right) = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} \quad (2.51)$$

となる。この方程式は、左辺がrのみを含み、右辺は θ のみを含むから、それらが等しいためには、それらは、rと θ を含まない定数である必要がある。この定数を n^2 と置くと、

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -n^2\Theta \quad (2.52)$$

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} = n^2R \quad (2.53)$$

となる。これらの解は、以下のようになる。

(i) $n \neq 0$ のとき

$$\Theta = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \quad (2.54)$$

$$R = c_n r^n + d_n r^{-n} \quad (2.55)$$

ここで、(2.48) で与えられる磁場は、 θ に関して 2π 周期性を持たなければならないから、 n は実数で、しかも整数でなければならない。

(ii) $n=0$ のとき

$$\Theta = a_0 \theta + b_0 \quad (2.56)$$

$$R = c_0 \log r + d_0 \quad (2.57)$$

ここで、やはり (2.48) で与えられる磁場は、 θ に関して 2π 周期性を持たなければならないから、 a_0 か c_0 のどちらかは、ゼロでなければならない。従って、(2.49) の一般解は、

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) (c_n r^n + d_n r^{-n}) \\ + e_0 \log r + f_0 \theta + g_0 \quad (e_0 f_0 = 0) \end{aligned} \quad (2.58)$$

と書ける。今考えている場合は、原点に電流が存在しないから、原点での磁場は有限の値でなければならない。従って、解は、(無意味な定数項を除いて)

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta) \quad (2.59)$$

と書ける (a_n, b_n は適当に定義し直している)。ここで、右辺の第一項をスキュー成分、第二項をノーマル成分と呼ぶ。加速器で用いられる磁場の大部分はノーマル成分から導かれる。以下では、ノーマル成分を ϕ_n 、スキュー成分を ϕ_s と書くことにする。 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ を用いて、直交座標系で、ノーマル成分の最初の三項を書き表すと、

$$\phi_n = b_1 y + b_2 2xy + b_3 (3x^2 y - y^3) + \dots \quad (2.60)$$

となる (問、これを示せ)。これら三項は、後で見ると、それぞれ、偏向電磁石、収束電磁石、六極電磁石の磁場を表している。また、スキュー成分は、

$$\phi_s = a_1 x + a_2 (x^2 - y^2) + a_3 (x^3 - 3xy^2) + \dots \quad (2.61)$$

となる (問、これを示せ)。これらは、後で見ると、垂直偏向電磁石、スキュー収束電磁石、等による磁場を表している。

さて、(2.59) のスカラー・ポテンシャルで、 $n=N$ の場合の磁場を 2N 極磁場というが、それらの内最低次のいくつかの磁場についてみてみよう。磁場は、

$$(B_x, B_y) = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (2.62)$$

より得られる。

二極磁場

(i) ノーマル成分

この場合のスカラー・ポテンシャルは、

$$\phi_{n,1} = b_1 y \quad (2.63)$$

であるから、

$$(B_x, B_y) = (0, -b_1) \quad (2.64)$$

となり、これは通常の偏向電磁石、または、水平ステアリング電磁石による磁場を表している。また、この様な磁場の場合、(2.63) より、 $y = \text{一定}$ 、の面は、等ポテンシャル面になるから、この様な等ポテンシャル面を鉄を使って作って、磁場の境界を区切ってやれば、(2.64) の様な磁場が得られる。図 2.9 に示された、偏向電磁石の場合、二つの磁極はまさにこの様な等ポテンシャル面を作っている。但し、一つ注意すべき事は、原理的には、(2.64) の磁場を得るためには、等ポテンシャル面は、無限に広くなくてはならないのに、今の場合磁極の幅程度しか等ポテンシャル面が広がらない。このため、得られる磁場は、完全には (2.64) のに極磁場にならずに、高次の磁場が混ざってくる。しかし、通常これらの高次の磁場は無視される。

(i) スキュー成分

この場合のスカラー・ポテンシャルは、

$$\phi_{s,1} = a_1 x \quad (2.65)$$

であるから、

$$(B_x, B_y) = (-a_1, 0) \quad (2.66)$$

となり、これは通常の偏向電磁石、または、水平方向のステアリング電磁石を90度回転した電磁石による磁場を表している。これらの電磁石を、垂直偏向電磁石 (Vertical Bending Magnet) や、垂直ステアリング電磁石 (Vertical Steering Magnet)、等と呼ぶ。デザイン軌道が、水平面内に限られているときには、垂直偏向電磁石は、必要ないが、何らかの理由で、デザイン軌道を垂直方向に曲げたい時には、この電磁石が用いられることがある。また、垂直ステアリング電磁石は、日常的に軌道補正に用いられている。さて、この様な磁場の場合、(2.65)より、 $x = \text{一定}$ 、の面が、等ポテンシャル面になるから、この様な等ポテンシャル面を鉄を使って作って、磁場の境界を区切ってやれば、(2.66)の様な磁場が得られる。この様な等ポテンシャル面は、図2.9に示された、偏向電磁石を90度回転してやれば、得ることができる。

四極磁場

(i) ノーマル成分

この場合のスカラ・ポテンシャルは、

$$\phi_{n,2} = 2b_2xy \quad (2.67)$$

であるから、

$$(B_x, B_y) = (-2b_2y, -2b_2x) \quad (2.68)$$

となり、これは通常の収束電磁石による磁場を表している。また、この様な磁場の場合、(2.67)より、 $xy = \text{一定}$ の面が、等ポテンシャル面になるから、この様な等ポテンシャル面を鉄を使って作って、磁場の境界を区切ってやれば、(2.68)の様な磁場が得られる。図2.7に示された、収束電磁石の場合、二つの磁極はこの様な双曲線である必要がある

(i) スキュー成分

この場合のスカラ・ポテンシャルは、

$$\phi_{s,2} = a_2(x^2 - y^2) \quad (2.69)$$

であるから、

$$(B_x, B_y) = (-2a_2x, 2a_2y) \quad (2.70)$$

となり、これがスキュー収束電磁石による磁場を表している。このスキュー収束電磁石は、容易にわかるように、通常の収束電磁石を45度回転させたものである。

六極磁場

(i) ノーマル成分

この場合のスカラ・ポテンシャルは、

$$\phi_{n,3} = b_3(3x^2y - y^3) \quad (2.71)$$

であるから、

$$(B_x, B_y) = (-6b_3xy, -3b_3(x^2 - y^2)) \quad (2.72)$$

となり、(2.38)、(2.39)に示された六極電磁石による磁場が導かれた。また、この様な磁場の場合、(2.71)より、 $3x^2y - y^3 = \text{一定}$ の面が、等ポテンシャル面になるから、六極電磁石の磁極面はこの様に作らなければならない。

また、六極磁場のスキュー成分を用いれば、スキュー六極電磁石による磁場を計算できるが、スキュー六極電磁石は、日常滅多に使われることがないので、ここでは省略する(問、練習問題として、このスキュー六極電磁石の磁場を示せ、また八極電磁石による磁場を計算せよ)。

さて、以上に、(2.59)から(2.61)の磁場の多重極展開に基づくと、偏向電磁石、収束電磁石、六極電磁石等による磁場が、自然に理解できることを示した。これらの多重極展開は、二次元のラプラス方程式を解くことにより得られるものであり、やや面倒なものでもある。これに対し、もっと簡便な磁場展開の方法がある。これは、デザイン軌道付近で、磁場を座標の関数としてテーラー展開する方法である。即ち、水平、垂直の磁場はデザイン軌道からのずれ x, y を用いてテーラー展開し、その一次の項まで残すと、

$$B_x = B_x(0,0) + \frac{\partial B_x}{\partial y} \Big|_{x=y=0} y + \frac{\partial B_x}{\partial x} \Big|_{x=y=0} x \quad (2.73)$$

$$B_y = B_y(0,0) + \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} \Big|_{x=y=0} y \quad (2.74)$$

となる。これらの式の第一項は、二極磁場を、第二項は、四極磁場のノーマル成分を、第三項は、四極磁場のスキュー成分を表す。二極磁場については、(2.73)の第一項は、スキュー二極磁場を(2.74)、ノーマル二極磁場を表している。四極磁場のノーマル成分については、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ より、

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (2.75)$$

が成り立ち(問、これを示せ)、(2.68)の結果とも一致している。このことから、水平方向に収束(発散)の場合、垂直方向には、反対に発散(収束)になることがわかる。四極磁場のスキュー成分については、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial y} \quad (2.76)$$

が成り立ち(問、これを示せ)、(2.70)の結果とも一致している。

2.1.4 電磁石の不完全さ

前節で、各種の電磁石の作り出す磁場がどうなるかを計算した。これらの磁場は、もちろん理想的に電磁石が作られ、しかも、それらの電磁石がデザイン軌道に沿って、理想的に設置された場合であって、実際には、電磁石の製作誤差や、設置誤差などのためにビームが感じる磁場は、設計値通りにはならない。容易に想像されるように、これらの製作誤差と設置誤差は、原理的にある程度避けることができないので、加速器の設計においては、これらの誤差をある程度計算に入れた上でも所定の性能が出せるように考える、あるいは、

逆に所定の性能が出せるためには、これらの誤差をどの程度に押さえなければならぬかを検討する。この様に、電磁石の製作誤差や、設置誤差は、加速器においては、日常茶飯事の、当たり前のものであり(と言っても、これらの誤差をできる限り小さく押さえる努力が無意味だということでは全くない)これらの誤差のビームに対する影響を考えることは、初級の理論といえども、避けることはできない。これらの誤差のビームへの影響については、2.3節である程度詳しく述べる。ここでは、以下に、いくつかの電磁石の製作誤差と設置誤差による磁場分布の変化の表現方法について述べる。

電磁石の製作誤差

一般論としては、電磁石の製作誤差によって生じるものとして、必要とされる次数の磁場成分(四極電磁石なら四極磁場のノーマル成分)の強さの変化(強度誤差)、この磁場の磁場中心のずれ、必要とされる次数以外の磁場成分の発生、の三つが挙げられる。これらの内、磁場中心のずれは、結果として後で述べる電磁石の設置誤差と同じ効果となるので、そこに含めて考えればよい。次に、必要とされる次数以外の磁場成分の発生については、その電磁石に重ねて、別の電磁石があると考えればよい。これらの成分の表現方法としては、発生した磁場の強さに対応して、既に述べたK値や、 K_2 値等を用いればよい。強度誤差についてもこれと同じであるが、この強度誤差の影響は、後でやや詳しく検討するので、その具体的な表し方を述べておく。なお、ここでは電磁石の強度誤差は、製作誤差に由来すると述べたが、これ以外に、電磁石の電源の電流値が、設計どおりになっていない場合にも、同様の強度誤差が生じることに注意。

(1) 偏向電磁石の強度誤差

偏向電磁石の、磁場のデザイン値からのずれを ΔB_y とすると、この偏向電磁石による軌道半径の逆数のデザイン値からのずれは、

$$\Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\Delta B_y}{B\rho} \quad (2.77)$$

となり、この量で偏向電磁石の強度誤差を表す。この様なタイプの誤差を、本テキストでは、(一般的な用語ではないが)Field strength errorと呼ぶことにする。

(2) 収束電磁石の強度誤差

収束電磁石の強度誤差は、gradient error とも呼ばれ、その Field gradient のデザイン値からのずれを、 $\Delta B'$ とすると、その K 値のデザイン値からのずれは、

$$\Delta K = \frac{\Delta B'}{B\rho} \quad (2.78)$$

となり、この ΔK で、収束電磁石の強度誤差を表す。

以上、偏向電磁石と収束電磁石の強度誤差の表し方を述べたが、六極電磁石についても同様に表せる(問、どういうふうに表せるか述べよ)。

電磁石の設置誤差

一般的にいうと、電磁石を剛体と考えると、その配置は、6個のパラメータで表せる。よく用いられるパラメータとしては、剛体の重心の位置を示す3個のパラメータと、剛体に固定した(直交)座標軸と実験室系の(直交)座標軸の相対関係を表す3個のオイラー角と呼ばれるパラメータが挙げられる。以下では、これら全ての方向の設置誤差を考えるのではなくて、比較的加速器の性能低下につながりやすい設置誤差についてのみ考えることにする。まず、電磁石の重心の設置誤差については、水平、垂直、ビームの進行方向の3方向の設置誤差が考えられるが、これらの内、ビームの進行方向の設置誤差は、比較的その影響が小さいので、以下では無視することにする。次に、電磁石の向きを設置誤差については、ビームの進行方向を軸として、その回りの回転のみを考えることにする。以上をまとめると、以下で考える設置誤差は、水平、垂直方向の(重心位置の)設置誤差(以下ではこれを単に設置誤差と呼ぶことにする)と、ビームの進行方向を回転軸とする回転誤差(以下ではこれを単に回転誤差と呼ぶことにする)の二つである。

(1) 偏向電磁石

偏向電磁石の場合、明らかに、(上に述べた狭い意味での)設置誤差は影響を与えない(問、これは何故か?)。従って、この場合回転誤差のみを考えればよい。この回転誤差があると、設計上ゼロであるはずの水平方向の磁場 B_x が発生する。回転誤差の回転角を $\Delta\theta_B$ とすると、水平方向に発

生する磁場は、 $\Delta\theta_B$ が小さいとして、

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho_y}\right) = \frac{\Delta B_x}{B\rho} = \frac{B_y\Delta\theta_B}{B_y\rho_x} = \frac{\Delta\theta_B}{\rho_x} \quad (2.79)$$

と表される(問、これを示せ)。ここで、 ρ_x は、

本来の(水平方向の)軌道半径、 ρ_y は、本来無限大であるはずの垂直方向の軌道半径が有限の値を持つことを示す。この様に、偏向電磁石の回転誤差により、水平方向の Field strength error が生じる。この水平方向の磁場の発生に伴って、垂直方向の磁場も当然変化するが、 $\Delta\theta_B$ が小さいとすると、磁場の変化は、この $\Delta\theta_B$ の二次の微小量になる(問、これを示せ)ので、ここでは無視することにする。

(2) 収束電磁石

・設置誤差

収束電磁石は、前に述べたように、デザイン軌道に沿って、磁場中心が、デザイン軌道と一致するように設置される。収束電磁石の磁場中心では、実は、磁場はゼロであり、デザイン軌道上を運動する粒子に対しては、収束電磁石は作用を及ぼさない。しかし、設置誤差があると、本来磁場がゼロであるはずのデザイン軌道上に磁場が存在することになる。収束電磁石の磁場中心のデザイン軌道からの水平、垂直方向の設置誤差をそれぞれ

Δx_Q 、 Δy_Q とすると、この収束電磁石による水平及び垂直方向の磁場は、(2.33)、(2.34)、(2.35)より、それぞれ、

$$B_x = B'(y - \Delta y_Q) \quad (2.80)$$

$$B_y = B'(x - \Delta x_Q) \quad (2.81)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、 x, y は、2.1.2節で述べたデザイン軌道から計った、水平、垂直方向の座標である。これらの式と、(2.33)、

(2.34)を比べると容易にわかるように、収束電磁石の設置誤差により、収束電磁石本来の粒子の位置の変位に比例する磁場に加えて、 $-B'\Delta y_Q$

および $-B'\Delta x_Q$ という constant な磁場が加わったと見ることができる。即ち、収束電磁石の設置誤差により、Field strength error が生じるとみなすことができる。この誤差磁場の強さは、水平方向、垂

直方向のそれぞれについて

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho_x}\right) = \frac{\Delta B_y}{B\rho} = \frac{-B'\Delta x_Q}{B\rho} = -K\Delta x_Q \quad (2.82)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho_y}\right) = \frac{\Delta B_x}{B\rho} = \frac{-B'\Delta y_Q}{B\rho} = -K\Delta y_Q \quad (2.83)$$

と表現することができる。

・回転誤差

収束電磁石が、ビームの進行方向を回転軸として、回転して設置された場合を考える。図 2.10 に座標軸の取り方を示す。収束電磁石に固定した \tilde{x} - \tilde{y} 座標系での単位ベクトル \tilde{i}, \tilde{j} を元の座標系での単位ベクトルで書くと

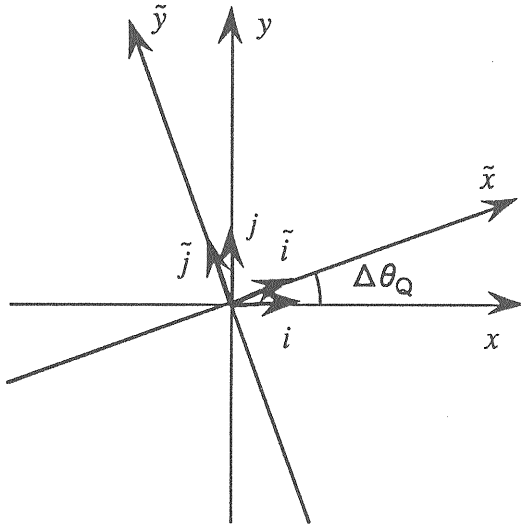


図 2.10

$$\tilde{i} = \cos\Delta\theta_Q i + \sin\Delta\theta_Q j \quad (2.84)$$

$$\tilde{j} = -\sin\Delta\theta_Q i + \cos\Delta\theta_Q j \quad (2.85)$$

となる (問、これを示せ)。このことから、あるベクトル \mathbf{V} の成分表現の二つの座標系での関係は、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = M_Q \begin{pmatrix} \tilde{v}_x \\ \tilde{v}_y \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

$$M_Q = \begin{pmatrix} \cos\Delta\theta_Q & -\sin\Delta\theta_Q \\ \sin\Delta\theta_Q & \cos\Delta\theta_Q \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

となる (問、これを示せ)。収束電磁石による磁場の成分を回転した座標系で書くと、(2.33)、(2.34)、(2.35) より

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'y \\ B'x \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

となる。このベクトルの元の座標系での成分は、(2.86) より、

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = M_Q \begin{pmatrix} \tilde{B}_x \\ \tilde{B}_y \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

となる。また、位置ベクトルも (2.87) の行列で変換される。即ち、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_Q \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

または、

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = M_Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

となる。ここで、 M_Q^{-1} は、 M_Q の逆行列で、

$$M_Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\theta_Q & \sin\Delta\theta_Q \\ -\sin\Delta\theta_Q & \cos\Delta\theta_Q \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

である。(問、こうなることを示せ)。(2.88)、(2.89)、(2.91)、(2.92) を組み合わせて、結局

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'\cos 2\Delta\theta_Q y - B'\sin 2\Delta\theta_Q x \\ B'\cos 2\Delta\theta_Q x + B'\sin 2\Delta\theta_Q y \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

が得られる。回転角 $\Delta\theta_Q$ が微小量だとして、その一次の項まで取ると、

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'_Q y - 2B'\Delta\theta_Q x \\ B'_Q x + 2B'\Delta\theta_Q y \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

となる。この式と、(2.33)、(2.34) を比

べると容易にわかるように、収束電磁石の回転誤差により、収束電磁石本来のノーマル成分の磁場に加えて (2.70) 式で示されるスキュー四極成分が生じることがわかる。この様な磁場誤差を、本テキストでは、(一般的な用語ではないが) Skew gradient error と呼ぶことにする。ここで、この Skew gradient error の大きさを表現する方法として、まずスキュー収束電磁石についての K 値を導入しよう。即ち、(2.35)、(2.36) と同様に、

$$K_{\text{skew}} = \frac{B'_{\text{skew}}}{B\rho} \quad (2.95)$$

$$B'_{\text{skew}} = \left. \frac{\partial B_x}{\partial x} \right|_{x=y=0} \quad (2.96)$$

で定義される K_{skew} という量で、スキュー収束電磁石の強さを表す。こうすると、(2.70) より、スキュー収束電磁石の磁場は、

$$(B_x, B_y) = (B'_{\text{skew}} x, -B'_{\text{skew}} y) \quad (2.97)$$

となり、(2.94) の誤差磁場をスキュー収束電磁石の K_{skew} として表すと、

$$\Delta K_{\text{skew}} = -2\Delta\theta_Q K \quad (2.98)$$

となることがわかる (問、これを示せ)。ここで、K は、誤差がない場合の収束電磁石の K 値である。

(3) 六極電磁石

六極電磁石については、設置誤差のみを考え、回転誤差はここでは考えないことにする。六極電磁石の磁場中心のデザイン軌道からの水平、垂直方向の設置誤差をそれぞれ Δx_s 、 Δy_s とすると、この六極電磁石による水平及び垂直方向の磁場は、(2.38)、(2.39)、(2.40) より、それぞれ、

$$B_x = B''xy + B''(-\Delta y_s x - \Delta x_s y) \quad (2.99)$$

$$B_y = \frac{1}{2} B''(x^2 - y^2) + B''(\Delta y_s y - \Delta x_s x) \quad (2.100)$$

となる。ここで、 Δx_s 、 Δy_s は、微小量であると

仮定して、これらについて二次の微小量は無視した (問、これらの式を導け)。さて、これらの式からわかるように、六極電磁石の設置誤差により、本来の六極磁場に加えて、デザイン軌道上に、四極磁場が発生するとみなせることがわかる。即ち、これらの式より、水平方向の設置誤差によって、ノーマル成分の四極磁場が、また、垂直方向の設置誤差により、スキュー成分の四極磁場が生じるとみなせることがわかる (問、これを示せ)。これらの Gradient error 及び Skew gradient error の強さは、

$$\Delta K = -K_2 \Delta x_s \quad (2.101)$$

$$\Delta K_{\text{skew}} = -K_2 \Delta y_s \quad (2.102)$$

で表すことができる (問、これらを示せ)。ここで、 K_2 は、(2.41) で定義される六極電磁石の K_2 値である。

以上に述べた誤差は、すべて、Field strength error, Gradient error または、Skew gradient error のどれかに分類することができる。これらの誤差がビームにどのような影響を与えるかは、後で詳しく述べていくが、ここでは、読者にある程度のイメージを与えるために、先走って、ごく簡単にどういう影響があるかを述べておく。

まず、Field strength error であるが、この誤差は基本的には、偏向電磁石の強さの誤差である。偏向電磁石の主な目的は、ビームを steer して、概ね丸い閉じたデザイン軌道上を走らせることであった。Field strength error により、デザイン軌道がもはや閉軌道 (Closed Orbit) ではなくなる。(閉軌道とは、ある粒子が、一度その軌道上を走れば、永遠に同じ軌道上を走り続けるような軌道のことをいう。) これは、デザイン軌道を走り続けようとしても、Field strength error による余計な磁場のために、電子の運動が乱されることから理解できるであろう。さて、本テキストではその証明を与えないが、デザイン軌道が閉軌道でなくなっても、ほとんどどのような場合でも別の閉軌道が存在することが知られている (このことに関しては、参考文献 [2]、[9] を参照)。従って、Field strength error の影響は、ビームの Steering Error による閉軌道のずれ (Closed Orbit Distortion, COD) であると言える。このように、Field strength error のビームへの影響は、一言でいうと、Steering error であるとも言える。こ

のSteering errorによるCODの発生については、2.3.1節で述べる。

次に、Gradient errorであるが、この誤差は基本的には、収束電磁石の強さの誤差である。収束電磁石の主な目的は、ビームをFocusしてデザイン軌道の近傍に束縛することであった。この意味で、Gradient errorのビームへの影響は、Focusing errorであると言える。このFocusing errorにより、何が起きるかは、2.3.2節で述べる。

次に、Skew gradient errorであるが、この誤差のビームに対する影響は、水平方向の運動と垂直方向の運動のCouplingであると言える。即ち、スクュー四極磁場により、水平（垂直）方向に受けるローレンツ力が、垂直（水平）方向の軌道のずれに依存することになり、水平方向の運動と垂直方向の運動が独立ではなくなり、運動のCouplingが生じる。このCouplingにより何が起きるかは、2.3.5節で簡単に述べる。

2.1.5 運動方程式の導出

さて、準備が非常に長くなったが、以下で、Transverse方向のビームの運動を支配する運動方程式を導こう。

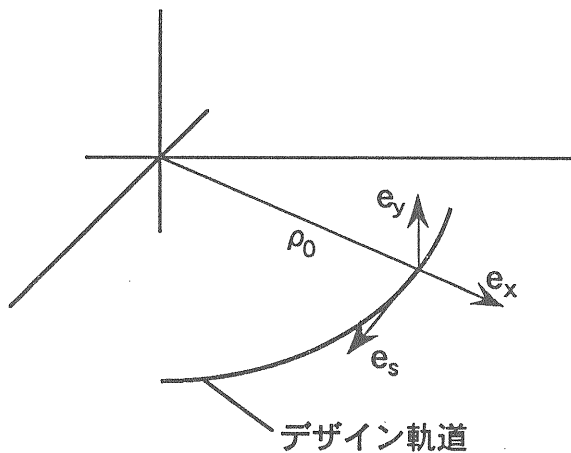


図 2.11

まず、基礎になる方程式は、(2.11)の形のニュートン方程式である。(2.11)で、粒子の速度 \mathbf{v} を位置ベクトル \mathbf{r} の微分で表すと

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \ddot{\mathbf{r}} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.103)$$

となる。ここで、質量 m は、粒子の静止質量ではなく、(2.2)で定義されるように、静止質量にLorentz factorをかけたものである。

まず、左辺を変形していこう。電子の運動を記述する座標は、2.1.2節で述べたように、そのデザイン軌道からのずれである。そして、このデザイン軌道は、偏向電磁石の外では、直線であるが、偏向電磁石の中では、円弧を描く。従って、偏向電磁石の中での運動方程式は、通常の座標系でのものとやや異なり、注意を要する。図2.11に、偏向電磁石の中での座標軸の取り方を示す。図に示されているように電子の位置からデザイン軌道におろした垂線の足に直交する三つの単位ベクトルを取る。ここでは、デザイン軌道がある平面上にあると仮定されており、この平面を $y=0$ に取る。(2.103)の位置ベクトルの原点を、デザイン軌道の円弧の中心に取る。この様になると、位置ベクトル \mathbf{r} は、

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (2.104)$$

と表される（問、これを示せ）。ここで、 $R = \rho_0 + x$ であり、 ρ_0 は、デザイン軌道の円弧の曲率半径である。次に、位置ベクトル \mathbf{r} の時間微分を求めよう。まず、

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{e}_x + R\dot{\mathbf{e}}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y \quad (2.105)$$

と書ける。ここで、水平方向の単位ベクトルは、時間とともにその方向を変えることに注意しよう。この水平方向の単位ベクトルの時間微分を取ると、接線方向のベクトルが得られる。（位置ベクトルの微分にこの項が加わるというのが、回転する座標系において遠心力の項が生じる原因である。）このあたりの事情を図2.12に示す。図からわかるように、

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\theta}\mathbf{e}_s \quad (2.106)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_s}{R} \quad (2.106a)$$

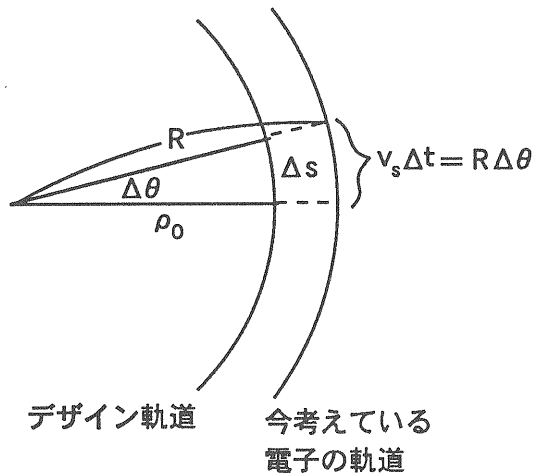
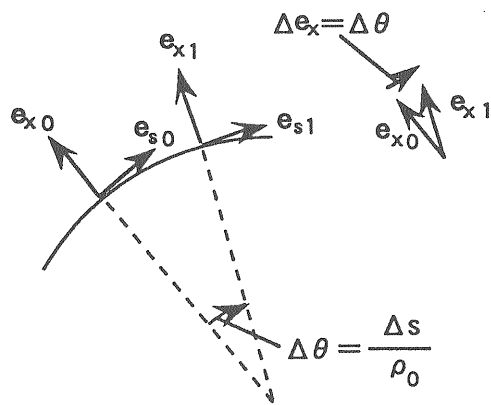


図 2.12

となる (問、これを示せ)。ここで、 v_s は、接線方向の粒子の速度である。これを (2.105) に代入して、

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{e}_x + R\dot{\theta}\mathbf{e}_s + \dot{y}\mathbf{e}_y \quad (2.107)$$

となる。これをもう一度微分すると、

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{R}\mathbf{e}_x + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\mathbf{e}_s + R\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_s + \ddot{y}\mathbf{e}_y \quad (2.108)$$

となるが、 \mathbf{e}_x の時間微分を求めたときと同様にし、

$$\dot{\mathbf{e}}_s = -\dot{\theta}\mathbf{e}_x \quad (2.109)$$

となる (問、これを示せ) から、結局、

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_x + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta})\mathbf{e}_s + \ddot{y}\mathbf{e}_y \quad (2.110)$$

を得る (問、これを示せ)。

ここで、独立変数を時間 t から、距離 s に変更することを考えよう。こうするのは、通常、加速器の各要素、特に電磁石が加速器の場所の関数で与えられるためである。まず、

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\rho_0 d\theta}{dt} = \frac{\rho_0}{R} v_s \quad (2.111)$$

となる (問、これを示せ)。厳密にいうと、(2.111) は、 $x' (= dx/ds)$ (及び、 $y' (= dy/ds)$) についての二次の微小量を見捨てた近似の上に成り立つ式である (問、このことを示せ)。(本テキストでは詳しく述べないが) 通常、 x' は、 x/ρ_0 と同程度の微小量であると考えられるから、 x/ρ_0 の一次まで取る近似で、この式は成り立つ。この式から、

$$\frac{d}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} = \frac{\rho_0}{R} v_s \frac{d}{ds} \quad (2.112)$$

が得られる。これをもう一度微分して、

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} = \left(\frac{\rho_0}{R} v_s\right)^2 \frac{d^2}{ds^2} \quad (2.113)$$

を得る。ここで、

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 0 \quad (2.114)$$

という近似を用いた。この近似も、最終的な運動方程式において、 x' 、 y' の二次の微小量を見捨てる近似に当たる。

以上のことより、(2.103) の左辺の x 及び y 成分は、それぞれ

$$m \left[\left(v_s \frac{\rho_0}{R} \right)^2 \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{v_s^2}{R} \right] \quad (2.115)$$

$$m\left(v_s \frac{\rho_0}{R}\right)^2 \frac{d^2 y}{ds^2} \quad (2.116)$$

となる (問、これを示せ)。

次に、(2.103) の右辺がどうなるかを見てみよう。まず、ここでは、今まで仮定してきた通り、磁場はビームの進行方向に垂直な方向のみにあり、進行方向に平行な成分はないと仮定する。こうすると、(2.103) の右辺の x 及び y 成分は、それぞれ、

$$-ev_s B_y \quad (2.117)$$

$$ev_s B_x \quad (2.118)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、粒子の電荷 q は、電子の電荷 e に置き換えた。(2.115) ~ (2.118) 及び $R = \rho + x$ を用いると

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho_0 + x}{\rho_0^2} = -\frac{eB_y}{mv_s} \left(1 + \frac{x}{\rho_0}\right)^2 \quad (2.119)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{eB_x}{mv_s} \left(1 + \frac{x}{\rho_0}\right)^2 \quad (2.120)$$

となる (問、これを示せ)。次に、ここで、 v_s を粒子の速度の絶対値 v で置き換えよう。これも、 x' 、 y' の二次の微小量を無視する近似に当たる (問、これを示せ)。こうすると (2.28) 式を用いて、(2.119) と (2.120) は、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho_0 + x}{\rho_0^2} = -\frac{B_y}{B\rho} \left(1 + \frac{x}{\rho_0}\right)^2 \quad (2.121)$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{B_x}{B\rho} \left(1 + \frac{x}{\rho_0}\right)^2 \quad (2.122)$$

となる。ここで、 ρ と ρ_0 の違いに注意しよう。

ρ_0 がデザイン軌道の軌道半径であるのに対して、 ρ は、今考えている粒子の軌道半径である。即ち、今考えている粒子のエネルギーが、デザイン通りであれば、これらは一致するが、このエネルギーが nominal な値からずれている場合、これらは一致

しない。

さて、ここでまず、水平方向の運動方程式 (2.121) を考えよう。ここに現れる磁場をデザイン軌道の回りにテーラー展開した、(2.74) 式を用いよう。

$$B_y = B_y(0,0) + \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} \Big|_{x=y=0} y$$

ここで、まずエラーのない理想的な場合を考える。即ち、粒子のエネルギーは、デザイン値通りであり、また磁場の二極成分、ノーマル四極成分は、設計通りであり、さらに、スキュー四極成分はゼロであると仮定しよう。こういう条件の基で、(2.121) を展開し、 x の一次の項まで取ると

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + K(s) \right] x = 0 \quad (2.123)$$

となる。ここで、 K は、nominal エネルギーでの値である。即ち、

$$K = \frac{1}{B\rho_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0} \quad (2.124)$$

である (問、これらを示せ)。次に、垂直方向の方程式 (2.122) について考える。磁場は、(2.73) を用いて、

$$B_x = B_x(0,0) + \frac{\partial B_x}{\partial y} \Big|_{x=y=0} y + \frac{\partial B_x}{\partial x} \Big|_{x=y=0} x$$

となるが、ここでもまずエラーのない場合を考えよう。即ち、粒子のエネルギーは、デザイン値通りであり、また磁場の (スキュー) 二極成分は存在せず、ノーマル四極成分は、設計通りであり、さらに、スキュー四極成分はゼロであると仮定しよう。こういう条件の基で、(2.122) を展開し、 y の一次の項まで取ると

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - K(s)y = 0 \quad (2.125)$$

となる。

(2.123)、(2.125)は、エラーのない場合の、電子の Transverse 方向（電子の進行方向に垂直な方向）の運動を決定する基礎方程式である。これら二つの方程式を見比べて、違いがあるのは、水平方向の方程式(2.124)には、 $1/\rho_0^2$ に比例する項があるのに対して、垂直方向の方程式には、この項がないことである。この項は、遠心力からくる項であり、この項が存在するために、電子は、水平方向に収束力を受ける。このため、2.1.3節に示したように、収束電磁石がない場合でも、水平方向の運動は、安定になるのである。垂直方向には、この項がないため、収束電磁石がないと運動は安定にならない。(2.123)と(2.125)を見比べて、もう一つわかることは、Kの項の符号が違うことである。このことは、収束電磁石が、水平方向に収束（発散）の場合、垂直方向には、逆の発散（収束）であるという事を表している。

次に、エラーが存在する、一般の場合の運動方程式を導こう。ここで考えるエラーとは、主に次の4つのものである。

- (1) Field strength error (Steering error)
 - (2) Gradient error (Focusing error)
 - (3) Skew gradient error (Skew focusing error)
 - (4) Momentum Deviation (エネルギーのずれ)
- まず、磁場にエラーがあるときの、(2.73)、(2.74)の展開式は、

$$B_y = B_{y0} + \Delta B_y + (B' + \Delta B')x - \Delta B'_{skew}y \quad (2.126)$$

$$B_x = \Delta B_x + (B' + \Delta B')y + \Delta B'_{skew}x \quad (2.127)$$

となる。ここで、 Δ が付いたものが誤差磁場で、 B' は(2.35)で、 B'_{skew} は(2.96)で定義されている。また、電子の運動量 p が、そのデザイン値 p_0 から、 Δp だけずれといるとき、

$$B\rho = (1 + \Delta p/p_0)B\rho_0 \quad (2.128)$$

となる(問、これを示せ)。(2.126)、(2.127)、(2.128)を(2.121)、(2.122)に代入し、 Δ の付いた項と、 x, y の一次の項まで取ることにより、次の運動方程式を得る(Δ の付いた項と $x/\rho, y/\rho$ のかけ算の項も無視した)。(問、以下の式を導け)

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)K(s) \right]x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} - \Delta \left(\frac{1}{\rho_x} \right) - \Delta K_x + \Delta K_{skew}y \quad (2.129)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)K(s)y = \Delta \left(\frac{1}{\rho_y} \right) + \Delta K_y + \Delta K_{skew}x \quad (2.130)$$

ここで、 $\Delta(1/\rho)$ は、以前に、定義されたように、Field strength error を表す。即ち、

$$\Delta \left(\frac{1}{\rho_x} \right) = \frac{\Delta B_y}{B\rho_0} \quad (2.131)$$

$$\Delta \left(\frac{1}{\rho_y} \right) = \frac{\Delta B_x}{B\rho_0} \quad (2.132)$$

である。(2.129)、(2.130)は、エラーを含めた、一般の場合の運動方程式であるが、これらの方程式では、 x, y の二次の以上非線型項は、無視されている。ところが、実際のマシンでは、この非線型項の影響を無視することはできず、特に六極電磁石は、加速器の運転にとって不可欠のものである。この六極電磁石の影響は、(2.38)(2.39)の磁場を、(2.126)、(2.127)に加えることにより、簡単に取り込むことができる。その結果、(2.129)の右辺に

$$-\frac{1}{2}K_2(x^2 - y^2) \quad (2.133)$$

の項が、(2.130)の右辺に

$$K_2xy \quad (2.134)$$

の項が、加わることになる(問、これらを示せ)。本テキストでは、通常やられる様に、非線型項としては、六極電磁石によるもののみを扱うことにする。但し、(2.129)、(2.130)を導く

ときに無視した、 x, y, x', y' に関する二次の項があることも忘れてはならない。これらの項は、(2.133)、(2.133)に比べて、一般に十分に小さい。このことに関して、これらの近似を行わない厳密な方程式の形が、参考文献[2]に与えられているので、厳密な議論を好まれる読者は、これを参照していただきたい。また、このテキストでは扱わないが、八極電磁石の影響も、その磁場の形を(2.59)のポテンシャルから求めて、(2.126)、(2.127)に加えることにより、方程式に簡単に取り込むことができる。

さて、このようにして基礎的な方程式が導かれたが、次節の2.2では、(2.123)と(2.125)に基づいてエラーのない理想的な場合の運動を扱う。エラーが存在する場合の理想的な運動からのずれは、2.3節で扱う。

2.2 理想的なベータatron振動

この節では、前節で述べたエラーがない場合の理想的な場合の運動を考える。基礎となる方程式の形をもう一度書き下しておく、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2(s)} + K(s) \right] x = 0 \quad (2.123)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - K(s)y = 0 \quad (2.125)$$

であった。ここで、 ρ_0 は、デザイン軌道の曲率半径であり、偏向電磁石中では、ある一定の値をとり、それ以外の場所では無限大である。また、 K は収束電磁石の中では、ある一定の値をとり、それ以外の場所ではゼロである。また、加速器の一周の長さ(周長)を C とすると、当然

$$K(s+C) = K(s) \quad (2.135)$$

$$\rho_0(s+C) = \rho_0(s) \quad (2.136)$$

という周期性がある。また、(2.123)と(2.125)をまとめて表すために、本テキストでは、

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho_0^2(s)} + K(s) \quad (2.137)$$

$$K_y(s) = -K(s) \quad (2.138)$$

という記号を用いることにする。

加速器の中に、偏向電磁石と収束電磁石をどう配置するかは、もちろん加速器のデザインによるのであるが、もっとも普通の典型的な配置法として、図2.13に示すFODOセルと呼ばれるものを考えよう。ここで、QFは水平方向に収束の収束電磁石(Focusing Quadrupole Magnet)であり、QDは水平方向に発散の収束電磁石(Defocusing Quadrupole Magnet)である。また、BMは、偏向電磁石(Bending Magnet)である。ここで、セルという言葉を使ったが、これは、これを一つの単位として、同じ配置が繰り返し続くことを想定した言葉である。通常の加速器の、特に曲線部は、このようなセルが繰り返し続くような構造になっていることが多い。

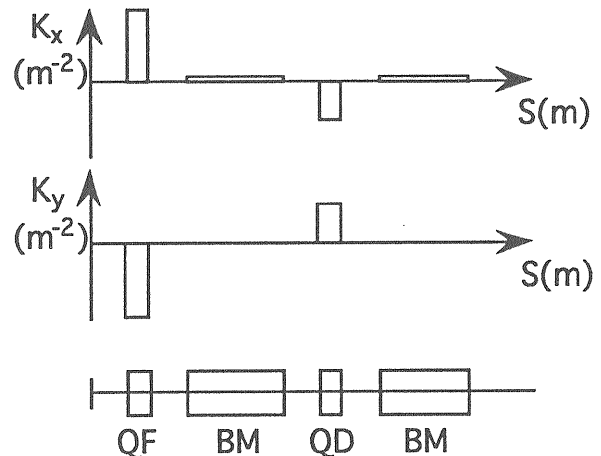


図 2.13

さて、図2.13に概念的に示されているように、偏向電磁石による収束力(収束力は K 値に比例すると考えてよい)は、一般に収束電磁石によるそれに比べてかなり小さい。例えば、トリスタンMRでは、 ρ_0 は、246.5 m であるので、 $1/\rho_0^2$ は、約 $1.6 \times 10^{-5} / \text{m}^2$ になる。これに対して、収束電磁石の K 値の典型的な値は、 $1.6 \times 10^{-1} / \text{m}^2$ 程度であり、偏向電磁石による収束力の方が、収束電磁石のそれに比べて段違いに小さい。

ρ_0 が小さいマシンでは、この差はかなり縮まるが、それでも1桁以上偏向電磁石の収束力の方が弱いことがほとんどである。第1章で述べた、弱収束のマシンとは、基本的には、この偏向電磁石による収束力を利用したものである。収束電磁石を用いた、強収束のマシンに比べて、ビームに対する収束力は、かなり弱くなるわけである。

また、図2.13からわかるように、場所の関数としてK値を見た場合、ある区間ごとに一定の値を取ることがわかる。そして、K値が一定の場合、運動方程式は、単なる調和振動子の方程式になることに注意しよう。

以下に、(2.123)、(2.125)を具体的に解く方法について述べる。この二つの方程式は、ほぼ同じ形をしているので、(2.137)、(2.138)より、 $z=x$ または、 $z=y$ として

$$\frac{d^2z}{ds^2} + K_z(s)z = 0 \quad (2.139)$$

又は、

$$\boxed{z'' + K_z(s)z = 0} \quad (2.139a)$$

の形に代表させて、以下では取り扱うことにする。なお、このように、以下では、 s による微分を表すときに、プライムの記号を用いる。(2.135)の周期条件がある場合に、(2.139)の型の方程式をヒルの方程式 (Hill's Equation) と呼ぶ。

(この名前は、19世紀後半に、G.W.Hillが、月の軌道運動を調べるために、この型の方程式を研究したことに由来するということである。)

2.2.1 運動方程式の解法 (1)

- トランスファー・マトリックスを用いたアプローチ

トランスファー・マトリックスの導入

(2.139)は、ニュートン方程式と同様に、二階の線形微分方程式であり、初期条件として、 $s = s_0$ において、 $z(s_0)$ と $z'(s_0)$ を与えれば、それ以降の運動は、運動方程式より決定される。今、特殊な初期条件として、

$$(z(s_0), z'(s_0)) = (1, 0) \quad (2.140)$$

$$(z(s_0), z'(s_0)) = (0, 1) \quad (2.141)$$

を考えよう。今、仮にこれらの初期条件に対する(2.139)の解が求められたとして、これらの解を、 $C(s)$ 、 $S(s)$ と書くことにしよう。そうすると、一般解は、これら二つの解の重ね合わせで表現できる。即ち、

$$z(s) = z_0 C(s) + z'_0 S(s) \quad (2.142)$$

$$z'(s) = z_0 C'(s) + z'_0 S'(s) \quad (2.143)$$

が、一般解になる(問、これを示せ)。ここで、 z_0 および z'_0 は、任意の定数である。逆から考えると、(2.140)と(2.141)より、 $z(s_0) = z_0$ 、 $z'(s_0) = z'_0$ であるから、(2.142)は、初期条件、

$$(z(s_0), z'(s_0)) = (z_0, z'_0) \quad (2.144)$$

に対する解になっていることがわかる(問、これを示せ)。(2.142)、(2.143)をマトリックスを用いて表現すると、

$$\begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_1) & S(s_1) \\ C'(s_1) & S'(s_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \end{pmatrix} \quad (2.145)$$

となる。右辺のマトリックスは、 z と z' の $s = s_0$ での値と、 $s = s_1$ での値を結び付けるマトリックスで、輸送行列 (トランスファー・マトリックス、Transfer Matrix) と呼ばれるものである。このように、 z と z' の変換がマトリックスを用いて表現できるということについては、方程式(2.139)が、線形であるということが本質的であり、非線形項が存在する場合、このようにトランスファー・マトリックスを用いて、 z と z' の変換を表すことはできない。

このトランスファー・マトリックスについて、一般的で、重要な性質を導いておこう。(2.145)のトランスファー・マトリックスを M_{01} と置いて、その行列式 Y を考えよう。即ち、

$$Y = \det M_{01} = CS' - SC' \quad (2.146)$$

である。これを、 s で微分すると、

$$\frac{dY}{ds} = CS'' - SC'' = C(-K_z S) - S(-K_z C) = 0 \quad (2.147)$$

となり（問、これを示せ）行列式は、場所によらず一定であることがわかる。しかも、 $s = s_0$ での Y は、1であるから、結局常に、

$$\boxed{\det M_{01} = 1} \quad (2.148)$$

であることが証明される。

位相平面の導入

この式の意味を説明する前に、まず位相平面というものを導入しよう。ある電子の $s = s_0$ での状態は、 $(z(s_0), z'(s_0))$ を与えることにより表現される。従って、図2.14のように、 $z-z'$ 平面を考えると、電子のある時点での状態は、この平面の

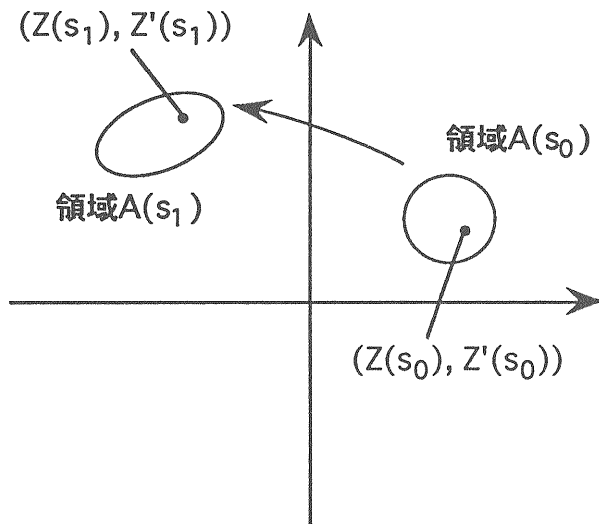


図 2.14

ある一点で表すことができる。このような平面を、位相平面という。ここでは、一次元の運動を考えているので、位相平面であるが、一般には、運動は三次元空間で考えなければならないから、この場合、六次元の位相空間（Phase Space）内の一点

で、電子の状態は記述できることになる。

さて、一次元の話に戻って、先に述べたトランスファー・マトリックスは、この位相平面上のある点を別の点に移す変換を与えると考えることができる。同様に、 $s = s_0$ において電子が連続的に分布しているある領域 $A(s_0)$ は、トランスファー・マトリックス M_{01} により、別の領域 $A(s_1)$ に移される。この場合、一般に、領域の形は変化するが、その面積は保存する。以下にこれを証明しよう。 $s = s_0$ における面積要素と $s = s_1$ におけるそれとの関係は、ヤコビアンを用いて、

$$dz(s_0)dz'(s_0) = |J|dz(s_1)dz'(s_1) \quad (2.149)$$

$$J = \frac{\partial(z(s_1), z'(s_1))}{\partial(z(s_0), z'(s_0))} = \frac{\partial z(s_1)}{\partial z(s_0)} \frac{\partial z'(s_1)}{\partial z'(s_0)} - \frac{\partial z(s_1)}{\partial z'(s_0)} \frac{\partial z'(s_1)}{\partial z(s_0)} \quad (2.150)$$

となることが知られている。トランスファー・マトリックス M_{01} の (2.148) の性質を用いると、ヤコビアン $J=1$ であることを示すことができる（問、これを示せ）。従って、トランスファー・マトリックスによる変換では、位相平面の面積が不変に保たれることがわかった。ここで述べたことは、Liouville の定理として、知られている定理の特殊な場合に当たる。Liouville の定理とは、「保存系で、ポテンシャルエネルギーが時間をあらわに含まない力学系において、その運動を位相空間で表現すると、各位相点は時間と共に（運動方程式にしたがって）移動するが、この際、位相空間中に任意の閉曲面を考えると、運動と共にこの面は移るが、その中に含まれる体積は不変である」ことを主張するものである。その一般的な証明は力学の教科書に譲る。

区分的に解を積み重ねる方法

$s = s_0$ から、 $s = s_1$ までのトランスファー・マトリックス M_{01} と $s = s_1$ から、 $s = s_2$ までのトランスファー・マトリックス M_{12} が知られているとき、 $s = s_0$ から、 $s = s_2$ までのトランスファー・マトリックス M_{02} は、

$$M_{02} = M_{12}M_{01} \quad (2.151)$$

の様に、単に二つのマトリックスの掛け算になる(問、これを示せ)。従って、そのトランスファー・マトリックスが知られている区間が連続して存在する場合、その連続する区間の最初の区間の始めの場所から、最後の区間の最後の場所までのトランスファー・マトリックスは、やはり、トランスファー・マトリックスの掛け算で求めることができる。このことが、とりわけ重要なのは、(2.139)の解を区分的に求めることは非常に容易いからである。即ち、図2.13に示したように、 K_z の値は、区分的に一定で、正の値、負の値、ゼロのどれかであり、どの場合も解を求めることは、容易である。以下に、これら三つの場合のトランスファー・マトリックスを書き下しておく。

(1) $K_z = 0$ の場合

これは、偏向電磁石も、収束電磁石も存在しない自由空間 (Drift Space) の場合に当たる。この場合は、運動方程式を解くまでもなく、そのトランスファー・マトリックスは、Drift Spaceの長さLを用いて、

$$M_{\text{Drift}} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.152)$$

となる(問、これを示せ)。

(2) $K_z > 0$ の場合

これは、収束に働く収束電磁石 (Focusing Quadrupole Magnet)、又は、偏向電磁石の場合である。この場合の方程式は、調和振動子のものと同じであり、簡単に解くことができる。この方程式を、初期条件(2.140)、(2.141)の下に解いて、トランスファー・マトリックスを求めると、

$$M_{\text{QF}} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K}L) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}L) \\ -\sqrt{K} \sin(\sqrt{K}L) & \cos(\sqrt{K}L) \end{pmatrix} \quad (2.153)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、Lは、電磁石の長さである。

(3) $K_z < 0$ の場合

これは、発散に働く収束電磁石 (Focusing Quadrupole Magnet) の場合である。この場合の方程式も、簡単に解くことができる。この方程式を、初期条件(2.140)、(2.141)の下に解いて、トランスファー・マトリックスを求めると、

$$M_{\text{QD}} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{|K|}L) & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}L) \\ \sqrt{|K|} \sinh(\sqrt{|K|}L) & \cosh(\sqrt{|K|}L) \end{pmatrix} \quad (2.154)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、Lは、電磁石の長さである。

さて、今考えている範囲では、加速器の構成要素としては、自由空間(これは構成要素とはいえないかも知れないが)、偏向電磁石、収束電磁石、の三つだけであるから、電子の任意の初期条件について、これら三種類のトランスファー・マトリックスをかけていくことにより、原理的には、いくらでも電子の軌跡を追いかけていくことができる。従って、これで、微分方程式、(2.139)の一般解が求められたことになる。

Thin Lens 近似と強収束の原理

ここで、収束電磁石のトランスファー・マトリックスを、もう少し直感的に理解するために、Thin Lens 近似というものを考えよう。これは、収束電磁石の積分された強さ、KLを一定にして、Lを無限小にするものである。このKLを(2.37)に従って、kと表そう。こうすると、(2.153)と(2.154)のトランスファー・マトリックスは、それぞれ、

$$M_{\text{QF}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \quad (2.155)$$

$$M_{\text{QD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \quad (2.156)$$

と非常に簡単な形になる(問、これを示せ)。ここで、図2.15に示すように、初期条件として、 $(z(s_0), z'(s_0)) = (z_0, 0)$ で、QF電磁石に入射される電子を考えよう。このとき、 z_0 の値の大きさに関わらず、電子は、電磁石から $f = 1/k$ の距離のところ、 $z = 0$ になることがわかる。光学との

アナロジーでいうと、このQF電磁石は、凸レンズで、 f は焦点距離に当たる。同様に、QD電磁石は、焦点距離 $f=1/k$ の凹レンズに当たることがわかる(問、これを示せ)。この様に、トランスファー・マトリックスの(2,1)成分が収束力の強さを表し、符号が負の場合収束、正の場合発散となることがわかる。また、Thin Lens近似を用いると、収束電磁石が光学での、凸レンズ、または、凹レンズ当たるといふ言い方が、単なる比喩以上の意味を持つことが理解できるであろう。

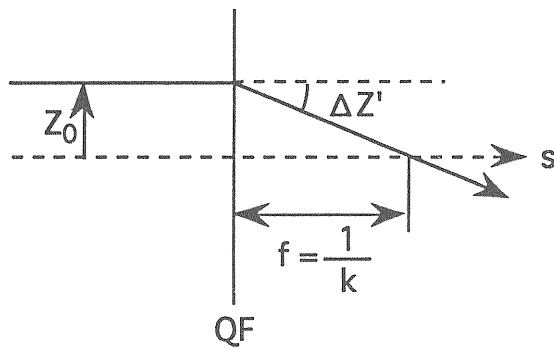


図 2.15

さて、このThin Lens近似を用いて、強収束の原理について説明しよう。これまで、何度も述べたように、収束電磁石は、一方向に収束であれば、他方向には発散である。従って、同じ符号のK値を持つ収束電磁石だけでは、両方向の収束作用を得ることはできない。ところが、収束、発散の収束電磁石を交互に配置すると、強い収束作用が得られる。これを示そう。QF電磁石とQD電磁石が、距離Lだけ離れて置いてある場合、QF電磁石に入射された電子が、長さLのDrift Spaceを通過して、最後にQD電磁石を出るまでのトランスファー・マトリックスは、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-L/f & L \\ -L/f^2 & 1+L/f \end{pmatrix} \quad (2.157)$$

となり(問、これを示せ)、ビームの収束、発散を決めるトランスファー・マトリックスの(2,1)成分の符号は、負になり、ビームが収束されることがわかる。特に、電磁石間の距離Lがfに比べて

十分小さい場合、このマトリックスは、QF電磁石のそれに近くなり、その焦点距離は、 f^2/L になる。

さて、今述べたのが例えば、水平方向だったとすると、垂直方向では、収束と発散が逆になるので、全体のトランスファー・マトリックスは、(2.157)で、fの符号を逆にしたものになる。この場合も、そのトランスファー・マトリックスの(2,1)成分の符号は、(2.157)と同じ値で負になり、ビームが収束されることがわかる。

この様に、収束、発散の収束電磁石を交互に配置すると、水平、垂直の両方向ともに収束作用が得られる。このようにして得られる収束作用は、一般に偏向電磁石の磁極の構造を工夫して水平、垂直の両方向ともに収束作用が得られる様にした、弱収束の方法に比べて、非常に強い。この様にして、強い収束作用を得る方法を強収束の方法、又は、Alternating Gradient Synchrotronの方法と呼ばれる。さて、このような方法で、水平、垂直の両方向が得られるが、このような構造が繰り返し続く場合、電磁石間の距離Lがある程度大きくなると、ビームが収束されず発散してしまうことが知られている。次節で、同じ構造が繰り返し続く場合(リングの場合は必ずそうになっている)に、粒子の運動の安定性を調べる一般的な方法について述べる。

リングにおける粒子の運動の安定性

ここでは、全く同じ構造が繰り返し続く場合を考えよう。リングの場合はリング全体を一周期として、必ずそうになっているので、ここでは、この繰り返し構造の一周期をリングと呼ぶことにする。さて、このリング一周のトランスファー・マトリックスは、リング全ての構成要素のトランスファー・マトリックスをかけることにより得られる。リング全ての構成要素といっても、今考えている範囲では、それらのトランスファー・マトリックスは、(2.152)、(2.153)、(2.154)のどれかであるので、数は多くても、本質的にはそう複雑な話ではない。

さて、この様にして得られた一周のトランスファー・マトリックスを、 M_{00} と書くことにしよう。今、電子の初期条件が、

$$z(s_0) = z_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} \quad (2.158)$$

であったとしよう。リングをN回、回った後のzは、

$$\mathbf{z}_N = \mathbf{M}_{00}^N \mathbf{z}_0 \quad (2.159)$$

となる。ここで、 \mathbf{M}_{00} の固有ベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とすると、

$$\mathbf{z}(s_0) = c_1 \mathbf{v}_1(s_0) + c_2 \mathbf{v}_2(s_0) \quad (2.160)$$

と表すことができ、また、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の固有値をそれぞれ、 λ_1, λ_2 とすると、

$$\mathbf{z}_N = c_1 \lambda_1^N \mathbf{v}_1(s_0) + c_2 \lambda_2^N \mathbf{v}_2(s_0)$$

となる(問、これを示せ)。従って、粒子の運動が安定であるためには、 λ_1, λ_2 の絶対値が、1以下であることが必要がある。

さて、 \mathbf{M}_{00} を要素を、

$$\mathbf{M}_{00} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表すことにする。 \mathbf{M}_{00} の固有値方程式は、

$$\det(\mathbf{M}_{00} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.161)$$

であるから、

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \quad (2.162)$$

となるが、 $\det \mathbf{M}_{00} = ad-bc = 1$ を用いると、

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0 \quad (2.163)$$

が得られる。さて、(2.163)を解くには、 \mathbf{M}_{00} の行列要素を知る必要があるが、解かなくてもわかることがある。二次方程式の解と係数の関係より、

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (2.164)$$

となり、

$$\lambda_1 = e^{i\mu}, \lambda_2 = e^{-i\mu} \quad (2.165)$$

と置くことができる(問、これを示せ)。ここで、 μ は、一般には複素数である。さて、これらの絶対値が1以下であるためには、 μ は実数である必要がある(問、これを示せ)。

この条件が何を意味するかを見るために、(2.163)について、解と係数のもうひとつの関係をを用いると、

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = \text{Tr}(\mathbf{M}_{00}) = 2 \cos \mu \quad (2.166)$$

となる($\text{Tr}(\mathbf{M}_{00})$ は、 \mathbf{M}_{00} の対角和を意味する)から、 μ が実数であるためには、

$$|\text{Tr}(\mathbf{M}_{00})| \leq 2 \quad (2.167)$$

である必要がある(問、これを示せ)。これが、求めたかった粒子の運動が安定であるための条件である。ここで、ひとつ注意すべきことは、この安定条件は、リング一周のトランスファー・マトリックス \mathbf{M}_{00} の起点をどこにとるかには依らないということである。即ち、 \mathbf{M}_{00} の行列要素は、起点をどこに取るかによるが、 $\text{Tr}(\mathbf{M}_{00})$ の値は、この起点に依存しないのである。このことは、マトリックスの掛け算の対角和が、マトリックスの循環的な並び変えによって変わらないことからわかる(問、これを示せ。このとき、二つの行列の掛け算の対角和は、一般に掛け算の順序を逆にしても変わらないことを使う)。

さて、先程、強収束の原理を説明するとき用いた例に戻って、その構造が無限に繰り返すときの運動の安定性を、今求めた安定条件を使って調べてみよう。その際、(先程述べた場合と違い)4つのトランスファー・マトリックスの掛け算を考える。即ち、最初に、QF電磁石、次に、長さLのDrift Space、三番目にQD電磁石、最後に再び、長さLのDrift Spaceの順番に取る。このようにすると、これが一周期になって、この構造が無限に繰り返すことになる。従って、この掛け算されたマトリックスについて、(2.167)の安定条件を適用すればよいことになる。このような電磁石の配置法は、図2.13について述べたように(但

し、図 2.13 に示されている偏向電磁石を、ここでは無視している)、FODO と呼ばれるもので、加速器で最も一般的なものである。

このマトリックスは、

$$M_{00} = \begin{pmatrix} 1 - L/f - (L/f)^2 & 2L + L^2/f \\ -L/f^2 & 1 + L/f \end{pmatrix} \quad (2.168)$$

となるから、安定条件は、

$$|2 - (L/f)^2| \leq 2 \quad (2.169)$$

より、

$$L \leq |2f| \quad (2.170)$$

であることがわかる(問、これを示せ)。このことは、決まった強さの QF 電磁石と、QD 電磁石が交互に並べて、その繰り返りでリングを作りたいとき(ここでは、偏向電磁石による収束力は無視している)、ビームを安定に回すためには、電磁石間の距離 L を、収束電磁石の焦点距離の 2 倍よりは、小さくする必要があるということである。即ち、収束電磁石間の距離を開け過ぎると、ビームは不安定になる。逆から言うと、収束電磁石間の距離が決まっているとすると、収束電磁石の強さを強くし過ぎると、ビームは不安定になるといえる。

2.2.2 運動方程式の解法 (2)

- Twiss Parameter を用いた一般解の表現

前節では、微分方程式を積分可能な区間毎に解いて、トランスファー・マトリックスを求めれば、任意の初期条件における粒子の軌跡を追いかけることができることを示した。この方法で、運動方程式は、完全に解けていることなる(但し、このような逐次的な方法では、運動方程式を解いたとはいえない、という考えもあるかもしれないが)が、加速器の軌道理論では、このトランスファー・マトリックスによる方法を基礎にして、もう少し簡便に運動方程式の一般解を表現する方法が考案されており、この方法もよく用いられる。以下に、この方法について説明する。

フロッケの定理 (Floquet's Theorem)

ここに、まず、今考えている運動方程式(ヒルの方程式)をもう一度書き下しておこう。

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + K_z(s)z = 0 \quad (2.139)$$

ここで、

$$K_z(s+C) = K_z(s) \quad (2.135a)$$

という、リングの周長 C についての周期条件が存在することに注意する必要がある。

この方程式を一般解の表現を以下で求めることを考えるが、その前に、感じをつかむために、 K_z が、一定で正の数の場合の一般解を書き下してみよう(K_z を正に取るのは、今我々が考えているのが安定な振動解であるからである)。

$$z(s) = A \cos(\sqrt{K_z} s + \phi) \quad (2.171)$$

ここで、 A , ϕ は、任意定数で初期条件より決定される。

さて、 K_z が一定でない一般の場合、その一般解は(2.171)とは、もちろん異なるが、ある程度似ていることも想像される。実際後で証明するように、(2.139)の一般解は、

$$z(s) = B \omega(s) \cos(\psi(s) + \phi) \quad (2.172)$$

という形を持つ。ここで、 ω は、

$$\omega(s+C) = \omega(s) \quad (2.173)$$

の周期条件を満たし且つ、方程式(2.139)から決まるある微分方程式を満たす解である。また、 ψ は、 ω から決まるある関数である。この様というと、事態を変えて複雑にしているように思われるであろうが、この様にする理由は、しだいに明らかになってくるであろう。

次に、(2.139)の一般解が、(2.172)の様になることを証明し、また、 ω と ψ の満たすべき方程式を導こう。まず、次に示すフロッケの定理と呼ばれるものが、存在する。

フロッケの定理とは、
 「(2.135a)の周期条件があるとき、方程式
 (2.139)は、

$$z(s) = e^{as}F(s) \quad (2.174)$$

という形の二つの解を持つ。ここで、 a は、ある定数であり、 $F(s)$ は、周期条件 $F(s+C) = F(s)$ を満たすある関数である。」
 というものである。以下で、これを証明しよう。

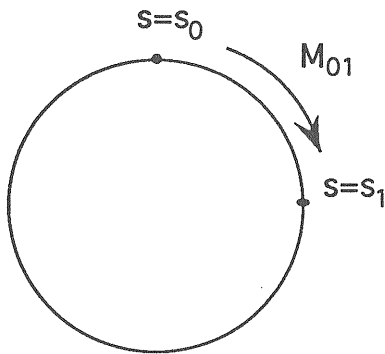


図 2.16

$s = s_0$ を起点とする、リング一周のトランスファー・マトリックスを M_{00} と置こう。この行列の固有値は、(2.165)より、 $e^{\pm i\mu}$ となる。またこの行列の固有ベクトル v_1, v_2 (これらは定ベクトルである) を初期条件とする (2.139) の解をそれぞれ、

$$z_{1,2}(s) = \begin{pmatrix} z_{1,2}(s) \\ z'_{1,2}(s) \end{pmatrix} \quad (2.175)$$

と書こう。そうすると、まず、

$$M_{00}z_{1,2}(s_0) = e^{\pm i\mu}z_{1,2}(s_0) \quad (2.176)$$

となる (問、これを示せ)。また、(すぐ後に示すように) 任意の $s = s_1$ について、

$$M_{11}z_{1,2}(s_1) = e^{\pm i\mu}z_{1,2}(s_1) \quad (2.177)$$

となる。ここで、 M_{11} は、 $s = s_1$ を起点とするリング一周のトランスファー・マトリックスである。以下で、これを示そう。

図、2.16に示すように、 $s = s_0$ から $s = s_1$ までのトランスファー・マトリックスを、 M_{01} とすると、

$$z_{1,2}(s_1) = M_{01}z_{1,2}(s_0) \quad (2.178)$$

であり、また、

$$M_{11}z_{1,2}(s_1) = M_{11}M_{01}z_{1,2}(s_0) = M_{01}M_{00}z_{1,2}(s_0) \quad (2.179)$$

となる (問、これを示せ)。従って、(2.176)、(2.178)より、(2.177)が成り立つことがわかる (問、これを示せ)。

次に、(2.175)の第一成分を $z_{1,2}(s)$ とすると、当然、

$$z_{1,2}(s+C) = e^{\pm i\mu}z_{1,2}(s) \quad (2.180)$$

が成り立つ (問、これを示せ)。ここで、

$$Z_{1,2}(s) = \frac{z_{1,2}(s)}{e^{\pm i\mu s/C}} \quad (2.181)$$

と置くと、

$$Z_{1,2}(s+C) = Z_{1,2}(s) \quad (2.182)$$

となる (問、これを示せ)。従って、

$$Z_1(s) = |Z_1(s)|e^{i\phi(s)} = \omega(s)e^{i\phi(s)} \quad (2.183)$$

と置くと、 $\omega(s) > 0$ であり、また、

$$\omega(s+C) = \omega(s) \quad (2.184)$$

$$\phi(s+C) = 2\pi n + \phi(s) \quad (2.185)$$

となる (問、これらを示せ)。ここで、 n は、ある整数である。これらを用いると、

$$z_1(s) = \omega(s)e^{+i\psi(s)} \quad (2.186)$$

$$\psi(s) = \mu \frac{s}{C} + \phi(s) \quad (2.187)$$

と書ける (問、これを示せ)。 $\psi(s)$ は、

$$\psi(s+C) = \psi(s) + \mu + 2\pi m \quad (2.188)$$

を満たす (問、これを示せ)。(2.186)は、(2.139)の解であったが、その複素共役も解になる (問、これを示せ)。従って、(2.139)の二つの解として、

$$z(s) = \omega(s)e^{\pm i\psi(s)} \quad (2.189)$$

が得られる。このことから、フロッケの定理が証明されたことがわかる (問、これを示せ)。

さて、(2.189)の二つの解が独立だとして (非常に特殊な場合は、これらは独立解にならないが、ここではそれは考えない) 一般解は、その重ね合わせでかける。実数解のみを取ると、結局 (2.139)の一般解は、(2.172)の形で書けることがわかる (問、これを示せ)。ここに、これをもう一度書き下しておく、

$$z(s) = B\omega(s)\cos(\psi(s) + \phi) \quad (2.172)$$

であり、 B, ϕ は任意定数、また、 $\omega(s), \psi(s)$ は、

$$\omega(s+C) = \omega(s) \quad (2.184)$$

$$\psi(s+C) = \psi(s) + \mu + 2\pi m \quad (2.188)$$

の条件を満たす関数である。ここで、(2.172)を元の方程式 (2.139) に代入すると、 $\omega(s), \psi(s)$ に対する微分方程式、

$$\omega'' + K_z\omega - \psi'^2\omega = 0 \quad (2.190)$$

$$\psi''\omega + 2\psi'\omega' = (\psi'\omega^2)'/\omega = 0 \quad (2.191)$$

を得る。(2.191)より、

$$\psi'\omega^2 = c_0 \quad (2.192)$$

となる。ここで、 c_0 は、任意の積分定数である。これを、(2.190)に代入すると、

$$\omega^3(\omega'' + K_z\omega) = c_0^2 \quad (2.193)$$

となる (問、これを示せ)。この式から、 c_0 の値の取り方を変えても、 ω は、 $\sqrt{c_0}$ に比例して変わるだけであることがわかる。 ω を定数倍しても、(2.172)の一般解の形は変わらないから、結局、 c_0 は任意に取れることがわかる。このとき、 c_0 をどう取っても、(2.192)より、 ψ' は、同じになることにも注意。以下では、慣例に従って、 $c_0 = 1$ に取ることにする。こうして、(2.193)より、

$$\omega'' + K_z\omega - \frac{1}{\omega^3} = 0 \quad (2.194)$$

となり、この方程式が、周期条件 (2.184) のもとでもし解ければ、(2.192)より、 ψ も求まり、(2.172)の一般解が求められたことになる。しかし、(2.194)は、元々解きたかった (2.139)の方程式より複雑な、非線型方程式であり、話を複雑にただけだと思われるであろう。実際それはそのとおりで、(2.194)を解いて、(2.139)の解を求めるということは、通常行われない。では、どうするかということ以下に述べていく。

(2.139)の一般解が、(2.172)の様に書けたと仮定して、 $s = s_0$ を起点とする、リング一周のトランスファー・マトリックス M_{00} を求めてみよう。(2.172)を書き直して、

$$z(s) = \omega(s)(B_1\cos\psi(s) + B_2\sin\psi(s)) \quad (2.172a)$$

と置く。 $s = s_0$ において、 $z(s_0) = z_0, z'(s_0) = z'_0$ とし、また、 $\psi(s_0) = 0$ と仮定すると、

$$B_1 = \frac{z_0}{\omega(s_0)} \quad (2.195)$$

$$B_2 = z'_0\omega(s_0) - z_0\omega'(s_0) \quad (2.196)$$

となる (問、これを示せ)これらの式から、 ω を用いると、一周のトランスファー・マトリックスが求まり、

$$M_{00} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \Delta \psi_c - \omega \omega' \sin \Delta \psi_c & \omega^2 \sin \Delta \psi_c \\ -\frac{1 + (\omega \omega')^2}{\omega^2} \sin \Delta \psi_c & \cos \Delta \psi_c + \omega \omega' \sin \Delta \psi_c \end{pmatrix} \quad (2.197)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、 $\Delta \psi_c$ は、一周での ψ の変化で、(2.192) より、

$$\Delta \psi_c = \int_{s_0}^{s_0+C} \frac{1}{\omega^2} ds \quad (2.198)$$

となる。さてこれで、 ω を用いて、一周のトランスファー・マトリックスを表現できたことになるが、この一周のトランスファー・マトリックスは、前に述べたように、区分的に解を積み重ねる方法で、求めることができたものである。そこで、その解に従って、逆に (2.198) から、 ω を求めることができる。以下、このことについて述べるが、その前に、 ω に関連して、加速器で日常よく使われる、Twiss Parameter と呼ばれるパラメータを導入しよう。このパラメータにより、(2.197) のトランスファー・マトリックスは、見やすい形になる。

Twiss Parameter の導入

次のように、パラメータ β, α, γ を導入する。

$$\beta(s) = \omega^2(s) \quad (2.199)$$

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \quad (2.200)$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \quad (2.201)$$

これらのパラメータを用いて、(2.197) のトランスファー・マトリックスは、

$$M_{00} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \Delta \psi_c + \alpha \sin \Delta \psi_c & \beta \sin \Delta \psi_c \\ -\gamma \sin \Delta \psi_c & \cos \Delta \psi_c - \alpha \sin \Delta \psi_c \end{pmatrix} \quad (2.202)$$

となる (問、これを示せ)。

ここで、

$$\Delta \psi_c = \int_{s_0}^{s_0+C} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.203)$$

となる。さて、この様にして導入された Twiss Parameter の内、 β が場所の関数として与えられたら、後の二つは、この β から計算できることに注意しよう。また、(2.172) の一般解も、 β を用いて、

$$z(s) = B \sqrt{\beta(s)} \cos(\psi(s) + \phi) \quad (2.204)$$

と書ける。(2.199) より、 β は、正の数であることに注意) また、(2.194) の方程式は、 β を使って、

$$2\beta\beta'' - \beta'^2 + 4\beta^2 K_z = 4 \quad (2.205)$$

又は、

$$K_z \beta = \gamma + \alpha' \quad (2.206)$$

と表される。当然、これらの方程式は、周期条件

$$\beta(s+C) = \beta(s) \quad (2.207)$$

のもとに解く必要がある。また、 ψ に関しては (2.192) より、

$$\psi' = \frac{1}{\beta} \quad (2.208)$$

の関係が成り立つ。この様にして、 ω から、 β を用いた表現に置き変わった (通常、この β は、ベータ関数と呼ぶ)。今後は、 ω を用いず、Twiss Parameter を用いて議論を進めることにする。

トランスファー・マトリックス (2.202) は、

$$M_{00} = I \cos \Delta \psi_c + J \sin \Delta \psi_c \quad (2.209)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \quad (2.210)$$

と、覚えやすい形に書ける (問、これを示せ)。

トランスファー・マトリックスを用いて Twiss Parameter を求める方法

さて、いよいよ Twiss Parameter を求めて、(2.172) の一般解を得る方法について述べよう。

(2.202) において、 M_{00} の成分を、

$$M_{00} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.211)$$

と置く。このトランスファー・マトリックスは、あらかじめ、区分的に解を積み重ねる方法で、求められているとする。

$$\cos \Delta\psi_c = (a+d)/2 = \text{Tr}(M_{00}) \quad (2.212)$$

この式から、 $\Delta\psi_c$ の値がある程度限定できる。この条件に加えて、

$$\beta = \frac{b}{\sin \Delta\psi_c} \quad (2.213)$$

が成り立ち、 β は、正の数であるから、 $\sin \Delta\psi_c$ の符号が決まり、(2.212) と合わせて、 $\sin \Delta\psi_c$ の値が決まる。従って、(2.213) より、 β の値が求められる。同様に、 α も、

$$\alpha = \frac{a-d}{2\sin \Delta\psi_c} \quad (2.214)$$

より求めることができる。

さて、この様にして、 $s=s_0$ (M_{00} の起点) での Twiss Parameter が求められた。原理的には、リングの全ての点で、一周のトランスファー・マトリックスを求めて、同様の計算をすれば、リング一周の Twiss Parameter が得られる。しかし、リングの各点で一種のトランスファー・マトリックスを求めるよりも少し賢いやり方がある。即ち、リングのある点で、 β と α が、わかっているならば、この値と、この点と、Twiss Parameter を求めたい点との間のトランスファー・マトリックスを用いて、Twiss Parameter が求められるのである。以下に、その方法を示そう。再び、図 2.16 を用いる。今、 $s=s_0$ で、 β と α の値がわかっているとしよう。このとき、 $s=s_1$ での、Twiss Parameter を求めよ

う。前にやったように、 $s=s_0$ と $s=s_1$ を起点とするリング一周のトランスファー・マトリックスをそれぞれ、 M_{00} 、 M_{11} とし、 $s=s_0$ から $s=s_1$ までのトランスファー・マトリックスを M_{01} とする。逆に、 $s=s_1$ から、 $s=s_0$ までのトランスファー・マトリックスを M_{10} とすると、

$$M_{10} = M_{01}^{-1} \quad (2.215)$$

の関係がある (問、これを示せ)。従って、また、

$$M_{11} = M_{01} M_{00} M_{01}^{-1} \quad (2.216)$$

が成り立つ (問、これを示せ)。 M_{01} の行列要素を、

$$M_{01} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (2.217)$$

とすると、(2.209) の表示法を用いて、

$$M_{11} = I \cos \Delta\psi_c + J_1 \sin \Delta\psi_c = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \times (I \cos \Delta\psi_c + J_0 \sin \Delta\psi_c) \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \quad (2.218)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、 $\det M_{01} = 1$ を用いた。この式から、

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ -\gamma_0 & -\alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} \quad (2.219)$$

となる (問、これを示せ)。この式は、また、

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & -2m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ -m_{21}m_{11} & 1+2m_{12}m_{21} & -2m_{12}m_{22} \\ m_{21}^2 & -2m_{22}m_{21} & m_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (2.220)$$

とも書ける (問、これを示せ)。リングのある点で、 β と α が、わかっているならば (2.220)

を用いて、任意の点での Twiss Parameter を求めることができる。

以上のようにして、トランスファー・マトリックスを用いる方法を基礎にして、リングの各点での Twiss Parameter 求められることがわかった。そうすると、(2.208) より、

$$\psi(s) = \int_{s=s_0}^s \frac{ds}{\beta(s)} + \psi_0 \quad (2.221)$$

となり、 ψ が求められる (問、これを示せ)。ここで、 ψ_0 は、任意の定数である。

以上述べたことをまとめると、まず、微分方程式 (2.139) の一般解は、

$$z(s) = \sqrt{W\beta(s)} \cos(\psi(s) + \psi_0) \quad (2.222)$$

$$\begin{aligned} z'(s) &= -\sqrt{W/\beta(s)} \{ \alpha(s) \cos(\psi(s) + \psi_0) \\ &\quad + \sin(\psi(s) + \psi_0) \} \\ &= -\sqrt{W\gamma(s)} \sin(\psi(s) + \psi_0) \quad (2.223) \end{aligned}$$

となることがわかる (問、これらを示せ)。ここで、 W 、 ψ_0 は、初期条件から決まる定数である。また、 $\beta(s)$ は、微分方程式、

$$2\beta\beta'' - \beta'^2 + 4\beta^2 K_z = 4 \quad (2.205)$$

を満たし、また、周期条件

$$\beta(s+C) = \beta(s) \quad (2.207)$$

を満たす関数であるが、実際には、トランスファー・マトリックスを用いて求められるものである。また、

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \quad (2.200)$$

であり、さらに、

$$\psi(s) = \int_{s=s_0}^s \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.224)$$

である (積分定数は、任意定数に含めた)。

さて、この様にして、微分方程式 (2.139) の一般解の Twiss Parameter を用いた表現にたどり着いた。この Twiss Parameter は、非常に便利なパラメータであり、加速器の世界で非常に頻りに用いられるものである。また、加速器の設計においては、 β を場所の関数としてどのように決めるか、ということが重要である。しかし、運動方程式の解法という観点から見ると、この方法は、ここに示したように、(2.205) を直接解かない限り、トランスファー・マトリックスによる方法の助けなしには、成り立たないものである。その意味で、加速器の軌道理論にとってトランスファー・マトリックスは、より根源的なものであるといえるだろう。Twiss Parameter は、非常に便利なパラメータであるが、その便利さは、トランスファー・マトリックスという土壌の上に咲いた花だといえるかも知れない。

ここで、Twiss Parameter は、非常に便利なパラメータであると述べたが、その便利さはどこにあるのかを、次に述べる。

ベータトロン 振動 (Betatron Oscillation)

一般解 (2.222) を眺めてみよう。予想されたように、これは、単なる調和振動子の解 (2.171) にある程度似ている。加速器におけるこのような、ビームの進行方向に垂直な面内での振動を、ベータトロン振動 (Betatron Oscillation) という。(この名称は、戦前に開発された、時間的に変化する磁場の作る誘導起電力を用いて電子を加速するベータトロンという加速器において研究された軌道理論に由来する。) このベータトロン振動と調和振動の違いの第一は、調和振動の場合、振動振幅が一定であるのに対して、ベータトロン振動の場合、振動振幅は、場所の関数であり、 $\sqrt{\beta(s)}$ に比例するということである (この意味で、 $\beta(s)$ (ベータ関数) を振幅関数 (Amplitude Function) と呼ぶこともある)。第二の違いは、調和振動の場合、その振動の位相が s に比例して増加するのに対して、ベータトロン振動の場合、振動の位相は、(2.224) に示されるように、 s の単調増加関数ではあるが、 β が場所の関数であるために、その増加率は一定ではなく、 β が小さい場所では、位相が速く増加し、 β が大きい場所では、位相の増加率は小さいということである。

次に、リングのある一点で、ある電子の運動を観察したとしよう。その場合、この電子の振動は、どう見えるであろうか？まず、振動振幅は、 s が一定の場所で見ているので変化しない。また、振動の位相は、電子が一周してくる度に、一定の量だけ増加する。この一定の量は、(2.203)に示されている様に、ベータ関数の逆数をリング一周にわたって積分したものである。この量は、加速器の世界では、非常に重要な量であり、特別に名前がついている。通常この量を 2π で割ったもの、即ち、

$$\nu = \frac{\Delta\psi_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_0+C} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.225)$$

をベータトロン振動数、又は単にチューン (Tune) と呼ぶ。このチューンは、電子が、リング一周回る間に何回ベータトロン振動するかという量である。この量が、何故重要かという、この章の後で述べるように、このチューンの値が、ある共鳴条件に近づくとビームが失われてしまうことがあり、運転上、チューンを慎重に選ぶ必要があるからである。

さて、このように、リングのある一点で、電子の運動を観察した場合、その運動は、調和振動子の運動を一定の周期でサンプリングしたように見えることがわかる。では、逆に、今チューンの値がわからないとして、リングの一点で電子の運動を観察することにより、このチューンの値を求めることができるであろうか？その答えは、完全には求めることができない、というものである。まず、チューンの整数部は何であっても、観測される結果は同じになり (問、これを示せ)、このチューンの整数部は求められない。では、小数部は決定できるかという、実は、二つに一つとしか決まらない。即ち、例えば、チューンの小数部が、0.2の場合と、0.8(1-0.2)の場合では、観測される結果は同じになり、これらのどちらかとしてしか決まらないのである (問、これを示せ)。

以上のように、Twiss Parameter を用いた一般解の表現 (2.222) を用いると、ベータトロン振動の大局的な様子を捕えやすい。トランスファー・マトリックスによる方法だけでは、このような電子の大局的な運動の様子は得にくいといえるであろう。また、リングの各点での Twiss Parameter が、一度得られたら、その各点間のトランスファー・

マトリックスは、Twiss Parameter から求められる。これを示そう。

ω を用いて、一周のトランスファー・マトリックスを表現を求めたときと同じように、(2.172a) から出発し、(2.195)、(2.196) の初期条件を用いよう。但し、 ω を $\sqrt{\beta}$ で置き換える必要がある。そして、 $s=s_1$ で $z(s_1), z'(s_1)$ を計算し、それらを、 z_0, z'_0 を使って書くことにより、 $s=s_0$ から $s=s_1$ までのトランスファー・マトリックス M_{01} が得られる。結果は、

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}} (\cos \Delta\psi + \alpha_0 \sin \Delta\psi) \\ -\frac{1 + \alpha_0 \alpha_1}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} \sin \Delta\psi + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} \cos \Delta\psi \\ \sqrt{\beta_0 \beta_1} \sin \Delta\psi \\ \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}} (\cos \Delta\psi - \alpha_1 \sin \Delta\psi) \end{pmatrix} \quad (2.226)$$

となる (問、これを示せ)。

次に、運動の不変量について述べる。この不変量について考えることにより、電子のベータトロン振動の様子に対して、さらに感じがつかめるようになると思う。

2.2.3 運動の不変量

(Courant-Snyder Invariant)

(2.222)、(2.223) より、次の式が導かれる (問、これを示せ)。

$$W = \frac{1}{\beta} [z^2 + (\alpha z + \beta z')^2] = \gamma z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2 \quad (2.227)$$

この量は、運動の不変量である。この不変量を、強収束の原理の二人の発見者の名前に因んで、Courant-Snyder (クーラン・シュナイダーと発音する) Invariant と呼ぶ。(なお、先に導入した、Twiss Parameter も、Twiss という人物の名前に由来するが、Courant-Snyder Parameter と呼ぶ場合もある

ようである。)

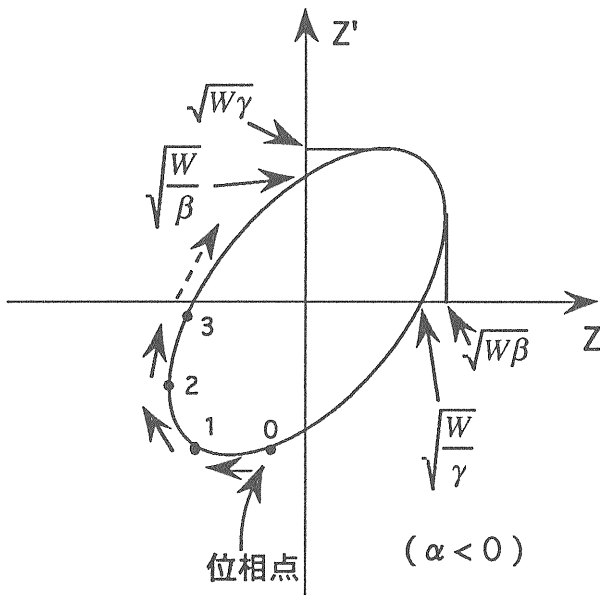


図 2.17

さて、Courant-Snyder Invariant の意味を考えるために、まず（前にやったように）リングのある一点で、ある電子の運動を観察することを考えよう。この電子は、位相平面の中で、 $W = \text{一定}$ 、の線上を運動する。この線は、(2.227) の方程式で与えられ、楕円になる。これを図示すると、図 2.17 のようになる。(2.222)、(2.223) よりわかるように、電子の運動にしたがって、その状態を表す位相点は、楕円上を右回り（時計回り）に回転する（但し、チューンの小数部が 0.5 より大きいときは、見掛け上左回りに回るように見える）（問、これらを示せ）。また、図に示したように、この電子の最大振幅と、傾き z' の最大値は、それぞれ、

$$z_{\max} = \sqrt{W\beta} \quad (2.228)$$

$$z'_{\max} = \sqrt{W\gamma} \quad (2.229)$$

となる（もっとも、これらは、(2.222)、(2.223) より明らかであるが）。次に、この楕円の面積について考えよう。一般論として、楕円の方程式を

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \quad (2.230)$$

とすると、その面積は、

$$S = \frac{\pi d}{\sqrt{ac - b^2}} \quad (2.231)$$

となる（この公式は、例えば、(2.87) のマトリックスを用いて、座標軸を回転させて、楕円の方程式を、 xy の項のない、標準型に直すことにより得られる（問、これを示せ））。この公式より、(2.227) の楕円の面積は、

$$S = \pi W \quad (2.232)$$

となる（問、これを示せ）。

さて、次に、リングの異なる点でこの楕円がどうなっているかを考えよう。Twiss Parameter は、場所の関数であるから、楕円の形状は、明らかに場所によって、違っている。しかし、その面積は、保存量であるから、どの楕円でも同じになる。このあたりの事情を、図 2.18 に示した。一般に、 β の大ききところでは、 z の大きき期待値が大きき、逆に z' （傾き）の大きき期待値は小さい。逆に、 β の小さいところでは、その逆になることに注意して欲しい。

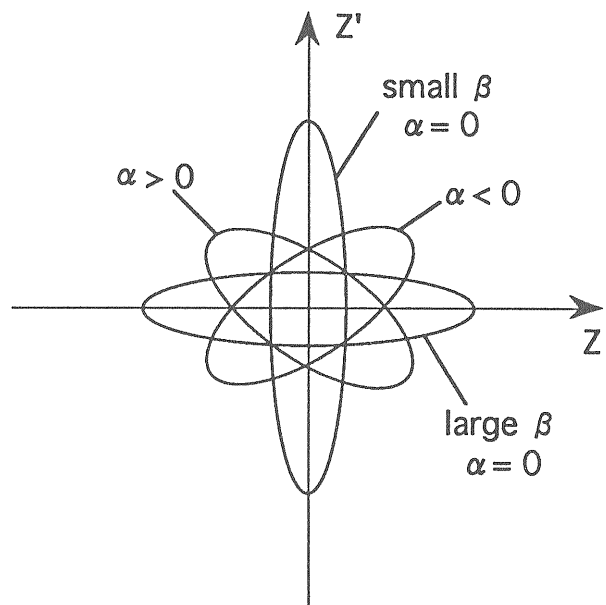


図 2.18

なお、これまで、ベータトロン振動には、x 方向の振動と y 方向の振動があることを区別せずに、z という記号で代表させてきたが、一般には、一つの粒子に着目しても、x 方向の不変量 W_x と y 方向の不変量 W_y は、異なる量であり、それぞれについて考えなければならないことに注意しよう。

この章では、基本的に一粒子の運動について考えるが、実際の加速器では、第 1 章で述べたように、多数の粒子がバンチを形成し、ほぼ一体となって運動している。このバンチ内の粒子の分布がどうなるかは、第 4 章のテーマである。ここでは、先走りしてその結果を用いて、以下で、エミッタンスという量について考える。

エミッタンス

ここでは、全く唐突ではあるが、次の二つの仮定をして、位相平面での電子の分布関数を導いておく。

(第一の仮定)

リングのある場所で、電子の位置の分布は、ガウス分布で、その標準偏差は、 σ_z である。そして、この標準偏差に対応する Courant-Snyder Invariant を ϵ_z と表すことにしよう。即ち、

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z^2}{\beta_z} \quad (2.233)$$

と置く。この量を電子貯蔵リングでは、エミッタンスと呼ぶ。電子の位置の分布は、従って、

$$\varphi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} dz \quad (2.234)$$

となる。

(第二の仮定)

この分布は、定常状態にあり、電子がリングを何回周回しても変わらない。

以下で、これら二つの仮定に基づいて、電子の位相平面での分布関数を導くが、その手始めとして、次の、量を導入しよう。

$$\zeta = \alpha z + \beta z' \quad (2.235)$$

こうすると、(2.222)、(2.223) より、

$$\zeta = \sqrt{W\beta(s)} \sin(\psi(s) + \psi_0) \quad (2.236)$$

となるのがわかる。また、z は、(2.222) を満たすから、z- ζ 平面で位相点の運動を見ると、円運動することになる(問、これを示せ)。従って、電子の分布が定常状態にあるためには、 ζ 方向の分布も、z 方向と同じ標準偏差をもつガウス分布である必要がある。従って、z- ζ 平面での分布は、

$$\varphi(z, \zeta) dz d\zeta = \frac{1}{2\pi\sigma_z^2} e^{-\frac{z^2 + \zeta^2}{2\sigma_z^2}} dz d\zeta \quad (2.237)$$

となるはずである(問、これを示せ)。ここで、まず、z- ζ 平面から、W- ψ 平面へ移ると、その分布関数は、

$$\varphi(W, \psi) dW d\psi = \frac{1}{4\pi\epsilon_z} e^{-\frac{W}{2\epsilon_z}} dW d\psi \quad (2.238)$$

となる(問、面積要素の変換には、ヤコビアンを用いることに注意して、これを示せ)。(2.238) の分布関数は、位相 ψ を含まない。従って、どの位相にも同じ割合で電子が分布することになる。従って、この分布は、平衡状態にあることが確かめられた(問、これを示せ)。

さて、(2.237) の分布は、定常的な分布を与えることが確かめられたので、今度は、z- ζ 平面から、もとの、z-z' 平面に戻ろう。z-z' 平面での分布関数は、

$$\varphi(z, z') dz dz' = \frac{1}{2\pi\epsilon_z} e^{-\frac{\gamma z^2 + 2\alpha z z' + \beta z'^2}{2\epsilon_z}} dz dz' \quad (2.239)$$

となる(問、(2.238) の場合と同じようにして、これを導け)。

さて、分布関数がわかると、色々な量の全粒子平均を求めることができる。即ち、z と z' の関数である量、例えば、 $A(z, z')$ の平均値は、

$$\langle A(z, z') \rangle = \iint A(z, z') \varphi(z, z') dz dz' \quad (2.240)$$

で計算できる。例えば、 z'^2 の粒子平均がどうなるかが興味深い。但し、この量に関しては、分布関数 (2.2 3 9) の射影をとることによって、直接 (一次元の) 分布関数を得ることができる。即ち、

$$\varphi(z') = \int \varphi(z, z') dz \quad (2.2 4 1)$$

を計算することにより、

$$\varphi(z') dz' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{z'}} e^{-\frac{z'^2}{2\sigma_{z'}^2}} dz' \quad (2.2 4 2)$$

$$\sigma_{z'} = \sqrt{\gamma_z \varepsilon_z} \quad (2.2 4 3)$$

となる (問、これを示せ)。これらの式より、 z' 方向にもビームは、ガウス分布しており、その 1σ に相当する Courant-Snyder Invariant は、 z の場合と同じになることがわかる。また、分布関数 (2.2 3 8) を用いて、Courant-Snyder Invariant そのものの粒子平均を求めることもできる。結果は、

$$\langle W \rangle = 2\varepsilon_z \quad (2.2 4 4)$$

となり (問、これを示せ)、 ε_z とは一致しないことに注意しよう。(問、 zz' の粒子平均を計算せよ。)

以上、長々と式の計算を行ったが、ここでわかったことを、まとめておこう。まず、エミッタンスとは、電子の位置の分布が、ガウス分布であると仮定した場合、その標準偏差 σ_z に対応する Courant-Snyder Invariant として定義される。逆に、エミッタンス ε_z を用いて、ビームサイズ (1σ) は、

$$\sigma_z = \sqrt{\beta_z \varepsilon_z} \quad (2.2 4 5)$$

で与えられる。同様に、電子の運動方向の傾き z' の標準偏差は、

$$\sigma_{z'} = \sqrt{\gamma_z \varepsilon_z} \quad (2.2 4 6)$$

で与えられる。また、Courant-Snyder Invariant の粒子平均は、(2.2 4 4) で与えられる。

2.3 理想的なベータトロン振動からのずれ

いよいよここで、エラーがある場合の運動方程式の解について調べることにしよう。エラーがある場合の運動方程式の一般的な形は、(2.1 2 9)、(2.1 3 0) で与えられているが、この節では、まず最初に、比較的取り扱いが簡単な、3 種類のエラーがある場合について考える。即ち、次の 3 種類のエラーの効果を、最初は、それぞれ独立に扱い、後で、これらのエラーが共存する場合の解について調べる。

(1) Field Strength Error (Steering Error)

このエラーが存在する場合の水平方向の運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = -\frac{\Delta B_y}{B\rho_0} \quad (2.2 4 7)$$

となる (垂直方向の方程式もほぼ同じ形になるので、以下では水平方向のみについて考える)。

(2) Gradient Error (Focusing Error)

このエラーが存在する場合の水平方向の運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = -\Delta K(s)x \quad (2.2 4 8)$$

となる (垂直方向の方程式もほぼ同じ形になるので、以下では水平方向のみについて考える)。

(3) Momentum Deviation (エネルギーのずれ)

このエラーが存在する場合の水平方向の運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) K(s) \right] x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.2 4 9)$$

となる (垂直方向の方程式は、右辺がゼロになる

ので、水平方向の方程式の特殊な場合と考えられる。以下では、主に水平方向の方程式について考える)。

これらのエラーについて調べた後、本節の後半で、水平方向の運動と垂直方向の運動がカップルしている場合、さらに、非線型な磁場がある場合について、それぞれ簡単に述べる。

2.3.1 Steering Error と COD

運動方程式をもう一度書き下しておく

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = f(s) \quad (2.250)$$

である。ここで、

$$f(s) = -\frac{\Delta B_y(s)}{B\rho_0} \quad (2.251)$$

と置いた。ここで、(2.250)の右辺をゼロと置いた方程式(同次方程式)の一般解が、(2.222)で求められているとすると、(2.250)の特殊解が求められれば、その一般解も求められること、即ち、

(非同次方程式の一般解) = (同次方程式の一般解) + (非同次方程式の特殊解)

であることに注意しよう(問、このことを示せ)。さて、ここで、(2.250)の特殊解として、周期条件、

$$x(s+C) = x(s) \quad (2.252)$$

$$x'(s+C) = x'(s) \quad (2.253)$$

を満たすものを考えよう。これらの周期条件を満たす(2.250)の特殊解を求める方法として、ここでは、グリーン関数の方法を用いる。

グリーン関数の方法

まず、(2.250)の右辺を周期的なデルタ関数

で置き換えた次の方程式を考えよう。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = \delta_p(s-s_0) \quad (2.254)$$

ここで、右辺のデルタ関数は、周期条件

$$\delta_p(s+C) = \delta_p(s) \quad (2.255)$$

を満たす周期的なデルタ関数とする。(2.254)の解のうち、(2.252)、(2.253)と同じ周期条件を満たすものが、グリーン関数である。このグリーン関数を $G(s,s_0)$ と置くと、このグリーン関数が求められれば、周期条件(2.252)、(2.253)を満たす(2.250)の特殊解は、

$$x(s) = \int_s^{s+C} G(s,s_0) f(s_0) ds_0 \quad (2.256)$$

となる(問、これを示せ)。

以下で、このグリーン関数をトランスファー・マトリックスを用いて求める。まず、(2.254)の右辺のデルタ関数をどう考えるかであるが、これは、収束電磁石の場合に Thin Lens 近似というもの考えたが、今の場合、偏向電磁石について同じようなことを考えればよい。即ち、偏向電磁石の積分された効果、つまり全曲げ角 θ を保存して、磁石の長さを無限小にした極限を考える。こうすると、磁場の強さはある一点で無限大になるが、ビームにとっては、その一点で、角度 x' が θ だけ変わるような、いわば、Thin Bending Magnet とでもいうようなものが得られる。このような電磁石が、 $s=s_0$ にあった場合、その磁場の効果は、(2.254)の右辺を $\theta\delta_p(s-s_0)$ で置き換えたもので表される(問、このことを示せ)。従って、(2.254)の右辺は、全曲げ角 θ が1の Thin Bending Magnet を表している。従って、(2.254)の右辺の電子の運動に対する効果は、

$$\begin{pmatrix} x_{\text{new}} \\ x'_{\text{new}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{old}} \\ x'_{\text{old}} + 1 \end{pmatrix} \quad (2.257)$$

と表される(問、これを示せ)。ここで、これらは、どれも $s=s_0$ での値であるが、添字のoldはキッ

クされる前の値、new は、キック後の値を表す。

さて、 $s = s_0$ 以外の場所では、各エレメントのトランスファー・マトリックスは、わかっているとしよう（このことは、(2.250)の右辺をゼロと置いた方程式（同次方程式）の一般解が求められていると仮定することと同じである）。今、 $s = s_0$ で、 x_{new} と x'_{new} が与えられたとする。これらの値を改めて、 x_0, x'_0 と書いて初期値と考えると、これ以降の電子の軌道は、各エレメントのトランスファー・マトリックスと (2.257) を用いて完全に追跡することができる。従って、これが、(2.254) の一般解を与える。ところが、今求めたいのは、これらの一般解のうち、(2.252) と (2.253) の境界条件を満たす、特殊解であるから、これらの周期条件を満足する解を、初期値、 x_0 と x'_0 を選び出すことにより求める必要がある。

このために必要なのは、一周のトランスファー・マトリックスと (2.257) である。 $s = s_0$ を起点とした一周のトランスファー・マトリックスを M_{00} とすると、 $s = s_0$ で x_0, x'_0 の初期条件で始まった電子の運動は、リングを一周し、次に (2.257) のキックを受けてもとの場所に戻ってきたとき、

$$\begin{pmatrix} x(s_0 + C) \\ x'(s_0 + C) \end{pmatrix} = M_{00} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.258)$$

となる（問、これを示せ）。ところが、今求めたいのは、(2.252) と (2.253) の境界条件を満たす解であるから、(2.258) の左辺は、 x_0, x'_0 に戻らなければならない。即ち、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = M_{00} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.259)$$

でなければならない。これは、 x_0, x'_0 に関する連立一次方程式であり、その解は、

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = (M_{00} - I)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.260)$$

である（問、これを示せ）。 M_{00} の具体的な形は、(2.202) に与えられているから、これを用い

て、また、逆行列を求める操作をして、結局

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta(s_0) \cot \frac{\Delta\psi_c}{2} \\ 1 - \alpha(s_0) \cot \frac{\Delta\psi_c}{2} \end{pmatrix} \quad (2.261)$$

を得る（問、これを示せ）。

これで、初期条件が決まったから、任意の点での x と x' は、(2.226) のトランスファー・マトリックスを用いて求めることができ、

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin(\Delta\psi_c/2)} \cos\left(\frac{\Delta\psi_c}{2} - \Delta\psi\right) \quad (2.262)$$

となる（問、これを示せ）。ここで、 $\Delta\psi$ は、 s_0 から s までの位相の進みである。 $\Delta\psi_c$ は、リング一周での位相の進みであるが、これをチューンを使って書くと $2\pi\nu$ に等しい。従って、(2.262) は、

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin\pi\nu} \cos(\pi\nu - \psi(s) + \psi(s_0)) \quad (2.263)$$

となる（問、これを示せ）。ところで、この式は、 $s_0 < s < s_0 + C$ で成り立つ式である（問、これは何故か）。これを、 $s_0 - C < s < s_0 + C$ で成り立つように拡張すると、

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin\pi\nu} \cos(\pi\nu - |\psi(s) - \psi(s_0)|) \quad (2.264)$$

となる。この式を導出する際、(2.261) より、キックされる前の値を求め、それらを初期値として、また、(2.226) のトランスファー・マトリックスを逆向きに使った。（問、トランスファー・マトリックスを逆向きに使うとき $\Delta\psi$ の符号が逆になることに注意して、(2.264) を導け。） $s_0 - C < s < s_0 + C$ の範囲にないときは、この式はそのままでは、使えないが、解は周期条件 (2.252) を満たすので、この周期条件を用いれば、任意の s について、解が求められることになる。こうして、グリーン関数が求められた。即ち、

$$G(s, s_0) = \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin\pi\nu} \cos(\pi\nu - |\psi(s) - \psi(s_0)|) \quad (2.265)$$

である。これより、周期条件 (2.252)、(2.253) を満たす (2.250) の特殊解は、(2.256) より、

$$x(s) = \int_s^{s+c} \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin\pi\nu} \cos(\pi\nu + \psi(s) - \psi(s_0)) f(s_0) ds_0 \quad (2.266)$$

となることわかる (問、積分区間に注意して、(2.266) を導け)。

以上のようにして、周期条件 (2.252)、(2.253) を満たす (2.250) の特殊解が求められた。従って、(2.250) の一般解は、この解に、(2.222) の解を加えれば得られる。数学的には、これで (2.250) については、これでお仕舞いであるが、この解の持つ物理的意味について次に考える。

COD (Closed Orbit Distortion) 閉軌道の歪み

以上のように、(2.266) で 周期条件を満たす解が得られたが、この周期条件を満たすということは、言い換えると、(2.266) で表される軌道に乗っている電子が、リングを一周してくると、再び、一周前の軌道に戻るということで、その意味で、(2.266) で表される軌道は、閉軌道 (Closed Orbit) と呼ばれる。この閉軌道は、一度電子が、その上に乗ると、その後ずっとその上を回り続ける様な軌道ともいえる。

さて、エラーのない理想的な場合では、デザイン軌道そのものが閉軌道であった (このデザイン軌道は、 $x(s)=0$ で表される、エラーのない場合の方程式の特殊解である)。ところが、上に示したように、Steering Error があると、デザイン軌道は、もはや閉軌道ではなくなって、歪んだ軌道が、閉軌道になる。この辺の事情を概念的に図示すると図 2.19 の様になる。

この様に、Steering Error によって、閉軌道が歪むことを Closed Orbit Distortion (COD) という。また、言葉の正確な意味からすると少しおかしいが、この歪んだ閉軌道それ自体を COD と呼ぶこともある。

さて、ここでは、その証明を与えないが、電子貯蔵リングにおいては、初期条件に関わらず、

Radiation Damping のために、ある程度の時間が経つと、電子の運動は平衡状態に達して、バンチの中心は、ここで述べた閉軌道を運動し、各電子は、この閉軌道の周りにガウス分布で広がるようになることが知られている。この意味で、閉軌道は、バンチの運動の中心軌道ともいえる。

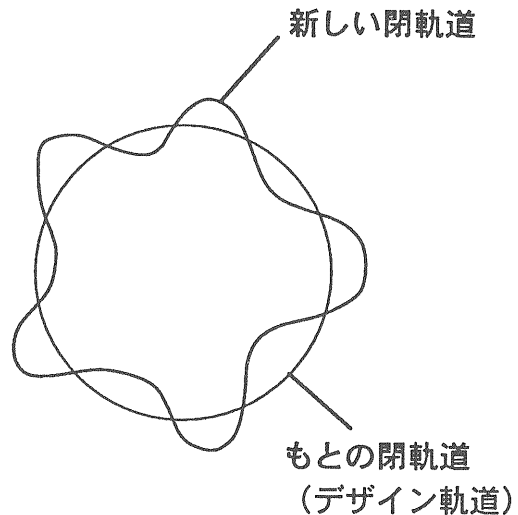


図 2.19

COD があまりに大きいと、閉軌道が、真空パイプの外にでるようなことも、起こり得ることになる。こうなるともちろん、ビームを安定に貯蔵することはできなくなる。そこまで COD が大きくなっても、ビームの裾が真空パイプにかすたりすると、ビームの寿命が非常に短くなったりすることもある。このような事態を避けるためには、COD をできるかぎり小さくすることが重要である。

COD を小さくするという意味で、まず重要なのは、チューンの選び方である。(2.266) からわかるように、チューンがちょうど整数だと、COD は、無限大になってしまう。このような事態を加速器の世界では、整数共鳴 (Integer Resonance) と呼ぶ (これを何故「共鳴」と呼ぶかに関しては、2.3.6 節を参照)。この整数共鳴は、非常に強く危険な共鳴であり、チューンがちょうど整数でなくても、ある程度整数に近いと、COD が大きくなり、やはりビームを安定に蓄積できなくなる。

次に、この COD の原因は、Field Strength Error であり、このエラーの源となるのは、2.1.4 で述べた様に、1) 偏向電磁石の (製作誤差による) 強

度誤差、2) 偏向電磁石の回転誤差、3) 収束電磁石の設置誤差、であるから、これらをできるだけ小さくする努力が一般に重要である。

COD補正

このように、CODを小さくする努力は、重要であるが、CODをゼロにすることは、もちろんできない。そこで、通常の加速器では、このCODを補正して、小さくする努力がなされる。この目的のために、前に述べた、ステアリング電磁石が用いられる。リングに数多くのステアリング電磁石を設置し、それらを適当に励磁することにより、CODをある程度小さくすることは、可能であり、実際、このステアリング電磁石によるCOD補正は、通常の加速器の日常の運転において必要不可欠の過程になっている。

さて、CODは一般に、時間と共に変化しうるものである。その原因となるのは、電磁石電源の電流値の時間的なふらつき、電磁石の熱変形による強度誤差、電磁石を支えている架台の熱変形、電磁石を設置している地面の経年変化、等である。CODが変化すると、例えば、放射光実験で、マシンユーザーが用いている光の(強度等の)質が落ちることがある。また、例えば、BファクトリのようなDouble Ring Colliderの場合、二つのリングのCODは一般には、同じように変化しないために、二つのビームが衝突しないような事態が生じる。このような事態を避けるためには、上に述べた、原因を取り除くために、電磁石の電流値の安定化や加速器が存在するトンネル内の温度を一定に保つ空調の整備などが、重要である。しかし、これらの努力だけでは、限界があるので、COD等を常にモニタしながら、積極的にステアリング電磁石を用いて、(通常は、リングの限られた場所でローカルに)COD補正をするような、フィードバック・システムが用いられることもある。

2.3.2 Focusing Error と Beta Function Distortion

運動方程式をもう一度書き下しておくと、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = -\Delta K(s)x \quad (2.248)$$

であった。この方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (K(s) + \Delta K(s))x = 0 \quad (2.267)$$

と変形できるから、 $K + \Delta K$ を改めて、 K と置けば、その形は、エラーのない場合の方程式と全く同じになり、その一般解は、(2.222)で表されることになる。この解は、(2.222)自身と、(2.224)より、ベータ関数が s の関数として決まると完全に決まるから、(2.248)のFocusing Errorの項の影響は、ベータ関数が(エラーのない場合から)歪む効果として、捕えることができる。

Tune Shift

ベータ関数が歪むと、(2.224)よりベータatron振動の位相の進みが変わり、その結果ベータatron振動数(チューン)も変化する。ベータ関数の歪みを計算する前に、まずこのチューンの変化(チューン・シフト、Tune Shift)の量を計算してみよう。この計算にも、トランスファー・マトリックスを用いる。

まず、(2.267)において、エラーのない場合の方程式の解は得られていると仮定しよう。こうすると、リングの任意の点 s を起点とするリング一周のトランスファー・マトリックスも、(2.202)又は、(2.209)、(2.210)より、決まり、

$$M_0(s) = I \cos \Delta \psi_{c_0} + J(s) \sin \Delta \psi_{c_0} \quad (2.268)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ -\gamma(s) & -\alpha(s) \end{pmatrix} \quad (2.269)$$

となる。ここでは、点 s を起点とする、(エラーのない場合の)リング一周のトランスファー・マトリックスを、(以前とは違い) $M_0(s)$ で表すことにする。

さて、今 $s = s_1$ の近傍の短い区間 ds_1 に、Gradient Error が、局在して存在する場合を考えよう。まず、エラーがない場合のこの区間のトランスファー・マトリックスは、 $\sqrt{|K|} ds_1$ が、1より十分小さいとして、 ds_1 の一次の項まで取って、

$$m_0 = \begin{pmatrix} 1 & ds_1 \\ -K(s_1)ds_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.270)$$

となる (問、これを示せ)。エラーがある場合、この区間のトランスファー・マトリックスは、

$$m = \begin{pmatrix} 1 & ds_1 \\ -(K(s_1) + \Delta K(s_1))ds_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.271)$$

となる。これらを用いて、エラーのある場合の一周のトランスファー・マトリックスは、

$$M(s_1) = mm_0^{-1}M_0(s_1) \quad (2.272)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、簡単な計算より、 ds_1 の一次の項まで取って、

$$mm_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta K(s_1)ds_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.273)$$

となる (問、これを示せ)。これらの式より、

$$\begin{aligned} \text{Tr}M &= 2\cos\Delta\psi_c = \\ & 2\cos\Delta\psi_{c0} - (\beta(s_1)\sin\Delta\psi_{c0})\Delta K(s_1)ds_1 \end{aligned} \quad (2.274)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、 $\Delta\psi_c$ は、エラーがある場合の一周の位相の進みである。

以上は、エラーが一ヶ所に局在している場合であったが、エラーがリング内に分布している場合、 $\text{Tr}M$ の値を得るには、((2.274) の導出の過程からわかるように)、全てのエラーの効果を単に重ね合わせればよい (問、これを示せ)。従って、

$$\Delta(\cos\Delta\psi_c) = -\frac{\sin\Delta\psi_{c0}}{2} \int_0^C \beta(s)\Delta K(s)ds \quad (2.275)$$

となる (問、これを示せ)。この式より、チューン・シフトは、

$$\Delta\nu = -\frac{\Delta(\cos\Delta\psi_c)}{2\pi\sin\Delta\psi_{c0}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^C \beta(s)\Delta K(s)ds \quad (2.276)$$

で与えられることがわかる (問、これを示せ)。この式は、加速器の運転上有用な関係式であって、例えば、ある場所のベータ関数が、設計どおりになっているかを知りたい場合、その場所に収束電磁石があり、且つその収束電磁石の強さを独立に変えることができれば、その電磁石の K 値を少し変え、チューンの変化を測定することにより、その場所でのベータ関数を推定することができる。衝突型加速器では、よくこの方法で、衝突点でのベータ関数が設計どおりになっているかどうかの診断を行う (もちろんこの際、衝突点には、通常、収束電磁石を置かないから、衝突点に最も近い収束電磁石でのベータ関数をまず測定し、そこから内挿するという手順を踏む)。

Stopband

Gradient Error がある場合には、チューンが整数又は半整数の近傍でビームの運動が不安定になることがある。次に、これについて調べてみよう。まず、(2.275) と (2.276) は、 ΔK の一次まで取った近似であった。ところが、後で示すように、 $\sin\Delta\psi_c$ がゼロに近いとき (つまり、チューンが整数、又は、半整数の近傍にあるとき)、この近似では不十分で、 ΔK の二次まで取る必要がある。

リング内に、二つの Gradient Error、 $s=s_1$ の近傍の $\Delta K(s_1)ds_1$ および $s=s_2$ の近傍の $\Delta K(s_2)ds_2$ があるとしよう。このとき、 $s=s_1$ を起点とするリング一周のトランスファー・マトリックスは、

$$M(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta K(s_1)ds_1 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta K(s_2)ds_2 & 1 \end{pmatrix} A \quad (2.277)$$

と表される (問、これを示せ)。ここで、 A は、 s_1 から s_2 までの (エラーがない場合の) トランスファー・マトリックス、 B は、 s_2 から、 s_1+C までのトランスファー・マトリックスである。簡単な計算で、

$$\begin{aligned} M(s_1) &= M_0(s_1) - (RBA)\Delta K(s_1)ds_1 \\ & - (RBA)\Delta K(s_2)ds_2 \\ & + (RBRA)\Delta K(s_1)\Delta K(s_2)ds_1ds_2 \end{aligned} \quad (2.278)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、 R は、

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.279)$$

で与えられる行列である。(2.278)より、 $M(s_1)$ のTraceを求めると、

$$\begin{aligned} \text{Tr}M &= 2 \cos \Delta \psi_c = 2 \cos \Delta \psi_{c0} - \\ & - (\Delta K(s_1) \beta(s_1) ds_1 + \Delta K(s_2) \beta(s_2) ds_2) \sin \Delta \psi_{c0} \\ & - B_{12} A_{12} \Delta K(s_1) \Delta K(s_2) ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (2.280)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、 B_{12}, A_{12} は、それぞれ、B及びAの(1,2)成分を表す。これらは、(2.226)より、

$$\begin{aligned} A_{12} &= \sqrt{\beta(s_1) \beta(s_2)} \sin(\psi_0(s_2) - \psi_0(s_1)) \\ B_{12} &= \sqrt{\beta(s_1) \beta(s_2)} \sin(\psi_0(s_1 + C) - \psi_0(s_2)) \end{aligned} \quad (2.281)$$

と表される(問、これらを示せ)。(2.280)を見ると、 $\sin \Delta \psi_c$ がゼロに近いとき、 ΔK の一次の項の寄与が小さく、 ΔK の二次まで取る必要があることが理解できる。

ここまでは、リングに二つのエラーがある場合であったが、リング内に、Gradient Errorが分布しているときには、(2.280)を s_1 および s_2 について積分する必要がある。即ち、

$$\begin{aligned} \cos \Delta \psi_{c0} - \cos \Delta \psi_c &= -\frac{\sin \Delta \psi_{c0}}{2} \int_0^C \Delta K(s) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^C ds_1 \int_{s_1}^C ds_2 \Delta K(s_1) \Delta K(s_2) \beta(s_1) \beta(s_2) \times \\ & \sin(\psi_0(s_2) - \psi_0(s_1)) \sin(\psi_0(s_1 + C) - \psi_0(s_2)) \end{aligned} \quad (2.282)$$

となる(問、これを示せ)。

さて、Gradient Errorのリングでの分布が与えられたとき、エラーがない場合のチューンが、整数、又は、半整数に近いと、ベータトロン振動は、不安定になる。以下に、これを示そう。まず、チューンが整数に近い場合を考える。チューンを

$$v = p + \varepsilon \quad (2.283)$$

と置こう。ここで、 p は、チューンの整数部で、 ε は、小さいとする。このとき、 ε の二次まで取って

$$\sin \Delta \psi_{c0} = 2\pi\varepsilon, \quad \cos \Delta \psi_{c0} = 1 - 2\pi^2\varepsilon^2 \quad (2.284)$$

となる(問、これを示せ)。この式を(2.282)に代入し、また、以下では、 ΔK と ε についての二次の項まで残すことを考える。例えば、(2.282)の二重積分の項は、既に、 ΔK の二次式なので、 ε がでてきても無視する(つまりチューンを完全に整数として近似する)ことにする。また、二重積分の項は、積分区間が、

$$\int_0^C ds_1 \int_{s_1}^C ds_2 \quad (2.285)$$

であるが、これを

$$\int_0^C ds_1 \int_0^C ds_2 \quad (2.286)$$

に置き換え、そのかわり、全体を2で割っておく。このようなことに注意して、(2.282)を計算すると、やや長い計算の結果、

$$\begin{aligned} \cos \Delta \psi_c - 1 &= \\ & -2\pi^2\varepsilon^2 - \pi\varepsilon J_0 + \frac{1}{8} (|J_{2p}|^2 - J_0^2) \end{aligned} \quad (2.287)$$

が、得られる。ここで、

$$J_n = \int_0^C \beta(s) \Delta K(s) e^{-in\phi(s)} ds \quad (2.288)$$

であり、また、

$$\phi(s) = \frac{1}{v_0} \psi_0(s) = \frac{2\pi}{\Delta \psi_{c0}} \psi_0(s) \quad (2.289)$$

である(問、(2.287)を導け)。

さて、ベータトロン振動の安定条件は、(2.167)で求めたように、一周のトランスファー・マトリックスのTraceが、2以下になることであった。言い換えると、 $|\cos \Delta \psi_c| \leq 1$ つまり、チューンが実数になることであった。(2.287)の左辺がゼロになる ε を求めると、

$$\varepsilon = -\frac{J_0 \pm |J_{2p}|}{4\pi} \quad (2.290)$$

となり、この二つの根に挟まれた範囲で、ベータトロン振動は、不安定になることがわかる（問、これを示せ）。このように、ベータトロン振動が不安定になる範囲を Stopband と呼ぶ。この Stopband の幅は、(2.290) より、直ちに、

$$\delta v = \frac{|J_{2p}|}{2\pi} \quad (2.291)$$

となる。以上、チューンが整数の場合について述べたが、半整数の場合も同様に計算できて、チューンが、 $v = p + 1/2$ の場合の、Stopband の幅は、

$$\delta v = \frac{|J_{2p+1}|}{2\pi} \quad (2.292)$$

で与えられる。

以上、Gradient Error がある場合の Stopband の存在とその幅について述べた。その幅は、エラーの大きさ（とそのリング内での分布の仕方）に依存する。ところで、Stopband の議論をややわかりにくくしていると筆者が思うのは、Gradient Error の場合のエラーが何からのずれなのか、ややはっきりしないことである。例えば、Steering Error の場合は、デザイン軌道という明確なものが存在し、また、そのデザイン軌道を作り出すための磁場は、明確に定義でき、その以外の余計な（二極）磁場は、誤差であると断言できた。ところが、Gradient Error の場合、デザインの K 値というものがあるとしても、一通りとは限らないし、また多少のエラーが存在するとしても、それも含めて、デザインのラティスだと強弁できなくもない（ラティスとは、主に、収束電磁石をリング内にどう配置し、主にベータ関数が場所の関数としてどうなっているかを表す言葉である）。もし、こう強弁した場合、Stopband は無くなるのであろうか？その答えは、Yes ともいえるし、No ともいえる。その正否の別れ道は、（例えば、Stopband を調べようとする人が）、Gradient Error を完全に知っているかによる。完全にエラーを知っていれば、そのエラーを補正しながら、（原理的には）いくらでも（半）整数のチューンに近づくことができる。（もちろん、これは、原理的な話であって、実際のマシンの場

合の話ではない。実際は、エラーは完全に測定することはできないし、たとえできて、完全に補正することは不可能であろう。）ところが、エラーが存在することを知らずに、そのエラーを全く無視して、もし、エラーがない場合は、安定なオペティックスで、徐々に（半）整数に近づいていったとしよう。そのような場合は、（半）整数にある程度近づくとベータトロン振動は不安定になるはずである。これが、まさに、ここで計算した、Stopband に対応するものである。即ち、ここでやった計算では、まず、Gradient Error があると仮定し、このエラーを無視して、エラーを除くと安定なオペティックスで（半）整数の周りをスキャンした場合に、ベータトロン振動が、不安定になる範囲を調べたのであった。このような意味で、Stopband の幅は、エラーに対する知識の不足を表しているともいえるであろう。

ベータ関数の歪み

さて、いよいよ、Gradient Error によるベータ関数の歪みを計算しよう。 $s = s_2$ の近傍の $\Delta K(s_2) ds_2$ がある時、 s_1 でのベータ関数の歪みを考える。このエラーがあるとき、 s_1 を起点とする一周のトランスファー・マトリックスは、(2.278) において、 $\Delta K(s_1)$ をゼロと置くことによりえられる。

$$M(s_1) = M_0(s_1) - (RBA) \Delta K(s_2) ds_2 \quad (2.293)$$

この行列の (1,2) 成分から、 β が計算されるが、この成分は、

$$\begin{aligned} M_{12}(s_1) &= M_{12}^0 - B_{12} A_{12} \Delta K(s_2) ds_2 \\ &= \beta(s_1) \sin \Delta \psi_{c0} - \beta(s_1) \beta(s_2) \Delta K(s_2) ds_2 \times \\ &\quad \sin(\psi_0(s_2) - \psi_0(s_1)) \sin(\psi_0(s_1 + C) - \psi_0(s_2)) \end{aligned} \quad (2.294)$$

となる（問、これを示せ）。これを、 s_2 について積分して、

$$\begin{aligned} \Delta M_{12}(s_1) &= -\beta(s_1) \int_{s_1}^{s_1+C} ds_2 \Delta K(s_2) \beta(s_2) \times \\ &\quad \sin(\psi_0(s_2) - \psi_0(s_1)) \sin(\psi_0(s_1 + C) - \psi_0(s_2)) \end{aligned} \quad (2.295)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \Delta M_{12}(s_1) &= \Delta(\beta \sin \Delta \psi_c) = \\ & \Delta \beta \sin \Delta \psi_c + \beta(s_1) \cos \Delta \psi_c \cdot \Delta(\Delta \psi_c) \end{aligned} \quad (2.296)$$

であることに注意して、また、(2.276)を用いると、結局

$$\begin{aligned} \Delta \beta(s_1) &= \frac{\beta(s_1)}{2 \sin 2\pi v} \times \\ & \int_{s_1}^{s_1+C} \beta(s_2) \Delta K(s_2) \cos(2\pi v + \psi(s_1) - \psi(s_2)) ds_2 \end{aligned} \quad (2.297)$$

を得る(問、これを示せ)。この式は、Steering ErrorによるCODの発生の式(2.266)と非常によく似ていることに気づくであろう。しかし、違いが三つある。第一の違いは、ある場所に、局在したエラーがあった場合、CODの場合には、その影響が伝搬する位相の進みは、ベータatron振動の位相の進みと同じであるのに対して、ベータ関数の歪みの場合、局在したエラーの影響の伝搬は、ベータatron振動の場合に比べて二倍速く位相が進む。第二に、CODの場合には、CODの大きさは(位相因子を別にして)、エラーがあった場所と観測している点のベータ関数の、1/2乗に比例するのに対して、ベータ関数の歪みの場合それぞれの1乗に比例する。第三の違い。CODの場合、分母に $\sin \pi v$ の項があるので、チューンが整数の場合、CODの大きさが発散する。これを整数共鳴ということは、前に述べた。これに対して、ベータ関数の歪みの場合、(2.297)の分母を見ればわかるように、チューンが整数の時に加えて、半整数の時にも、発散が起こることがわかる。これを半整数共鳴(Half Integer Resonance)と呼び、この共鳴も、加速器の運転上避けなければならない、強い共鳴である(これを何故「共鳴」と呼ぶかに関しては、2.3.6節を参照)。

このように、Gradient Errorによって、ベータ関数が歪むが、歪みにより、ベータ関数が、極端に大きな場所が生じたりすることがある。CODの大きさは(位相因子を別にして)、ベータ関数の、1/2乗に比例するので、このような場合、極端に、CODが大きな場所が生じて、ビームの裾が、真空パイプにかすったりすることが起こりうる。また、ベータ関数が、歪むと、後で述べるクロマティシティ補正に影響を与えたり、さらに後で極く簡単に触れる、ダイナミックアパーチャーの減少を招

いたりすることがあるので、このような意味でも、Gradient Errorをできるだけ小さくする努力は重要である。

2.3.3 Momentum Deviationと Dispersion および Chromaticity

運動量が、nominalな値からずれた粒子に対する運動方程式をもう一度書き下しておくと、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) K(s) \right] x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.249)$$

であった。この方程式を、注意して見てみると、少なくとも、数学的には、Steering ErrorやGradient Errorの場合に扱った方程式と同じ型をしていることに気づくであろう。(2.249)の右辺を見てみると、これは、場所の関数であり、これを、Steering Errorと見做すことが可能である。従って、運動量のずれによって、CODが発生することがわかる。この、運動量のずれによって発生するCODは、後で述べるように、Dispersionと呼ばれる量で表現することができる。

次に、(2.249)の左辺を見ると、運動量のずれの項は、Gradient Errorを与えると見做してよいことに気づくであろう。従って、運動量のずれによって、ベータ関数の歪みや、チューン・シフトが生じることが、直ちに理解できる。この、運動量のずれによるチューン・シフトは、後で述べるように、Chromaticityと呼ばれる量で記述される。

Dispersion

まず、ここでは、運動量のずれによって発生するCODについて考えて見よう。2.3.1節で用いた手法を再び用いるためには、まず、(2.249)の右辺をゼロと置いた同時方程式の解を求めてから、グリーン関数の方法を用いればよい。しかし、通常、加速器で採用されるやり方では、もう少し近似を入れる。即ち、(2.249)の左辺の運動量のずれの項を、小さいとして無視するのである。こうすると、発生するCODの大きさは、 $\Delta p/p_0$ に比例することになり、周期条件を満たす(2.249)の解を、

$$x_e(s) = \eta(s) \Delta p / p_0 \quad (2.298)$$

と置くことができる。このように定義される量 $\eta(s)$ を Dispersion (分散関数) と呼ぶ。(2.298) を (2.249) に代入して、 $\eta(s)$ の満たすべき方程式、

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} + K(s) \eta = \frac{1}{\rho_0(s)} \quad (2.299)$$

が得られる。(2.298) は、周期条件を満たす解であるから、Dispersion も当然次の周期条件を満たす (2.299) の特殊解である。

$$\eta(s+C) = \eta(s) \quad (2.300)$$

$$\eta'(s+C) = \eta'(s) \quad (2.301)$$

この特殊解は、同次方程式の一般解が求められていると仮定すると求まり、(2.266) より、

$$\eta(s) = \int_{s_0}^{s+C} \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)} \cos(\pi\nu + \psi(s) - \psi(s_0))}{2\sin\pi\nu \rho_0(s_0)} ds_0 \quad (2.302)$$

となる (問、これを示せ)。

以上のように、(水平方向の) Dispersion 関数が、求められたが、この積分を用いた表現では、実際の計算は、やりにくいことは容易に想像できる。Dispersion を、実際に計算するときには、(2.302) を用いるのではなく、やはり、トランスファー・マトリックスを用いるのである。以下に、この方法について述べるが、その前に、話を簡単にするため、これまで無視してきた偏向電磁石の Edge Focus (エッジ収束) の効果について、ここで述べておくことにする。

Edge Focus

ここでは、 $\Delta p/p_0$ はゼロであると仮定する。このとき、偏向電磁石の水平方向のトランスファー・マトリックスは、(2.153) より、

$$M_s^H = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.303)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、 θ は、偏向電磁石による曲げ角である。垂直方向のトランスファー・マトリックスは、ドリフト・スペースの場合と同じであるから、

$$M_s^V = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.304)$$

となる。ところで、実は、トランスファー・マトリックスが、この様になるのは、図 2.4 に示したような、セクター型の偏向電磁石の場合である。実際、電子貯蔵リングで用いられるのは、ほとんどの場合 Rectangular 型であるので、この場合のトランスファー・マトリックスを導かなければならない。

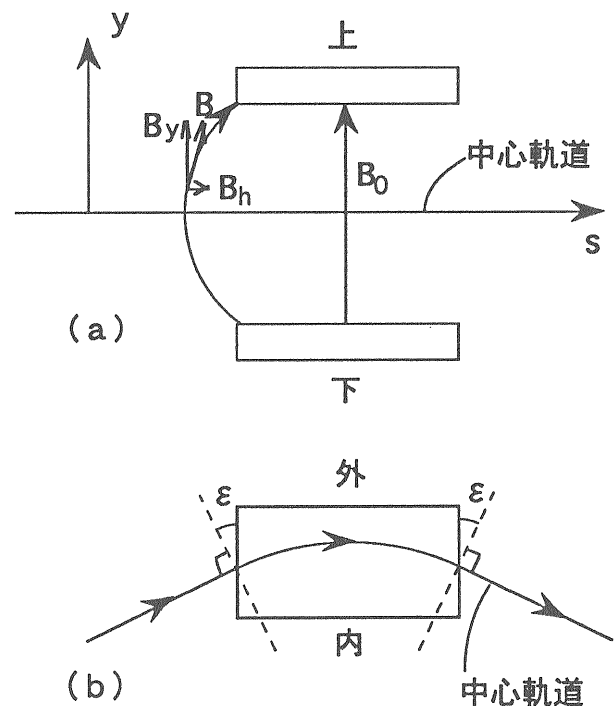


図 2.20

図 2.20 に示すように、ビームの中心軌道と edge のなす角が、入り口、出口とも ϵ である Rectangular 型の偏向電磁石を考えよう。この場合、中心を通る粒子 (この場合は陽電子とする) は、セクター型の電磁石の場合と同じ磁場を感じるようになるが、中心より、x ずれて入射した陽電子は、

電磁石の入り口のedgeで中心軌道を通る粒子に比べて、

$$\Delta s \cong x \tan \varepsilon \quad (2.305)$$

だけ、磁場を感じる長さが短い(問、これを示せ)。従って、この電子は、実質的に、

$$\Delta \theta = \frac{\Delta s}{\rho} = \frac{x}{\rho} \tan \varepsilon \quad (2.306)$$

だけキックを受けたのと、同じことになる(問、これを示せ)。(2.306)の効果は、実質的に、(Thin Lensの) defocusの収束電磁石が、存在するのと同じ効果であり、そのトランスファー・マトリックスは、

$$M_E^H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.307)$$

と表される(問、これを示せ)。また、出口のedgeでも全く同じ種類のキックを受けるので、出口のedgeでのトランスファー・マトリックスも、(2.307)と全く同じになる。

これらより、Rectangular型の偏向電磁石の水平方向のトランスファー・マトリックスは、

$$M_R^H = M_E^H M_S^H M_E^H \quad (2.308)$$

となる。ここで、 $\varepsilon = \theta/2$ であることに注意して、行列の計算をすると、結局、

$$M_R^H = \begin{pmatrix} 1 & \rho \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.309)$$

となることがわかる(問、これを示せ)。このトランスファー・マトリックスは、ドリフト・スペースの場合と同じであり、収束力は消えてしまったことに気づく。この様に、Rectangular型の偏向電磁石では、セクター型の場合に備わっていた、水平方向の収束力が、edge効果のために消えてしまうことがわかる。

次に、垂直方向について調べてみよう(以下の計算は、[2]に従った)。図2.20(a)に示す様に、実際の偏向電磁石には、フリッジ・フィー

ルドと呼ばれる磁場のしめだしが存在する。このフリッジ・フィールドのために、電磁石のedge付近では、磁場の水平面内成分 B_h が、存在することになる。この成分が存在すると、一般には、ビームは、垂直方向に力を受ける。しかし、セクター型の場合、この磁場成分の方向と、ビームの進行方向が同じになるため、力を受けない。一方、Rectangular型の場合は、ビームは、この成分から力を受ける。以下で、この力の影響を計算する。

B_h を、x方向(水平方向)の成分と、s方向(ビームの進行方向)の成分とに分解すると、

$$B_x = B_h \sin \varepsilon \quad (2.310)$$

$$B_s = B_h \cos \varepsilon \quad (2.311)$$

となる(問、これを示せ)。まず、中心を通る陽電子は、対称性から垂直方向に力を受けないが、中心から垂直方向にyだけずれた粒子は、力を受ける。この力による曲げ角は、(2.310)を積分することにより得られるが、(2.310)を積分するかわりに、(2.311)を積分しても、(2.310)の積分を求めることにする。

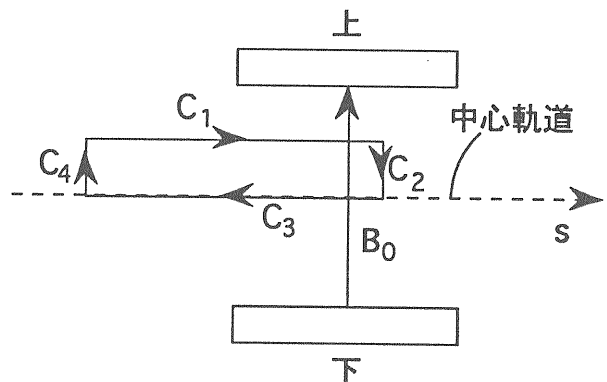


図 2.21

積分路を、図2.21に示す様に、 C_1, C_2, C_3, C_4 に取ると、ストークスの定理より、

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} B_0 dy + \int_{C_1} B_s ds = 0 \quad (2.312)$$

となることがわかる(問、これを示せ)。ここで、 C_3 上では、対称性から、磁場の積分路に沿った成

分がゼロであり、また、積分路 c_4 は、電磁石から充分遠く取り、その上では、磁場は充分小さくなっているとす。さらに、 c_2 は、電磁石の充分なかにあり、edge の影響を受けないものとする。この式より、

$$\cos \varepsilon \int_{c_1} B_h ds = - \int_{c_2} B_0 dy = y B_0 \quad (2.313)$$

となる (問、これを示せ)。従って、この場合の、フリンジ・フィールドによる垂直方向の曲げ角は、

$$\Delta y' = \frac{1}{B_0 \rho} \int_{c_3} B_x ds = \frac{y}{\rho} \tan \varepsilon \quad (2.314)$$

と求められる (問、これを示せ)。従って、キックの向きも考えて、結局、垂直方向の edge focus を表すトランスファー・マトリックスは、Thin Lens 近似して、

$$M_E^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\tan \varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.315)$$

となる (問、これを示せ)。こうして、垂直方向の edge focus の効果は、(ちょうど収束電磁石と場合と同じように)、水平方向とは逆符号で、絶対値は同じになることがわかる。また、垂直方向の電磁石全体のトランスファー・マトリックスは、

$$M_R^H = M_E^H M_S^H M_E^H \quad (2.316)$$

で求められる。この行列の計算より、結局、

$$M_R^V = \begin{pmatrix} 1 - \theta \tan(\theta/2) & \rho \theta \\ -\frac{\tan(\theta/2)(2 - \theta \tan(\theta/2))}{\rho} & 1 - \theta \tan(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (2.317)$$

が得られる (問、これを示せ)。

以上示したように、Rectangular 型の偏向電磁石では、水平方向の収束力はなくなり、垂直方向に収束力が現われた。この効果は、今まで無視してきたが、これまでに、でてきた運動方程式において、K 値のなかに含まれるべきものであった。また、以上のことから、偏向電磁石によるチューンのずれは、主に垂直方向に限られることがわかる。

トランスファー・マトリックスを用いて Dispersion を求める方法

準備が長くなったが、トランスファー・マトリックスを用いて、Dispersion を求めてみよう。

$$x_E = \eta \frac{\Delta p}{p_0} \quad \left(\frac{\Delta p}{p_0} > 0 \right)$$

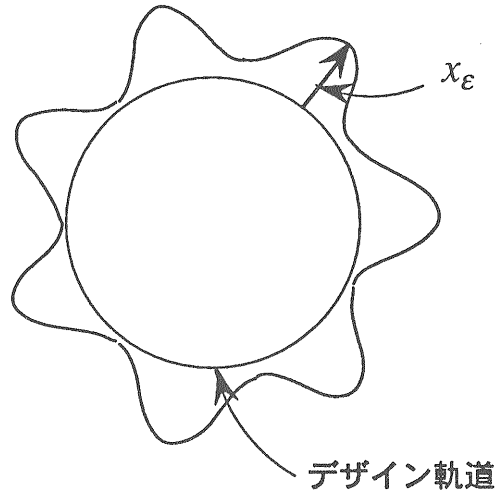


図 2.22

図 2.22 に概念的に示したように、偏向電磁石により、Dispersion が発生する。まず、運動量のずれた粒子の、偏向電磁石での運動をトランスファー・マトリックスを用いて表す方法を示そう。運動を記述する方程式は、

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{\rho_0^2} x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.318)$$

である。まず、 $\Delta p/p_0 = 0$ の場合は、偏向電磁石のなかでの運動は、トランスファー・マトリックスを用いて、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s/\rho_0) & \rho \sin(s/\rho_0) \\ -\frac{\sin(s/\rho_0)}{\rho_0} & \cos(s/\rho_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \quad (2.319)$$

(問、これを示せ)。次に、 $\Delta p/p_0 \neq 0$ の場合についてであるが、この場合、

$$x = \rho_0 \frac{\Delta p}{p_0}$$

が、(2.318) の特殊解になっていることは、すぐに確かめられる (問、これを示せ)。従って、(2.318) の一般解は、

$$x = A \cos\left(\frac{s}{\rho_0}\right) + B \sin\left(\frac{s}{\rho_0}\right) + \rho_0 \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.320)$$

となる (問、これを示せ)。これを微分して、

$$x' = -\frac{A}{\rho_0} \sin\left(\frac{s}{\rho_0}\right) + \frac{B}{\rho_0} \cos\left(\frac{s}{\rho_0}\right) \quad (2.321)$$

を得る。ここで、A、B は、初期条件から決まる定数である。x(0)、x'(0) が与えられた場合、(2.320)、(2.321) で s=0 と置いて、A、B を決定することにより、

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s/\rho_0) & \rho \sin(s/\rho_0) \\ -\frac{\sin(s/\rho_0)}{\rho_0} & \cos(s/\rho_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho(1 - \cos(s/\rho_0)) \\ \sin(s/\rho_0) \end{pmatrix} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.322)$$

を得る (問、これを示せ)。ここで、s=0 を偏向電磁石の入り口とし、偏向電磁石内を電子が走る長さを l とし、s=l と置くと、(2.322) は、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho \sin\theta & \rho(1 - \cos\theta) \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{\text{in}} \quad (2.323)$$

となる (問、これを示せ)。

このように、運動量のずれた粒子の運動は、3行3列のトランスファー・マトリックスを用いて表される。このトランスファー・マトリックスに関して、いくつか注意すべきことを述べる。まず、この行列の3行目の成分は、常に、0,0,1となる。

これは、電磁石では、電子のエネルギーが変えられないので当然である。

次に、(2.323) は、ビームの軌道そのものについての関係であったが、Dispersion についての関係は、(2.323) で、単に、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.324)$$

の置き換えを行えば得られる (問、これを示せ)。

次に、(2.323) は、セクター型の偏向電磁石のトランスファー・マトリックスである (問、これは何故か) ので、rectangular 型の場合のトランスファー・マトリックスを得るには、edge 効果の部分を加えなければならない。

ところで、この節の最初に述べたように、Dispersion を考えるときには、通常、K 値が、運動量に依存する効果は無視する。従って、偏向電磁石以外の場所では、その3行3列のトランスファー・マトリックス M(3) は、下の2行2列のトランスファー・マトリックス M(2) を用いて、

$$M(3) = \begin{pmatrix} M_{11}(2) & M_{12}(2) & 0 \\ M_{21}(2) & M_{22}(2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.325)$$

と表される。この様にして、リングの全ての要素の3行3列のトランスファー・マトリックスが得られる。rectangular 型の場合のトランスファー・マトリックスも、(2.323) と、(2.307) を3行3列に直したものより、(2.308) と同様の掛け算をすることより、求められる (問、このトランスファー・マトリックスを求めよ)。また、以上考えたのは、水平方向の場合であったが、垂直方向も同様に求められる (問、rectangular 型の偏向電磁石の垂直方向の3行3列トランスファー・マトリックスを求めよ)。

さて、以上で、リングの全ての要素の3行3列のトランスファー・マトリックスが求められることがわかったので、これらが求められたと仮定して、これらから Dispersion を求める方法を示そう。まず、(2.323)、(2.324) より、リングのどこか一点で、η および η' が求められれば、その他の点での値は、3行3列のトランスファー・

マトリックスを用いて決まる。次に、リングのある点での η および η' を求める方法を示そう。この目的には、 η および η' を求めたい点を起点にするリング一周の3行3列トランスファー・マトリックスをまず求めておく。この3行3列のトランスファー・マトリックスを、 $m(3)$ とすると、Dispersion は周期条件を満たさなければならないから、その点での η および η' は、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} = m(3) \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.326)$$

の解になっているはずである。 $m(3)$ の要素を m_{ij} で表し、また、 $m(3)$ の通常の2行2列の行列の部分をも $m(2)$ で表すと、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = -(m(2) - I)^{-1} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (2.327)$$

となる(問、これを示せ)。これより、

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \frac{1}{2 - \cos \Delta\psi_c} \begin{pmatrix} 1 - m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & 1 - m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (2.328)$$

が得られる(問、これを示せ)。

ここで、このDispersionに関して、いくつか注意すべきことを述べておく。まず、第一に、(2.249)は、水平方向の運動方程式であり、(デザイン軌道が、水平面内だけに限定されているマシンでは、)理想的には、垂直方向のDispersionは、ゼロになる。但し、Field Strength Errorがあると、垂直方向にも、Dispersionが発生する。但し、垂直方向のエラーのある場合の運動方程式(2.130)には、Dispersionの源になる項がないように見えるが、これは、Field Strength Errorと運動量のずれの掛け算の項を二次の微小量として無視したためであって、より正確にやるには、この項を考慮しなければならない。また、ここでは、運動量のずれによって、K値が変わるという効果は無視したが、これはもちろん一般的には正しくなく、特に運動量のずれが大きいときには、重要である。このよ

うな意味で、おおまかな議論をするときには、ここで述べたDispersionの導出法は、有効であるが、より細かな議論が必要とされる場合には、修正が必要なこともある。

Dispersion 関数の重要性

ここで述べたDispersionという量は、加速器の設計においては、ベータ関数と並んで重要な量である。この量が重要な最も大きな理由は、第4章で述べるようにこのDispersionは、エミッタンスと関係が深いからである。エミッタンスは、Dispersionだけから決まる量ではないが、乱暴な言い方をすると、Dispersionが(リング平均で)大きな場合は、エミッタンスが大きく、Dispersionが小さい場合は、エミッタンスも小さくなる。放射光マシンでは、一般に低いエミッタンスが望ましいので、このDispersionがリングの場所の関数としてどうなるかは、重要である。また、高エネルギーのマシンでは、垂直方向のエミッタンスを小さくしたい場合が多いから、先に述べた、Field Strength Errorから生じる垂直方向のDispersionを小さくすることが重要な場合がある。

次に、Dispersionは、後で述べるChromaticityと呼ばれる量を補正するときに必要な量という意味で重要である。

もう一つ、Dispersionが重要な理由は、この後すぐ述べるように、この量をリング一周積分して得られるMomentum Compaction Factorという量が、第3章で述べるシンクロトロン振動を記述するときに必要な基本的な量であるからである。

最後に、このテキストで扱う範囲外であるが、高周波空洞が置かれている場所に(大きな)Dispersionがあると、ビームの運動が不安定になることがある。このことを避けるために、通常、この高周波空洞の場所には、(水平、垂直の両方向とも)Dispersionが、ゼロになるように設計する。この意味でも、Dispersionは加速器の設計に関係する。また、Field Strength Errorによって、このゼロに設計Dispersionが有限の値をもつようになるから、この意味においても、このエラーから生じるDispersionを小さくすることは、重要になる。

Momentum Compaction Factor

ここで、Dispersionに関連する重要な量として、Momentum Compaction Factorについて述べておこう。この量は、第3章で述べるシンクロトロン振動を記述するときに必要な量になる。

前項で述べたように、Dispersion という量は、運動量のずれた粒子に対する COD を与える量であった。図 2.22 に概念的に示す様に、 $\Delta p > 0$ の粒子は、通常リングの外側を通る。つまり、通常、 $\eta > 0$ である。このことは、運動量の大きな粒子は、偏向電磁石で曲げにくいので、リングの外を通ると考えれば理解できるであろう。図からわかるように、運動量の大きさによって、閉軌道の長さ（周長）が異なる。一般に、運動量の大きな粒子ほど、周長が長い。デザイン軌道の周長を（これまでどおり） C と書いて、また Δp を持った粒子の周長と $\Delta p = 0$ の粒子の周長との差を ΔC と書くことにすると、Momentum Compaction Factor α_c は、

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_c \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.329)$$

で定義される。通常、この Momentum Compaction Factor は、記号 α で表されることが多いが、本テキストでは、Twiss parameter の α と区別するために、 α_c という記号を用いることにする。

(2.329) で定義された α_c は、Momentum Compaction Factor と呼ばれるが、筆者は、この名前の意味するところが、はっきりしないと思う。「周長膨張率」とでも呼んだ方がよいという人もいる。そうではあるが、本テキストでは、慣例に従って、以下でも、Momentum Compaction Factor という用語をそのまま使うことにする。

では、この Momentum Compaction Factor を求めてみよう。まず、偏向電磁石のなかで、 Δp を持った粒子と $\Delta p = 0$ の粒子の軌道長の差を計算しよう。図 2.23 に示すように、偏向電磁石のなかで Δp を持った粒子の軌道長 dl と $\Delta p = 0$ でデザイン軌道走る粒子の軌道長 ds の関係は、

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(dl')^2 + (x'_\epsilon ds)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{x_\epsilon}{\rho_0}\right)^2 + (x'_\epsilon)^2} ds \end{aligned} \quad (2.330)$$

となる（問、これを示せ）。ここで、前にやったように、 x_ϵ/ρ_0 と x'_ϵ を同程度の微小量とし、

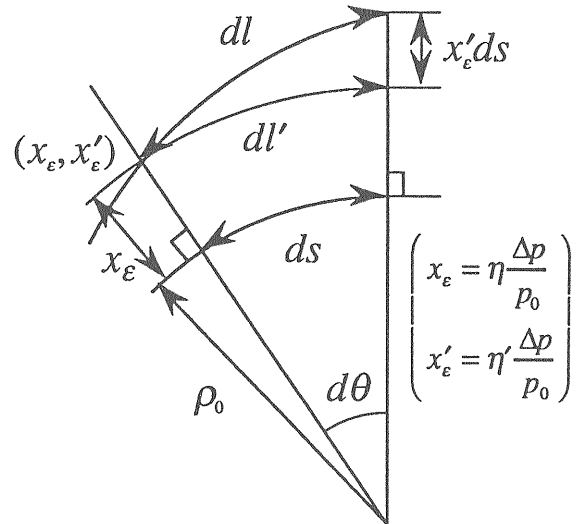


図 2.23

その最低次まで取ると、

$$dl = \left(1 + \frac{x_\epsilon}{\rho_0}\right) ds \quad (2.331)$$

となる（問、これを示せ）。これで、偏向電磁石のなかでの軌道長の差が求められた。ここでやった計算の過程からわかるように、 ρ_0 が無限大の場合第 1 近似では、運動量による軌道長の差がない。従って、収束電磁石やドリフト・スペースでの軌道長の変化はこの近似では、考慮する必要がなく、偏向電磁石についてのみ考えればよいことがわかる。

この様にして、

$$\Delta C = \oint \frac{x_\epsilon}{\rho_0} ds \quad (2.332)$$

であることがわかる（問、これを示せ）。この式と、(2.298) より、

$$\alpha_c = \frac{1}{C} \oint \frac{\eta(s)}{\rho_0(s)} ds \quad (2.333)$$

となる（問、これを示せ）。

Chromaticity

もう一度、(2.249)に戻ろう。

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) K(s) \right] x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.249)$$

先程、Dispersionを求める際には、右辺の $\Delta p/p_0$ の項のみを考慮し、左辺の $\Delta p/p_0$ に依存する項は無視した。ここでは、この項の影響を調べよう。この項は、Gradient Errorと考えられ、

$$\Delta K(s) = -\frac{\Delta p}{p_0} K(s) \quad (2.334)$$

と置けば、2.3.2節の議論がそのまま使える。このとき述べたように、Gradient Errorの主な影響は、チューン・シフト、ベータ関数の歪み、Stopbandの発生であった。

まず、チューン・シフトを計算しよう。この運動量のずれによるチューン・シフトは、(2.276)より直ちに、

$$\Delta \nu = -\frac{1}{4\pi} \int_0^c \beta(s) K(s) ds \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.335)$$

と求められる(問、これを示せ)。このチューン・シフトは、マイナスの数である。これは、エネルギーが高いと実質的に収束電磁石の強さが弱くなったと考えられることからわかる。ここで、

$$\Delta \nu = \xi \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.336)$$

により、(Linear)Chromaticity(クロマチシティ)と呼ばれる量 ξ を定義しよう。このChromaticityは、運動量のずれによるチューン・シフトの大きさの目安を与える。(2.335)の場合、Chromaticityは

$$\xi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^c \beta(s) K(s) ds \quad (2.337)$$

となる。これを、Natural Chromaticityと呼ぶ。このChromaticityは、収束電磁石が存在するかぎり原理的に避けることができないものである。(2.337)からもわかるように、このNatural Chromaticity

の絶対値は、ベータ関数の値が大きいと大きくなる。高エネルギー実験で用いられる衝突型の加速器では、衝突点に最も近い収束電磁石の場所でのベータ関数が非常に大きくなるので、この収束電磁石から発生するChromaticityが大きくなり、これからの寄与により全体のNatural Chromaticityも大きくなる可能性がある。例えば、KEKBの低エネルギーリングの場合、

$$\xi_x = -70.5, \quad \xi_y = -93.5$$

程度である(これはかなり大きな値といえる)。 $\Delta p/p_0 = \pm 1\%$ の範囲ぐらいでは、粒子の運動が安定である必要があると仮定すると、この範囲で、チューンの広がり、

$$\Delta \nu_x \approx \pm 0.7, \quad \Delta \nu_y \approx \pm 0.9$$

ぐらいになり、この範囲にあるどれかの粒子が、整数共鳴や、半整数共鳴など危険な共鳴にぶつかることにより、運動が不安定になる。また、本テキストでは、説明しないが、Chromaticityの絶対値が大きいと、Head-Tail Instabilityと呼ばれるものにより、ビームの運動が不安定になることが知られている。これを避けるためには、Chromaticityの値をほぼゼロにすることが必要である。

このように、何もしないと大きな絶対値をもつNatural Chromaticityを補正して、Chromaticityの値をほぼゼロにする必要があるが、この補正は、六極電磁石を用いて行うことができる。この様な補正を、Chromaticity補正と呼ぶ。この補正のやり方については、後で述べる。

次に、運動量のずれによるベータ関数の歪みについては、(2.297)より直ちに、

$$\Delta \beta(s_1) / (\Delta p/p_0) = \frac{\beta(s_1)}{2 \sin 2\pi \nu} \times \int_{s_1}^{s_1+c} \beta(s_2) K(s_2) \cos 2(\pi \nu + \psi(s_1) - \psi(s_2)) ds_2 \quad (2.338)$$

となる(問、これを示せ)。この量もまた補正の対象になることがある。また、Stopbandの幅については、 $\nu \sim p$ (整数)の場合(2.288)、(2.291)より、

$$\frac{\delta v}{\Delta p/p_0} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^c \beta(s) K(s) e^{-2ip\phi(s)} ds \right| \quad (2.339)$$

となる (問、これを示せ)。

2.3.4 Steering Error, Gradient Error および Momentum Deviation が共存する場合

前節までは、Steering Error, Gradient Error および Momentum Deviation それぞれ単独で存在する場合を考えたが、これらのエラーが共存する場合どうなるかここで見てみよう。

この場合の水平方向の運動方程式は、(2.129)より、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) K + \Delta K \right] x \\ = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} - \Delta \left(\frac{1}{\rho_x} \right) \end{aligned} \quad (2.340)$$

となる。求めたいのは、この方程式の一般解であるが、まず右辺をゼロと置いた同次方程式の一般解について考えよう。前提として、 $\Delta p = \Delta K = 0$ の場合の一般解は、トランスファー・マトリックスを用いて求められていると仮定する。そうすると、同次方程式の一般解を求めることは、 Δp と ΔK によるベータ関数の歪みを求めることに帰着する。このベータ関数の歪みは、(2.297)において、

$$\Delta K \rightarrow \Delta K - K \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.341)$$

と置き直せば、直ちに計算できる。こうして計算されたベータ関数を用いて、同次方程式の一般解が得られる。この解は、ベータatron振動を表すから、 x_β と書くことにすると、(2.222)より、

$$x_\beta(s) = \sqrt{W_x \beta_x(s)} \cos(\psi_x(s) + \psi_0) \quad (2.342)$$

が得られる。

次に、非同次方程式の特殊解であるが、この特殊解としては、周期条件を満たすものを考える。右辺が Steering Error のみの場合の特殊解は、(2.266) に与えられている。これは、COD を表すから、これを x_{COD} と書くことにすると、

$$\begin{aligned} x_{\text{COD}}(s) = \\ \int_s^{s+c} \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin\pi\nu} \cos(\pi\nu + \psi(s) - \psi(s_0)) \Delta \left(\frac{-1}{\rho_x(s)} \right) ds_0 \end{aligned} \quad (2.343)$$

である。ここで注意すべきことは、(2.266) では、 $\Delta p = \Delta K = 0$ と仮定されていたが、(2.342) が (2.340) の特殊解 (の構成要素) になるためには、積分の中のベータ関数や位相が Δp と ΔK によるベータ関数の歪みを考慮したものである必要があることである。但し、これを無視して、 $\Delta p = \Delta K = 0$ と近似してしまうことが多いようである。

次に、 $\Delta p \neq 0$ の場合の特殊解であるが、これは、運動量のずれた粒子に対するCODを表すが、(2.298)より、

$$x_e(s) = \eta(s) \Delta p / p_0 \quad (2.298)$$

と書き、Dispersion η を用いて書き表す。このDispersionは、(2.302)より、

$$\begin{aligned} \eta(s) = \\ \int_s^{s+c} \frac{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2\sin\pi\nu} \frac{\cos(\pi\nu + \psi(s) - \psi(s_0))}{\rho_0(s_0)} ds_0 \end{aligned} \quad (2.302)$$

と書けるが、この場合も、厳密には、積分の中のベータ関数や位相が Δp と ΔK によるベータ関数の歪みを考慮したものである必要がある。そうすると、Dispersionは、 Δp や ΔK に依存することになるが、通常は、これを無視して、 $\Delta p = \Delta K = 0$ と近似してしまうことが多いようである。

このようにすると、 $x_{\text{COD}} + x_e$ は、周期条件を満たす (2.340) の特殊解になる。従って、その一般解は、

$$x(s) = x_{\beta}(s) + x_{\text{COD}}(s) + x_{\epsilon}(s) \quad (2.344)$$

と表される。

2.3.5 x-y Coupling の簡単な場合

x-y Coupling を本格的に取り扱うには、粒子の運動をハミルトン形式で記述するのが、通常のやり方である。このような取り扱いには他の文献に譲ることにして、本テキストでは、一個のスキュー収束電磁石がある場合を、これまで述べてきた取り扱いの枠組みの範囲で、極く簡単に取り扱うことにする（ここでの扱いは、[11] に従った）。もちろん、このような取り扱いでは不十分なので、読者は、参考文献 [4]、[9]、[11]、[12] 等を参照していただきたい。

Coupling source

ここまでは、水平方向の運動と垂直方向の運動を独立に扱ってきた。しかしながら実際の加速器には、これらをカップルさせるメカニズムが存在する。話を線型な範囲に限っても、大別して二種類の Coupling source が存在する。第一は、2.1.4 節で述べた電磁石の設置誤差に由来するものである。即ち、収束電磁石の回転誤差と六極電磁石の垂直方向の設置誤差のために、Skew Focusing Error が生じる。この影響は、エラーがある場合の運動方程式 (2.129)、(2.130) に取り込まれている。もう一つの Coupling source としては、第1章で述べた、ソレノイド電磁石がある。この電磁石は、高エネルギー物理実験の検出器の一部をなすものである。ソレノイド電磁石によって、水平方向の運動と垂直方向の運動の結合 (x-y Coupling) が生じるが、これを補正して、ソレノイド電磁石の付近以外では、x-y Coupling がなくなるようにするために用いられるのが、スキュー収束電磁石である。この電磁石は、既に述べたように、収束電磁石を 45 度軸方向に回転させたもので、それ自体としては、Coupling source になりうるものであるが、ソレノイド電磁石の周りにうまく配置してやることにより、ソレノイド電磁石のよって生じた x-y Coupling をキャンセルすることができるのである。

収束電磁石の回転誤差と六極電磁石の垂直方向

の設置誤差のために生じる x-y Coupling は、スキュー収束電磁石によるものと基本的に同じものである。結局、Coupling source としては、スキュー収束電磁石とソレノイド電磁石の二種類になる。ここでは、一個のスキュー収束電磁石がある場合だけを扱い、ソレノイド電磁石については、扱わないが、次に、ソレノイド電磁石によって、何故 x-y Coupling が生じるかを、極く簡単に述べておくことにする。

ソレノイド電磁石

ソレノイド電磁石は、他の電磁石と異なり、(基本的には) ビームの進行方向のみに磁場成分をもつ電磁石である。もちろん、磁場の方向と平行に走る粒子は、磁場から力を受けないが、実際にはビームを構成する粒子には、角度広がりがあるので、個々の粒子はその角度に応じて力を受ける。

ソレノイド磁場の方向をデザイン軌道方向と仮定する。ソレノイド磁場の強さを B_{sol} とし、

$$K_s = \frac{B_{\text{sol}}}{B\rho} \quad (2.345)$$

により、ソレノイド磁場に対する K 値を定義する。これを用いて、ソレノイド磁場中の電子の運動方程式は、

$$x'' = -K_s y' \quad (2.346)$$

$$y'' = +K_s x' \quad (2.347)$$

となる (問、これを示せ)。この様にして、ソレノイド磁場により、x-y Coupling が生じる。

一個のスキュー収束電磁石がある場合

簡単な例として、2.1.4 節で述べた収束電磁石に回転誤差がある場合を考えて見よう。この回転誤差の大きさを $\Delta\theta_0$ とすると、(2.98)、(2.129)、(2.130) より、この収束電磁石中での運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K(s)x = -2\Delta\theta_0 K(s)y \quad (2.348)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - K(s)y = -2\Delta\theta_0 K(s)x \quad (2.349)$$

となる (問、これらを示せ)。簡単のため、この

収束電磁石をThin Lens 近似すると、

$$\Delta x' = -k(x + 2\Delta\theta_Q y) \quad (2.350)$$

$$\Delta y' = k(y - 2\Delta\theta_Q x) \quad (2.351)$$

となる (問、これらを示せ)。これをマトリックスで表示すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 1 & -2\Delta\theta_Q k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\Delta\theta_Q k & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{in} \quad (2.352)$$

となる (問、これらを示せ)。このトランスファー・マトリックスは、通常の収束電磁石の部分とスキュー収束電磁石の部分に分けることができる。即ち、(2.352)のトランスファー・マトリックスをMとすると、

$$M = M_Q M_{skew} = M_{skew} M_Q \quad (2.353)$$

となる、ここで、

$$M_Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \quad (2.354)$$

$$M_{skew} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\Delta\theta_Q k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\Delta\theta_Q k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.355)$$

である (問、これらを示せ)。従って、x-y Couplingについて考える際には、(2.355)で表される純粋なスキュー収束電磁石だけを考えればよいことがわかる。

このスキュー収束電磁石による摂動は小さいと仮定して、粒子の運動は基本的には、通常のベータatron振動であるとする。このベータatron振

動を、

$$\hat{x} = \frac{x}{\sqrt{\beta_0}} = a \sqrt{\frac{\beta_x}{\beta_0}} \cos \psi_x \quad (2.356)$$

$$\hat{x}' = \alpha_x \hat{x} + \beta_x x' = -a \sqrt{\frac{\beta_x}{\beta_0}} \sin \psi_x \quad (2.357)$$

$$\hat{y} = \frac{y}{\sqrt{\beta_0}} = b \sqrt{\frac{\beta_y}{\beta_0}} \cos \psi_y \quad (2.358)$$

$$\hat{y}' = \alpha_y \hat{y} + \beta_y y' = -b \sqrt{\frac{\beta_y}{\beta_0}} \sin \psi_y \quad (2.359)$$

と表そう。ここで、 β_0 は、規格化のための適当なベータの値である。スキュー収束電磁石による摂動のために、このベータatron振動の振幅 a, b と位相 ψ_x, ψ_y が変化すると考える。まず、位相の変化は、Thin Lens 近似しているので、 x, y は変化しないと考えて、(2.356)、(2.358)より、

$$\Delta \psi_x = \frac{\Delta a}{a} \cot \psi_x \quad (2.360)$$

$$\Delta \psi_y = \frac{\Delta b}{b} \cot \psi_y \quad (2.361)$$

となる (問、これらを示せ)。ここで、振幅の変化は小さいとして、 $a/\Delta a, \Delta b/b$ のそれぞれ一次の微小量まで取った。

(2.355)による x', y' の変化は、振幅と、位相の変化を引き起こし、その量は、

$$\Delta a = 2\Delta\theta_Q k \sqrt{\beta_x \beta_y} b \sin \psi_x \cos \psi_y \quad (2.362)$$

$$\Delta b = 2\Delta\theta_Q k \sqrt{\beta_x \beta_y} a \sin \psi_y \cos \psi_x \quad (2.363)$$

$$\Delta \psi_x = 2\Delta\theta_Q k \sqrt{\beta_x \beta_y} \frac{b}{a} \cos \psi_x \cos \psi_y \quad (2.364)$$

$$\Delta \psi_y = 2\Delta\theta_Q k \sqrt{\beta_x \beta_y} \frac{a}{b} \cos \psi_x \cos \psi_y \quad (2.365)$$

となる (問、これらを示せ)。(2.362)、(2.363)は又、

$\Delta a =$

$$\Delta\theta_Q k \sqrt{\beta_x \beta_y} b \left\{ \sin(\psi_x + \psi_y) + \sin(\psi_x - \psi_y) \right\} \quad (2.366)$$

$\Delta b =$

$$\Delta\theta_Q k \sqrt{\beta_x \beta_y} a \left\{ \sin(\psi_x + \psi_y) - \sin(\psi_x - \psi_y) \right\} \quad (2.367)$$

とも書ける (問、これらを示せ)。このように、スクュー収束電磁石による振幅の増大は、位相の \sin 関数になるので、一般には、何周もの位相平均を取ると、消えてしまうことがわかる。しかし、何周もの平均をとっても、消えずに効果が積み重なる可能性がある場合がある。それは、水平方向のチューンと、垂直方向のチューンの和又は差が整数に近い場合であって、この場合、(2.366) の \sin 関数のどちらかが、毎回同じ位相でビームが回ってくることになる。

(2.366)、(2.367) より、

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}, \quad \nu_x + \nu_x = \text{integer} \quad (2.368)$$

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{\Delta b}{b}, \quad \nu_x - \nu_x = \text{integer} \quad (2.369)$$

となることがわかる (問、これらを示せ)。これらを積分することにより、運動の定数は、

$$a^2 - b^2 = \text{const.}, \quad \nu_x + \nu_x = \text{integer} \quad (2.370)$$

$$a^2 + b^2 = \text{const.}, \quad \nu_x - \nu_x = \text{integer} \quad (2.371)$$

となる (問、これらを示せ)。

まず、 $\nu_x + \nu_x = \text{integer}$ の場合であるが、この場合、振幅の絶対値の差が保存する。従って、水平、垂直の両方向とも、振幅がどんどん増大する可能性がある。このようにしてビームが不安定になる現象を、($\nu_x + \nu_x = \text{integer}$ であるので) 和共鳴 (Sum Resonance) と呼ぶ。この和共鳴も危険な共鳴であり、加速器の通常の運転では、チューンを和共鳴の近くを選ぶことは、避けなければならない。これに対して、 $\nu_x - \nu_x = \text{integer}$ の場合は、差共鳴 (Difference Resonance) と呼ばれるが、この場合、振幅の絶対値の和が保存する。従って、振幅がどんどん増大することなく、和共鳴に比べると危険性は低い共鳴といえる。しかしながら、この差共鳴により、水平方向と垂直方向のエネル

ギーのやり取りのために、本来小さい垂直方向のエミッタンスが、水平方向と同じぐらい大きくなることもある。高エネルギー実験では、通常垂直方向のエミッタンスは、小さくしたいことが多いから、やはり、この差共鳴の近くでマシンを運転することは、通常避けられる。但し、放射光実験において、丸いビームが欲しいときなど、わざと、この差共鳴の近くへチューンをもっていくことも、まれにはある。

2.3.6 Chromaticity 補正 と Nonlinear effect について

非線型効果 (Nonlinear Effect) は、大変内容豊富な現象であり、本テキストの限られた範囲内では、充分述べ尽くすことができない。ここでは、極く表面的に概観することに留めるので、学習意欲のある読者は、参考文献 [12] 等で補っていただきたい。

Nonlinear Element

前節まで、我々は、粒子の線型な運動のみを扱ってきた。即ち、運動方程式は、 z, z', z'' ($z = x$ or y) の一次の項のみを含んでいた。しかし、実際の加速器には、色々な Nonlinear Element が存在し、場合によっては、それらが、重要な (あるいは重大な) 効果を及ぼすことがある。数ある Nonlinear Element の中で、通常最も重要なのは、六極電磁石である。この電磁石は、後で述べるように Chromaticity 補正に不可欠のものであるが、逆にその非線型効果によって、ビームに悪い影響を与えることがある、両刃の剣のような存在である。その他の Nonlinear Element としては、パンチの重心振動を押さえることを目的として、リングに八極電磁石を導入することもある。もちろんこの八極電磁石も、ビームに害を及ぼすことがある。これらの電磁石は、わざとリングに入れられるものであるが、その他、何らかの理由で生じてしまう Nonlinear Element もある。例えば、電磁石の製作誤差によるものや電磁石のフリッジ・フィールドの非線型磁場などがこれに当たる。又、電磁石には、その磁極の長さが有限であることから生じる非線型磁場も存在する。さらに、衝突型の加速器では、相手のビームと衝突する時に、この相手のビームから受ける力から非線型である。最後に、2.1.5 節

で運動方程式を導くときに切り捨てた非線型項が存在することも、記憶に留めておく必要がある。

Nonliner Motion の概観

前節まで、我々は、粒子の線型な運動のみを扱ってきた。これは、チューンが危険な共鳴線からある程度はなれており、且つ振動振幅が小さいときはかなり良い近似である。しかし逆にいうと、共鳴線に近い場合や振動振幅が大きな場合は、非線型な効果 (Nonliner Effect) の影響を考慮する必要がでてくる。(ここで共鳴線という言葉を用いたが、これは、水平方向のチューンと垂直方向のチューンを横軸と縦軸に取った平面において、共鳴条件がある直線で表されることを意味している。) ここでいう共鳴線は、前節までに述べた整数共鳴などの線型な共鳴だけではなく、非線型効果によって新たに生じる共鳴線をも意味している。非線型効果によって、どのような共鳴線が生じるかは、後で簡単に述べる。

次に、振動振幅が大きな場合の粒子の運動であるが、振幅がある程度大きくなると、位相平面での粒子の運動が、線型な場合から歪んでくる。線型な範囲内では、図 2.17 で示したような粒子の運動を表す楕円は、 W (Courant-Snyder Invariant) の大きさによってその大きさを変えるが、型はすべて相似であった。ところが、非線型効果を考慮すると、振幅がある程度大きくなると、線型の場合の楕円から歪んでくるのである。こうなると例えば、チューンの値が振幅に依存することになる。又、位相平面 (空間) での運動が線型な場合から大きく歪むと実質的にエミッタンスが大きくなることも起こる (エミッタンスが (実質的に) 大きくなるとビームの寿命が短くなることもある)。このような楕円の歪みは、共鳴線に近い場合に大きい。

さらに振幅が大きくなると、粒子の運動は安定でなくなり、振幅がどんどん大きくなるような現象が生じる。つまり、非線型効果によって、安定に運動できる振動振幅が制限されることになる。この安定に運動しうる振動振幅の最大値をダイナミック・アパーチャーと呼ぶ。(ここで、振動振幅はリングの場所によって異なることに注意しよう。つまり、ベータ関数の大きなところでは、振動振幅が大きく、ベータ関数の小さなところでは、振動振幅が小さい。このため、リング固有のアパーチャーの値を示したいときは、振動振幅を 2 乗

してその場所でのベータ関数を割ることにより、不変量に直すこともある。このように定義されたダイナミック・アパーチャーを (ダイナミック) アクセプタンスと呼ぶことがある。)

このダイナミック・アパーチャーは一般にチューンに大きく依存し、共鳴線の近くでは狭いことが多いが、共鳴線から離れたチューンを用いても、一般にダイナミック・アパーチャーは有限の値になる。

Chromaticity 補正

ここでは、Nonliner Element が役に立つ例として、六極電磁石による Chromaticity 補正について述べる。この補正は、通常のリング加速器においては、何度も述べたように、必ず必要な、重要な補正である。

まず何を補正するかであるが、最も基本的な補正としては、(2.337) で計算される Natural Chromaticity を補正して、(2.336) で定義される Chromaticity をゼロ近くにすることが挙げられる。この補正を、Linear Chromaticity 補正と呼ぶ。即ち、(2.336) では、暗黙のうちに運動量のずれによるチューンシフトが、このずれの量に比例することを仮定しており、その比例係数を Linear Chromaticity と呼ぶのである。しかし、運動量のずれが大きくなってくると、この近似は破れて、チューンシフトが運動量のずれの二次関数、三次関数、……になって来る。このような Nonlinear Chromaticity が大きいマシンでは、安定に運動させたい運動量のずれの範囲で、チューン・シフトをゼロ近くに押さえるような補正を行うことがある。例えば、KEKB のデザインでは、このような Nonlinear Chromaticity 補正が行われている。もう一つのやり方としては、Linear Chromaticity 補正に加えて、(2.338) で示された運動量のずれによるベータ関数の歪み (の運動量に Linear な部分) を補正するマシンもある。例えば、トリスタンの主リングでは、Linear Chromaticity 補正に加えて、衝突点および (リングの曲線部のちょうど真ん中の) 対称点と呼ばれる場所でのベータ関数の歪みを打ち消すような補正を行っている。

次に、具体的な補正のやり方であるが、ここでは、Linear Chromaticity 補正のやり方のみを述べることにする。まず、2.1.4 節で述べた六極電磁石の設置誤差がある場合を、思い出していただきたい。六極電磁石に水平方向の設置誤差があると、(2.101) からわかるように、この六極電磁石

に加えて、その場所に収束電磁石があることと同じになる。即ち、

$$\begin{aligned} & \text{六極電磁石+水平方向の設置誤差} \\ & = \text{六極電磁石+収束電磁石} \end{aligned}$$

である。ところで、これは六極電磁石の設置誤差の場合であったが、六極電磁石の場所にCODがあつて、ビームの中心が六極の中心からずれている場合も同じ効果になることがわかるであろう。即ち、

$$\begin{aligned} & \text{六極電磁石+水平方向のCOD} \\ & = \text{六極電磁石+収束電磁石} \end{aligned}$$

である。ところで、既に述べた様に粒子のCODは、(Dispersionがゼロでない場所では)その運動量に依存する。従つて、上の等式におけるCODの大きさは、運動量に依存し、従つて又、上の等式における収束電磁石の強さは、運動量に依存するのである。さて、Chromaticityは、運動量によって、収束電磁石の実質的な強さが異なることから生じた。これらのことより、Dispersionがある場所に六極電磁石を置くことにより、Chromaticityが補正できる可能性があることが理解できるであろう。

以上は定性的な議論であるが、これを数式で追うと以下のようなになる。簡単のために、Steering Error, Focusing Error, Skew Focusing Errorは、存在しないとしよう。この場合の六極電磁石を含めた運動方程式は、(2.129)、(2.130)、(2.133)、(2.134)より、

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) K(s) \right] x \\ & = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{1}{2} K_2 (x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2.372)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) K(s) y = K_2 xy \quad (2.373)$$

となる(問、これらを示せ)。ここで、xを

$$x = x_\beta + \eta_x \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.374)$$

と置こう。これを、(2.372)、(2.372)

に代入し、 $\Delta p/p_0$ の二次の項を無視すると、

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x_\beta}{ds^2} + \left[\frac{1}{\rho_0^2} + K \right] x_\beta \\ & = \left[K - \eta K_2 \right] \frac{\Delta p}{p_0} x_\beta - \frac{1}{2} K_2 (x_\beta^2 - y^2) \end{aligned} \quad (2.375)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - Ky = \left[-K + \eta K_2 \right] \frac{\Delta p}{p_0} y + K_2 x_\beta y \quad (2.376)$$

となる(問、これらを示せ)。ここで再び、 x_β, y の二次以上の項を無視すれば、これらの方程式は、Focusing Errorがある場合の方程式に帰着し、(2.276)と(2.336)よりLinear Chromaticityは、

$$\xi_x = -\frac{1}{4\pi} \int_0^c \beta_x (K - \eta K_2) ds \quad (2.377)$$

$$\xi_y = -\frac{1}{4\pi} \int_0^c \beta_y (-K + \eta K_2) ds \quad (2.378)$$

となる(問、これらを示せ)。Linear Chromaticity補正とは、 ξ_x と ξ_y をほぼゼロにすることであり、これらの式より、最低2種類の六極電磁石があれば、この補正は可能なことがわかる。実際、トリスタンARでは、2種類の六極電磁石を用いて、このLinear Chromaticity補正のみを行っている。

この六極電磁石にも K_2 の符号に対応して、収束の六極電磁石(SF電磁石、 $K_2 > 0$)と発散の六極電磁石(SD電磁石、 $K_2 < 0$)がある。例えば、SF電磁石は、水平方向のChromaticityを増やし補正の方向に働くが、垂直方向のChromaticityを減少させ補正に逆行するように働く。SD電磁石では、状況は逆になる。

このような状況で、水平、垂直の両方向のChromaticityを補正するためには、SF電磁石をQF電磁石(収束の四極電磁石)、SD電磁石をQD電磁石(発散の四極電磁石)の傍に置く必要がある。これは、QF電磁石の傍では、水平方向ベータ関数が大きく、垂直方向のそれは小さいためそこに置かれたSF電磁石は、水平方向のChromaticityを大き

く増やし、垂直方向のChromaticityをわずかに減少させる。QD電磁石の傍に置かれたSD電磁石では、状況は逆になる。この様にして、両方向のLinear Chromaticityが補正できるのである（問、これを示せ）。

Nonlinear Elementによる共鳴

ここでは、非線型効果によって、どのような共鳴線が生じるかを極く簡単に述べる（ここでの取り扱いは、参考文献 [11] によった）。非線型磁場はエラーと考えられるので、もう一度エラーがある場合の方程式を考えよう。この場合の方程式は、(2.129)、(2.130)で与えられているが、ここでは、方程式の書き方を少し変える。ここでは水平方向の方程式を考えよう。(2.126)に対応する磁場の展開式を、偏向電磁石と、収束電磁石によるデザイン磁場とそれ以外に分けて、

$$B_y = B_{y0} + B'_x + \Delta B \quad (2.379)$$

と書くことにする。運動量のずれはないと仮定すると運動方程式は、

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_x(s)x = -\frac{\Delta B(s)}{B\rho_0} \quad (2.380)$$

となる（問、これを示せ）。但し、

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho_0(s)^2} + K(s) \quad (2.381)$$

である。(2.380)は、Field Strength Errorがある場合の方程式に似ているが、ここでは、 ΔB は、誤差磁場一般を表すことに注意。

ここで、Courant-Snyder変換と呼ばれる変換を行おう。即ち、まず、独立変数を s から、次に定義する ϕ に変換する。

$$\phi = \frac{\psi_x(s)}{v_x} = \frac{1}{v_x} \int_0^s \frac{ds}{\beta_x} \quad (2.382)$$

ここで、ベータ関数はエラーがない場合のものである。さらに、 x から、次に定義される ζ に変換しよう。

$$\zeta(\phi) = \frac{x(s)}{\sqrt{\beta_x(s)}} \quad (2.383)$$

これらを運動方程式に代入して少し計算すると、

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} + v_x^2\zeta = -v_x^2\beta_x^{3/2} \frac{\Delta B(\zeta, \phi)}{B\rho_0} \quad (2.384)$$

となる（問、これを示せ。この計算において、(2.205)または(2.194)を使う）。

(2.384)において、まず、右辺のエラーがない場合を考えると、この方程式は、単に調和振動子のそれになる。このように、Courant-Snyder変換を用いると、ベータatron振動の方程式が、調和振動子の方程式に置き換えることができ、場合によっては、計算が簡単になったり、あるいは見通しがよくなったりする場合がある。このエラーがない場合の一般解は、

$$\zeta(\phi) = A \cos(v_x\phi + \phi_0) \quad (2.385)$$

となり、これは、(2.222)の解の別の表現である（問、このことを示せ）。又、この解は複素関数を用いて、

$$\zeta(\phi) = A_1 e^{iv_x\phi} + A_2 e^{-iv_x\phi} \quad (2.386)$$

と書くこともできる（問、これを示せ）。ここで、 A_1 は、任意の複素数であり又、 $A_2 = A_1^*$ である。

さて、次はエラーがある場合であるが、誤差磁場として次のような形を持つものを考えよう。

$$\Delta B = B_0(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots) \quad (2.387)$$

もちろんこれは特殊な場合であって、一般には ΔB は、 y にも依存する。(2.387)と(2.383)より、(2.384)の方程式は、

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} + v_x^2\zeta = -\frac{v_x^2 B_0}{B\rho_0} (\beta_x^{3/2} b_0 + \beta_x^{4/2} b_1 \zeta + \beta_x^{5/2} b_2 \zeta^2 + \dots) \quad (2.388)$$

となる（問、これを示せ）。以下では、右辺を調和振動子に対する強制力と考える。そして、この強制力の振動成分が、調和振動子の固有振動数（ v_x ）に等しいときに共鳴が起きると考えて共鳴条件を探すことにする。

まず、 $\beta_x^{(n+3)/2} b_n$ を考えよう。これは、場所の関数であるので、ここでは、 ϕ の関数である。そして、この量は、 s の関数としてみた場合、リングの周長を周期とする周期関数であるので、 ϕ の関数としてみた場合、 2π を周期とする周期関数である（問、これを示せ）。従って、 $\beta_x^{(n+3)/2} b_n$ は、

$$\beta_x^{(n+3)/2} b_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik\phi} \quad (2.389)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} \beta_x^{(n+3)/2} b_n d\phi \quad (2.390)$$

とFourier展開できる（問、これを示せ）。

一方、 ζ は（エラーのない場合の）調和振動子の解から、大きくずれていないと仮定し、（2.386）の形をしているとする。このような条件で、共鳴条件を探してみよう。

まず、 b_0 の項であるが、この項は、Field Strength Errorを表す。もし、 $k = v_x$ で且つ $\beta_x^{3/2} b_0$ の k 成分がゼロでなければ、共鳴が起きる。これは即ち、2.3.1節でも述べた整数共鳴であり、CODが大きくなるので、チューンを整数付近に選ぶことはできないことは既に述べた。

次に、Gradient Errorを表す b_1 の項について。この場合の共鳴条件は、 $k - v_x = v_x$ である。これは、2.3.2で述べた半整数共鳴に当たる。

（ $k + v_x = v_x$ も共鳴条件のように見えるが、実はそうではない。即ち、この条件は $k = 0$ を意味するが、この場合、この項を左辺の $v_x^2 \zeta$ の項に組み込むことができ、単にチューン・シフトを与えるだけである。）

b_2 の項は、六極電磁石からの寄与を表す。共鳴条件は、 $k \pm 2v_x = v_x$ である。これらの内、 $k + 2v_x = v_x$ は、再びチューンが整数の時に起きる共鳴である。 $k - 2v_x = v_x$ は、“ $3v_x = \text{整数}$ ” の条件で起きる新しい共鳴で、Third Integer Resonance

と通常呼ばれる。

このように、一般に、（2.387）の様な誤差磁場によって、“ $Nv_x = \text{整数}$ ”（ N は整数）の条件で共鳴が起こりうる。但し、（この場合の N を共鳴の次数呼ぶが）共鳴の次数が高くなるにしたがって危険度が下がる。

以上は水平方向の場合であったが、垂直方向の場合にもほとんど同じ議論が成り立つ。又、ここでは、一次元の場合しか考えなかったが、一般には、2.3.5節で述べた水平方向と垂直方向の運動が結合して生じる共鳴も存在する。一般に共鳴条件は、

$$Mv_x + Nv_y = L \quad (2.391)$$

と書くことができる。ここで、 M, N, L は整数である。 M と N が同符号の時、これは一般的な和共鳴を表し、（通常の和共鳴と同じく）水平方向と垂直方向の振動振幅の差が保存するので危険な共鳴である。 M と N が異符号の時、これは一般的な差共鳴を表し、（通常の差共鳴と同じく）水平方向と垂直方向のエミッタンスの和が保存するのでより安全な共鳴といえる。一次元の場合と同様に $|M| + |N|$ を共鳴の次数と呼ぶ。一般に共鳴の次数が高いほど危険度が低い。電子リングで通常問題になるのは、三次か四次の共鳴までで、それ以上の共鳴は通常問題にならないようである。

ここで、構造共鳴（Structure Resonance）と非構造共鳴（Non-Structure Resonance）について述べておこう。加速器を設計する場合に、リングを対称にし、全く同じ構造が何回か繰り返すようにする場合がある。そして、この（設計上の）全く同じ繰り返しの数をスーパー・ピリオド数と呼ぶ。例えば、トリスタンの主リングの場合、このスーパー・ピリオド数は4である。さて、このスーパー・ピリオド数を P としこの P が2以上の整数であるとしよう。そうすると、ビームにとってみると、 $1/P$ 周がリング一周だと見えることになる。このような状況では、（2.391）の共鳴条件は、

$$M \frac{v_x}{P} + N \frac{v_y}{P} = L \quad (2.392)$$

となることがわかる（問、これを示せ）。従って、

L が P の倍数でない場合、 $|M|+|N|$ 次の共鳴は起こらないことになる。但し、これは、マシンが完全に P 回対称にできている場合であって、もしマシンエラーがあって、この対称性が崩れている場合、この L が P の倍数でない場合でも $|M|+|N|$ 次の共鳴が生じる。このように、リングののスーパー・ピリオド数が P の場合に、 L が P の倍数の時に起きる共鳴を、構造共鳴、 L が P の倍数でない場合の共鳴を非構造共鳴と呼ぶ。一般に、構造共鳴は、非構造共鳴に比べて強く、危険な共鳴といえる。

図 2.2 5 に示す様に、水平方向のチューンと、垂直方向のチューンを二次元平面にとると、(2.391) の共鳴条件は、この平面内の直線で表される。この直線を共鳴線と呼ぶ。そして、この共鳴線が書き込まれた図をチューン・ダイアグラムと呼ぶ。このチューン・ダイアグラムは、加速器を運転する際の地図のようなもので、特に新しい加速器の場合、最も良いチューンの組み合わせと求めて、チューン・ダイアグラム上をさまよい歩く。これをチューン・サーベイという。また、チューン・サーベイの結果見つかった最適なチューンで普段の定常運転で用いられるチューンの組み合わせのことをワーキング・ポイントと呼んでいる。

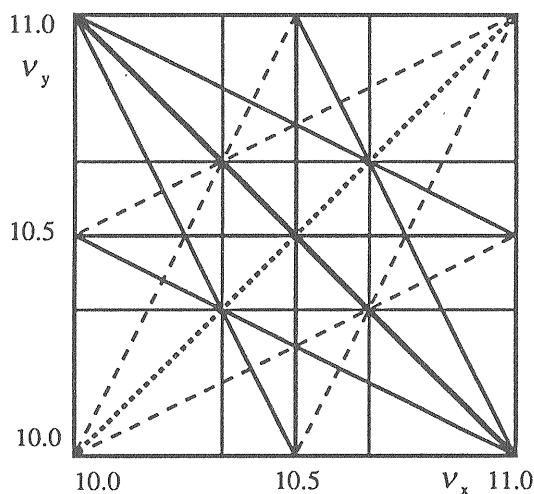


図 2.2 5

第3章 Longitudinal Beam Dynamics

第2章では、電子のエネルギーは一定であると仮定してきた。そこでは、エネルギーが nominal な値からずれた電子も扱ったが、その場合でも、エネルギーは、ずれたまま一定であると仮定していた。しかし、実際の電子貯蔵リングでは、電子は、放射光を放出することにより、そのエネルギーの一部を失ったり、又、失ったエネルギーを高周波加速空洞で補償されたりして、そのエネルギーは絶えず変動している（変動というより、振動という方がより正しい）。そして、このエネルギー振動のみならず、バンチの中の各電子は、ビームの進行方向（Longitudinal 方向）に沿って、基準粒子の周りを振動している。この二つの振動は、不可分のものであり、合わせてシンクロトロン振動と呼ぶ（不可分というより、シンクロトロン振動という一つの振動の二つの現われであると言ったほうがより正しい）。本章では、主にこのシンクロトロン振動の性質について調べる。

電子が放射光を放出することにより失うエネルギーの大きさは、電子のエネルギーに依存するのであるが、本章では、電子のエネルギーによらず一定であると仮定する。この仮定を外すと、実は、シンクロトロン振動の減衰が生じるのであるが、これは、第4章のテーマである。

3.1 エネルギー損失とエネルギーの補償

電子貯蔵リングにおいて、電子のシンクロトロン振動を特徴付ける過程は、放射光放出によるエネルギー損失と高周波加速空洞による損失エネルギーの補償である。以下に、これらの過程について簡単に述べる。

放射光放出によるエネルギー損失

磁場 B で曲げられる相対論的な電子が、単位時間当りに放出するエネルギーの計算は、電磁気学の教科書 [14] に出ている（[1] にも詳しい説明がある）。

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_e c^3}{(mc^2)^3} E^2 B^2 \quad (3.1)$$

ここで、 r_e は、電子の古典半径である。この式は、また $p = E/c = eB\rho$ を用いると、

$$P = \frac{2}{3} \frac{r_e c}{(mc^2)^3} \frac{E^4}{\rho^2} \quad (3.2)$$

とも書ける。この式から、シンクロトロンで電子を加速した場合（シンクロトロンでは、 ρ は一定に保たれるので）放出エネルギーは、電子のエネルギーの4乗に比例することがわかる。

シンクロトロン振動を考えるとときに必要な量は、リング一周の間に電子が失うエネルギーである。nominal なエネルギー E_0 を持った粒子が、リング一周する間に偏向電磁石内で放射光を放出することにより失うエネルギー U_0 を計算しよう。ここでは、COD はなく、この電子は、収束電磁石の中心を通っているので、収束電磁石内ではエネルギー損失がないと仮定する。（エネルギーが nominal な値からずれている電子に対しては、本当は、Dispersion のために、その軌道が収束電磁石の中心からずれることになり、収束電磁石でもエネルギー損失することになる。この効果は、第4章で扱う。）

U_0 は、(3.2) より、

$$U_0 = \frac{2}{3} \frac{r_e c E_0^4}{(mc^2)^3} \int_0^{\tau_0} \frac{dt}{\rho^2} = \frac{2}{3} \frac{r_e E_0^4}{(mc^2)^3} \int_0^c \frac{ds}{\rho_0^2} \quad (3.3)$$

となる（問、これを示せ）。曲率半径が全ての偏向電磁石で等しいときは、

$$U_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(mc^2)^3} \frac{E_0^4}{\rho_0} \quad (3.4)$$

となる（問、これを示せ。このとき偏向電磁石中の軌道長のリング一周積分は、 $2\pi\rho_0$ になることに注意）。定数を計算すると、

$$U_0 [\text{keV}] = 88.5 \frac{E_0^4 [\text{GeV}]}{\rho_0 [\text{m}]} \quad (3.5)$$

となる (問、これを示せ)。

example

トリスタンMRの入射エネルギー (8 GeV) での U_0 を計算すると、 $\rho_0 = 246.5\text{m}$ として、

$$U_0 \approx 1.47\text{MeV}$$

となるが、物理実験を行うエネルギー (29 GeV) では、

$$U_0 \approx 254\text{MeV}$$

となり、これは、ビームエネルギーの0.9% 近くになる。

以下、本章では、先に述べたように、全ての電子が、そのエネルギーによらず、一周当り U_0 のエネルギーを失うものとする。

高周波加速空洞によるエネルギーの補償

高周波加速空洞については、今年のセミナーにおいても、赤井和憲氏の講義で詳しく説明されるはずなので、ここでは、極く簡単に必要最小限のことについて述べる。

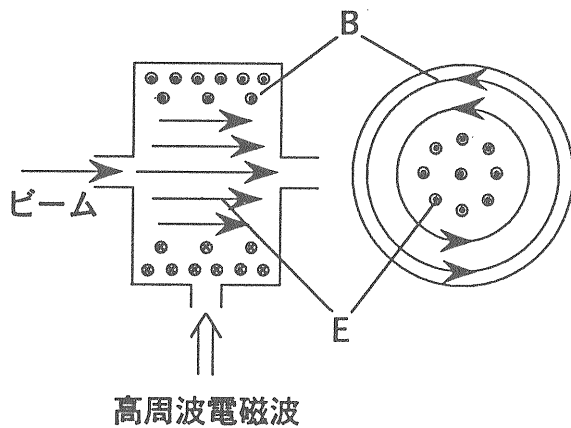


図 3.1

高周波加速空洞 (RF Cavity ともいう) の概念図を図 3.1 に示す。この RF Cavity は、図に示すように基本的には、円筒型の筒の様な構造をしている。

この空洞を高周波電磁場で励振し、その中に定在波を立てる。この定在波の電場成分がビームの進行方向になるようにし、この電場によってビーム加速が行われる。空洞の中に立つ定在波は、高周波電磁場であるので、その電場成分も基本的に三角関数的に振動している。即ち、電場の向きがビームの進行方向と平行であることもあれば、反平行であることもある。従って、ある電子が空洞から適当なエネルギーを受け取るためには、適当なタイミングで空洞を通る必要がある。

電子が、空洞を通るときに感じる実効的な加速電圧を $V(t)$ とすると (ここで、実効的という言葉を用いたのは、電子が空洞を通る間に電場も少し変化するので、電子が感じる電圧は、ある瞬間に空洞に立っている電場を積分したものではなく、電場の時間変化も含めて積分する必要があるという意味である)、

$$V(t) = V_c \sin(2\pi f_{\text{RF}} t) \quad (3.6)$$

と書ける。このように、RF Cavity の電子に対する影響は、そのピーク電圧 V_c と RF 周波数 f_{RF} によって特徴付けられる。

さて、このような RF Cavity は、(電磁石の場合と違って) リングのどこにおいてもビームに対する効果は余り変わらない。これは、後で示すようにシンクロトロン振動が、ビームがリング一周する時間に比べてゆっくりした振動であることによる。これに対して、ベータトロン振動は、リング一周の間に何度も振動する。(但し、ここで述べたのは、非常にナイーブな議論であって、実際の加速器 (特に KEKB) においては、RF Cavity をリングのどこに設置するのかは、実は大問題なのである。これは、一つは、エンジニアリング的な観点から、もう一つは、ビーム・ダイナミックス的観点から、問題である。しかし、これらの問題は、本テキストの範囲を越えるので、本テキストでは触れない。) さて、このように、RF Cavity のビームに対する影響は、その設置場所によらないから、複数台の空洞がある場合は、それらの効果を一台に押し込めることもできる。例えば、同じピーク電圧 V_c と同じ RF 周波数 f_{RF} を持つ空洞が、 n 台あるときは、ビームが感じる電圧は、

$$V(t) = nV_c \sin(2\pi f_{\text{RF}} t) \quad (3.7)$$

となり、 nV_c のピーク電圧を持つ空洞一台があると考えてもよい。(但し、こうなるためには、ビームがそれぞれの空洞を同じ位相で通るようなタイミングの調整が必要であり、実際そのような調整がなされる。)このように、複数台の空洞があっても、結局ビームに対する効果は、(3.6)式で与えられると思ってよい。以下では、簡単のためRF Cavity はリングの一ヶ所だけにあるとして(3.6)を用いることにする。

さて、電子は、リング一周する間に、 U_0 のエネルギーを失うから、その電子が一定のエネルギーで貯蔵され続けるためには、

$$eV(t_s) = eV_c \sin(2\pi f_{RF} t_s) = U_0 \quad (3.8)$$

を満たすような時刻 t_s に、この空洞を通る必要がある(問、これを示せ)。これが、エネルギー収支のバランスがとれるための条件である。ここで、この条件が成り立つためには、当然ながら、

$$eV_c > U_0 \quad (3.9)$$

でなければならない。ここで、

$$q = \frac{eV_c}{U_0} \quad (3.10)$$

により定義される量 q を over voltage factor と呼ぶ。(3.9) の条件は、 $q > 1$ とも書ける。

3.2 位相安定性の原理

ここでは、位相安定性の原理について定性的に述べる。

Synchronous Particle

(3.6)において、空洞の電圧は、時間 t の関数として記述されているが、

$$\phi = 2\pi f_{RF} t = \omega_{RF} t \quad (3.11)$$

として、位相 ϕ の関数として考えることも多い。こうすると、当然(3.6)は、

$$V(\phi) = V_c \sin \phi \quad (3.12)$$

となる。又、(3.11)で示される角RF周波数 $\omega_{RF} (= 2\pi f_{RF})$ もよく用いられる。(3.12)を用いると(3.8)の条件は、

$$eV(\phi_s) = U_0 \quad (3.13)$$

$$\phi_s = \omega_{RF} t_s \quad (3.14)$$

となり、(3.13)を満たす最適位相 ϕ_s で、電子が空洞を通過することが、エネルギー収支のバランスがとれるための条件になる。

(3.12)に e を掛けたものを図3.2にプロットすると、図からもわかるように、(3.13)を満たす最適位相は、振動電場の一周期のうちに2回現われることがわかる (ϕ_{s1}, ϕ_{s2})。

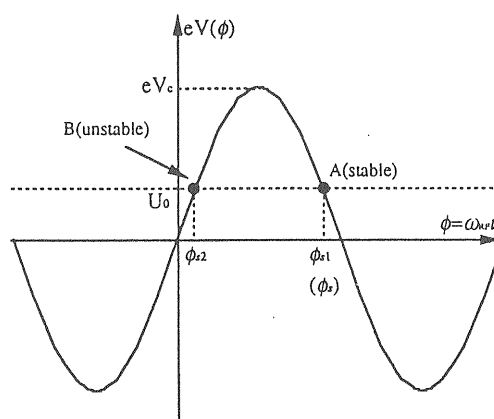


図 3.2

ここで、nominal なエネルギー E_0 をもつ電子がリング一周する時間(周回時間という)を考えよう。この粒子がリング一周の間に走る距離は、第2章で述べたデザイン軌道の長さであり、記号 C で表された。従って周回時間は、

$$T_0 = \frac{C}{c} \quad (3.15)$$

となる。(「nominal なエネルギー E_0 をもつ電子

がリング一周する時間」という言い方は厳密に言うとは少しおかしい。というのは、電子のエネルギーは、リング一周する間に少し変わるからである。ここでは、このリング一周の間のエネルギー損失 (U_0) が充分小さいと仮定している。もし、この仮定が問題になる場合は、「nominalなエネルギー E_0 をもつ電子」というかわりに、「リングでの平均的なエネルギーが E_0 の電子」と言い換えればよい。))

また、このnominalなエネルギー E_0 をもつ電子が、単位時間にリングを回る回数は、周回周波数 (又は、revolution frequency) と呼ばれ、

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{c}{C} \quad (3.16)$$

で計算できる (問、これを示せ)。

さて、ある時nominalなエネルギー E_0 をもつある電子が、 ϕ_{s1} 又は ϕ_{s2} で空腔を通過したとしよう。このとき、この電子が、リング一周してこの空腔に戻ってきたとき、再び一周前と同じ位相で空腔に入るとすると、エネルギー収支のバランスが保たれ、さらに、その後ずっと同じ条件が成り立ち、電子のエネルギーは変化しない。このようになるためには、しかし、電子の周回周波数と、空腔のRF周波数の間に同期が保たれていなければならない。即ち、

$$f_{RF} = hf_0 \quad (h: \text{integer}) \quad (3.17)$$

の関係がある必要がある (問、これを示せ)。この h を harmonic number と呼ぶ。(nominalなエネルギーを持った) 電子が、リングを一周するときに、RF電場は、 h 回振動することになる。

このように、(3.17)の条件が成り立つとき、空腔を ϕ_{s1} 又は ϕ_{s2} で通過したnominalなエネルギーをもつ電子は、毎回空腔を同じ位相で通過し、且つ、一周する間に失ったのと丁度同じエネルギーを空腔から受け取ることになる。従って、この電子は、(リング一周の間のわずかのエネルギー変化 (U_0) を除いて) エネルギーが一定に保たれる。このような電子を、シンクロナス粒子 (synchronous particle) と呼び、又、 ϕ_{s1} と ϕ_{s2} をシ

ンクロナス位相 (synchronous phase) と呼ぶ。(但し、この二つの位相のうち、 ϕ_{s2} に対しては、後で述べる位相安定性の原理が働かないため、通常、synchronous phase という時は、 ϕ_{s1} のみを指すようである。今後この ϕ_{s1} を単に ϕ_s と書き synchronous phase と呼ぶことにする。) 後で示すように、この synchronous particle は、シンクロトロン振動を行わない。

位相安定性の原理の定性的説明

ある電子が、synchronous particle になれるためには、上で述べたように、三つの条件が満たされる必要がある。即ち、

- (1) 電子のエネルギーがnominalな値 (E_0) であること
- (2) 空腔を最適な位相 ϕ_{s1} (または ϕ_{s2}) で通過すること
- (3) (3.17) が成り立つこと

の三条件である。以下でこれらの条件が満たされない場合に何が起こるを見てみよう。

まず、(1)、(3)の条件は満たされるが、(2)の条件が崩れている場合を考えよう。即ち、エネルギーは、nominalな値を持つが、空腔を通るときの位相が、最適位相 ϕ_{s1} (または ϕ_{s2}) からずれているとする。

まず、 ϕ_{s1} から少し遅れた場合を考えよう。この場合、電子が空腔から受け取るエネルギーは、 U_0 より少し少ないことになる。従って、最初nominalな値であったエネルギーが、少しずつ下がることになる。さて、エネルギーが下がると、リング一周する時間が違ってくる。これは、(2.329)を見ればわかる。この式をもう一度書いておくと、

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_c \frac{\Delta p}{p_0} \quad (2.329)$$

であった。この式より、エネルギーが下がると、周長は短くなることがわかる (このことは、エネルギーの低い電子は、偏向電磁石で大きく曲げられリングの内側を通ることより、理解できる)。

従って、エネルギーが低い電子は、リングを早く周り、空洞に到着する時間（位相）が段々早まってくることになる。そして、ある時、空洞を通る位相が、 ϕ_{s1} に等しくなる。但し、このとき、電子のエネルギーは、（最初 nominal な値で出発したにもかかわらず）nominal な値より下がっている。このあたりの事情を図 3.3 に示す。最初点 1 の状態から出発したのが、今、点 2 の状態にいる。

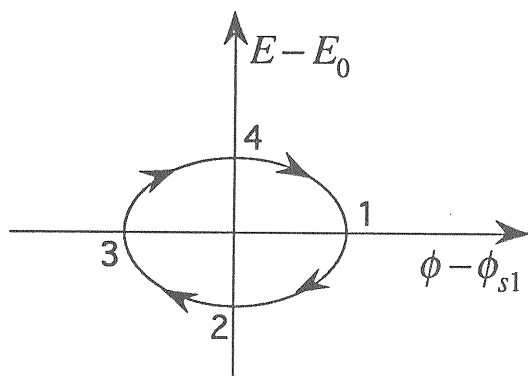


図 3.3

さて、点 2 の状態にいる電子は、エネルギーが低いために、ますます早く空洞に到着し、 ϕ_{s1} より前に空洞を通過するようになる。そうすると、今度は、空洞から受け取るエネルギーが U_0 より大きくなり、段々エネルギーが上がるようになる。そして、ある時、電子のエネルギーは、再び、 E_0 に戻る。しかし、このとき、空洞を通る位相は、 ϕ_{s1} より、早まっている。この状態は、図 3.3 では点 3 にあたる（問、点 3 の後は、点 4、点 1 の方向へ動くことを確かめよ。但し、点 1 に完全に戻るかどうかは、ここで述べた定性的な議論では明らかでないが、実際そうであることを後で示す）。

このように、(2) の条件が崩れた場合は、点 1 又は、点 3 から出発して、エネルギーと位相が平行点の周りを振動する。このような振動を、シンクロトロン振動、又は、位相振動と呼ぶ。又、今考えたのは、(2) の条件が崩れた場合であったが、(1) の条件が崩れた場合も、点 2 又は、点 4 から出発すれば同様の結果になる（問、これを確かめよ）。(1)、(2) の条件が同時に崩

れた場合も同様である。このように、 ϕ_{s1} の近傍で、最適なエネルギー補償の条件が崩れても、電子は、 ϕ_{s1} 及び、 E_0 の周りを振動するだけであり、その運動は安定である。このようにして、最適条件からずれた粒子の運動を安定にするメカニズムを、位相安定性の原理と呼ぶ。但し、前にも述べたように、この位相安定性の原理が働くのは、 ϕ_{s1} についてであって、 ϕ_{s2} については成り立たない。つまり、図 3.3 の点 1 にあたる点から出発した電子は、その後 U_0 より多いエネルギーを空洞から受け取るので、そのエネルギーは E_0 より高くなり、ますます位相が遅れてしまう（問、これを確かめよ）。

この位相安定性の原理は、電子貯蔵リングに固有のメカニズムではなく、陽子シンクロトロンや、陽子線型加速器でも同様のメカニズムが働く（これについては、参考文献 [1] を参照）。この、位相安定性の原理は、今では、加速器の世界では常識になっているが、加速器の歴史をふりかえると、サイクロトロンのような共鳴加速を用いる加速器では、粒子の周回周期と加速高周波の周期との同期をどうやって保ち続けるかは、実は大問題とされていた頃がある。アメリカの E. M. McMillan とソビエトの V. I. Veksler が、1945 年に、それぞれ独立に、この位相安定性の原理を発見し、シンクロトロンによって、原理的には、限りなく高いエネルギーまで、粒子を加速できることを示した。この位相安定性の原理の発見は、E. D. Courant と H. S. Snyder による強収束の原理の発見と並んで、加速器における二大発見とされている。

最後に、条件 (3) が崩れたとき、すなわち (3.17) が成り立たないときに、何が起きるかを述べる。この場合、仮にデザイン軌道上を走る粒子がいても、その粒子は、synchronous particle にはなり得ない。これは、この粒子のリングの周回周波数と、加速空洞の周波数の同期がとれないので、当然である。但し、このようにリングの周長と加速空洞の周波数のつじつまが合っていない場合でも、エネルギーが nominal な値からずれた粒子（すなわち、リングの外側又は内側を通る粒子）で、加速空洞の振動電場とちよほど同期がとれるものが存在する。すなわち、一般に粒子の周回周波数は、粒子のエネルギーの関数である。この周

回周波数を $f(E_0 + \Delta E)$ と書くと (3.16) に対応する式として、

$$f(E_0 + \Delta E) = \frac{c}{C + \Delta C} \quad (3.18)$$

が得られるが、この $f(E_0 + \Delta E)$ のうち、(3.17) に対応する

$$f_{RF} = hf(E_0 + \Delta E) \quad (h: \text{integer}) \quad (3.19)$$

の条件を満たすものが、加速空洞の電場と同期がとれる粒子である。この条件を満たす粒子が、最適な位相で空洞を通過すれば、毎回最適なエネルギー補償が行われ、この粒子は synchronous particle になる。このように、リングの周長と加速空洞の周波数のつじつまが合っていない場合、エネルギーが (nominal なエネルギーから) ずれた粒子が、synchronous particle になるのである。

あるとき、リングの周長と加速空洞の周波数のつじつまが合っていたとしよう。すなわち、デザイン軌道上を走る synchronous particle が存在したとしよう。このとき、突然加速空洞の周波数をずらしたとすると何が起きるであろうか。その答えは、新しい synchronous particle の回りを他の粒子はシンクロトロン振動を始めるということである。そして、第4章で述べる、radiation damping のために、このシンクロトロン振動は、次第に減衰し、定常状態では、新しい synchronous particle の回りにある分布を持って広がることになる。すなわち、加速空洞の周波数をずらすことで、ビームの中心エネルギーが変化するのである。加速空洞の周波数を高い方にずらすと、ビームの中心エネルギーは低い方向にずれ、周波数を低い方にずらすと、ビームの中心エネルギーは高い方向にずれる (問、これは何故か)。

3.3 シンクロトロン振動を記述するパラメータ

図3.4に示すように、シンクロトロン振動を記述するパラメータとして、 τ を取る。これは、synchronous particle より、どれだけの間遅れてい

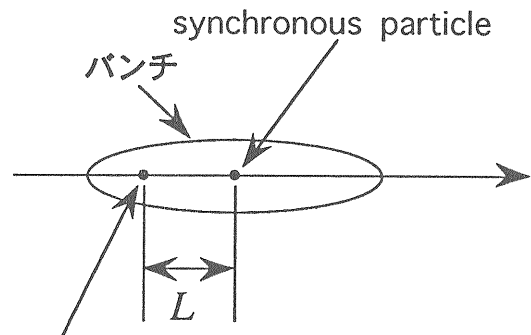
るかを表す。又、この τ に ω_{RF} を掛けた、

$$\Delta\phi = \omega_{RF}\tau \quad (3.20)$$

を用いる場合もある。これは、位相の遅れを表すパラメータである。又、RF Cavity の位相そのものを用いてもよい。即ち、

$$\phi = \omega_{RF}(t_s + \tau) \quad (3.21)$$

を用いてもよい。又テキストによっては、これらの逆符号のもの (時間進みや位相の進み等) を用いる場合があるので注意を要する。



今考えている電子

$$\tau = \frac{L}{c} \quad (\text{バンチの後にいる場合が正})$$

図 3.4

シンクロトロン振動を記述するもう一つのパラメータとして、nominal エネルギー E_0 からのずれ、 ΔE を用いる。又は、これを E_0 で割った、

$$\delta = \frac{\Delta E}{E_0} \quad (3.22)$$

を用いることもある。

3.4 シンクロトロン振動を記述する方程式

ここでは、3.2節で定性的に述べたシンクロト

ロン振動を記述する方程式を導く。

まず、(2.329)より、直ちに

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_c \frac{\Delta E}{E_0} = \alpha_c \delta \quad (3.23)$$

が導ける(問、これを示せ)。この式の左辺の分子分母を光速 c で割ることにより、

$$\frac{\Delta \tau}{T_0} = \alpha_c \delta \quad (3.24)$$

となるが、ここで $\Delta \tau$ は、 T_0 の間に時間遅れ τ が、どれだけ変化するかを表す(問、これらのことを示せ)。後でわかるように、 T_0 は、シンクロトロン振動にとって充分短い時間と考えられるので、(3.24)は、

$$\frac{d\tau}{dt} = \alpha_c \delta \quad (3.25)$$

と微分形に書いてもよい(問、これを示せ)。

一方、エネルギー収支の関係から、もう一つの方程式が得られる。RF Cavity の電圧を(3.6)より、

$$V(t) = V_c \sin(\omega_{RF} t) \quad (3.26)$$

と書くと、時間遅れ τ を持った電子のリング一周の間のエネルギー変化は、

$$\delta E = eV_c \sin(\omega_{RF}(t_s + \tau)) - U_0 \quad (3.27)$$

となる(問、これを示せ)が、(3.8)より、

$$\delta E = eV_c \sin(\omega_{RF}(t_s + \tau)) - eV_c \sin(\omega_{RF} t_s) \quad (3.28)$$

とも書ける。このエネルギー変化は、 T_0 の間に起こったので、エネルギーの変化率は、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\delta E}{T_0} = \frac{eV_c \sin(\omega_{RF}(t_s + \tau)) - eV_c \sin(\omega_{RF} t_s)}{T_0} \quad (3.29)$$

と書ける(問、これを示せ)。これより、

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{eV_c \sin(\omega_{RF}(t_s + \tau)) - eV_c \sin(\omega_{RF} t_s)}{E_0 T_0} \quad (3.30)$$

となる(問、これを示せ)。この(3.30)と(3.25)がシンクロトロン振動を記述する方程式である。以下の節でこれらの解について調べる。

3.5 シンクロトロン振動(微小振動の場合)

微小振幅のシンクロトロン振動の場合、(3.30)の右辺を t_s の周りにテーラー展開して、一次の微小量まで取ることにより、

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_{RF} eV_c \cos \phi_s}{E_0 T_0} \tau \quad (3.31)$$

が得られる(問、これを示せ)。ここで、 $\cos \phi_s$ は、図3.2からもわかるように、負の数であることを注意しよう。又、(3.8)、(3.10)より、

$$|\cos \phi_s| = \sqrt{1 - \left(\frac{U_0}{eV_c}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{q^2}} \quad (3.32)$$

となる(問、これを示せ)。

さて、(3.31)と(3.25)より、

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} = -\frac{\alpha_c \omega_{RF} eV_c |\cos \phi_s|}{E_0 T_0} \tau \quad (3.33)$$

が得られる(問、これを示せ)。これは、調和振動子の方程式であり、微小振幅のシンクロトロン振動は、調和振動で近似できることがわかる。この調和振動の(角)振動数は、

$$\omega_s = \sqrt{\frac{\alpha_c \omega_{RF} eV_c |\cos \phi_s|}{E_0 T_0}} = \sqrt{\frac{2\pi \alpha_c h f_0^2 eV_c |\cos \phi_s|}{E_0}} \quad (3.34)$$

となる（問、これを示せ）。又、

$$\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi f_0 v_s \quad (3.35)$$

で、 f_s と v_s を定義する。 f_s をシンクロトロン振動数、 v_s をシンクロトロン・チューンと呼ぶ。シンクロトロン振動数は、単位時間あたりの振動数、シンクロトロン・チューンは、一周の間に何回シンクロトロン振動するかを表す。通常

$$v_s \ll 1 \quad (3.36)$$

である。つまり、シンクロトロン振動にとって T_0 は、充分短い時間と考えられる。

example
 KEKB の低エネルギーリングでは、 $E_0 = 3.5$ GeV, $\alpha_c = 1.5 \times 10^{-4}$, $eV_c = 8.2$ MeV, $U_0 = 0.9$ MeV, $h = 5120$, $f_0 = 99.3$ kHz である。これらのパラメータを用いると、 $v_s \approx 0.017$, $f_s \approx 1.7$ kHz となる（問、これを示せ）。

ω_s を用いると、運動方程式 (3.33) の一般解は、

$$\tau(t) = \hat{\tau} \cos(\omega_s t + \theta_0) \quad (3.37)$$

となる。 $\hat{\tau}$, θ_0 は、初期条件から決まる定数で、 $\hat{\tau}$ は振動振幅を表す。又、(3.25) より、

$$\delta = -\frac{\omega_s}{\alpha_c} \hat{\tau} \sin(\omega_s t + \theta_0) \quad (3.38)$$

となる（問、これを示せ）。これら二つの式より、

$$W_s = \frac{\tau^2}{\alpha_c^2} + \frac{\delta^2}{\omega_s^2} = \text{constant} \quad (3.39)$$

となり（問、これを示せ）、これが運動の定数に

なる。これを、ベータトロン振動における Courant-Snyder Invariant に対応する量と考えてもよい。 $\tau-\delta$ 平面（位相平面）に電子の運動を表す点をプロットしていくと、(3.39) よりこの点は楕円を描く。これを図3.5に示す。違った W_s を持つ電子は、位相空間で違った楕円を描くが、それらは全て相似形である（但し、次節で示すように、振動振幅が大きな場合は、そうでなくなる）。この楕円は、基本的に、図3.3に示されているものと同じである（問、これを示せ）。

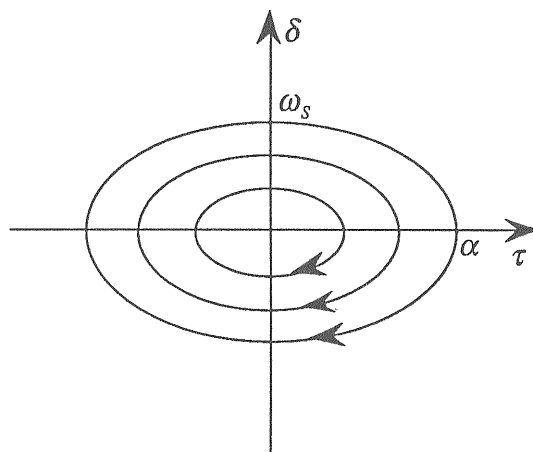


図 3.5

(3.37)、(3.38) より、初期条件として、 $\hat{\tau} = 0$ ($\tau(0) = \delta(0) = 0$) を選ぶと、その後ずっと、 $\tau(t) = \delta(t) = 0$ となり、電子は、シンクロトロン振動しない。これは、synchronous particle に対応する。

又、(3.39) よりわかるように、この楕円の二つの軸の長さの比は、 α_c / ω_s になる。この単純な事実は、筆者の経験からすると記憶に値することである。このことを記憶していると、例えば、次章で述べる、バンチ内の粒子のエネルギーの広がり、バンチ長の関係が直ちに計算できる。

又、(3.37)、(3.38) より、位相空間で電子（の運動を表す点）は、楕円上を（ベータトロン振動の場合と同じく）右回りで運動する（問、これを示せ）。但し、これは、シンクロトロン振動を記述するパラメータとして、時間遅れを取った場合で、時間進みを取った場合はその逆になる。

3.6 シンクロトロン振動（大振幅の場合）

今度は、シンクロトロン振動の振幅が小さいという条件を外して、一般の場合を考えよう。以下で示すように、微小振動の場合は、調和振動で近似できたシンクロトロン振動が、ある程度振幅が大きくなると、調和振動では近似できなくなり、更にある限度を越えると、振動は安定でなくなる。

前節では、シンクロトロン振動を表示するパラメータとして、 $(\tau - \delta)$ を取ったが、この節では、式を簡単にするために少し変えて、 $(\phi - \delta)$ を取ることにする。ここで、 ϕ はRF Cavity の振動電場の位相で、 ϕ と τ の関係は、(3.21) に与えられている。(3.11)、(3.12) を用いて、(3.30) を書き換えると、

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{eV_c}{E_0 T_0} (\sin \phi - \sin \phi_s) \quad (3.40)$$

となる（問、これを示せ）。

一方、(3.25) は、(3.21) より

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_{RF} \alpha_c \delta \quad (3.41)$$

となる。これらを用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dt^2} &= \frac{\omega_{RF} \alpha_c e V_c}{E_0 T_0} (\sin \phi - \sin \phi_s) \\ &= \frac{2\pi h f_0^2 \alpha_c e V_c}{E_0} (\sin \phi - \sin \phi_s) \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる（問、これを示せ）。

この方程式の感触をつかむためには、一次元のニュートン方程式とのアナロジーで考えるのがよい。右辺を「外力」と考えると、この「力」は、粒子の位置のみに依存する。従って、この「外力」はポテンシャルから導かれる。このポテンシャルを、

$$\Phi(\phi) = -\frac{2\pi h f_0^2 \alpha_c e V_c}{E_0} \int_{\phi_s}^{\phi} (\sin \phi - \sin \phi_s) d\phi \quad (3.43)$$

と置くと（ $\phi = \phi_s$ でポテンシャルがゼロになるようにポテンシャルの定数項を選ぶ）、(3.42) は、

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{d\Phi(\phi)}{d\phi} \quad (3.44)$$

と書ける。この式の両辺に $d\phi/dt$ を掛けて積分すると、次の式が得られる（問、これを示せ）。

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \Phi(\phi) = W_0 = \text{constant} \quad (3.45)$$

ここで、左辺の第一項は、ニュートン方程式の場合の「運動エネルギー」に相当する、又、 W_0 は、「全エネルギー」にあたり、保存量である。この式は又、(3.41) を用いると、

$$W_0 = \frac{1}{2} \omega_{RF}^2 \alpha_c^2 \delta^2 + \Phi(\phi) = \text{constant} \quad (3.46)$$

とも書ける（問、これを示せ）。この式は、微小振幅の場合の(3.39)と（ディメンジョンは違うが）本質的に同じものである（問、振動振幅が小さいとき、(3.46) から (3.39) が導かれることを示せ）。この W_0 を、ベータトロン振動における Courant-Snyder Invariant に対応する量と考えてもよい。

ポテンシャル $\Phi(\phi)$ は、(3.43) より、

$$\Phi(\phi) = \frac{2\pi h f_0^2 \alpha_c e V_c}{E_0} \left(\frac{\phi - \phi_s}{q} + \cos \phi - \cos \phi_s \right) \quad (3.47)$$

となる（問、これを示せ）。(3.47) を図示すると、図3.6(b)のようになる。図からわかるように、「全エネルギー」 W_0 が、図に示された Φ_{\max} より小さい場合は、電子は、ポテンシャルの窪みに閉じ込められて、synchronous phase ϕ_s の周りを振動し、運動は安定である。しかし、 Φ_{\max} より大きな W_0 を持った電子は、（図に示した場合では）位相がどんどん早くなる方向にずれていき、且つ

ポテンシャルエネルギーはどんどん下がってしまう。このことは、(3.43)より、 δ^2 (エネルギーのずれの2乗) がどんどん大きくなることを意味する。位相がどんどん早くなるということから考えて、このことは、電子のエネルギーが、どんどん下がっていくことを意味している(間、それは何故か)。

位相平面での電子の運動

このあたりの事情をもう少し見やすくするために、 $(\phi - \delta)$ の位相平面に、異なった W_0 を持つ粒子が(位相平面内で)描く軌跡をプロットしてみよう。これを図3.6(a)に示す。この図より、まず小振幅の場合は、位相平面で電子の運動を表す点の運動は楕円になることがわかる(この楕円は、図3.5の楕円と本質的に同じものである)。

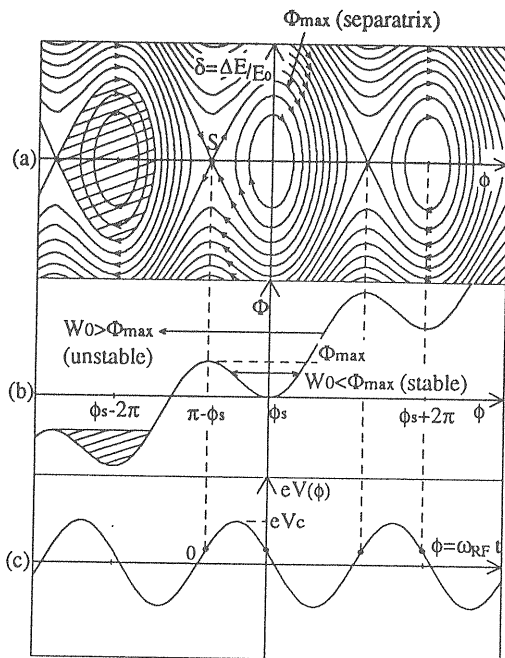


図 3.6

振動振幅が小さい場合は、 W_0 が違って、この楕円はほぼ相似形であるが、振動振幅がある程度大きくなると、この楕円は歪んでくる。このあたりの事情を示す拡大図を、図3.7に示す。この歪みは、RF 電圧の非線型性のためである。即ち、微小振動の場合は、(3.31)を得るときにやったように、synchronous phase の周りに、テーラー展開して、位相のずれの一次の項のみを取る近似で充分である。この近似は、本来三角関数であるRF電圧をsynchronous phase のところで、その場所での

微分係数を傾きとする直線で近似することにあたる。当然、振幅が大きくなるに従って、この直線近似からずれてくる。これが、ここで言う、RF電圧の非線型性という言葉の意味である。

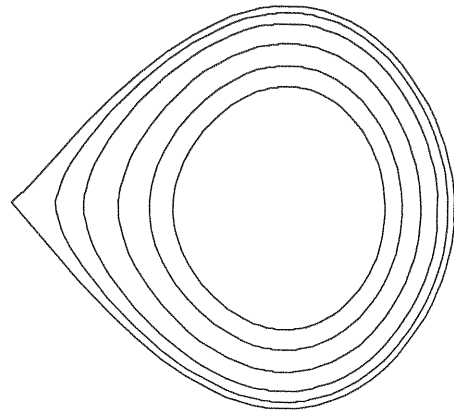


図 3.7

既に示したように、振幅が更に大きくなって W_0 が Φ_{\max} を越えると運動は不安定になる。位相平面において、この安定、不安定の境界をなす線を separatrix と呼ぶ。この separatrix 上で、図中の S で示された点を saddle point と呼ぶ。ある時、粒子の運動を表す点が、正確にこの saddle point の上であれば、この点は、ずっとこの上に留まって、そのまま動かない。その意味で saddle point は、位相平面における不動点とも言える。但し、不動点は、もう一種類ある。それは、言うまでもなく楕円の中心の点であり、この点は、synchronous particle の運動を表す。従って、この点は、安定な不動点といえる。これに対して、saddle point は、不安定な不動点である。3.2節で述べた位相安定性の原理が働く場合とは、synchronous particle の条件から少しはずれた粒子が、この安定な不動点の周りを楕円運動する場合である。これに対して、3.2節で定性的に述べたように、図3.2の ϕ_{s2} の周りでは、位相安定性の原理が働かない。これは、saddle point の周りの運動に対応する(但し、図からわかるように、saddle point の右側にいる点は、synchronous particle の周りを運動すると意味において安定である)。

さて、次にエネルギーが nominal な値から大きくずれた場合を考えよう。この場合に対応する位相平面での電子の運動を図3.8に示す。

図からわかるように、エネルギーが、nominalな値から低い方向へ（大きく）ずれた場合、エネルギーは、更に低い方向へ、又、位相は早くなる方向へずれていく。これに対して、エネルギーが高すぎる場合には、最初位相は遅れる方向に動く。これは、エネルギーが高いと一周する時間が長くなることからわかるであろう。但し、エネルギーはだんだんと下がり、ある程度行くと今度は、エネルギーがnominalな値に等しくなる。こうなると今度は、位相が遅れ始め、且つエネルギーは更に下がり続ける。エネルギーが下がり続けると、偏向電磁石（や収束電磁石）で曲がられ過ぎるので、そのうち真空パイプにおつかって、ビームから失われてしまう。

RF bucket

図3.6(a)において、斜線で示された位相平面内の領域をRF bucketと呼ぶ。電子の運動を表す点が、このRF bucketの中に入っていれば、電子は、安定にシンクロトロン振動する。図からわかるようにこのRF bucketは、RF電場の一周期に一度現われる。従って、電子貯蔵リングでは、電子をリングの進行方向に一様に分布させることはできず、このRF bucket毎の塊という形でビームが形成される。この塊のことをバンチと呼んでいる。RF bucketの数は、harmonic number, h に等しい（問、これを示せ）。従って、リングに存在できるバンチの数の最大値は、 h になる。

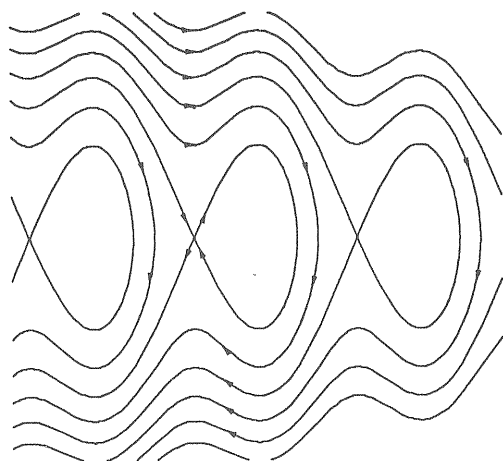


図 3.8

example

KEKBでは、低エネルギーリング、高エネルギーリングとも $h=5120$ である。従って、バンチの数の最大値は 5120 であるが、現在の設計では、RF bucketの全てに電子を詰めず、約1割程度あけておくことが計画されている（1割程度あける理由は、（本テキストでは扱わないが）イオン・トラッピングという現象を避けるためである）。

又、トリスタンMRでは、やはり、 $h=5120$ であるが、このリングでは、バンチの数は、電子2、陽電子2である（トリスタンは、第一章で述べた様に、一つのリングで二つのビームをまわし衝突させる、シングル・リング・コライダーである）。このようにバンチの数を少なくする最も大きな理由はバンチの数を増やすと、リングのあちこちで二つのビームがおつかることにより、電子の運動が不安定になるためである。

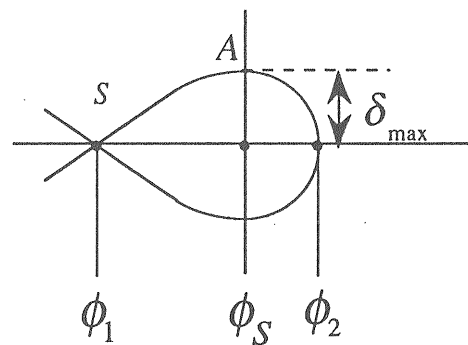


図 3.9

さて、ではRF bucketの大きさを示すパラメータを計算してみよう。図3.9に示されている δ_{max} を計算しよう。この量は、安定な振動のうちで最大のエネルギーのずれを表す。

図3.9に示されされた separatrix 上では、 W_0 は一定である。そこで saddle point (S) 上で W_0 を計算することを考える。S 上では、 $\delta=0$ であるから、 $\Phi(\phi_1)$ を計算すればよい。 ϕ_1 は、図3.6(b)からわかるように、

$$\phi_1 = \pi - \phi_s \quad (3.48)$$

である。これまで述べたことから、これは明らかであるが、これを数式で示すと、以下のようになる。まず、saddle point では、図 3.6 (b) からわかるように、

$$\frac{d\Phi}{d\phi} = 0 \quad (3.49)$$

である。これより、

$$\sin \phi = \sin \phi_s \quad (3.50)$$

である必要がある。これより、(3.48) が導かれる。又、(3.50) より、 ϕ_s でポテンシャルが極小になることもわかる。

(3.48) を (3.47) に代入して、

$$\begin{aligned} \Phi(\phi_1) &= \Phi_{\max} = \\ & \frac{2\pi h f_0^2 \alpha_c e V_c}{E_0} 2 \left(\frac{1}{q} \left(\frac{\pi}{2} - \phi_s \right) - \cos \phi_s \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

となる (問、これを示せ)。これは又、

$$\Phi_{\max} = \frac{2\pi h f_0^2 \alpha_c U_0}{E_0} 2 \left(\sqrt{q^2 - 1} - \cos^{-1} \left(\frac{1}{q} \right) \right) \quad (3.52)$$

とも書ける (問、これを示せ。cos ϕ_s 等の符号に注意)。ここで、

$$F(q) = 2 \left(\sqrt{q^2 - 1} - \cos^{-1} \left(\frac{1}{q} \right) \right) \quad (3.53)$$

により、energy aperture function $F(q)$ を定義すると、(3.52) は、

$$\Phi_{\max} = \frac{2\pi h f_0^2 \alpha_c U_0}{E_0} F(q) \quad (3.54)$$

と書ける。この $F(q)$ は、

$$F(1) = 0 \quad (3.55)$$

$$F(q) \rightarrow 2q - \pi \quad (q \rightarrow \infty) \quad (3.56)$$

という性質を持つ (問、これらを示せ)。

さて、(3.54) により、 Φ_{\max} が計算できた。

これは、saddle point での W_0 であるが、これは、図 3.9 の点 A での W_0 でもある。点 A では、今度は、ポテンシャルがゼロであるから、(3.46) より、

$$\frac{1}{2} \omega_{\text{RF}}^2 \alpha_c^2 \delta_{\max}^2 = \Phi_{\max} = \frac{2\pi h f_0^2 \alpha_c U_0}{E_0} F(q) \quad (3.57)$$

となる (問、これを示せ)。これより、

$$\delta_{\max}^2 = \left(\frac{\Delta E_{\max}}{E_0} \right)^2 = \frac{U_0}{\pi h \alpha_c E_0} F(q) \quad (3.58)$$

となる。この δ_{\max} を RF bucket height と呼び、ビームの寿命を考える際等に重要な量である。

第4章 Radiation Damping と Radiation Excitation

$$= U_0 + 2U_0 \frac{\Delta E}{E_0} \quad (4.2)$$

4.1 Radiation Damping

4.1.1 シンクロトロン振動の Radiation Damping

この節では、シンクロトロン振動が、減衰していくメカニズムについて述べ、減衰に要する時間を計算する。

電子のエネルギーが nominal な値 (E_0) からずれると、Dispersion がある場所では、その COD は E_0 の電子の COD からずれる。このことは、Radiation Damping を考える際に重要になることがあるのだが、この効果を考えると少し話がややこしくなるので、最初はまず、この効果を無視して議論を進め（これだけで充分であることも多い）、後でこの効果を取り入れるやり方を述べることにする。

エネルギーのずれによる軌道変化を考えない場合

第3章では、電子がリング一周で失うエネルギーは、電子のエネルギーによらず一定であると仮定した。しかし実際は、(3.1) からわかるように、偏向電磁石で曲げられるときに、単位時間あたりに放出される放射光のエネルギーは、電子のエネルギーの2乗に比例する。(この事と、(3.2) について述べた、「シンクロトロンで電子を加速した場合、放出エネルギーは、電子のエネルギーの4乗に比例する」事との違いに注意(問、この違いについて説明せよ))。

$$U(E) \propto E^2 \quad (4.1)$$

となる。この式を E_0 の周りでテーラー展開して、微小量の一次まで取ると、

$$U(E_0 + \Delta E) = U(E_0) + \frac{dU(E_0)}{dE} \Delta E$$

となる(問、これを示せ)。このことより、シンクロトロン振動を記述する方程式も変更を受ける。即ち、シンクロトロン振動の方程式を導くときに用いた(3.24)において、 U_0 を(4.2)の U に置き換える必要がある。これにより、(3.27)に対応する方程式は、

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{eV_c \sin(\omega_{RF}(t_s + \tau)) - eV_c \sin(\omega_{RF}t_s)}{E_0 T_0} - \frac{2U_0}{E_0 T_0} \delta \quad (4.3)$$

となる(問、これを示せ)。従って、微小振動の場合の(3.28)に対応する方程式は、

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_{RF} eV_c \cos \phi_s}{E_0 T_0} \tau - \frac{2U_0}{E_0 T_0} \delta \quad (4.4)$$

と変更される(問、これを示せ)。この式と(3.22)より、(3.30)に対応する方程式は、

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} + \frac{2U_0}{E_0 T_0} \frac{d\tau}{dt} + \omega_s^2 \tau = 0 \quad (4.5)$$

となる(問、これを示せ)。この方程式は、よく知られた減衰力が働く調和振動子の方程式である。その一般解は、

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-\frac{t}{\tau_c}} \cos\left(\sqrt{\omega_s^2 - \frac{1}{\tau_c^2}} t + \theta_0\right) \quad (4.6)$$

と書ける(問、これを示せ)。ここで、 τ_c は、減衰時間で、今の場合

$$\tau_c = \frac{E_0 T_0}{U_0} \quad (4.7)$$

である。これをシンクロトロン振動の radiation damping time という。このように、シンクロトロン振動は、減衰時間 τ_c で減衰していく。通常

$$U_0 \ll E_0 \quad (4.8)$$

であるから、

$$\tau_e \gg T_0 \quad (4.9)$$

である。つまり、radiation damping time は、電子の周回時間に比べて充分長い。又、通常

$$\tau_e \gg \frac{1}{\omega_s} \quad (4.10)$$

である。つまり、radiation damping time は、シンクロトロン振動の一周期（割る 2π ）に比べても充分長い。（4.6）は、振動の減衰のために、シンクロトロン振動数が変化することを表しているが、（4.10）であるため、充分よい近似で

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-\frac{t}{\tau_e}} \cos(\omega_s t + \theta_0) \quad (4.11)$$

が成り立つ。

又、（4.7）より、あるリングで電子ビームを加速した場合、radiation damping time は、エネルギーの3乗分の1に比例して短くなるのがわかる（問、これを示せ）。（4.7）は、簡単な式であるので、そのまま覚えてもよいが、 E_0/U_0 ターン周回すると振動が $1/e$ となると記憶するとよいかも知れない。即ち、電子のエネルギー放出量の蓄積が、ちょうどその電子のエネルギーになる時間が、damping time になるのである。

Example

トリスタンMRの場合、入射エネルギー（8 GeV）では、 $U_0 \approx 3.9 \text{ MeV}$ である。従って、減衰時間は、ターン数でいうと、約2000ターンである。これに、周回時間 $T_0 \approx 10 \mu\text{sec}$ を掛けて、 $\tau_e \approx 20 \text{ msec}$ となる。

以上示したように、電子が放出する放射光のエネルギーが、電子のエネルギーに依存する（電子のエネルギーが高いほうが放出エネルギーが大きい）事から、シンクロトロン振動の減衰が生じた。このこ

とは、上の数式を用いた説明で充分明らかであると思うが、直感的には、次のように考えれば、イメージを捉えやすいかも知れない。

即ち、前章で示したように、電子がそのエネルギーによらず、一周あたり常に U_0 のエネルギーを失うとすると、その位相空間での運動は、楕円になる。ところが、実際は、 $\delta > 0$ の時（楕円の上側にいるとき）は、エネルギー損失量が U_0 よりわずかに多いので、楕円の少し内側を通ることになる。逆に、 $\delta < 0$ の時（楕円の下側にいるとき）は、一周あたりのエネルギー損失量が U_0 よりわずかに少ないので、空洞から供給されるエネルギーによって、やはり楕円の内側に蹴られることになる。従って、常に楕円の内側に蹴る圧力が働くことになり、電子は、楕円の中心（synchronous particle の運動を表す点）に向かって減衰していくことになる。

エネルギーのずれによる軌道変化の影響

では次に、エネルギーのずれによる軌道変化の影響について考えよう。もし、この軌道変化によって、一周あたりのエネルギー損失量のエネルギー依存性が変われば、radiation damping time に影響が生じる。即ち、（4.2）とその後の運動方程式を導いた手続きからわかるように、damping time τ_e は、

$$\tau_e^{-1} = \frac{1}{2T_0} \frac{dU(E_0)}{dE} \quad (4.12)$$

である（問、これを示せ）。前項では、電子は、そのエネルギーが違って、電子がリングで感じる磁場は変わらないと仮定した。しかし、実際は、電子のエネルギーが違っていると、違った磁場分布の中を通ることになる。以下で、この効果を含めてもう少しきちんと、 $dU(E_0)/dE$ を計算する。

まず、エネルギーの関数としての、 $U(E)$ を計算してみよう。エネルギーが違っていると閉軌道（COD）も違うから、 $U(E)$ を計算するには、（原理的には）エネルギーに応じて違った path に沿って、（3.1）をリング一周積分する必要がある。（以下の議論では、steering error によるCODは、ないと仮定する。）即ち、

$$U(E) = \oint P \frac{dl}{c} \quad (4.13)$$

である(問、これを示せ)。ここで、 dl は、(エネルギーに依存する) COD に沿ったの線要素を表す。ところが、(2.331) より、この線積分は、デザイン軌道に沿ったの積分に置き換えることができる。即ち、

$$dl = \left(1 + \frac{x_\varepsilon}{\rho_0}\right) ds \quad (2.331)$$

を用いると、(4.13) は、

$$U(E) = \oint P \left(1 + \frac{x_\varepsilon}{\rho_0}\right) \frac{ds}{c} \quad (4.14)$$

となる。ここで、(2.298) より、

$$x_\varepsilon(s) = \eta(s) \Delta p/p_0 = \eta(s) \Delta E/E_0 \quad (4.15)$$

に注意すると、(4.14) は、

$$U(E) = \oint P \left(1 + \frac{\eta(s) \Delta E}{\rho_0 E_0}\right) \frac{ds}{c} \quad (4.16)$$

となる。ここで、 $\Delta E = E - E_0$ であり、 $\Delta E = 0$ の場合、(4.16) は、 U_0 を与える。(エネルギーが違っていると、一周あたりのエネルギー損失量も違うが、電子はシンクロトロン振動しているので、エネルギー損失量のある程度長い時間の平均は、やはり U_0 になる。)

さて、欲しいのは、 $dU(E_0)/dE$ であるから、(4.16) を微分して、 $E = E_0$ と置くと、

$$\frac{dU(E_0)}{dE} = \oint \left(\frac{dP(E_0)}{dE} + \frac{\eta(s) P(E_0)}{\rho_0 E_0} \right) \frac{ds}{c} \quad (4.17)$$

となる(問、これを示せ)。 P は、(3.1) より、

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2 r_c c^3}{(mc^2)^3} E^2 B^2 \quad (3.1)$$

で与えられる。その E による微分は、エネルギーが違っていると感じる磁場 B も違うことを考慮して、

$$\frac{dP(E_0)}{dE} = 2 \frac{P(E_0)}{E_0} + 2 \frac{P(E_0)}{B_0} \frac{dB(E_0)}{dE} \quad (4.18)$$

となる(問、これを示せ)。又、

$$\frac{dB(E_0)}{dE} = \frac{dB}{dx} \Big|_{x=0} \frac{dx(E_0)}{dE} = \frac{\eta}{E_0} \frac{dB}{dx} \Big|_{x=0} \quad (4.19)$$

となる(問、これを示せ)。

これらを(4.17) に代入すると、

$$\frac{dU(E_0)}{dE} = \oint \left(2 \frac{P(E_0)}{E_0} + 2 \frac{P(E_0)}{B_0} \frac{\eta}{E_0} \frac{dB}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{\eta}{\rho_0} \frac{P(E_0)}{E_0} \right) \frac{ds}{c} \quad (4.20)$$

となる。ここで、右辺の第一項の積分は、

$$\oint \left(2 \frac{P(E_0)}{E_0} \right) \frac{ds}{c} = \frac{2}{E_0} \oint P(E_0) \frac{ds}{c} = \frac{2}{E_0} U_0 \quad (4.21)$$

となり、これは前項でも求めたものである。第二項は、エネルギーがずれると、感じる磁場の強さが変わることに由来する項である。ここでは、六極電磁石からの寄与は無視し、収束電磁石からの寄与のみを考える。(2.36) より、

$$K = \frac{1}{B \rho_0} \frac{dB}{dx} \Big|_{x=0} \quad (4.22)$$

であるから、この項の積分は、

$$\oint \left(2 \frac{P(E_0)}{B_0} \frac{\eta}{E_0} \frac{dB}{dx} \Big|_{x=0} \right) \frac{ds}{c} = \frac{2}{E_0} \oint \eta \rho_0 P(E_0) K \frac{ds}{c} \quad (4.23)$$

となる。また第三項は、エネルギーがずれると偏向

電磁石を走る距離が変わることに由来する項である。
 (4.21)、(4.23)を(4.20)に代入して整理すると、

$$\frac{dU(E_0)}{dE} = \frac{U_0}{E_0} \left[2 + \frac{1}{cU_0} \oint \eta P(E_0) \left(2\rho_0 K + \frac{1}{\rho_0} \right) ds \right] \quad (4.24)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、

$$D = \frac{1}{cU_0} \oint \eta P(E_0) \left(2\rho_0 K + \frac{1}{\rho_0} \right) ds \quad (4.25)$$

と置くと、

$$\frac{dU(E_0)}{dE} = \frac{U_0}{E_0} (2+D) \quad (4.26)$$

と書ける。

(4.25)を少し変形してみよう。この式の積分の中の $P(E_0)$ は、(3.2)より

$$P(E_0) = \frac{2}{3} \frac{r_e c}{(mc^2)^3} \frac{E_0^4}{\rho_0^2} \quad (4.27)$$

となるから、この式の中で s に依存するのは、 ρ_0 だけであり、そのほかは積分の外へ出すことができる。一方分母の U_0 も、 $P(E_0)$ の積分であり、 ρ_0 以外の項を積分の外へ出せる。従って、分子分母で ρ_0 以外の項は約分できることになり、式は簡単になる。これらのことより、(4.25)は、

$$D = \frac{\oint \eta \left(\frac{2K}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^3} \right) ds}{\oint \frac{1}{\rho_0^2} ds} \quad (4.28)$$

となる(問、これを示せ)。この式より、 D は、偏向電磁石と収束電磁石の強さ及びDispersionのみで決まり、電子のエネルギーにはよらないことがわかる。

(4.12)、(4.26)より、damping time τ_e

は、

$$\tau_e = \frac{2E_0 T_0}{J_e U_0} \quad (4.29)$$

$$J_e = 2+D \quad (4.30)$$

となる。この J_e をシンクロトン振動のdamping partition numberと呼ぶ。

この様にして、エネルギーによる軌道変化の効果は、 D または J_e というパラメータに組み込めることがわかった。ここで、この D について調べてみよう。

まず、偏向電磁石が、2.1.3節で述べたCombined型ではなく、Separate型である場合を考えよう。この場合、(4.28)の分子の積分の第一項は、ゼロになる。これは、Separate型の場合 K または $1/\rho_0$ のどちらかがゼロになるからである。従ってこの場合、

$$D_{\text{sep}} = \frac{\oint \eta \frac{1}{\rho_0^3} ds}{\oint \frac{1}{\rho_0^2} ds} \quad (4.31)$$

となる。更に、全ての偏向電磁石で曲率半径が同じであると仮定すると、

$$D_{\text{sep}} = \frac{\frac{C}{\rho_0^2} \frac{1}{C} \oint \eta \frac{1}{\rho_0} ds}{\frac{2\pi\rho_0}{\rho_0^2}} = \frac{R}{\rho_0} \alpha_c \quad (4.32)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、 α_c に関する近似式

$$\alpha_c \cong \frac{1}{v_x^2} \quad (4.33)$$

を用いる(この式に関しては、巻末の補足参照)と、

$$D_{\text{sep}} \cong \frac{R}{v_x^2 \rho_0} \ll 1 \quad (4.34)$$

となる。しかし、この式が成り立つのは、実はセクター型の偏向電磁石の場合で、rectangular型の場合、

$$D_{\text{sep}} \cong 0 \quad (4.35)$$

となる。これは、先に述べたように、今計算している項は、エネルギーがずれた粒子では偏向電磁石を走る長さが違うことから生じるのであるが、rectangular型の偏向電磁石の場合、エネルギーがずれても電子が、偏向電磁石の中を走る距離がほとんど変わらない事に由来する（問、この事と、 α_c の計算の場合、rectangular型とセクター型で、差がでない事の違いを考えよ）。

次に、偏向電磁石が、Combined型である場合は、

$$\eta \sim R/v_x^2, \quad K \sim \left(\frac{v_x}{R}\right)^2, \quad \rho_0 \sim R$$

という非常に粗い近似をすると、

$$D_{\text{comb}} \cong \frac{1}{v_x^2} + 2 \quad (4.36)$$

となる（問、これを示せ）。この場合、Dは、dampingtimeに大きく影響する。それだけでなく、後で示すように、Dが1より大きいときは、ベータトロン振動が、dampingでなくanti-dampingになるので、このような場合ビームを安定に蓄積することができなくなる。但し、ここで行ったのは、非常に粗い評価であるので、実際はもう少し正確な評価が必要であるが、いずれにしろ、電子貯蔵リングでCombined型の偏向電磁石を使いたい場合は、Dがどうなるかの注意が必要である。

4.1.2 ベータトロン振動のRadiation Damping

シンクロトロン振動と同様に、ベータトロン振動をも減衰させるメカニズムが存在する。この節では、このベータトロン振動が、減衰していくメカニズムについて述べ、減衰に要する時間を計算する。

ベータトロン振動が減衰するのは、主にRF空洞で加速（エネルギー補償）される時である。また、電子が放射光を放出する過程も、ベータトロン振動

の減衰時間に影響する。

以下で、まず、RF空洞で加速されるときに起こるベータトロン振動の減衰について調べ、その後、放射光放出過程が減衰時間にどう影響するかを調べる。

RF空洞での加速によるベータトロン振動の減衰

第2章で調べたように、電子のエネルギーが変わらない時、ベータトロン振動には、Courant-Snyder Invariant (W) という不変量があった。ここでは、電子のエネルギーが変わる時、Wがどうなるかを考えてみよう。電子貯蔵リングで、電子のエネルギーを変える主な過程は、磁場で曲げられるときに放射光を放出してエネルギーを失う過程と、失ったエネルギーをRF空洞で補給される過程である。

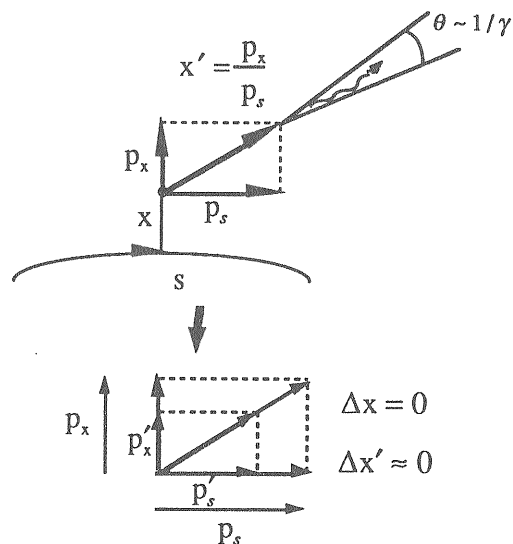


図 4.1

まず、放射光の放出の過程であるが、この場合、放射光は、電子の軌道のほぼ接線方向に $1/\gamma$ ぐらいの広がりを持って放出される。図4.1に示したように、この場合 x, x' は変化しない（図には示されていないが、 y, y' も同様である）。従って、ベータトロン振動は、放射光放出によって影響を受けないことがわかる。但し、これはナイーブな議論であって、実は、Dispersionがあるところで、放射光を放出するとベータトロン振動に影響がでる。この効果は、後で調べることにして、ここでは、これを無視することにする。

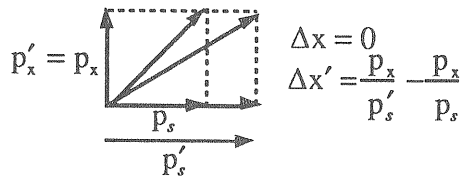


図 4.2

次に、RF空洞による、エネルギーの補給の場合
はどうであろうか。図4.2に示したように、この
場合、進行方向の運動量は加速により変化するが、
水平方向（及び垂直方向）の運動量は変化しない。
このため、（放射光放出の場合と違って） x' およ
び y' （の絶対値）が減少することになる。この減
少の量は、図からわかるように、

$$\Delta x' = \frac{p_x}{p'_s} - \frac{p_x}{p_s} \cong -\frac{\Delta p}{p_0} x' = -\frac{\Delta E}{E_0} x' \quad (4.37)$$

となる（垂直方向も同様）（問、これを示せ）。こ
の傾きの減少により、ベータatron振動の減衰が生
じる。この減衰は、イメージとしては、図4.3の
様である（ここでは、 $\alpha = 0$ の場合を考えている）。
図より、 x' の変化は、常に W を減少させるように
働くことがわかるであろう。

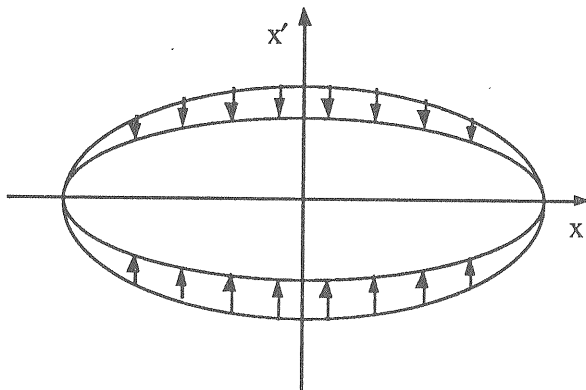


図 4.3

次に、この傾きの変化による W の減衰を定量的
に計算してみよう。（2.227）より、

$$W_x = \gamma x'^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \quad (4.38)$$

であったから、（4.37）の変化による W の変化
は、

$$\Delta W_x = -2 \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right) (\alpha x x' + \beta x'^2) \quad (4.39)$$

となる（問、これを示せ）。従って、 W の変化は、
電子が位相平面のどこにいるかに依存する。このま
までは、 W の減衰率を計算できないから、ここで
位相平均という操作を行う。まず、（2.222）、
（2.223）より、

$$x = \sqrt{W_x \beta_x} \cos(\psi_x + \psi_0) \quad (4.40)$$

$$x' = -\sqrt{W_x / \beta_x} \{ \alpha_x \cos(\psi_x + \psi_0) + \sin(\psi_x + \psi_0) \} \quad (4.41)$$

である。チューンが正確にある簡単な有理数でない
限り、ある程度時間がたつと ψ_x は、いろいろな位
相を巡り、 ψ_x が 0 から 2π までの位相の全て
に同じ割合で滞在するという近似が成り立つことが
わかるであろう。この近似を用いると、 xx' 、 x'^2
の平均値は、それぞれ、

$$\langle xx' \rangle_{\text{phase}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} xx' d\psi_x = -\frac{W_x \alpha_x}{2} \quad (4.42)$$

$$\langle x'^2 \rangle_{\text{phase}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x'^2 d\psi_x = \frac{W_x \gamma_x}{2} \quad (4.43)$$

となる（問、これを示せ）。これらと（2.201）
を用いると、 ΔW_x の平均値は、

$$\langle \Delta W_x \rangle_{\text{phase}} = - \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right) W_x \quad (4.44)$$

となる（問、これを示せ）。従って、 W_x の平均
的な変化率は、

$$\frac{\langle \Delta W_x \rangle_{\text{phase}}}{\Delta t} = - \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right) \frac{W_x}{\Delta t} \quad (4.45)$$

となるが、

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{U_0}{T_0} \quad (4.46)$$

を用いると、結局平均的には、

$$\frac{dW_x}{dt} = -\left(\frac{U_0}{E_0 T_0}\right) W_x \quad (4.47)$$

としてもよいことがわかる。従って、 W_x は、(4.7)で与えられるシンクロトロン振動の振幅の減衰時間と同じ減衰時間、 τ_e で減衰することがわかった(問、これを示せ)。また、ベータトロン振動の振幅は、 $\sqrt{W_x}$ に比例するので、この振幅の減衰時間は、

$$\tau_x = 2 \frac{E_0}{U_0} T_0 \quad (4.48)$$

となる(問、これを示せ)。

ここまでは、水平方向の場合であったが、垂直方向についても全く同じ議論が成り立つので、 $\tau_x = \tau_y$ であり、これらを総称して、 τ_β と書く。これらをまとめると、

$$\tau_x = \tau_y = \tau_\beta = 2\tau_e \quad (4.49)$$

となる。つまり、ベータトロン振動の damping time は、シンクロトロン振動の場合より2倍遅いことがわかった。

このように、ベータトロン振動とシンクロトロン振動のどちらのばあいも、その damping time は、 U_0 に反比例する。従って、 U_0 を増やせば damping time は、早くなり、ビームはそれだけ安定になる。電子貯蔵リングでは、この様な目的でウイグラー電磁石(Wiggler Magnet)と呼ばれる偏向電磁石を用いる場合がある。通常偏向電磁石は、デザイン軌道を作るのに用いられるが、この Wiggler 電磁石は、デザイン軌道に沿って、曲率が逆符号のものを何台か設置し、ビームを右左に交互に曲げることによって、ビームに放射光を放出させるが、全体としての曲げ角はゼロになるようなものを指す。(ここでいう、ウイグラー電磁石は、第1章で述べた放射光マシンの挿入型光源としてのウイグラーとは別物なので注意すること)。この様に、ウイグラー電磁石は、damping time を短くするために用いられ、実際、トリスタンのMRでは、

日常的にウイグラーを用いている。また、KEKBでも、ウイグラーを用いることが計画されている。また、ウイグラーを用いると、後で述べるように、エミッタンスも変化する。場合によっては、このエミッタンスを調整するためにウイグラーを用いる場合もある。

Example

トリスタンMRの場合、入射エネルギー(8 GeV)では、既に述べたように、 $\tau_e \approx 20\text{m sec}$ であった。従って、 $\tau_\beta \approx 40\text{m sec}$ となる。但し、これは、ウイグラー電磁石を用いる場合であって、これを用いない場合、 $\tau_e \approx 55\text{m sec}$ 、 $\tau_\beta \approx 110\text{m sec}$ となる。物理実験を行うエネルギーは、29 GeVであるが、この場合の damping time は、シンクロトロン振動の場合と同様に、エネルギーの3乗分の一に比例して短くなるとして計算することができる。但し、29 GeVでは、ウイグラー電磁石は用いられない。また、物理実験を行う場合、後で述べるように、RF空洞の周波数をずらすことによって、エミッタンスの調整をしているので、この効果による damping time の変化の評価も必要である。これについても後で述べる。

放射光放出過程の減衰時間への影響

次に、電子が、Dispersionのあるところで、放射光を放出すると、damping time に影響がでることがあることを示し、この影響を評価する。

上で述べたように、放射光はビームの進行方向に放出されるので、 x, x' は、どちらも変化しない。ところが、2.3.4節で述べたように、

$$x(s) = x_\beta(s) + x_{\text{COD}}(s) + x_\epsilon(s) \quad (2.344)$$

である。ここでは、CODは存在しないと仮定しているから、

$$x = x_\beta + x_\epsilon \quad (4.50)$$

$$x' = x'_\beta + x'_\epsilon \quad (4.51)$$

としてよい。従って、放射光を放出した場合、

$$\Delta x = \Delta x_\beta + \Delta x_\epsilon = 0 \quad (4.52)$$

$$\Delta x' = \Delta x'_\beta + \Delta x'_\epsilon = 0 \quad (4.53)$$

である。ところが、(2.298)より、

$$x_\epsilon(s) = \eta(s)\Delta E/E_0$$

であるから、もし、 η がゼロでない場所で、放射光を放出すると、 x_ϵ が変化することがわかる。同様に、 η' がゼロでない場所で放射光を放出すると、 x'_ϵ が変化する。これに伴って、(4.52)、(4.53)より、 x_β, x'_β も変化することがわかる。言い換えると、ある電子が、 η または、 η' がゼロでない場所で放射光を放出するとベータトロン振動が励起される。これは、どういう事かという、 x_ϵ は、エネルギーのずれた粒子に対するCODつまり、中心軌道であり、エネルギーのずれた粒子は、この回りにベータトロン振動をするのであるが、放射光を放出することにより、その中心軌道が変化し、粒子は、新しい中心軌道の回りをベータトロン振動を始めてしまうのである。

この過程による x_β と x'_β の変化は、

$$\Delta x_\beta = -\eta_x \frac{\Delta E}{E_0} \quad (4.54)$$

$$\Delta x'_\beta = -\eta'_x \frac{\Delta E}{E_0} \quad (4.55)$$

である。以下で、 x_β と x'_β のこの変化による Courant-Snyder Invariant (W) の変化について調べる。

ベータトロン振動の不変量であった W_x は、(4.38)で与えられるから、(4.54)、(4.55)によるその変化は、

$$\begin{aligned} \Delta W_x = & 2(\gamma_x x_\beta \Delta x_\beta + \alpha_x x_\beta \Delta x'_\beta + \alpha'_x x'_\beta \Delta x_\beta + \beta_x x'_\beta \Delta x'_\beta) \\ & + (\gamma_x \Delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \Delta x_\beta \Delta x'_\beta + \beta_x \Delta x'_\beta^2) \end{aligned} \quad (4.56)$$

で与えられる(問、これを示せ)。ここで、右辺の第一項を ΔW_D 、第二項を ΔW_E と書くことにしよう。即ち、

$$\begin{aligned} \Delta W_D = & 2(\gamma_x x_\beta \Delta x_\beta + \alpha_x x_\beta \Delta x'_\beta + \alpha'_x x'_\beta \Delta x_\beta + \beta_x x'_\beta \Delta x'_\beta) \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\Delta W_E = \gamma_x \Delta x_\beta^2 + 2\alpha_x \Delta x_\beta \Delta x'_\beta + \beta_x \Delta x'_\beta^2 \quad (4.58)$$

である。ここで、これらの変化が Δt の間に起こったとすると、 W_x の変化率は、

$$\frac{\Delta W_x}{\Delta t} = \frac{\Delta W_D}{\Delta t} + \frac{\Delta W_E}{\Delta t} \quad (4.59)$$

となる。ここで、 Δt をゼロの極限に持っていけば、ある瞬間の W_x の変化率が求められるはずである。しかし、ここで注意が必要である。それは、通常の場合だと、(4.59)の右辺の第二項は、二次の微量であるので、 Δt を充分小さく取れば、この項は、無視できるはずである。もしも、放射光の放出が、時間的に連続して行われ、従って、電子のエネルギーが連続的に変化するとすると、これは全く正しい。しかし、実際は、電子による放射光の放出は、量子論に従う確率過程であり、電子は、あるエネルギーを持った光子を、確率的に、しかもほぼ瞬時に放出するのである。即ち、電子による放射光放出は、時間的に連続して起こるのではなく、時間的に飛び飛びに起こり、その時放射光は、光子というエネルギーの塊として放出されるのである。(そして、電子がどの時間に光子を放出するか、また、どれだけのエネルギーの光子を放出するかは、確実に予言できないのであって、我々が知りうるのは、それらが起こる確率のみである。)

この様に、光子が時間的に飛び飛びに、放出される場合、(4.59)の右辺の第二項は、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限でも有限の値を持つ。そして、この項により、radiation excitationが生じるのである。但し、これは次節のテーマであるので、ここでは述べない。ただ、次節に備えて、(4.58)をもう少し計算しておく、(4.54)、(4.55)より、

$$\Delta W_E = (\gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta'_x + \beta_x \eta_x'^2) \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^2 \quad (4.60)$$

となる(問、これを示せ)。

次に、(4.59)の右辺の第一項であるが、この項のために W_x に変化が生じ damping time に影響がでる場合がある。これについて考えよう。(4.57)は、(4.54)、(4.55)を用いて、

$$\Delta W_D = -2 \left\{ \gamma_x x_\beta \eta_x + \alpha_x (x_\beta \eta'_x + x'_\beta \eta_x) + \beta_x x'_\beta \eta'_x \right\} (\Delta E/E_0) \quad (4.61)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、 ΔE は放射光を出すことによる電子のエネルギー変化であった。リングのデザイン軌道に沿っての線要素 ds の間のエネルギー変化は、

$$\Delta E = -P \left(1 + \frac{x_\beta + x_\epsilon}{\rho_0} \right) \frac{ds}{c} \quad (4.62)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、 x_β の項は、ベータatron振動している粒子は、偏電磁石の中を走る距離が違うことを表現している。

次に、 P は、(3.1)より B を $x = (x_\beta + x_\epsilon)$ の関数と考え、 δ と x について原点の回りでテーラー展開し、一次の項まで取ることに、

$$P = P_0 \left(1 + 2\delta + 2 \frac{1}{B_0} \frac{dB}{dx} x \right) \quad (4.63)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、 δ は、シンクロtron振動を記述するパラメータで、(3.19)で定義されている。

$$\delta = \frac{\Delta E}{E_0} \quad (3.19)$$

(この式の ΔE は、シンクロtron振動によるエネルギーのずれを表し、(4.62)の ΔE とは、別のものであることに注意)。

(4.62)、(4.63)より、 ΔW_D は、

$$\Delta W_D = \frac{2}{E_0} \left\{ \gamma_x x_\beta \eta_x + \alpha_x (x_\beta \eta'_x + x'_\beta \eta_x) + \beta_x x'_\beta \eta'_x \right\} \times P_0 \left(1 + 2\delta + \frac{2}{B_0} \frac{dB}{dx} (x_\beta + \eta_x \delta) \right) \left(1 + \frac{x_\beta + \eta_x \delta}{\rho_0} \right) \frac{ds}{c} \quad (4.64)$$

となる(問、これを示せ)。ここで、前にやったベータatron振動の位相平均を取るという操作を行う。

この操作により、 $\langle x_\beta \rangle$, $\langle x'_\beta \rangle$ や $\langle x_\beta^3 \rangle$, $\langle x_\beta^2 x'_\beta \rangle$

を含む項は、ゼロになる(問、これを示せ)。

$\langle x_\beta^2 \rangle$, $\langle x_\beta x'_\beta \rangle$ の項は残り、その値は、(4.42)、

(4.43)で与えられる。また、(4.64)は、 δ に依存するが、シンクロtron振動に対しても位相平均の操作を行うことができる。(シンクロtron振動は、一般にベータatron振動に比べれば遅い振動であるが、それでも通常 damping time に比べれば充分速いので、この位相平均の操作は可能である。) このシンクロtron振動の位相平均により、 $\langle \delta \rangle$ の項はゼロになる。 $\langle \delta^2 \rangle$ の項は残るが、これを含む項は、ベータatron振動の位相平均によりゼロになるので、結局、 ΔW_D は、平均値としては、シンクロtron振動の影響を受けないことがわかる。

以上の位相平均の操作によって生き残る項を集め、(4.42)、(4.43)を用いると、

$$\Delta W_D = \frac{P_0}{cE_0} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{2}{B_0} \frac{dB}{dx} \right) \eta_x W_x ds \quad (4.65)$$

となる(問、これを示せ)。これをリング一周で積分して、リング一周の変化分を計算すると、この積分は、定数を除いて(4.25)と同じなので、

$$\int_{\text{ring}} \Delta W_D = \frac{U_0}{E_0} DW_x \quad (4.66)$$

となる(問、これを示せ)。この変化は当然リング一周の時間 T_0 の間に起こったものであるから、

W_D の変化率は、

$$\frac{dW_D}{dt} = \frac{U_0}{E_0 T_0} D W_x \quad (4.67)$$

となる（問、これを示せ）。この影響をRF空洞による加速の際に起こる damping の効果を与える式（4.47）に組み込むと、

$$\frac{dW_x}{dt} = -\frac{U_0}{E_0 T_0} (1-D) W_x \quad (4.68)$$

となる（問、これを示せ）。従って、 W_x の damping time は、

$$\tau_{W_x} = \frac{E_0 T_0}{U_0 (1-D)} \quad (4.69)$$

となり、また、ベータatron振動の振幅の damping time は、

$$\tau_x = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_x} \quad (4.70)$$

となる。ここで、

$$J_x = 1 - D \quad (4.71)$$

と置いた。これを水平方向の damping partition number と呼ぶ。

以上は、水平方向の場合であったが、垂直方向の場合は、通常 Dispersion は、ほとんどゼロであるので、

$$\tau_y = \frac{2E_0 T_0}{U_0 J_y} \quad J_y = 1 \quad (4.72)$$

となる。

（4.70）、（4.71）よりわかるように、 D の値が1より大きくなると、水平方向のベータatron振動が、anti-damping になり、ビームを安定に蓄積できなくなる。先に述べた、Combined型の電磁石を使う場合などは、注意が必要である。また、RF空洞の周波数をずらすと、 D の値が変化するが、これについては後で述べる。

（4.30）、（4.71）、（4.72）より、

$$J_e + J_x + J_y = 4 \quad (4.73)$$

となる。この式は、（ここでは、詳しく述べないが）例えば、マシンエラーなどのために J_y が1からずれても成り立つ非常に一般的な式である。

以上ベータatron振動の減衰について述べたが、個々の電子のベータatron振動が減衰すると、 W の粒子平均（の1/2）としてのエミッタンス（2.244）を参照）も、 W と同じ damping time で減少する。従って、ビームサイズも小さくなる。但し、radiation damping によって、ビームサイズがどこまでも小さくなるわけではなく、radiation damping に逆行する過程としての radiation excitation と呼ばれる過程が存在し、これらの釣り合いで、平衡状態のエミッタンスやビームサイズが決まっている。次節で、この radiation excitation について述べる。

なお、言い忘れたが、ベータatron振動の減衰は、電子貯蔵リングに固有の現象ではなく、陽子シンクロトロンや線形加速器でも見られる、「加速」器に普遍的な現象である。即ち、ベータatron振動の減衰は、主にビーム加速によって生じたが、このことから想像できるように、ビームが加速されるときには、ベータatron振動の減衰が生じるのである。但し、電子貯蔵リング以外では、このビーム加速によるベータatron振動の減衰は、radiation damping とは言わず、adiabatic damping（断熱減衰）と呼ぶ。

4.2 Radiation Excitation

これまで、我々は、電子による放射光の放出は、時間的に連続して行われ、従って、電子のエネルギーも、時間の関数として連続的に変化すると仮定してきた。しかし、実際は、前節の途中でも述べたように、電子による放射光放出過程は、量子論的な過程で、電子は、時間的に跳び跳びに、エネルギー量子としての光子を放出するのである。前節までに行った取り扱いは、この量子的な過程を時間的にならして、平均したものと考えることができるが、この様な取り扱いでは、不十分で、この量子論的な効果が、電子の運動に大きく影響するのである。以下で、この影響について調べるが、まず手始めに、放射光の

放出過程について、簡単に調べる。特に、どのぐらいの時間間隔で、どのぐらいのエネルギーを持った光子が放出されるのか等が興味の対象になる。

4.2.1 放射光放出過程

電子による光子の放出は、量子論的な効果なので、この効果を調べるには、相対論的量子力学による取り扱いが必要だと思われるが、実際は、以下に示すように、古典電磁気学と半古典論的な量子化の方法で、一応必要な公式を導くことができる。

まず、古典電磁気学による取り扱いから始めよう。

古典電磁気学による取り扱い

ここでは、式の導出は行わないで、以下で必要になる計算結果のみを示す。式の導出法については、電磁気学の教科書 [14] を参照することができる。

曲率半径 ρ で曲げられる相対論的な電子が、単位時間当りに (放射光として) 放出するエネルギー P は、既に、(3.1) に示した。この時、放射光は、電子の軌道の接線方向に、 $1/\gamma$ の広がりを持って放出される。また、その周波数スペクトルは、

$$F(\omega) = \frac{P}{\omega_c} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (4.74)$$

で与えられる。ここで、 $F(\omega)d\omega$ は、単位時間に放出される ω と $\omega + d\omega$ の間にある周波数を持った放射光の全エネルギーである。 ω_c は、次の式で定義される基準周波数である。

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3}{2\rho} \quad (4.75)$$

この ω_c は、critical frequency と呼ばれる。また、 S は、

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \xi \int_{\xi}^{\infty} K_{\frac{5}{3}}(\xi) d\xi \quad (4.76)$$

で定義される。ここで、 $K_{5/3}$ は、modified Bessel function である。また、

$$P = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega \quad (4.77)$$

となるように、

$$\int_0^{\infty} S(\xi) d\xi = 1 \quad (4.78)$$

と規格化されている。また、 S の漸近形は、次の式で与えられる。

$$S(\xi) \approx 1.34\xi^{\frac{1}{3}} \quad (\xi \ll 1) \quad (4.79)$$

$$S(\xi) \approx \frac{9\sqrt{3}}{8\sqrt{2\pi}} \xi^{\frac{1}{2}} e^{-\xi} \quad (\xi \gg 1) \quad (4.80)$$

図 4.4 に、 S を ω/ω_c の関数としてプロットした。

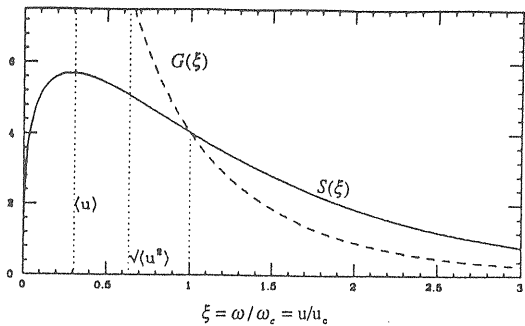


図 4.4

量子論的效果

以下で必要なただ一つのこと、角周波数 ω の放射光は、エネルギーが、 $\hbar\omega$ の量子 (光子) として放出されるということである。ここで、 \hbar は、プランク定数 (割る 2π) で、 $\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV sec}$ の値を持つ。

ここで、単位時間に放出されるエネルギーが u と $u + du$ の間にある光子の個数を $n(u)du$ と書くことにしよう。(もちろん、光子の放出過程は、確率過程であるので、これらの個数は、確定的なものではなく、期待値であるとみなすべきである。) これらの光子が運ぶエネルギーは、 $un(u)du$ である。このエネルギーは、古典論的な式 (4.74) において、周波数が $\omega = u/\hbar$ の近傍で、周波数幅

$d\omega = du/\hbar$ の間の放射光のエネルギーに等しくなるはずである。即ち、

$$un(u)du = F(u/\hbar)du/\hbar \quad (4.81)$$

となるはずである。従って、

$$n(u) = \frac{P}{u_c^2} G\left(\frac{u}{u_c}\right) \quad (4.82)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、

$$G(\xi) = \frac{1}{\xi} S(\xi) \quad (4.83)$$

$$u_c = \frac{3\hbar c \gamma^3}{2\rho} \quad (4.84)$$

と置いた。この u_c を critical energy と呼ぶ。 G は、図 4.4 に示されている。図に見られるように、 G は、ゼロエネルギーで発散しているが、その漸近形は、 $u^{-2/3}$ であるので、全エネルギーで積分しても有限の値に留まっている。

単位時間に放出される光子の数の期待値は、

$$N_p = \int_0^\infty n(u)du \quad (4.85)$$

である。ここでは、計算法を示さないが、modified Bessel function を含む項の積分を実行することにより、

$$N_p = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P}{u_c} \quad (4.86)$$

を得る。従って、光子放出に関する確率密度は、

$$\Xi(u) = \frac{1}{N_p} n(u) \quad (4.87)$$

となる (問、これを示せ)。この確率密度を使って、例えば、放出される光子のエネルギーの期待値が次のように計算される。

$$\langle u \rangle = \int_0^\infty u \Xi(u) du = \frac{1}{N_p} \int_0^\infty un(u) du \quad (4.88)$$

右辺の積分は、(4.77) を使うと P になるから、

$$\langle u \rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}} u_c \cong 0.308 u_c \quad (4.89)$$

となる。

以上述べたことまとめると、単位時間に放出される光子の数の期待値は、 N_p で与えられ、従って、電子がある光子を出してから次の光子を出すまでの時間間隔の期待値は、 $1/N_p$ になる。また、放出される光子が持つエネルギーの期待値は、 $0.32u_c$ になる。粗っぽくいうと、単位時間に放出される光子の数の典型的な値は、 P/u_c であり、光子のエネルギーの典型的な値は、 u_c であるとも言える。

以上の計算で、放出される光子の数の期待値は、わかった。では、その個数のばらつきはどのぐらいであろうか。このことについては、まず、電子が光子を放出することによって失うエネルギーは通常わずかであるから、どの時間をとっても、電子が光子を放出する確率はほぼ同じであること、つまり、時間的にランダムに光子が放出されることに注意しよう。このような状況の下では、ある有限の長さの時間の間に電子が放出する光子の数は、その期待値の周りに Poisson 分布する (問、その理由を説明せよ)。Poisson 分布であるから、分布の標準偏差は、 $\sqrt{N_p}$ になる。

ここで、放射光放出の典型的なパラメータ N_p と u_c の値を具体的に計算してみよう。(4.84) より、 u_c は、電子のエネルギーと曲率半径だけの関数である。また、 N_p は、(4.86) からわかるように、 P と u_c の関数であるが、(3.2) からわかるように、 P も電子のエネルギーと曲率半径の関数である。従って、 N_p も電子のエネルギーと曲率半径だけの関数である。これらの値を求めるために、これまでに示した式に実用的な数字を入れた場合に使えるように書き換えると、まず、(3.2) は、

$$P[\text{GeV/sec}] = 4.23 \times 10^3 \frac{E_0^4 [\text{GeV}]}{\rho^2 [\text{m}]} \quad (4.90)$$

となる (問、これを示せ)。また、(4.84) は、

$$u_c [\text{keV}] = 2.22 \frac{E_0^3 [\text{GeV}]}{\rho [\text{m}]} \quad (4.91)$$

となる。 N_p は、これらから、(4.86) を用いて計算できるが、

$$N_p \propto \frac{E_0}{\rho} \propto B$$

となり、(電子が磁場で曲げられる場合) 磁場の強さだけで決まることに注意しよう。

Example

KEKB の低エネルギーリングについて考えよう。現在のところのデザインでは、このリングのビームエネルギーは、3.5GeV で、偏向電磁石の曲率半径は、16.2m である。従って、

$$P = 2.42 \times 10^3 \text{ GeV/sec}$$

$$u_c = 5.88 \text{ keV}$$

$$N_p \cong 3.25P/u_c = 1.34 \times 10^9 / \text{sec}$$

となる。

次節の計算で必要になる量は、

$$N_p \langle u^2 \rangle = \int_0^\infty u^2 n(u) du \quad (4.92)$$

である。これは、単位時間に放出される光子のエネルギーの2乗の和の期待値を意味する。この量を計算する (ここでも結果のみを示す) と、

$$N_p \langle u^2 \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} u_c P \cong 1.32 u_c P \quad (4.93)$$

となる。

ここで、単位時間に放出されるエネルギー

$$P = N_p \langle u \rangle$$

を一定に保って、 $\langle u \rangle \rightarrow 0$ の極限を考える (放射光が時間的に連続して放出される古典論の場合に対

応する) と、 $\langle u_c \rangle \rightarrow 0$ となるから、

$$N_p \langle u^2 \rangle \rightarrow 0$$

となる。後で見ると、radiation excitation の影響は、 $N_p \langle u^2 \rangle$ に比例するから、この極限では、excitation は、なくなってしまう。言い換えると、radiation excitation は、放射光が、光子というエネルギーの塊として放出されることに起因しているのである。

4.2.2 ベータトロン振動のRadiation Excitation

Radiation Excitation とはどのようなものか

Radiation Excitation (放射励起) は、Quantum Excitation (量子励起) と呼ばれ、電子貯蔵リングでは、重要な効果である。この効果は、電子が放射光を放出するときに、光子というエネルギーの塊として、時間的にはランダムに放出することに起因している。例えば、ベータトロン振動の場合、4.1.2 節で述べたように、Dispersion のある場所で光子を放出した場合、振動振幅が変化する。但し、変化といっても、振幅が増える場合だけではなく、振幅が減少する場合もある。こういう場合、振幅が増加する場合と減少する場合が打ち消しあって、平均すると振動振幅の変化の効果はなくなってしまうと考えがちである。

しかし、実際はそうではない。これは、状況を単純化した例として、確率論でいう random walk (乱歩、酔歩) を考えれば推測が付くかも知れない。乱歩とは、例えば、金貨を投げて表がでれば右へ ϵ だけ進み、裏がでれば左へ ϵ 進むような事を繰り返す場合である。金貨の表がでる確率と裏がでる確率は等しく $1/2$ とし、 n 回同じ事を繰り返した後、その人がいる場所の分布を考えよう。この場合、 n を大きくしていくと、この分布は、ガウス分布に近づくことが知られている (中心極限定理)。この場合の分布の中心は、元に居た場所であり、標準偏差は、 $\sqrt{n}\epsilon$ になる。即ち、先ほどの金貨投げを繰り返しても、その人が存在するもっとも確率の高い場所は、元に居た場所である。しかし、 n を大きくすると分布の広がり、どんどん大きくなってしま

のである。つまり、一回一回の移動量は、小さくても、金貨投げを繰り返す間に、ある確率で、元の場所から大きくはずれてしまうことが生じるのである。

この乱歩の場合とよく似て、ベータトロン振動の場合も、電子が光子を放出することによって振動振幅が大きくなったり小さくなったりするうちに、大きな振幅を持つ確率が増えてくるのである。但し、乱歩の場合と違い光子の放出の場合、一度に放出されるエネルギーは一定ではなく、ある確率で大きなエネルギーの光子が放出されることもあることに注意すること。また、ベータトロン振動の場合、放射励起によって、振動振幅がどんどん大きくなるのではなく、放射減衰の過程があるので、これらのつり合いで、ある平衡状態に達することにも注意しよう。

ベータトロン振動の Radiation Excitation の計算

さて、以下でベータトロン振動の Radiation Excitation について調べよう。(4.59) 式のところで既に述べたように、Radiation Excitation は、

(4.59) の $\Delta W_E / \Delta t$ を計算することにより評価できる。エネルギー u の光子を放出した場合の W_E の変化は、(4.60) より、

$$\Delta W_E = (\gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta'_x + \beta_x \eta_x'^2) \left(\frac{u}{E_0} \right)^2 \quad (4.94)$$

と表される。ここで、

$$H = \gamma_x \eta_x^2 + 2\alpha_x \eta_x \eta'_x + \beta_x \eta_x'^2 \quad (4.95)$$

と置くと、この量は、Courant-Snyder invariant W_x において、 x, x' を η_x, η'_x に置き換えたものである。従って、この H は、(W_x とは違って) ビームのエネルギーが変わらない近似においても不変量ではなく、リングの場所の関数である。(但し、 η_x, η'_x は、偏向電磁石がない範囲では、 x, x' の場合と同じトランスファー・マトリックスによって変換されるので、この範囲では、 H は、不変である。) また、 H は、 W_x と同じく常に正である ($H > 0$) ことに注意しよう。このため、(4.9

4) の ΔW_E は、常に正になる。従って、 W_E は、電子が光子が出す度にどんどん増えていく、時間についての単調増加関数となる。 W_E の変化率を計算するには、単位時間当たりに放出される全光子について、(4.94) の和 (正の数の和) を取ればよい。

実際にこの変化率を計算するには、リングの一周平均を考える必要がある。即ち、リングには、偏向電磁石が一樣には、配置されていないので、リング一周について (4.94) の和を取り、周回時間で割れば平均的な変化率がでる。また、光子の放出過程は、確率過程であるので、この変化率は、確率的にゆらぎを持っている。そのもっとも確からしい値、即ち期待値を計算して代表的な値とする。これらのことに注意して、 W_E の平均的な変化率は、

$$\frac{dW_E}{dt} = \frac{1}{T_0} \oint \frac{H}{E_0^2} \left[\int_0^\infty u^2 n(u) du \right] \frac{ds}{c} \quad (4.96)$$

となる (問、これを示せ)。(4.93) を用いると、

$$\frac{dW_E}{dt} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{1}{E_0^2 T_0} \oint u_c H P \frac{ds}{c} \quad (4.97)$$

となる。ここで、簡単のために、電子はシンクロトロン振動していない (即ち $E = E_0$) と仮定しよう。

(3.2)、(4.83) を用いて、さらに、(3.3) を使って、

$$\frac{dW_E}{dt} = 2C_r \frac{U_0}{E_0 T_0} \frac{\gamma^2}{\rho_0^2} \oint \frac{H}{|\rho_0^3|} ds \quad (4.98)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、

$$C_r = \frac{55}{32\sqrt{3}} \frac{\hbar}{mc} \quad (4.99)$$

とおいた。ここで、(4.98) には、ベータトロン振動の状態に依存する項が含まれないことに注意しよう。つまり、Radiation Excitation による励起によって、 W_E は、一定の割合で増えていくのである。

(4.98) による励起を (4.68) の damping の方程式に組み込んで、

$$\frac{dW_x}{dt} = -\frac{U_0}{E_0 T_0} (1-D) W_x + \frac{dW_E}{dt} \quad (4.100)$$

となる。ここで、damping の項は、 W_x を含んでいるので指数関数的な減衰であるのに対して、excitation の項は、定数で、リニアな励起であることに注意しよう。このため、(4.100) は、 W_x のある値で平衡に達するのである。(もし、励起の方も指数関数的な励起であるなら、右辺が常にゼロになる特別な場合を除いて、平衡状態は存在せず、 W_x は、どこまでも大きくなるか、無限にゼロに近づくかのどちらかになってしまう。)

平衡状態での W_x は、(4.100) をゼロと置くことにより、

$$W_x = \frac{2C_\gamma}{J_x} \gamma^2 \oint \frac{H}{|\rho_0^3|} ds / \oint \frac{ds}{\rho_0^2} \quad (4.101)$$

となる(問、これを示せ)。この値は、ある粒子に対する確率的な期待値である。バンチ内の電子の分布が定常状態に達しているときは、この期待値が、粒子平均になる。(2.244) に示したように、エミッタンスは、 W_x の粒子平均の1/2 で与えられるから、

$$\varepsilon_x = \frac{W_x}{2} = \frac{C_\gamma}{J_x} \gamma^2 \oint \frac{H}{|\rho_0^3|} ds / \oint \frac{ds}{\rho_0^2} \quad (4.102)$$

となる。このエミッタンスとビームサイズの関係は、(2.233) より、

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_x \varepsilon_x} \quad (4.103)$$

である。

(4.102) より、まず、 ε_x はエネルギーの2乗に比例して大きくなるのがわかる。また、エミッタンスは、Twiss Parameter と Dispersion (とその微分) 及び曲率半径に依存する。第3世代の放射光

マシンでは、このエミッタンスをいかにして小さくするかが至上命令であるから、これらのパラメータをいかにして最適化するかが、マシンの設計において最重要な課題の一つになる。この最適化については、[5] を参照のこと。また、(4.102) より damping partition number を調節することにより、エミッタンスを変えられることがわかる。これについては、後で述べる。

(4.102) において、全ての偏向電磁石が同じ曲率を持つとすると、この式は、

$$\varepsilon_x = \frac{C_\gamma \gamma^2}{J_x \rho_0} \frac{1}{2\pi\rho_0} \oint_{\text{bend}} H ds \quad (4.104)$$

となる(問、これを示せ)。ここで積分は、偏向電磁石の中だけで行う必要がある。この式は、また、後で示すバンチ内の粒子のエネルギーの広がりを用いて、

$$\varepsilon_x = \frac{J_\varepsilon}{J_x} \frac{1}{2\pi\rho_0} \oint_{\text{bend}} H ds \left(\frac{\sigma_\varepsilon}{E_0} \right)^2 \quad (4.105)$$

とも書ける。

(4.103) にビームサイズを与える式を示したが、実際のリングでは、エミッタンスだけではなく、Dispersion からの寄与を考えなければならない。即ち、

$$x = x_\beta + \eta_x \Delta p/p_0$$

であるから、 x^2 の粒子平均を取って、 x_β と $\Delta p/p_0$ に相関がないことを使うと、

$$\langle x^2 \rangle = \langle x_\beta^2 \rangle + \eta_x^2 \langle (\Delta p/p_0)^2 \rangle$$

となる。 $\langle x^2 \rangle \equiv \sigma_x^2$ と置くと、

$$\sigma_x = \sqrt{\beta_x \varepsilon_x + \eta_x^2 (\sigma_\varepsilon/E_0)^2} \quad (4.106)$$

となる。ここで、 σ_ε は、バンチ内のエネルギーの広がり、後で (4.114) で与えられる。

以上述べたのは、水平方向の場合であったが、垂直方向については、どうであろうか。垂直方向では、通常設計値としては、Dispersion をゼロに取ること

が多い。従って、(4.105)より、 ϵ_y は、ゼロになるはずであるが、実際のマシンではそうではない。 ϵ_y を有限にする要因として二つの可能性がある。第一は、マシンエラーに起因する垂直方向の Dispersion η_y からの寄与であり、第二の可能性は、第2章で述べた水平方向と垂直方向にベータatron振動のカップリングである。カップリングがない場合の水平方向のエミッタンスを ϵ_{x0} とし、この場合の垂直方向のエミッタンスは、充分小さくて無視できると仮定すると、 ϵ_y は、 ϵ_{x0} のカップリングによる回り込みによって決まると考えられる。この場合、

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_{x0} \quad (4.107)$$

となる。ここで、

$$\kappa = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (4.108)$$

と置くと、

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_{x0}}{1+\kappa}, \quad \epsilon_y = \frac{\kappa\epsilon_{x0}}{1+\kappa} \quad (4.109)$$

となる。この κ を coupling constant (または、単に coupling) と呼び、ベータatron振動のカップリングの大きさの目安と考える。但し、実際のマシンでは、 η_y からの寄与を無視できない場合が多く、これら両方の効果を考える必要がある。

ϵ_y の大きさが、マシンの性能に大きく影響するマシン、例えば、トリスタンや、KEKBでは、 ϵ_y を小さくするために、マシンのチューニングや設計において、非常な努力が払われる。 ϵ_y は、主にマシンエラー (収束電磁石や六極電磁石の設置誤差など) から生じるので、これらの誤差をできる限り小さくする事が肝要である。

4.2.3 シンクロtron振動のRadiation Excitation

シンクロtron振動の放射励起も、ベータatron振動の場合と、ほぼ同じメカニズムで起こる。即ち、シンクロtron振動をしている電子が光子というエネルギーの塊を放出すると、その振動振幅は、増えたり減ったりする。この様なことを繰り返すうちに、ベータatron振動の励起の場合と同じく (従って、乱歩の場合とよく似て)、振動振幅の期待値が大きくなっていくのである。

ベータatron振動の励起の場合は、Courant-Snyder invariant W_x の時間変化を考えたが、これに対応する量としては、例えば、(3.36)で定義された W_s を用いることもできる。但し、以下の議論では、エネルギー (の2乗) の次元の量を用いる方が式が簡単になるので、

$$W_\epsilon = W_s \omega_s^2 E_0^2 = \frac{\omega_s^2 E_0^2}{\alpha_c^2} \tau^2 + (\Delta E)^2 \quad (4.110)$$

を用いることにする。この場合シンクロtron振動は、

$$\tau = \sqrt{W_\epsilon} \frac{\alpha_c}{\omega_s E_0} \cos(\omega_s t + \theta_0) \quad (4.111)$$

$$\Delta E = -\sqrt{W_\epsilon} \sin(\omega_s t + \theta_0) \quad (4.112)$$

と表される。radiation damping がある場合は、

$$\tau = \sqrt{W_{\epsilon 0}} \frac{\alpha_c}{\omega_s E_0} \cos(\omega_s t + \theta_0) e^{-\frac{t}{\tau_\epsilon}} \quad (4.111a)$$

$$\Delta E = -\sqrt{W_{\epsilon 0}} \sin(\omega_s t + \theta_0) e^{-\frac{t}{\tau_\epsilon}} \quad (4.112a)$$

となる。この場合、 W_ϵ は、

$$W_\epsilon \propto e^{-\frac{2t}{\tau_\epsilon}}$$

となるので、

$$\frac{dW_\epsilon}{dt} = -\frac{2}{\tau_\epsilon} W_\epsilon \quad (4.113)$$

となる。電子がエネルギー u の光子を放出した場合の W_ϵ の変化は、

$$\begin{aligned}\Delta W_\epsilon &= (\Delta E - u)^2 - (\Delta E)^2 = u^2 - 2u\Delta E \\ &= u^2 + 2uW_\epsilon \sin(\omega_s t + \theta_0) \quad (4.114)\end{aligned}$$

となる (問、これを示せ)。ここで、シンクロトロン振動の位相平均を取ると、

$$\langle u\Delta E \rangle_{\text{phase}} = 0 \quad (4.115)$$

となる (問、これを示せ)。(厳密にいうと、 u と ΔE は、相関がある。つまり、電子のエネルギーによって放出される光子のエネルギー分布が違う。しかし、この効果は、既に radiation damping をもたらす効果として考慮したので、ここでは考えなくてもよい。)従って、 W_ϵ の平均的な変化量は、

$$\Delta W_\epsilon = u^2 \quad (4.116)$$

としてよい。この式を、ベータトロン振動の場合の (4.94) と比べて見ると、 H の項を除いて同じ式であることがわかる。 H の項がないだけこちらの方が簡単である。ベータトロン振動の場合と同様に、リング一周平均と、確率的平均を取ることにより、 W_ϵ の平均的な変化率は、

$$\frac{dW_\epsilon}{dt} = 2C_\gamma \frac{U_0 E_0^2}{E_0 T_0} \gamma^2 \oint \frac{ds}{\rho_0^3} / \oint \frac{ds}{\rho_0^2} \quad (4.117)$$

となる (問、これを示せ)。これと (4.113) で表される放射減衰の項をあわせることにより、

$$\frac{dW_\epsilon}{dt} = -\frac{2}{\tau_\epsilon} W_\epsilon + \frac{dW_E}{dt} \quad (4.118)$$

平衡状態での W_ϵ は、

$$W_\epsilon = \frac{2}{J_\epsilon} C_\gamma \gamma^2 E_0^2 \oint \frac{ds}{\rho_0^3} / \oint \frac{ds}{\rho_0^2} \quad (4.119)$$

となる (問、これを示せ)。ここで、(4.29) を用いた。これは、ある電子についての期待値であるが、バンチ内の電子についての平均値を表している

としてもよい。 W_ϵ の平均値が求められると、(4.112) より、エネルギーのずれの期待値も、求められる。電子のエネルギーのずれの2乗平均を σ_ϵ と書くと、(4.112) で位相平均を取ることにより、

$$\sigma_\epsilon^2 = \langle (\Delta E)^2 \rangle_{\text{phase}} = \frac{W_\epsilon}{2} \quad (4.120)$$

となる。これはまた、バンチ内の電子の平均を表していると思ってもよい。(4.120) より、

$$\left(\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \right)^2 = \frac{1}{J_\epsilon} C_\gamma \gamma^2 \oint \frac{ds}{\rho_0^3} / \oint \frac{ds}{\rho_0^2} \quad (4.121)$$

となる。全ての偏向電磁石が同じ曲率半径を持つ場合、この式は、

$$\left(\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \right)^2 = \frac{C_\gamma \gamma^2}{J_\epsilon \rho_0} \quad (4.122)$$

となる。 $J_\epsilon = 2$ の場合、これは、

$$\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} = 8.566 \times 10^{-4} E[\text{GeV}] / \sqrt{\rho[\text{m}]} \quad (4.123)$$

となる (問、これを示せ)。

次にバンチの長さを計算してみよう。電子のエネルギーのずれの期待値の場合と同様に、synchronous particle からの時間のずれ τ の2乗平均は、(4.111) で位相平均を取ることにより、

$$\sigma_\tau^2 \equiv \langle \tau^2 \rangle = \frac{1}{2} W_\epsilon \frac{\alpha_c^2}{\omega_s^2 E_0^2} = \frac{\alpha_c^2}{\omega_s^2} \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \right)^2 \quad (4.124)$$

となる。これを synchronous particle から距離、つまりバンチの長さとして表現すると、

$$\sigma_l = c\sigma_\tau = \frac{c\alpha_c}{\omega_s} \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \right) \quad (4.125)$$

となる。これは、

$$\sigma_l = \frac{C\alpha_c}{2\pi\nu_s} \left(\frac{\sigma_\epsilon}{E_0} \right) \quad (4.126)$$

とも書ける（問、これを示せ）。これは、バンチの半幅であることに注意しよう。

加速空洞の周波数のずれの影響

ここで、加速空洞の周波数をずらして、damping partition number を変えることにより、エミッタンス等のパラメータを変える方法について述べる。ここでは、Separate 型の電磁石の場合を考える。

加速空洞の周波数 (f_{RF}) が、デザイン軌道を走る粒子の周回周波数 (f_0) の整数倍になってない場合を考えよう。これはつまり、デザイン軌道を走る粒子と加速電場との同期が取れていない場合で、この場合、リングの中心エネルギーが、nominal な値からずれることは、第3章で示した。またビームの執心軌道は、デザイン軌道からずれる。従って、この場合ビームは収束電磁石の off-center を通ることになる。これは、2.1.4 で示した収束電磁石に設置誤差がある場合と実質的に同じことである。従って、この場合元の収束電磁石に加えて、偏向電磁石があることと同じになり、言い換えると収束電磁石は、Combined 型の偏向電磁石になる。従って、D の値も変化する。以下で、この変化を計算しよう。

まず、RF 周波数が nominal な値 (f_0 の harmonic number 倍、これを f_{RF0} と書くことにする) から Δf_{RF} ずれたとしよう。この場合 synchronous particle となるのは、周回周波数が、 f_0 から Δf_0 ずれた粒子で、

$$f_{RF0} + \Delta f_{RF} = h(f_0 + \Delta f_0) \quad (4.127)$$

の関係が成り立つ。 $f_{RF0} = hf_0$ であるから、

$$\frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF0}} = \frac{\Delta f}{f_0} \quad (4.128)$$

となる。また、

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (4.129)$$

より、

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{\Delta T_0}{T_0} \quad (4.130)$$

である（問、これを示せ）。これらより、

$$\frac{\Delta f_{RF}}{f_{RF0}} = -\frac{\Delta C}{C} = -\alpha_c \frac{\Delta p}{p_0} = -\alpha_c \frac{\Delta E}{E_0} \quad (4.131)$$

となる（問、これを示せ）。

この様に、RF 周波数をずらすと、ビームの中心エネルギーが、nominal な値から (4.40) で与えられる量だけずれ、従ってビームの軌道は、

$$x_e = \eta_x \frac{\Delta p}{p_0}$$

だけずれることになる。この時、収束電磁石で中心軌道上にいる電子が感じる磁場は、

$$B_Q = \frac{dB}{dx} x_e \quad (4.132)$$

であるから、これを偏向電磁石と見たときの曲率半径は、

$$\frac{1}{\rho_Q} = \frac{B_Q}{B\rho_0} = K\eta_x \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4.133)$$

となる（問、これを示せ）。

これより、D は、

$$D = D_0 + \frac{\oint 2K^2 \eta_x^2 ds}{\oint 1/\rho_0^2 ds} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4.134)$$

となる（問、これを示せ）。ここで、 D_0 は周波数のずれがない場合の D の値であり、また、収束電磁石は、通常 rectangular 型であり、従って、ビームが off-center を通ることにより実効的に生じる偏向電磁石も rectangular 型であることを用いた。(4.43) より、

$$\frac{\partial D}{\partial(\Delta p/p_0)} = \frac{\oint 2K^2 \eta_x^2 ds}{\oint \frac{1}{\rho_0^2} ds} \quad (4.135)$$

が得られる。また、

$$\frac{\partial J_\epsilon}{\partial(\Delta p/p_0)} = \frac{\partial D}{\partial(\Delta p/p_0)} \quad (4.136)$$

$$\frac{\partial J_\beta}{\partial(\Delta p/p_0)} = -\frac{\partial D}{\partial(\Delta p/p_0)} \quad (4.137)$$

となる（問、これを示せ）から、これらより、RF 周波数をずらしたときの damping partition number の変化が計算できる。

例として、トリスタンMR の場合を考えよう。トリスタンで、物理実験を行うオプティクスでは、

$$\partial D / \partial(\Delta p/p_0) \cong 272 \quad (4.138)$$

である。またトリスタンでは、 $\alpha_c = 1.49 \times 10^{-3}$ 、 $f_{RF0} \cong 508 \text{MHz}$ であるので、(4.131) より

$$\Delta p/p_0 \cong -1.32 \times 10^{-3} \Delta f_{RF} [\text{kHz}] \quad (4.139)$$

となる。従って、

$$J_\epsilon \cong 2 - 0.36 \Delta f_{RF} [\text{kHz}]$$

$$J_x \cong 1 + 0.36 \Delta f_{RF} [\text{kHz}]$$

となる。このことから、RF 周波数を約 5.5kHz 上げるとシンクロトロン振動が anti-damping になり、逆に、約 2.8 kHz 下げると、ベータトロン振動が anti-damping になることがわかる。

この様に、damping partition number が変わるとビームのエミッタンスやエネルギー広がりも変わる。トリスタンでは、物理実験を行う際、RF 周波数をずらすことにより、エミッタンスを小さくして運転している。これは、主に、エミッタンスを小さくすることにより、特に衝突点でのビームサイズを小さくして、ルミノシティを上げるためである。具体的に数字を挙げると、29 GeV の物理実験の際、RF 周波数をずらさない場合、

$$\tau_\epsilon \cong 1.15 \text{msec}$$

$$\tau_x \cong 2.3 \text{msec}$$

$$\tau_y \cong 2.3 \text{msec}$$

$$\epsilon_{x0} \cong 1.65 \times 10^{-7} \text{m}$$

$$\sigma_\epsilon / E_0 \cong 1.6 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_l \cong 1.0 \text{cm}$$

である。実際の運転では、RF 周波数を 3kHz ずらしている。この場合、

$$\tau_\epsilon \cong 2.5 \text{msec}$$

$$\tau_x \cong 1.1 \text{msec}$$

$$\tau_y \cong 2.3 \text{msec}$$

$$\epsilon_{x0} \cong 0.80 \times 10^{-7} \text{m}$$

$$\sigma_\epsilon / E_0 \cong 2.3 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_l \cong 1.5 \text{cm}$$

となる（問、これらを確認せよ）。この様に、周波数をずらすことにより、トリスタンでは、エミッタンスを約半分にして運転している。（そのかわり、エネルギー広がりが大きくなっている）。但し、この様に大きく運動量が変わると、第2章で述べたようにベータ関数が大きくゆがむので、H の積分が思ったようにならず、思った程はエミッタンスが小さくなっていない可能性がある。また周波数をずらすと、エネルギーがずれる。3kHz ずらした場合のエネルギーのずれは、(4.137) より約 0.4% 程度である。実際の運転では、マシンの状況によって、ずらす周波数の量を変更することがあり、その場合ビームエネルギーも変わるので注意を要する。（例えば、エネルギーが変わると、Bhabha 散乱の反応断面積が変わり、積分ルミノシティの評価に影響がでたりする。）

また、この様に、RF 周波数を変えると、ビームエネルギーが nominal な値からずれるので、このことを用いて、Dispersion や Chromaticity を測定することができる。

4.2.4 平衡状態での粒子の分布

シンクロトロン振動の場合を考えよう。radiation excitation を無視すると、この振動は減衰力が働く調和振動であることは既に述べた。radiation excitation の効果は、この振動子にランダムに働く外力であるとみなす事ができる。ここでは詳しく述べないが、この様な場合、ある程度時間がたった後（減衰時間の数倍）振動子の振動振幅の確率分布は、定常状態に達し、ガウス分布になることが知られている（参考文献 [15] 参照）。

従って、例えば、シンクロトロン振動におけるエネルギーのずれ ΔE の分布は、定常状態でガウス分布になる（以下では、 $\Delta E = \epsilon$ と置く）その標準

線差 σ_ε は、既に (4.121) で求められている。

(4.144)

従って、 ε の分布は、

$$\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}} d\varepsilon \quad (4.140)$$

となる。この分布はある粒子に対する確率密度を与えるが、バンチ内の粒子の分布を表すとしてもよい。

次に、この分布は定常状態になっているはずなので、電子がシンクロトロン振動しても変わらないはずである。以下で、この事を用いて位相平面での分布を求める。ここで、

$$\chi = \frac{E_0\omega_s\tau}{\alpha_c}$$

という量を導入すると、(4.111)、(4.112) より、

$$\chi = \sqrt{W_\varepsilon} \cos(\omega_s t + \theta_0) \quad (4.141)$$

$$\varepsilon = -\sqrt{W_\varepsilon} \sin(\omega_s t + \theta_0) \quad (4.142)$$

となる。ここで、 $\chi - \varepsilon$ の位相平面を考えよう。この $\chi - \varepsilon$ 平面で位相点の運動を見ると、位相点は、円運動することになる。 ε の分布は、この位相平面の分布の ε 軸への射影である。同様に、 χ 軸への射影は、 χ の分布を与える。さて、 ε の分布は、定常状態にあり、ガウス分布であるので、 χ の分布も同じ標準偏差を持つガウス分布でなければならない。これは、位相平面で45度回転すると、 χ 軸への射影が、 ε 軸への射影に移ることからわかる。以上のことより、従って、 $\chi - \varepsilon$ 平面での分布は、

$$\varphi(\chi, \varepsilon)d\chi d\varepsilon = \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} e^{-\frac{\chi^2 + \varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}} d\chi d\varepsilon \quad (4.143)$$

となる(問、これを示せ)。これが位相平面での確率密度、または、バンチ内の粒子の分布を与える。ここで、 $\psi = \omega_s t$ とおいて、 $\chi - \varepsilon$ 平面から、 $W_\varepsilon - \psi$ 平面での表示に移ると(4.143)は、

$$\varphi(W_\varepsilon, \psi)dW_\varepsilon d\psi = \frac{1}{4\pi\sigma_\varepsilon^2} e^{-\frac{W_\varepsilon}{2\sigma_\varepsilon^2}} dW_\varepsilon d\psi$$

となる(問、これを示せ)。この分布は、 ψ を含まない(これは、分布が定常的であることの別の表現である)。従って、(4.144)を ψ で積分して、

$$\varphi(W_\varepsilon)dW_\varepsilon = \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} e^{-\frac{W_\varepsilon}{2\sigma_\varepsilon^2}} dW_\varepsilon \quad (4.145)$$

と書ける。これより W_ε 自身の期待値を求めると、

$$\langle W_\varepsilon \rangle = 2\sigma_\varepsilon^2 \quad (4.146)$$

となり、(4.120)に一致する。これを用いて、(4.145)を書き直すと、

$$\varphi(W_\varepsilon)dW_\varepsilon = \frac{1}{\langle W_\varepsilon \rangle} e^{-\frac{W_\varepsilon}{\langle W_\varepsilon \rangle}} dW_\varepsilon \quad (4.147)$$

となる。

以上は、シンクロトロン振動の場合であったが、ベータトロン振動についても同様にして、位相平面での分布を求めることができる。これについては、既に先走って、2.2.3節に述べておいた。

第5章 KEKBのパラメータについて

5.1 序

KEKBとは、KEKにおけるBファクトリの略称である。このKEKBに対しては、既に本年度（1994年）から、建設予算が正式に計上されており、1998年度に完成予定である。

本章では、このKEKBの目的、そこから帰結されるマシンに対する要求、マシンとしての特徴、マシンの概要について述べ、最後にマシン設計の基本的な考え方とマシンパラメータの選択方法について簡単に述べる。

5.2 KEKB加速器の満たすべき性能

ここでは、KEKBの目的とマシンに対する要求について簡単に述べる。Bファクトリの目指す物理については、本年のセミナーで、福島正巳氏による講義があるので、詳細については、そちらを参照していただきたい。

我々が計画しているKEKにおけるBファクトリの主な目的は、Bメソンの系で“CPの破れ”を検出することにより、小林-益川行列要素の値を決定し、素粒子物理の標準理論のよりクリティカルな検証を行なうことである。Bメソンの崩壊を研究するためのマシンは、我々のBファクトリが最初のものではなく、コーネル大学のCESR、およびDESYのDORISと呼ばれるマシンが既に稼働しているが、これらのマシンは、我々の目的のためには性能的に全く不十分である。この目的を実現するために、我々は、従来のマシンと大きく違う次の二つの特徴を持つ加速器を計画している。

まず第一は、我々のBファクトリマシンが、エネルギーアシンメトリックなコライダーであるという点である。即ち、従来のB物理用の加速器は、主に $5.3 \times 5.3 \text{ GeV}^2$ 付近 ($\Upsilon(4S)$ 共鳴に対応する) で運転されるエネルギーシンメトリックな、電子、陽電

子コライダーであったが、このエネルギーシンメトリックなマシンでは、 Υ 粒子が崩壊してできる二つのBメソンが、ほとんど止ってできるため、それらのメソンの崩壊バーテックスが区別しにくく、またメソンが崩壊した時刻を精度良く決められないという弱点がある。これに対して、エネルギー・アシンメトリックなコライダー（重心系のエネルギーは $\Upsilon(4S)$ に保つ）では、それらのメソンが大きな運動量を持ちうるようになる（エネルギー・アシンメトリの度合いが大きい程メソンの得る運動量は大きい）。二つのBメソンの寿命は、確率的に決まるだけであるから、二つのBメソンの崩壊バーテックスの位置は、ある確率分布を持ち区別できるようになる。また、Bメソンが崩壊するまでに走った距離は、崩壊した時刻に対応するから、この時刻（正確には、二つのBメソン崩壊の時刻の差）を精度良く測定できるようになり、“時間微分的”な実験ができるようになる。このことは、CPの破れを検出する実験を行なう上で決定的な意味を持つ。また、Bメソンが大きな運動量を得ると、（実験室系では）その寿命が延びることも実験の精度を上げる一助となる。物理研究部で最適化（エネルギー・アシンメトリの度合いが大きい程時間分解能は良くなるが、前方にブーストし過ぎるとBメソンが崩壊してできた粒子がビームパイプから出てこない確率が増えるので、どこかに最適などころがある）の検討を行なった結果、CPの破れを検出する実験を行なう上で、最適なビーム・エネルギーは、 $3.5 \times 8.0 \text{ GeV}^2$ とされている。従って、 $3.5 \times 8.0 \text{ GeV}^2$ のエネルギー・アシンメトリックな電子、陽電子コライダーであるということが、KEK-Bファクトリに対する第一の要求である。

第二の特徴は、加速器に対して非常に高いルミノシティが要求されるということである。これは、主にCPの破れを見るのに用いられるプロセスが、稀プロセスであるという事に起因する（例えば、 B^0 から、 $J/\psi K_S$ に崩壊する分岐比は、 3×10^{-4} 程度である）。CPの破れを検出するのに必要な積分ルミノシティの目安は、 $10^{41}/\text{cm}^2$ (100 fb^{-1})とされている（但し、最近のより詳細な検討によると、この数分の一のルミノシティで、CPの破れていることが確認できる可能性があるとされている）。一年間の物理実験の時間を 10^7 秒と仮定して、このルミノシティを例えば3年でためるには、 $3.3 \times 10^{33}/\text{cm}^2/\text{sec}$ の平均ルミノシティが必要になる。これまでの検討で、平均ルミノシティとピーク・ルミノシティの比は、 $2/3$ 程度だとされといるので、ピーク・

ルミノシティとしては、大まかに言って、 $5 \times 10^{33}/\text{cm}^2/\text{sec}$ 以上が要求される。以下で述べるように、Bファクトリ加速器設計に際しては、ピーク・ルミノシティの最終的な目標値として、 $1 \times 10^{34}/\text{cm}^2/\text{sec}$ という値を設定している。

5.3 KEKBマシンの特徴と概要

5.3.1 KEKBマシンの特徴

上で述べた加速器に対する要求に由来して、KEKBが、従来の電子、陽電子コライダーと大きく異なる特徴として挙げられるのは、以下の点である。

まず第一に、非常に高いルミノシティが要求されるルミノシティマシンだということである。現在までの、電子、陽電子コライダーのルミノシティの世界記録は、CESRの持つ $2 \times 10^{32}/\text{cm}^2/\text{sec}$ であるから、KEKBファクトリ加速器に対して要求されるルミノシティは、このCESRの世界記録の25倍から50倍程度にもなる。この高いルミノシティを実現できるかどうか、KEKBが成功するかどうかの最大の鍵を握っている。

第二の特徴は、エネルギー・アシンメトリックなコライダーであるということである。既存の電子、陽電子コライダーでこのようなマシンは存在しないが、このエネルギー・アシンメトリに起因して著しい性能の低下を招くにかが生じるとは考えにくい。

(但し、ビームビーム効果を二つのビームで最適化するという問題はまだ残っている。)

第三の特徴は、第二の特徴と関連して、KEKBは必然的にダブル・リング・コライダーであるという点である。この特徴に関しても、衝突点付近の設計が複雑になるとか二つのビームが常に正面衝突するように、特殊なフィードバックが必要であるなどの問題はあがるが、これらに原理的な問題があるとは考えられず、このダブル・リング・コライダーであるという特徴もKEKBファクトリに大きな制限を与えるとは考えられない。

以上のように、KEKBファクトリ・マシンの難しさは、結局のところ要求されるルミノシティの高さという一点に要約される。ひいては、これがKEKBファクトリ計画そのものの難しさとなっている。

5.3.2 KEKBマシンの概要

ここでは、KEKBマシンの概要を示すと共に、いくつかの特徴的なパラメータについて述べる。

図5.1にマシンの全体図を示す。図からわかるように、既存のトリスタンのトンネルにKEKBの二つのリングが設置される。従って、その周長はどちらも(トリスタンと同じく)約3 kmである。8 GeVと3.5 GeVのリングとしては、この周長は長すぎると思われる方もあるかも知れないが、実際は、ある程度周長が長い方が、ラティスの設計上いろいろ工夫を凝らす余地が生じ、設計を最適化する上で都合がよい。(但し、同じ電流を得るためには、周長が長い方が多くの電荷量が必要となり、入射器の負担は増える。) 加速器設計の極く初期の頃、低いエネルギーの方のリングの周長は、高いエネルギーのリングの周長に比べてずっと短くするということが想定されていた(例えば、初期のある設計では、低エネルギー・リングを富士実験室内に設置することを考えていた。但し、この時の低エネルギー・リングのエネルギーは、2.0 GeVとされていた)。これは、エネルギーに見合った周長のリングを作るほうがコスト等の点から見て有利だと考えられた事による。しかし、その後の検討により、周長の大きく違う二つのリングのコライダーの場合、ビームビーム効果によりベータatron振動の結合が生じることに起因して、共鳴線が密に現れることが解った。このため、運転上避けなければならないチューンの領域が大幅に増え、実際上安定に運転できるチューンの領域がなくなってしまうのである。この発見の後、二つのリングの周長をそろえるという設計法が確立した。SLACのBファクトリでも、既存のPEPのトンネルに二つのリングを設置する事が計画されている。

KEKBでは、物理実験をリングの一カ所でのみ行う(トリスタンでは、4カ所)。これには、二つの理由がある。第一は、ビームが相手のビームにおつかる時に受ける効果(ビーム・ビーム効果)をできるだけ弱くするためである。この事は、後で見るように、ルミノシティを高くすることに効果がある。第二は、第2章の最後に述べたダイナミック・アパーチャーを広くするためである。衝突点の数が多いと、衝突点付近の収束電磁石で発生するChromaticityが、大きくなり、これを補正するための六極電磁石の強さも強くなる。この六極電磁石の非線形性のために、ダイナミック・アパーチャーが狭くなるのである。このChromaticityは、衝突点の

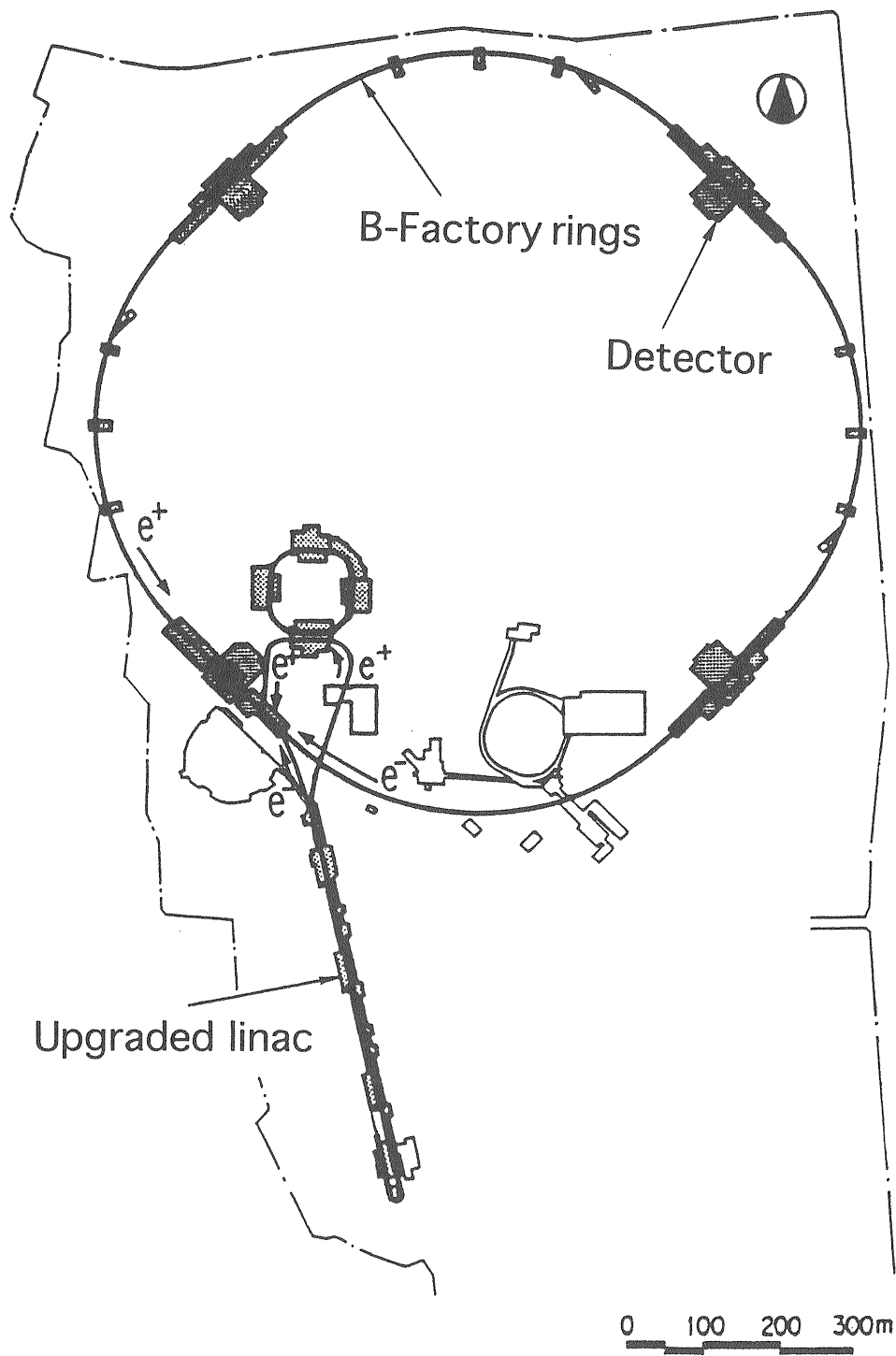


图 5.1

ベータ関数が小さいほど大きくなる。従って、衝突点のかずが少なく、衝突点のベータ関数を小さくできる。この事は、後で見ると、ルミノシティを高くすることに効果がある。KEKBでは、入射点との関係から筑波実験室で、物理実験を行うことになっている。

KEKBでは、二つのリングのエネルギーが異なるが、8 GeVのビームを電子に、3.5 GeVの方を陽電子に選んでいる。これは、イオン・トラッピングと呼ばれる現象が、電子ビームでは生じる可能性があり、電子ビームをエネルギーが高くより安定な、8 GeVビームに選ぶことによりこの現象をやわらげるためである。また、8 GeVリングでは、3.5 GeVリングより電流値が少ないので、このこともイオン・トラッピングをやわらげるのに効果がある。

KEKBでは、電子ビームは、現在のリニアックを8 GeVまで加速できるように改造して、リニアックから直接入射する（現在のリニアックは、2.5 GeV）。また陽電子ビームについてもこの改造されたリニアックを用いると、陽電子発生用のターゲットに照射される電子ビームのエネルギーが大幅に上がり、陽電子の強度が、大幅に強くなる。このことも、KEKBの性能にとって大きな意味がある。

表5.1にKEKBのパラメータを示す。この表で特に目立つのは、全電流の高さ（2.6A、1.1A）とパンチ数の多さ（すべてのRFバケットにフィルしている）などであろう。この大電流を最初から蓄積することには、困難が予想されるので、まず第一段階では、この1/5の電流をためることをまず考える。この場合のパラメータを（ ）をつけて示している。

5.4 加速器設計の基本的な考え方

5.4.1 積分ルミノシティが何で決まるか

ここでは、積分ルミノシティを決定する要因は何かを簡単に述べ、さらに、それに関連するパラメータをどう選択するかについて述べる。

まず、積分ルミノシティを決定する要因を、ピーク・ルミノシティに関する要因と、積分ルミノシティに影響するそれ以外の要因の2つに分けてそれぞれ

について述べる。

ピーク・ルミノシティを決める要因

良く知られた、ルミノシティに関する表式、

$$L = \frac{N^+ N^-}{4\pi\sigma_x\sigma_y} f \quad (5.1)$$

と、ビーム・ビーム・パラメータを与える式、

$$\xi_{x,y}^{+,-} = \frac{r_e}{2\pi\gamma_{+,-}} \frac{\beta_{x,y} N^{-,+}}{\sigma_{x,y}(\sigma_x + \sigma_y)} \quad (5.2)$$

を用いて、有用な関係式

$$L = \frac{1+r}{2e r_e} \left(\frac{\gamma_{+,-} \xi_{y}^{+,-} I^{+,-}}{\beta_y} \right) \quad (5.3)$$

を得る。ここで、2つのリングで、衝突点のベータ関数とビーム・サイズが等しいことを仮定した。この仮定は、2つのリングでビーム・ビーム効果を対称にするためのもので、必ずしも自明ではないが、この対称性をあえて破ったほうが良いという根拠も見つからず、普通簡単のためにこう仮定する。また、以下の議論では、それぞれのリングで、水平方向と垂直方向のビーム・サイズとベータ関数の比が等しいこと（従って、エミッタンスの比もこれと等しいこと）即ち、

$$r \equiv \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\beta_y}{\beta_x} = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (5.4)$$

を仮定する。この仮定は、水平方向と垂直方向のビーム・ビームリミットの値が等しいという仮定から生じるものであり、これらが等しくない場合には、その状況で最適になるようにビームサイズとベータ関数の比を選び直す必要がある。

(5.3) から、ピーク・ルミノシティを大きくするための標語は、以下ようになる。

- (1) 垂直方向のベータ関数はできるかぎり小さくする
- (2) ビーム・ビーム・パラメータをできるかぎり大きくする
- (3) 全電流値をできるかぎり高くする
- (4) フラット・ビームより、ラウンド・ビームの方が有利である

以下で、これらのそれぞれについて議論する。

・ベータ関数

衝突点での、垂直方向のベータ関数を小さくする（これをベータ関数を絞ると称する）ときに問題になるのは、ベータ関数を絞るにつれて、衝突点から見て最初のQマグネットでのベータ関数が（逆に）大きくなり、このQマグネットの作り出すクロマティシティが大きくなる。そして、この大きなクロマティシティを補正するために、強い六極マグネットが必要になり、その結果その強い六極マグネットのノン・リニア効果のためにビームが安定に回ることのできるアパーチャー（ダイナミック・アパーチャーという）が、トランスバース方向、エネルギー方向ともに狭くなる。その結果、後で述べるようにビーム寿命が短くなったり、入射効率が悪くなったりする。但し、ダイナミックアパーチャーは、六極マグネットをどう配置するか等のラティスのデザインや、衝突点付近のQマグネットをどう配置するか等のIR（Interaction Region）のデザインに大きく依存するので、これらのデザインの検討を行ない、垂直方向のベータ関数がどこまで絞れるかを見究めなければならない。この様な、デザインについては、小磯晴代氏の講義で詳しく話されるはずである。

KEKBの設計では、このベータ関数の目標値を1 cmに置いている。この値は、既存のマシンと比較するとかなり小さい値である（例えば、トリスタンでは現在4 cmである）が、衝突点を一箇所にすることや、IRのデザインを工夫することにより可能になると期待される。

・ビーム・ビーム効果

あるマシン・パラメータが与えられたとき、そのビーム・ビーム・パラメータのリミット（これをビーム・ビーム・リミットと呼ぶ）の値がいくつになるかを確実に予言できる理論やシミュレーション・コードは存在しない。存在するのは、ビーム・ビーム効果に関してその定性的傾向を与える理論とシミュレーション・コード、ビーム・ビーム・リミットがどういうパラメータに依存するかという経験則だけである。経験則と理論、シミュレーションの示すところによると、ビーム・ビーム・リミットの値は、衝突点でのベータ関数とバンチ長の比、ダンピング・タイム、チューン等に大きく依存し、ベータ関数とバンチ長の比に関しては、バンチ長がベータ関数の値に対して短ければ短いほど良く（特に、0.05のビーム・ビーム・パラメータを得るには、バンチ長を

ベータ関数の半分以下にする必要がある。これは経験則であるが、この経験則は、定性的には、ビーム・ビーム・キックがバンチの前と後ろで大きさが違うということ等から、シンクロベータ・レザナンスが励起されるということから説明される。）、ダンピング・タイムは、短ければ短いほど良く、またチューンに関しては、（シミュレーションはある程度参考になるものの）実際のところ、実際のマシンでトライ・アンド・エラーで試してみるしかない。また、アシンメトリック・コライダーになると、エネルギーとバンチあたりの粒子数がアシンメトリックになるが、このようなマシンはかつて存在したことがなく、このような場合のビーム・ビーム効果については、（シミュレーションは、精力的に行なわれてはいるが）実際のところ、実際のマシンで調べるしかない。KEKBファクトリの設計では、ビーム・ビーム・リミットが、0.05に達すると仮定されている。この値を得るために、経験則より、バンチ長を衝突点での垂直方向のベータ関数（1 cm）の半分、5 mmまで短くする。また、ダンピング・タイムを短くするために、ウイグラー電磁石を用いる。

・フラット・ビームかラウンド・ビームか？

原理的には、ラウンド・ビームにすると、フラット・ビームの場合より約2倍高いルミノシティが得られる。しかし、このラウンド・ビームの恩恵に浴するためには、(5.4)より水平方向のベータ関数を垂直方向と同じ大きさまで絞る必要がある。このことは、ラティス、IRのデザインに大きな困難をもたらす。現在までのところ、ラウンド・ビームにしたほうが有利だと思われるラティス、IRのデザインに成功した例は（他の研究所での検討も含めて）まだ存在しない。また、電子蓄積リングを普通に作ると（垂直方向のエミッタンスが、水平方向のそれと比べてずっと小さいという意味で）フラット・ビームになるので、ラウンド・ビームを得ようとすると（垂直方向のエミッタンスを大きくするために）何らかの工夫をする必要があり、ラティスの設計やマシンのオペレーションに何らかの制約を与える。これらのことを考慮して、KEKBファクトリの設計では、実績のあるフラット・ビームを採用している。

・ビーム電流

我々の目標とするピークルミノシティは、 $1 \times$

$10^{34}/\text{cm}^2/\text{sec}$ であるので、既に述べたパラメータ ($\beta_y^* = 1 \text{ cm}$, $\xi = 0.05$, $r \equiv 0$) を仮定すると、必要な電流は、8 GeVで、約1.1A、3.5 GeVリングで、約2.6Aになる。以下で、これらの大電流を得るために、KEK-Bファクトリの設計でどういう戦略を取っているのかについて述べる。大電流を得るために、まず考慮すべきものは、ビーム・インスタビリティ (ビーム不安定性) の問題である。

このビーム・インスタビリティは、大別するとバンチ電流値の大きさだけに依存し、ビームの全電流値にはよらないシングル・バンチ・インスタビリティと、全電流値に依存するインスタビリティ (カップルド・バンチ・インスタビリティやイオン・トラッピング) に分けられる。一般に、シングル・バンチ・インスタビリティは、大変厳しく、例えばトリスタン主リングでは、そのバンチ電流値は、3~5 mA以下に強く制限されている。(トリスタンにおける、この電流リミットはRF空洞内のウエイク・フィールドが関与するシンクロベータ・レザナンスに由来すると考えられている)。このように、シングル・バンチ電流には、一般に強い制限があるので、全電流値を増やすためには、(シングル・バンチ電流をインスタビリティの起こらない程度に押さえて) バンチ数を増やしていくしかない。幸い、アシンメトリック・コライダーは、必然的にダブル・リング・コライダーになるので、(シングル・リング・コライダーを、マルチ・バンチ運転するときには障害になる) バンチが予定された衝突点以外の、あちらこちらで衝突するという問題は、回避できる。このようにして、バンチ数を増やすことによって全電流値を増やしていくときに問題になってくるのは、カップルド・バンチ・インスタビリティや(電子リングでは)イオン・トラッピングと呼ばれるインスタビリティである。以下でまず、カップルド・バンチ・インスタビリティの問題について議論する。この問題は、KEK-Bファクトリにとって非常に重要な問題である。

カップルド・バンチ・インスタビリティの主な原因になるのは、RF空洞であると考えられるので、マシンのデザインをするときに、考えなければならないのは、RF電圧を低くすることである。(RF電圧を低くすれば、RF空洞の数が少なくて済み、インスタビリティを弱めることが可能になる。又、電気代の節約により、ランニングコストの削減も計れる。) KEKBにおいて必要RF電圧の高さを決めるのは、(ビーム寿命などではなく)バンチ長からの要求である。先に述べたように、我々のマシンで

は、ビーム・ビーム・リミットを高くするためにバンチ長を短くすることが想定されており、このため高いRF電圧が必要になる。

しかし、あるバンチ長を得るために必要なRF電圧は、ラティスの設計に依存するので、ラティスを工夫することにより、RF電圧を下げられる可能性がある。一般には、ビームのエミッタンスを小さくすると、低いRF電圧で短いバンチが得られる。この意味で、我々のマシンでは、エミッタンスが小さいほうが有利である。又、(全電流値を一定として)バンチ数を増やしていくことを考えると、バンチ電流は低くなるので、低いバンチ電流で(仮定された)ビーム・ビーム・リミットの値に達する事が要求され、この意味でもエミッタンスを低くする必要がある。このように、全電流値のある値に決めて、バンチ数を増やしていくと、バンチ電流値も低くなるし、又RF電圧も低くて済む。このようなことを考慮して、我々のマシンでは、すべてのRFバケットにバンチを詰めることを目指している。表1のデザインでは、バンチ数は5120になり、電子ビームの全電流値は、1.1 Aであるが、バンチ電流は0.21 mAであり、陽電子では、全電流値は、2.6 A、バンチ電流は、0.51 mAになる。(このように低いバンチ電流でもバンチ・レングスニング(バンチ長が長くなるインスタビリティ)等のインスタビリティが起こる可能性があり検討を要する。)このように、我々のマシンのデザインでは、バンチ数を極限まで増やし、エミッタンスを小さくすることによって、RF電圧を低くすることを考えている。

しかし、実は、バンチ長とエミッタンス(さらにビームのエネルギーの広がり)の値を決めても、必要RF電圧を低くできるような特殊なラティスが存在することが知られている。このラティスは、低 α ラティスと呼ばれるものであり、KEKBでは、このタイプのラティスを採用する。ここでいう α は、第2章で述べた、 α_c 。つまりmomentum compaction factorである。 α_c を小さくするとRF電圧が下げられる理由は以下の通りである。(4.125)と(3.31)を組み合わせると、

$$\sigma_l \propto \sqrt{\frac{\alpha_c}{V_c}} \quad (5.5)$$

が得られる。従って、RF電圧がバンチ長から決まっているとすると α_c に比例して、RF電圧を下げる

ことができる。また、 α_c を下げて、 V_c を低くすると、(3.31) より、 ω_c も α_c に比例して低くなる、実はこの事もKEKBの性能を上げることにつながるのであるが、これについては、小磯氏の講義の中で触れられるであろう。このように、低 α ラティスを用いると、いいことづくめのように見えるが、一つの問題は、 α_c を低くすると先に述べた、バンチ・リングスニングのインスタビリティが起りやすくなるという問題がある。但し、現在のデザインの α_c では、このインスタビリティは、生じないとされている。

以上カップルド・バンチ・インスタビリティの問題に関連して、マシンの設計上考慮すべき点を述べたが、このインスタビリティは、単にRF電圧を低くしただけでは克服できない。このインスタビリティの主な原因である、RF空洞の設計を工夫しなければならない。まず、RF空洞の高次モードに関しては、そのインピーダンスができるだけ小さくなるように設計しなければならない。この様な特殊なタイプのRF空洞については、本年のセミナーで、影山達也氏による講義がある。

又、インピーダンスを小さくすることができない加速モードに起因するインスタビリティに対しては何か特別な対策を考えなければならない。このインスタビリティに対して、KEKBでは、三つの方向から対策を講じている。第一は、通常のRF空洞にエネルギー貯蔵空洞をカップルさせて用いる方法であり、これについては、影山達也氏の講義で、はなされる。第二の方法は、通常のRF空洞のロー・レベル系に特殊なフィードバックをとりつける方法で、これについては、絵面栄二氏の講義で話される。第三は、超伝導空洞を用いる方法で、これについては、古屋貴章氏の講義で触れられるはずである。

さらに、カップルド・バンチ・インスタビリティを完全に克服するためには、ビームの振動を押さえるフィードバックシステムが必要である。これについては、飛山真理氏の講義を参照。

次に、イオン・トラッピングの問題について述べる。

このインスタビリティは、電子リングで、ビームによってイオン化されたイオンが、ビーム軌道周辺にトラップされて、ビームの運動を不安定にすることによって起こる。このインスタビリティを押さえるために、(先に述べたことや表1とはくい違うが) RF・バケットのすべてにバンチをフィルしないで、

(連続する) 約1割のバケットをビームをフィルしないでからのままにしておく。これは、イオンの運動を不安定にして、トラップされにくくするためである。又、イオンの量をへらすために、リングの真空度を 10^{-8} Pa以下にする必要があるとされている。このイオン・トラッピングは電子リングでのみ問題になるので、全電流値が小さく、エネルギーが3.5 GeVリングに比べて大きく、このため、イオンの影響が小さい8 GeVリングを電子リングに選ぶ。又、カップルド・バンチ・インスタビリティを押さえるためのフィードバックシステムも、イオン・トラッピングによって、バンチのダイポール振動が起こる場合に有効であると考えられる。

以上、大電流を得るために、克服すべきインスタビリティの問題について述べたが、この問題以外にも、ハードウェアの大電流に対する耐性、入射器に強いビーム強度が要求されること、大電流でも必要な真空度が得られるような真空システムが必要なこと、等の問題がある。

積分ルミノシティに影響する要因

・ビーム寿命

ビーム寿命は、積分ルミノシティに大きく影響する。ビーム寿命が短いと、ピーク・ルミノシティと平均ルミノシティの差が大きくなってしまう。ビーム寿命とは、単位時間当たりにビームから失われる粒子数とビームを構成する全粒子数の比で定義される。粒子がビームから失われるメカニズムは、色々考えられるが、それらすべてが、何らかの過程によりビーム内の粒子が、それらが安定に運動できる領域(これは、水平方向、垂直方向、エネルギー方向の三次元空間での領域である)から飛び出してしまう事によって起こると考えられる。従って、個々の過程について論じるまえに、ビームが安定に運動できる領域(アパーチャー)について議論する。まず、水平、垂直方向には、真空パイプによって決まるアパーチャー(フィジカル・アパーチャー)が存在する。しかし、このフィジカル・アパーチャーは、通常問題にならない(又は、問題にならないように真空パイプを設計する)。次に、エネルギー方向のアパーチャーに関しては、シンクロトロン振動の位相安定性から決まる、RFバケット・ハイトと呼ばれるアパーチャーが存在するが、KEKBでは、短いバンチを得るためにRF電圧を高くして運転することが想定されているので、これは問題にならない。最

後に、KEKBファクトリで、一番問題になると考えられるのは、所謂ダイナミック・アパーチャーである。ダイナミック・アパーチャーとは、主にノンリニアな磁場の効果で決まる、アパーチャーを意味する。KEKBでは、先に述べたように、(垂直方向の)ベータ関数を極限まで絞ろうとしているので、このダイナミック・アパーチャーが特に問題になる。(以下では、このダイナミック・アパーチャーのみを考える)。

次に、ビーム内の粒子をこのアパーチャーから飛び出させる個々の過程について述べる。まず、KEKBで特に問題になると考えられる三つの過程について述べる。まず第一は、Touschek効果の問題である。Touschek効果とは、バンチ内の粒子どうしのCoulomb散乱で粒子のエネルギーが変化し、エネルギーアパーチャーの外に出ることにより、それらの粒子がビームから失われる過程を意味する。この過程は、3.5 GeVリングで特に問題になると考えられる。このエネルギー・アパーチャーが、Touschek効果の観点から十分広くなるように、ラティスを設計しなければならない。

第二に、ビーム・ビームによる制動輻射の効果が問題になる。これは、相手方のビームと衝突する際に、制動輻射により、エネルギーを失い、エネルギー・アパーチャーの外へ出ることによりその粒子がビームから失われるという問題である。電子と陽電子の散乱で、それらがある一定以上のエネルギーの制動輻射を出す過程の断面積は、(ビームのエネルギーが決まると)決まっているから、一定時間内にこの過程で失われる粒子の数は、エネルギー・アパーチャーの大きさとリミノシティだけで決まる。

第三は、リング内の残留ガスによる散乱の問題である。これは、ビーム内の粒子が残留ガスとの散乱で(主として)制動輻射を出すことにより、エネルギーを失い、エネルギー・アパーチャーの外に出て、ビームから失われるという問題である。これは、通常のコライダーでも問題になる点であるが、KEKBの場合、ビームの全電流値が非常に高いので、真空システムに特別な工夫が必要になる。この過程で決まるビーム寿命も、エネルギー・アパーチャーの大きさに依存するので、このアパーチャーは、大きいことが望ましい。KEKBでは、高い真空度を達成するために、真空パイプの材質として銅を用いる。

以上では、エネルギー方向のアパーチャーのみを問題にしたが、実際は、ディスパージョンのあるところでエネルギーが変化すると、ベータatron振動

が励起される。従って、トランスバース方向にもある程度のアパーチャーがないと、ビーム寿命が、エネルギー方向のアパーチャーよりむしろトランスバース方向のアパーチャーで決まってしまう。この意味で、(エネルギーがある程度ずれた状態での)トランスバース方向のアパーチャーを広げることも重要である。

また、トランスバース方向に関しては、別の効果が、ビーム寿命に関与する可能性がある。まず第一に、ビーム・ビーム効果やイオン・トラッピングのために、ビーム・サイズが大きくなる(これをビーム・ブロー・アップと呼ぶ)過程が考えられる。この過程に関与する粒子損失を少なくするためにも、トランスバース方向のアパーチャーを広げることが望ましいのは確かである。しかし、これらのビーム・ブロー・アップが起こると、それは、微分リミノシティが減少することを意味し、ビーム寿命だけを救っても問題は解決しない。ビーム・ブロー・アップが、起こらないように対策を立てることが先決である。(ビーム・ビーム効果によってビーム・ブロー・アップが起こるということは、系がビーム・ビーム・リミットに達したことを意味し、このブロー・アップを防ぐことは、要するに、ビーム・ビーム・リミットの値を高くすることを意味する。)

第二に、通常バンチ内の粒子は、ガウス分布していると考えられるが、ビーム・ビーム効果や残留ガスによる散乱等により、分布がガウス分布からずれ、テイルを引くことがある(これをノン・ガウシアン・テイルと呼ぶ)。このノン・ガウシアン・テイルが、ビーム寿命に影響を与える可能性がある。しかし、通常、このノン・ガウシアン・テイルがビーム寿命に影響を与える様な場合は、ビームは既にブロー・アップしており、逆に言うと、ブロー・アップを押さえれば、このノン・ガウシアン・テイルのビーム寿命への影響を防げると考えられる。(これまでの検討で、残留ガスによる散乱に由来するビーム・ブロー・アップは KEKB では、起こらないと考えられている。但し、このノン・ガウシアン・テイルは、ビーム寿命へは影響が無い場合でも、物理実験用の検出器に対するビーム・バックグラウンドへは、影響する可能性がある。ノン・ガウシアン・テイルを完全に無くするのは困難なので、予想される、ノン・ガウシアン・テイルを考慮して、(ビーム・バックグラウンドを押さえるための)マスキング・システム等を設計する必要がある。)

また、トランスバース方向のアパーチャーは、入射効率という観点から問題なる可能性が強い。これ

は、入射エラーのために大きなベータatron振動が起きるためである。

・二つのビームの正面衝突からのずれ

ビーム軌道が変動すると、(ダブル・リング・コライダーでは)二つのビームが正面衝突しなくなり、ビームがすれ違うことや、余計なビーム・ビーム効果によるビーム・ブロー・アップのために、ルミノシティの損失が起きる。このような事態を避けるために、衝突点付近の軌道を制御してビームの正面衝突を常に保つようにしなければならない。

・ロス・タイム

KEKBでは、(トリスタンと違い)物理実験が行なわれるエネルギーでビーム入射が行なわれるので、ビーム寿命で目減りした分だけ継ぎ足せばよい。しかし、(既存のマシンに比べて)リングに蓄えられている粒子の数が多いため、単位時間に失われる粒子数も多く、入射器のビーム・インテンシティ(特に陽電子)を強化しないと、入射の時間損失によるルミノシティ損失が大きくなってしまふ。また、ハードウェアの何らかのトラブルですべてのビームが失われるような状況が頻繁に起こると、入射時間分のルミノシティ損失は、非常に大きくなる。従って、KEKBでは、ハードウェアの信頼性が特に要求される。また、ルミノシティ・マシン(トリスタンの第二フェーズが既にそう位置づけられている)では、ハードウェアの故障をできるだけ少なくすることが、特に重要であることは、我々が日々実感していることである。

5.4.2 補足

前節で、加速器設計の基本的パラメータの選び方を説明した。ここでは、これらについてまとめると共に、若干の補足を行なう。

前節の議論をまとめると、KEKBでの基本的なマシンパラメータの選び方は、以下の通りである。

衝突点での垂直方向のベータ関数の目標値を1cmに取る。ビーム・ビーム・リミットの値は、0.05と仮定する。フラット・ビームを採用する。ビームの全電流は、電子リング(8GeV)で、1.1A、陽電子リング(3.5GeV)で、2.6Aとする。バンチ数は、

基本的には、全RFバケット数と同じであるが、1割程度バンチを詰めないギャップを作る。

以上が、前節のまとめである、これらに加えて、まず、衝突点での水平方向のベータ関数を1mとする。このことから、(5.4)より、(エミッタンスの比で定義される)カップリングは1%にする必要がある。この値は、トリスタンでの経験等から見て、かなり小さい値であるので、電磁石のアライメント等に特別の努力が必要である(この値が達成できないときは、ルミノシティが落ちる)。最近この水平方向のベータ関数を33cmまで、小さくする可能性が検討されている。

次に、前節で、バンチ電流を小さくし、RF電圧を下げるために、(ほぼ)すべてのRFバケットにバンチを詰めることを述べたが、このことから、別の問題が生じる。即ち、バンチ数を増やすと、バンチ間隔が短くなり、バンチが予定された衝突点の前後で、予定されたバンチ以外のバンチと衝突する可能性が出てくる(この様な衝突をparasitic collisionと呼ぶ)。このような事態がおこると、余計なビーム・ビーム効果のために、ルミノシティが低下する。このような事態がおこることを防ぐためには、(二つのビームの軌道を衝突点の前後で素早く分離するために)衝突点で、二つのビームの軌道にクロッシング・アングルを持たせることが必要になってくる。しかし、一般には、衝突点で、二つのビームにクロッシング・アングルがあると、シンクロベータ・レザナンスが励起され、ビーム・ブロー・アップが生じる可能性がある。この問題は、最近の研究によると、以前考えられていたほどは問題がないということが解ったので、積極的にクロッシング・アングルを導入することが予定されている。クロッシング・アングルの大きさとしては、 $\pm 10\text{mrad}$ が予定されている。

クロッシング・アングルを導入すると、ビームがすれ違うために、ルミノシティが少し下がる。これを救うためと、クロッシング・アングルによるシンクロベータ・レザナンスが問題になった場合の保険として、クラブ(Crab)空洞と呼ばれるRF空洞を開発中である。このクラブ空洞は、バンチ中心の前方にいる粒子と後方にいる粒子を(トランスバース方向に)逆方向にキックすることにより、バンチを傾け、バンチの正面衝突を回復することを目的とするものである。

Energy	E	3.5	8.0	GeV
Circumference	C	3013		m
Luminosity	\mathcal{L}	1×10^{34} (2×10^{33})		$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
Tune shifts	ξ_x/ξ_y	0.05/0.05		
Beta function at IP	β_x^*/β_y^*	1.0/0.01		m
Beam current	I	2.6 (0.52)	1.1 (0.22)	A
Natural bunch length	σ_z	0.5		cm
Energy spread	σ_ε	7.4×10^{-4}	7.6×10^{-4}	
Bunch spacing	S_B	0.6 (3.0)		m
Particles/bunch	N	3.3×10^{10}	1.4×10^{10}	
Emittance	$\varepsilon_x/\varepsilon_y$	$1.9 \times 10^{-8}/1.9 \times 10^{-10}$		m
Synchrotron tune	ν_s	0.017	0.025	
Betatron tune	ν_x/ν_y	~ 41	~ 41	
Momentum compaction	α	2.5×10^{-4}	3.5×10^{-4}	
Energy loss/turn	U_0	0.84	4.6	MeV
RF voltage	V_c	5.4	18.8	MV
RF frequency	f_{RF}	508		MHz
Harmonic number	h	5106		
Energy damping decrement	T_0/τ_E	2.4×10^{-4}	5.7×10^{-4}	
Bending radius	ρ	16.2	82.1	m
Length of bending magnet	ℓ_B	0.85	4.3	m

表 5.1

4月にこのセミナーの講師を引き受けたときには、全体を初級、中級、上級の三部構成にするプランを立てたが、書き始めてみると、これは全くの無謀なプランであることが解った。限られた時間の枠内では、初級の部分のみを仕上げるのにも苦労した。初級のテーマでも、最初、第5章として書く予定であったビーム寿命の話は、結局、筆者に与えられた時間内では、手を付けることができなかつた(1.1節では、全体が6章構成になると述べたが、第6章の部分が繰り上がって、全体で5章になった)。このビーム寿命の問題は、初級の知識としても重要であるので、読者は、参考文献 [6] や [10] で学習していただきたい。

中級の部分では、マシンの運転に関する実際的な話、マシン・パラメータの測定方法、マシンのチューニング方法、ビームを用いたマシンの状態やエラーの測定方法について述べる構想で、これらに関することは、意識的に今回書いた部分からはずしてしまつたが、これらの事について、もう少しは、書けばよかつたと思っている。KEKBに関しても、テキストでは、定性的な話しか書けなかつた。これに関しては、講義の中で少し補いたいと思っている。

下に、本テキストをまとめるにあたって参考にした文献を上げる。よくできた図や説明を一部転用させていただいたことをお断りしておく。

謝辞

テキストの図を準備するにあたって、飯田直子氏と花岡健二氏に非常にお世話になつた。ここに、深く感謝したい。

参考文献

- [1] 神谷幸秀 OHO'84 「加速器の原理」
- [2] 鎌田進 OHO'85 「加速器の原理と設計」
- [3] 平田光司 OHO'85 「ビームトラッキング」
- [4] 小磯晴代 OHO'91 「ビーム貯蔵リングの基礎」
- [5] 大見和史 OHO'91 「低エミッタンスリング

- [6] 中村典雄 OHO'91 「ビーム寿命」
- [7] 加藤政博 OHO'93 「電子ストレージリング I - 入門 -」
- [8] 小林幸則 OHO'93 「電子ストレージリング II - ビームの性質 -」
- [9] E. D. Courant and H. S. Snyder, "Theory of the alternating-gradient synchrotron", Ann. Phys. 3, p.1-48, (1958).
- [10] M. Sands, "The Physics of Electron Storage Ring. An Introduction.", in proceedings of the international school of physics 'Enrico Fermi' (1971).
- [11] D. A. Edwards and M. J. Syphers, "An Introduction to the High Energy Accelerators", John Wiley & Sons, Inc. (1993).
- [12] R. D. Ruth, "Single-particle Dynamics in Circular Accelerators", AIP Conf. Proc. No. 153, p.150-235, (1987).
- [13] F. Willeke and G. Ripken, "Methods of Beam Optics", AIP Conf. Proc. No. 184, p.758-819, (1989).
- [14] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", John Wiley & Sons, Inc.
- [15] S. Chandrasekhar, "Stochastic Problems in Physics and Astronomy", Rev. Mod. Phys. Vol. 15, 1-89 (1943).

補足 ベータトロン振動の近似式

第2章では、ベータトロン振動について詳細に調べた。しかし、場合によっては、このような詳細な様子よりも、リング全体の大雑把な様子に興味がある場合もある。ここでは、ベータ関数やDispersionについての近似式を導いておく。これらの近似式のいくつかは、第4章で既に、説明なしに用いた。

ベータ関数の近似式

ベータトロン振動は、(2.2.2.2)、(2.2.2.4)で表される。これらをもう一度書き下しておくと、

$$z(s) = \sqrt{W\beta(s)} \cos(\psi(s) + \psi_0) \quad (2.2.2.2)$$

$$\psi(s) = \int_{s=s_0}^s \frac{ds}{\beta(s)} \quad (2.2.2.4)$$

であった。この振動を近似的に扱いたいときに、まず考えられるのは、ベータ関数 β を平均値で置き換え、振動を調和振動子としてしまうことである。では、この場合、ベータ関数の平均値として何をを用いるべきであろうか。まず考えられるのは、ベータ関数のリング一周の平均値を用いることである。しかし、これは実はあまり得策ではない。それは、ベータトロン振動において、リング一周での振動数、つまりチューンが重要な量であるので、これを保存したいためである。(2.2.2.4)をリング一周で積分すると

$$2\pi\nu = \oint \frac{ds}{\beta(s)} \quad (1)$$

となるが、 β を平均値 $\bar{\beta}$ で置き換えると、

$$2\pi\nu = \frac{C}{\bar{\beta}} = \frac{2\pi R}{\bar{\beta}} \quad (2)$$

となるが、この場合

$$\frac{1}{\bar{\beta}} = \frac{1}{C} \oint \frac{ds}{\beta(s)} \quad (3)$$

であるから、 $\bar{\beta}$ は、 β のリング一周の平均値、つ

まり、

$$\frac{1}{C} \oint \beta(s) ds \quad (4)$$

ではなくて、(3)で表されるように、その逆数が、 $1/\beta$ のリング一周平均である量である。但し、 β の場所の関数としての変動があまり大きくないときは、これらはあまり大きくは違わない。

(3)で表される $\bar{\beta}$ は、(2)より、

$$\bar{\beta} = \frac{R}{\nu} \quad (5)$$

となる。この $\bar{\beta}$ を用いて、ベータトロン振動は、

$$z(s) = \sqrt{W\bar{\beta}} \cos\left(\frac{s}{\bar{\beta}} + \psi_0\right) \quad (6)$$

の様に、調和振動子に近似できる。

Dispersion 関数と momentum compaction factor の近似式

Dispersion は、(2.2.9.9)の方程式を満たす周期解であった。この方程式を、もう一度書き下しておくと、

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + K(s)\eta = \frac{1}{\rho_0(s)} \quad (2.2.9.9)$$

であった。ここで、2.3.6節でも用いたCourant-Snyder変換と呼ばれる変換を行おう。即ち、まず、独立変数を s から、次に定義する ϕ に変換する。

$$\phi = \frac{\psi_x(s)}{\nu_x} = \frac{1}{\nu_x} \int_0^s \frac{ds}{\beta_x} \quad (2.3.8.2)$$

さらに、 η から、次に定義される ζ に変換しよう。

$$\zeta(\phi) = \frac{\eta(s)}{\sqrt{\beta_x(s)}} \quad (7)$$

これらを運動方程式に代入して少し計算すると、

$$\frac{d^2\zeta}{d\phi^2} + v_x^2\zeta = v_x^2\beta_x^{3/2} \frac{1}{\rho_0(\phi)} \quad (8)$$

となる。まず右辺は、 2π を周期とする ϕ の周期関数であるから、これをフーリエ展開しよう。

$$v_x^2\beta_x^{3/2} \frac{1}{\rho_0(\phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\phi} \quad (9)$$

$$f_n = \frac{v_x^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^{3/2}}{\rho_0} e^{-in\phi} d\phi \quad (10)$$

こうすると、(8) の周期解は、

$$\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n e^{in\phi}}{v_x^2 - n^2} \quad (11)$$

となる。これから Dispersion は、

$$\eta = \sqrt{\beta_x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n e^{in\phi}}{v_x^2 - n^2} \quad (12)$$

となる。

さて、通常加速器では、偏向電磁石は、リングに局在していない、また、 ρ_0 は、ほとんど同符号である。従って、(9) のフーリエ展開でもっとも大きく寄与する項は、 f_0 の項、つまり DC 成分である。また、通常チューンは整数の非常に近くには選ばないから、(12) の展開において $n=0$ の項のみを取る近似が成り立つ。こうすると、

$$\eta = \sqrt{\beta_x} \frac{f_0}{v_x^2} \quad (13)$$

となる。 f_0 は、

$$f_0 = \frac{v_x^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^{3/2}}{\rho_0} d\phi = \frac{v_x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta_x^{1/2}}{\rho_0} ds \quad (14)$$

ここで、 ρ_0 は全ての方向電磁石で同じとし、また、偏向電磁石の中での $\sqrt{\beta_x}$ の平均値を $\langle \beta_x^{1/2} \rangle_{\text{bend}}$ とすると、(14) は、

$$f_0 = \frac{v_x}{2\pi} \frac{2\pi\rho_0}{\rho_0} \langle \beta_x^{1/2} \rangle_{\text{bend}} = v_x \langle \beta_x^{1/2} \rangle_{\text{bend}} \quad (15)$$

となる。ここで、

$$\langle \beta_x^{1/2} \rangle_{\text{bend}} \approx \sqrt{\bar{\beta}_x} = \left(\frac{R}{v_x} \right)^{1/2} \quad (16)$$

と近似すると、

$$f_0 \approx v_x \left(\frac{R}{v_x} \right)^{1/2} \quad (17)$$

となる。従って、(13) より、

$$\eta = \left(\frac{R}{v_x^3} \right)^{1/2} \sqrt{\bar{\beta}_x} \quad (18)$$

が得られる。この様に、大雑把にいうと Dispersion は、 $\sqrt{\beta}$ に比例することに注意しよう。さらに、

$$\sqrt{\beta_x} \approx \left(\frac{R}{v_x} \right)^{1/2} \quad (19)$$

と近似すると、

$$\eta \approx \frac{R}{v_x^2} \quad (20)$$

となる。この式も大雑把に Dispersion の大きさを見積もるのに役に立つ。

次に、momentum compaction factor の大きさを見積もろう。(18) の近似式を用いて、

$$x_\epsilon = \eta \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right) \approx \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right) \left(\frac{R}{v_x^3} \right)^{1/2} \sqrt{\beta_x} \quad (21)$$

となる。従って、

$$\Delta C = \oint \frac{x_\epsilon}{\rho} ds = \oint \frac{x_\epsilon v_x \beta_x}{\rho} d\phi$$

$$\approx \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right) \left(\frac{R}{v_x^3} \right)^{\frac{1}{2}} v_x \oint \frac{\beta_x^{3/2}}{\rho_0} d\phi$$

$$\approx \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right) \frac{C}{v_x^2}$$

となる。従って、

$\alpha_c \approx \frac{1}{v_x^2} \tag{22}$

が得られる。また、(20)、(22)より、

$$\eta \approx \alpha_c R \tag{23}$$

となる。