

1 はじめに

この講義（ノート）は、多バンチ、大電流蓄積リングで生じる多モードのビーム不安定を安定化するのに用いる（用いられるであろう）フィードバック技術を紹介しようと試みるものです。他に適任の方も多くいらっしゃると思われるのにこの分野の初心者（では他の分野の専門家かと言われると...）である私がこの講義をするのは、このノートを読む人にとっても、また準備している私にとっても例えようもなく不幸なことにちがひありません。それに加えてBファクトリー用に想定されるほどの大規模なフィードバック装置は未だ開発途上で、まだ不明な点、判断がつかぬ点も多くあります。よって、本ノートの内容は極めて不十分で、かつ不正確な点が山とあるであろうことを最初にお断りしておきます。

このノートの構成は次のようにしました。まず、加速器のビームフィードバックの仕組みを概観します。次に、フィードバック系の表現方法、また系の安定性について紹介します。この後各論として、ビーム検出装置、信号処理装置、キッカーの各部を、主に個別バンチフィードバックで必要とされる条件をもとに、KEKBでの開発状況、選択をふまえながら紹介していきます。最後に、これからの展開を述べます。

2 フィードバックとは

加速器の中を周回するビームは、非常に電流値が低い極限、つまり、ビーム同士やビームと真空容器の相互作用が無視できるあたりでは、設計者によって決められた力（収束力や復元力）のみを感じて運動している。この運動を、次の様な減衰項入りの調和振動子の形で表そう。

$$x'' + Dx' + \omega^2 x = 0 \quad (1)$$

加速器は、鉛直 (vertical) 方向、水平 (horizontal) 方向（この2つをあわせて横方向 (transverse) と呼ぶ）、そして進行 (longitudinal) 方向のビーム粒子の運動には調和振動的な復元力が働くよう設計されているから、上式の x はビームの鉛直方向あるいは水平方向の中心軌道からの変位と考えて良い。この場合の ω はビームのベータatron角振動数である。あるいは x はRF系の安定位相からの進行方向の変位であってもよい。このときの ω はシンクロtron角振動数にあたる。ビーム中の全ての粒子は上式を満たしており、それぞれの運動方程式の任意の線形結合も上式を満たしている。ところがビーム電流が大きくなるにつれ、真空チェンバー内にビーム自身が作った電磁場が大きくなり、ビーム

運動が大きく影響を受けてしまうことがある。ビーム振動自身が共振周波数 ((1) の ω) に近い強制振動項を作っている状況は、正帰還がかかった不安定な増幅器のようなもので、ノイズ程度の振動でもビームを失うまでの大きなコヒーレント振動にまで増大させてしまう。振動の振幅が大きくなると、収束磁石や高周波加速システムからの収束力 (復元力) も、ビームが自分自身を揺さぶる力も非線形となるであろう。しかしながら、フィードバックシステムがうまく働けば、大振幅とはならないのだから、以下では、非線形運動は考えず、線形であると見なせる小振幅の運動のみを考えることにする。

ビームが自分自身を蹴飛ばす力は、それぞれの粒子が他の粒子と相互作用するものであるから、これをまともに扱おうとすると、上式に例えば、 10^{10} (粒子数) もの非線形方程式を入れなければならない。ビーム不安定については深入りせず、ここでは全てのビーム自身が誘起した力は線形であると近似でき、適当な粒子位置 (運動量のずれ) の組み合わせをとると、次の様な形の式で表せるとしよう。

$$X'' + \omega^2 X = F \left[1, \frac{d}{dt}, \int dt \right] X \quad (2)$$

ここでの X は加速器中の全てのバンチの配置を適当に線形結合したものである。 F は X 、その微分およびその積分の線形演算子である。 F はビーム中の粒子の配置については複雑な関係となることが多いが、全ビーム電流については比例関係となると (粗くは) 近似出来る。ここで、 X を

$$X(t) = X \exp(-i\Omega t) \quad (3)$$

と置くと、

$$[\omega^2 - \Omega^2] X = F(\Omega) X \quad (4)$$

となる。ビーム不安定が弱いときは、 F の中の Ω を ω で置き換えても大差ないので、この式は

$$[\omega^2 - \Omega^2 - F(\omega)] X = 0 \quad (5)$$

となる。これを与えられた Ω について解けば、ビーム不安定が得られるはずである。 $F(\omega)$ がどのような形をしていようと、フィードバックでこの振動を減衰するためには $\Omega \rightarrow \Omega + id\Omega$ とするような振動項に対して位相を 90° ずらした減衰項を導入すればよく、調和振動子の形で

$$[\omega^2 - \Omega^2 + id\Omega - F(\omega)] X = 0 \quad (6)$$

とすればよい。もしも減衰項の係数 d が十分に大きければ、この運動は減衰する。フィードバックという観点からだけだと、

- どれだけのdが必要か
- フィードバックシステムがビームのどの固有振動モードとcoupleしているか

という2点のみを知っていれば良い。もしもフィードバックシステムが減衰させるモードがビームを不安定にしているものであり、フィードバックが供給する減衰力が十分大きければ、ビーム不安定を制御することが出来る。

次に、減衰項がベータatron振動を表すHillの方程式

$$x''(s) + K(s)x(s) = 0 \quad (7)$$

にどう現れるかを見よう。以下、しばらく横方向フィードバックのみを考える。そこで、 x は水平あるいは鉛直方向の中心軌道からのずれ、 s はある始点からの軌道方向の長さ、 $K(s)$ はラティス中の収束要素の位置と強さを表すことになる。式(1)の類推から分かるように、振動が減衰させるためには、 x' に比例する項を式(7)に導入すれば良いだろう。フィードバックキッカーは有限長で大概1箇所を設置される。 $D(s)$ を $K(s)$ と同じように、フィードバックキッカーを軌道要素として表したものとする。キッカー強度はキッカー内(s_i から s_f まで)は一定で、その他の場所では0である。

$$x''(s) + K(s)x(s) + D(s)x'(s) = 0 \quad (8)$$

このようにHillの方程式は減衰ラティス要素が入った形で表現される。

フィードバックキッカーを薄レンズで近似し、キッカーが収束要素の中に入らない(通常こうなっている)とすると、キッカーでは $K(s) = 0$ だから

$$D(s) = D_0\delta(s - s_0) \quad (9)$$

$$x''(s) = -D(s)x'(s) \quad (10)$$

となる。上式の左辺を積分したものは、キッカーを通ることにより変化した $x'(s)$ である。 $s_i < s < s_f$ で $D(s) = D_0$ 、他では $D(s) = 0$ とする。すると上式の右辺を積分したものは D_0 にkickerの長さ $s_f - s_i$ とkicker入り口での $x'(s)$ の値をかけたものとなるから

$$\Delta x' \equiv x'(s_f) - x'(s_i) = -D_0(s_f - s_i)x'(s_i) \quad (11)$$

となる。

次の点を強調しておこう。フィードバックシステムが横方向振動が減衰させるためには、蹴りが与えられるその瞬間の x' に比例した横方向の蹴りを入れる(x' にインパルス的な変化が起こる)必要があるということである。この点は、薄レンズの四極電磁石が、四極

がある場所の x に比例した横方向のインパルス的な蹴りを x' に加えるのと大きく異なる。残念ながら、 x' に比例した蹴りを入れる磁石は無いのだから、何らかの方法で x' を検知する必要がある。即ち、戦略として

- x' を測る
- 直ぐに x' に比例した修正キックを入れる

という横方向フィードバックシステムの処方が分かった。

言うまでもないことだが、一瞬で働くエレクトロニクス系を設計することは出来ない。信号ケーブルや電気回路内の信号の伝搬速度はカメさんのようにのろく、例えば通常同軸ケーブル中においては光速のたった2/3しかない。そこでキッカーの場所での x' を予見することが必要となる。つまり、ビーム測定を行い、測定後短い時間で(1周後とか言った時間で[短い時間にはかなり本質的な意味がある])ビームの性質から x' を出し、ビームがフィードバックキッカーに入った時に蹴るとばすのである。

3 振動減衰の時定数

ここでは、フィードバックシステムの振動減衰の時定数について、 x' は何らかの方法で計れたとして話を進める。フィードバックキッカーには、このシステムで蹴れる最大の蹴り角 $\Delta x'_{max}$ というものがある。この制限は、リング中にどれだけキッカーを入れるスペースがあるか、とかどれだけのパワーをこれに入れる(あるいは供給する)ことができるか、といったことから決まる。フィードバックシステムは、ビームが x' の最大値 x'_{max} に近づいたとき、この最大蹴り角を出すようキッカーに指示する。すると、減衰係数 D は

$$d \equiv DL = \frac{(\Delta x')_{max}}{x'_{max}} \quad (12)$$

となる。ここで、 L はキッカーの長さ($s_f - s_i$)のことである。バンチ周回周期 T で測った減衰の時定数 τ_x は

$$\frac{\tau_x}{T} = \frac{2}{d} \quad (13)$$

となる。ビームを制御するためにはフィードバック系の減衰時定数はビーム不安定の成長時定数よりも短くなければならない。不安定の成長率は一般にビーム電流に比例するから、もしも設計者がそれで良いと思うなら D は(ビーム電流が小さいときは効かないような)ビーム電流依存性を持っていてよい。フィードバックシステムに求められる減衰時定数は制御しなければならないビーム不安定の厳しさ[ビーム不安定

の成長時定数よりも減衰時定数が短くなければならぬ]によって決まる。しかしながら、 x'_{max} は不安定に関係なく、入射過程をどこまで(実用的に)制御出来るかによって決まってしまう。理想的には、(一部の例外を除いて)パルス入射バンパ電磁石は、入射点付近でのみ蓄積ビームをセプタム電磁石に寄せ、その他の所には影響を残さない。ところが実際は、バンパは不完全であり、これが x'_{max} の下限値となってしまう。良くできた入射バンパで大体1%から5%程度の漏れを入射バンパ外に出すだろう。入射用のバンパの典型的な大きさは大体~10 mmであるから、蓄積ビームに対しては、0.1~1 mmのベータトロン振動を引き起こすものと考えられる。最大のビーム角度変位は(ベータトロン関数が10 mだとして)

$$x'_{max} \sim 10 - 100 \text{ } \mu\text{rad} \quad (14)$$

位のものとなるであろう。バンパが1周リングを周回する間にビームを蹴らなければならないキッカーの最大の蹴り角は必要とされる減衰の時定数 τ_x から

$$\Delta x'_{max} = 2(x'_{max})T/\tau_x \quad (15)$$

で求められる。ビームを蹴るには、パルス磁石、あるいはストリップライン型のキッカー、あるいは空洞が用いられる。これらのキッカーの時間領域、周波数領域での性質については、LBLのG. Lambertson先生のテキスト[13, 14]を参照して頂くのが、この駄文を読むよりずっと建設的であるが、このテキストに従いある電圧 $V(t) = V_k f(t)$ がキッカーの入力端子に加わった時、キッカーの応答関数 K_{\perp} が

$$K_{\perp} \equiv \frac{\Delta p_{\perp} \beta c}{e V_k} = \frac{p \Delta x' \beta c}{e V_k} \quad (16)$$

と定義されるとしよう。ここでの p は粒子の運動量、 βc は粒子の速度、 e は粒子の電荷、 $\Delta x'$ は v_k をキッカーに入力することにより、蹴られた角度である。これからフィードバックシステムに必要なピークパワーが決まる。キッカーの入力インピーダンスが Z_0 で $f(t)$ の最大最小値がそれぞれ1、-1なら必要なピークパワー P_{max} は

$$P_{max} = \left(\frac{2x'_{max} T p \beta c}{\tau_x} e K_{\perp} \right)^2 \frac{1}{Z_0} \quad (17)$$

となる。必要なパワーは x'_{max} の2乗に比例する。式(14)はいい加減に10倍ほどの不定性を見ていたが、パワー、突き詰めればフィードバック用増幅器のお値段に対しては、100倍ほどの怪しさがあることになる。

フィードバックアンプ、そしてキッカーに必要な最小のバンド幅は、どれだけのビーム自由度を相手にす

るかによって決まる。例えば、リングにバンパをN個等間隔に入れるとしよう。フィードバックシステムは、原理的には任意のバンパ振動パターンに対応出来る必要があるだろう。もしも全てのバンパを同じ方向に同じ大きさで蹴らなければならぬければ、(これをフィードバックの守備範囲とするかどうかは別として)、DC補正となる。これがフィードバックの下限周波数であり、0 Hzである。最大周波数は、隣同士のバンパを同じ大きさで逆に蹴る場合で、これがバンパ間隔の周波数を f_B とすると、 $f_B/2$ となる。バンド幅は以上のように決まるが、中心周波数は、一応(実際的な問題を除けば)任意である。これは、バンパが通過していない時にキッカーの電圧がいかに変化しようと、バンパは何も感じないからである。バンパ間隔 $1/f_B$ にN回キッカーの電磁場が変化してもよいので、バンド幅としては $N f_B$ から $(N+1/2)f_B$ でも良いし、 $(N-1/2)f_B$ から $N f_B$ まででも良い。Nは、フィードバックキッカーの周波数領域の特性を生かすよう決められることになる。

4 連続フィードバックの理論

4.1 システムと制御

系あるいはシステムとは、種々の機能があるいくつかの要素が何らかの相互作用で結ばれている集合である。このシステムの内部、あるいはその外部の間には、種々の相互作用が存在する。これらの作用を原因結果の関係から方向づけしたものを信号と呼ぶ。例えば磁石に電流を流した結果として磁場が生じたときは、電流が原因で磁場が結果となる。このとき電流を入力、磁場を出力あるいは応答という。このような因果関係を表すのに図1の様なブロック線図が用いられる。システムあるいは要素をGで表し、これを伝達要素と呼ぶ。



図1: ブロック線図

以下では次のような基本的性質をもつシステムを扱う。

1. 因果性

システムに加えられる任意の信号 $x(t)$ が $x(t) =$

$0[t < 0]$ ならこの応答に対して $y(t) = 0[t < 0]$ が常に成り立つ。つまり、原因より先に結果は生じないということ。

2. 時不変性

システムに入力 $x(t)$ を加えたときの応答が $y(t)$ とすると、時間 τ を任意に選んで $x(t - \tau)$ を入力として加えたとき、出力は $y(t - \tau)$ となる。つまり、システムの性質が時間とともに変化しないこと。

3. 線形性

入力 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ に対する応答をそれぞれ $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ とする。2つの実数 a 、 b を任意に選び、 $ax_1(t) + by_1(t)$ を入力とすると得られる応答は $ay_1(t) + by_2(t)$ となる。

4.2 開ループと閉ループ

制御方式は大きく2つに分けられる。まず、図2(a)の様に、制御系に対する入力と応答の因果関係がはっきりしており、結果が原因に影響を与えない制御方式がある。これを開ループ制御という。一方、図2(b)の様に、出力としての結果が再びその同じシステムの入力として送り返され、原因→結果→原因というように閉じた関係を形成する制御方式がある。これを閉ループ、あるいはフィードバック制御と呼ぶ。

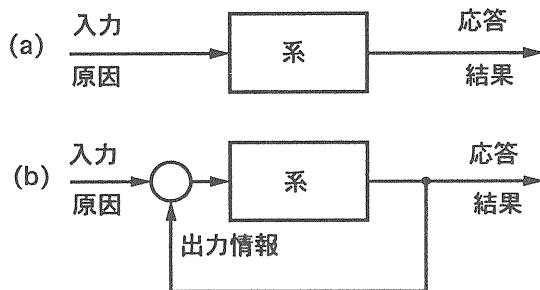


図 2: 開ループと閉ループ

4.2.1 開ループの例

高周波空洞にRF電力を供給することを考えよう。希望するRF電力 P_{RF} 、実際増幅器(クライストロン等)を出たRF電力を P_k とし、偏差 $e = P_{RF} - P_k$ を0とするようなローレベル系の出力値(増幅器への入力値) L_i があらかじめ分かっているものとする。そこでローレベル系の出力を L_i としておけば、結果として一定のRF電力が保たれると思われる(図3(a))。この場

合、原因→結果は一方向的であり、結果が原因に影響されていないので、開ループ制御である。

しかし、この開ループ制御方式は、室温の変化等で電力増幅器の利得が変化するなど、思いがけず出力RF電力が変わるかもしれない、 L_i を固定したままでは $P_{RF} = P_k$ とすることは困難である。このように制御系に加わる予想されない変動を外乱という。この外乱がある場合でもRF電力を一定に保持するためには、状況に応じてローレベルの出力を調整する必要がある。

4.2.2 閉ループの例

いま、増幅器の出力をモニターし、偏差 e の大小に応じてローレベルの出力 L_i を調節することにより変えるとする。これは、出力結果を増幅器の入力に戻してその値を比較していることに他ならない。すなわち、出力が希望値より下がったならローレベル系の出力を上げ、一方希望値より上がったなら、ローレベル出力を下げる。ブロック線図で表現すると図3(b)の様になり、この制御方式は閉ループ制御、即ちフィードバック制御である。ここでは結果(増幅器出力)が原因(ローレベル系出力)から差し引かれその差が増幅器への入力の増減の方向を決める。このようなフィードバックを負帰還(negative feedback)という。フィードバックにはこの他、正のフィードバック(positive feedback)がある。この場合は、結果が原因に加わり信号が閉ループを循環するに従いますます増加する。(問 発振

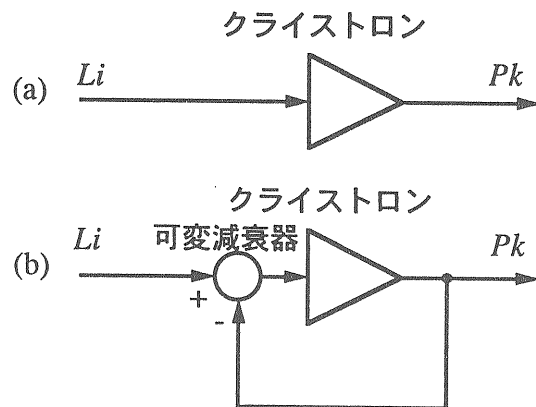


図 3: 開ループと閉ループの例

回路以外の正のフィードバックの例をあげよ)

4.3 フィードバックの効果

負のフィードバックの効果は、以下のように要約出来るだろう。

1. 内部パラメータ変化によるシステムへの影響の抑制
2. 外乱によるシステムへの影響の抑制
3. 不安定なシステムの安定化
4. システムの過渡応答の改善

ここでは(1)と(2)について説明する。残りは伝達関数を定義してから説明する。

4.3.1 内部パラメータ変化の影響

今、前向き要素 G が直流ゲイン G を有する増幅器と考える。このゲインが様々な理由で ΔG ほど変化し

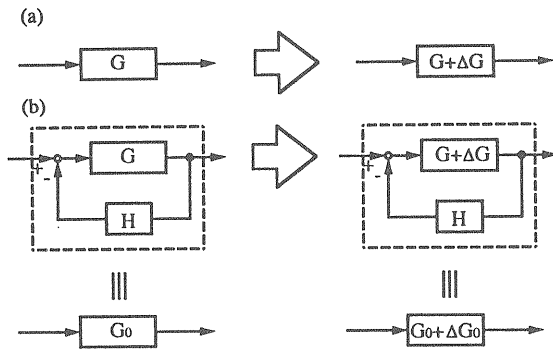


図 4: 前向き要素の変化

たとする。この結果、増幅器は図4(a)の様に伝達要素 $G + \Delta G$ として表される。負のフィードバックを付加しない場合、ゲイン変化はそのままシステムに影響を及ぼす。即ち、元々のゲイン G に対する変化分 ΔG の割合は

$$\delta = \frac{\Delta G}{G} \quad (18)$$

となる。一方負のフィードバックを付加すると、図4(b)の様なブロック線図となる。元々の G と H の閉ループについては

$$G_0 = \frac{G}{1 + GH} \quad (19)$$

であり、(問 これを示せ)前向き要素が変化した後のゲイン $G_0 + \Delta G_0$ は

$$G_0 + \Delta G_0 = \frac{G + \Delta G}{1 + (G + \Delta G)H} \quad (20)$$

であるから、 ΔG_0 は

$$\Delta G_0 = \frac{\Delta G}{G(1 + (G + \Delta G)H)} \frac{G}{1 + GH} \quad (21)$$

となる。従って、 G_0 に対する ΔG_0 の割合 δ_0 は

$$\delta_0 = \frac{\Delta G_0}{G_0} = \frac{\Delta G}{G} \frac{1}{1 + (G + \Delta G)H} \quad (22)$$

となる。通常、 $GH \gg 1$ であるから、

$$\delta_0 \sim \frac{\Delta G}{G} \frac{1}{GH} = \frac{\delta}{GH} \quad (23)$$

となる。これより、フィードバックありのときは、なしの時と比べて変化分が $1/GH$ に抑えられることが分かる。この点から、 GH を可能な限り大きくとれば、前向き要素 G の変化によるシステムへの影響を小さくできるが、実際には G が周波数特性を持つので、あまり GH が大きいと、システムの安定を損ねてしまう。

次に、図5に示す様にフィードバック要素 H の変化が閉ループゲイン G_0 に及ぼす影響を考える。 H の変

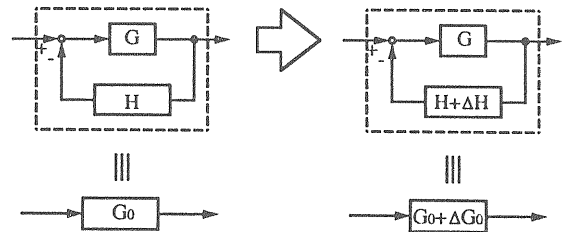


図 5: フィードバック要素の変化

化分を ΔH とすると、

$$\Delta G_0 = \frac{\Delta H}{H} \frac{GH}{1 + G(H + \Delta H)} \frac{G}{1 + GH} \quad (24)$$

であるが(問 これを示せ)、同様に $GH \ll 1$ とすれば

$$\frac{\Delta G_0}{G_0} = \frac{\Delta H}{H} \frac{GH}{1 + G(H + \Delta H)} \sim \frac{\Delta H}{H} \quad (25)$$

となる。今度は、直接フィードバック要素の変化分だけ閉ループゲインが変化した。これから、 H を構成する素子としては、外乱の影響に対して安定である必要があることが分かる。

4.3.2 外乱の影響

外乱がフィードバック系に与える影響については、外乱が加わる位置によって大きく異なる。図6(a)の様に前向き要素 G の前に外乱 d が加わる場合と(b)の様に G の後ろに加わる場合を考えるとまず(a)の場合には出力 y は

$$y = \frac{G}{1 + GH}x + \frac{G}{1 + GH}d = G_0(x + d) \quad (26)$$

となり、フィードバックの効果はないが、(b)の場合は、

$$y = \frac{G}{1 + GH}x + \frac{1}{1 + GH}d = G_0 \left(x + \frac{d}{G} \right) \quad (27)$$

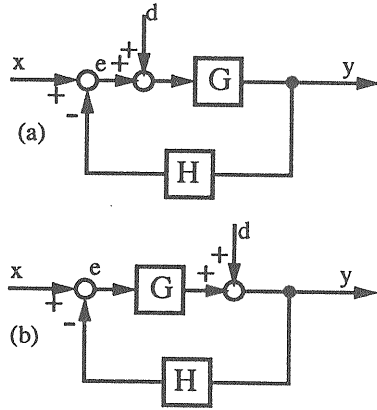


図 6: 外乱の影響

となり、 G が十分大きければ d の影響は出ない。これから、フィードバックにより外乱が抑制されたことになる。このことは、例えば多段の増幅器を作るとき、後段になるほどノイズ等の影響に対しての要請が緩やかになることを示している。

4.4 システムの応答

単位インパルス関数としてDiracのデルタ関数

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (28)$$

をもちいる。このデルタ関数は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (29)$$

という性質をもつ。任意の関数を $f(t)$ とすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau) dt = f(\tau) \quad (30)$$

が成り立つ。さて、ある線形システムに単位インパルスを入力として与えた時の出力 $g(t)$ はインパルス応答と呼ばれる。このインパルス応答が分かっているとき、任意の入力信号 $x(t)$ をシステムに加えた時の出力信号 $y(t)$ はどうなるだろうか。時刻 τ に単位インパルス $\delta(t-\tau)$ をシステムに加えたとき、出力は $g(t-\tau)$ となる。線形システムだから、入力を $x(\tau)\delta(t-\tau)$ としたときの出力は $x(\tau)g(t-\tau)$ となる。入力、出力をそれぞれ τ で $-\infty$ から ∞ まで積分すると、入力については、

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) d\tau = x(t) \quad (31)$$

となり、出力は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau) d\tau = y(t) \quad (32)$$

が成り立つ。このような積分を畳込み積分(convolution integral)と言う。結局、任意の信号を入れたときのシステムの応答は、システムの単位インパルス応答を用いて

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (33)$$

と表せる(問 これを示せ)。このように、畳込みでは $g(t)$ と $x(t)$ を交換しても成り立つ。以下では、この畳込みを

$$y(t) = x(t) * g(t) = g(t) * x(t) \quad (34)$$

と略記する。

次に単位ステップ関数 $u(t)$ を次の様に定義する。

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (35)$$

単位ステップ入力をシステムに印加するときの出力をステップ応答という。実際はもっと広い意味で、入力があるレベルから他の一定値へ瞬間的に変化する時の応答もステップ応答という。今までの議論から明らかのように、ステップ応答は次の式で与えられる。

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (36)$$

このステップ応答は減衰性、速応性、定常特性といった、フィードバックの基本性能を見るのに非常に便利である。

4.5 システムの周波数領域での表現

今までは時間領域でのシステムのふるまいを見てきたが、周波数領域でのシステムのふるまいも重要である。時間領域と周波数領域の関係を与えるものとして次のフーリエ変換がある。

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (37)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (38)$$

周波数領域における線形システムへの入力 $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$ と出力 $Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$ の関係は、

$$Y(j\omega) = X(j\omega)G(j\omega) \quad (39)$$

の様に、畳込みが単なるかけ算となる(問 これを示せ)。

ある関数 $f(t)$ のフーリエ変換を定義するには

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

を満たす必要があるが、例えば単位ステップはこれを満たさない。そこで、より一般的な周波数変換として、ラプラス変換を定義する。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (40)$$

またこの逆変換(ラプラス逆変換)は

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (41)$$

で与えられる。ラプラス変換には、以下のような性質がある。

- 線形性

$$\mathcal{L}[af_1(t) \pm bf_2(t)] = a\mathcal{L}[f_1(t)] \pm b\mathcal{L}[f_2(t)]$$

- 微分

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

- 積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^n\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

- 畳込み

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

- 時間遅れ

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s)$$

- 最終値の定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

聡明な方はすでに見抜いていらっしゃると思うが、上の性質を見れば、ラプラス変換、逆変換を使うと、微分方程式を代数計算で解くことが出来、大変便利である。(問 図7の様な磁路長 ℓ 、有効断面積 M 、比透磁率 $\mu_r = \mu/\mu_0$ 、終端抵抗 R 、 n turnのコイルが巻いてあるビームCTにステップ状のビーム信号 i_b が入った時の応答 i_o を求めよ)

特別の計らいで解答を記す。

$$H\ell = i_b u(t) - i_o n$$

$$\Phi = \mu M (i_b u(t) - i_o n) / \ell$$

$$n\dot{\Phi} = V - i_o R$$

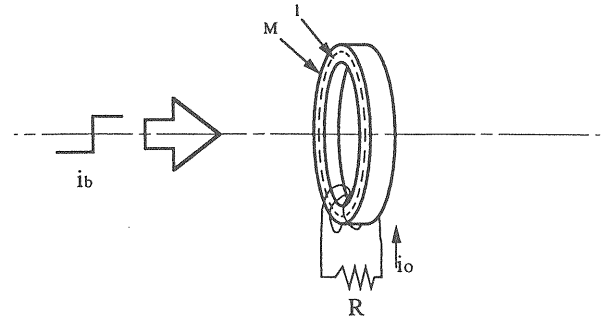


図 7: CT(電流トランス)

だから、微分方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{n\mu M (i_b u(t) - i_o n)}{\ell} = i_o R$$

となる。両辺をラプラス変換すると

$$n\mu M \left(i_b \frac{1}{s} - s I_o n \right) \frac{1}{\ell} = I_o R$$

$$I_o = \frac{n\mu M i_b}{\ell R + n^2 \mu M s}$$

両辺をラプラス逆変換すると、

$$i_o = \frac{i_b}{n} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

$$\tau = \frac{n^2 \mu M}{\ell R} = \frac{L}{R}$$

となる。(問 お暇な人はこれをまともに微分方程式を解くことによって求めよ)

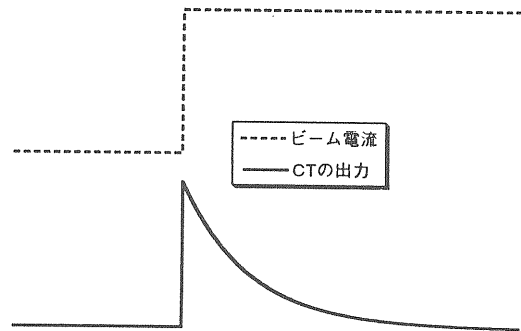


図 8: CTの応答

4.6 伝達関数

線形システムへ任意の入力 $x(t)$ を加えるものとする。s領域での入出力の関係は

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

となるので、s領域での入出力の比をとると

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[x(t)]} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (42)$$

である。但し、初期条件は全て0とする。この $G(s)$ は伝達関数と呼ばれる。さて、一般にn次の線形微分方程式で記述される線形システムの伝達関数は、どうなるだろうか。微分方程式は次のように与えられるとする。

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t) \end{aligned}$$

両辺をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) \\ = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) X(s) \end{aligned} \quad (43)$$

となるので(問 これを示せ)、伝達関数は

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (44)$$

となる。分母の次数がn次なのでn次の伝達関数という。入力が単位インパルスなら、そのラプラス変換は $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ だから

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s) \quad (45)$$

となる。これから分かるように、伝達関数 $G(s)$ はインパルス応答 $g(t)$ をラプラス変換したものである。伝達関数 $G(s)$ は複素変数 s の関数であり、 s は

$$s = \sigma + j\omega$$

と書ける。図9で表した平面をs平面という。

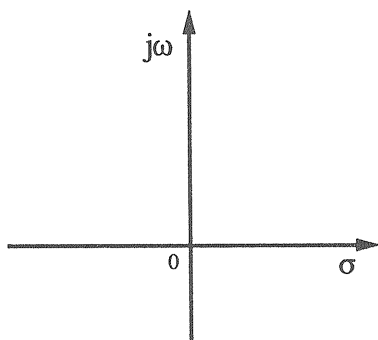


図 9: s 平面

今、特別な場合として入力信号が単一周波数の正弦波 $x(t) = A_i \sin(\omega t - \theta)$ の時を考える。これは、 $s = j\omega$ としたのと(結果の虚部のみあるいは実部のみをとる

という操作を入れることで)等価である。線形システムなので出力は $y(t) = A_o \sin(\omega t - \theta + \phi)$ となるが、 ω を変えながら入出力の振幅比 A_o/A_i 及び位相差 ϕ をプロットすると、システムの周波数特性が分かる。このうち振幅比のことをゲイン特性、位相差のことを位相特性という。伝達関数 $G(\omega)$ は

$$[G(s)]_{s=j\omega} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt \quad (46)$$

となり、 $g(t)$ のフーリエ変換となる。 $G(s)$ は任意の信号の伝達特性を示すが、単一周波数に対しては、得られた $G(s)$ の s を $j\omega$ で置き換えればよく、これを周波数伝達関数という。

次に図10の様な伝達関数 $G(s)$ と $H(s)$ からなるシステムを考える。図10で閉ループのどこかを開状態にす

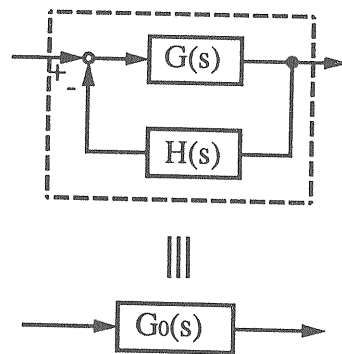


図 10: 伝達関数

ると、経路に沿った伝達関数は

$$G(s)H(s) \quad (47)$$

となる。これを開ループ伝達関数という。また、図10のうち、閉ループを構成している部分を1つの伝達要素と考えたものを閉ループ伝達関数とよび、

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (48)$$

となる。

4.7 基本的な伝達関数

4.7.1 1次遅れ要素

図11の様なRC積分回路を考える。微分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} v_i(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ v_o(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{aligned}$$

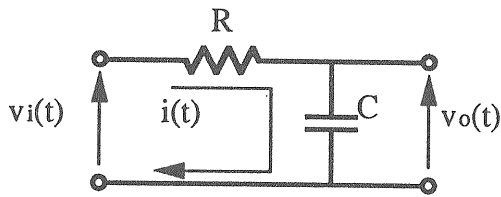


図 11: RC 積分回路

ラプラス変換すると

$$V_i(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

だから伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{1 + sRC} \quad (49)$$

となる。このような要素を1次遅れ要素という。一般形は

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT} \quad (50)$$

である。ステップ応答は

$$Y(s) = \frac{1}{1 + sT} \frac{1}{s}$$

だから時間領域ではラプラス逆変換を用いて

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

となる。周波数応答は $s = j\omega$ とすればよいので

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \quad (51)$$

となる。これから

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \omega T$$

となる。この概形を求めよう。ゲイン G についてはデシベル表示 $g_{dB} = -10 \log(1 + (\omega T)^2)$ で表示するのが便利である。

- $\omega T \ll 1$
 $g_{dB} \sim -10 \log 1 = 0 \text{ dB}$
- $\omega T = 1$
 $g_{dB} = -10 \log 2 \sim -3 \text{ dB}$

- $\omega T \gg 1$
 $g_{dB} \sim -20 \log \omega T$

位相については

- $\omega T \ll 1$
 $\phi \sim 0^\circ$
- $\omega T = 1$
 $\phi = -45^\circ$
- $\omega T \gg 1$
 $\phi \sim -90^\circ$

となる。これを図示すると(ボード線図という)図 12 の様になる。

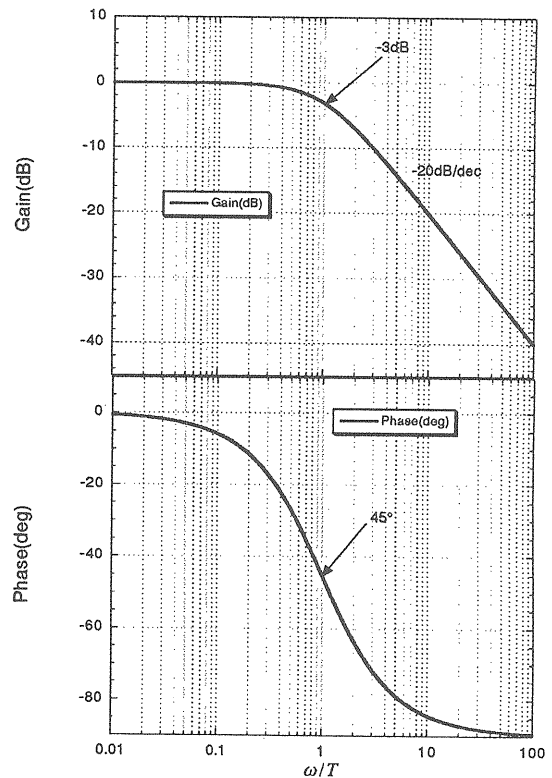


図 12: 1次遅れ要素のボード線図

4.7.2 1次進み要素

図 13の直列RL回路で入力を定電流源 $i_s(t)$ とする。出力を $v_o(t)$ とすると、この伝達関数は

$$G(s) = R(1 + sT)$$

となる。但し $L/R = T$ とする(問 これを示せ)。この様に伝達関数の一般形が

$$G(s) = 1 + sT \quad (52)$$

で表される要素を1次進み要素という。ボード線図は図 14の様になる。

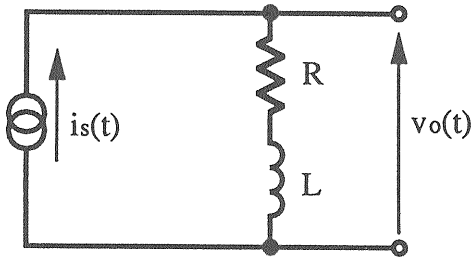


図 13: 直列RL回路

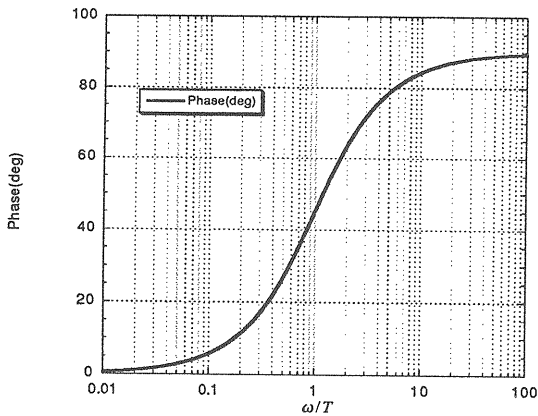
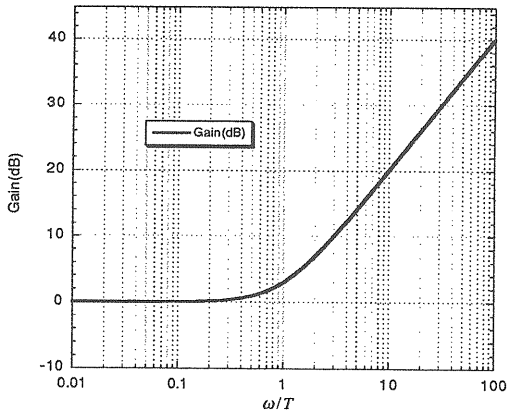


図 14: 1次進み要素のボード線図

4.7.3 2次要素

図 15の直列RLC回路において、入力電圧 $v_i(t)$ 、出力電圧を $v_o(t)$ とする。伝達関数は

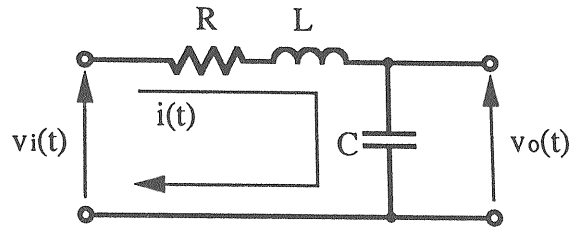


図 15: 直列RLC回路

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

となる(問 これを示せ)。一般形は次のようになる。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (53)$$

このような要素を2次要素あるいは2次遅れ要素という。ここで、前のRLC回路と比較すると

$$\omega_n^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{R}{L}$$

となる。 ω_n は固有周波数、 ζ は減衰率と呼ばれ、それぞれ

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

となる。これらは2次要素の応答に影響を与える重要な要因である。これについて、詳しく見てみよう。

4.7.4 2次要素の時間応答

ステップ応答を計算しよう。出力 $Y(s)$ は

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

なので、これをラプラス逆変換すればよい。

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

の2根をそれぞれ s_1 、 s_2 とすれば、

$$s_1, s_2 = -(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (54)$$

である。これから、 $s_1 \neq s_2$ のとき、

$$y(t) = 1 + \frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \quad (55)$$

となる。式(54)から分かる様に、減衰率 ζ の値によって根 s_1 、 s_2 は大きく異なる。

- $\zeta > 1$ の時(相異なる実根)

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cosh \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \sinh \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n t \right]$$

- $\zeta = 1$ の時(重根)

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

(問 これを示せ)

- $0 < \zeta < 1$ の時(共役複素根)

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[\cos \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t \right]$$

- $\zeta = 0$ の時(純虚根)

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$

それぞれのステップ応答の概形を示したのが図16である。 $\zeta > 1$ の時は緩やかに目標値 $u(t) = 1$ に漸近する。これでは速応性が悪すぎるので、過制動と呼ばれる。次に $0 < \zeta < 1$ の時は応答は早いのだが減衰が小さく、目標値の周りで振動する。特に ζ が小さくなると減衰性が悪く目標値に達するのに時間がかかるようになるので、不足制動と呼ばれる。 $\zeta = 0$ の時は、振動は減衰しない(持続振動)。 $\zeta = 1$ の時減衰が最も早く臨界制動と呼ばれる。

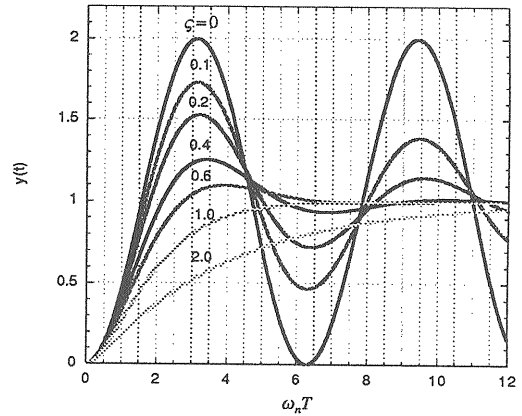


図 16: 2次要素のステップ応答

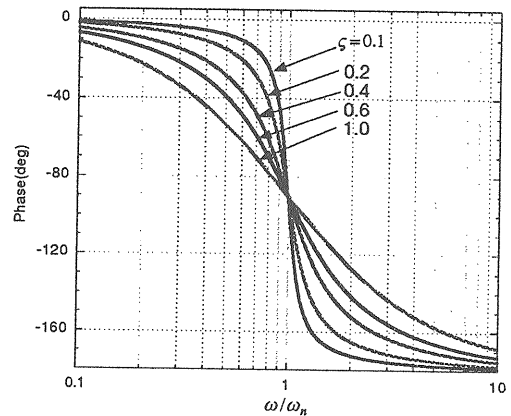
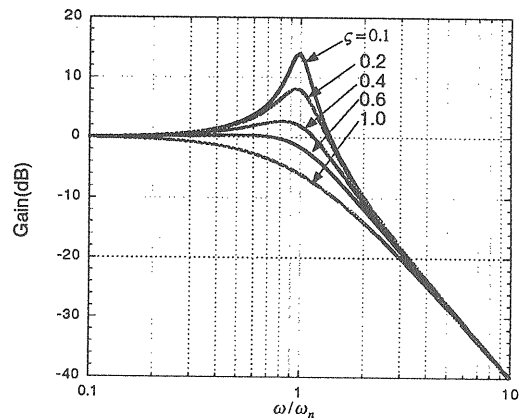


図 17: 2次要素の周波数応答

4.7.5 2次要素の周波数応答

ゲインと位相はそれぞれ次のように

$$G_{dB} = -20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right)^2} \quad (56)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left[\frac{-2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right] \quad (57)$$

となる。概形は図17の様になる。 ζ が小さくなると、ゲイン特性において極大を持つ。共振周波数 ω_p は $\omega/\omega_n = u$ とおき $\frac{d|G(j\omega)|}{du} = 0$ から求められ、

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (58)$$

となる。これから、ゲインの極大値 G_p は、

$$G_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (59)$$

となる。

4.8 系の安定性

図18に示すようなフィードバック系について、このシステムの安定性について考える。閉ループ伝達関

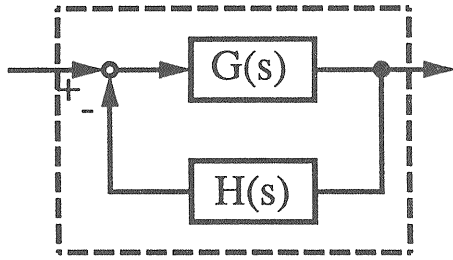


図 18: フィードバック系

数は

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (60)$$

いま、閉ループ系に任意の有界入力を加え、その結果有界出力を生ずる時、このシステムはBIBO(bounded input-bounded output)安定であるという。このための必要十分条件は、このシステムのインパルス応答を $g_0(t)$ とすると

$$\int_0^{\infty} |g_0(t)| < \infty \quad (61)$$

であり、インパルス応答の絶対値の積分が有界であると定義される。

インパルス応答は、システムの伝達関数をラプラス逆変換すれば求めることが出来る。これを求めよう。

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (62)$$

ここで、分母 $A(s) = 0$ の根が全て求まり、かつ簡単のため全て相異なる値 s_1, s_2, \dots, s_n を持つものとする。すると、 $G_0(s)$ は

$$G_0(s) = \frac{B_1}{s - s_1} + \frac{B_2}{s - s_2} + \dots + \frac{B_n}{s - s_n} \quad (63)$$

但し

$$B_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) G_0(s) \quad (64)$$

である。上の仮定のうち、全て相異なる根であるという仮定を除いた場合でも、2位の極なら

$$\lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d}{ds} ((s - s_i)^2 G_0(s))$$

等、留数を思い出せば、そのまま拡張できる。これをラプラス逆変換すると、インパルス応答 $g_0(t)$ は

$$g_0(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{s_i t} \quad (65)$$

となる。このexponentialの肩に着目する。もしも、 $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ のある σ_i が正の数であれば、時間の経過とともに $e^{s_i t}$ の項の絶対値は漸次増加し、ついには無限大になってしまう。このようなシステムは不安定である。逆に、全ての σ_i が負であれば、時間とともに減少し、ついには0となる。このようなシステムは安定である。

以上の議論を s 平面で考える。全ての極が s 平面の左半平面上にあるとき、システムは安定である。つまり、

$$\Re[s_i] < 0$$

が安定の必要十分条件である。また、 $|s|$ が大きい項は、減衰が早いので、事実上システムの過渡応答特性は虚軸に近い(1個か2個の)極にほぼ支配されていると言って良い。さて、 s_i は $G_0(s)$ の分母の根であるが、これはつまり

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

の根である。この方程式を特性方程式と呼び、根を特性根という。

4.9 安定度

実用上は、フィードバック系が安定であることはもちろんのこと、どの程度安定であるか、つまり不安定に対する余裕がどれほどあるか、と言った問題も重要である。論拠等は省略し、ボード線図で見るゲイン余裕と位相余裕について述べる。

今まで簡単な伝達関数で見てきたように、周波数とともに位相は変化する。もしも、位相が 180° 進んだ(あるいは遅れた)所で、ゲインが 1 (0dB) より大きければ、この周波数では本来減衰する方向に働くべき力が逆の、振動を励起するように働いてしまう。これは正帰還でフィードバックループを共振させてしまう。そこで、位相が 180° ずれたところではゲインは0dBより小さくしなければならず、この大きさをゲインマージン(gain margin)と呼ぶ。逆に、ゲインが 1 (0dB) になったところ(ゲイン交差周波数)では、フィードバックを安定にするためには位相は -180° まで進んでいないはずで、このときの位相と -180° との差が位相マージン(phase margin)である。

では、フィードバック系を作ったとき、不幸にして安定でない、あるいは余裕がない設計になっていたらどうすればよいだろうか。これも概略のみ述べることにする。

- ゲイン調整

フィードバック系が不安定なのは、位相が -180°

となったところでゲインが0dB以上あるからである。ゲインをがんばりすぎているのが悪いのである。全体のゲインを下げてやれば、ゲイン交差周波数が下がり、従ってフィードバック系は安定になる。この方法は簡単ではあるが、確かに減衰性のみに着目すれば、これでよいが、ゲイン交差周波数が下がってしまうから、速応性および定常偏差の劣化も同時に招いてしまう。あまりおもしろくない。

- 位相遅れ補償

例えば図19の様な位相遅れ要素を直列にループ内に組み込んでやると、この部分の伝達関数は

$$G_c(s) = \frac{1 + saT}{1 + sT}$$

となる。但し $aT = R_2C$ 、 $a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$ である。

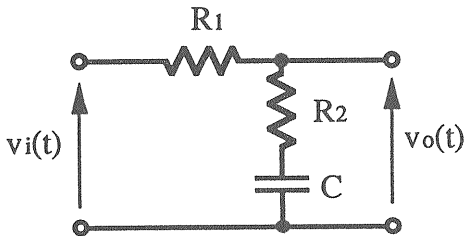


図 19: 位相遅れ要素

る。周波数が高いところ ($\omega \gg 1/aT$) では、位相は変わらずゲインが $g_c = |20 \log a|$ だけ低下する (問 この要素のボード線図を書いてゲインと位相の関係を求めよ)。つまり、低域側のゲインを上げることで減衰性、速応性に殆ど影響を及ぼさず、定常特性を改善することも出来るし、逆に不安定なループなら、低域をそのままに、高域側のゲインを下げることで、位相マージンを改善できる。

- 位相進み補償

図20の回路の伝達関数を α 倍したものは、

$$G_c(s) = \frac{1 + saT}{1 + sT}$$

となる。但し、 $T = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$ 、 $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$ である。これをループに組み込むと、ゲイン交差周波数付近の位相を進めることが出来る。つまり、ゲイン交差周波数付近の位相が -180° に近い、あるいは越えてしまっている、この回路で位相を進めることにより、位相マージンをとることが出来るようになる。

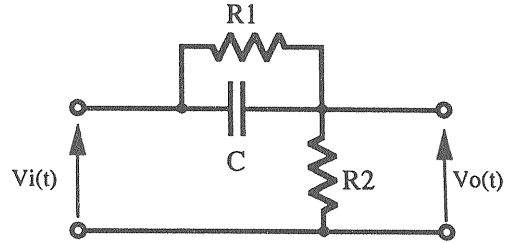


図 20: 位相進み要素

- 位相進み遅れ補償

以上の位相進み、遅れ要素を組み合わせたもので、低域のゲインを上げ、かつゲイン交差周波数付近では位相を進めるものである。

5 離散系のフィードバック理論

5.1 離散信号システム

連続時間信号 $x(t)$ をサンプル間隔 T でサンプルしたものの $x(nT)$ は離散時間信号と呼ばれ、連続信号 $x(t)$ の時刻 $t = nT$ 、 $n = 1, 2, \dots$ における値である。このような信号を処理する回路をデジタル信号処理回路と呼ぶ。離散的ということは必ずしもデータが2進値で表現されていることは意味しない(データ量自体はアナログ量でもかまわない)が、通常のデジタル回路は何らかの方法(A/D変換回路等)でデジタル化した2進信号を扱うのが普通であろう。

連続系と同じ様に、離散時間信号を表現する方法を考える。まず、単位インパルスを定義する。

$$\delta(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (66)$$

これを使って離散時間信号を表現すると

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(nT - kT) \quad (67)$$

となる。一般にデジタル信号処理で対象にする離散時間システムは、連続系で前提とした線形性、及び時不変性を備えていることが多いが、線形性がないものや時不変性が大々的にないシステムを制御することも出来る(例えばニューロ制御)。加速器の世界においては、残念ながら、現代制御理論レベルの応用もまだ無いのが現状の様である^[5]から、ここでもシステムは線形性、時不変性を備えていることにしよう。

システムの応答を

$$y(nT) = \varphi[x(nT)] \quad (68)$$

で表すことにする。線形性及び時不変性はそれぞれ

$$\varphi[ax_1(nT) + bx_2(nT)] = a\varphi[x_1(nT)] + b\varphi[x_2(nT)] \quad (69)$$

$$\varphi[x(nT - \tau)] = y(nT - \tau) \quad (70)$$

と表せる。また、応答をインパルス応答を用いて表現すると

$$\begin{aligned} y(nT) &= \varphi\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(nT - kT)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\varphi[\delta(nT - kT)] \end{aligned} \quad (71)$$

となり、

$$h(nT) = \varphi[\delta(nT)] \quad (72)$$

とおくと、式(71)は

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)h(nT - kT) \quad (73)$$

と表すことが出来る。式(72)の $h(nT)$ は離散信号系におけるインパルス応答であり、式(73)は畳込みである。連続系の場合と同様、

$$y(nT) = x(nT) * h(nT) \quad (74)$$

と表記する。

5.2 因果性と安定性

● 因果性

現実の物理システムは因果システムである。これは、未来の信号に現在の応答が関係しないと言うことである。よって、式(73)は

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^n x(kT)h(nT - kT) \quad (75)$$

の様に、総和の範囲は n までで良いはずである。つまり、因果システムの必要十分条件は、

$$h(nT) = 0, \quad n < 0 \quad (76)$$

である。

● システムの安定性

BIBO であるための条件は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(nT)| < \infty \quad (77)$$

である。この式の意味するところは、 $h(nT)$ の値が全ての時間で有界であり、また時間がたてばいつかは零になると言うことである。

5.3 周波数領域での表現

入力として正弦波 $x(nT) = e^{j\omega nT}$ を加えると、その応答は

$$\begin{aligned} y(nT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{j\omega(nT - kT)} \\ &= e^{j\omega nT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT} \end{aligned} \quad (78)$$

となる。ここで

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT} \quad (79)$$

とおくと、

$$y(nT) = x(nT)H(e^{j\omega T}) \quad (80)$$

となる。 $H(e^{j\omega T})$ はシステムの周波数領域での性質を決定しており、周波数応答と呼ばれる。また、

$$H(e^{j\omega T}) = M(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

とおいたときの $M(\omega)$ が振幅特性、 $\theta(\omega)$ が位相特性を表す。それぞれ、

$$M(\omega) = \sqrt{H(e^{j\omega T})H^*(e^{j\omega T})} \quad (81)$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega T})}{H_R(e^{j\omega T})} \quad (82)$$

である。単一周波数に対する遅延時間を表す相遅延特性は

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (83)$$

と定義され、複数の周波数成分が入力されたときの、包絡線の遅れ情報を表す群遅延特性は

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (84)$$

となる。直線位相特性の場合、相遅延特性と群遅延特性は同一となり、伝達信号が崩れることはない。

離散時間系のフーリエ変換は

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT} \quad (85)$$

と定義されている(問 この定義は連続時間信号のフーリエ変換の特別な場合であることを導き出せ)。離散時間のフーリエ変換は次のような性質を持つ。

1. 線形性

$$\mathcal{F}[ax_1(nT) + bx_2(nT)] = aX_1(j\omega) + bX_2(j\omega)$$

2. 周期性

$$X\{j(\omega + m\omega_s)\} = X(j\omega)$$

但し m は整数、 $\omega_s = 2\pi f_s$ はサンプリング角周波数。つまり、離散時間信号のフーリエ変換は、サンプリング角周波数 ω_s を周期とする周期関数である。

3. 周波数対称性

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

振幅スペクトルは偶対称、位相スペクトルは奇対称である。

4. 周波数シフト

$$\mathcal{F}[x(nT)e^{j\omega_0 nT}] = X\{j(\omega - \omega_0)\}$$

ある信号に角周波数 ω_0 の正弦波をかけ算すると、周波数スペクトルは ω_0 だけシフトする。これは AM 変調の原理である。

5. 時間シフト

$$\mathcal{F}[x(nT - n_0T)] = X(j\omega)e^{-j\omega n_0T}$$

ある信号を n_0T だけ時間シフトすると、周波数スペクトルは変化せず、位相スペクトルが $-\omega n_0T$ だけ変化する。

6. 時間畳込み

$$\mathcal{F}[x(nT) * y(nT)] = X(j\omega)Y(j\omega)$$

7. 周波数畳込み

周波数畳込みを

$$G(j\omega) * X(j\omega) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} G(j\omega_0) X\{j(\omega - \omega_0)\} d\omega_0$$

とすると、

$$\mathcal{F}[g(nT)x(nT)] = G(j\omega) * X(j\omega)$$

が成り立つ。時間領域のかけ算 (AM 変調) は、周波数領域では周波数の畳み込みになっている。

8. パーセバルの定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

信号 $x(nT)$ の時間領域での全エネルギーは周波数領域の全エネルギーは等しいという (当たり前の) 定理である。

結局、連続時間信号のフーリエ変換と離散時間信号のフーリエ変換の関係は、 $X_c(j\Omega)$ を連続信号 $x(t)$ のフーリエ変換とすると、

$$X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_c \left[j\Omega + j \frac{2\pi m}{T} \right] \quad (86)$$

の様に表され、連続時間信号の周波数スペクトル $X_c(j\Omega)$ が振幅で $1/T$ 倍され、サンプリング周波数 $f_s = 1/T$ Hz 毎に繰り返すということになる。

もしも連続時間信号のスペクトル $X_c(j\Omega)$ が $f_s/2$ (ナイquist周波数) 以上のスペクトルを持たない様に帯域制限してあると仮定すると、離散時間信号のスペクトルは式 (86) から、 $X_c(j\Omega)$ が繰り返す形となり互いに重ならない。従って周波数区間 $-f_s/2 \sim f_s/2$ での $X(j\omega)$ は振幅が $1/T$ になっている以外は元々のスペクトルを再現している。逆に、元々の連続信号が帯域制限してなければ、 $X(j\omega)$ には互いに重なり合う所が生じ (エリアシングという)、元々のスペクトルは再現できず、 $x(nT)$ は $x(t)$ の情報を失ってしまう。これからサンプリング定理が得られる。

- 区間 $-f_s/2 \sim f_s/2$ で帯域制限された信号 $x(t)$ を、サンプリング周波数 $f_s = 1/T$ でサンプリングして得られた離散時間信号を $x(nT)$ の周波数スペクトル $X(j\omega)$ において、 $-f_s/2 \sim f_s/2$ のスペクトルを取り出すと、元の連続信号 $x(t)$ が復元できる。
- 連続時間信号 $x(t)$ の情報を失わないように離散時間信号 $x(nT)$ を得るためには、 $x(t)$ の2倍以上の周波数で $x(t)$ をサンプリングする必要がある。

例えば CD のサンプリング周波数は 44.1 kHz であるが、これは人間の可聴域が 20 Hz ~ 20 kHz であるということから来ている ("マニア"の間ではこの規格が大変ご不満らしいが、実際は 20 kHz も聞こえる人は??? HI-FI と言われた (何という死語) FM 放送のバンド幅は 15 kHz しかなく、中波に至っては何と 4.5 kHz しかないがそれでも音が良いと言っていた "音楽" 評論家もいたが...)。

(問 ベータトロン角振動数は $\nu\omega_{rev}$ であり、強収斂の加速器では $\nu > 1$ である。ここで ν はベータトロン数あるいはベータトロンチューンと呼ばれる、一般に整数および半整数でない数である。フィードバックのために 1 箇所だけビーム位置を見ていることは、 $2\pi/\omega_{rev}$ 秒毎にビーム信号をサンプルすることに相当する。つまり、電子円形加速器は本質的に離散系である。このサンプルで測定できる最高角周波数は $\omega_{rev}/2$ であり、角周波数が $\nu\omega_{rev}$ のベータトロン振動は観測できないはずである (サンプリング定理より)。さあどうする?)

さて、以上示してきた離散時間のフーリエ変換は、時間信号が離散、連続に係わらず周波数領域では連続であった。これは、離散時間信号を相手にしている以上、いささか不便である。そこで、離散周波数点における周波数スペクトルを計算出来る離散フーリエ変換(DFT)を定義する。このため、次の条件を仮定する。

- $x(nT)$ は有限長信号とする。つまり、 $x(nT)$ は時刻 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ のみで存在する。
- ω は離散角周波数点とし直流からサンプリング角周波数 ω_s までを N 等分した周波数とする。つまり、

$$\omega_k = \frac{2\pi f_s}{N} k$$

これから、離散周波数点でのフーリエ変換は

$$X(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (87)$$

表記を簡単にするため、 $X(k) = X(j\omega_k)$ 、 $T = 1$ 、 $W_N = e^{-j2\pi/N}$ とおくと、離散フーリエ変換は

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad (88)$$

逆離散フーリエ変換(IDFT)は

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad (89)$$

となる。実際の計算は、かけ算 $O(N^2)$ 回、足し算 $O(N^2)$ 回かかるので、サンプル数が大きくなると、実時間性に欠ける。そこで、 $N = 2^\alpha$ の時は、高速フーリエ変換(FFT)アルゴリズムが有効に使われる。例えば、 $N = 4096$ の時、DFTでは16777216回のかけ算が必要だが、FFTでは24576で済み、約700分の1になる。具体的なアルゴリズムについては、参考書を見て下さい。

5.4 z変換と安定性

z変換は、離散時間信号 $x(nT)$ に対して、次のように定義される。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) z^{-n} \quad (90)$$

離散時間信号のフーリエ変換は、 $z = e^{j\omega T}$ と置いた、z変換の特別な例である。さて、式(90)から、1サンプル時間ずつ遅れた信号毎に、 z^{-1} が掛かっていくことが分かる。これからz変換において、 m サンプル時

間遅れは、 z^{-m} に相当するという、z変換の重要な性質が分かった。

さて、連続時間でのラプラス変換と同じ役割を離散時間ではこのz変換が担う。即ち、システムの入出力関係

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) h(nT - kT)$$

をz変換する事により、

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (91)$$

となり、この

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

がシステムの伝達関数である。

次に、この伝達関数を使い、システムの安定性を考えよう。 $H(z)$ が

$$H(z) = A \frac{z^M + a_{M-1}z^{M-1} + \dots + a_0}{z^N + b_{N-1}z^{N-1} + \dots + b_0} \quad (92)$$

と実係数の有理式であるとする。これを何らかの方法で因数分解し

$$H(z) = A \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} \quad (93)$$

と書けたとする。ここで、 z_1, \dots, z_M は零点、 p_1, \dots, p_N は極という。入出力関係をz変換し、上の因数分解から部分分数分解を行うと、

$$Y(z) = X(z)H(z) = K_1 \frac{z}{z - a_1} + K_2 \frac{z}{z - a_2} \dots \quad (94)$$

$$+ L_1 \frac{z}{z - p_1} + L_2 \frac{z}{z - p_2} \dots \quad (95)$$

となる。このうち、(94)は入力に関係する項、(95)は伝達関数の項である。これを逆z変換すると、

$$y(nT) = K_1 a_1^n + K_2 a_2^n + \dots \quad (96)$$

$$+ L_1 p_1^n + L_2 p_2^n + L_3 p_3^n + \dots \quad (97)$$

となる。このうち(96)までは、入力に関係する項だから、常に有界である。これに対し、(97)は、もしも各 $|p_i|$ が1より大きければ発散してしまう。よって、

- システムが安定であるためには、その伝達関数 $H(z)$ における全ての極がz平面の単位円内に存在しなければならない。

ということが分かった。

5.5 デジタルフィルタ

デジタルフィルタとは、ある周波数帯域の信号を通過させ、帯域外の信号は阻止する離散時間システムである。但し、アナログフィルタと異なり、サンプリング周波数の周期で同じ特性が繰り返される。デジタルフィルタには大きく分けて無限長インパルス応答 (Infinite Impulse Response、IIR 型) と有限長インパルス応答型 (Finite Impulse Response、FIR 型) がある。

5.5.1 IIR フィルタ

図21の様な回路を考える (この形は直接型Iの転置型で、実際は $N > 2$ では使われない。このほかに様々な形のIIRフィルタが存在するが、伝達関数の一般型は同じ)。この回路では、インパルス応答 $h(nT)$ は、係

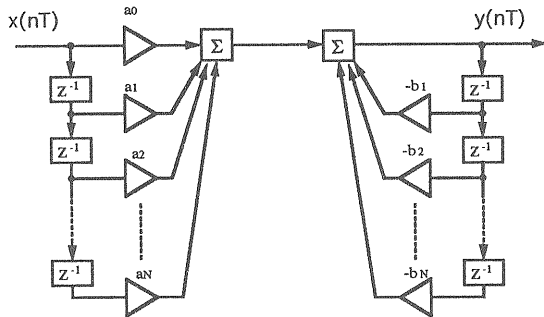


図 21: IIR フィルタ

数 b_k に関するフィードバック回路により、無限に続く。出力は

$$y(nT) = \sum_{k=0}^N a_k x(nT - kT) - \sum_{k=1}^N b_k y(nT - kT) \quad (98)$$

となる。この z 変換は

$$Y(z) = X(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} - Y(z) \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}$$

であるから、伝達関数は

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (99)$$

となる。

5.5.2 FIR フィルタ

デジタルフィルタにしかない特徴として、インパルス応答を有限に出来るということがある。図22の

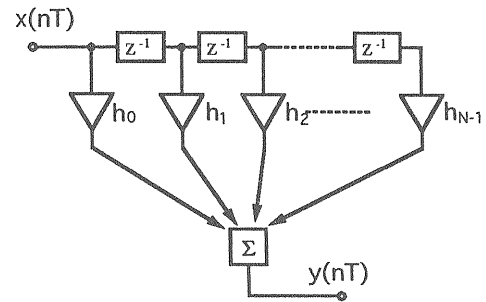


図 22: FIR フィルタ

様な回路はインパルス応答長が N である FIR フィルタで、この中の乗算器をタップと呼ぶ。この出力は

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(nT - kT)$$

となるので、伝達関数は簡単に

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)z^{-k} \quad (100)$$

となる。

5.5.3 IIR と FIR の比較

FIR フィルタはデジタルフィルタ特有の構造であるが、次のような長所がある。

- FIR フィルタはインパルス応答を中心に対称にすると、完全直線位相特性を実現出来る。つまり、群遅延が全周波数帯域でフラットになり、理想的な波形伝送ができる。
- FIR フィルタの伝達関数は0以外に極を持たないので、インパルス応答の値、つまりタップの係数によらず常に安定である。但し、当然ながらフィルタ部のみのもので、このフィルタをフィードバックシステムの一部に組み込んだ場合の安定性とは別問題である。
- 有限語長で設計するとき (つまり AD 変換したデータを扱う時) 問題になるリミットサイクル発振 (ビットの切り捨て丸めの非線形演算によっておこる雑音あるいは信号が無くなった後の発振状態) の心配がない。

欠点としては

- 位相回り (群遅延) の絶対値が IIR などと比べると大きい。

- 一般に同等の機能を実現しようとする、IIR 構成よりハードウェア数(タップ数)が多くなる。
- 設計が容易でない。

といったこととなる。これに対し、IIR 型のフィルタは

- 少ない次数(ハード負荷)で実現できる。
- 設計も容易。
- 全域通過回路(振幅を変えず、位相だけを変化させる回路)が実現出来る。

といった長所を持つが、

- たとえ安定に設計しても、係数語長制限のため、不安定になることがある。
- リミットサイクル発振がしばしば生じる。
- 群遅延歪みは大きい。

といった、欠点も持つ。加速器に対する実際の応用で、このどちらを使用するかはそのときの要求によるという、実に役に立たない答えしかない。Bファクトリーフィードバックでの選択の結果は後に述べる。実際のフィルタの設計法については、良い本が多数出版されているので、そちらを参照して下さい。

6 ビームフィードバック

ビーム不安定を抑制するためのフィードバック装置を実現する方法は、大きく分けて2通りある。1つはビームの振動パターン(モード)全体の振幅を(周波数領域で)測定し、全てのバンチの振動を同時に補正するモードフィードバック[7, 8]である。リング内全てのRFバケツに同じ数だけ粒子を詰めたときはビーム信号のスペクトルには高周波加速周波数 f_{RF} の整数倍の成分のみが現れるはずである。実際には不均一があるので、バンチ周回周波数 f_{rev} の整数倍の成分も出る。さらにバンチが位相振動を行っているとき、この f_{rev} の整数倍の成分の周り ($kf_{rev} \pm f_s$) にシンクロトロンサイドバンドが現れる。カップルドバンチモード数 n の不安定によるビーム信号のビーム信号のスペクトルは ($kf_{RF} \pm (nf_{rev} + f_s)$) に出る。モードフィードバックではこの不安定の周波数成分のみを取り出し、フィードバック信号を作り出す。図23にフェルミ国立加速器研究所ブースターシンクロトロンでのシンクロトロン振動に対するモードフィードバック装置のシステム図を示す[9]。簡単のため、ビーム信号が上側側波帯信号

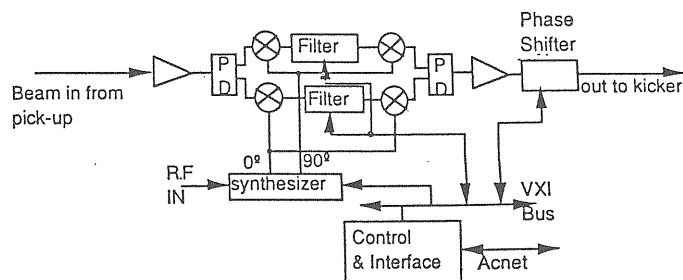


図 23: FNAL Booster mode by mode feedback system

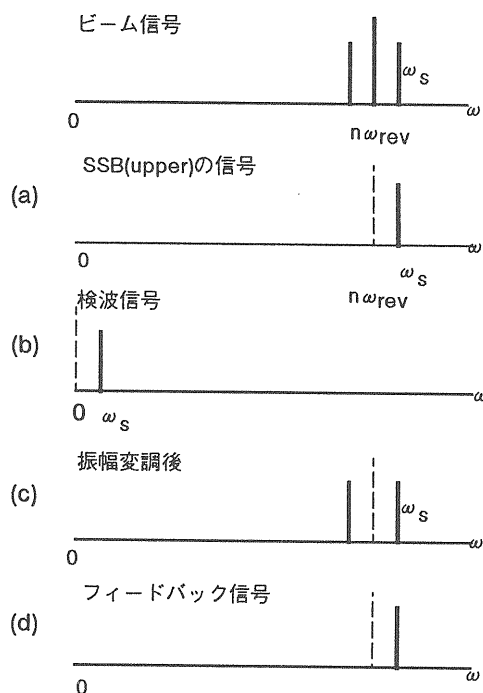


図 24: ビームのスペクトル

のみ含んでいる場合 ($n f_{rev} + f_s$) を考えよう。スペクトルは図24(a)のようになる。この信号を同相で2つに分け、一方は $\sin(n\omega_{rev})$ の信号で、もう一方は同じ周波数で位相を 90° 遅らせた信号 $\cos(n\omega_{rev})$ で振幅変調(信号のかけ算)をする。すると、出力には(位相はおいておくと) $2n f_{rev} + f_s$ と f_s の成分が現れるが、これをバンドパスフィルターを用いて f_s の成分のみを取り出す。さらに、この信号に、それぞれ $\sin(n\omega_{rev})$ と $\cos(n\omega_{rev})$ の信号をかけ算すると、(通常AMなので)それぞれ上側及び下側側波帯が出るが、同相で合成すると、下側側波帯はお互いに位相が 180° ずれているので、上側側波帯のみが残る。下側側波帯のみの時も同様に、結果的に下側のみが残る。これを空洞等を使いビームに戻す。ビーム検出信号はエネルギー偏差ではなく、位相のずれである場合、検出信号とフィードバック信号で 90° 位相をずらすことが必要であるが、これはバンドパスフィルター部に移相器を組み込むことにより行う。

さて、この回路はなぜこの様に複雑なことをしているのだろうか。なにもこんな面倒くさいことをせず、ビームピックアップからの信号を移相してフィードバックしても良さそうであるが、この場合は、側波帯でない、主信号が強烈に混入する。例えば、不安定が起こっているときの側波帯の大きさが主信号に対して -10dB (かなり激しい不安定が起きている状態) であったとすると、主信号は本来フィードバックに使う信号よりパワーで10倍も大きい。これが打ち消す方向に入っているとしても別にビームに対しては主RFからパワーが供給されるので、悪さはあまりしないだろうが、フィードバックに関係ないRF信号が莫大に無駄に循環することとなり、望ましくないのである。

例に示したフェルミの陽子ブースターでは、加速に伴いシンクロトロン周波数もRF周波数も変化する。このため、かけ算の基準信号はDDS(direct digital synthesizer)でトラッキングをし、フィルターはDSP(digital signal processor)でIIR構成とし、フィルター係数も変化させている。

以上のモードフィードバックは、周回バンチ数が少ないとき、または起きているビーム不安定のモードが2、3に限られているとき良く用いられるが、多くのモードが起こっているときは、時間領域のフィードバックの方が簡単なことがある。図25に分子科学研究所UVSORで縦方向フィードバックに用いられた個別バンチフィードバックシステムを示す^[10]。UVSORではハーモニック数が16で通常全てのRFバケットに電子を詰めて運転している。このとき、16のモードの不安定が起こりうる(間振動パターンを書くことによ

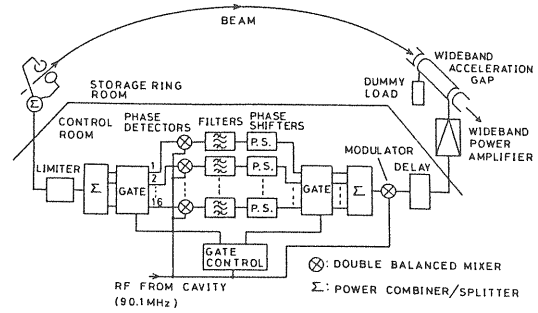


図 25: Bunch by bunch feedback system for UVSOR

り、確かに16のモードが起こりうることを示せ。但しこのうち半分は観測上同じに見える)し、実際不安定のモードを特定することは困難であった。この様に多くの(しかも安定でない)モードを持つ不安定には、周波数領域ではなく、すなわち全体の振動パターンに着目するのではなく、バンチの振動を個別に測定し、各バンチの振動を抑えるように個別にフィードバックをかける、個別バンチフィードバック(時間領域でのフィードバック)が適している。UVSORのシステムは、ビーム信号にゲートをかけ、目標とするバンチの信号のみを取り出し、位相検出をし、移相し、再び合成、さらにRFに変調をかけビームにフィードバックしている。16のバンチに対応するため、16の個別の回路がある。

こちらは、モードフィードバックと比べて単純に見えるが、実際上はそれほど容易ではない。このような多くの回路を用いる場合は、UVSOR規模ならまだしも、もっと多バンチとなった時は、回路が鬼のように増え、とても安定に動かさないのであるかとか、UVSORはバンチ間隔が11nsもあったから個別バンチの信号を分けることが出来たが、例えば4nsとかいった話となると、全然話は違ふとか、広帯域の増幅器、キッカーは難しいとかいった、技術上の困難があらこちらで現れてくる。しかしながら、多バンチ、大電流加速器において得体の知れない不安定源に対応したフィードバックを行うとすると、事実上個別バンチフィードバックしか解はない。そこで、技術上の困難を研究開発により一つ一つ解決していかなければならない。

さて、最終的なフィードバックシステムの減衰の時定数は結局いくらになるのであろうか。これは既に第3節で出てきたが、具体的に進行方向、横方向それぞれについて書き下してみよう。まず、進行方向についてである。ビーム不安定がおこり、最大 ΔE のエネルギー偏差が生じているとき、フィードバックシステム

が V_{turn} のキックを毎周与えるとすると、減衰の時定数 τ_e は

$$V_{\text{turn}} = 2 \frac{1}{T_0} T_0 (\Delta E/e)$$

となる (問 $\Delta E/e=1\%$ 、 $T_0=10\mu\text{s}$ のとき、減衰の時定数 $\tau_e=10\text{ms}$ が必要なら、どれだけの電圧をキッカーが発生する必要があるかを計算せよ。)

横方向については、ビームを観測している場所でのベータatron関数を β_m 、キッカーの場所でのベータatron関数を β_k 、観測された最大振幅 x_{max} の時フィードバックシステムが V_{turn} のキックを毎周与えるとすると、減衰の時定数 τ_x は

$$V_{\text{turn}} = 2 \frac{1}{T_x} T_0 (E/e) \frac{1}{\sqrt{\beta_m \beta_k}} x_{\text{max}}$$

となる。

7 ビーム検出部

モニターヘッド部としては、ボタン電極とかストリップライン電極が用いられることが多いが、その他にも放射光を利用するというアイデアもある。モードフィードバック用のモニターは必要とする周波数領域で感度が十分あれば良いので、特にそのための要請はない。個別バンチフィードバック用のモニターとしては、次の様な要請がある。

- 一般に非常に短い時間間隔で色々な処理をしなければならないので、出力は出来るだけ単純であること。つまり、出来るだけ加減乗除なしでビーム位置が分かること。
- バンチ振動に対して、十分な感度、S/Nがあること。絶対位置は不必要なことが多い。
- 前のバンチの信号出力の影響を次のバンチが受けないこと。つまりインピーダンス整合や高周波特性が十分よいこと。

さらに、後述するように、バンチ振動に対してより感度を上げるため、バンチのもつ周波数成分のうち、高周波部分を使いたいことが多いが、ビームが発生した電磁波を捕まえるモニターでは、ある閾値以上の高周波にいくとよそで発生した、現在のビーム位置と関係のないマイクロ波が真空チェンバー内を伝わってきてしまい、本来測定したい信号に混入するので、正確な測定が出来なくなる。この閾値は、真空チェンバーを円形導波管としたときの TE_{11} 及び TM_{01} モードによって決まり、それぞれ真空チェンバーの半径を a とする

とき、

$$J'_n(2\pi f_c a/c) = 0$$

$$J_n(2\pi f_c a/c) = 0$$

から求まる (問 これを示せ)。例えば、半径 5cm (楕円あるいはレーストラックなら長いところでの値) の真空チェンバーでは

$$2\pi f_c a/c = 1.841 (\text{for } \text{TE}_{11})$$

$$2\pi f_c a/c = 2.405 (\text{for } \text{TM}_{01})$$

からそれぞれ 1.75GHz 、 2.29GHz となる。このため、もしもこれ以上の高周波成分を使いたいなら、真空チェンバーの大きさを小さくするか、あるいは放射光を使うしかない。さらに言うなら、このような閾値以上の測定は元々信用出来ないのだから、やたらにモニターの周波数特性を高周波まで延ばしても無駄である。

7.1 ボタン電極

トリスタンMRで使用している電極の断面図を図26に示す。電極の大きさがバンチ長より短い場合、この

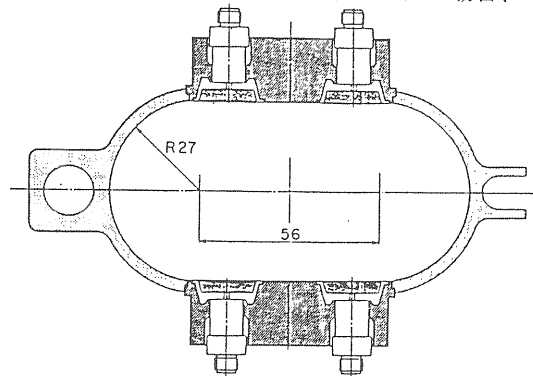


図 26: トリスタンMR のボタン電極

電氣的な等価回路は図27の様になり、

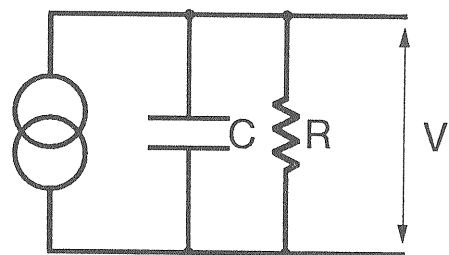


図 27: ボタン電極の等価回路

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} \quad (101)$$

となる。両辺をラプラス変換すると

$$V(s) = \frac{Q(s)}{C} \frac{s}{s + \frac{1}{CR}}$$

となり、微分時定数 CR の高域濾波器であることが分かる。よって、(十分 C が小さければ)ビームの微分波形が得られる。この電極を対向して配置したとき、それぞれの電極の出力電圧を v_R 、 v_L とすると中心付近ではビーム位置 x_d は近似的に

$$x_d = k \frac{v_R - v_L}{v_R + v_L}$$

となり、感度 k は近似的にボタン間隔に逆比例する。実際のビーム位置に対する出力電圧の応答は、真空チェンバー形状等を反映するので、精密に感度や位置応答を必要とする場合は境界要素法を使い計算で求めたり、アンテナを使いRF信号をいれ、マッピングをとる必要があるが、フィードバック用としてはそこまでは必要ない。フィードバック用としては、ステップ応答がどうなるかに関心がある。このため、ボタン形状としては、インピーダンス整合に重点を置くべきであろう。図28に通常タイプとKEKB用に開発中の電極のインパルス応答を示す。明らかに、インピーダン

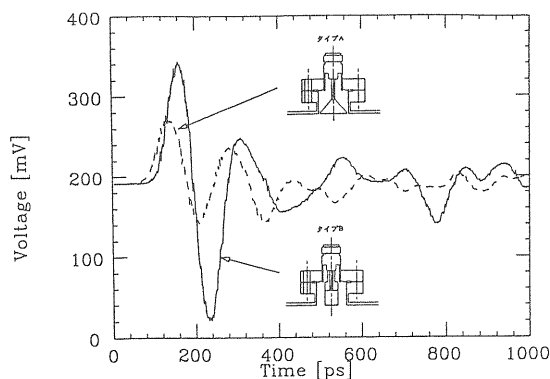


図 28: ボタン電極のインパルス応答の違い。実験は東京大学工学部原子力工学実験施設線形加速器で ~ 10 ps超短パルスを使い行った。

ス整合の効果が分かる。また、フィードスルー部分に対しても、HFSSを使った高周波計算を行い、在来タイプよりもより性能の良い物を設計・製作しつつある。

7.2 ストリップライン電極

ストリップライン電極は、真空チェンバーと、その内部にある棒状の電極(断面積は色々)で伝送線路を作り、ここを伝わるビームの壁電流成分を検出するものである(図43参照)。

電流 i_B の電子ビーム(インパルスとする)がストリップラインの上流端に来たとき、正電荷が出力口とスト

リップラインに押し出される。両方のインピーダンスは Z_L なので、等分されたパルス $\frac{1}{2}gi_B Z_L$ がそれぞれ出力およびストリップライン下流側に(ほぼ)光速で伝搬する。ここで、 g はストリップラインを走るイメージ電流の割合で、ビームの位置などに依存する。時間 ℓ/c 後には、ビームと、ストリップラインを走ってきた電荷が同時にストリップライン下流端に到着するが、ここでビームによって、 $-gi_B$ の負の電荷が誘起されるので、上流側と同様に、半分はストリップラインを逆に上流へ廻り、のこりは下流端の負荷へ流れる。このため、下流端負荷では、上流から伝わってきた電荷と下流端で誘起された電荷が相殺し、出力が出ない。時間 $2\ell/c$ 後にはストリップラインを伝わってきた電荷が上流端に到着し、上流端負荷には電圧 $-\frac{1}{2}gi_B Z_L$ の負のパルスが出る。このため、上流端負荷には時間間隔 $2\ell/c$ のバイポーラパルスが出ることになる。この出力をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} Z_p &= \frac{g}{2} Z_L (1 - e^{-j\omega 2\ell/c}) \\ &= g Z_L e^{j(\pi/2 - k_0 \ell)} \sin k_0 \ell \end{aligned} \quad (102)$$

という周波数応答を得る。これから、ストリップライン電極はストリップラインの長さ ℓ の $\frac{1}{4}$ の奇数倍の波長に対して最大の感度があり、偶数倍に対しては感度がないことが分かる。

ストリップライン電極は、ビームに対する開口角を大きくとれば出力を大きくとれるとか、真空チェンバー表面より突出する分ビームに近づけるとか、フィードバック用には利点もあるが、端の部分のインピーダンス整合がなかなか困難であり、バンチ分離が困難となる傾向がある。また、高い周波数成分にあわせたストリップラインは当然長さが短くなり、上の計算式からは逸脱する傾向が大きい。

8 位置換算回路

進行方向の位置のずれ(位相のずれ)、横方向の位置のずれを、バンチ毎に検出するには、平均的な位置を精度良く測る方法とは違う手法が必要である。以下に、KEKBで開発されている方法を主に紹介する。

8.1 進行方向位置検出

バンチがもしもRF平衡位相に留まっているならRF加速周波数とビーム信号は一定位相の関係にあるはずである。そこで、ビームの持つ周波数成分のうち $n\omega_{RF}$ 成分を(帯域濾波器BPF等を用いて)取り出す。この成分は

$$I_b \cos(n\omega_{RF} t)$$

という形をしているが、シンクロトロン(位相)振動をしているビームでは

$$I_b \cos(n\omega_{RF}t + \Phi \sin \omega_s t)$$

となる。これに、位相が90°ずれた、RF信号をn通倍した基準信号をDBM (double balanced mixer、高周波のかけ算器)等を使ってかけると、

$$\begin{aligned} & I_b \cos(n\omega_{RF}t + \Phi \sin \omega_s t) \times \sin(n\omega_{RF}t) \\ &= \frac{1}{2} I_b (\sin(2n\omega_{RF}t) - \sin(\Phi \sin \omega_s t)) \quad (103) \end{aligned}$$

となり、IF出力から低域濾波器(LPF)を使って高周波成分を除くと、シンクロトロン振動項が出る。振幅が小さいとすると、これは

$$I_b \sin(\Phi \sin \omega_s t) \sim I_b \Phi \sin \omega_s t \quad (104)$$

となるので、バンチの位相が分かる。具体的な高周波回路を図29に示す。 $n\omega_{RF}$ は出来るだけ高い所を使っ

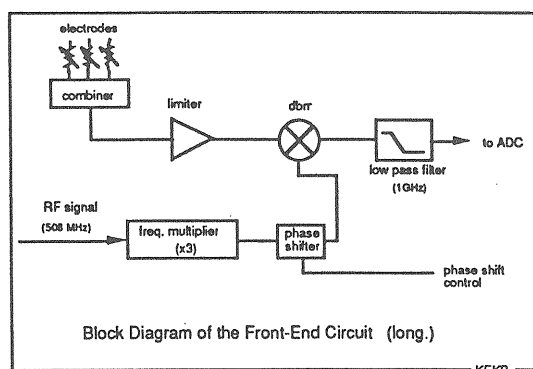


図 29: 進行方向ビーム位置検出回路

た方が、同じ位相のずれでも出力が大きくなるので良いが、既に述べたように真空チェンバーの円形導波管モードのカットオフ周波数より高いところは使えないので、それなりの上限値がある。KEKBのR&Dでは現在1.5GHz(=3 × f_{RF})を使用しているが、出来れば3GHzを使いたいところである。LBLのALSは真空チェンバーが鬼のように小さいので、楽々3GHz成分を使うことが出来る。

ビームから $n\omega_{RF}$ 成分を取り出すBPFは、十分Q値が低い物でないと、影響を次のバンチまで残してしまう。通常のLCRフィルターではこのような特性を出すのは困難だし、群遅延特性にどうしても難が残ってしまう。そこで、電極出力を波長分ずつ遅延させ、合成するケーブル遅延合成型BPFを使う(図30)。これはFIR型のフィルターであるから、完全直線位相特性を持つ。また、比較的大きなパワーを扱うことが出来る。さらに、信号の切れは、十分帯域幅の広いパワー分配

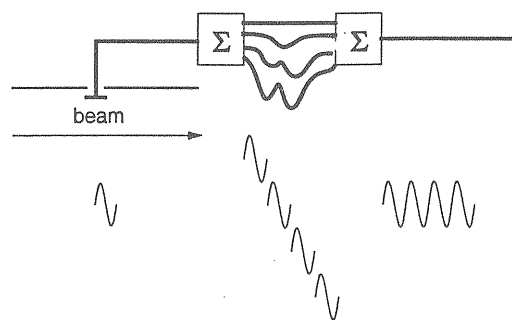


図 30: ケーブル合成型バンドパスフィルター

合成器を使えば、電極自身の出来でのみ決まる。具体的には、真空チェンバーに電極を進行方向にいくつか並べ、それを合成しても良いし、1つの電極の出力を分離・遅延・合成しても良い。前者の方がパワー(つまりS/N)的に有利なのは言うまでもないが、後者も調整・セットアップの容易さから捨てがたい魅力がある。図31にトリスタンMR日光直線部に置いたストリップライン電極の信号を4つに分離、合成した時の信号波形を示す。ビーム電流は0.14mA、オシロスコープまでにはケーブルで約10dB減衰する以外に20dBの固定減衰器が入っている。

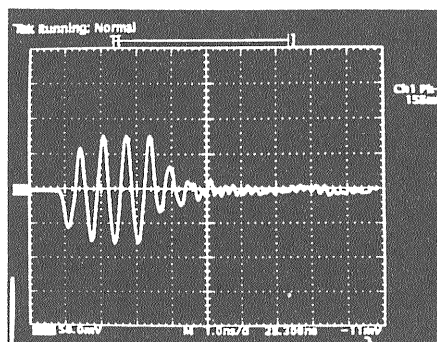


図 31: FIR フィルター後のビーム信号

SLACでは、基板状に書いたストリップラインの楕円形フィルターを使い、バンドパスフィルターを構成している。パワー的には寂しく、設計もかなり本格的なRF設計プログラムを動かさなければならぬので大変であるが、面白いアイデアである。

式(104)から分かるように、LPF出力はこのままだとビーム電流に比例する。ビーム不安定は(悪くて)ビーム電流に比例してきつくなると思えば、このままだも良さそうではあるが、今一つ気色が悪い。そこで、リミッティング増幅器をDBMの前に入れ、振幅のビーム電流依存性を消す。図33に示すように、バンチ電流0.14mAから0.5mAまで出力をほぼ一定に保つ

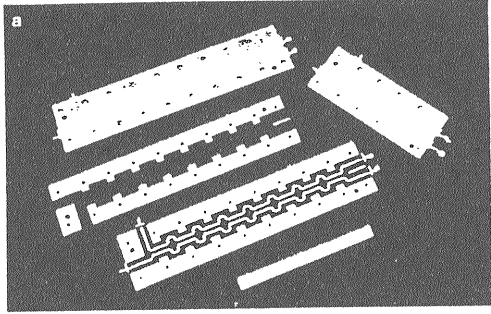


図 32: SLAC 開発のストリップライン結合型BPF

ことが出来た。これは良さそうであるが、リミッティング増幅器は信号はリミットするが、雑音成分はほとんど大きくしてしまう。実際にこのリミッティング増幅器を使うかどうかはまだ決断出来ない。

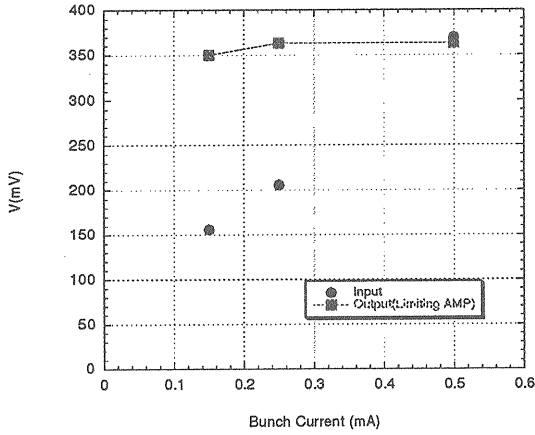


図 33: リミッタの効果

この信号から位相を検出し、フラッシュ型8ビットADC(FADC)でビーム情報をとったもの、及びそれにFFTをかけ周波数成分を出したものを図34に示す。FADCのクロック周波数は、バンチ周回周波数であるので約100kHzであるが、FADC自身は500MS/s以上の性能を持っている。このとき、加速空洞をシンクロトロン周波数で位相変調かけることにより、振幅(全幅)で約25psの位相振動を人工的に起こしている。これより、ノイズ成分はずいぶん小さいことが分かる(約40dB小さい)。もっと小振幅の時でも、ノイズ成分は十分小さいことが分かっているの、ノイズに対する心配はあまりなさそうである。

PFリングやトリスタンMRで、観測バンチの前後にバンチをいれ、同時に観測する実験も行っているが、今の所、隣まで4nsあれば、十分分離出来ることが分かっている。2nsも出来ているようではあるが、今一つ確証がない。もう少し(で済むかどうか分からないが)、

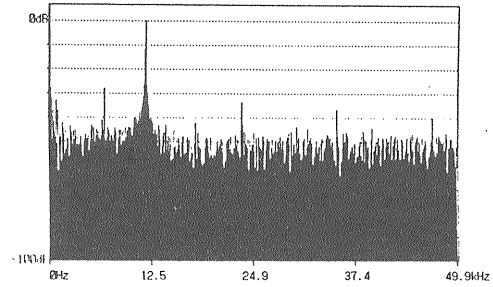
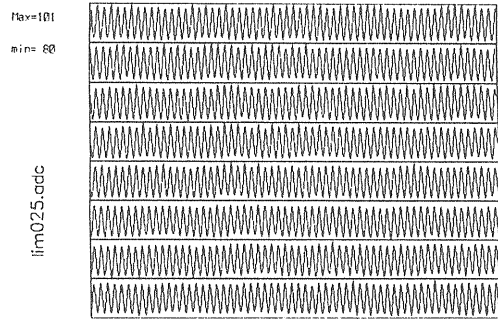


図 34: シンクロトロン振動の様子

開発に時間が必要である(かなり大きな技術的ギャップがある)。

8.2 横方向の振動検出

平均的な横方向の位置検出は、ビーム信号をスーパー検波し、狭帯域フィルターを使うことで特定の周波数成分のみをとりだし、S/Nを上げることが良く行われている。バンチ毎の位置検出は、狭帯域の手法は使えず、多かれ少なかれ広帯域の方法となる。KEKBでは、超広帯域AM/PM法を使う予定である。図35にAM/PM法の概念図を示す^[12]。対向電極からの信

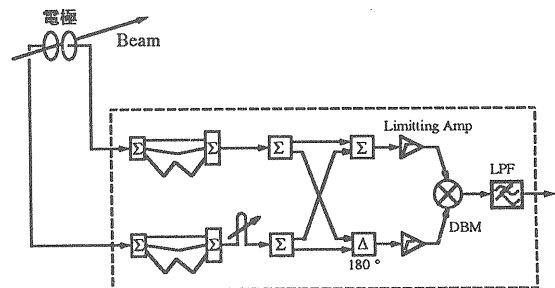


図 35: AM/PM法の概念図

号をBPFを通し特定の周波数近辺の周波数の信号を取り出す。一方(上側)はそのまま、もう一方(下側)はBPFの中心周波数に対して90°位相をずらす。実際は信号を遅延させることで移相を行う。この出力をそれぞれ0°分配器で2つに分け、一方は0°合成器で合成、もう一方は180°合成器で合成する。すると、図中に示すように、位相ベクトルは、もしも両電極の出力が等しければお互いに90°の位相差となり、かけ算をしLPFを通した後(積分した後)は0出力となる。もしも出力に差があると、位相差が大きくなったり、小さくなったりするので、かけ算の結果は線形に正負になり、位置情報を得ることができる。具体的には

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{R}{L} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (105)$$

となる(問 これを求めよ)。

一般によくsingle path monitor用に使われるAM/PM装置では、使用周波数は比較的低いあたり(例えば100MHz)が使われ、BPFのQ値も許される範囲で高いものが使われる。これは、低周波の方が扱いやすく、値段が圧倒的に安く、良い部品が使え、またQ値を上げることにより精度を上げることが出来るからである。また、AM/PM法では結局位相を検出しているので、かけ算器よりも低周波領域で実現が容易な位相検出器といったものを使えば、ビーム電流依存性を消すこともできるからである。

バンチ毎の位置検出では、通常AM/PM法と違い、まず、BPFのQ値を上げることは出来ない。そこで、例えばケーブル遅延型FIRのBPFを使うことになる。現在使っている1.5GHz成分だと、精々ビームからの信号の山の数はBPFを通った後で3から4ということになる。これをさらに移相したり、180°ひっくり返したりするので、実際にビーム振動成分が出るところは非常に狭い領域になる。

もしも0°合成器、180°の出力を、何もしないでかけ算をすると、結果はビーム電流の2乗に比例する(問これを示せ)。これではフィードバックの役に立たないようであるが、実際は、DCCTで測ったビーム電流でフィードバック全体のゲインを調整することなどは容易であり、またバンチ毎の電流のばらつきは、それほど大きくない(大きく無くする)ので、致命的ではない。しかし、ビーム電流の依存性を持たないことが望ましいのは言うまでもないので、前述のリミッティング増幅器をDBMの前に入れ、ビーム電流依存性を消すようにしている。図36にPFリングで測定した、位置感度のバンチ電流依存性を示す。オフセットのずれは、後述するフィルターで消すことができるので、問題にしない。傾きはビーム電流で約3倍の範囲内で一

定であると見なせるので、大いに効果があると期待している。

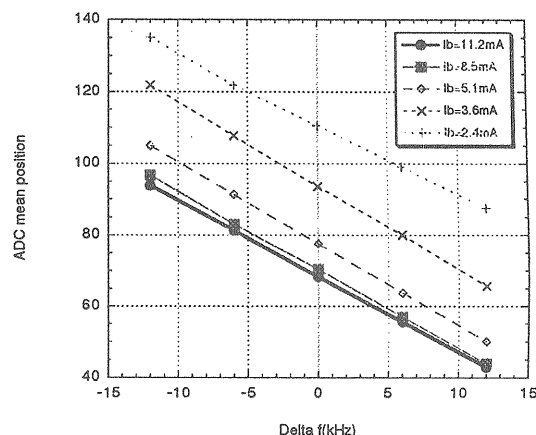


図 36: AM/PM法でのリミッタの効果

図37に本装置を使いPFリングでとった、水平方向ベータatron振動の様子、及びその周波数分布を示す。水平方向にはRFノックアウト法をつかい、人工的にベータatron振動を起こしている。振幅は大体0.5mm程度である。PFリングでは、単バンチ運転時に謎のシンクロtron振動が起きる。モニターがある場所はdispersionが大きく出ている所なのでシンクロtron振動も同時に見えている。S/Nは一見して分かるように、非常に良い。

KEKBではAM/PM法を採用する予定であるが、このほかにLBLのALSで採用した方法(そして多分PEP-IIで採用される方法)ではより直接的に、BPFを通った信号をハイブリッドで引き算をする^[11](図38)。この信号をRF信号で検波(heterodyne mode)するか、自分自身の信号で検波する(homodyne mode)かして、位置情報とする。その後段もすべてアナログシステムである。最近、めでたく2nsごとの個別バンチフィードバックに成功した様である(但し、PEP-II用にはもう1ステップ、1ターン遅延及びバンチ毎のCODのずれをどうするかという問題が残っている)。

もっと単純に、2つの電極出力を180°合成器で引き算してはどうだろうか。180°合成器は0°合成器と異なり、周波数特性、バランスともに不満なものしか実現出来ていないようである。また、出力は単純にはビーム波形そのままであるから、極めて高周波部分に位置情報が現れる。これを検出するにはより広帯域の後段素子(ADCにしても)が必要である。一般に、高周波素子の広帯域特性はあまり当てにできないので、狭帯域で使うならいざ知らず、広帯域特性に直接期待する様な使い方は実用品としてはどうかと思う。

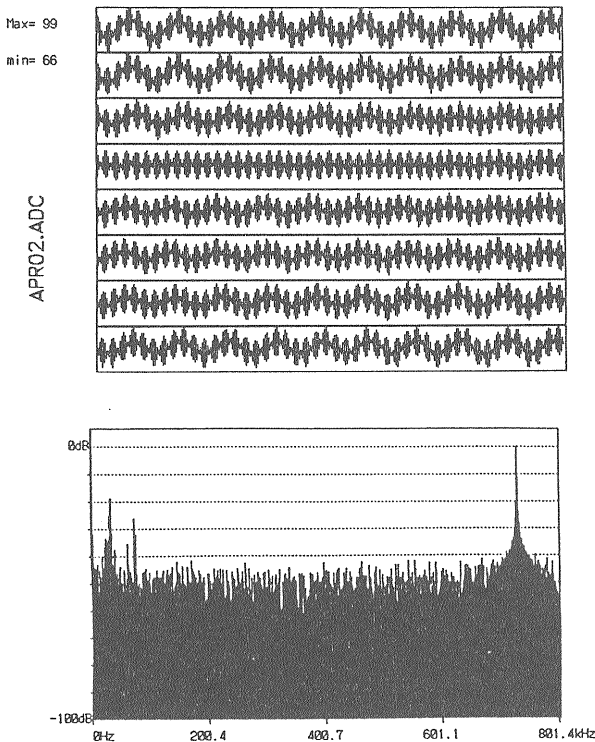


図 37: PF での水平方向振動観察

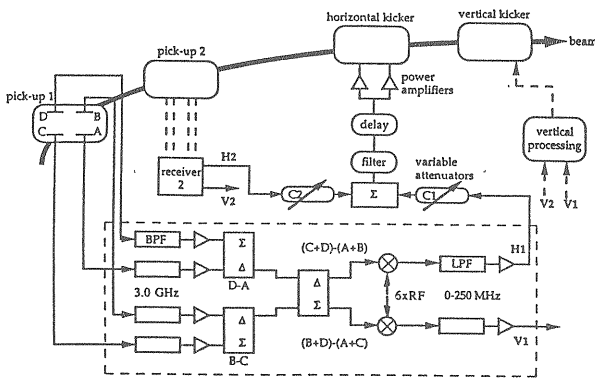


図 38: ALS での横方向 bunch by bunch feedback system

9 移相回路

はじめに述べたように、位置を検出し、フィードバックするにはベータトロンあるいはシンクロトロン振動の位相が 90° 回ったところで蹴るか、フィードバック信号の位相を 90° 回す必要がある。

9.1 シンクロトロン振動の場合

シンクロトロン振動はビーム周回よりずっと遅いので、 90° 位相がずれるまでにはビームはリングを何周もする。例えば、シンクロトロンチューンが 0.01 だとシンクロトロン 1 周期するのにビームはリングを 100 周もする (90° 位相がずれるまで 25 周)。これに対しては、次の 2 通りの方法を KEK と SLAC が別々に協同しながら研究を進めている。

9.1.1 ダウンサンプリングと DSP を使ったフィルタリング

こちらは SLAC の J. D. Fox のグループが進めてきた方法で [18, 19, 20, 21, 22, 23]、基本的には DSP を使い、数タップの FIR フィルターを構成し、 90° 移相およびフィルタリングを行うものである。但し、DSP は速いとはいってもとても数百 MHz で動くようなものでなく、また IO にもかなりの手間 (時間) がかかるので、並列化する必要がある。また、まじめに全ての周回で全てのバンチをとると、この並列度が鬼のように増えるし、(減衰時間に対しては) それほど大きくは効かないので、適当に間引いて (down sampling) データをとる。現在、quick prototype という、DSP を 4 台入れたシステムが完成して、ALS に組み込み、個別バンチのデータ取得は (一部のバンチについてのみである) 出来るようになってきている。非常に近い将来 (多分このノートが皆様のお手に渡ったころには) フィードバックループを閉じることができるようである。

DSP は高次フィルターを構成できるし、フィルター構成はあとからいくらでも変更できる。しかし、ダウンサンプリングを行っても並列度は相当なものである。殆ど超並列計算器である。電子回路設計の専門家が多くいる SLAC ならではのシステムであろう。確かに美しいし、原理的には望ましい方法であるとは思いますが果たしてここまでやる必要があるのだろうか。これに対する答えは、まだ (自分でも) はっきりしていない。

9.1.2 ハードウェア 2 タップ FIR フィルター

フィードバック用のデジタルフィルターとして、どうしても必要な機能のみのこして簡素化した極限は

どうなるかを考える。すると、必要なのは

- 移相機能
これは、デジタル遅延機能ともいえる。
- 直流除去機能
平衡位相の位置はフィードバックとは関係ない。実際、イオントラッピング対策のため、少なくとも電子リング(HER)の方には空バケツの部分が出来たろうが、ビームのあるところのビームローディングが莫大なため、空バケツの前後で平衡位相がずれるかもしれない。(現在の計算では問題にするほどではないが)。どちらにしても、平衡位相を変えようとする(実際は出来っこないが)フィードバックはパワーの無駄で、危険でもある。

であろうと思われる。そこで、CERNのF. Pedersenの提案は、ハードウェア加算機(ALU)で適当に離れた位相の引き算をすることで、この究極の機能を実現できないかということであった。これは(1と-1をかけるという意味で)2タップのFIRフィルターである。図39の様に90°前のデータから270°前のデータを引き算するモードはピークゲインモードというが、これを実現するためには、シンクロトロンチューン0.01の場合、25周前の位置から75周前の位置を引き算し、現在のフィードバックデータにするとということになる。蹴っているところでは位置を観測した位相から90°位相がずれていることが分かる。

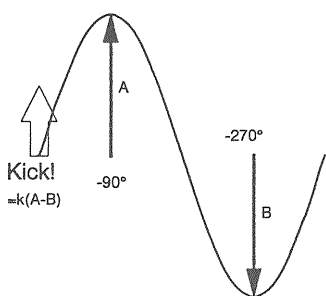


図 39: 2Tap filter 概念図

このように、昔のデータを使って引き算をするためには、最低3/4周期の位置データを記録しておく必要がある。どれくらいのメモリー容量が必要か計算してみよう。位置情報が8ビットでとれるとし、シンクロトロンチューンは0.01位を考えると、最低80周分のデータは必要である。ハーモニック数を仮に5120(まだ決まっていない)とすると、400kbyteのメモリーが必要である。データは500Mbyte/sでFADCから出てくるが、この周波数帯域でこんな超大容量のデータを

同期的に扱うのは不可能であるから、ある程度容易に扱えるスピードまで並列化する必要がある。KEKでは、8ビット508MS/sデータを16チャンネルに並列化するカスタム集積回路を開発中である。こうすると、メモリーでは32MHzの周波数となり、超高速のCMOSメモリーを使えば2アクセス程度の時間的余裕がある。1チャンネルは320バンチを担当することになる。

実際は、1チャンネルにつきメモリーを2つ並列に並べておき、データ書き込みは2つ同じアドレスに同時に行い、読み出しはそれぞれ違うアドレスを(例えば25周まえと75周前)同時に読み出す。こうすると32ns内に2アクセスで済むから、(Bi)CMOSメモリーで十分である。容量も問題ない。読み出したデータはハードウェア減算器(カスタムIC)で引き算をし、マルチプレクサ(カスタムIC)で合成し、508Mbyte/sのデータとし、DACに送り込む。

このフィードバックが実際にうまく働くかどうかは、シミュレーションを行って検証する必要があるが、現在までに不具合は見つかっていない。ノイズレベル30dBまで十分な減衰時間が得られる(もちろん後段のキッカーが理想的に働けばの話)ようである。

KEKでは、DSPテストセットを用いてデジタルフィルターの効果調べている[26, 27]。この某社のDSPセットは泣きたくなくなるほどのろまなADC、DSPそしてDACからなっており、ビームからの信号を入れるためにはピークホールド回路を自作せねばならず、またプログラムの関係上、DA出力をもう一度FADCでデジタル化するという、間抜けな事をしている。以下の図40は2 Tap FIRフィルターをピークゲインモードで動かしたときの、MRシンクロトロン振動の様子と、周波数応答の計算値を示す。ノイズレベルを見ると、フィルターの周波数応答が現れていることがお分かりになると思う。図41は2次のIIRフィルター、図42は4次のIIRフィルターの応答を示す。確かにIIRの方がノイズレベルを低くすることが出来る。

9.2 ベータトロン振動の場合

ベータトロン振動は、非常に速い振動で、例えば90°セル構成の加速器なら1セル先では位相が90°回ってしまっている。そこで、例えば位相差が90°の2点で位置を測るとビーム位置と角度が直ぐに分かるし、そこからまた1セル進んだ先で蹴ればフィードバックができるはずである。ビーム観測は良いが、フィードバックは実はこれではダメである。ビームは光速で進んでいるが、ケーブルや回路中の信号の伝搬速度はきわめて遅く、よほど狡猾に先回り(近道)をしてやらない限り決してビームには追いつかない。そこで、普通

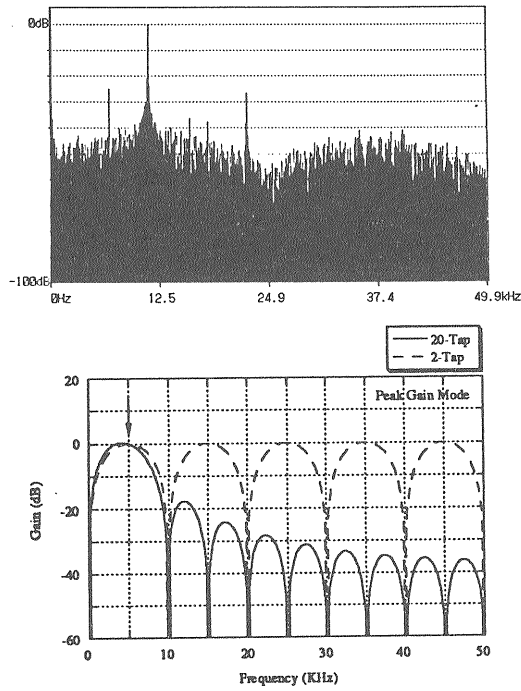


図 40: 2 Tap FIR フィルターを通したMR シンクロトロン振動

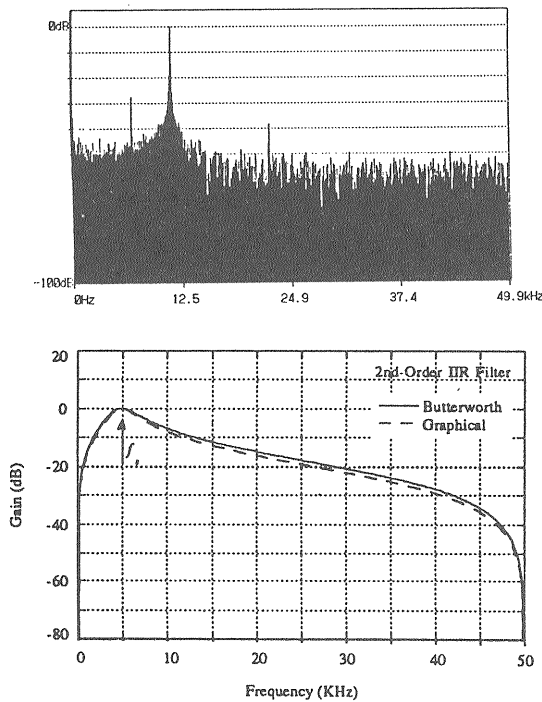


図 41: 2次IIR フィルターを通したMR シンクロトロン振動

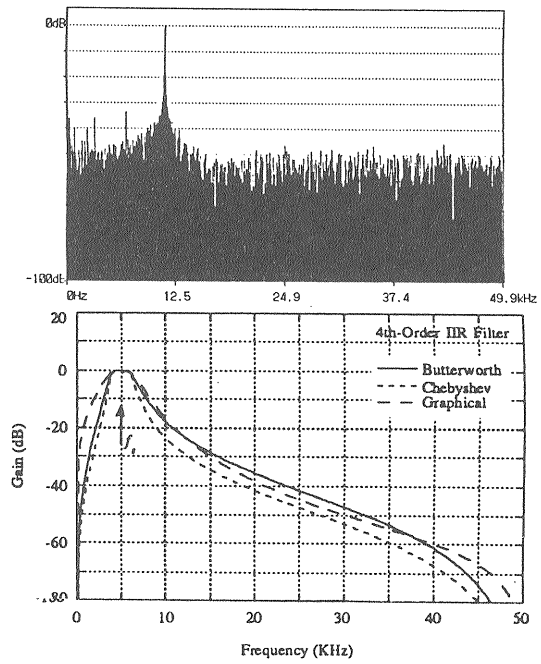


図 42: 4次IIR フィルターを通したMR シンクロトロン振動

はビームが1周してくるのを待ち伏せする方法が使われることが多い。このため、フィードバック信号を約1周分遅延させる必要がある。

ALSは第3世代光源とはいえ周長は200mしかない。このため、ケーブルでフィードバック信号を遅延させるとしても、約130mのケーブルを用意すればよいだけなので、それほど困難はない。では1周3kmのリングではどうだろう。この場合は2km分も遅延させなければならない。これはケーブルではとてもやれるものではない。光ファイバー等色々なアイデアはあるようではあるが。

KEKBではシンクロトロン振動の所で説明した2タップFIRフィルターをベータトロン振動にも使えないかと考えている。この場合、ベータトロンチェーンの端数によってタップの位置が変わる。また、あまり細かい調整は出来ないから、かなり90°からずれることも考えられる。一番心配なのは1周回った後でさえベータトロン振動を約39回もした後であるという事で、タップの位置の関係で数周後のデータを使わざるを得ないときは、気が遠くなるほど莫大な時間遅れ要素がフィードバックループ内に入ってしまうことである。さらに衝突がうまくいっているときは、衝突のおかげでビーム性質がずれていくので、なおさら時間遅れ要素が不安の種である。これに回答を与えるためには色々なシミュレーションが必要だが、残念ながら今一つ進んでいない。

10 キッカー

図43の様に電磁波をストリップライン電極に入れる
としよう。ビームがキッカーから受ける全運動量変位

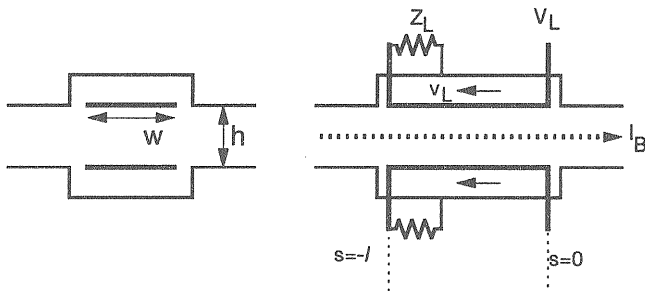


図43: ストリップライン電極

Δp_{\perp} は

$$\Delta \vec{p} = e \int_a^b (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) dt \quad (106)$$

となる。ここで \vec{E} と \vec{B} は粒子が軌道 $d\vec{s} = \vec{v}dt$ に沿って
 a から b までの間に受ける電場と磁場である。おなじ
経路で粒子は

$$\Delta \epsilon = e \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (107)$$

のエネルギー変位をうける。 \vec{v} を定数ベクトルとみな
すと、

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = e \left[\int_a^b \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt \int_a^b d\vec{s} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \quad (108)$$

となる。ここに

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}$$

を代入すると、 \vec{E} の位置および時間微分を組み合わ
せることが出来、

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = e \int_a^b \left[-\nabla (d\vec{s} \cdot \vec{E}) + d\vec{E} \right] \quad (109)$$

が得られる。これを進行方向と横方向に分離すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta p_{\parallel}) = e \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b E_{\parallel} dt \quad (110)$$

と

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta p_{\perp}) = -e \int_a^b [\nabla_{\perp} (\vec{E} \cdot d\vec{s}) - d\vec{E}_{\perp}] \quad (111)$$

を得る。式(111)の積分を実行し、(107)を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta p_{\perp} = -\nabla_{\perp} (\Delta \epsilon) + e [\vec{E}_{\perp}(b) - \vec{E}_{\perp}(a)] \quad (112)$$

となる。ここで、 a と b では、電磁場の入り口出口な
のでカギかっこ内の項は零になる。最後に電磁場がサ
イン波の形 $e^{j\omega t}$ で変化するとすると、

$$\frac{j\omega \Delta p_{\perp}}{e} = -\nabla_{\perp} \left(\frac{\Delta \epsilon}{e} \right) \quad (113)$$

が得られる。この式をPanofsky-Wenzelの定理^[15]と
いう。この式から、ビームの横方向の蹴りは純粋に
キッカーでの進行方向の電場の変化によってのみ得ら
れる(静電場がある場合を除く)という、重要な定理が
分かった。つまり、純粋な横方向の電場しか持たない
電磁場では(例えばTEとかTEMモードで励振してい
るキッカー)ビームは縦方向に蹴れないのは言うま
でもなく、横方向にさえ蹴れないのである。さて、では
どうやってビームを横に蹴れば良いのだろうか。これ
は宿題としよう。

10.1 ストリップラインキッカー

ビームを蹴るためには、Panofsky-Wenzelの定理か
ら、ビームとストリップライン上の電磁波を逆に走ら
せてやればよい。キッカー関数は

$$K_{\perp} = \frac{\Delta \epsilon}{eV_k} = \frac{1}{v_L} \sqrt{\frac{Z_L}{2R_0}} \int e^{j\omega t} \vec{E}_k \cdot d\vec{s} \quad (114)$$

を計算すればよい。この式の中に現れる進行方向に依
存する部分は $E_k e^{j\omega t}$ だけである。電場はストリッ
ライン電極の両端に集中していると見なせる。端での電
場の積分はビームに対する電極の開口角を反映する幾
何学因子(geometrical factor) $g_{\parallel}(w, h)$ および通過時
間因子(transit time factor)分減少する(但し、光速の
ビームに対しては、ほぼ1とみなして良い)。中心にい
るビームに対しては、幾何学因子は

$$g_{\parallel} = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\sinh \frac{\pi w}{2h} \right)$$

で与えられ、 $w/2h > 1$ の時、0.95以上となる。そこ
で、式(114)の進行方向に依存する要素 $E_k e^{j\omega t}$ は

$$E_k e^{j\omega t} = g_{\parallel} v_L [\delta(s) - \delta(s+l)] e^{j\omega(t+s/v_L)}$$

と書け、 $t = s/v$ を代入すると

$$K_{\parallel} = \frac{1}{v_L} \sqrt{\frac{Z_L}{2R_0}} \int g_{\parallel} v_L [\delta(s) - \delta(s+l)] e^{j(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_L})\omega s} ds$$

となり、

$$K_{\parallel} = \sqrt{\frac{Z_L}{2R_0}} 2g_{\parallel} e^{j(\frac{\pi}{2} - \theta)} \sin \theta \quad (115)$$

となる。ここで、 $\theta = (\frac{1}{v} + \frac{1}{v_L}) \frac{\omega l}{2}$ である。実用上は、
これからシャントインピーダンスを出しておくのが便
利である。通過時間因子の定義より、

$$RT^2 = Z_c |K_{\parallel}|^2$$

であるから、

$$R_{\parallel} T^2 = 2Z_L g_{\parallel}^2 \sin^2 \theta \quad (116)$$

となる。

ストリップライン電極は、横方向のキッカーとしても良く使われる。Panofsky-Wenzelの定理を使い、進行方向の電場から横方向のキックを求めることができる。対向電極を、同じ振幅で、しかし極性を逆にドライブすることにする。極性を変えることにより、幾何学因子も変わり、

$$g_{\perp} = \tanh \frac{\pi w}{2h}$$

となる。進行方向のキッカー関数はこの場合

$$K_{\parallel} = \frac{2y}{h} \sqrt{\frac{Z_L}{2R_0}} 2g_{\perp} e^{j(\frac{\pi}{2} - \theta)} \sin \theta$$

となる。

$$-jk\vec{K}_{\perp} = \nabla_{\perp} K_{\parallel}$$

を使うと、

$$K_{\perp} = \sqrt{\frac{Z_L}{2R_0}} 4g_{\perp} \frac{v}{hw} e^{-j\theta} \sin \theta \quad (117)$$

が得られる。この結果は進行方向の K_{\perp} と(当然)良く似ているが、分母に ω が入っているため、 $\omega = 0$ で最大の応答を持つ点が異なる。シャントインピーダンスは

$$\begin{aligned} R_{\perp} T^2 &= 2Z_L \left(g_{\perp} \frac{2v}{hw} \right)^2 \sin^2 \theta \\ &= 2Z_L \left(g_{\perp} \frac{\ell \sin k\ell}{w \cdot kl} \right)^2 \end{aligned} \quad (118)$$

となる(下の式は $v = v_L = c$ を仮定した)。長さが長い方がシャントインピーダンスは大きくなる(大体2乗に比例する)が、高域の周波数特性が落ちるので、広帯域にするには長さを短くせざるをえない。

10.2 進行方向キッカー

進行方向の狭帯域のキッカーとしては、空洞に入れるRFを位相あるいは振幅変調すれば良い。但し、新たにフィードバック用空洞を入れる場合、このフィードバック空洞によるビーム不安定を誘起しないためには、Q値をがんばって下げるか、あるいは開き直ってモードフィードバックを用意する必要がある。Qを下げた極限は、真空チャンバーのギャップとなり、広帯域のフィードバックに使えるが、シャントインピーダンスもひどく低いので、大きなフィードバック電圧は供給出来ないし、間にあるセラミックスが心配なので大パワーでがんばる訳にもいかない。

第1のアイデアは図44の様に、 $\lambda/4$ 波長の長さのストリップラインを直列に並べ、それぞれを伝搬速度換算で λ に相当する遅延線で結ぶといったものである。この中を(当然)ビームと反対方向に電磁波を走らせる。すると、ストリップライン間では一番端の2倍の電圧がでる。このため、ストリップラインの数を多くすれば多くするほど得をする。

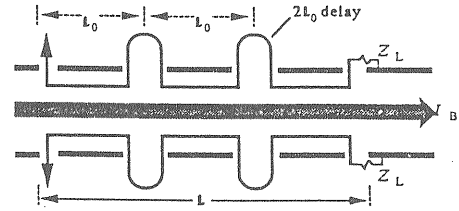


図 44: 進行方向キッカーその1

このアイデアをより広帯域にしたものが、Lambertson先生が提案したSeries-Drift-Tube型キッカー空洞である。この空洞はSLACとKEKでそれぞれ試作されている。図45にこの構造図、図46に概念図を示す。基本的な考え方は先のストリップラインを同軸状

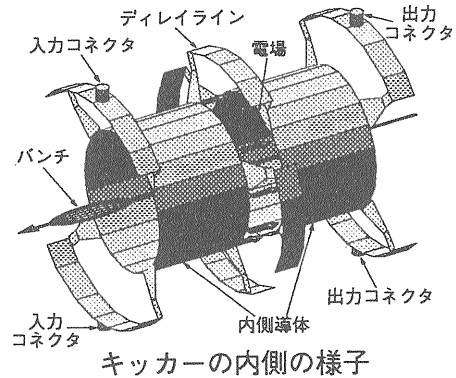


図 45: Series-Drift-Tube型キッカー電極

の電極にしたもので、電極間は λ に相当する巧妙な遅延板でつないである。各電極間ではそれぞれの電極の電圧の2倍の電圧がでるから、同軸体の特性インピーダンスを Z_c とし、電極の個数を N 個とすると、シャントインピーダンスは

$$R = (2N)^2 Z_c$$

となる。これより、例えば $N = 4$ 、 $Z_c = 25\Omega$ とすると、 $R = 1.6k\Omega$ となる。LBLでは、この電極の発熱が

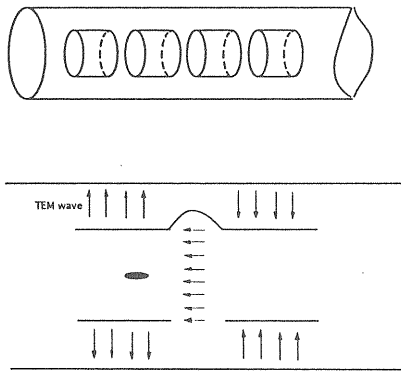


図 46: Series-Drift-Tube 型キッカー概念図

相当あると心配して、電極を黒く塗って、輻射で冷却するとかいったところまで思い詰めているという(真偽は定かでない)怪しげな情報もあるが、KEKでのベンチテストでは、少なくとも入力RFの内部での損失による発熱はほぼ無かったし、ビームからみたインピーダンスも十分低いことは確認している。何か未知の要因があるのかもしれない。

どちらのアイデアにしてもRFをビームと逆方向に入れなければならないということを忘れてはならない。このため、あまり電極の数を多くすると、今のバンチが通過し終わる前に(つまりRFが前のバンチ用のとき)次のバンチが入って来てしまう。このため、バンチ間隔により電極個数は制限されてしまう。例えば、中心周波数に $2 \times f_{RF}$ を使うとき、2nsおきにバンチを詰め込むと、1つのキッカーでは電極は2個までとなる。これでは N^2 の特性は生かせない。もっと斬新なアイデア、開発が必要である。

11 最後に

図47にKEKB用個別バンチフィードバックシステムの全体図を示します。KEKのBファクトリーは1999

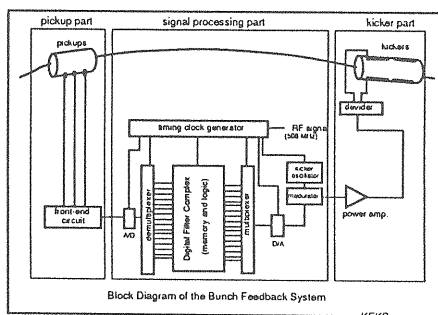


図 47: KEBB bunch-by-bunch feed back system

年完成する予定です。はじめからフルスペック(大電流、

2 nsバンチ間隔)で動く訳ではないでしょうが、フィードバックは完成していなければいけません。フィードバックとしての目標は、再来年(1996年)のARを使ったRF空洞用大電流試験で、完動システムとして動作試験ができるということです。現状でのKEKBフィードバック装置の到達度を独断で記すと

- ビーム位置検出
原理的にKEKBで使える方法を確立した。あとは細かい、フィードスルーの改善とかボタン形状の最適化が残っている。
- 移相回路
今年度カスタム集積回路を製作中。来年度には、プロトタイプボードが完成する予定。
- 広帯域高出力増幅器
これは、ほぼメーカーの方で開発してもらう予定。
- キッカー
横方向はただのストリップラインなので、大電力であるといった事以外にはあまり心配していないが、縦方向はまだまだ開発が必要。

と、この時期にしてはまあまあのところではないでしょうか(砂糖のように甘い判断)。今までの所、PFリング、MR及び東京大学工学部原子力工学実験施設線形加速器を使ってビーム測定実験や要素の特性測定を行ってきましたが、これからARにフィードバック装置を組み込み、いよいよフィードバックループを閉じるということを始めようとしています。これからまだまだ困難な課題を一步一步解決していかなければなりません。

KEKB用ビームフィードバック装置は、SLAC/LBLをお手本に開発を続けてきたというのが(客観的に見ても)正直なところです。SLAC/LBLのフィードバックは、このノートの中に何度も名前が出てきたG. Lambertson先生をはじめ、経験豊かで知恵に富む多くの方々および優れた技術サポートによって進んでいます。KEKでは(たとえ能力が同等という、不遜な仮定をおいたとしても)全く人手不足であり、いままでの開発においては常に遙か後塵を拝していたのです。しかし、信号検出、処理部では、SLACとは違う、KEK独自の方法を開発しつつあり、この部分では(やはり少々遅れている事を除けば)悪くはない位置におり、場合によってはSLACに技術供与することも可能になると思います。フィードバックグループ同士、(take-and-takeでない、少しはgive-and-takeの関係で、しかしgive<<takeかも...) お互いに協力しあいながら、よ

り良い装置をお互いに完成することが出来ればいいなあ、と希望しています。

このノート中に引用した実験結果は、KEKB フィードバックグループ(菊谷英司、飛山真理、末次祐介(加速器研究部)、馬力(BEPC)、帯名崇、皆川康幸(総合研究大学院大学数物科学研究科加速器科学専攻)、春日俊夫(放射光実験施設放射光光源研究系))によるものです。特に春日教授には、このノートを書くにあたり、色々相談に乗っていただきました。図面の多くは帯名氏に手伝っていただきました。その他、実験に協力していただいたり、相談にのっていただいたKEKB関係者及びPF光源系の多くの方々に感謝します。制御理論の部分は多く [1] 及び[3]によっています。もしも信号処理や制御理論をこれから勉強したい方は、大変分かりやすいので、お薦めします。はじめのビームフィードバック概論は、参考文献[6]に大幅に依っています。モードフィードバックの論文は[7]から[9]を、個別バンチフィードバックの論文は[10]や[11]をあげておきました。SLACのPEP-II計画でのフィードバック関連の論文は[18]から[23]に、KEKBでのフィードバックは[24]から[29]にHotな現状が出ています。このほかにも多くの未出版情報や怪しげな伝聞をもとにしています。

はじめにお断りしたように、このノートは多くの必要な部分が欠落しており、(きっと間違いなく)大嘘も含まれると思われます。聡明な読者の皆様、どうぞご自分で誤りを発見して訂正して下さい、と無責任極まりないことをうそぶいて、このノートを終わります。

参考文献

- [1] 樋口龍雄 「自動制御理論」 森北出版株式会社
- [2] G. F. Franklin et. al. "Feedback Control of Dynamic Systems", Addison Wesley
- [3] 尾知 博 「デジタル・フィルタ設計入門」 CQ 出版社
- [4] 「DSP を使いこなす」 CQ 出版社
- [5] Atsushi Ogata, "Modern Control Theory for Beam Dynamics, An Introduction", KEK Report 86-1 1986
- [6] J. Galayda "Feedback Control of Multibunch Instabilities" AIP Conference Proceeding 1992 p.663
- [7] F. Pedersen and F. Sacherer, "Theory and Performance of the Longitudinal Active Damping System for the CERN Booster" IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-24 (1976) 1977
- [8] B. Kriegbaum and F. Pedersen, "Electronics for the Longitudinal Active Damping System for the CERN PS Booster" IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-24 (1975) 1977
- [9] I. Haberman and I. Rypshstein "Longitudinal Damping System for the Fermilab Booster" in proceedings of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference, San Francisco, p.1386
- [10] T. Kasuga et. al. "Longitudinal Active Damping System for UVSOR Storage Ring" Jpn. J. Appl. Phys. 27 pp100-103 (1988)
- [11] W. Barry et. al. "Transverse Coupled-bunch Feedback in the Advanced Light Source(ALS)" in proceedings of the EPAC94, London
- [12] Robert E. Shafer "Beam Position Monitoring", AIP Conference Proceedings 212 (26)1990
- [13] G. Lambertson, "Dynamic Devices - Pickups and Kickers", in Physics of Accelerators, eds. M. Month and M. Denes, AIP Conf. Proc. 153,1414 (1987)
- [14] D. A. Goldberg and G. R. Lambertson "Dynamic Devices, A Primer on Pickups and Kickers", AIP proceedings 1992
- [15] W. K. H. Panofsky and W. A. Wenzel, Rev. Sci. Instr. 27 967(1956)
- [16] "Feasibility Study on an Asymmetric B Factory based on PEP" LBL PUB-5244/SLAC-352/CALT-68-1589
- [17] "PEP-II An Asymmetric B Factory" LBL-PUB-5379/SLAC-418/CALT-68-1869 (1993)
- [18] D. Briggs et. al. "Prompt Bunch by Bunch Synchrotron Oscillation Detection via a Fast Phase Measurement" in proceedings of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference p(1404)
- [19] D. Briggs et. al. "Computer modelling of bunch-by-bunch feedback for the SLAC B-Factory design" in proceedings of the 1991 IEEE Particle Accelerator Conference pp.(1407)

- [20] G. Oxoby et. al. "Bunch-by-Bunch Longitudinal Feedback System for PEP-II", in proceedings of the EPAC94, London
- [21] H. Hindi et. al. "A Formal Approach to the Design of Multibunch Feedback Systems: LQG Controllers" SLAC-PUB-6503 (1994)
- [22] J. D. Fox et. al. "Operation and Performance of a Longitudinal Damping System Using Parallel Digital Signal Processing" in proceedings of the EPAC94, London
- [23] L. Sapozhnikov, et. al. "A Longitudinal Multi-Bunch Feedback System Using Parallel Digital Signal Processors", in proceedings of the 1993 Beam Instrumentation Workshop, Santa Fe, NM.
- [24] Proceedings of International Workshop on B-Factories: Accelerators and Experiments, KEK Proceedings 93-7
- [25] E. Kikutani, et. al. "Preliminary Results of a Test of a Longitudinal Phase-Space Monitor" in proceedings of the 9th Symp. on Accelerator Science and Technology, KEK 1993(388)
- [26] L. Ma, et. al. "FIR Filters for the Bunch-by-Bunch Feedback System of TRISTAN II" in proceedings of the 9th Symp. on Accelerator Science and Technology, KEK 1993(391)
- [27] L. Ma, et. al. "Designing IIR Filter for the Bunch-by-Bunch Feedback System of TRISTAN II" KEK Internal 93-12
- [28] E. Kikutani et. al. "Development of Bunch Feedback System for KEKB" in proceedings of the EPAC94, London/KEK Preprint 94-49
- [29] E. Kikutani and Y. Minagawa, "Parameters on 2-Tap Filters for the Bunch Feedback System", to be published in KEK report