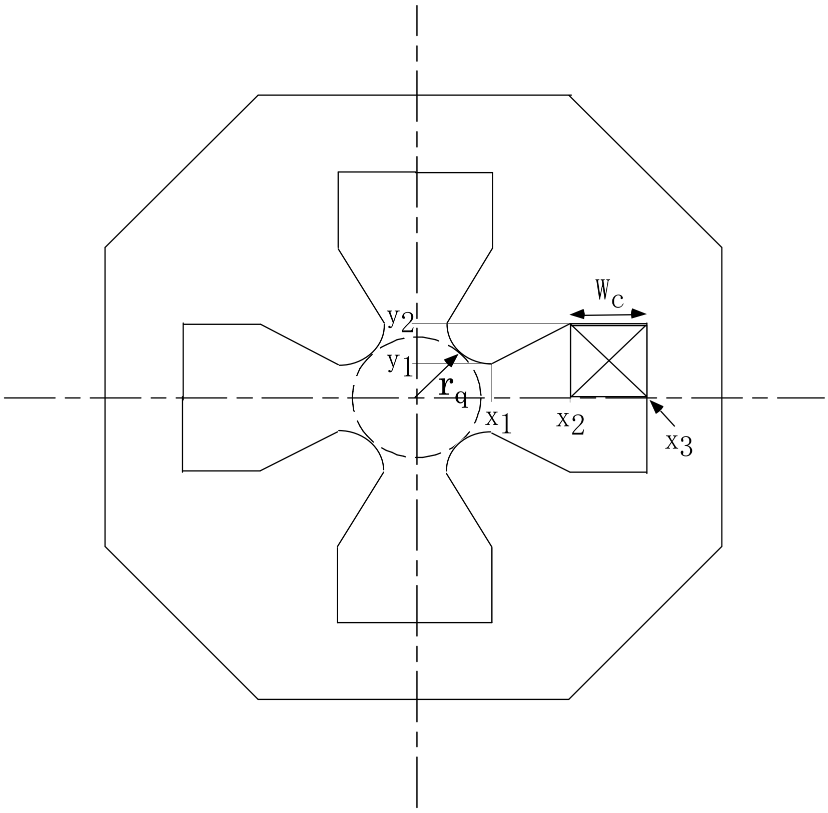
速い繰り返しのシンクロトロン電磁石・電源 訂正

【訂正 １】

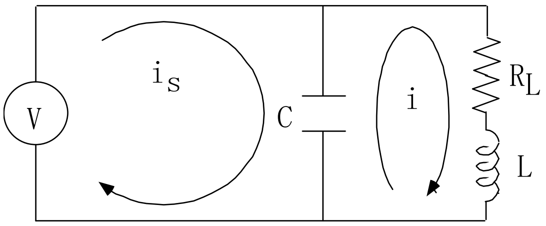
(2-6) 式 ; 誤りではないが、図 2-3-2 に適用すると、インダクタンスを高く見積もりすぎる。以下の式を推奨する。括弧内の第２項を無視して、$x_1 = y_{max}$ と置けば、(2-6) 式に一致する。

$$L = 8\mu_0 N_Q{}^2 x_1 (x_1 + 2y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \ln \frac{y_2}{y_1} + \frac{y_1}{y_2} \frac{2}{3} W_c) \frac{\ell_m}{r_Q{}^2}$$



【訂正　２】

(3-6) 式 ; 共振点付近での位相関係を正しく表わしていない。
図３－５を以下の様に訂正し、微分方程式から出発する。



共振回路の電流に対する方程式は

$$\frac{1}{C}\int (i - i_s)dt + R_L i + L\frac{di}{dt} = 0$$

となる。上の式を微分して、式を整理すると、

$$\frac{d^2 i}{dt} + \frac{R_L}{L}\frac{di}{dt} + \omega_0{}^2 i = \omega_0{}^2 i_s$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$$

と書くことができる。この式は、電流 i_s による共振回路の強制振動の式である。

$$i_s = i_0 \sin \omega t$$

とおいて、定常解を求めると、以下のようになる。

$$i = \frac{i_0 \omega_0^{\ 2}}{\sqrt{(\omega_0^{\ 2} - \omega^2)^2 + (\frac{\omega\omega_0}{Q})^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\tan\varphi = -\frac{1}{Q}\frac{\omega / \omega_0}{1 - \omega^2 / \omega_0^{\ 2}}$$

厳密に言うと、この位相は i_s から計ったものであるので、電圧位相に対するものではない。しかしながら、共振点に十分近ければ電源の電圧、電流はほぼ同位相とみなしても良い。

【訂正　3】

(3-9) 式；電磁石電流の添え字 j が必要。

$$i_{m_j} = I_{m_j} e^{j\omega t}$$

【訂正　4】

(3-15) 式；式の成り立つ期間（放電期間）の誤り。

t = -t_1 ～ t_1

【訂正　5】

(3-19) 式；式の誤り。

$$v_f = V_s\{1 - \cos\omega_f (t - t_1) + \cot\frac{\phi}{2}\sin\omega_f (t - t_1)\}$$

速い繰り返しのシンクロトロン電磁石・電源 補遺

パルス電源の動作解析・・・回路方程式の解法

本文の（3-15）、(3-16）式を以下の条件の下で解く。

①放電期間に於いて Vch’は一定。

②電流、電圧は、各期間の境界で連続。

@ $t = -t_1$; $i_f = i_{f1}$、$v_f = v_{f1}$、$i_p = 0$

@ $t = t_1$; $i_f = i_{f0}$、$v_f = 0$、 $i_p = 0$

@ $t = t_2$; $i_f = i_{f1}$、$v_f = v_{f1}$、$i_p = 0$

③i_f、i_p の時間微分は t=0 で 0 とする。

（１）充電期間

(3−16）式を時間微分してやれば、

$$\frac{d^2 i_f}{dt^2} + \omega_f^2 i_f = 0 \quad , \quad \omega_f^2 = \frac{1}{L_f C_f} \tag{1}$$

となるので、

$$i_f = a_f \cos\omega_f t + b_f \sin\omega_f t \tag{2}$$

を得る。一方、C_f 電圧は

$$\begin{aligned} v_f &= V_s - L_f \frac{di_f}{dt} \\ &= V_s + L_f \omega_f (a_f \sin\omega_f t - b_f \cos\omega_f t) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。境界での条件から係数が決まって、最終的に

$$i_f = i_{f0}\cos\omega_f(t-t_1) + \frac{V_s}{L_f\omega_f}\sin\omega_f(t-t_1) \qquad (4)$$

$$v_f = V_s(1-\cos\omega_f(t-t_1)) + L_f\omega_f i_{f0}\sin\omega_f(t-t_1)$$

となる。

（２）放電期間

(3-15) 式を時間微分して以下の連立微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 i_f}{dt^2} + \omega_f^2(i_f - i_p) = 0$$

$$\frac{d^2 i_p}{dt^2} - \omega_p^2(i_f - i_p) = 0 \quad , \quad \omega_p^2 = \frac{1}{L_p C_f} \qquad (5)$$

但し、条件①を用いた。上の式を条件③の下で解くと、

$$i_f = a\cos\omega t + b$$

$$i_p = c\cos\omega t + d \qquad (6)$$

$$\omega^2 = \omega_f^2 + \omega_p^2$$

と書くことが出来る。係数を電流についての境界条件から決めてやると、

$$i_f = a(\cos\omega t - \cos\omega t_1) + i_{f0}$$

$$i_p = c(\cos\omega t - \cos\omega t_1) \qquad (7)$$

ここで、$i_{f1} = i_{f0}$ となることが分かる。残った係数 a，c は v_f について の条件から決まる。i_f を用いて v_f を表わすと、

$$v_f = V_s - L_f\frac{di_f}{dt} = V_s + aL_f\omega\sin\omega t \qquad (8)$$

となり、$t = t_1$ で $v_f = 0$ を与えるように係数が決まって、

$$
\begin{aligned}
i_f &= -\frac{V_s}{L_f\omega \sin \omega t_1}(\cos \omega t - \cos \omega t_1) + i_{f0} \\
v_f &= V_s\left(1 - \frac{\sin \omega t}{\sin \omega t_1}\right)
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

となる。また、２番目の式から、$v_{f1} = 2V_s$ となることが分かる。

次に、i_p を用いて v_f を表わすと、

$$
v_f = L_p \frac{di_p}{dt} + Vch' = -L_p c\omega \sin \omega t + Vch' \qquad (10)
$$

となり、放電期間の最初（$-t_1$）と最後（t_1）の v_f の値から未知数が決まって、

$$
\begin{aligned}
i_p &= \frac{V_s}{L_p\omega \sin \omega t_1}(\cos \omega t - \cos \omega t_1) \\
Vch' &= V_s
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

となる。上の２番目の結果から、パルス電源の充電用直流電源の電圧はチョークトランス一次側の電圧で決まることが分かる。

（３）i_{f0} と束縛条件

i_{f0} は、充電期間で得られた式から $v_{f1} = 2V_s$ を用いて

$$
i_{f0} = \frac{V_s}{L_f\omega_f} \cot \frac{\omega_f (t_2 - t_1)}{2} \qquad (12)
$$

と決まる。一方、放電期間から得られる式は、

$$
i_{f0} = -C_f V_s \omega \cot \omega t_1 \qquad (13)
$$

となるので、両者が一致するためには関係式

$$\omega_f \cot\frac{\phi}{2} + \omega \cot \omega t_1 = 0$$
$$\phi = \omega_f (t_2 - t_1) \qquad (１４)$$

が必要である。これを束縛条件と呼ぶことにする。

（４）方程式の近似解

ここまでの結果をまとめると、

○放電期間

$$i_f = -\frac{C_f \omega V_s}{\sin \omega t_1}\left(\frac{\omega_f^2}{\omega^2}\cos\omega t + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\cos\omega t_1\right)$$
$$i_p = \frac{C_f \omega V_s}{\sin \omega t_1}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega t_1) \qquad (１５)$$
$$v_f = V_s\left(1 - \frac{\sin\omega t}{\sin\omega t_1}\right)$$

○充電期間

$$i_f = \frac{V_s}{L_f \omega_f}\left\{\cot\frac{\phi}{2}\cos\omega_f(t - t_1) + \sin\omega_f(t - t_1)\right\}$$
$$v_f = V_s\left\{1 - \cos\omega_f(t - t_1) + \cot\frac{\phi}{2}\sin\omega_f(t - t_1)\right\} \qquad (１６)$$

となる。ここで束縛条件（１４）式を以下の近似を用いて解く。

$$\omega >> \omega_f \quad , \quad \omega \approx \omega_p$$
$$\omega t_1 \approx \frac{\pi}{2} + x \quad , \quad |x| << \frac{\pi}{2} \qquad (１７)$$

$$x = \frac{\omega_f}{\omega}\cot\beta_0$$

$$\beta_0 = \pi\left(\frac{\omega_f}{\omega_a} - \frac{\omega_f}{2\omega}\right) \qquad （１８）$$

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T}$$

これを用いて（１５）、（１６）式を書き直すと、

○放電期間

$$i_f = C_f\omega_f V_s\left(\cot\beta_0 - \frac{\omega_f}{\omega_p}\cos\omega_p t\right)$$

$$i_p = C_f\omega_p V_s\left(\frac{\omega_f}{\omega_p}\cot\beta_0 + \cos\omega_p t\right) \qquad （１９）$$

$$v_f = V_s(1 - \sin\omega_p t)$$

○充電期間

$$i_f = C_f\omega_f V_s\frac{\cos\left(\omega_f t - \frac{\omega_f}{\omega_a}\pi\right)}{\sin\beta_0}$$

$$（２０）$$

$$v_f = V_s\left(1 + \frac{\sin\left(\omega_f t - \frac{\omega_f}{\omega_a}\pi\right)}{\sin\beta_0}\right)$$

ここで、$\omega = \omega_p$と置いた。