

はじめに

KEK・Bファクトリー（KEKB）は、大量のB中間子対を生成することを目的とした電子陽電子非対称衝突型加速器である。非対称とは、電子と陽電子のエネルギーがそれぞれ 8GeV と 3.5 GeVで、衝突が実験室系において対称でないという意味である。Bファクトリーは、CP非保存という物理法則の対称性の破れについて研究するために建設されると聞いている。非対称衝突型加速器という対称性の破れた道具で物理法則の対称性の破れを研究するとは、何とも奇妙な話である。KEKBは、「特殊相対論は絶対に正しいのだ。」という信仰の上に成り立つ実験施設であることは間違いないだろう。

大量のB中間子対を生成するためには、原料となる電子と陽電子も大量に必要である。また、電子と陽電子の衝突断面積は天から与えられたものである。限られた原料を効率的に反応させるには、衝突点で電子と陽電子ビームそれぞれの密度を高くする必要がある。これを、加速器の言葉で表現すると、大量のB中間子を生成するためには、電子と陽電子用に大電流かつ低エミッタンスなる二つの貯蔵リングが必要である、ということになる。

さて、大電流低エミッタンス貯蔵リングでは、結合バンチ型ビーム不安定という現象が貯蔵可能なビーム電流値を制限してしまう。この不安定性は、リングに設置されている加速空洞等の高Q値高周波構造の共鳴モードを媒介とするバンチ間相互作用に起因する。この不安定を抑制するためには、バンチが励振した共鳴モードを、次のバンチが来るまでに十分減衰させておく必要がある。そして、共鳴モードを早く減衰させるためには、その電磁場エネルギーを効率的に共鳴構造外部に取り出してやればよい。

本講義の題目である高次モード減衰型空洞とは、ビーム不安定の原因となる高次モードを減衰させるために、その電磁場エネルギーを効率的に外部に取り出せるように工夫をした加速構造の総称である。

この講義の構成は次の通りである。まず、第1章はインピーダンスについての簡単なお話である。気楽に読んで頂きたい。第2章では、高次モード減衰型空洞を理解する上で必要となる基礎的な電磁場の物理について述べる。減衰型空洞は導波管付き空洞の一種である。導波管付き空洞は、電気的等価回路モデルで簡単に取り扱える。しかし、回路モデルでは電磁場の波動的描像の多くが失われてしまう。ここでは、マクスウェル方程式に基づいて、導波管付き空洞の電磁場理論などを導く。次の第3章は、空洞の外界への結合度を表す外部Q値に関する計算法の話である。特に、同調曲線法と呼ばれる周波数領域での計算手法について紹介する。この方法は、通常の空洞設計においても有用である。最後の第4章では、本所で考案された減衰型空洞のうちの二例について紹介する。

なお、空洞に対するビーム電流負荷が大きくなると、加速モード自体による結合バンチ型ビーム不安定性の問題が生じる。しかし、加速モードを減衰させることはできないから、そのビーム不安定を防ぐには、減衰構造とは全く別の方策が必要である。これについては、本講義テキストから割愛させて頂いた。機会があれば、講義の場で紹介したい。

第1章 インピーダンスの話

1.1 序

インピーダンスという用語に初めて出会うのは、交流理論を習うときであろう。ある受動素子の端子間で調和的 ($\propto e^{j\omega t}$) に振動する電圧と、端子に流れる電流の比で定義されるインピーダンスは、オームの法則で定義される抵抗を実数から複素数に拡張したもので、かつ周波数の関数である。

次に、同軸ケーブルなどの伝送線について習うとき、今度は特性インピーダンスという用語が出てくる。これは、線路間の電圧と線路を流れる電流の比で定義され、通常は実数である。そして、伝送線とその特性インピーダンスに等しい抵抗で終端すると、その先に無限長の線路が続いていることと同じになって反射波がなくなる、ということを知う。これに対する反応は人それぞれだろう。端で電圧と電流に関する境界条件を満足すればよいから当然であると考える人もいれば、なんだか騙されたような気分になる人もいるだろう。なぜだろうか？

インピーダンスとは電圧と電流の比である、という定義は数学的には何ら問題はない。これは、速度とは距離と時間の比である、という定義と同じである。しかし、速度という変数が物理的概念として意味をもつのは、物体の運動という物理現象が観測される世界においてだけであろう。ゆえに、インピーダンスと呼ばれる変数の背景にある物理現象について考察しなければ、インピーダンスは単なる数学的変数に過ぎない。これは、因数分解を知らなかった昔の人々が二次方程式を見て、「面積と長さを足したり引いたりするような式は無意味である。」と思い込んだ、という話の裏返しである。

インピーダンスとは、電圧（電流）の作用に対する電流（電圧）の応答を関係づけるものであると言い換えてみよう、少しはわかってきたような気がする。作用と応答、実に物理的な響きの言葉である。

しかし、まだ不十分である。それは、電圧（電流）という作用変数に対する応答変数として、な

ぜ電流（電圧）を選ぶのか？という素朴な疑問に対して答えていないからである。小学校か中学校時代にオームの法則を習ったがために、我々には電圧対電流という先入観がないだろうか？

「ある作用変数に対してどのような応答変数を選ぶべきか？」について指針を与えてくれる物理的概念は何か？我々は、いままで作用と応答の関係（比）についてばかり考えてきた。作用と応答の積は一体何だろうか？電圧と電流の積は？もう、指針を与えるべき物理的概念が何かおわかりでしょう。それは、作用変数が応答変数を介してなす仕事量（単位時間あたり）である。

以上の話をまとめると、

(1) インピーダンスとは、作用とそれに対する応答を関係づける量である。

(2) 作用変数と応答変数は、二変数の積が仕事量（単位時間あたり）になるように選ばなければならない。

これが、物理的概念として一般化されたインピーダンスの定義である。

さらに考察を深めると、(2)の仕事量には二種類あることがわかる。一つは、ある相互作用領域（駆動点）において作用変数が応答変数を介してなす仕事量である。例えば、ブランコの励振や抵抗素子でのエネルギーの散逸などである。もう一つは、作用変数と応答変数が対等で、その間に誘導関係がある場合である。即ち、波動の伝播現象に関するもので、この場合の仕事量は波が輸送するエネルギーに対応する。例えば、音波や電磁波が運ぶエネルギーである。前者のインピーダンスは駆動点（入力）でのインピーダンス、後者のそれは波のインピーダンスと呼ばれるものである。

ここで、インピーダンスの種類について整理しておこう。

(1) 相互作用に関するインピーダンス

これは、上での駆動点（入力）インピーダンスのことである。ある相互作用での作用変数と、それに対する応答変数を関係づける物理量である。

(2) 波動現象に関するインピーダンス

波動という物理現象では、二つの物理変数が交互に作用と応答を繰り返すという関係、即ち、誘導関係が成立する。波のインピーダンスはこの誘導関係から導かれる。例えば、電磁波のインピーダンスは、電磁誘導に関するマクスウェル方程式から導かれる物理量である。

伝送線をその特性インピーダンスに等しい抵抗素子で終端した場合を、もう一度考えてみよう。終端部からの反射波が零であるということを、インピーダンスの物理的概念を使って説明すると、次のようになる。伝送線を伝播する波のインピーダンスと終端部駆動点でのインピーダンスが等しいということは、伝送線を伝播する波の電圧と電流の間に成立する誘導関係と、終端部駆動点での電圧と抵抗素子を通る電流の相互作用の関係が同形になるということである。そして、終端部駆動点での相互作用が作る擬似的な誘導関係によって、波は伝送線がそこで終わっていることに気がつかないのである。また、作用と応答の積である仕事の観点からみると、伝送線を輸送される電磁場エネルギーは、終端部駆動点で完全に吸収され、抵抗素子で熱エネルギーとして散逸される。

1.2 力学的インピーダンス

この節では、先の節で述べたインピーダンスの物理的概念について、簡単な力学的模型を使って具体的に考えてみよう。力学は、我々に最も身近な物理であるから、インピーダンスというものを感覚的にとらえるのに適している。

調和振子

まず、損失項を含む調和振子の運動について考えよう。その運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = f$$

この式の右辺において、第1項は慣性力、第2項は速度に比例した抵抗力、即ち粘性力、そして第3項は復元力である。左辺は励振項、即ち、振子に対する作用である。作用に対する振子の応答変数として何をとるべきか？ 先の節のインピーダンスの定義より応答変数は振子の速度にとるべきである。励振力が電圧に、速度が電流に対応するように、振子のインピーダンスを定義してみよう。調和的励振力 ($\propto e^{j\omega t}$) の場合、振子のインピーダンスは次式で与えられる。

$$Z(\omega) = jm\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \gamma$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

これより、以下のことがわかる。

(1) 励振周波数が共鳴周波数と一致するとき、インピーダンスは実数になり、入力したエネルギーはすべて振子に吸収され、粘性流体中に散逸される。このとき、インピーダンスは吸収的であると言う。吸収的インピーダンスは、電磁気での純抵抗性インピーダンスである。

(2) 励振周波数が共鳴周波数より高いとき、振子の運動エネルギーはポテンシャルエネルギーより優勢である。そのとき、インピーダンスは慣性力的なものになる。例えば、振子を蹴飛ばした場合を考えてみよう。そのとき、我々は振子の慣性質量を感じるだけである。慣性力的インピーダンスは、電磁気での誘導性インピーダンスに対応する。

(3) 励振周波数が共鳴周波数より低いとき、今度は振子の運動エネルギーはポテンシャルエネルギーに比べて小さい。そのとき、インピーダンスは復元力的なものになる。例えば、バネの端の質点を非常にゆっくり動かす場合を考える。そのとき、我々はバネの復元力のみを感じるであろう。復元力的インピーダンスは、電磁気での容量性インピーダンスに対応する。

我々の日常世界では、慣性力が粘性力、復元力に比べて圧倒的に大きい。即ち、

$$m\ddot{x} = j\omega m\dot{x} \approx f$$

よって、我々は誘導性インピーダンスの世界に住んでいると言ってもいいだろう。

水中に棲息する微小な生物 (例えば、ゾウリムシ) の世界では、逆に粘性力が慣性力に比べて大きい。即ち、

$$\gamma\dot{x} \approx f$$

よって、ゾウリムシは純抵抗性インピーダンスの世界に住んでいると言える。

問：粘性流体中の物体の運動について考える。物体の外力に対する運動学的応答、即ちインピーダンスとレイノルズ数の関係について述べよ。

問：自動車エンジンの特性について、インピーダンス的観点から述べよ。 ヒント：F1などで使用されるレース用高性能エンジンは素人には扱いにくい。

問：次に、手動変速装置の機能、および半クラッチという運転方法について、インピーダンス的観点から説明せよ。 ヒント：AT車には、流体（油）の粘性を利用した流体クラッチ（トルクコンバーターとも呼ぶ）が使用されている。

結合振子系を伝播する波のインピーダンス

図1-1のように、一連の振子をバネで結合した系、即ち、一次元結合振子系を伝播する縦波について考えよう。n番目の振子の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x}_n = -m\omega_0^2 x_n + k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ここで、 l は糸の長さ、 g は重力加速度である。

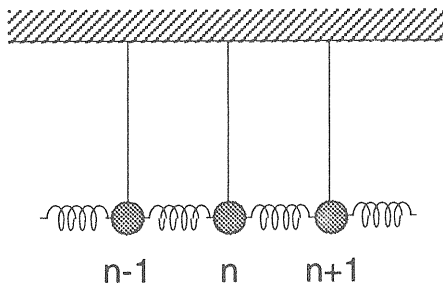


図1-1 一次元結合振子

結合振子系の両端は無限遠にあるとして、左から右への進行波 ($\propto e^{j(\omega t - \varphi x)}$) について考える。ここで、 φ は振子一つあたりの位相の進みである。この結合振子系を伝播する波の分散関係は次式で与えられる。

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

問：これを示せ。

ここで、位相のすすみが $\pi/2$ の波について考える。すると、運動方程式は、

$$m\ddot{x}_n = -m\omega_{\pi/2}^2 x_n + kx_{n+1} + kx_{n-1}$$

$$\omega_{\pi/2}^2 \equiv \omega_0^2 + \frac{2k}{m}$$

となる。この式の左辺において、第3項は右側の振子による励振項である。第2項は、左側の振子がエネルギーを受け取る項、即ち、n番目の振子にとっては損失項である。n-1番目の作用に対するn番目の振子の応答は、n+1番目の振子への作用となり、作用と応答の間に誘導関係が成立している。波のインピーダンスをn-1番目の振子による作用をn番目の振子の速度で割った値で定義する。

$$Z_{\pi/2} \equiv \frac{f}{\dot{x}_n} = \frac{kx_{n-1}}{\dot{x}_n}$$

振子間の位相関係より、

$$Z_{\pi/2} = \frac{ke^{j\frac{\pi}{2}} x_n}{j\omega_{\pi/2} x_n} = \frac{k}{\omega_{\pi/2}}$$

を得る。

結合振子系端部の駆動インピーダンス

次に、図1-2のように、一次元結合振子系の左側が終端されている場合について考える。右側端部は無遠くにあるとする。左端の振子を外力で駆動する場合、その振子の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 + k(x_2 - x_1) - kx_1 + f$$

ここで、外力が調和的励振力でその周波数が先の $\pi/2$ モードに一致する場合、上の方程式は次のようになる。

$$kx_2 + f = 0$$

ここで、2番目の振子と1番目の振子の位相関係より、

$$-jkx_1 + f = -\frac{k\dot{x}_1}{\omega_{\pi/2}} + f = 0$$

を得る。これより、駆動力に対する1番目の振子の応答、即ち、結合振子系端部の駆動インピーダンスは次のようになる。

$$Z_{in} = \frac{k}{\omega_{\pi/2}}$$

これは、先ほど求めた $\pi/2$ 伝播モードの波のインピーダンスに等しい。

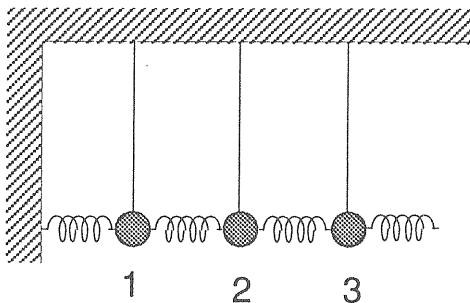


図1-2

1次元結合振子。振子1が駆動点となる。

結合振子系の整合終端条件

最後に、図1-3のように、1次元結合振子系の一番右側の振子(N番目)にオイルダンパーをつけて、左側から波が運んでくるエネルギーを完全に吸収する条件、即ち、整合終端条件について考える。N番目の振子の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x}_N = -m\omega_0^2 x_N - k(x_N - x_{N-1}) - kx_N - \gamma\dot{x}_N$$

ここで、また $\pi/2$ モードの波が左側から進んでくる場合について考えよう。そのとき、上の式は次のようになる。

$$kx_{N-1} - \gamma\dot{x}_N = 0$$

この関係式は、N-1番目の振子による作用が、N番目の振子のオイルダンパーで完全に吸収される条件を表す。以下の関係式、

$$x_{N-1} = e^{j\frac{\pi}{2}} x_N = jx_N$$

$$\dot{x}_N = j\omega_{\pi/2} x_N$$

より、オイルダンパーによる整合条件は、次式で与えられる。

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{k}{\omega_{\pi/2}}$$

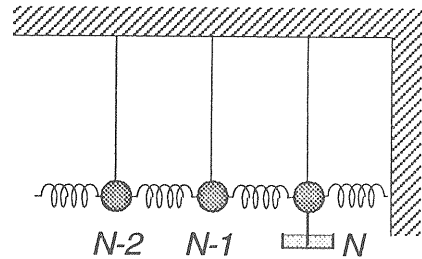


図1-3

一次元結合振子。右端の振子にオイルダンパーをつけてある

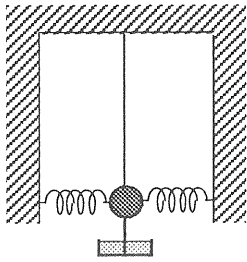


図 1-4
オイルダンパー付き単振子

ここで、左辺は、共鳴周波数が $\omega_{\pi/2}$ なるオイルダンパー付きの単振子（図 1-4）の駆動インピーダンスである。右辺は $\pi/2$ 伝播モードのインピーダンスである。この両者が等しいときに整合条件が成立する

問：図 1-4 の単振子のバネの両端において、なぜこのような境界条件にするのか？

問：ここで取り上げた次元結合振子系の $\pi/2$ 伝播モードと他の位相進みのモードとの大きな相違点について、インピーダンス的観点から述べよ。また、位相進みが 0 および π のふたつのモード（定在波）についても、インピーダンス的観点から調べよ。

以上、力学的インピーダンスについて、簡単な模型を使って説明してきた。インピーダンスの物理的概念の理解に役立てば幸いである。

1.3 結合バンチ不安定とインピーダンス

この章の締めくくりに、加速器の結合バンチ不安定現象とインピーダンスについて定性的に述べる。ここでの、インピーダンスとは、リングを周回するビーム電流（バンチ）と、リングのいろいろな構造体中にそれによって励振される電磁場との相互作用に関するものである。この種のインピーダンスを、加速器の言葉では結合インピーダンスと言う。結合バンチ不安定の場合には、励振後も比較的長時間にわたって生存している電磁場が関与するので、リングの構造体とは、主に高Q値高周波構造体、即ち、加速空洞のことである。

リングを周回するバンチは、シンクロトロン振動と呼ばれる位相安定点まわりでの縦方向の微小な運動、およびベータートロン振動と呼ばれる中心軌道に対する横方向の微小な運動をしている。バンチが持つエネルギーの一部が、最初は微小であったシンクロトロン振動や、ベータートロン振動のエネルギーに転化して、その振幅が発散してしまうのがビーム不安定現象である。どのようにして、最初は微小であった運動が励振されるのか？ それは、皮肉なことに、バンチに絶えずエネルギーを供給している加速空洞でのバンチと電磁場の相互作用によって起こるのである。

この結合バンチ不安定現象を正確に扱うには、バンチの運動のいろいろな周波数成分が空洞にいろいろな周波数成分の電磁場を励振し、さらにこの電磁場がバンチの運動に影響を与えるという過程を自己無撞着的に解く必要がある。ここで、バンチと空洞の電磁場モードの相互作用に関する結合インピーダンスが重要な役割を演じる。

例として、一つのバンチがリングを周回しているときの縦方向結合バンチ不安定について考えてみよう。空洞の電磁場に作用するビーム電流の周波数成分を $I(\omega)$ 、励振される電磁場の縦方向の電圧の周波数成分を $V_{//}(\omega)$ とおく。それらの作用変数と応答変数の関係を次式で定義する。

$$V_{//}(\omega) = -Z_{//}(\omega)I(\omega)$$

ここで、 $Z_{//}(\omega)$ は空洞の縦方向結合インピーダンス（第2章の2.6節参照）と呼ばれるものである。

これから先の話の詳細はビーム不安定に関する過去の夏の学校（例えば、1991年久保浄氏の講義等）を復習して頂くとして、ここでいきなり結論にとぶことにする。縦方向の結合パンチ不安定の成長率（成長時定数の逆数）と結合インピーダンスの間には以下の関係が成立する。

$$\tau^{-1} \propto \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) \operatorname{Re}[Z_{//}(p\omega_0 + \omega_s)]$$

ここで、 ω_0 はパンチの周回周波数、 ω_s はシンクロトロン周波数である。この式の意味は、周回周波数の整数倍 $p\omega_0$ からシンクロトロン周波数 ω_s の分だけ左右にずれたサイドバンドのところで空洞の縦方向結合インピーダンスを拾い上げ、それに拾い上げたところの周波数を乗じ、その積を全周波数領域にわたって足し合わせたものに、縦方向ビーム不安定の成長率は比例する、ということである。

いきなり結論にとんだので、「わけがわからん」と言う人がいるかも知れないが、この式の形については、以下の議論で定性的に理解できる。ここで重要なのは、パンチはある時間間隔で脈動的に空洞電磁場に作用するということである。パンチのリング周回周期を $T_0 (= 2\pi/\omega_0)$ とする。シンクロトロン振動を無視すると、パンチは一定の時間間隔 T_0 毎に空洞を通過し、その電磁場に作用する。それを時間領域で表すと、

ビーム信号（時間領域）

$$\propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

となる。ここで、 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ は過去から未来にわたるす

べての周回について勘定するということである。

これをフーリエ変換して周波数領域で表現すると、

ビームの周波数スペクトル

$$\begin{aligned} &\propto \int e^{j\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega kT_0} \\ &= \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0) \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の式の変形には、Poissonの和公式なるものを使う。（宿題：この公式について調べておくこと。また、その物理的意味を考えておくこと。）これより、空洞で観測されるビーム電流の主たる周波数成分は、周回周波数 ω_0 の整数倍であることがわかる。次に、ビームがシンクロトロン振動をしている場合について考えてみよう。時間領域でビームは次のように表せる。

ビーム信号（時間領域）

$$\propto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 + \hat{v} \cos \omega_s kT_0)$$

これをフーリエ変換してスペクトル表示にしてみよう。

ビームの周波数スペクトル

$$\begin{aligned} &\propto \int e^{j\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 + \hat{v} \cos \omega_s kT_0) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega(kT_0 - \hat{v} \cos \omega_s kT_0)} \end{aligned}$$

ここで、 \hat{v} はシンクロトロン振動の振幅である。この振幅が微小であるとして、一次の微小量まで勘定することになると、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega k T_0} (1 - j\omega \hat{\tau} \cos \omega_s k T)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega k T_0} (1 - j\omega \hat{\tau} \cos \omega_s k T)$$

となる。第1項は、先ほどの主成分である。これは、シンクロトロン振動とは関係のない項である。縦方向の不安定に寄与するのは第2項である。これを、先ほどのPoissonの和公式を使って変形していくと、

$$-j\omega \hat{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega k T_0} \cos \omega_s k T$$

$$= -\frac{j}{2} \omega \hat{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{jkT_0(\omega+\omega_s)} + e^{jkT_0(\omega-\omega_s)}]$$

$$= -\frac{j}{2} \hat{\tau} \omega_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} [(p\omega_0 - \omega_s) \delta(\omega - p\omega_0 + \omega_s) + (p\omega_0 + \omega_s) \delta(\omega - p\omega_0 - \omega_s)]$$

を得る。このビーム電流の周波数成分を縦方向結合インピーダンスに乗じて、その積を周波数について足し合わせたものが、バンチ管の空洞共鳴モードを媒介とする相互作用の強さに関係し、そして縦方向不安定の成長率を決める重要な因子であることが定性的に理解できる。

次に、縦方向インピーダンスにそれを拾い上げたところの周波数を乗じた形になっている物理的意味について考えてみよう。この形は、ビーム電流の周波数表示をシンクロトロン振動の振幅の一次の項まで展開したとき、即ち、

の式中の $\omega \hat{\tau}$ なる項に由来する。この項が意味するところは、ある大きさの時間のずれは、周波数が高くなるほど、即ち、周期が短くなるほど相対的に大きく見える、ということである。

ここでは取り上げないが、横方向の結合バンチ不安定についても、縦方向と同様の取り扱いができる。横方向の場合には、空洞の双極型モードが関係してくる。ビームの中心軌道から横方向へのずれを双極子モーメント型電流成分として考え、それに対する空洞電磁場の応答を横方向結合インピーダンスで関係づけるのである。ビームが横方向に大きくずれるほど、双極子モーメントは大きくなる。よって、ベータトロン振動をしているバンチを空洞の双極型モードから観測すると、周回周期 T_0 毎の脈動にベータトロン周波数の振幅変調がかかっているように見える。

宿題：ベータトロン振動をしているバンチを空洞の双極モードを通してスペクトル分析装置で観測した。そのとき観測されるビーム電流の周波数成分を求めよ。

以上、結合バンチ不安定について、非常に簡単に定性的説明をした。ここでは、インピーダンスという概念がビーム不安定の物理にどのように関与しているのか、という雰囲気を感じとっていただければ十分です。加速器のビーム不安定現象の詳細については、過去のOHO夏の学校に講義を復習して頂きたい。

第2章 導波管と空洞の物理

2.1 序

この章の目的は、導波管、空洞、および導波管付き空洞に関する基本的な物理、即ち、高次モード減衰型空洞を理解するために必要な最小限の情報を提供することである。

2.2 一様な媒質中での電磁波

まず、一様な媒質中の電磁場の伝播について考えよう。媒質の誘電率、透磁率、および電気伝導度をそれぞれ ϵ, μ, σ とおく。場の時間的振る舞いが調和的 ($\propto e^{j\omega t}$) である場合、電磁誘導に関するマクスウェル方程式は以下のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) = -\mu j\omega \mathbf{H}(x, y, z)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) = (\sigma + \epsilon j\omega) \mathbf{E}(x, y, z)$$

二番目の右辺の $\sigma \mathbf{E}$ の項はオームの法則に従って媒質中に流れる電流を表す。ベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

を使うと、上記電磁誘導の式より以下の関係式を得る。

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\omega^2 (\epsilon - j\sigma/\omega) \mu \mathbf{E}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\omega^2 (\epsilon - j\sigma/\omega) \mu \mathbf{H}$$

これは、波動の伝播を表す式である。

最も単純な解として、 z 軸方向に進む平面波 ($\propto e^{j\omega t - \gamma_0 z}$) を考えてみよう。電場の方向を x 軸に、磁場の方向を y 軸にとると、電場、磁場は次のように表せる。

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, 0) e^{-\gamma_0 z}$$

$$\mathbf{H} = (0, H_y, 0) e^{-\gamma_0 z}$$

ここで E_x, H_y は定数、 γ_0 は波動の伝播定数 (複素数) である。これらの場を上記の電磁誘導のマクスウェル方程式と波動方程式に代入すると、以下の関係式を得る。

$$\gamma_0 \equiv \alpha_0 + j\beta_0 = \sqrt{-\omega^2 (\epsilon - j\sigma/\omega) \mu}$$

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\sigma/\omega}} = Z_0$$

γ_0 の実部 α_0 は波の減衰を表す。虚数部の β_0 は波数と呼ばれ、波長 λ_0 との間に次の関係がある。

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = 2\pi / \lambda_0$$

媒質が不導体 ($\sigma = 0$) で、誘電率と透磁率がそれぞれ実数であるとき、電磁場は媒質中を減衰することなく伝播する。

電場と磁場の大きさの比を表す Z_0 は、媒質中を伝播する平面波のインピーダンスである。これを特に媒質のインピーダンスと呼ぶ場合もある。媒質は電場と磁場の誘導関係を決めるという点において、平面波のインピーダンスに関係するという意味である。

媒質が不導体で無損失の場合、電場と磁場の位相がそろっていることに注意。特に、媒質が真空の場合、

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \omega / c \quad (c \text{ は光速})$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$$

となる。

次に、媒質が良導体である場合について考えてみよう。ここで言う良導体とは、 $\sigma \gg \omega \epsilon$ なる

条件を満たす媒質のことである。即ち、変位電流に比べてオームの法則に従う伝導電流が大きな媒質を指す。良導体中を伝播する電磁場の γ_0 、 Z_0 は以下ようになる。

$$\gamma_0 \equiv \alpha_0 + j\beta_0 = \sqrt{j\omega\sigma\mu} = \frac{1+j}{\delta_s}(1+j)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma\delta_s}$$

$$\delta_s \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu}}$$

ここで、 δ_s は表皮厚さ (skin depth) と呼ばれる量で、波の振幅が $1/e$ に減衰する距離を表す。媒質が銅 ($\sigma = 5.8 \times 10^7 S/m$) で、周波数が500 MHzのとき、 δ_s は約3ミクロンになる。インピーダンスについては、良導体中では電場と磁場の間に45度の位相のずれがあることが、まずわかる。また、真空中に比べて、磁場が電場よりはるかに優勢である。インピーダンスを次のように書き換えてみよう。

$$Z_0 = \frac{1+j}{\sigma\delta_s} = \frac{1}{\sigma\delta_s} + j\omega\frac{\mu\delta_s}{2}$$

こうすると、良導体中の波動インピーダンスには、吸収的 (抵抗的) なものと誘導的なものが等しく寄与していることがわかる。

問：完全導体を想定して空洞を設計した。設計寸法どおりに銅製の空洞を製作して、その共鳴周波数を測定したところ設計値より低かった。なぜか？ 銅壁面のインピーダンス境界条件の観点から論ぜよ。

最後に、媒質の性質を γ_0 と Z_0 で表すとき、電磁誘導の方程式と波動方程式は以下のように書き換えられる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\gamma_0(\mathbf{Z}_0\mathbf{H})$$

$$\nabla \times (\mathbf{Z}_0\mathbf{H}) = \gamma_0\mathbf{E}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} - \gamma_0^2\mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2\mathbf{H} - \gamma_0^2\mathbf{H} = 0$$

宿題：真空中のマックスウェル方程式を、光速 c とインピーダンス $Z_0 = 377\Omega$ を使って書き換えよ。こうすると、定数 ϵ_0 と μ_0 を暗記しなくてもすむ。

2.3 導波管中の電磁波の伝播

導波管とは、電磁波を金属管に閉じこめて搬送するものの総称である。通常、管の中の媒質としては、低損失なものが使用される。よく知られているものとしては、同軸導波管 (ケーブル)、矩形導波管、および円形導波管などがある。本所の電子線形加速器で使用されているSバンド円盤装荷型加速管や、トリスタン電子リングのAP S型加速空洞 (タンク) も導波管の仲間である。

ここでは、断面が一樣な導波管中の電磁波の伝播について考えることにする。以下、自由空間という用語を使うときには、管内と同じ媒質で満たされた一樣な空間であるということを忘れないこと。導波管の軸を z 軸にとると、管内の電磁場は次のように表せる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y)e^{j\alpha z - \gamma z}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y)e^{j\alpha z - \gamma z}$$

ここで \mathbf{E}_0 と \mathbf{H}_0 は、導波管断面の座標 (x, y) のベクトル関数 (3成分) であることに注意。管の材質が完全導体であるとき、 \mathbf{E}_0 と \mathbf{H}_0 は管内壁面において、以下の境界条件を満たさなければならない。

$$\mathbf{E}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$$

ここで、 \mathbf{n} は、境界面の法線方向外向き単位ベクトルである。この \mathbf{E} 、 \mathbf{H} を先の波動方程式に代入すると、 \mathbf{E}_0 と \mathbf{H}_0 が満たすべき以下の固有値方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial y^2} + \beta_c^2 \mathbf{E}_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}_0}{\partial y^2} + \beta_c^2 \mathbf{H}_0 = 0$$

$$\beta_c^2 \equiv \gamma^2 - \gamma_0^2, \quad \lambda_c \equiv \frac{2\pi}{\beta_c}$$

式中の固有値 β_c は、遮断伝播定数と呼ばれる物理量である。また、この伝播定数に対応する λ_c を遮断波長と呼ぶ。この名称の由来は次のように考えるとよくわかる。管内の媒質が不導体で無損失であるとき($\gamma_0 = j\beta_0$)、伝播定数 γ と周波数の間には以下の関係が成り立つ。

$$\gamma^2 = \beta_c^2 - \beta_0^2 = \beta_c^2 - \omega^2 \epsilon \mu$$

この式より、 β_c が0でない限り、周波数が低くなると伝播定数は実数となり、電磁場は伝播できずに減衰してしまうことがわかる。 $\omega_c = \beta_c / \sqrt{\epsilon \mu}$ なる周波数を遮断周波数と呼び、これより高い周波数領域においてのみ電磁波の伝播が可能である。

遮断伝播定数が0の場合、 \mathbf{E}_0 、 \mathbf{H}_0 が満たすべき式は、2次元静電場ポテンシャルのラプラス方程式と同じ形になる。よく知られているように、金属で囲まれた電荷を含まない単連結の閉空間には静電場は存在できない。即ち、静電場ポテン

シャルは閉空間で一定でなければならない。これは、 \mathbf{E}_0 、 \mathbf{H}_0 の各ベクトル成分が管内において定数であることを意味するが、管内壁面での境界条件を満たすにはその定数は0でなければならない。よって、円形導波管や矩形導波管には遮断周波数が0の伝播モードは存在しないことがわかる。しかし、導体を含む閉空間においては、静電場が存在可能である。よって、同軸導波管のように二つの導体から構成される導波管には、遮断周波数が0の伝播モードが存在する。そして、そのモードの \mathbf{E}_0 (\mathbf{H}_0)の形は、導波管断面上での2次元ポテンシャル問題があたえる静電場(磁場)のそれに等しい。

ここで、導波管中の電磁波の伝播($\gamma = j\beta$ のとき)に関するいくつかの物理量の間になり立つ関係式をまとめておく。

伝播定数:

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \beta_c^2} \leq \beta_0$$

ここで、 $c \equiv 1/\sqrt{\epsilon \mu}$ は自由空間での電磁波の位相速度。媒質が真空のときは光速。

管内波長:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \geq \lambda$$

ここで、 $\lambda \equiv 2\pi/\beta_0$ は自由空間での波長。

位相速度:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda_g}{\lambda} c = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \geq c$$

導波管内が真空の場合、位相速度は光速より大きい。

群速度：

$$v_g \equiv \left(\frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \left(\frac{d \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \beta_c^2}}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{\lambda_g}{\lambda} c \leq c$$

群速度と位相速度の関係： $v_p v_g = c^2$

注：波の速度には、位相速度、群速度、信号速度、それからエネルギー輸送速度の四種類がある。（宿題：信号速度とエネルギー輸送速度の定義を調べておくこと。）

問：導波管の伝播モードにおいて、エネルギー輸送速度と群速度が等しいことを示せ。

問：電送線路を単一周波数の波が伝播している定常状態を考える。上記注の四種類の波の速度のうちで測定可能なものを挙げよ。

問： $v_g = d\omega/d\beta$ で定義される群速度とは、周波数差が非常に小さい二つの波を重ね合わせたとき、合成された波のうなりが移動する速度である。この波で情報を伝えることは可能か？

次に、導波管内を伝播する電磁波の波動インピーダンスについて考えてみよう。第1章で述べたように、インピーダンスとは電場と磁場の間の応答に関する物理量で、かつ、電磁波が運ぶエネルギーにも関係する。導波管内を単位時間あたりに輸送される電磁場エネルギーを計算するには、管の断面においてポインティングベクトル

$(\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H})$ の軸方向成分を積分すればよい。ゆえに、波動インピーダンスを考えるときには、電場、磁場とも導波管軸に垂直な平面内の成分、

即ち横方向の成分が重要である。

そこで、電磁場のベクトル関数 \mathbf{E}_0 と \mathbf{H}_0 を、次のように横方向と軸方向の成分に分けて表してみよう。

$$\mathbf{E}_0(x, y) = \mathbf{E}_t(x, y) + \mathbf{k}E_z(x, y)$$

$$\mathbf{H}_0(x, y) = \mathbf{H}_t(x, y) + \mathbf{k}H_z(x, y)$$

ここで、添字 t は横方向という意味、 \mathbf{k} は z 軸方向の単位ベクトルである。また、 E_z と H_z はスカラー関数であることに注意。これらの電磁場の横成分、縦成分はそれぞれ波動方程式を満たさなければならないことは言うまでもない。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \beta_c^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_t}{\partial y^2} + \beta_c^2 \mathbf{E}_t = 0$$

(\mathbf{H}_t 、 H_z についても同様。)

また、電磁誘導に関するマクスウェル方程式を満足すべきであるという条件から以下の関係式を得る。

$$\mathbf{E}_t = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \nabla E_z + \frac{\gamma_0}{\beta_c^2} [\mathbf{k} \times \nabla (Z_0 H_z)]$$

$$Z_0 \mathbf{H}_t = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \nabla (Z_0 H_z) - \frac{\gamma_0}{\beta_c^2} (\mathbf{k} \times \nabla E_z)$$

このふたつの式をよくながめてみると、電場と磁場の軸方向成分を表すスカラー関数 E_z と H_z が、電磁場の横成分を与えるポテンシャルのような役割を果たしていることがわかる。また、遮断周波数が0でないモードは二種類に分けられることも明らかである。即ち、軸方向の磁場成分を有するモード（電場は横成分のみ）の集合と、軸方向の電場成分を有するモード（磁場は横成分のみ）の集合である。前者をH波（軸方向に磁場成

分を有するから)、またはTE波 (Transverse Electricの略)、後者をE波 (軸方向に電場成分を有するから)、またはTM波 (Transverse Magneticの略) と呼ぶ。

以下に、TE波とTM波のそれぞれについて、重要な式をまとめておく。

TE波:

$$\mathbf{E}_t = \frac{\gamma_0}{\beta_c^2} [\mathbf{k} \times \nabla (Z_0 H_z)]$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \nabla (H_z)$$

$$Z \mathbf{H}_t = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_t$$

$$Z = Z_0 \frac{\gamma_0}{\gamma} = Z_0 \frac{\lambda_g}{\lambda}$$

TM波:

$$\mathbf{E}_t = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \nabla E_z$$

$$\mathbf{H}_t = -\frac{\gamma_0}{Z_0 \beta_c^2} (\mathbf{k} \times \nabla E_z)$$

$$Z \mathbf{H}_t = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_t$$

$$Z = Z_0 \frac{\gamma}{\gamma_0} = Z_0 \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

ここで、Zは導波管中を伝播する電磁場モードの波動インピーダンスである。TE波の波動インピーダンスは自由空間のそれより大きく、TM波の場合は逆であることに注意。

問: TE波、TM波の波動インピーダンスの周波数に対する応答を調べよ。その振る舞いを電磁場の形から定性的に説明せよ。

物理では、「固有方程式の解の集合、即ち固有

関数列は完全なる直交関数系を構成し、任意の関数をこの直交関数系で展開可能である。」ことを暗黙のうちに了解する習慣になっている。物理の教科書では固有関数の直交性については証明がでていない。しかし、任意の関数を固有関数列で展開可能かどうかについては数学 (物理数学) の本におまかせである。しかしながら、コンパクトディスク (CD) が素人には判別不能なほど原音に近い音を再生できる (異論のある方も多いと思う) ことを考えると、固有関数の完全性については暗黙の了解事項としてもよいという気もする。

問: 上記CDの例で、直交関数系とはなにか?

導波管中の波動方程式の解も例外にもれず直交関数系を構成する。この場合の直交関係は、ふたつの固有関数のスカラー積を導波管断面上で積分することによって定義される。以下に、導波管中の伝播モードについての直交関係をまとめて示す。

TE波:

$$\int H_{zm} \bar{H}_{zn} da = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int H_{zm} \bar{H}_{zn} da = \frac{\beta_{cn}^2}{\gamma_n \bar{\gamma}_n} \int \mathbf{H}_m \cdot \bar{\mathbf{H}}_m da$$

TM波:

$$\int E_{zm} \bar{E}_{zn} da = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int E_{zm} \bar{E}_{zn} da = \frac{\beta_{cn}^2}{\gamma_n \bar{\gamma}_n} \int \mathbf{E}_m \cdot \bar{\mathbf{E}}_m da$$

TE波とTM波:

$$\int \mathbf{E}_m \cdot \bar{\mathbf{E}}_n da = \delta_{mn} \quad (\text{正規化条件})$$

$$Z_m \bar{Z}_n \int \mathbf{H}_m \cdot \bar{\mathbf{H}}_n da = \delta_{mn}$$

$$\bar{Z}_n \int \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E}_m \times \bar{\mathbf{H}}_n) da = \delta_{mn} \quad (\text{電力の直交関係})$$

上記の固有函数系を使うことによって、導波管中を伝播する任意の電磁場モード（入射波と反射波が同時に存在する場合も含む）を以下のように展開することができる。

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_m (A_n e^{j\alpha z - \gamma_n z} + B_n e^{j\alpha z + \gamma_n z}) + k E_{zn} (A_n e^{j\alpha z - \gamma_n z} - B_n e^{j\alpha z + \gamma_n z})$$

$$\mathbf{H} = \sum_n \mathbf{H}_m (A_n e^{j\alpha z - \gamma_n z} - B_n e^{j\alpha z + \gamma_n z}) + k H_{zn} (A_n e^{j\alpha z - \gamma_n z} + B_n e^{j\alpha z + \gamma_n z})$$

問：展開係数の正負の符号の意味について考えてみよう。

付録に、同軸導波管、矩形導波管、および円形導波管それぞれの主たる伝播モードの電磁場分布を示す。個々のモードの電磁場の表現式等の詳細については、電磁気の教科書、または過去の夏の学校のテキスト等を参照してください。

ここで、円形導波管の伝播モードの電磁場分布を見ながら、以下の練習問題に挑戦してみよう。

問：円形導波管の内径が一定でない場合、（例えば、円筒空洞の両側に円形ビーム管を取り付けた形状）TE₁₁波とTM₁₁波は混合する（直交しない）。その理由を簡単に図を使って説明せよ。

問：円形導波管の内径が一定でない場合でも、TM₀₁波とTE₀₁波は混合しない。その理由を簡単に図を使って説明せよ。

問：円形導波管のある場所でTM₀₁波とTE₁₁波を混合させたい。その場所で導波管をどのように変形させればよいか図示せよ。

問：円形導波管の断面が三角おむすびのように変形してしまった。この場合のTM₀₁波とTM₁₁波の混合について考察せよ。

2.4 空洞の共鳴モード

空洞共振器とは、良導体（金属）の壁に囲まれた閉空間に励振される電磁場（定在波）を応用する装置である。簡単に空洞をつくるには、導波管両端を金属板で蓋をして半波長の整数倍の共振器にすればよい。

空洞の共鳴モードの集合も導波管の伝播モードと同様に直交固有函数系を構成する。空洞の固有函数系として、以下のような条件を満足するベクトル函数 $\mathbf{E}_a(x, y, z)$ と $\mathbf{H}_a(x, y, z)$ をとることにする。

$$k_a \mathbf{E}_a = \nabla \times \mathbf{H}_a$$

$$k_a \mathbf{H}_a = \nabla \times \mathbf{E}_a$$

$$k_a = \omega_a \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega_a}{c}$$

また、境界面として、次の2種類の境界条件を有するものを考える。

S面（電氣的短絡面）：

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_a = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_a = 0$$

S'面（磁氣的短絡面）：

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_a = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_a = 0$$

先の $\mathbf{E}_a(x, y, z)$ 、 $\mathbf{H}_a(x, y, z)$ の定義より、

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_a = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_a = 0$$

である。発散が0であるベクトル場を環流場と呼ぶ。

なぜ、このような固有函数系をとるのか？と疑問に思われる方もいるかも知れない。この疑問に対して、私は以下のように答えるしかない。「我々は、既にマックスウェル方程式を知っている。電場と磁場の間の誘導関係、それぞれの場が

空洞の境界で満たすべき境界条件も知っている。そして、空洞の共振モードは定在波であるということも了解している。」

実際の電場、磁場と $\mathbf{E}_a(x, y, z)$ 、 $\mathbf{H}_a(x, y, z)$ との関係は以下ようになる。

$$\mathbf{E}_a = \sqrt{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_a = -j\sqrt{\mu} \mathbf{H}$$

問：磁場の係数に虚数がかかるのはなぜ？

以上の空洞の電場および磁場に対応する関数の性質から、これらの関数が以下の固有方程式、および直交条件を満たすことが証明できる。

$$\nabla^2 \mathbf{E}_a + k_a^2 \mathbf{E}_a = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_a + k_a^2 \mathbf{H}_a = 0$$

$$\int \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_b dv = \delta_{ab} \quad \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b dv = \delta_{ab}$$

問： \mathbf{E}_a と \mathbf{H}_a は独立ではないはずである。それなのにどうして同時に正規化できるのか？

空洞に電流や電荷が存在する場合には、勾配場固有関数系 \mathbf{F}_a を先の環流場関数系 \mathbf{E}_a に追加する必要がある。勾配場とは回転が 0 であるベクトル場である。即ち、

$$\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$$

ところで、勾配場には必ずその親となるポテンシャルにあたるスカラー関数がある。それを ϕ_a とおいて、次の固有方程式を満たすものとする。

$$\nabla^2 \phi_a + k_a^2 \phi_a = 0$$

そして、 \mathbf{F}_a は以下のように ϕ_a の勾配で定義される。

$$k_a \mathbf{F}_a = \nabla \phi_a$$

また、以下の境界条件を満たすものと仮定する。

S 面および S' 面で

$$\phi_a = 0$$

この仮定より、S 面および S' 面で \mathbf{F}_a は以下の境界条件を満たすことが導かれる。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{F}_a = 0$$

また、環流場関数系と同様に、この勾配場関数系にも以下の直交関係が成立する。

$$\int \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{F}_b dv = \int \phi_a \phi_b dv = \delta_{ab}$$

さて、またまた関数系の完全性についてのお話である。厳密に言うと、上記関数系は完全ではない。完全にするには、磁場に対応する環流場関数系 \mathbf{H}_a に、以下のような勾配場関数系 \mathbf{G}_a をつけ加える必要がある。

$$\nabla^2 \psi_a + k_a^2 \psi_a = 0$$

$$k_a \mathbf{G}_a = \nabla \psi_a$$

$$\nabla \times \mathbf{G}_a = 0$$

しかし、通常空洞の電磁場を解析するには磁場の勾配場は関係ないので、ここでは立ち入らないことにする。実は、Slater 先生も勾配場 \mathbf{G}_a を勘定に入れるのを忘れていた。しかし、彼の物理的洞察力は数学的厳密性を超越する。

問：2次元の閉空間を考える。この空間において、発散と回転がともに 0 であるようなベクトル場が存在するか？ お茶の時間に、コーヒーまたは紅茶にミルクを入れ、スプーンでかき混ぜて実験しながら考えてみよう。

以上、空洞の共鳴モードの固有函数系について簡単に述べてきた。空洞の電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{H} 、電流 \mathbf{J} 、および電荷 ρ は、これらの固有函数系を使って以下のように展開できる。

$$\mathbf{E} = \sum_a \mathbf{E}_a \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \sum_a \mathbf{F}_a \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv$$

$$\mathbf{H} = \sum_a \mathbf{H}_a \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv$$

$$\mathbf{J} = \sum_a \mathbf{E}_a \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv + \sum_a \mathbf{F}_a \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{F}_a dv$$

$$\rho = \sum_a \phi_a \int \rho \phi_a dv$$

また、電磁誘導に関するマックスウェル方程式の $\nabla \times \mathbf{E}$ 、 $\nabla \times \mathbf{H}$ の項についても上記固有函数系で展開すると、以下の表式を得る。

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \sum_a \mathbf{H}_a \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a dv \\ &= \sum_a \mathbf{H}_a \left(k_a \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \sum_a \mathbf{E}_a \int (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a dv \\ &= \sum_a \mathbf{E}_a \left(k_a \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \right) \end{aligned}$$

宿題：上記 $\nabla \times \mathbf{E}$ の計算で、 \mathbf{E} をあらかじめ以下のように展開しておく。

$$\mathbf{E} = \sum_a \mathbf{E}_a \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + \sum_a \mathbf{F}_a \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_a dv$$

これに回転の演算をすると、 $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ であるから、

$$\nabla \times \mathbf{E} = \sum_a k_a \mathbf{H}_a \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv$$

を得る。この式と、先の $\nabla \times \mathbf{E}$ を \mathbf{H}_a で展開した式とでは、S面上での積分項の有無について違いがある。これについて、物理的に考察せよ。

各ベクトル場の上記展開式をマックスウェル方程式に代入して整理すると、最終的に、環流場展開係数の時間発展に関する以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \frac{d^2}{dt^2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + k_a^2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \\ = -\mu \frac{d}{dt} \left[\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \right] \\ - k_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \frac{d^2}{dt^2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv + k_a^2 \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv \\ = k_a \left[\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \right] \\ - \varepsilon \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da \end{aligned}$$

これらの方程式は、調和振動子の運動方程式と同じ形をしている。右辺の各項の物理的意味を以下に示す。

$\int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da$ の項：

境界S'面を通してのエネルギーのやりとりを表す。通常、導波管を通しての外部と相互作用に関係する。高次モード減衰空洞では一番重要な項である。

$\int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da$ の項：

境界S面を通してのエネルギーのやりとりを表す。通常、境界S面は空洞の金属壁面であるから、壁面での熱損失に関係する。

$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv$ の項：

空洞体積中の電流との相互作用を表す。電流の種類としては、荷電粒子ビームや、媒質が導体である場合には伝導電流 $\sigma \mathbf{E}$ などを含む。

問：勾配場 \mathbf{F}_a を取り入れて電場を展開したが、環流場 \mathbf{E}_a 、 \mathbf{H}_a についての展開係数の微分方程式には、勾配場についての展開係数は出てこない。なぜか？

これから、空洞電磁場の微分方程式に関するいくつかの例題をとりあげる。以下、議論を簡単にするために、考察の対象となる周波数領域には共鳴モードが一つしかないと仮定する。即ち、

$$\mathbf{E} = e_a \mathbf{E}_a \quad \mathbf{H} = h_a \mathbf{H}_a$$

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv = e_a \quad \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_a dv = h_a$$

を仮定する。

例1：完全導体壁面の空洞で導波管開口部なし、さらに空洞体積中に電流もない場合。

このとき、方程式は次のようになる。

$$\epsilon \mu \frac{d^2}{dt^2} e_a + k_a^2 e_a = 0$$

$$\epsilon \mu \frac{d^2}{dt^2} h_a + k_a^2 h_a = 0$$

この方程式の解は、

$$e_a \propto e^{j\omega_a t} \quad h_a \propto e^{j\omega_a t}$$

となる。

問： e_a と h_a の比について、 $\frac{e_a}{h_a} = -j \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ を示せ。

例2：空洞壁面での損失がある場合。

h_a についての方程式は次のようになる。

$$\epsilon \mu \frac{d^2}{dt^2} h_a + k_a^2 h_a + \epsilon \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da = 0$$

金属壁面上では、以下のインピーダンス関係が成立する。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{H} (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} = h_a \mathbf{H}_a (1 + j) \sqrt{\frac{\omega_a \mu}{2\sigma}}$$

この関係式と、場の時間的変化 $\propto e^{j\omega t}$ (ω は複素数) という仮定を使うと、

$$j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) + \frac{1 + j}{2} \delta_s \int_S \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_a da = 0$$

を得る。ここで $\frac{1+j}{2} \delta_s \int_S \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_a da$ の実数部は壁面インピーダンスの抵抗成分による損失項、虚数部はインダクタンス成分による共鳴周波数の変化に対応する。さらに式を整理すると、

$$j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{\delta_s}{2} \int_S \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_a da = 0$$

$$\omega_a' = \omega_a \left(1 - \frac{\delta_s}{4} \int_S \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_a da \right)$$

この式を、以下の減衰振動の式と比較してみる。

$$j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) + \frac{1}{Q} = 0$$

これより、金属壁面での損失によるQ値は次のように書ける。

$$\frac{1}{Q_{wall}} = \frac{\delta_s}{2} \int_S \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_a da$$

また、壁面インピーダンスのインダクタンス成分による共鳴周波数の変化は次のようになる。

$$\omega_a' = \omega_a \left(1 - \frac{1}{2Q_{wall}} \right)$$

2.5 空洞の入力インピーダンス

空洞が導波管を通して外界と相互作用がある場合について考えよう。ここでは、外界から導波管を通して空洞を励振したときの空洞の応答、即ち、空洞の入力インピーダンスについてまず調べてみる。

話を単純にするために、空洞の共鳴モードも導波管の伝播モードもそれぞれひとつとする。ま

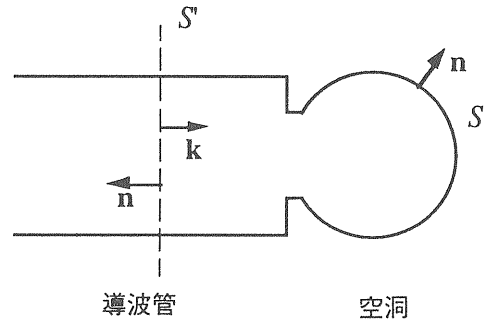


図2-1 導波管付き空洞

た、空洞は無損失であると仮定する。境界S'面を導波管の途中のどこに置かかというのは、物理的考察を要する重要な問題である。いま、空洞は無損失であると仮定したから、空洞に入射した波は全部反射され、入射波と反射波によって導波管内に定在波がたつ。S'面上で空洞の電場が満たすべき境界条件を考慮すると、S'面の位置としては、定在波の電場の腹の位置が適当である。さらに、空洞への開口部からある程度距離があるところがよい(図2-1参照)。その理由は、開口部の近くでは導波管中を伝播する波が他の伝播モードと混合して歪んでしまうからである。

以上の仮定の下で、電場の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon\mu \frac{d^2}{dt^2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + k_a^2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \\ = \mu \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \end{aligned}$$

右辺のS'面上での積分を評価しよう。ここで、S'面上の \mathbf{E}_a と \mathbf{H} を導波管の伝播モードで展開する。

$$\mathbf{E}_a(S') = v_{a1} \mathbf{E}_{11} \quad \mathbf{H}(S') = i_1 Z_1 \mathbf{H}_{11}$$

ここで、 $i_1 \propto e^{j\omega t}$ であることに注意。即ち、 $\mathbf{H}(S')$ は励振項である。導波管の伝播モードの性

質から、

$$Z_1 \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{t1}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H}(S) &= \mathbf{n} \times i_1 Z_1 \mathbf{H}_{t1} \\ &= \mathbf{n} \times (\mathbf{k} \times i_1 \mathbf{E}_{t1}) = i_1 \mathbf{E}_{t1} \end{aligned}$$

となる。これを S' 面上の積分の式に代入すると、

$$\int_{S'} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da = \int_S i_1 \mathbf{E}_{t1} \cdot v_{a1} \mathbf{E}_{t1} da = i_1 v_{a1}$$

を得る。空洞の電場の形、時間的发展を

$$\mathbf{E} = e_a \mathbf{E}_a \quad e_a \propto e^{j\omega t}$$

と仮定すると、場に関する強制振動の方程式は、以下ようになる。

$$-\epsilon \mu \omega^2 e_a + k_a^2 e_a = j \omega \mu i_1 v_{a1}$$

これを、 e_a について解くと

$$e_a = \frac{i_1 v_{a1}}{\epsilon \omega_a} \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$$

を得る。よって、で空洞を励振したときの S' 面上での空洞電場の応答は以下ようになる。

$$\mathbf{E}(S) = e_a \mathbf{E}_a(S) = \frac{i_1 v_{a1}}{\epsilon \omega_a} \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)} v_{a1} \mathbf{E}_{t1}$$

空洞の入力インピーダンスは

$$Z_{in} \mathbf{H}(S) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}(S)$$

で定義される。 $\mathbf{H}(S)$ と $\mathbf{E}(S)$ の表式を使って Z_{in} を計算すると、

$$Z_{in} = \frac{v_{a1}^2}{\epsilon \omega_a} \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$$

を得る。

さて、分母の v_{a1} は、空洞の S' 面上での電場を導波管の伝播モードで展開したときの係数である。数式の上で定義するのは簡単であるが、この値を直接測定するのは困難である。この係数を何らかの良い物理量と関係づけられないだろうか？そこで、S' 面上の境界条件を導波管伝播モードの波動インピーダンスの境界条件に置き換えてみよう。即ち、空洞側から見て、S' 面の先に無限長の導波管を接続した場合を考えてみよう。そのとき、空洞から S' 面を通して外部に出ていく単位時間あたりのエネルギーは

$$P_{out} = \frac{e_a^2 v_{a1}^2}{2 Z_1} \quad (\text{問：これを示せ。})$$

で与えられる。また、空洞の電磁場のエネルギーは、

$$U = \frac{\epsilon e_a^2}{2} \quad (\text{問：これも示せ。})$$

である。無損失の空洞に穴をあけて、外部に電磁場を放射させるようにしたときの空洞の Q 値を外部 Q 値と呼び、 Q_{ext} なる記号で表す。S' 面から外界への電磁場の伝播による外部 Q 値は、

$$Q_{ext} = \frac{\epsilon \omega_a Z_1}{v_{a1}^2}$$

となる。これは測定可能な良い物理量である。この外部Q値を使って、空洞の入力インピーダンスを書き換えると、

$$\frac{Z_{in}}{Z_1} = \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right) Q_{ext}}$$

を得る。左辺は、入力インピーダンスを導波管伝播モードの波動インピーダンスで正規化したものであることに注意。

この入力インピーダンスの式から、以下のことがわかる。 $\omega = \omega_a$ のときにはインピーダンスは無有限大となり、S'面は電氣的開放面となる。反対に $\omega \neq \omega_a$ のとき、即ち、励振周波数が共鳴周波数からずれているか、または空洞の共鳴周波数をずらしたとき（離調したとき）には、S'面は電氣的短絡面になる。

励振周波数を変化させたときのS'面での空洞の入力インピーダンスの振る舞いから、S'面には二通りの名前がつけられる。即ち、同調時電氣的開放面と離調時電氣的短絡面である。通常は、後者の呼び方が適切である。

問：なぜ離調時電氣的短絡面という名称のほうが適切なのか？物理的に考察せよ。また、S'面の位置を実験的に求める方法を考案せよ。

問：離調した空洞の入力インピーダンスは、

$$\left| \frac{Z_{in}}{Z_1} \right| \ll \frac{1}{Q_{ext}^2}$$

であることを示せ。

宿題：壁面損失 (Q_{wall}) を有する空洞の入力インピーダンスは次式で与えられる。これを導出せよ。

$$\frac{Z_{in}}{Z_1} = \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_{wall}}}$$

$$\omega_a' = \omega_a \left(1 - \frac{1}{2Q_{wall}} \right)$$

宿題：以下の三通りの場合について、空洞の入力インピーダンスの周波数に対する応答について調べよ。

$$Q_{ext} > Q_{wall} \quad Q_{ext} = Q_{wall} \quad Q_{ext} < Q_{wall}$$

2.6 ビームに対する応答

縦方向インピーダンス

荷電粒子ビームが空洞を通過するとき、ビームの作用に対して空洞電磁場がどのように応答するか？について考えてみよう。即ち、ビームからみた空洞のインピーダンスについて考える。

ここでは、空洞には壁面損失があり、また整合終端された導波管が接続されているものとする。これは簡単な減衰空洞の例である。2.4節の電場の展開係数に関する以下の式から出発する。

$$\begin{aligned} & \epsilon\mu \frac{d^2}{dt^2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv + k_a^2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_a dv \\ &= -\mu \frac{d}{dt} \left[\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv - \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E}_a da \right] \\ & \quad - k_a \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_a da \end{aligned}$$

ここで、話を簡単にするために、 $\mathbf{E} = e_a \mathbf{E}_a$ 、 $e_a \propto e^{j\omega t}$ を仮定し、かつ、 \mathbf{E}_a は単極型TMモードとする。この場合のインピーダンスは縦方向（軸方向）インピーダンスと呼ばれる。2. 5節と同様に壁面損失の効果を $1/Q_{wall}$ で、導波管を通して外部に電力が出ていく効果を $1/Q_{ext}$ で表すことにすると、上の式は、以下のように書ける

$$\left[j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_L} \right] e_a = -\frac{1}{\epsilon \omega_a} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_a dv$$

$$\omega_a' = \omega_a \left(1 - \frac{1}{2Q_{wall}} \right)$$

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_{wall}} + \frac{1}{Q_{ext}}$$

ここで、 Q_L は負荷Q値である。右辺のビーム電流密度 \mathbf{J} については、

$$\mathbf{J} = \frac{1}{A} J_z \hat{\mathbf{z}} \quad J_z \propto e^{j\omega t}$$

を仮定する。ここで、 A はビームの断面積、 $\hat{\mathbf{z}}$ は z 軸方向の単位ベクトルである。ここで注意すべきは、この式は定在型励振電流を表しているということである。空洞を有限の速度（例えば光速）で通過するビーム電流は、

$$J_z \propto e^{j(\omega t - kz)} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

と表すべきである。 e^{-jkz} の因子は、ビームが空洞を通過する間に電場の位相がまわってしまう効果に対応する。しかし、この効果については、定在型励振電流で導出した結果に通過時間因子を乗ずる補正によっても対応できる。よって、ここでは定在型励振電流を仮定して話を進める。右辺の積

分を評価すると、展開係数 e_a は、

$$e_a = \frac{-\frac{V_a}{\epsilon \omega_a}}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_L}} J_z$$

$$V_a \equiv \int E_{az} dz$$

となる。これより、ビーム軸上の電圧 $V_{||}$ は、

$$V_{||} = \int E_z dz = \int e_a E_{az} dz = e_a V_a$$

$$= \frac{-\frac{V_a^2}{\epsilon \omega_a}}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_L}} J_z$$

と表せる。ところで、ビームに対する空洞の縦方向インピーダンスは、

$$Z_{||} = -\frac{V_{||}}{J_z}$$

で定義される。（問：この定義について説明せよ。負号に注意）この定義式に上記結果を代入すると、

$$Z_{||} = \frac{\frac{V_a^2}{\epsilon \omega_a}}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right) + \frac{1}{Q_L}}$$

を得る。次に、空洞電磁場の蓄積エネルギー

$U = \epsilon \epsilon_a^2 / 2$ を使って、縦方向インピーダンスを以下のように書き換える。

$$Z_{||} = \frac{\frac{Q_L}{\omega_a U} \cdot \frac{V_{||}^2}{2}}{1 + jQ_L \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right)}$$

$$= \frac{\frac{V_{||}^2}{2P}}{1 + jQ_L \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} R_{sh}}{1 + jQ_L \left(\frac{\omega}{\omega_a'} - \frac{\omega_a'}{\omega} \right)}$$

$$R_{sh} \equiv \frac{V_{||}^2}{P}$$

ここで、 R_{sh} はシャント抵抗値と呼ばれ、空洞の特性を表す重要な変数のひとつである。

さて、先にも述べたように、このインピーダンスは定在型励振電流に対するものである。有限の時間で空洞を通過するビーム電流に対するインピーダンスを得るには、シャント抵抗値の定義を以下のように補正すればよい。

$$R_{sh} \equiv \frac{|V_{||}|^2}{P}$$

$$V_{||} = \int e^{jkz} E_z dz$$

即ち、軸上電場を積分した電圧を、位相のまわりを勘定に入れた実効電圧に置き換える。また、先に出てきた通過時間因子は以下の式で定義される。

$$T \equiv \frac{\left| \int e^{jkz} E_z dz \right|}{\int E_z dz}$$

横方向インピーダンス

ビームが空洞中心軸をはずれて通過した場合、ビームと双極型モードの間に相互作用が生じる。ビームの軸からのずれは、横方向に分極した電気双極子模型で表せる。双極子型電流の作用に対する空洞電磁場の応答を横方向インピーダンスと呼ぶ。横方向インピーダンスの導出についても、基本的な考え方はここで述べた縦方向のそれと同じである。ただし、導出の過程で、Panofski-Wenzelの定理と呼ばれるビームが電磁場から受ける横方向と縦方向の力の間に成立する関係式を使う。この定理は、2.3節で述べた電磁場の縦方向と横方向成分の関係式から導かれる。

以上、高次モード減衰空洞を理解するために必要な最小限の物理について説明をしてきた。実際の空洞では、高次の共鳴モードは互いに隣接している場合があり、話は単純ではない。しかし、電磁場は重ね合わせの原理が成り立つので、共鳴モードが一つの場合について理解していれば、基本的には十分であると筆者は考える。

第3章 外部Q値の計算

3.1 序

高次モード減衰空洞とは、導波管を通して加速空洞体積中の高次モードの電磁場エネルギーを取り出せるように工夫したものである。しかし、高周波構造的には、導波管付き空洞にすぎない。ただし、導波管と空洞の結合が強いのが特徴である。即ち、空洞から導波管への外部Q値が小さいということである。高次モード減衰空洞の設計では、空洞の導波管への外部Q値をいかに計算するかということが重要である。

従来の加速空洞は、高い加速効率に重点をおいて設計されてきた。即ち、電磁場エネルギーをできるだけ空洞に閉じこめるような構造になっている。また、加速するビーム電流値も小さいので、高周波電力供給用入力結合器の外部Q値も空洞固有のQ値（ $\sim 10^4$ ）のオーダーである。よって、外界から閉ざされた空洞体積中の共鳴モードについて計算するだけで十分事足りた。

少し脇道にそれて、加速空洞に電力を供給する高周波源クライストロンの出力空洞について少し考えてみよう。クライストロンとは、大電流の直流電子ビームに輸入空洞で速度変調を与え、それによってバンチしたビームを出力空洞に通し、高周波電力を取り出す真空管である。出力空洞に大電流ビームが持ち込む電力を導波管を通して外部に効率的に送り出すには、出力空洞の外部Q値がある程度小さな値にする必要がある。

問：なぜ外部Q値を小さくするのか？簡単に説明せよ。

よって、クライストロンの出力空洞を基本モード減衰空洞と呼んでもいいだろう。即ち、高次モード減衰空洞の親戚である。さらに、基本モード（ TM_{010} ）は他のモードから周波数的に十分離れているので、先の章で述べた導波管付き空洞の電磁場理論を応用するには最適の高周波構造である。

この章では、クライストロンの出力空洞を例にとって、外部Q値の計算法について述べる。外部Q値の計算法としては、以下の二通りの方法が挙

げられる。

方法1：周波数領域での方法。空洞と可動短絡板で蓋をした導波管から構成される二空洞系の共鳴周波数を計算する。共鳴周波数の短絡板位置に対する応答から、外部Q値を求める。

方法2：時間領域での方法。導波管付き空洞において、電磁場モードの減衰の様子を時間的に追跡する。

方法1は、Slaterの同調曲線法と呼ばれる。方法2は最も直接的な方法である。この講義では、Slaterの電磁場理論の具体的応用を紹介する目的で、方法1について述べる。方法2については、高次モード減衰空洞の具体例のところで述べる。

3.2 同調曲線法

図3-1に、ここで取り扱うクライストロン出力空洞の形状を示す。このクライストロンはSL4という名称で、Xバンド高周波源として1988年頃に米国で開発されたものである。この出力空洞の外部Q値について、等価回路モデルによる計算方法がある文献に載っていた。その文献で、彼らが出した外部Q値の計算値は28、測定値は20であった。この文献を読んだとき、たまたま筆者はSlaterが導出した導波管付き空洞の電磁場理論と3次元電磁場計算プログラムMAFIAを組み合わせ、空洞の外部Q値を計算したいと考えていた。この文献には、出力空洞の図面と外部Q値の実験値が両方そろっていた。これ幸いと、その出力空洞の形状（図3-2）を入力し、MAFIAの計算結果からSlaterの理論を使って外部Q値を求めてみたのである。このころは、この計算法を使って高次モード減衰空洞の設計をやることになるとは想像もしていなかった。

図3-3に、同調曲線法の原理図を示す。導波管付き空洞において実数の固有値問題を扱うためには、導波管の端の境界条件として電氣的に短絡か開放かの二種類しか許されない。計算の世界では、両方の境界条件が容易に設定可能であるが、現実の測定では、電氣的短絡の境界条件を設定するほうが簡単である。空洞と導波管の仮想的境界を離調時電氣的短絡面（ S' 面）に設定する。（問：なぜ S' 面にするのか？）導波管の端の短絡板は可動とし、 S' 面から可動短絡板までの距離を d とする。空洞と閉鎖された導波管から構

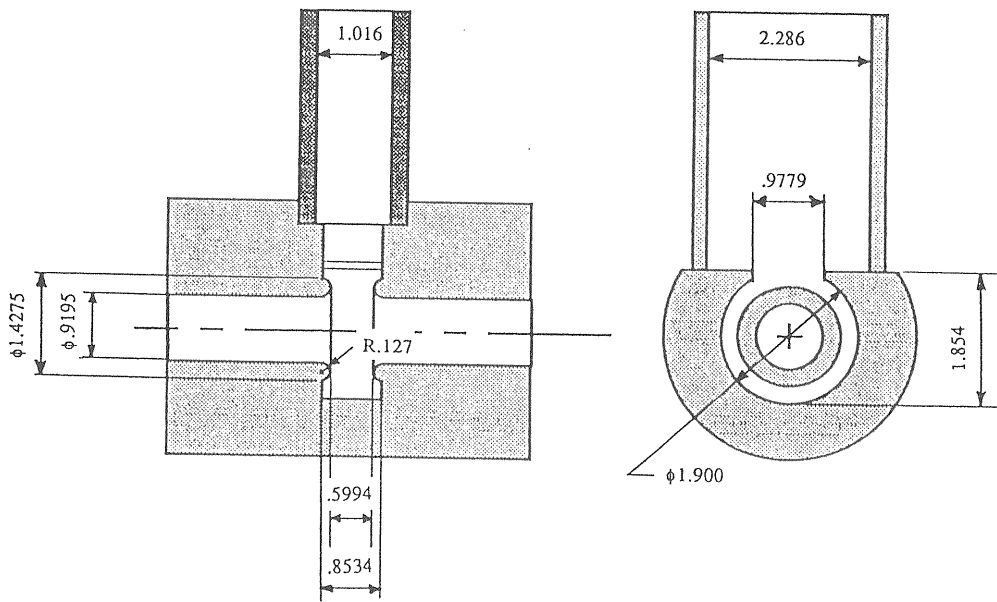


図3-1 クライストロン (SL4) 出力空洞 (寸法単位 cm)

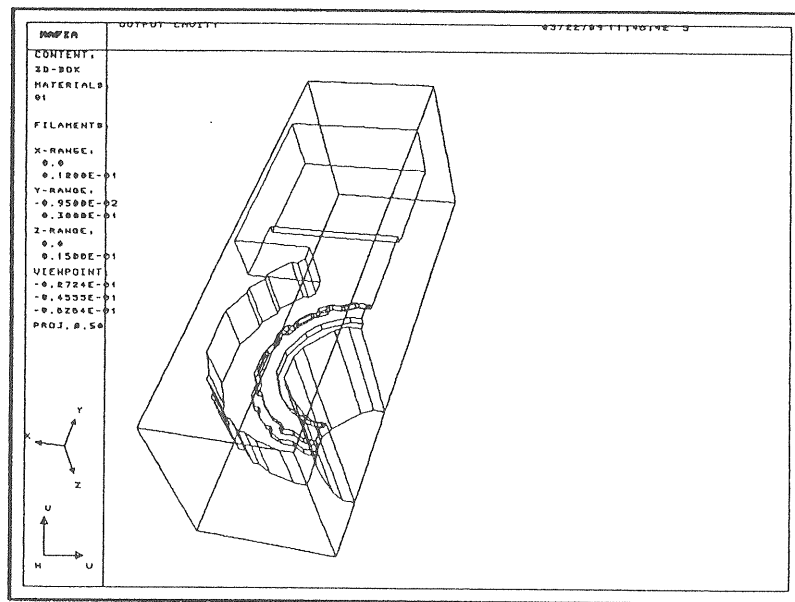


図3-2 MAFIA入力形状。空洞の対称性から全体の1/4形状について計算すればよい。

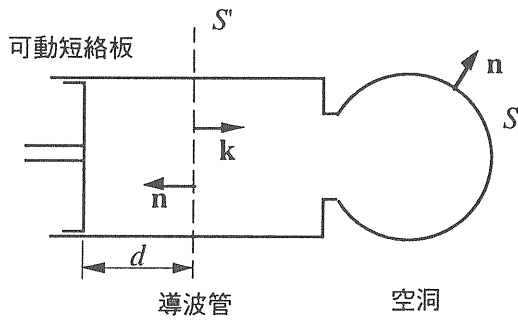


図3-3 同調曲線法の原理図

成される二空洞系の共鳴条件について考えよう。共鳴モードとは定在波のことであるから、この閉空間に定在波が存在するための条件を求めればよい。ここで、 S' 面での空洞の入力インピーダンス Z_{in} と、 S' 面から外側、即ち、可動短絡板の方向を見たときのインピーダンス Z_{out} について考える。定在波が存在するための必要条件は、

$$Z_{in} = -Z_{out}$$

で与えられる。(問：この条件について物理的に説明せよ。) それぞれのインピーダンスは、

$$Z_{in} = Z_1 \frac{1}{j \left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega} \right)}$$

$$Z_{out} = jZ_1 \tan \frac{2\pi d}{\lambda_g}$$

であるから、共鳴条件は以下の式で与えられる。

$$\tan \frac{2\pi d}{\lambda_g} = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega}}$$

ここで、 λ_g は ω に対応する管内波長であることに注意。この式を距離 d について解くと、

$$d = \frac{\lambda_g}{2\pi} \tan^{-1} \frac{Q_{ext}}{\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega}} + \frac{1}{2} n \lambda_g \quad (n = \text{integer})$$

を得る。

図3-4に、上記関係式をみたす曲線群を示す。これらの曲線群を同調曲線と呼ぶ。図中、点線は空洞と導波管の間に結合がないとき

($Q_{ext} = \infty$) の同調曲線を示す。縦軸に平行な点線は空洞の共鳴モードで、可動短絡板の位置に周波数が依存しないことを示している。斜めの点線は、 S' 面と可動短絡板の間が半波長×整数倍の共鳴器になっていることを示している。空洞と導波管の間に結合が生じた場合の同調曲線が実線で示されている。ここで、垂直と斜めの点線の交点、即ち空洞と導波管の周波数が一致する点のところ曲線が互いに反発していることに注意して頂きたい。この反発の度合いは、結合が強くなるほど (Q_{ext} が小さくなるほど) 大きくなる。逆に考えると、同調曲線の反発の様子、即ち点線の交点付近での同調曲線の形から外部Q値を求めるこ

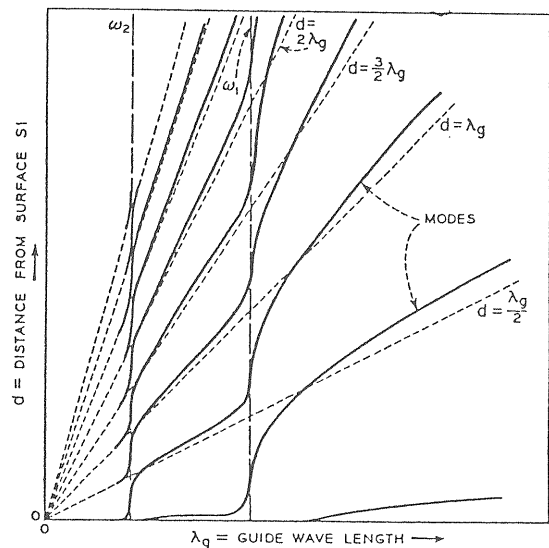


図3-4 同調曲線 (空洞の共鳴モードが二つの場合)

とができる。

問：同調曲線（点線）が交差するとはどういうことか？

問：同調曲線（実線）が反発するとはどういうことか？

今度は、垂直な点線上の交点と交点の間あたりでの同調曲線（実線）の振る舞いについて調べてみよう。この付近では、共鳴周波数の可動短絡板位置に対する応答が鈍くなっている。これは導波管側の共鳴周波数が空洞のそれから大きく外れて、導波管内の電磁場強度が小さいことを示している。空洞と導波管の結合度が大きくなると、そこでの曲線の傾き $dd/d\lambda_g$ は緩やかになる。曲線の傾きと外部Q値の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{dd}{d\lambda_g} &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2} \frac{Q_{ext}}{\pi} \frac{d \ln \omega}{d \ln \lambda_g} \\ &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{Q_{ext}}{\pi} \frac{v_g}{v_p} \end{aligned}$$

ここで、 v_p 、 v_g は、位相速度、群速度である。
（問：この関係式を導出せよ。）

図3-1の出力空洞について、MAFIAを使って計算した結果得られた同調曲線を図3-5に示す。図中、垂直な点線が出力空洞の基本モード（TM010）、2本の斜めの点線が導波管の共鳴モードである。曲線が反発しているところ（A点とB点）、および共鳴周波数の可動短絡板位置に対する応答が最も鈍いところ（C点）について、そのときの電磁場分布を図3-6から図3-8に示す。A点とB点の場合には、空洞と導波管のそれぞれの電磁場の強度は同程度である。ただし、空洞の電磁場と導波管のそれとの位相関係が違ふことに注意。C点の場合には、導波管側の電磁場強度は空洞のそれに比べて小さい。

図3-5の同調曲線のC点とD点の付近を拡大したものを図3-9に示す。直線であてはめをし

て求めた微分係数 $dd/d\lambda_g$ は、C点で5.8、D点で6.1であった。これから外部Q値を計算すると、それぞれ24と23を与える。クライストロンSL4の文献によると、出力空洞の外部Q値の測定値は20と報告されていた。計算誤差、および低いQ値を測定するときの誤差等を考えると、まずまずの結果であろう。

高次モード外部Q値の計算に同調曲線法を応用する場合、問題となるのは他の高次モードが近くにある場合の取り扱いである。隣接の具合にもよるが、空洞の入力インピーダンスについて、S'面での個々のモードの応答の重ね合わせの近似が成り立つ範囲であれば、同調曲線法は十分適用可能である。

問：複数の共鳴モードが隣接している場合、離調時短絡面（S'面）をどのように設定すべきか？

問：複数の共鳴モードが隣接している場合、同調曲線を与える式を導出せよ。

Tuning Curve of the SL4 output cavity

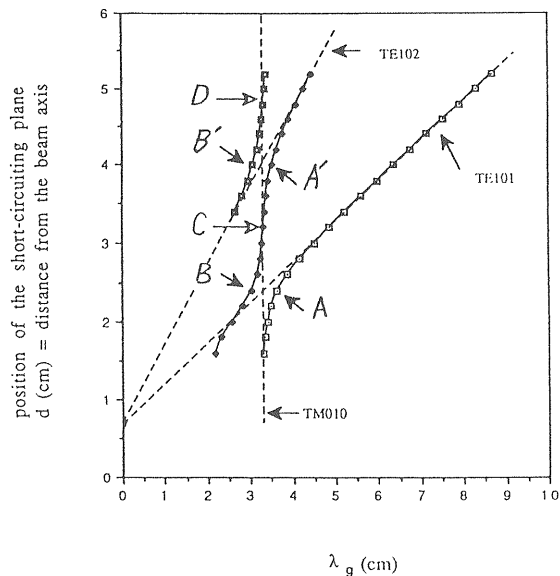


図3-5 クライストロン（SL4）出力空洞の同調曲線（計算結果）

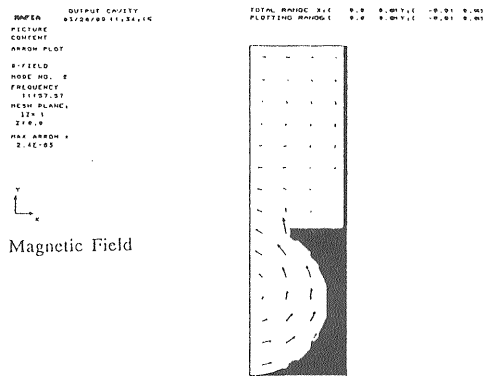
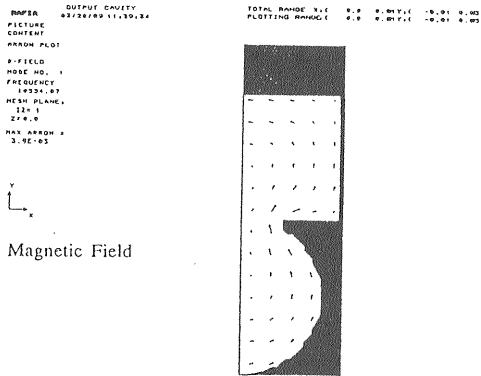
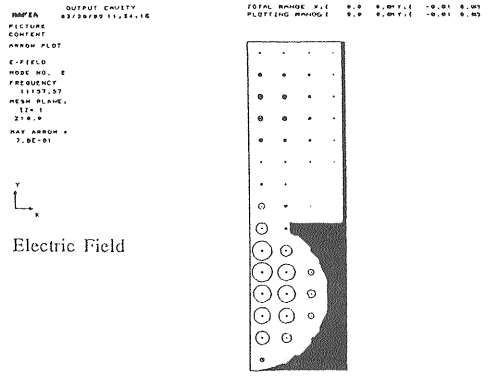
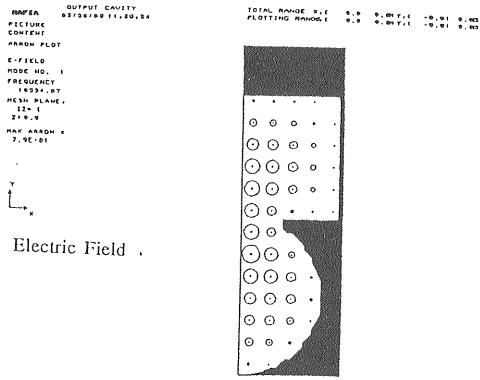


図 3-6 電磁場分布 (図 3-5 A点)

図 3-8 電磁場分布 (図 3-5 C点)

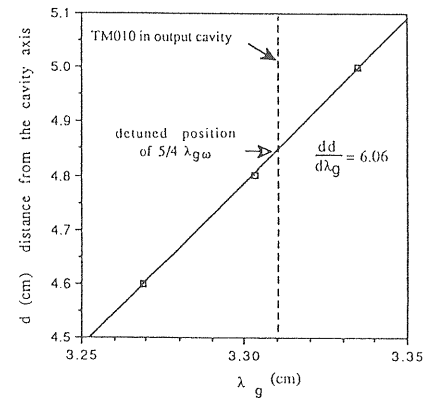
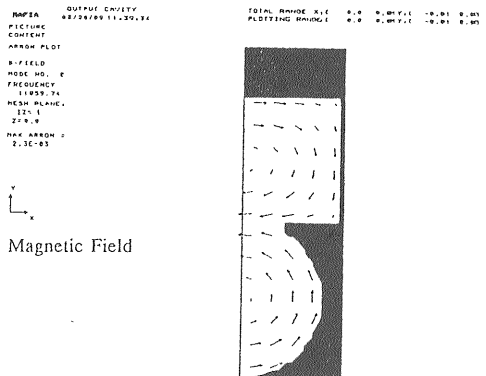
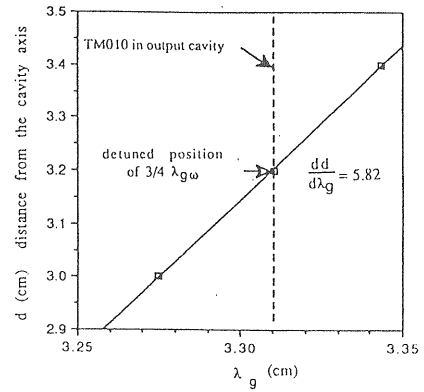
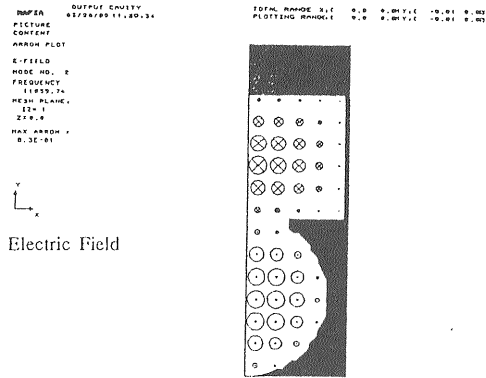


図 3-7 電磁場分布 (図 3-5 B点)

図 3-9 C点とD点(図 3-5 参照)付近の同調曲線の拡大図

3.3 同調曲線法の応用

同調曲線法は、通常の空洞設計においても有用である。ここでは、その一例を紹介する。

円筒空洞側面に周波数同調器を取り付ける場合を考える。(図3-10参照) 同調器ポート部には、同調棒によって同軸導波管が形成される。その同軸導波管のTEMモードと円筒空洞の加速モード(TM010)との結合について同調曲線法を使って解析する。

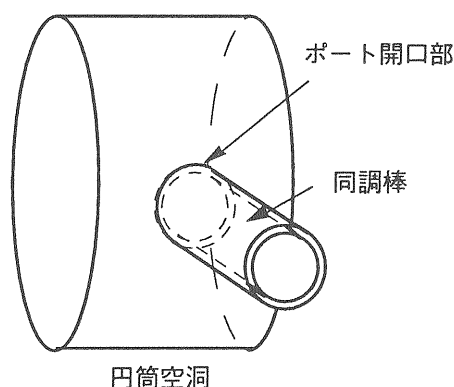


図3-10 空洞と周波数同調器

下記の3つの場合を考える。

- 1) 円筒空洞を軸方向に二分する面を基準として、全体構造が鏡面対称になるように同調器を取り付けた場合。
- 2) 同調棒が上記1)の鏡面対称性を破るように傾いて、その先端部がポート開口部のふちに接触した場合。
- 3) 上記2)と同じように同調棒が傾いて鏡面対称性が破れているが、同調棒先端部がポート開口部のふちに接触していない場合。

それぞれの場合について、3次元メッシュ形状を図3-11に示す。円筒空洞は、内径460ミリ、長さ240ミリで、TM010モードの周波数は約500MHzである。同調器構造については、ポート内径140ミリ、同調棒外径80ミリとした。実際の空洞の場合、ポート内径と同調棒外径の差は数ミリ程度である。同調器の取り付け精度によっては、先端部がポートのふちに接触す

る場合もある。2)と3)の場合については、同調棒の傾きによる非対称性を、メッシュ形状としてどのように表現するかが問題である。ここでは、図3-11に示してあるように、同調棒先端部に突起をつけることによって形状の非対称性を表現することにする。

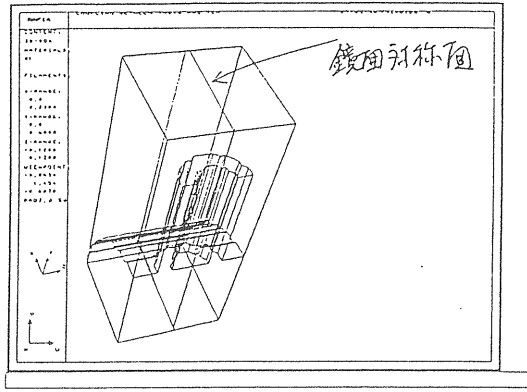
図3-12に、それぞれの場合についての同調曲線を示す。空洞内壁ポート開口部から同軸管終端の電気的短絡面までの距離 d をグラフの縦軸に、共鳴周波数をTEM波の波長に換算したものを横軸にとってある。

まず、1)の場合、形状の対称性から、同軸導波管のTEMモードと円筒空洞のTM010モードは電磁氣的に結合し得ない。グラフ中、波長60cm(周波数500MHz)で縦軸に平行な直線が加速モードである。傾き $1/4$ の直線が同軸管のTEMモードに対応している。TEMモードの直線の傾きが $1/4$ であることは、 $1/4$ 波長共鳴器となっていることを示している。

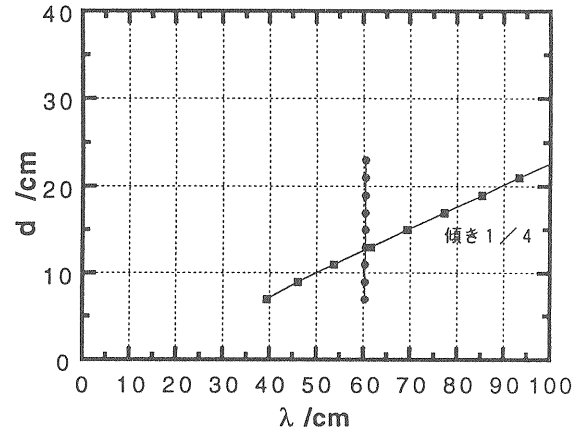
次に、2)の場合、同軸管TEMモードの直線の傾きが $1/2$ になっており、同軸管が半波長共鳴器になっていることを示している。一方、円筒空洞と同軸空洞の共鳴周波数が一致するところ($d=20$ cm)では、同調曲線が反発している。即ち、同調棒先端部がポート開口部のふちに接触したために、加速モードとTEMモードの間に結合が生じたことを示している。

最後に、3)の場合について見てみよう。この場合の同調曲線の様子は、1)の場合に似ており、同軸管部は $1/4$ 波長共鳴器になっている。グラフではわかりづらいが、 $d=11$ cmあたりで曲線がわずかに反発している。つまり、同調棒が傾いただけで、加速モードとTEMモードが結合する。しかし、その度合いは2)の場合にくらべると小さい。

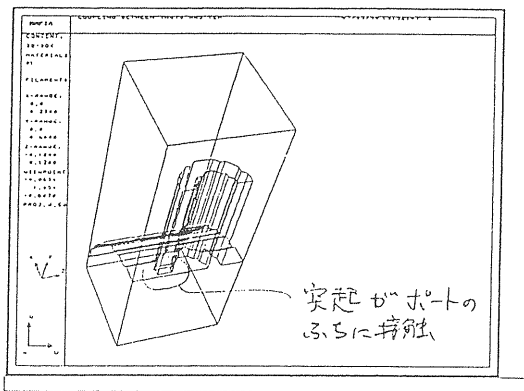
以上の結果をまとめると、同調棒が傾いて対称性が破れた場合、加速モードによって同調器同軸管部にTEMモードが励振される。これを防止するには、加速モード周波数から同軸管を離調するように同調器終端部の構造を設計すればよい。しかし、同調棒先端部とポート開口部のふちとの接触の有無によって、同軸管が半波長共鳴器になるか、 $1/4$ 波長共鳴器のどちらになるか、様子が変わってしまうので注意を要する。



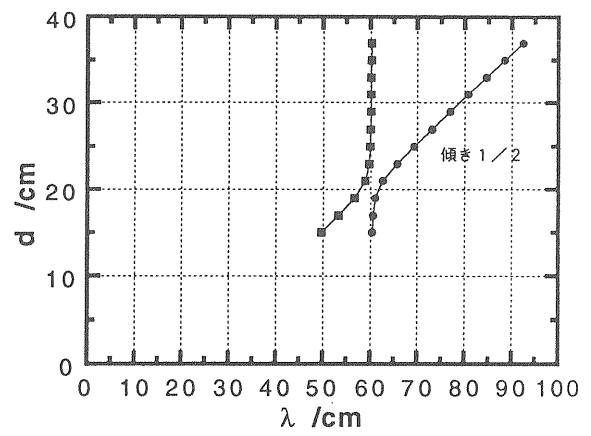
1) の場合



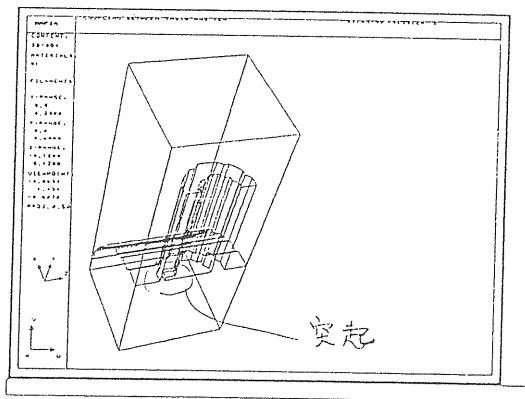
1) の場合



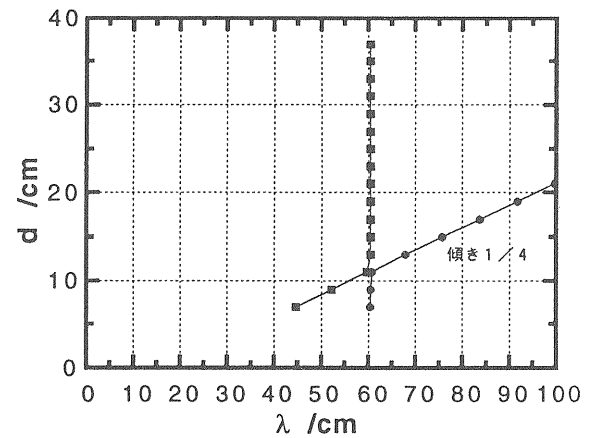
2) の場合



2) の場合



3) の場合



3) の場合

図3-11
同調器同軸構造と空洞。MAFIAメッシュ形状

図3-12
同調器同軸構造と空洞の結合に関する同調曲線

電磁場分布、および加速モードの電磁場分布を考慮して慎重に決める必要がある。

第4章 減衰型空洞の実例

4.1 序

高次モード減衰型空洞は、先にも述べたように、基本的には導波管付き空洞に過ぎない。設計の要点は、どのような種類の導波管を、加速空洞のどこに取り付けるか？ である。

まず、導波管について考えよう。第2章で述べたように、導波管は大きく二つの種類に分けられる。ひとつは、円形導波管や矩形導波管のような中空の金属管型のもの。もう一方は、同軸導波管のように二つの導体から構成されるものである。この二種類の導波管の大きな違いは、遮断周波数の有無である。前者の導波管は、遮断周波数以上でない電磁場は伝播しない。後者は、遮断周波数が0であるので任意の周波数の電磁場が伝播できる。どちらのタイプの導波管にするか？ まず、これで大きく設計思想が違ってくる。中空金属管型の導波管を使う場合には、その遮断周波数を加速モードのそれより高くしておけば、加速モードを空洞に閉じこめることができる。二導体型導波管を使った場合、加速モードを閉じこめるには何らかの別の方法が必要である。その方法とは、加速モード周波数の波の伝播を阻止するような濾波器（フィルター）を導波管の途中に設けることである。

次に、空洞のどこに導波管を接続するか？ という問題について考える。その前に、普通の加速空洞に接続されている導波管の類について復習しよう。まず、加速用高周波電力を空洞に給電するための導波管が当然接続されている。しかし、給電用導波管への外部Q値を勝手に下げわけにはいかない。また、給電用導波管に結合するためには、入力結合器のところでの電磁場の様子が加速モードのそれに似ていなければならない。よって、給電用導波管を高次モード引き出しに流用するのはまず無理である。このような理由で、高次モード専用の導波管があらたに必要とある。導波管を取り付ける場所は、対象となる高次モードの

待て！何か忘れていないだろうか？ 加速空洞にはあと2本の導波管がつながっているではないか！それはビーム管、即ち、円形導波管である。ビーム管は、給電用導波管に比べて、形状、内径等について設計の自由度があり、工夫次第でりっぱな高次モード引き出し用導波管として使えそうである。ただし、遮断周波数がある程度下げることがあるので、内径を大きくしなければならない。そのため加速空洞への開口部の径が大きくなってしまふ。開口部を大きくすると、加速モードのR/Q値（ビーム軸上加速電圧二乗と全電磁場エネルギーの比）は小さくなり、加速効率の低下は避けられない。よって、設計上どこかで妥協しなければならないが、あらたに導波管を取り付ける必要がない点が魅力的である。

問：ビーム管から高次モードを引き出す方法は超伝導空洞の方に適している。なぜか？

問：円筒空洞の両端に円形ビーム管を取り付けた。空洞の単極型モードはビーム管のどの伝播モードに結合するか？最も遮断周波数の低いものを挙げよ。また、双極型モードの場合はどうか？

この章では、高次モード減衰型空洞の具体例について紹介する。現在、世界中の加速器研究機関でいろいろな高次モード減衰型空洞の開発が進められている。そのすべてを紹介することはとてもできない。ここでは、本所で考案された減衰型空洞のうち、二例の紹介にとどめる。最初は、ビーム管の形状を工夫して、加速効率を低下させることなく双極モードを減衰させる構造（溝付きビーム管方式）について、次に濾波器つき同軸導波管を使用する構造（チョークモード空洞）について紹介する。

4.2 溝付きビーム管式減衰空洞

なんとも変わった名称の空洞であるが、筆者の命名であるので御了承願いたい。図4-1、図4-2に、溝付きビーム管と、それを取り付けた減衰空洞の形状をそれぞれ示す。溝付きビーム管は、円管内面の水平垂直方向4カ所に溝をつけた構造をしている。このへんてこな構造は、マグネトロン陽極の形状をながめているときに思いついたものである。4本の溝をつけたことによる御利益は何か？についてまず説明しよう。

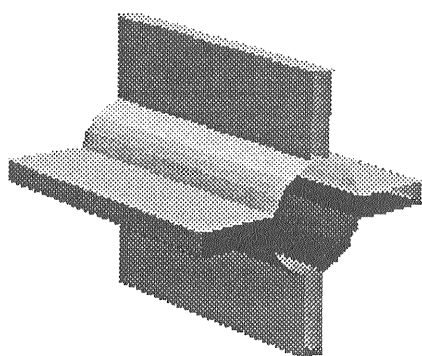


図4-1 溝付きビーム管

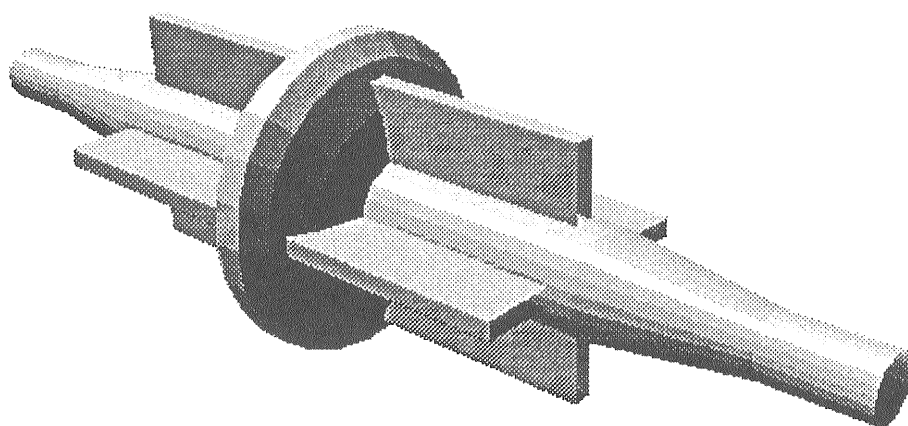


図4-2 溝付きビーム管式減衰空洞

基本原理

円筒空洞の双極モードは円形ビーム管TE11波に結合する。加速モード(TM010)の周波数が500MHzの場合、ビームに有害な双極モードで周波数が最も低いのはTM110モードで、800MHzあたりにある。そのTM110モードをビーム管から引き出すためには、TE11波の遮断周波数を800MHz以下に下げなければならない。即ち、ビーム管内径を22cm以上にする必要がある。空洞の内径は45cm程度であるから、約半分である。常伝導空洞(500MHz)の場合、直径22cmの開口部というのは加速効率が下がりすぎて現実的ではないだろう。

それでは、円形ビーム管にこだわらなければどうか？幾何学的に見ると、円形導波管TE11波の電磁場分布は矩形導波管TE10波のそれとよく似ている。TE10波の遮断周波数は、矩形導波管の幅だけで決まり、高さにはよらない。よって、電場が垂直方向に偏極しているTE11波の場合、その遮断周波数は円管の水平方向の幅だけで決まると推測できる。円管の水平方向の幅を拡げるには、左右両側2カ所に深い溝を掘ればよい。双極モードの場合、水平方向に偏極しているモードもあるから、上下にも溝を掘らなければならない。ゆえに、図4-1のような形状になる。

溝付きビーム管のTE11波遮断周波数について、三次元電磁場計算プログラムMAFIAで計算した結果を図4-3に示す。このグラフは、ビーム管の内径=10cm、溝の幅=2cmで、溝の深さを0cmから11cmまで変えていった場合の遮断周波数の変化を示している。わずか2cmの幅ではあるが、溝が遮断周波数を下げるのに非常に効果的であることがわかる。グラフより、空洞のTM110モードを引き出すには、溝の深さを約8cm以上にすればよいことがわかる。

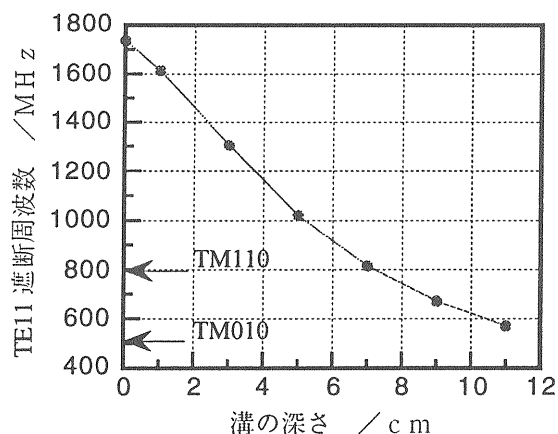


図4-3 溝付きビーム管のTE11モードの遮断周波数

TM110モードの外部Q値

次に、TM110モードの溝付きビーム管への外部Q値を計算してみよう。ここでは、溝の深さが11cmのビーム管を空洞両端に取り付けた場合を想定する。ビーム管のTE11波に対する遮断周波数は570MHzであり、加速モードの周波数500MHzより上である。ビーム管の空洞への開口部には、結合度を調整するための誘導性シャッターが設けられている。(図4-4参照) シャッターの形状は図に示されている寸法SLで決まる。SLが0cmときは、開口部形状は直径10cmの円である。SLが11cmのときは、溝付きビーム管の断面そのものである。

図4-5に、溝付きビーム管式減衰空洞の入力形状(MAFIAメッシュ形状)を示す。構造の対称性から全体形状の8分の1を入力すればよい。(問: TE11波の電場が垂直方向に偏極し

ている場合、それぞれの対称面の電氣的境界条件を述べよ。) ビーム管終端の境界条件は電氣的短絡であることに注意。

共鳴周波数のビーム管の長さに対する応答(計算結果)を図4-6に示す。上から順番に、SL=0、3、5、そして9cmのときの同調曲線である。誘導性シャッターを拡げていくにつれ空洞とビーム管の結合度が大きくなっていく様子が明確にわかる。これらの同調曲線を先の章で述べた方法で解析すれば、TM110モードの外部Q値が得られる。図4-7に、TM110の外部Q値のシャッター変数SLに対する応答を示す。SL=0cmでは外部Q値は2000程度、シャッターを拡げるとQ値は10近くまで急速に低下するが、SLが7cm以上では下げ止まりとなっている。

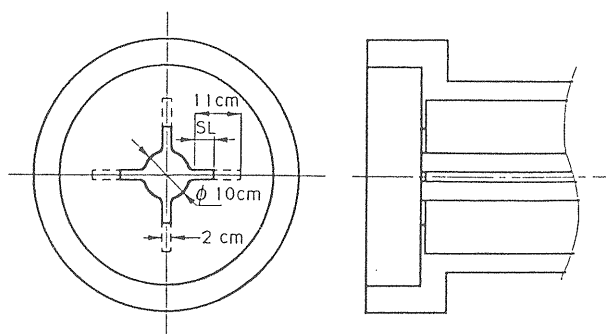


図4-4 ビーム開口部形状

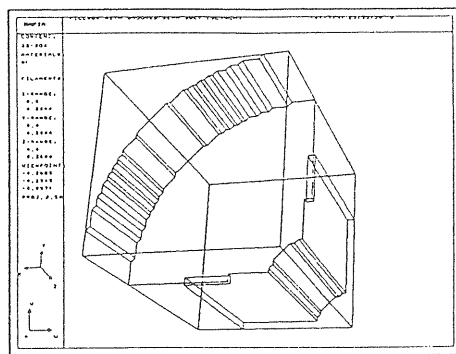


図4-5 MAFIAメッシュ形状

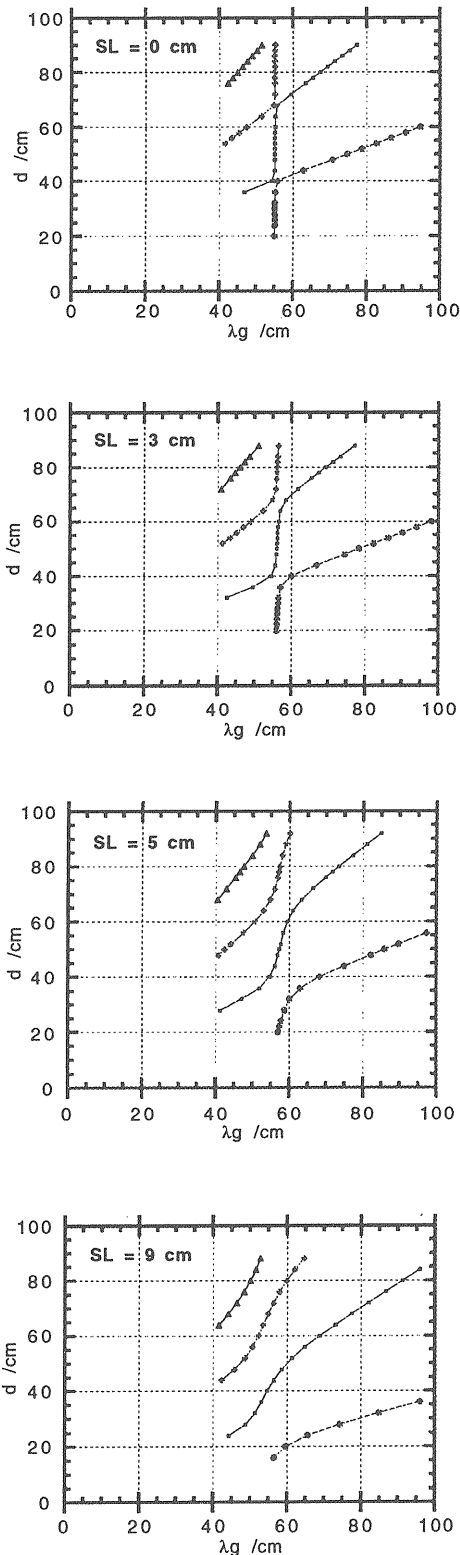


図 4-6

TM110モードと溝付きビーム管TE11波との結合を示す同調曲線。

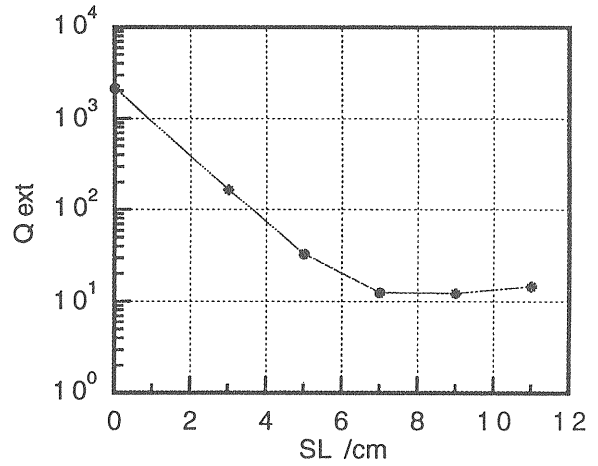


図 4-7

TM110モードの外部Q値の開口部寸法SLに対する応答。

加速モードへの影響

次に、溝付きビーム管の加速モードへの影響を調べてみよう。溝付きビーム管のTM01波の遮断周波数は、溝なしのときとほぼ同じである。

(問：理由を説明せよ。) また、電磁場の対称性から、加速モードはビーム管のTE11波とは結合しない。(問：理由を説明せよ。) ゆえに、加速モードの溝付きビーム管への外部Q値は無限大と考えてよい。あと問題となるのは、開口部の加速モードへの影響である。

シャッター変数SL=3、5、7 cmのそれぞれの場合について、加速モードのQ値、R/Q値をMAFIAで計算した。その結果を表4-1に示す。表中、一番下の欄は、溝なし円形ビーム管を空洞に取り付けた場合の計算値である。これによると、溝付きビーム管は加速モードに対してほとんど影響がないことがわかる。

表 4-1

溝付きビーム管の加速モードへの影響

SL/cm	f/MHz	Q/10 ⁴	R/MΩ	R/Q/Ω
3	503.1	4.27	7.93	186
5	503.2	4.28	7.98	186
7	503.2	4.29	7.98	186
円管	502.7	4.26	7.97	187

R：シャフト抵抗値

まとめ

溝付きビーム管式減衰空洞は、電磁場モードの幾何学的対称性をうまく利用した例である。この方式は、双極型モードに対しては非常に大きな効果がある反面、単極型モードにはまったく影響を与えない。よって、低い周波数の単極型モード (TM₀₁₁) を引き出すには、ビーム管本体の内径を広げるか、またはそのモードだけを狙った減衰用結合器 (高次モード用アンテナ) を取り付ける必要がある。超伝導空洞の場合は、前者の方法が適当である。常伝導空洞の場合は、高い加速効率も同時に欲しいのであれば、後者の方法が合理的であろう。

1990年10月、KEKでBファクトリーの国際ワークショップが開催された。そのとき、溝付きビーム管方式を紹介したところ、コーネル大学のB加速器関係者が非常に強い関心を示した。そして、最終的に彼らのBファクトリー用超伝導空洞のビーム管構造として採用された。(図4-7参照)

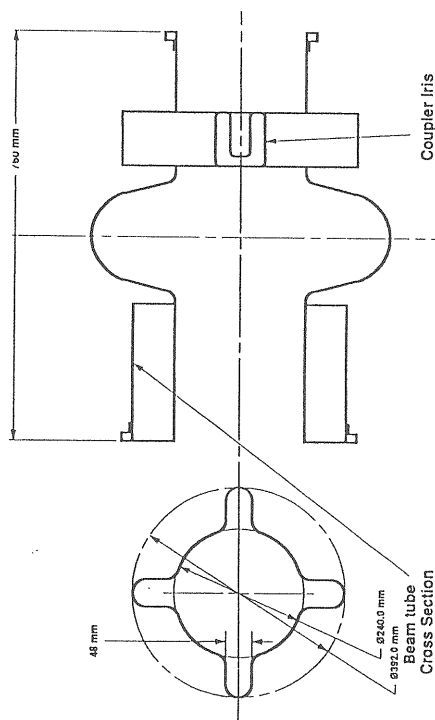


図4-7

溝付きビーム管構造を使ったCESR-B (コーネル大学Bファクトリー) 超伝導空洞

4.3 チョークモード空洞

またまた、変わった名前の空洞である。名前の由来については、考案者の新竹さん (本所加速器研究部) に問い合わせて頂きたい。この構造は、当初、リニアコライダー用の高次モード減衰構造として考案されたものである。そして、現在本所において開発が進められているKEKB用常伝導加速空洞はチョークモード空洞の一変種である。

基本原理

図4-8に、チョークモード空洞の原理図を示す。この構造では、空洞に励振される高次モードは2枚の金属円盤の間を伝播する波に結合する。2枚の円盤で構成される電送線路は円盤状線路 (radial line) と呼ばれ、そこを伝播する波は円筒波 (radial wave) と呼ばれる。

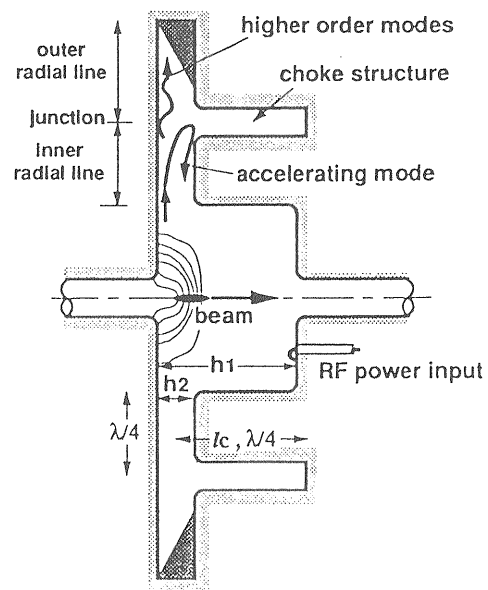


図4-8 チョークモード空洞の原理図

先にも述べたように、二つの導体で構成される電送線路には遮断周波数が0である伝播モードがある。そして、加速モードが結合する円筒波の遮断周波数は0である。よって、加速モードを空洞に閉じこめるには、円盤状線路の途中に加速周波数の円筒波の伝播を阻止する濾波（フィルター）構造が必要となる。図中、チョーク構造とあるのが濾波構造のことである。この濾波構造は端が電氣的に短絡された同軸線路で、その有効線路長は加速周波数の1/4波長になっている。

問：この濾波構造の原理を説明せよ。

チョークモード空洞は軸対称性である。軸対称構造の利点はたくさんある。そのうちのいくつかを列挙すると：

- 1) 加速モードの壁面電流の集中がないので、局所的発熱がない。ゆえに、大きな電力投入に対しても安定に動作する。これは、連続波運転用空洞では重要なことである。
- 2) 主たる空洞部品は旋盤で加工できるので、寸法精度がよい。

3) 電磁場解析、熱構造解析が二次元の計算プログラムだけで行える。通常、二次元のほうが三次元より計算精度が高い。

K E K B用チョークモード空洞

図4-9に、現在本所で開発が進められているK E K B用チョークモード空洞の構造を示す。図4-8の空洞と比べてみると、導波管が円盤状線路から同軸線路に、濾波構造が同軸線路から円盤状線路にと入れ替わっている。

このタイプのチョークモード空洞では、単極型モードは同軸線路のT E M波に、双極型モードはT E 1 1波に結合する。加速周波数のT E M波の伝播は濾波構造で阻止される。一方、濾波構造を通過した電磁波は、同軸線路終端部から挿入された砲弾型SiCセラミックス（16本/空洞）に吸収される。

このような構造にしたのは、空洞全体の外径を出来るだけ小さくするためである。（B用空洞の加速モード周波数は500MHz、空洞内径=約450ミリ）また、導波管内の電磁波を出来るだけ拡散させないようにして、高周波吸収体の全体积を減らすためでもある。

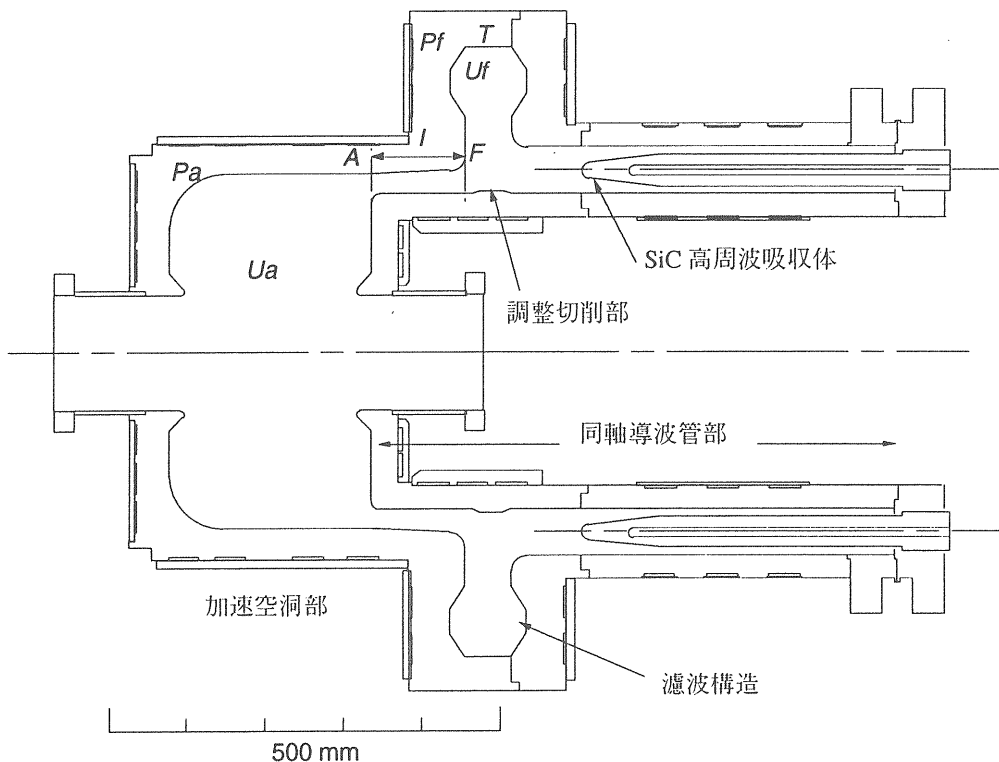


図4-9 K E K Bチョークモード型空洞

濾波特性

図4-10に、濾波構造のTEM波透過特性（Sパラメータ、 S_{21} ）を示す。第1阻止帯の中心は当然加速周波数に合わせなければならない。濾波構造の周波数微調整は、同軸内筒部の一部をあらかじめ盛り上げておき、そこを精密加工することによって行う（図4-9調整切削部）。第2阻止帯は1.67GHzあたりである。濾波構造の円盤状線路終端部がこぶのようにふくれているのは、第2阻止帯の周波数をできるだけ高くするためである。単純な円盤状線路の場合、第2阻止帯は1.39GHzあたりになってしまう。

双極型モードが結合するTE11波に対する第1、および第2阻止帯周波数は、それぞれ0.53GHz、1.68GHzで、TEM波の場合に比べて少し高い。

また、第2阻止帯によって高次モードが空洞に閉じこめられることがあってはならない。これを防ぐために、ビーム管開口部の径を145ミリに広げて、ビーム管を伝播するTM01波、およびTE11波の遮断周波数を第2阻止帯の下にもってきた。（図4-10参照）

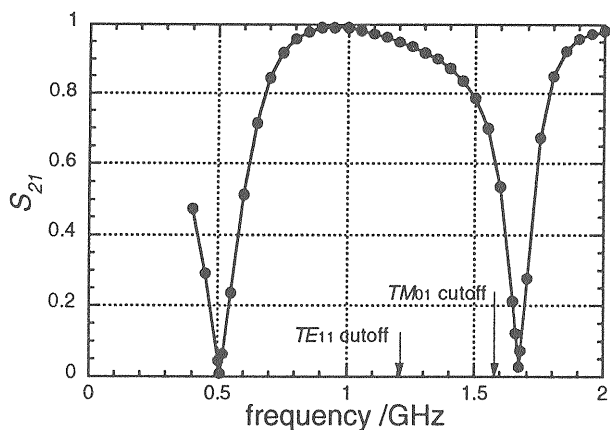


図4-10

濾波構造（ノッチフィルタ）のTEM波透過特性（S行列の S_{21} ）。HFSS（High Frequency Structure Simulator）の計算結果。

濾波構造の位置

濾波構造の同軸線路上での位置は、濾波特性だけの観点からすると任意である。しかし、濾波構造の位置決定は、KEKB用チョークモード空洞の設計で最も難しかったところである。設計のために何度となく電磁場計算を繰り返した結果、濾波構造の位置は、加速モード特性と高次モードの減衰効率の両方に大きな影響を与えることが判明した。

加速モードへの影響

導波管開口部（図4-9中A）から濾波構造の位置（図中F）までの距離を l で定義する。加速モードの高周波特性は、濾波構造と空洞本体（A面より左側部分）との電磁場分布に大きく依存すると考えられる。濾波構造中の壁面損失を P_f 、空洞本体のそれを P_a とする。図4-11に、距離 l に対する P_f/P_a とシャント抵抗値それぞれの応答を示す。開口部Aから濾波構造端部Tまでの電気長が加速周波数の $1/2$ 波長に等しい場合、端部Tでの電氣的短絡境界条件が開口部Aに写像され、そのとき P_f/P_a は最小となる（ $l = 110$ mm）。しかし、加速効率の観点からすると、濾波構造は開口部に近いほどよいことがわかる。

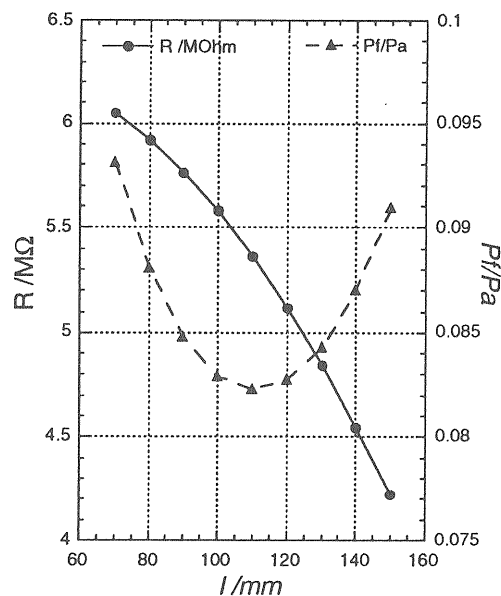


図4-11

P_f/P_a とシャント抵抗値の濾波構造位置 l に対する応答。

高次モード減衰効率への影響

高次モードに結合するTEM波、TE₁₁波の一部は、同軸線路のギャップが急激に変化するF面において反射される。ゆえに、濾波構造の位置は高次モードの減衰効率に大きな影響を与えると推測される。図4-12に、いくつかの有害な高次モードの外部Q値について、距離*l*に対するそれぞれの応答を示す。各々の外部Q値の距離*l*に対する依存性は明確である。なお、チョークモード空洞の外部Q値の計算法については、後で詳しく述べる。

上記外部Q値を使って、KEKB陽電子リングにこの空洞を8台設置した場合の縦方向、および横方向の結合バンチ型ビーム不安定の成長時定数を計算した。図4-13に、各不安定の時定数と距離*l*との関係を示す。これによると、縦方向と横方向の不安定を両方とも抑制するには、*l* = 120 ~ 130 mmがよい。なお、TM₀₂₀モードの縦方向の不安定への寄与は小さいことをつけて加えておく。(問：なぜか？ ヒント：通過時間因子を評価せよ。)

最終的に、濾波構造の位置は*l* = 120 mmに決めた。即ち、加速効率を少し犠牲にして、高次モードの減衰効率をよくする道を選んだ。表4-2に、加速モードの高周波特性を示す。

表4-2
KEKBチョークモード空洞
加速モードの高周波特性

周波数	509 MHz
加速電圧	0.6 MV
壁面損失	70 kW (*)
シャント抵抗値 R	5.0 MΩ (*)
Q値	33000 (*)
R/Q	150 Ω

(*) 空洞の銅壁面の表面欠陥に起因するQ値の劣化 (~5%) を勘定に入れてある。

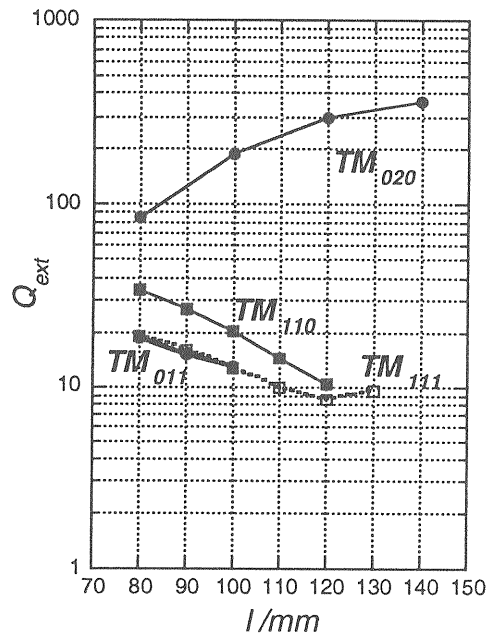


図4-12
有害な高次モード外部Q値の
濾波構造位置に対する応答。

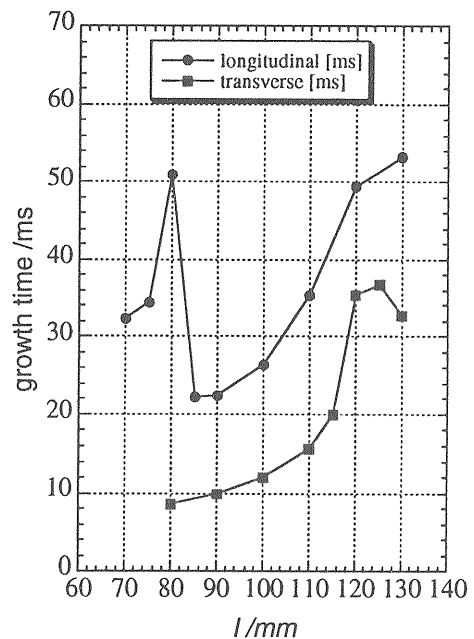


図4-13
結合バンチ型ビーム不安定の成長時定数と濾波構造位置の関係。KEKB陽電子リングに8台のチョークモード型空洞を設置した場合。

外部Q値の計算（時間領域法）

チョークモード空洞について、高次モードの外部Q値を計算するとき、先の章で述べた同調曲線法を適用することはできない。その理由は、同軸線路の途中に濾波構造があるため、明確な離調時短絡面の設定が不可能に近いからである。そこで、高次モードの減衰の様子を時間的に追跡して外部Q値を求めるという直接的な方法を使うことにした。なお、このチョークモード空洞についての外部Q値計算法は本所加速器研究部の赤坂氏によるものである。

高次モード電磁場の時間的发展を計算するには、MAFIAの二次元時間領域プログラム(T2)を使用した。計算手順を簡単に述べる。ある高次モードについて、同軸線路終端を金属板で蓋をした状態にして、空洞電磁場分布(定在波)を求める。このとき、同軸線路には高次モードの電磁場ができるだけ入らないように、開口部から終端部までの電気長を調整しておく必要がある。即ち、同軸線路を空洞から離調しておく。(問:なぜ離調する必要があるのか、考察せよ。)上で求めた電磁場分布を初期値として、線路終端の境界条件を無反射にした後の時間的变化を追跡する。以上、言うのは簡単であるが、実際は大変手間のかかる方法である。

この外部Q値計算法の信頼性について、何らかの方法で事前に調べておく必要がある。そこで、円筒空洞に同軸導波管を接続しただけの簡単な構造(図4-14)について、いくつかの高次モード(TM₀₁₁, TM₀₂₀, TM₁₁₀, およびTM₁₁₁)の外部Q値を時間領域法と同調曲線法で計算し、両者の値を比較してみた。その結果を図4-15に示す。グラフの縦軸は電場の強さを示す。各高次モードについて、空洞のどこか適当なポイントを選び、そこでの電場

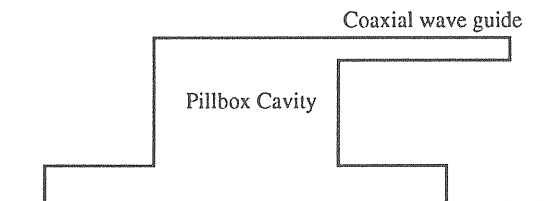


図4-14

時間領域法と同調曲線法の比較に使った同軸管付き空洞。

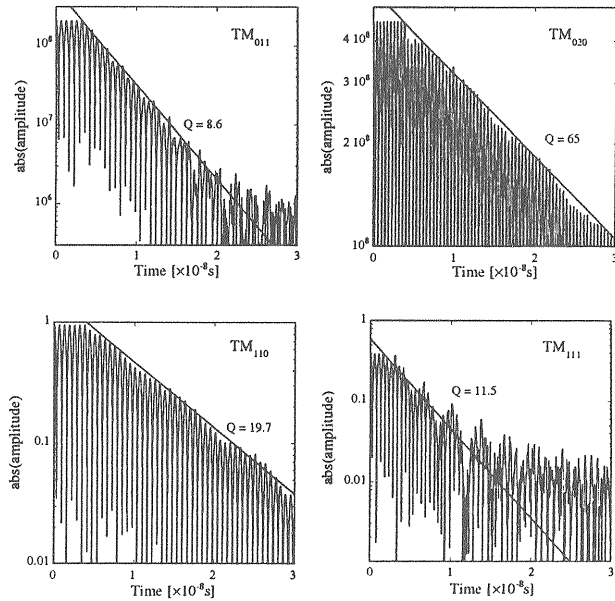


図4-15

同軸管空洞(図4-14)の高次モード外部Q値を時間領域法で計算した結果。包絡線に沿って引いてある直線の傾きは、同調曲線法による外部Q値に対応する。

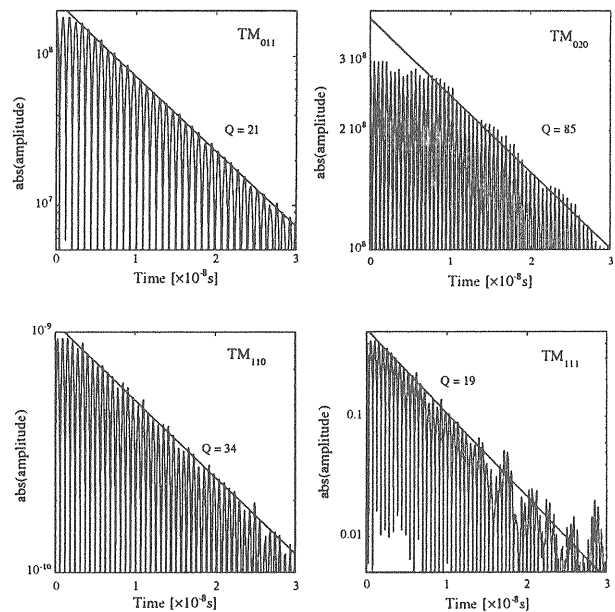


図4-16

KEKBチョークモード空洞の高次モード外部Q値を時間領域法で計算した結果。包絡線に沿って直線をあてはめ、その傾きから外部Q値(グラフ中の数値)を求めた。

の大きさの時間的変化を追跡した。各グラフの右下がりの直線は、同調曲線法で得られた外部Q値に対応する。電場強度の包絡線と直線との比較より、両方法の計算結果はよく一致していることがわかる。

以上、時間領域法が十分実用になることを確認した。そこで、KEKBチークモード空洞（濾波構造の位置は $l = 80 \text{ mm}$ ）の高次モード外部Q値をこの方法で求めてみた。いくつかの有害な高次モード（ TM_{011} , TM_{020} , TM_{110} , および TM_{111} ）について、電場強度の減衰の様子を図4-16に示す。外部Q値は、減衰していく電場強度の包絡線を指数関数であてはめて求めればよい。以上のようにして求めた各高次モードの外部Q値をグラフに記入しておいた。

熱構造解析

連続波運転用の常伝導空洞の設計においては、冷却に関する問題が高周波的問題と同等か、または、それ以上に重要である。図4-9において、濾波構造を含む左側の部分は、加速モードの壁面損失による入熱があるところである。この部分には、熱伝導に優れた無酸素銅を使用する。一方、濾波構造右側の同軸線路には、大きな入熱はない。この部分には、全体構造を補強するために、剛性に優れたステンレス鋼を使用する。

定格高周波電力70kW（表4-2参照）を投入したときの温度分布を図4-17に示す。これは、有限要素法構造解析プログラムANSYSによる解析結果である。熱的な境界条件については、冷却水路壁面の温度は摂氏30度に固定、大気に接する外面は断熱境界とした。温度上昇が大きいのは、右側のビーム開口部のノーズコーン先端部と導波管開口部の内側の角である。最大で30度程度の温度上昇であれば、熱構造的にも、また真空的にも問題はない。

高周波吸収体

最後に、同軸管終端部に設置されている高周波吸収体について簡単に説明する。この空洞では、砲弾型に焼結されたSiCセラミックス16本を使って、高次モードの電磁場エネルギーをSiCの誘電損失にて吸収する。砲弾型SiC吸収体（図4-18参照）の寸法は、外径約40ミリ、有効長約400ミリ（100ミリのテーパ部を含む）である。一本あたりの吸収電力定格は約1kWである。

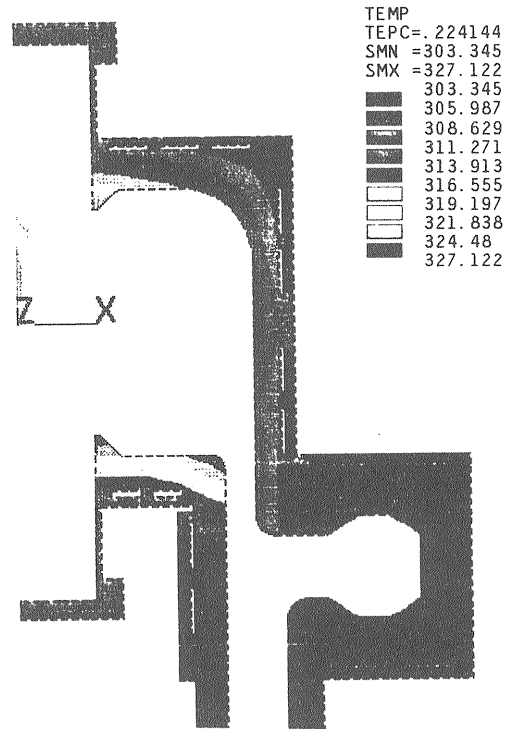


図4-17

定格高周波電力投入時の空洞構造体温度分布。温度の単位は絶対温度。(ANSYS解析結果)

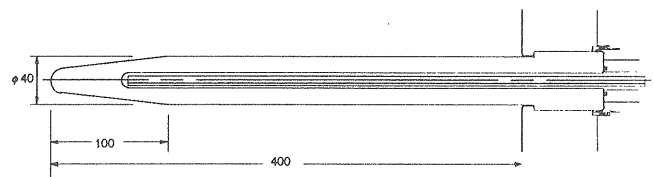


図4-18

砲弾型SiC高周波吸収体

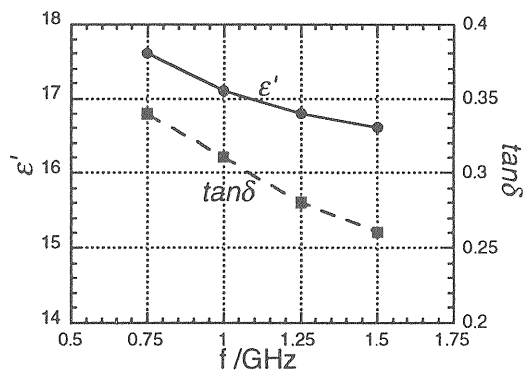


図4-19

SiCセラミックスの誘電率、損失正接の周波数応答

る。図4-19に、SiCセラミックスの誘電率 ϵ_r' と損失正接 $\tan \delta \equiv \epsilon_r''/\epsilon_r'$ の周波数応答を示す。

(注： $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$ 。問：虚数部の負号の意味は？)

吸収体としてSiCを選んだ主な理由を以下に列挙する。

1) SiCは緻密構造のセラミックスで、機械的強度に優れており、また化学的に安定である。

2) セラミックスとしては、高い熱伝導率を有する。その値は約120W/mKでアルミニウム(230W/mK)の約半分。

3) 緻密構造と関係するが、真空中でのガス放出率が小さい。24時間150°Cの加熱脱ガス真空処理後、室温において 3×10^{-12} Torr l/s cm²以下であることを実験で確認した。

4) 本所2.5GeV電子線形加速器において、Sバンド導波管の整合負荷用に、約200本の砲弾型SiC吸収体(有効径24ミリ、有効長300ミリ)が使用されている。そして、約10年間にわたって問題なく機能している。

以上の中で、4番目の理由、即ち、多数のものが長期間にわたって問題なく機能しているという実績が持つ意味は大きい。

今年の初夏に、図4-18に示した砲弾型の吸収体を試作し、それをLバンド導波管に組み込んで終端負荷(定在波比 ~ 1.1)として電力試験を行った。電力試験は周波数1296MHzのパルスクライストロンを使用して、電力尖頭値で80kW(パルス幅520 μ s、繰り返し50Hz)まで行った。これは平均電力値で約2kWに相当する。SiC吸収体は、真空的にも、熱的にも何の問題もなく正常に機能した。また、放電現象も観測されなかった。

KEKB用チョークモード型減衰空洞については、製作技術評価用と電力試験用の2台について現在開発を進めている最中である。

おわりに

以上、高次モード減衰型空洞について述べてきた。非常に急ぎ足であったが、雰囲気だけでも感じて頂ければ幸いである。心残りは、減衰空洞に不可欠である高周波吸収体について詳しく紹介出来なかったことである。吸収体を理解するには、高周波だけでなく、物性に関する幅広い知識も必要である。今後の夏の学校の講義題目のひとつになる可能性は十分あると考える。

参考文献

この原稿を作成するにあたって、参考にさせて頂いた主な書籍、および文献を挙げておく。

第1章に関しては：

- [1] パークレー物理学コース「波動」上、下巻
- [2] 本川達雄著「ゾウの時間 ネズミの時間」中公新書
- [3] A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators

第2章に関しては：

- [4] J.C. Slater, Microwave Electronics
- [5] K. Kurokawa, An Introduction to the Theory of Microwave Circuits

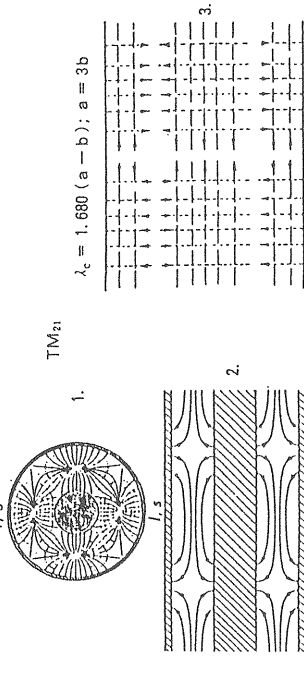
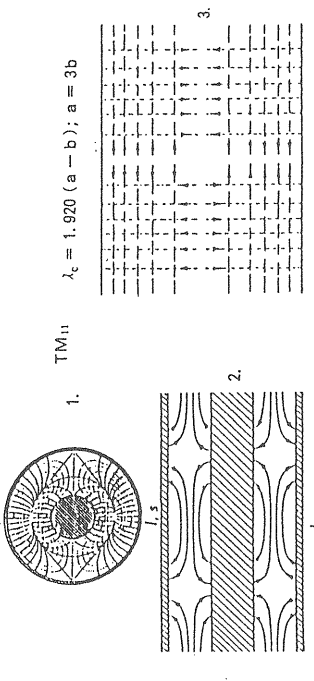
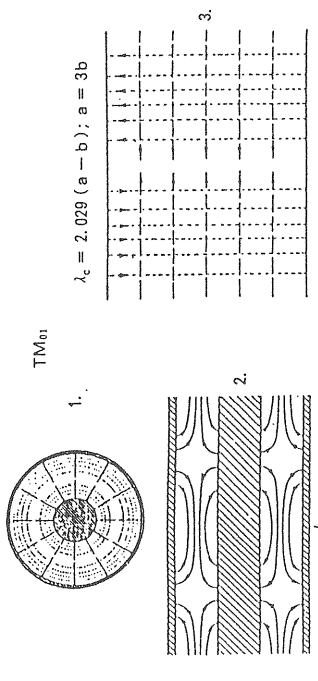
第3章に関する文献：

- [6] R.L. Gluckstern and R. Li, "Calculation of Cavity Waveguide Coupling", in Proc. 1988 Linac Conf., pp. 356-358
- [7] T. Kageyama, "A Simple Method using MAFIA to Calculate External Q Values of Waveguide-Loaded Cavities", KEK Report 89-4, 1989

第4章に関する文献：

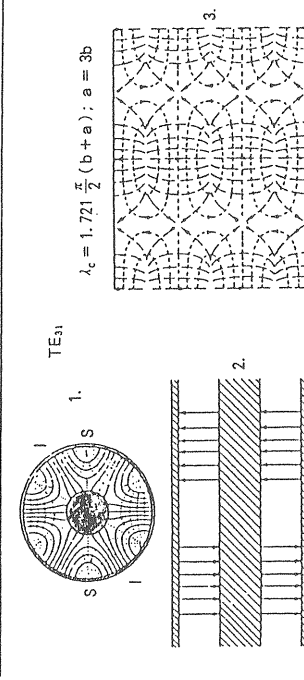
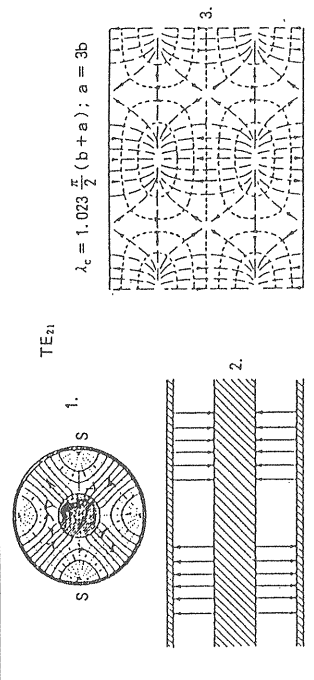
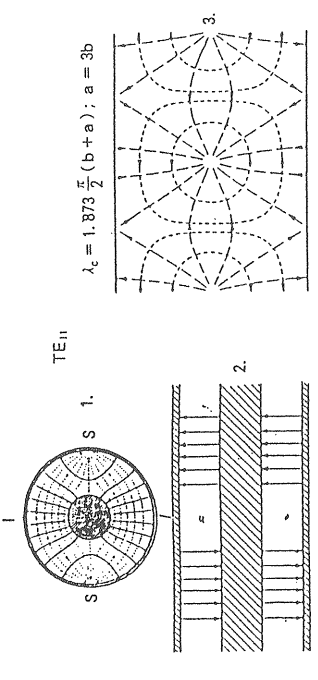
- [8] T. Kageyama, "Grooved Beam Pipe for Damping Dipole Modes in RF Cavities", Proc. of the 8th Symposium on Accelerator Science and Technology, Saitama, Japan, pp. 116-118, Nov. 1991, or KEK Preprint 91-113, October 1991 A
- [9] T. Shintake, "The Choke Mode Cavity", Jpn. J. Appl. Phys. Vol. 31 (1992) pp. L1567-L1570, Part 2, No. 11A Nov. 1992
- [10] N. Akasaka, "Higher Order Mode Characteristics of the Choke Mode Cavity for KEK B-Factor (KEKB)", KEK Preprint 94-63, July 1994 A

TM MODES IN COAXIAL WAVEGUIDE



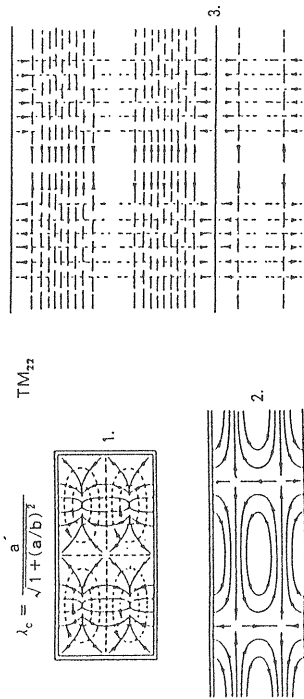
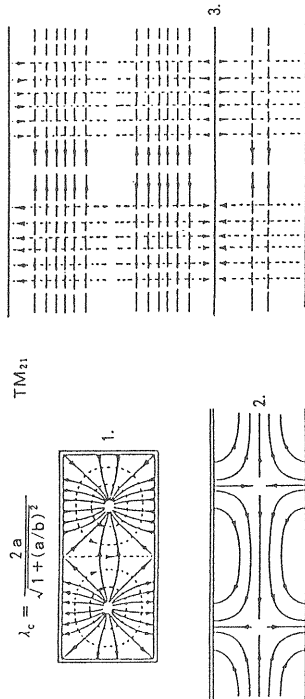
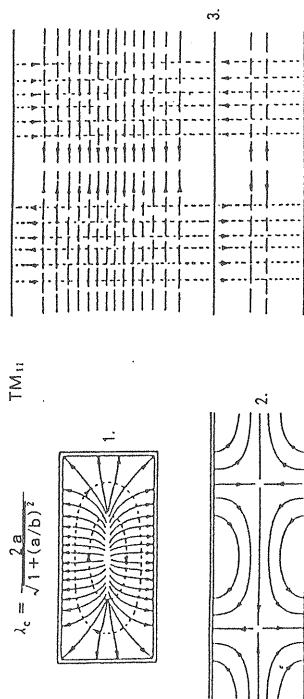
1. Cross-sectional view
 2. Longitudinal view through plane I-I
 3. Surface view from s-s
- I
--- E
--- b. Outside Radius of Inner Conductor
--- H

TE MODES IN COAXIAL WAVEGUIDE



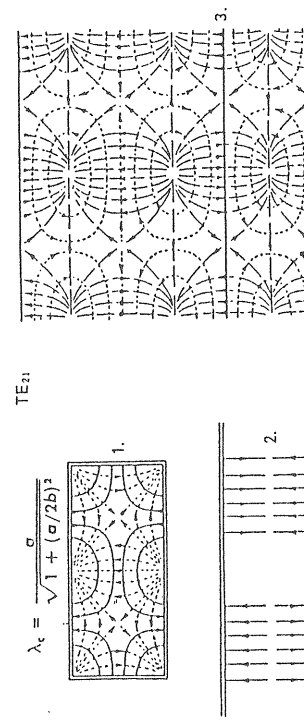
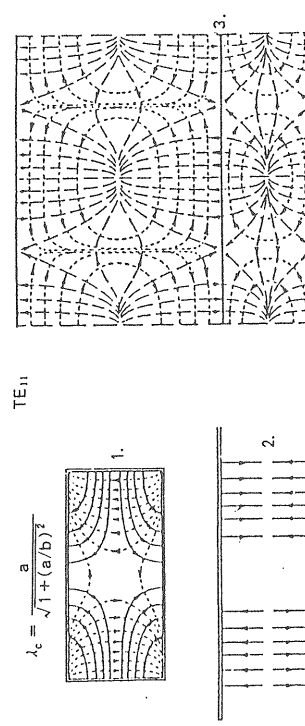
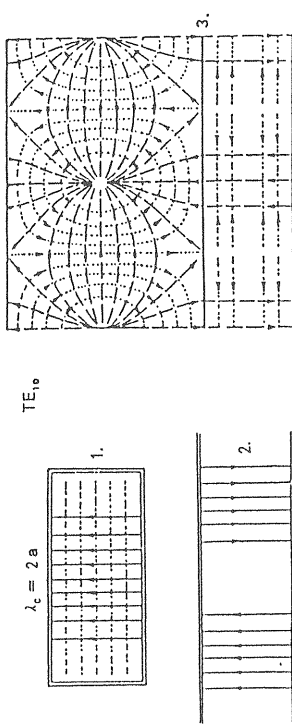
1. Cross-sectional view
 2. Longitudinal view through plane I-I
 3. Surface view from s-s
- I
--- E
--- b. Outside Radius of Inner Conductor
--- H

TM MODES IN RECTANGULAR WAVEGUIDE



1. Cross-sectional view
 2. Longitudinal view
 3. Surface view
- a. Inside Broad Dimension
b. Inside Narrow Dimension
-

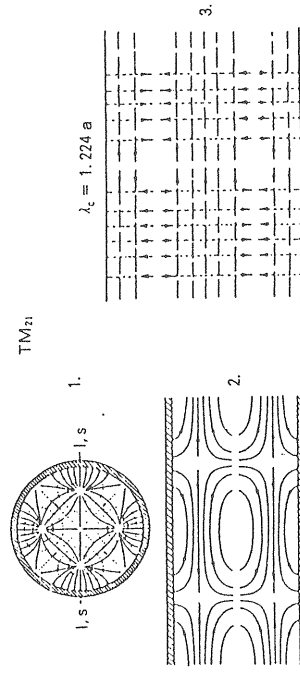
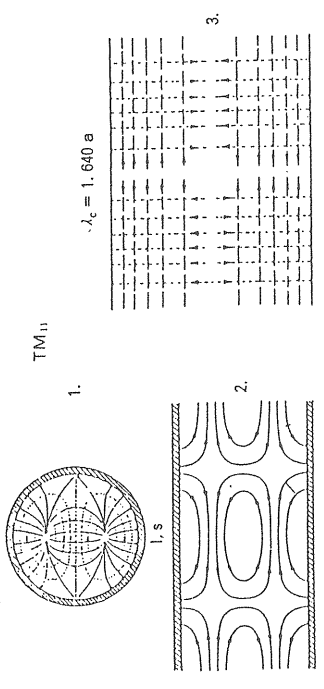
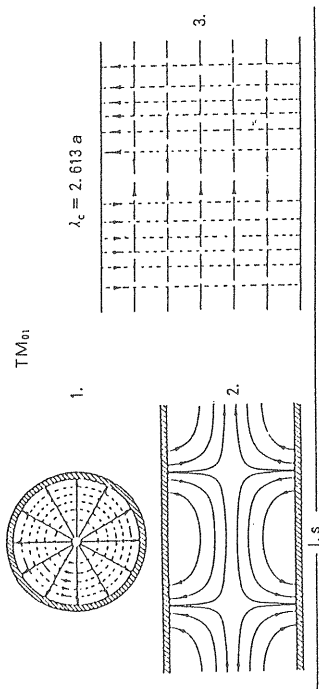
TE MODES IN RECTANGULAR WAVEGUIDE



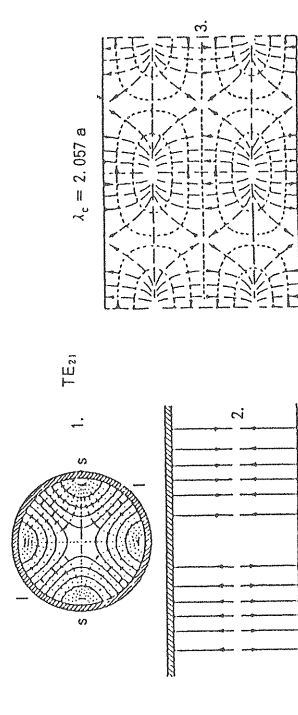
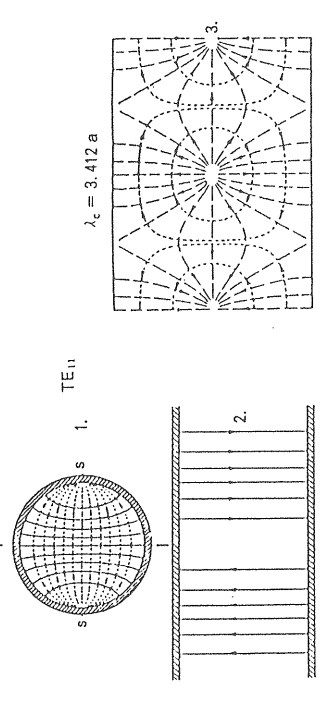
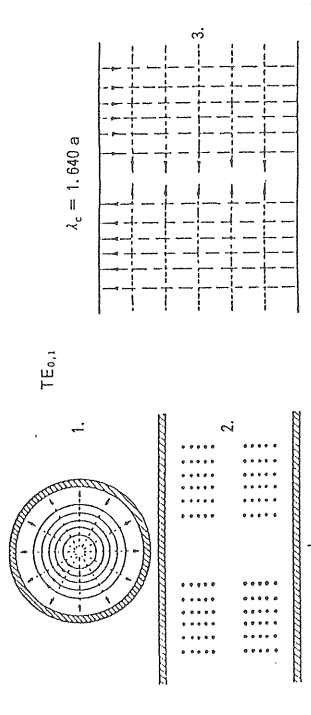
1. Cross-sectional view
 2. Longitudinal view
 3. Surface view
- a. Inside Broad Dimension
b. Inside Narrow Dimension
-

付録一 2 矩形導波管の伝播モード
The Microwave Engineer's Handbook and Buyers' Guide (1966) horizon house より掲載

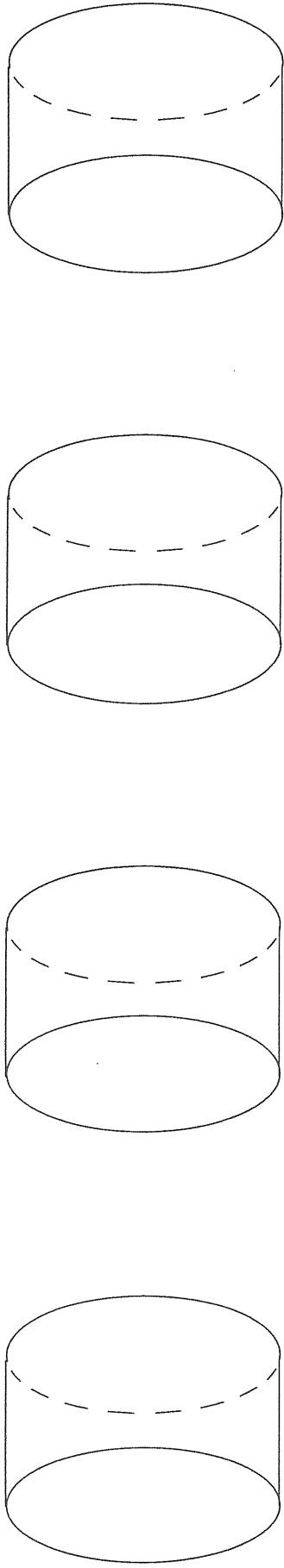
TE MODES IN CIRCULAR WAVEGUIDE



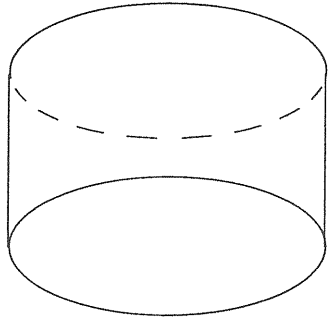
TM MODES IN CIRCULAR WAVEGUIDE



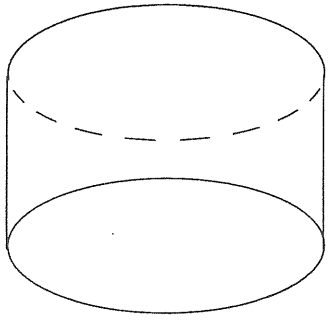
付録一 3 円形導波管の伝播モード
The Microwave Engineer's Handbook and Buyers' Guide (1966) horizon house より掲載



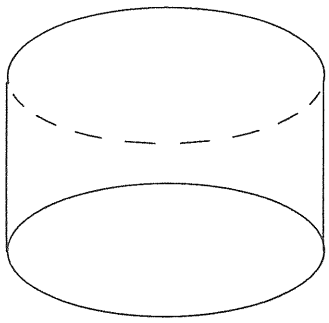
TE011



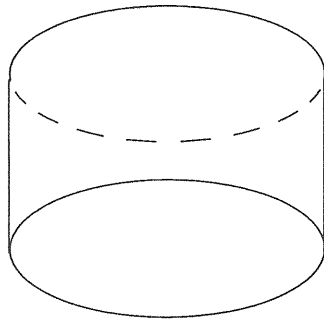
TM020



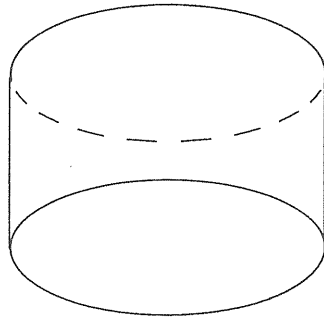
TM011



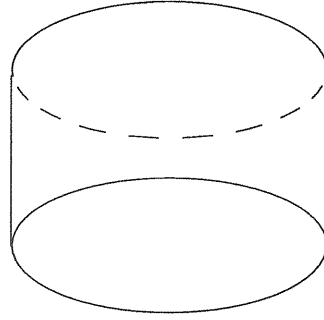
TM010



TE111



TM110



TM111

宿題：円筒空洞図形の下に指示された共鳴モードの電磁場の様子を図形中に記入しておくこと。
付録の円形導波管伝播モードの電磁場分布を参考にしてよいが、共鳴モードは定在波であることに注意。