

# 第 1 章

## 数学的準備

加速器に限らず物理学、工学においては、さまざまな数学の知識を必要とされる。ここではまず、シンクロトロンにおける軌道理論を展開するにあたり、必要となる数学の公式や定理を学ぶ。ここに書かれているようなことはすでに知っている、あるいは、公式や定理などは既知のものとしてあつかえばよく、軌道理論のみを解説してもらえればそれでよい、という人はこの章をとばしてもらってもかまわない。しかし、ここで述べられている内容には重要なものが多いので、知らないことがあれば、是非学習されることをおすすめする。

### 1.1 ベクトル解析

$n$  変数の独立な  $n$  個の関数  $u_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$  [ $k = 1, 2, \dots, n$ ] により、 $(x)$  空間の領域が  $(u)$  空間の領域と 1 対 1 に対応するとき、 $(x)$  空間の点  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  によっても表される。このとき、 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  を点  $P$  の曲線座標という。

デカルト (Descartes) 座標<sup>1</sup>で表される  $(x)$  空間の単位ベクトルを  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$  とおくと、点  $P$  は

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x_1(u_1, u_2, \dots, u_n)\hat{x}_1 + x_2(u_1, u_2, \dots, u_n)\hat{x}_2 + \dots + x_n(u_1, u_2, \dots, u_n)\hat{x}_n \\ &= \sum_{k=1}^n x_k(u_1, u_2, \dots, u_n)\hat{x}_k\end{aligned}\quad (1.1)$$

と表される。 $(x_k$  は  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  の関数である。)  $(u)$  空間の基底ベクトル  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$  を求めるため、これを微分すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \hat{x}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \hat{x}_2 \dots + \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \hat{x}_n \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \hat{x}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \hat{x}_2 \dots + \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \hat{x}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_n} = \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \hat{x}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \hat{x}_2 \dots + \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \hat{x}_n \end{array} \right. \quad (1.2)$$

という  $n$  個の一次独立なベクトルが得られる。 $(u)$  空間の基底ベクトル  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$  は必ずしも直交している必要はないが、ここでは  $(u)$  空間の基底ベクトルも互いに直交している場合に話を限る。したがって、これ以降でてくる曲線座標はすべて直交曲線座標である。

さて、これらのベクトルの大きさ  $g_k = |\partial \vec{r} / \partial u_k|$  [ $k = 1, 2, \dots, n$ ] は、

$$g_k = \sqrt{\sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial x_r}{\partial u_k} \right)^2} \quad (1.3)$$

であるから、 $h_k = 1/g_k$  として  $(u)$  空間の基底ベクトル

$$\hat{u}_k = h_k \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} \quad [k = 1, 2, \dots, n] \quad (1.4)$$

を得る。この  $h_k$  は測度係数<sup>2</sup>と呼ばれている。

<sup>1</sup>直交直線座標ともいう。

<sup>2</sup>測度係数の定義は、本によってまちまちである。 $g_k$  や  $h_k^2$  を  $h$  と書いて測度係数としていることもある。

では、次に  $(x)$  空間におけるベクトル演算公式が  $(u)$  空間への変換によってどう変わるかをみよう。直交曲線座標系に話を限っているの、変換公式は非常に簡単である。まずは grad から始めてみよう。

## grad

$(x)$  空間における grad は

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\hat{x}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\hat{x}_2 + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\hat{x}_n \quad (1.5)$$

と書かれる。各項を  $u$  を用いて展開すると

$$\begin{aligned} \text{grad}\phi &= \left( \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right) \hat{x}_1 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right) \hat{x}_2 \\ &\quad + \cdots + \left( \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) \hat{x}_n \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \hat{x}_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \hat{x}_2 + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \hat{x}_n \right) + \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \hat{x}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \hat{x}_2 + \cdots + \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \hat{x}_n \right) \\ &\quad + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial u_n} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \hat{x}_1 + \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \hat{x}_2 + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \hat{x}_n \right) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \nabla u_1 + \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \nabla u_2 + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial u_n} \nabla u_n \end{aligned} \quad (1.6)$$

$\nabla u_1$  と  $\hat{u}_k$  との内積をとると、

$$\begin{aligned} (\nabla u_1 \cdot \hat{u}_1) &= h_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \right) = h_1 \frac{u_1}{u_1} = h_1 \\ (\nabla u_1 \cdot \hat{u}_2) &= h_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \right) = h_2 \frac{u_1}{u_2} = 0 \\ &\vdots \\ (\nabla u_1 \cdot \hat{u}_n) &= h_n \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_n} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_n} + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \right) = h_n \frac{u_1}{u_n} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

のように  $(\nabla u_1 \cdot \hat{u}_1)$  以外は全てゼロであるため、

$$\nabla u_1 = h_1 \hat{u}_1 \quad (1.8)$$

となる。 $\nabla u_2, \nabla u_3, \dots, \nabla u_n$  についても全く同様であり、これらを式 (1.6) に代入して

$$\text{grad}\phi = h_1 \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial\phi}{\partial u_2} \hat{u}_2 + \cdots + h_n \frac{\partial\phi}{\partial u_n} \hat{u}_n \quad (1.9)$$

を得る。

## div

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{a} &= \text{div}(a_1 \hat{u}_1 + a_2 \hat{u}_2 + \cdots + a_n \hat{u}_n) \\ &= a_1 \text{div}\hat{u}_1 + a_2 \text{div}\hat{u}_2 + \cdots + a_n \text{div}\hat{u}_n \\ &\quad + \hat{u}_1 \cdot \nabla a_1 + \hat{u}_2 \cdot \nabla a_2 + \cdots + \hat{u}_n \cdot \nabla a_n \end{aligned} \quad (1.10)$$

ここで簡単のため  $n=3$  の場合を考えよう。grad のところででてきた  $\nabla u_1 = h_1 \hat{u}_1$  の rot をとると、

$$\text{rot}\nabla u_1 = \text{rot}h_1 \hat{u}_1 = h_1 \text{rot}\hat{u}_1 + \nabla h_1 \times \hat{u}_1 \quad (1.11)$$

であるが、左辺は  $\text{rot grad} \equiv 0$  なので

$$\begin{aligned} \text{rot}\hat{u}_1 &= -\frac{1}{h_1} \nabla h_1 \times \hat{u}_1 \\ &= -\frac{1}{h_1} \left( h_1 \frac{\partial h_1}{\partial u_1} \hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial h_3}{\partial u_3} \hat{u}_3 \right) \times \hat{u}_1 \\ &= \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \hat{u}_3 - \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \hat{u}_2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.1. ベクトル解析

となる。同様にして

$$\text{rot}\hat{u}_2 = \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \hat{u}_1 - \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \hat{u}_3 \quad (1.13)$$

$$\text{rot}\hat{u}_3 = \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \hat{u}_2 - \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \hat{u}_1 \quad (1.14)$$

を得る。これにより

$$\text{div}\hat{u}_1 = \hat{u}_3 \text{rot}\hat{u}_2 - \hat{u}_2 \text{rot}\hat{u}_3 = -\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \quad (1.15)$$

$$\text{div}\hat{u}_2 = -\frac{h_2}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} - \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \quad (1.16)$$

$$\text{div}\hat{u}_3 = -\frac{h_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} - \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \quad (1.17)$$

さらに、

$$\hat{u}_1 \cdot \nabla a_1 = \hat{u}_1 \left( h_1 \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial a_2}{\partial u_2} \hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial a_3}{\partial u_3} \hat{u}_3 \right) = h_1 \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \quad (1.18)$$

$$\hat{u}_2 \cdot \nabla a_2 = h_2 \frac{\partial a_2}{\partial u_2} \quad (1.19)$$

$$\hat{u}_3 \cdot \nabla a_3 = h_3 \frac{\partial a_3}{\partial u_3} \quad (1.20)$$

であるので、これらを最初の式(1.10)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{a} &= h_1 \frac{\partial a_1}{\partial u_1} - \frac{h_1}{h_2} a_1 \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - \frac{h_1}{h_3} a_1 \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \\ &\quad + h_2 \frac{\partial a_2}{\partial u_2} - \frac{h_2}{h_1} a_2 \frac{\partial h_1}{\partial u_2} - \frac{h_2}{h_3} a_2 \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \\ &\quad + h_3 \frac{\partial a_3}{\partial u_3} - \frac{h_3}{h_1} a_3 \frac{\partial h_1}{\partial u_3} - \frac{h_3}{h_2} a_3 \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \end{aligned} \quad (1.21)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} h_1 h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{h_1 a_1}{h_1 h_2 h_3} &= h_1 h_2 h_3 \left( \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} \frac{a_1}{h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - \frac{a_1}{h_2 h_3^2} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \right) \\ &= h_1 \frac{a_1}{u_1} - \frac{h_1}{h_2} a_1 \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - \frac{h_1}{h_3} a_1 \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \end{aligned} \quad (1.22)$$

であるので、結局

$$\text{div}\vec{a} = h_1 h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{h_1 a_1}{h_1 h_2 h_3} + h_1 h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{h_2 a_2}{h_1 h_2 h_3} + h_1 h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{h_3 a_3}{h_1 h_2 h_3} \quad (1.23)$$

と整理される。同様の計算により一般に

$$\text{div}\vec{a} = h_1 h_2 \cdots h_n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \frac{h_k a_k}{h_1 h_2 \cdots h_n} \right) \quad (1.24)$$

である。

**rot**

これは  $n=3$  の場合のみである。

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{a} &= \text{rot}(a_1 \hat{u}_1 + a_2 \hat{u}_2 + a_3 \hat{u}_3) \\ &= a_1 \text{rot}\hat{u}_1 + a_2 \text{rot}\hat{u}_2 + a_3 \text{rot}\hat{u}_3 + \nabla a_1 \times \hat{u}_1 + \nabla a_2 \times \hat{u}_2 + \nabla a_3 \times \hat{u}_3 \end{aligned} \quad (1.25)$$

これらの項については、すべて今までの結果が使える。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \text{rot} \vec{a} &= \frac{h_2 a_1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \hat{u}_3 - \frac{h_3 a_1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \hat{u}_2 + \frac{h_3 a_2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \hat{u}_1 - \frac{h_1 a_2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \hat{u}_3 + \frac{h_1 a_3}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \hat{u}_2 - \frac{h_2 a_3}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \hat{u}_1 \\
 &\quad - h_2 \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \hat{u}_3 + h_3 \frac{\partial a_1}{\partial u_3} \hat{u}_2 - h_3 \frac{\partial a_2}{\partial u_3} \hat{u}_1 + h_1 \frac{\partial a_2}{\partial u_1} \hat{u}_3 - h_1 \frac{\partial a_3}{\partial u_1} \hat{u}_2 + h_2 \frac{\partial a_3}{\partial u_2} \hat{u}_1 \\
 &= \left( h_2 \frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{h_2 a_3}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} - h_3 \frac{\partial a_2}{\partial u_3} + \frac{h_3 a_2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) \hat{u}_1 \\
 &\quad + \left( h_3 \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{h_3 a_1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} - h_1 \frac{\partial a_3}{\partial u_1} + \frac{h_1 a_3}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \right) \hat{u}_2 \\
 &\quad + \left( h_1 \frac{\partial a_2}{\partial u_1} - \frac{h_1 a_2}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - h_2 \frac{\partial a_1}{\partial u_2} + \frac{h_2 a_1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \right) \hat{u}_3
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

である。ここで

$$(\text{rot} \vec{a})_{i,k} = h_i h_k \left[ \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{a_k}{h_k} \right) - \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \frac{a_i}{h_i} \right) \right] \tag{1.27}$$

とおくと、

$$\text{rot} \vec{a} = (\text{rot} \vec{a})_{2,3} \hat{u}_1 + (\text{rot} \vec{a})_{3,1} \hat{u}_2 + (\text{rot} \vec{a})_{1,2} \hat{u}_3 \tag{1.28}$$

### Laplacian

$\Delta = \text{div} \cdot \text{grad}$  なので、ただちに

$$\Delta \phi = h_1 h_2 \cdots h_n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \frac{h_k^2}{h_1 h_2 \cdots h_n} \frac{\partial \phi}{\partial u_k} \right) \tag{1.29}$$

を得る。

最後に、ベクトル演算に関して、もうひとつだけ念のために述べておく。それはベクトルの内積と外積である。直交座標系を考える限り、それが曲線座標であろうと球座標であろうと、内積と外積の計算はデカルト座標の場合と何らかわらない。ここでの議論がいまいち分からなかったという人は、内積、外積の計算をする際に測度係数を持ち込んだりしないように注意する必要がある。

## 1.2 シンクロトロンで用いられる座標系

シンクロトロンのようなリング型加速器では、ビームの設計軌道に沿って  $s$  軸、それに直交するよう水平方向に  $x$  軸、鉛直方向に  $z$  軸<sup>3</sup>をとるのが普通である。これは図 1 に示されるような、 $x, z, s$  の 3 軸は互いに直交しているが、その向きは座標値によって変化する直交曲線座標系である。

まず、 $x, z, s$  おおのこの方向の単位ベクトルを  $\hat{n}, \hat{b}, \hat{t}$  とする。 $\hat{t}$  は常に運動の接線方向を向いており、

$$\begin{cases} \hat{n} = \hat{b} \times \hat{t} \\ \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \\ \hat{t} = \hat{n} \times \hat{b} \end{cases} \tag{1.30}$$

である。このような座標系では、基底ベクトルの向きは  $s$  のみの関数として考えてよく、 $s$  軸上のある点  $P$  への位置ベクトルを  $\vec{r}_0(s)$  とおくと空間内の任意の点は

$$\vec{r}(x, z, s) = \vec{r}_0(s) + x \hat{n}(s) + z \hat{b}(s) \tag{1.31}$$

で与えられる。

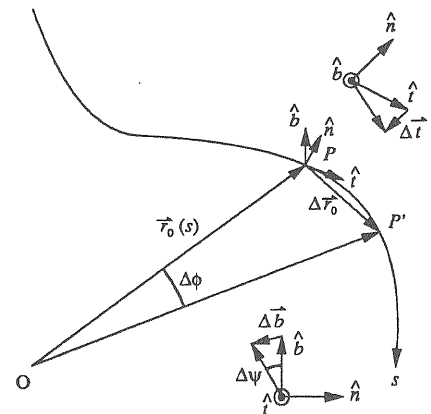


図 1、シンクロトロンで用いられる座標系

## 1.2. シンクロトロンで用いられる座標系

### 1.2.1 セレ・フレネ (Serret-Frenet) の公式と座標変換

直交曲線座標系  $(x, z, s)$  で計算を進めるために、ここでいくつか準備をしておこう。軌道上のある点  $P$  の座標を位置ベクトル  $\vec{r}_0(s)$  であらわし、それがわずかに  $\Delta s$  だけ移動し点  $P'$  へ移ったとする。それにともない、位置ベクトル、基底ベクトルがそれぞれ  $\Delta\vec{r}_0, \Delta\vec{t}, \Delta\vec{n}, \Delta\vec{b}$  だけ変化したと考え、点  $P, P'$  が原点  $O$  へなす角を  $\Delta\phi$ 、 $\hat{b}$  と  $\hat{b} + \Delta\vec{b}$  とのなす角を  $\Delta\psi$  とおく。

このとき、図1から  $\Delta\vec{r}_0$  の方向は  $\Delta\vec{r}_0 \rightarrow 0$  のとき  $\vec{t}$  と同じであり、点  $P'$  の座標は

$$\vec{r}_0(s) + \Delta\vec{r}_0 = \vec{r}_0(s) + \Delta s \vec{t} \quad (1.32)$$

とあらわされる。これより、

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\vec{r}_0}{\Delta s} = \vec{t} \right) \implies \frac{d\vec{r}_0}{ds} = \vec{t} \quad (1.33)$$

である。また、

$$|\Delta\vec{t}| = |\vec{t}| \Delta\phi = \Delta\phi \quad (1.34)$$

ゆえに曲率を  $G(s)$ 、曲率半径を  $\rho(s)$  とおくと、

$$\frac{|\Delta\vec{t}|}{\Delta s} = \frac{\Delta\phi}{\rho(s)\Delta\phi} = \frac{1}{\rho(s)} = G(s) \quad (1.35)$$

$|\Delta\vec{t}| \rightarrow 0$  で  $\Delta\vec{t}$  は  $\hat{n}$  と平行で逆向きであるので

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{|\Delta\vec{t}|}{\Delta s} = G(s) \right) \implies \frac{d\vec{t}}{ds} = -G(s)\hat{n} \quad (1.36)$$

と計算される。次に  $\kappa(s) = d\psi/ds$  をこの座標系での捻率 (ねじれ) と定義する。 $\kappa(s)$  の符号は、 $\hat{b}$  が  $\vec{t}$  に対して右ネジの回転をするときを正と定める。 $|\Delta\vec{b}| \rightarrow 0$  で  $\Delta\vec{b}$  は  $\hat{n}$  とやはり平行で逆向きである。

$$|\Delta\vec{b}| = |\hat{b}| \Delta\psi = \Delta\psi \quad (1.37)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{|\Delta\vec{b}|}{\Delta\psi} = -1 \right) \implies \frac{d\vec{b}}{d\psi} = -\hat{n} \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\kappa(s)\hat{n} \quad (1.38)$$

最後に、 $d\hat{n}/ds$  を求めよう。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{n}}{ds} &= \frac{d\hat{b}}{ds} \times \vec{t} + \hat{b} \times \frac{d\vec{t}}{ds} \\ &= -\kappa(s)\hat{n} \times \vec{t} - \hat{b} \times G(s)\hat{n} \\ &= G(s)\vec{t} + \kappa(s)\hat{b} \end{aligned} \quad (1.39)$$

この節で求めた  $\vec{r}_0, \vec{t}, \hat{n}, \hat{b}$  の  $s$  による微分 (1.33), (1.36), (1.38), (1.39) がセレ・フレネの公式である。

### 1.2.2 直交曲線座標系でのベクトル演算公式

では、直交曲線座標系  $(x, z, s)$  でのベクトル演算公式を求めよう。そのためには測度係数さえ分かればよいのだから、 $\vec{r}(x, z, s)$  を  $s$  で偏微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}(x, z, s)}{\partial s} &= \frac{\partial \vec{r}_0(s)}{\partial s} + x \frac{\partial \hat{n}}{\partial s} + z \frac{\partial \hat{b}}{\partial s} \\ &= \vec{t} + x(G(s)\vec{t} + \kappa(s)\hat{b}) - z\kappa(s)\hat{n} \\ &= (1 + G(s)x)\vec{t} + \kappa(s)x\hat{b} - \kappa(s)z\hat{n} \end{aligned} \quad (1.40)$$

ここで、 $\hat{b}$  の向きが変わらない、すなわち  $\kappa(s) = 0$  を仮定すると

$$\frac{\partial \vec{r}(x, z, s)}{\partial s} = (1 + G(s)x)\vec{t} \quad (1.41)$$

となる。 $x, z$  に関する偏微分は、 $\vec{r}_0, \hat{n}, \hat{b}, \vec{t}$  がすべて  $s$  のみの関数であることから、一目瞭然であろう。

ここで用いた  $\hat{b}$  の向きが普遍であるという仮定は、大変重要である。なぜなら、この仮定をすることで、これ以降の計算がずっと簡単なものになるからである。シンクロトロンを設計する際、水平面上に平行な周回軌道を持つようなものを考えるのがふつうである。この場合、ねじれのある座標軸をわざわざ考える必要はないだろう。もちろん、3次元的に複雑な形状のシンクロトロンを設計することも当然可能であるが、しかしよほど特別な事情でもない限りそんな設計をすることはまずない。そのような訳で、これ以降座標軸を考える際  $x, z$  軸の向きが時間とともに変わるような、すなわち、 $\kappa(s)$  がゼロでないような座標軸は考えない。直交曲線座標系  $(x, z, s)$  はねじれない座標系であると定める。

さて、測度係数をまとめると、

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{r}(x, z, s)}{\partial x} = \hat{n} \implies g_1 = 1 \\ \frac{\partial \vec{r}(x, z, s)}{\partial z} = \hat{b} \implies g_2 = 1 \\ \frac{\partial \vec{r}(x, z, s)}{\partial s} = (1 + G(s))\hat{t} \implies g_3 = (1 + G(s)x) \end{array} \right) \quad (1.42)$$

と非常に簡単な形であることが分かった。直交曲線座標系  $(x, z, s)$  でのベクトル演算公式は以下のように求まる。

$$\text{grad}\phi(x, z, s) = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{1}{1 + G(s)x} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \quad (1.43)$$

$$\Delta\phi(x, z, s) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{1 + G(s)x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + G(s)x) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{1 + G(s)x} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \right] \quad (1.44)$$

### 1.3 線形常微分方程式

物理現象を記述する際、必ず出てくるものに微分方程式がある。特に運動方程式を扱う際には、二階線形微分方程式は必須である。ここでは線形微分方程式に関して、第二章以降で必要となる事柄をまとめておく。なお、この節で使われる変数やベクトル  $(z, \vec{b})$  等は、前節に於けるそれとは一切関係ないので混同しないでいただきたい。

#### 1.3.1 高階線形微分方程式と一階連立線形微分方程式

一般に  $n$  階までの導関数を含む方程式は、 $n$  階の微分方程式とよばれる。特に、 $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  を  $n+1$  次元  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  空間のある領域  $D$  で定義された連続関数とするとき、

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f \left( t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \right) \quad (1.45)$$

と書き表せるものを正規形の  $n$  階微分方程式いう。このようなとき、

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \frac{dx}{dt} &= x_2 \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= x_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} &= x_n \end{aligned} \quad (1.46)$$

### 1.3. 線形常微分方程式

とおけば、式(1.45)は

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.47}$$

と  $n$  個の一階連立微分方程式に変換できる。ここで

$$f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1(t) + a_2(t)x_1 + \dots + a_n(t)x_n \tag{1.48}$$

のように書けるならば微分方程式は線形であるといい、(1.47)はベクトル表記で

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(t)\vec{x} \tag{1.49}$$

と書きあらわされる。一般に  $A(t)$  を  $n$  次正方行列、 $\vec{b}(t)$  を  $n$  次元ベクトルとすると、

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} \tag{1.50}$$

を  $n$  次の一階連立線形微分方程式といい、 $\vec{b}(t) \equiv 0$  であるとき同次、そうでないとき非同次という。

#### 1.3.2 一階連立線形微分方程式の基本行列

$n$  次の一階連立線形微分方程式(1.50)は、やはり  $n$  個の一次独立な解の組  $\vec{\phi}_1(t), \vec{\phi}_2(t), \dots, \vec{\phi}_n(t)$ <sup>4</sup> をもっており、それらを列とする  $n$  次正方行列  $\Phi(t) = (\vec{\phi}_1(t), \vec{\phi}_2(t), \dots, \vec{\phi}_n(t))$  を式(1.50)の基本行列、または解の基本系という。

ここでひとつ重要な定理を示そう。

「 $\Phi(t)$  を式(1.50)の基本行列、 $P$  を正則な定数行列とすれば、 $\Phi(t)P$  もまた基本行列である。」

これは  $\Phi(t)P$  を式(1.50)に代入すれば、ただちに確かめられる。さらに、この逆も真である。これを証明しておこう。 $\Phi(t), \Psi(t)$  を基本行列であるとし、 $P = \Phi^{-1}(t)\Psi(t)$  とおけば

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t) \quad \frac{d\Psi(t)}{dt} = A(t)\Psi(t) \tag{1.51}$$

であるので

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\Phi^{-1}(t)\frac{d\Phi(t)}{dt}\Phi^{-1}(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\frac{d\Psi(t)}{dt} \\ &= -\Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) = 0 \end{aligned} \tag{1.52}$$

となり、 $P$  が定数行列であることが示される。また、 $|\Phi(t)| \neq 0, |\Psi(t)| \neq 0$  から、

$|P| = |\Phi^{-1}(t)\Psi(t)| = |\Phi^{-1}(t)||\Psi(t)| \neq 0$  であるので、 $P$  は零行列ではない。したがって、

「 $\Phi(t), \Psi(t)$  がともに式(1.50)の基本行列ならば、 $\Psi(t) = \Phi(t)P$  であるような正則な定数行列  $P$  が存在する。」

<sup>4</sup>連立線形微分方程式の教科書などではベクトルの添字を右上に書くことも多いが、乗数と勘違いされる心配があるので、この本では常に右下に書くことにした。

## 1.3.3 ジョルダン (Jordan) 行列

$n$  次正方行列のなかで、

$$M = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \mu & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix} \quad (\mu: 0 \text{でない任意の複素数}) \quad (1.53)$$

なるものをジョルダン行列、またはジョルダンの標準形という。二つの  $n$  次正方行列  $A, B$  があるとき、 $B = P^{-1}AP$  となるような正則行列  $P$  が存在するとき、行列  $A, B$  は相似であるという。任意の正方行列は、すべてジョルダン行列に相似である。

さて、 $\mu \neq 0$  であるので新しい正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1/\mu \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

を導入しよう。この  $D$  は実は  $m \geq n$  ならば  $D^m = 0$  であるような特殊な性質をもった冪零行列である。そして冪零行列は正則ではない。さて、ここで対数級数

$$\sigma = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{1}{p} D^p = D - \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{3} - \dots \quad (1.55)$$

を考えよう。この対数級数は  $D$  の固有値の絶対値が 1 より小さければ収束するわけなのだが、 $D$  は正則な行列ではないので、固有値はゼロである。したがって、この級数は収束し  $E$  を単位行列として、 $\sigma = \ln(E + D)$  と書け、 $e^\sigma = E + D$  である<sup>5</sup>。ここで、 $N = \ln \mu \cdot E + \sigma$  とおくと

$$e^N = e^{\ln \mu \cdot E} e^\sigma = e^{\ln \mu} E (E + D) = \mu E (E + D) = M \quad (1.56)$$

となる。ゆえに、

「ジョルダン行列  $M$  において  $\mu \neq 0$  ならば、 $e^N = M$  であるような行列  $N$  が存在する。」

## 1.3.4 周期関数を係数とする同次線形微分方程式

同次線形微分方程式

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} \quad (1.57)$$

において  $A(t)$  が  $t$  の周期関数  $A(t+\omega) = A(t)$ ,  $\omega > 0$  である場合を考える。この方程式の任意の基本行列を  $\Phi(t)$  とすれば

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t) \quad (1.58)$$

を満たし、ここで  $t$  を  $t+\omega$  でおきかえると、 $\frac{dt}{d(t+\omega)} = 1$  であるので

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t+\omega)}{d(t+\omega)} &= A(t+\omega)\Phi(t+\omega) \\ \frac{d\Phi(t+\omega)}{dt} \frac{dt}{d(t+\omega)} &= A(t+\omega)\Phi(t+\omega) \\ \frac{d\Phi(t+\omega)}{dt} &= A(s)\Phi(t+\omega) \end{aligned} \quad (1.59)$$

となり、 $\Phi(t+\omega)$  も基本行列である。ゆえに、 $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)M$  である正則な定数行列  $M$  が存在する。また、 $P$  を正則な定数行列として新たな基本行列  $\Psi(t) = \Phi(t)P$  を考えれば、

$$\Psi(t+\omega) = \Phi(t+\omega)P = \Phi(t)MP = \Psi(t)P^{-1}MP \quad (1.60)$$

<sup>5</sup>この節では  $\ln, e$  が行列の関数になっているが、スカラー量のと看とて考えていただいよい。



### 1.3. 線形常微分方程式

であるが、 $P$  の選び方はまったく任意であるので、 $P^{-1}MP$  はジョルダン行列になり得る。これはすなわち、 $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)M$  において  $M$  としてジョルダン行列を仮定してもよい、ということである。そして、やはり  $e^N = M$  であるような行列  $N$  が存在する。そこで  $\Lambda = (N/\omega)$  として、新たな関数  $F(t) = \Phi(t)e^{-\Lambda t}$  をつくと、基本行列として  $\Phi(t) = F(t)e^{\Lambda t}$  のような形のものをとれる。このとき

$$\Phi(t+\omega) = F(t+\omega)e^{\Lambda(t+\omega)} = F(t+\omega)e^{\Lambda t}e^{\Lambda\omega} = F(t+\omega)e^{\Lambda t}e^N = F(t+\omega)e^{\Lambda t}M \quad (1.61)$$

であり、一方

$$\Phi(t+\omega) = \Phi(t)M = F(t)e^{\Lambda t}M \quad (1.62)$$

なので  $F(t+\omega) = F(t)$  である。以上の議論より、

「周期関数を係数とする  $n$  次元の同次線形微分方程式の基本行列として、

$$\Phi(t) = F(t)e^{\Lambda t} \quad \text{where} \quad F(t+\omega) = F(t) \quad (1.63)$$

の形のものをとることができる。」

と結論される。これは、フロケ (Floquet) の定理と呼ばれるものである。

#### 1.3.5 周期関数を係数とする非同次線形微分方程式

つぎは、周期関数を係数とする線形微分方程式が非同次である場合について考えてみよう。ただし、非同次微分方程式は必ずしも解析的に解けるとは限らないので、対象を限定しよう。まず、二階線型微分方程式であること、さらに非同次関数は周期  $T$  の周期関数であることとしよう。そのような方程式を一般的に

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(t)x = f(t) \quad \text{where} \quad f(t+T) = f(t) \quad (1.64)$$

とおく。ここで、 $g(t)$  と  $f(t)$  の周期は、同じである必要はない。

では早速前項の結果を用いて、同次形の一般解を  $x = w(t)e^{i\psi(t)}$  とおこう。 $f(t) = 0$  として、これを式 (1.64) に代入する。煩雑さを避けるため  $t$  の微分を  $'$  であらわし、 $(t)$  を省略して書くと

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + g(t)x &= w''e^{i\psi} + 2iw'\psi'e^{i\psi} + iw\psi''e^{i\psi} - w(\psi')^2e^{i\psi} + g(t)we^{i\psi} \\ &= w''e^{i\psi} - w(\psi')^2e^{i\psi} + g(t)we^{i\psi} + i(2w'\psi'e^{i\psi} + w\psi''e^{i\psi}) = 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

これより

$$w'' - w(\psi')^2 + g(t)w = 0 \quad (1.66)$$

$$2w'\psi' + w\psi'' = 0 \quad (1.67)$$

の二式を得る。第二式は  $w^2\psi'$  の完全微分形であるので、任意の積分定数  $c$  を用いて

$$2w'\psi'e^{i\psi} + w\psi''e^{i\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad w^2\psi' = c \quad \longrightarrow \quad \psi' = \frac{1}{w^2} \quad (1.68)$$

となる。 $c$  の値は何でも良いが、あとの便利さを考えて  $c = 1$  とした。これにより同次形の解の性質として、

$$g(t)w^4 = 1 - w^3w'', \quad \frac{dw}{d\psi} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{d\psi} = w^2w', \quad \frac{d^2w}{d\psi^2} = \frac{d^2w}{dt^2} \left( \frac{dt}{d\psi} \right)^2 = w^4w'' \quad (1.69)$$

などが導かれる。

ではこれらを踏まえて微分方程式 (1.64) を書き直してみる。また、 $\zeta(t) = e^{i\psi(t)}$  としておこう。

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + g(t)x &= \frac{d^2(w\zeta)}{d\psi^2}(\psi')^2 + g(t)w\zeta = \frac{1}{w^4} \frac{d^2(w\zeta)}{d\psi^2} + g(t)w\zeta \\ &= \frac{1}{w^4} \left( \frac{d^2w}{d\psi^2}\zeta + 2\frac{dw}{d\psi} \frac{d\zeta}{d\psi} + w \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} \right) + g(t)w\zeta \\ &= \frac{1}{w^4} \left( \frac{d^2w}{d\psi^2}\zeta + 2i\frac{dw}{d\psi}\zeta + w \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} \right) + g(t)w\zeta \end{aligned} \quad (1.70)$$

ここまでの計算では同次形の一般解として  $x = w(t)e^{i\psi(t)}$  を用いたわけであるが、もう一つの基本解である  $x = w(t)e^{-i\psi(t)}$  を使ってもまったく同じ議論がなりたつ。その場合、 $\zeta(t) = e^{-i\psi(t)}$  として

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g(t)x = \frac{1}{w^4} \left( \frac{d^2w}{d\psi^2} \zeta - 2i \frac{dw}{d\psi} \zeta + w \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} \right) + g(t)w\zeta \quad (1.71)$$

となるため、この二式(1.70),(1.71)を比べると

$$2i \frac{dw}{d\psi} \frac{d\zeta}{d\psi} = 0 \quad (1.72)$$

であることがわかる。したがって、微分方程式(1.64)は最終的に

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + g(t)x &= \frac{1}{w^4} \left( \frac{d^2w}{d\psi^2} \zeta + w \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} \right) + g(t)w\zeta = f(t) \\ w^3 w'' \zeta + \frac{d^2\zeta}{d\psi^2} + g(t)w^4 \zeta &= w^3 f(t) \\ \frac{d^2\zeta(t)}{d\psi^2} + \zeta(t) &= w^3(t) f(t) \equiv h(\psi) \end{aligned} \quad (1.73)$$

と置き換えられる。これは定数係数の微分方程式であり、非同次関数  $w^3(t)f(t)$  は周期関数同士の積なので、やはり周期関数である。これ以降、 $w^3(t)f(t) \equiv h(\psi)$  とおき、 $\zeta$  も  $\psi$  の関数だと考えよう。変数変換に伴う  $h(\psi)$  の周期は  $\omega$  としよう。この種の非同次微分方程式は、定数変化法を用いれば一般解を求めるのは簡単である。ここでも微分記号として  $'$  を用いよう。ただし、今回は  $\psi$  に関する微分である。まず、方程式(1.73)の同次形  $h(\psi) = 0$  の一般解は  $c_1, c_2$  を任意定数として

$$\begin{aligned} \zeta(\psi) &= c_1 \cos \psi + c_2 \sin \psi \\ \zeta'(\psi) &= -c_1 \sin \psi + c_2 \cos \psi \end{aligned} \quad (1.74)$$

と書ける。ここで  $c_1, c_2$  を新たに  $\psi$  の関数として  $c_1(\psi), c_2(\psi)$  とおけば、まず一階微分から

$$\zeta(\psi) = c_1' \cos \psi - c_1 \sin \psi + c_2' \sin \psi + c_2 \cos \psi = -c_1 \sin \psi + c_2 \cos \psi \Rightarrow c_1' \cos \psi + c_2' \sin \psi = 0 \quad (1.75)$$

二階微分から

$$\zeta''(\psi) + \zeta(\psi) = -c_1' \sin \psi - c_1 \cos \psi + c_2' \cos \psi - c_2 \sin \psi + c_1 \cos \psi + c_2 \sin \psi \Rightarrow -c_1' \sin \psi + c_2' \cos \psi = h(\psi) \quad (1.76)$$

これらよりただちに係数  $c_1(\psi), c_2(\psi)$  が

$$\begin{aligned} c_1'(\psi) &= -h(\psi) \sin \psi \Rightarrow c_1(\psi) = -\int_0^\psi h(u) \sin u du \\ c_2'(\psi) &= h(\psi) \cos \psi \Rightarrow c_2(\psi) = \int_0^\psi h(u) \cos u du \end{aligned} \quad (1.77)$$

ともとまる。これで非同次微分方程式(1.73)の特解が得られたわけであるが、このままではあまりたいした議論はできないので、これに周期  $\omega$  をもたせることにしよう。具体的には、定数  $a_1, a_2$  を使って同次形の一般解

$$\begin{aligned} \zeta(\psi) &= a_1 \cos \psi + a_2 \sin \psi \\ \zeta'(\psi) &= -a_1 \sin \psi + a_2 \cos \psi \end{aligned} \quad (1.78)$$

をもう一度つくり、これを特解に足し合わせ、全体が周期  $\omega$  をもつよう  $a_1, a_2$  の値をきめるのである。さて、先ほどの特解は

$$\begin{aligned} \zeta(\psi) &= (a_1 + c_1(\psi)) \cos \psi + (a_2 + c_2(\psi)) \sin \psi \\ \zeta'(\psi) &= -(a_1 + c_1(\psi)) \sin \psi + (a_2 + c_2(\psi)) \cos \psi \end{aligned} \quad (1.79)$$

と改められた。これに対して周期条件  $x(\omega) = x(0), x'(\omega) = x'(0)$  をあてはめる。すると  $c_1(0) = c_2(0) = 0$  なので

$$\left. \begin{aligned} (a_1 + c_1(\omega)) \cos \omega + (a_2 + c_2(\omega)) \sin \omega &= a_1 \\ -(a_1 + c_1(\omega)) \sin \omega + (a_2 + c_2(\omega)) \cos \omega &= a_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

### 1.3. 線形常微分方程式

という関係式がえられる。これより  $a_1, a_2$  は

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{c_1(\omega)(\cos \omega - 1) + c_2(\omega) \sin \omega}{2(1 - \cos \omega)} \\ a_2 &= \frac{c_2(\omega)(\cos \omega - 1) + c_1(\omega) \sin \omega}{2(1 - \cos \omega)} \end{aligned} \quad (1.81)$$

と決まる。ここで

$$\begin{aligned} c_1(\omega) &= -\int_0^\omega h(u) \sin s du \\ c_2(\omega) &= \int_0^\omega h(u) \cos s du \end{aligned} \quad (1.82)$$

である。結局、方程式 (1.73) の特解は

$$\begin{aligned} \zeta(\psi) &= \frac{1}{2(1 - \cos \omega)} [c_1(\omega)(\cos \omega - 1) \cos \psi + c_2(\omega) \sin \omega \cos \psi + 2(1 - \cos \omega)c_1(\psi) \cos \psi + c_2(\omega)(\cos \omega - 1) \sin \psi \\ &\quad + c_1(\omega) \sin \omega \sin \psi + 2(1 - \cos \omega)c_2(\psi) \sin \psi] \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos \omega)} [c_1(\omega)(\cos \omega \cos \psi - \sin \omega \sin \psi) + c_2(\omega)(\sin \omega \cos \psi + \cos \omega \sin \psi) - c_1(\omega) \cos \psi - c_2(\omega) \sin \psi \\ &\quad + 2(1 - \cos \omega)(c_1(\psi) \cos \psi + c_2(\psi) \sin \psi)] \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos \omega)} [c_1(\omega) \cos(\omega + \psi) + c_2(\omega) \sin(\omega + \psi) - c_1(\omega) \cos \psi - c_2(\omega) \sin \psi \\ &\quad + 2(1 - \cos \omega)(c_1(\psi) \cos \psi + c_2(\psi) \sin \psi)] \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos \omega)} \left[ -\int_0^\omega h(u) \sin s du \cos(\omega + \psi) + \int_0^\omega h(u) \cos s du \sin(\omega + \psi) \right. \\ &\quad + \int_0^\omega h(u) \sin s du \cos \psi - \int_0^\omega h(u) \cos s du \sin \psi \\ &\quad \left. + 2(1 - \cos \omega) \left( -\int_0^\psi h(u) \sin s du \cos \psi + \int_0^\psi h(u) \cos s du \sin \psi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos \omega)} \left[ \int_0^\omega h(u) \sin(\omega + \psi - u) du - \int_0^\omega h(u) \sin(\psi - s) du + 2(1 - \cos \omega) \int_0^\omega h(u) \sin(\psi - u) du \right] \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos \omega)} \left[ 2 \sin \frac{\omega}{2} \int_0^\omega h(u) \cos \left( \frac{\omega}{2} + \psi - u \right) du + 4 \sin \frac{\omega}{2} \int_\omega^{\omega+\psi} h(u) \cos(\omega + \psi - u) du \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \left[ \int_0^\omega h(u) \cos \left( \frac{\omega}{2} + \psi - u \right) du - \int_0^\psi h(u) \cos \left( \frac{\omega}{2} + \psi - u \right) du + \int_\omega^{\omega+\psi} h(u) \cos \left( \frac{\omega}{2} + \psi - u \right) du \right] \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \int_\psi^{\psi+\omega} h(u) \cos \left( \frac{\omega}{2} + \psi - u \right) du \end{aligned} \quad (1.83)$$

と決まった。ここで変数を  $\psi$  から最初の  $t$  に戻せば、最終的に周期関数を係数とする非同次線形微分方程式 (1.64) の特解を得る。ただし、これには  $\omega$  と  $T$  の関係式が必要である。

これですべての準備はととのった。それでは次章より、シンクロトロンの話に移ろう。

## 第 2 章

### 直交曲線座標系での磁場

シンクロトロンでは、ビームの設計軌道に沿って  $s$  軸、それに直交するよう水平方向に  $x$  軸、鉛直方向に  $z$  軸をとり、シンクロトロン内の荷電粒子の運動を直交曲線座標系  $(x, z, s)$  で記述する。したがって、これ以降の計算は磁場  $\vec{B}$  などを含めすべて  $(x, z, s)$  座標系で行なわれるものとする。

#### 2.1 加速器を構成する基本エレメント

加速器はある種の粒子の集まりを、目的とするエネルギーを持つ状態に安定に変化させる装置である。自然界に存在する粒子は、各々が勝手な運動をし、またひとつの種類だけで集団をつくっていることは、地球上では極めて稀である。したがって、単一種類の運動状態のそろった粒子の集まりを必要とする場合、それらは人工的につくりだす他ない。以下では、こういった運動状態のそろった粒子の集団をビームと呼ぶ。

例として陽子ビームを考えよう。陽子は地球上では単体の集団として存在しない。そのため、水素ガスをプラズマ分解するなどの方法が用いられる。水素ガスを高周波加熱し、プラズマ状態にして外部から電場をかけると、水素ガスは陽子団と電子団とに分離される。この陽子団に対して次々に外部電場を与え、特定の方向に運動をそろえれば陽子ビームとなる。シンクロトロンでは、エネルギーを与える外部電場源として RF 空洞、運動方向をそろえたり必要とされる方向へビームの向きを変えるために電磁石が用いられる。また、空気中ではビームが散乱を起こして散りちりになってしまうため、ビームの軌道上を真空に保つためのダクトが必要となる。これら RF 空洞、電磁石、真空ダクトが、加速器の基本エレメントである。ここではビーム軌道にもっとも関係する電磁石の働きについてみてみよう。

##### 2.1.1 ビームの閉じ込め

加速器というものが最初に発明されたころ、加速器の形状は直線であった。加速電極を直線上に配置し、それに交流電場をかけて荷電粒子を加速した。このような線形加速器は構造が簡単である反面、高いビームエネルギーを得るためには加速電極を際限なく並べてゆかねばならないため、ビームエネルギーに対して加速器本体が巨大なものになってしまうという問題がある。そこで、ビームにひとつの閉じた軌道を周回させ、同一の加速電場で繰り返し加速するという手法がうまれた。

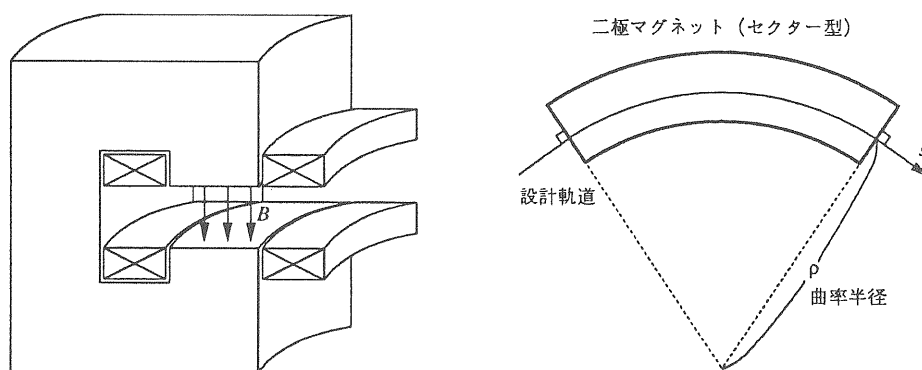


図 2、二極 (偏向) マグネット

鉛直方向に一様な二極磁場があるとき、水平方向のみに速度  $v$  を持つ質量  $m$  の荷電粒子は水平面内を周回する円軌道を描く。この円軌道の半径を曲率半径  $\rho$  とよび、磁場の磁束密度を  $B$ 、粒子の運動量の大きさと電荷をそれぞれ  $p, q$  とおくと、電磁力と遠心力とのつあいから

$$m \frac{v^2}{\rho} = qvB \quad \Rightarrow \quad p = qB\rho \quad (2.1)$$

なる関係が導かれる。特に電荷が  $+e$  であるとき、運動量・磁束密度・曲率半径の単位として、それぞれ  $[\text{GeV}/c]$ ,  $[\text{T}]$ ,  $[\text{m}]$  をとれば

$$p [\text{GeV}/c] = 0.3B [\text{T}] \rho [\text{m}] \quad (2.2)$$

という式を得る。これは非常によく使われる式なので、是非とも記憶しておきたい。このように軌道を曲げて粒子を円軌道に閉じ込めるため、一様磁場を発生する電磁石を偏向マグネットとよび、それは図2のような二極マグネットである。この図中の二極マグネットは端面が粒子の入射軌道、射出軌道に対して垂直になっているが、このようなものを特にセクターマグネットという。もちろん、単純な長方形型のマグネットが使われることも多いが、この本では単に二極マグネット、偏向電磁石などといったときにはセクターマグネットを指すことにしよう。

### 2.1.2 ビームの収束

さて、ビームとは運動状態のそろった粒子の集団であることは先に述べた通りであるが、大量 ( $10^8 \sim 10^{14}$  ぐらい) の粒子の運動が、完全にそろっているなどということはずまない。実際は運動量の大きさが違っていたり、周回方向に対して垂直な速度成分を持っていたりするため、何らかの外力で運動の方向を修正してやらないと、いずれビームはばらばらに散らばってしまう。この役割を担っているのが、四極マグネットである。四極マグネットは文字通り図3のように四つの磁極をもち、発生される磁場には

$$B_x = -\frac{\partial B_z}{\partial x}x, \quad B_z = \frac{\partial B_x}{\partial z}z \quad (2.3)$$

という変位に比例した磁束密度を得られるという特徴があり、このため水平、鉛直のいずれか一方方向に収束、他方に発散作用をもっている。この発散作用のため、光学系のレンズに比べて扱いにくい。しかし、条件さえそろえてやれば、両方向ともに収束力の得られるような状態が存在する。それについては、次章のトランスファマトリクスの安定条件のところで述べよう。

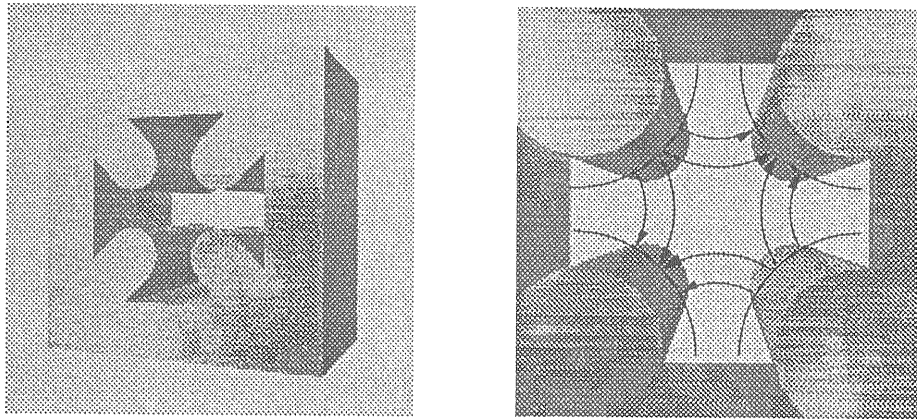


図3、四極マグネット (代表的なコア形状)

手前から奥へと進む  $+$  の電荷をもつ粒子に対して、水平方向に発散力、鉛直方向に収束力がはたらく。

四極マグネットは、その作用により二種類に分けられる。通常、水平方向での作用を基準とし、水平方向に収束力をもつものを収束型 (Fマグネット)、水平方向に発散力をもつものを発散型 (Dマグネット) という。

## 2.2 磁場の多極展開

シンクロトロンでは、二極磁場、四極磁場以外にさらに高次の磁場を取り扱うことも多い。そのため、それらが  $(x, z, s)$  座標系でどのように表現されるのかをみておくことは重要であろう。では、 $(x, z, s)$  座標系での多極磁場を

## 2.2. 磁場の多極展開

あたえる式をもとめよう。ビーム軌道上、すなわち  $\text{rot}\vec{B} = 0$  の空間では磁束密度  $\vec{B}(x, z, s)$  はあるスカラーポテンシャル  $\phi(x, z, s)$  によって  $\vec{B}(x, z, s) = \text{grad}\phi(x, z, s)$  とあたえられる。このようなスカラー関数は、一般に以下のようなマクローリン (Maclaurin) 展開が可能である。

$$\phi(x, z, s) = \frac{\phi(0, z, s)}{0!} + \frac{\phi'(0, z, s)}{1!}x + \frac{\phi''(0, z, s)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\phi^{(m)}(0, z, s)}{m!}x^m + \cdots \quad (2.4)$$

ここで、おのおのの項について、さらに  $z$  による展開が可能である。たとえば、

$$\phi^{(m)}(0, z, s) = \frac{\phi^{(m)}(0, 0, s)}{0!} + \frac{\phi^{(m)'}(0, 0, s)}{1!}z + \frac{\phi^{(m)''}(0, 0, s)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\phi^{(m)(n)}(0, 0, s)}{n!}z^n + \cdots \quad (2.5)$$

であり、すべてをまとめると

$$\phi(x, z, s) = \sum_{m,n} (a_{mn}(s)) \frac{1}{m!n!} x^m z^n \quad (2.6)$$

とあらわすことができる。 $(m+n)$  は展開の次数である。

では、 $\vec{B}(x, z, s)$  の3成分を書いておこう。 $(x, z, s)$  座標系でのベクトル勾配は式(1.43)であるので、

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ = \left( a_{10} + a_{20}x + \frac{a_{30}}{2!}x^2 + \cdots \right) + \left( a_{11} + a_{21}x + \frac{a_{31}}{2!}x^2 + \cdots \right) z \\ + \left( a_{12} + a_{22}x + \frac{a_{32}}{2!}x^2 + \cdots \right) \frac{1}{2!}z^2 + \cdots \\ B_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ = \left( a_{01} + a_{02}z + \frac{a_{03}}{2!}z^2 + \cdots \right) + \left( a_{11} + a_{12}z + \frac{a_{13}}{2!}z^2 + \cdots \right) x \\ + \left( a_{21} + a_{22}z + \frac{a_{23}}{2!}z^2 + \cdots \right) \frac{1}{2!}x^2 + \cdots \\ B_s = \frac{1}{1+Gx} \frac{\partial\phi}{\partial s} \\ = \frac{1}{1+Gx} \left[ \left( a'_{00} + a'_{10}x + \frac{a'_{20}}{2!}x^2 + \cdots \right) + \left( a'_{01} + a'_{11}x + \frac{a'_{21}}{2!}x^2 + \cdots \right) z \right. \\ \left. + \left( a'_{02} + a'_{12}x + \frac{a'_{22}}{2!}x^2 + \cdots \right) \frac{1}{2!}z^2 + \cdots \right] \end{array} \right. \quad (2.7)$$

のようになる。ここで  $(s)$  を省略して書いたが、 $a_{mn}, G$  は  $s$  の関数であり、 $'$  は  $s$  に関する微分である。ここにて係数  $a_{mn}$  の満たすべき条件もだしておこう。マクスウェル (Maxwell) 方程式から、かならず  $\text{div}\vec{B} = 0$  であるので、スカラーポテンシャル  $\phi(x, z, s)$  はラプラス (Laplace) 方程式

$$\text{div}\vec{B}(x, z, s) = \text{div}\text{grad}\phi(x, z, s) \equiv \Delta\phi \quad (2.8)$$

を満たさなければならない。 $a_{mn}$  に関する条件式は無限にあるが、ここではこのあとの計算に必要な分を含めた最初の方のものだけを書いておくことにしよう。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{02} = -a''_{00} - Ga_{10} - a_{20} \\ a_{03} = -a''_{01} - Ga_{11} - a_{21} \\ a_{12} = 2Ga''_{00} + G'a'_{00} - a''_{10} + G^2a_{10} - Ga_{20} - a_{30} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

これで  $(x, z, s)$  座標系における多極磁場をあたえる式がもともったわけであるが、 $x, z$  に関しては、デカルト座標系でのそれと何らかわらない。ここで  $n$  の値に注目してみると、 $n$  が偶数のものは磁力線が  $x$  軸と交差しないことが分かるだろう。このような磁場成分は丁度  $n$  が奇数の場合の磁場を  $180/m$  度回転したものと同じであり、それゆえ  $n$  が奇数のものを主成分というのに対してねじれ (skew) 成分と呼ばれる。主成分とスキュー成分は独立であるため、通常同一の磁極からは同時に発生できない。また、 $B_s$  はソレノイド磁場と呼ばれ、これも特別な目的がない限りゼロになるような電磁石を考えるのが普通である。なぜなら、ソレノイド磁場が存在すると  $x, z$  方向の運動は独立ではなくなり、軌道解析が大変複雑なものになるからである。また、複雑な軌道はえてして不安定に陥りやすく、実際にビームを加速する際、さまざまな問題を引き起こす。

さて、磁場の多極展開式をみると二極磁場をあたえる項は  $a_{01}(s), a_{10}(s)$  のふたつ、四極磁場をあたえる項は  $a_{02}(s), a_{11}(s)$ , のみつつあるが、通常のシンクロトロンではわざわざ鉛直方向に曲がった軌道を設計することはまずない。そこで二極磁場に関しては  $a_{10} = 0$  として  $a_{01}(s)$  のみを考える。また四極磁場に対しても、スキュー四極成分  $a_{02}, a_{20}$  はソレノイド磁場と同様、 $x, z$  方向の運動を結合させる働きがあるので、やはりゼロであることが望ましい。それゆえ、四極磁場としては  $a_{11}(s)$  だけを考えるのが普通である。さらに、通常二極マグネット、四極マグネットを考える場合、発生磁場が  $s$  によって変化しないもの、すなわち、 $a_{mn}(s)$  が  $s$  依存性をもたず定数となるようなものを考える。なぜなら、 $a_{mn}(s)$  が  $s$  依存性をもつとは  $B_s$  がゼロでない、つまりソレノイド磁場がゼロでないということの意味するからである。

マグネットが理想的である場合、端面を境にして磁場はゼロであるが、もちろん現実にそのようなマグネットをつくることは不可能である。現実世界のマグネットにはかならず磁束のもれがあり、それによるフリンジングと呼ばれるフィールドが存在する。フリンジングフィールドは  $s$  依存性をもつため、それがなるべく小さくなるようにマグネットを設計する。そのため、軌道解析においてはこれを無視してもよいことが多く、計算上は理想的なマグネットを仮定することができる。理想的な二極、四極マグネットとは、端面を境にしてマグネット内では  $a_{01}, a_{11}$  が定数、マグネット外ではゼロとなるようなものをいう。

## 第 3 章

### 運動方程式

#### 3.1 基礎方程式

磁場  $\vec{B}$  中を速度  $\vec{v}$  で運動している電荷  $e$ 、質量  $m$  の荷電粒子の運動方程式は、その座標がある座標系において  $\vec{r}(t)$  であたえられているとき、 $t$  を時間として一般に次式で表される。

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) = e \left( \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \vec{B} \right) \quad (3.1)$$

これは、電場のないときのローレンツ力の式 ( $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$ ) そのものである。さて、質量  $m$  についてあらかじめ注意しておこう。シンクロトロン内を運動している粒子の速度は、一般的に光速に対して無視できないようなスピードである。そのため相対論的効果により、その質量が大きく変わることがふつうである。しかしながら、電場のない空間を扱う際は、質量変化を考える必要はない。なぜなら、磁場が荷電粒子に対して働きかける力は常に運動方向に対し垂直であり、運動の方向を変えるだけで、運動エネルギー、運動量および速度の絶対値を変えないからである。すなわち、 $m$  は定数としてあつかえる。この本では加速を考えていないので、これ以降の計算ではすべて質量は定数である。運動エネルギー、運動量と速度の絶対値も定数である。この章ではすべての式において、シンクロトロン内を運動している粒子の運動エネルギーを  $E$ 、運動量の絶対値を  $p$ 、速度の絶対値を  $v$  とおく。もちろん、すべて定数である。

##### 3.1.1 直交曲線座標系での運動方程式

では、直交曲線座標系  $(x, z, s)$  でのビーム軌道の方程式を得るために、独立変数を  $t$  から  $s$  に変えよう。表記が煩雑になるのを防ぐため、方程式中ではあえて  $x(s), z(s)$  といった表現を避けるが、 $x, z$  はすべて  $s$  の関数である。今後方程式を記述する際、ほとんどすべてこの表記方針が採られるものとする。まず、 $\vec{r}(x, z, s)$  を  $s$  で全微分して

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}(x, z, s)}{ds} &= \frac{d\vec{r}_0(s)}{ds} + \frac{dx}{ds} \hat{n} + x \frac{d\hat{n}}{ds} + \frac{dz}{ds} \hat{b} + z \frac{d\hat{b}}{ds} \\ &= \hat{t} + x(G(s)\hat{t} + \kappa(s)\hat{b}) - z\kappa(s)\hat{n} + \frac{dx}{ds} \hat{n} + \frac{dz}{ds} \hat{b} \\ &= (1 + G(s)x)\hat{t} + \kappa(s)x\hat{b} - \kappa(s)z\hat{n} + \frac{dx}{ds} \hat{n} + \frac{dz}{ds} \hat{b} \end{aligned} \quad (3.2)$$

この本では  $\kappa(s) = 0$  の場合のみを考えているので

$$\frac{d\vec{r}(x, z, s)}{ds} = (1 + G(s)x)\hat{t} + \frac{dx}{ds} \hat{n} + \frac{dz}{ds} \hat{b} \quad (3.3)$$

である。

$$\frac{d\vec{r}(x, z, s)}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (3.4)$$

より式(3.3)は

$$\frac{d\vec{r}(x, z, s)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \left\{ (1 + G(s)x)\hat{t} + \frac{dx}{ds} \hat{n} + \frac{dz}{ds} \hat{b} \right\} \frac{ds}{dt} \quad (3.5)$$

と書ける。また、磁場  $\vec{B}(x, z, s)$  は

$$\vec{B}(x, z, s) = B_x \hat{n} + B_z \hat{b} + B_s \hat{t} \quad (3.6)$$



であるので、これを式 (3.1) に代入する。すると運動方程式は

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) : \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{r}}{dt} \right) &= \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \left[ m \left\{ (1 + G(s)x)\hat{t} + \frac{dx}{ds}\hat{n} + \frac{dz}{ds}\hat{b} \right\} \frac{ds}{dt} \right] \\
&= m \frac{ds}{dt} \left[ \frac{d}{ds} \left\{ \frac{ds}{dt} (1 + G(s)x) \right\} \hat{t} + \frac{ds}{dt} (1 + G(s)x) \frac{d\hat{t}}{ds} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} \right) \hat{n} + \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} \frac{d\hat{n}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \frac{dz}{ds} \right) \hat{b} + \frac{ds}{dt} \frac{dz}{ds} \frac{d\hat{b}}{ds} \right] \\
&= m \frac{ds}{dt} \left[ \left\{ \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} \right) - \frac{ds}{dt} G(s) (1 + G(s)x) \right\} \hat{n} + \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \frac{dz}{ds} \right) \hat{b} \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{ds} \left\{ \frac{ds}{dt} (1 + G(s)x) + \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} G(s) \right\} \hat{t} \right] \tag{3.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) : e \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right) &= e \left[ \left\{ (1 + G(s)x)\hat{t} + \frac{dx}{ds}\hat{n} + \frac{dz}{ds}\hat{b} \right\} \frac{ds}{dt} \times (B_x\hat{n} + B_z\hat{b} + B_s\hat{t}) \right] \\
&= e \frac{ds}{dt} \left[ (1 + G(s)x) B_x (\hat{t} \times \hat{n}) + (1 + G(s)x) B_z (\hat{t} \times \hat{b}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{dx}{ds} B_z (\hat{n} \times \hat{b}) + \frac{dx}{ds} B_s (\hat{n} \times \hat{t}) + \frac{dz}{ds} B_x (\hat{b} \times \hat{n}) + \frac{dz}{ds} B_s (\hat{b} \times \hat{t}) \right] \\
&= e \frac{ds}{dt} \left[ \left\{ \frac{dz}{ds} B_s - (1 + G(s)x) B_z \right\} \hat{n} + \left\{ (1 + G(s)x) B_x - \frac{dx}{ds} B_s \right\} \hat{b} \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{dx}{ds} B_z - \frac{dz}{ds} B_x \right) \hat{t} \right] \tag{3.8}
\end{aligned}$$

両辺を比較して、

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \frac{dx}{ds} \right) = (1 + G(s)x) \left( G(s) \frac{ds}{dt} - \frac{eB_z}{m} \right) + \frac{eB_s}{m} \frac{dz}{ds} \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{dt} \frac{dz}{ds} \right) = (1 + G(s)x) \frac{eB_x}{m} - \frac{eB_s}{m} \frac{dx}{ds} \tag{3.10}$$

のようになる。こうして、あらゆる場合に対応した極めて一般的な方程式を得た。今後、この方程式を、加速をしないときの基礎方程式と呼ぼう。ただし、この名称はまったく認知されているものではなく、この本の中だけで通用する名前だということをあらかじめ断っておく。

さて、基礎方程式は求まったものの、このままでは手計算を続けるにはいささか複雑であるので、ここでひとつの近似を行なう。すなわち、 $x, z$  方向への運動が  $s$  方向への運動に比べれば十分小さい、とする。これは粒子の速度の絶対値  $v$  に対し、 $s \approx vt$  と考えてよいことにしよう、ということである。これにより、

$$\frac{ds}{dt} \approx v = \frac{pc^2}{E} \tag{3.11}$$

とすることができる。この節の最初の方でも述べたが、ここでは一定速度での運動のみを考えているので、これらはすべて定数である。この近似の結果、 $x, \frac{dx}{ds}, z, \frac{dz}{ds}$  は今後すべて微小量として取り扱われることになる。また、曲率半径  $\rho(s) \gg x$  なので、その逆数である曲率  $G(s)$  も微小量となる。ずいぶんと勝手な仮定をしたようにみえるが、実際はそれほどいい加減な近似ではない。たとえば、実際に KEK にある陽子シンクロトロンでは、 $x$  方向に 10 mm ほど軌道がそれることがあるが、その間  $s$  方向には 12 m 移動している。すなわち、 $x, z$  方向への運動は、 $s$  方向への運動に比べれば、最大でも 1/1000 以下程度しかない、のである。というよりも、 $x, z$  の変位が  $s$  に比べて無視できないようなシンクロトロンなど、おそらく実用にならないだろう。では、安心して加速をしないときの基礎方程式 (3.9), (3.10) を書き直しておこう。ついでだから、 $E = mc^2$  を用いて、 $m$  も消しておこう。すると、微小

### 3.2. 運動方程式から軌道を計算する

量の一次項だけをとって

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2} &\approx \frac{e}{p}B_s \frac{dz}{ds} - (1 + G(s)x) \frac{e}{p}B_z + G(s)(1 + G(s)x) \\ &\approx \frac{e}{p}B_s \frac{dz}{ds} - (1 + G(s)x) \frac{e}{p}B_z + G(s)\end{aligned}\quad (3.12)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} \approx (1 + G(s)x) \frac{e}{p}B_x - \frac{e}{p}B_s \frac{dx}{ds}\quad (3.13)$$

のように、ずっと簡単になる。

#### 3.1.2 基礎方程式の具体例

磁場のない空間での運動方程式（自由空間）

まず、最も簡単な場合を考えよう。それは磁場のない場合である。基礎方程式(3.12),(3.13)において、 $B_x, B_z, B_s$ をすべてゼロとおいてやればよい。したがって、

$$\frac{d^2x}{ds^2} = G(s)\quad (3.14)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0\quad (3.15)$$

である。このような場所は自由空間、またはドリフトスペース (Drift space) とよばれる。

二極磁場中での運動方程式

では、二極磁場中での運動方程式はどうだろう。二極磁場は  $a_{01}(s)$  であたえられる。マグネットが理想的であり、一様磁場を発生するものであれば  $a_{01}(s)$  は  $s$  依存性を持たず定数とできる。このような一様二極磁場中では、 $G(s)$  も定数になる。定数であることを明確にあらわすために、定数のときは  $a_{01}(s), G(s)$  をたんに  $a_{01}, G$  と書くことにしよう。 $B_z = a_{01}, B_s, B_x$  はゼロであるので、

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -(1 + Gx) \frac{e}{p}a_{01} + G\quad (3.16)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0\quad (3.17)$$

である。

四極磁場中での運動方程式

さくさくいこう。次は四極磁場中での運動方程式である。四極磁場をあたえるのは、 $a_{11}(s)$  である。これも、理想マグネットをかながえ  $s$  方向の成分はないとして定数  $a_{11}$  としておこう。すると、 $B_x = a_{11}z, B_z = a_{11}x, B_s = 0$  であるので

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -(1 + G(s)x) \frac{e}{p}a_{11}x + G(s)\quad (3.18)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = (1 + G(s)x) \frac{e}{p}a_{11}z\quad (3.19)$$

となる。

### 3.2 運動方程式から軌道を計算する

これまでの計算で、シンクロトロンに必要な最低限の要素に対する運動方程式はすべて求められた。あとはそれらを解くだけである。正しく計算しさえすれば、自分で考えたシンクロトロンの中を、荷電粒子がどのような軌道を描いて回るかをもうちゃんと予想できるのである。

これ以後、軌道に関していくつかの言い方がでてくるので、いままでに出てきたものを含め、ここでちょっと整理しておこう。表1に一覧としてまとめたので、見ておいていただきたい。

|      |  |
|------|--|
| 閉軌道  | 始まりや終りのない、閉じた軌道全般をこう呼ぶ。<br>周回軌道とちがいで、リング一周で完全に閉じている必要がある。<br>ここでいう完全に閉じるとは、二週目以降も全く同じ軌道に重なるということであり、閉軌道を一周した粒子は位置だけでなく運動量も、もとの状態に戻っていないてはならない。 |
| 設計軌道 | ビームの軌道として、設計者が考えた軌道。<br>$s$ 軸上をぐるっと一周したもので、閉軌道である。   |
| 周回軌道 | シンクロトロン内を周回する粒子が、現実には描く軌道。<br>周回軌道は、必ずしも閉じている必要はない。<br>現実の粒子は、ある平均的な軌道である平衡軌道を中心に振動している。   |
| 平衡軌道 | 周回軌道の平均。または、周回軌道の振動の中心を通る平均的な軌道。<br>平衡軌道は、閉軌道である。<br>設計軌道に近いほど、できのいいシンクロトロンといえる。   |

表 1: 軌道に関する用語のまとめ

### 3.2.1 座標系の決定

では、実際にひとつのシンクロトロンをここで考えてみることにしよう。水平にぐるっと一周する閉軌道を持つシンクロトロンである。運動量の絶対値  $p_0$  の荷電粒子をある閉軌道のまわりに閉じ込めるため、 $z$  軸方向に一様な二極磁場をだすマグネットを並べる。次に、ビームの拡散を防ぐため、四極マグネットを適当に配置する。これで加速をしないシンクロトロンのできあがりである。加速をしないシンクロトロンなど何にもならないじゃないか、と思われるかもしれないが、現実にはそういうシンクロトロンも多く建設されている。これらはストレージリングと呼ばれるものであり、ビームを貯蔵するという目的を持ったシンクロトロン<sup>1</sup>なのである。ではつぎに、このシンクロトロンの設計軌道、すなわち、 $s$  軸をきめよう。ビームに周回軌道をもたせる作用を担っているのは、二極マグネットだけである。したがって、自由空間や四極マグネットの場所では、ビームは直進する。このような場所で、わざわざ曲がった座標系を仮定する必要はないだろう。ある荷電粒子が理想的な初期条件 ( $x = 0, z = 0, \vec{p} = p_0 \hat{t}$ ) を持っているとして、その粒子の描く軌道にそって  $s$  軸を定めよう。すると、 $s$  軸が曲がっているのは二極マグネットが存在している空間だけなので二極磁場中での運動方程式以外では曲率ゼロ、すなわち、 $G(s) = 0$  とすることができる。このように空間内に自由に  $s$  軸の経路をきめられる、これが曲線座標系の最大の利点である。二極磁場中の軌道についても、( $x = 0, z = 0, \vec{p} = p_0 \hat{t}$ ) の荷電粒子が描く軌道にそって  $s$  軸を決めるので、二極磁場中での運動方程式 (3.16) も

$$p_0 = e a_{01} \rho \quad \longrightarrow \quad \frac{e}{p_0} a_{01} = G \quad (3.20)$$

をもちいて簡略化される。結局、式 (3.14) から (3.19) のすべての運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= 0 & \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d^2 x}{ds^2} &= -G^2 x & \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d^2 x}{ds^2} &= -\frac{e}{p_0} a_{11} x & \frac{d^2 z}{ds^2} &= \frac{e}{p_0} a_{11} z \end{aligned} \quad (3.21)$$

となり、理想的な初期条件をもった荷電粒子に対して自明な解 ( $x = 0, z = 0$ ) をもち、設計軌道は理想的な初期条件をもった荷電粒子の描く軌跡に一致する。

### 3.2.2 トランスファ・マトリクス

運動方程式 (3.21) をみると、すべて同じ形であることに気付かれるだろう。 $x$  や  $z$  の係数をゼロも含めすべて  $g_x(s), g_z(s)$  といった関数でひとまとめにしまえば、全周にわたってそれぞれひとつの方程式であらわせる。 $g_x(s), g_z(s)$  はシンクロトロンの構造に依存した周期性を持っており、その一周期分を 1 セルという。ここでの話は  $x, z$  どちらの

<sup>1</sup>現実にはシンクロトロン内のビームは様々な原因でそのエネルギーを失うので、運動量を一定値に保つために加速装置を持っている。

### 3.2. 運動方程式から軌道を計算する

場合にも同様に当てはまるものである。したがって、 $x$  軸方向を例にとりて話を進めるが、特に断らない限り、それは直ちに  $z$  軸方向の運動にも当てはまると考えてもらって差し支えない。

初期条件として  $(x, \frac{dx}{ds} \neq 0, z, \frac{dz}{ds} \neq 0)$  ただし、 $(|p| = p_0)$  である荷電粒子を考えよう。この粒子の描く軌道は  $s$  の値に応じて、前節の運動方程式 (3.21) を逐次解いてゆけばもとめられる。しかし、具体的に運動方程式を解いて荷電粒子の軌跡を追っていく過程で、その粒子は  $s$  軸、すなわち設計軌道から大きく外れ、軌道が発散しているかも知れない。二極マグネットや四極マグネットが適切に配置されていなければ、粒子はシンクロトロン内を安定に周回し続けることはできないのである。では、どうすれば安定な軌道が得られるのであろうか。運動方程式が満たすべき条件とは何なのか。これより運動方程式の一般解をもちいて、その安定条件を調べてみよう。一般的な同次形の周期係数をもつ二階微分方程式を

$$\frac{d^2x}{ds^2} + g(s)x = 0 \quad (3.22)$$

とおくと、一般解は  $c_1, c_2$  を任意定数として

$$x(s) = c_1 w(s) \exp[i\psi(s)] + c_2 w(s) \exp[-i\psi(s)] \quad (3.23)$$

ともとまる。 $w(s)$  は振幅、 $\psi(s)$  は位相をそれぞれあらわしており、 $w(s)$  は  $g(s)$  と同じ周期をもつ周期関数である。ここでなんでやねん、とおもった人は第一章の3節で解説してあるので、もう一度そこをみてもらいたい。正規形の  $n$  階微分方程式は  $n$  次元の連立微分方程式に変数変換されること、周期関数を係数とする  $n$  次元の同次線形微分方程式の解の基本系は、フロケの定理であたえられること、の二点が理解できればよい。

表記をすっきりさせるために、これ以後  $'$  で一階微分  $\frac{d}{ds}$  を表すことにしよう。 $s = s_0$  における初期値が  $(x_0, x'_0)$  であるとき、一般解 (3.23) に初期条件を代入して  $c_1, c_2$  をもとめると

$$c_1 = \frac{x_0(w'(s_0) - i\psi'(s_0)w(s_0)) \exp[-i\psi(s_0)] - x'_0 w(s_0) \exp[-i\psi(s_0)]}{-2i} \quad (3.24)$$

$$c_2 = \frac{-x_0(w'(s_0) + i\psi'(s_0)w(s_0)) \exp[i\psi(s_0)] + x'_0 w(s_0) \exp[i\psi(s_0)]}{-2i} \quad (3.25)$$

であり、これをもとの一般的な微分方程式 (3.22) に代入し、 $\Delta\psi(s) = \psi(s) - \psi(s_0)$  とおいて整理すると、

$$x(s) = x_0 [w(s_0)w(s)\psi'(s_0) \cos \Delta\psi(s) - w'(s_0)w(s) \sin \Delta\psi(s)] + x'_0 w(s_0)w(s) \sin \Delta\psi(s) \quad (3.26)$$

となる。ここで、微分方程式 (3.22) の解 (3.23) の性質から  $\psi'(s_0) = 1/w^2(s_0)$  である<sup>2</sup>ことを使うと、最終的に軌道の一般解は

$$x(s) = x_0 \left[ \frac{w(s)}{w(s_0)} \cos \Delta\psi(s) - w'(s_0)w(s) \sin \Delta\psi(s) \right] + x'_0 w(s_0)w(s) \sin \Delta\psi(s) \quad (3.27)$$

と決まる。また、 $x'(s)$  についても同様に

$$x'(s) = x_0 \left[ -\frac{1 + w(s_0)w'(s_0)w(s)w'(s)}{w(s_0)w(s)} \sin \Delta\psi(s) - \left( \frac{w'(s_0)}{w(s)} - \frac{w'(s)}{w(s_0)} \right) \cos \Delta\psi(s) \right] + x'_0 \left[ \frac{w(s_0)}{w(s)} \cos \Delta\psi(s) + w(s_0)w'(s) \sin \Delta\psi(s) \right] \quad (3.28)$$

である。加速器内の荷電粒子の軌道に限らず、質点の運動を論じるには上記のようにその位置と運動量の両方を記述するほうがよい。粒子が  $s = s_0$  から  $s = s_1$  へすすんだとき、この運動はマトリクス

$$M(s_1|s_0) = \begin{pmatrix} \frac{w(s_1)}{w(s_0)} \cos \Delta\psi(s_1) - w(s_1)w'(s_0) \sin \Delta\psi(s_1) & w(s_0)w(s_1) \sin \Delta\psi(s_1) \\ -\frac{1 + w(s_0)w'(s_0)w(s_1)w'(s_1)}{w(s_0)w(s_1)} \sin \Delta\psi(s_1) - \left( \frac{w'(s_0)}{w(s_1)} - \frac{w'(s_1)}{w(s_0)} \right) \cos \Delta\psi(s_1) & \frac{w(s_0)}{w(s_1)} \cos \Delta\psi(s_1) + w(s_0)w'(s_1) \sin \Delta\psi(s_1) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M(s_1|s_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

と書ける。この  $M(s_1|s_0)$  を  $s_0$  から  $s_1$  へのトランスファ・マトリクスと呼ぶ。トランスファ・マトリクスは、シンクロトロン内の粒子の運動に関して位置と運動量の両方を記述しているため、軌道計算において大変役に立つ。

<sup>2</sup>これも第一章3節を参照のこと。

### 3.2.3 トランスファ・マトリクス of 安定条件

シンクロトロン内を周回する荷電粒子の軌道について、その運動を記述するトランスファ・マトリクスまで一般的にもとめるに至った。このあたりで、周回軌道の安定条件について考えてみよう。シンクロトロンは周期構造を持っており、その最小単位をセルとよぶ。まず、1セル当たりのトランスファ・マトリクス  $M(s)$  を求めよう。式(3.30)において  $s_0 = s$ 、 $s_1 = s + L$  とおく。  $L$  はもちろん、1セルの長さである。すると、 $w(s)$  の周期性から当然  $w(s_0) = w(s_1) = w(s)$ 、 $w'(s_0) = w'(s_1) = w'(s)$  である。また、 $\psi(s + \omega) - \psi(s) = \mu$  とおくとトランスファ・マトリクス(3.29)は

$$M(s) = \begin{pmatrix} \cos \mu - w(s)w'(s) \sin \mu & w(s)^2 \sin \mu \\ -\frac{1 + w^2(s)w'^2(s)}{w(s)^2} \sin \mu & \cos \mu + w(s)w'(s) \sin \mu \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

のようになる。もちろん、この  $M(s)$  は任意の  $s$  において定義されるものである。また、ここで定義した  $\mu$  を1セル当たりの位相進み<sup>3</sup> (Phase advance) という。

さて、周回軌道が安定である条件は何であろうか。もっとも単純なものは、リング一周で軌道が閉じている、というものである。リング一周は周期的なセルが並んでいるだけなので、対称性から1セルについてのみ考えればよい。1セル進んだ状態が初期状態  $(x_0, x'_0)$  に戻っていればよいのである。運動方程式がこのような解を持つとき、その解を閉軌道解とよぶことにしよう。しかしながら、これはかなり厳しい条件であり、実際はリング一周で軌道が閉じている必要はない。もっとはっきりいって、リング一周どころか何セル分進もうとも、必ずしも初期状態に戻る必要はないのである。むしろ、そのようなものは第四章で述べるように、周回軌道の安定にとって逆に危険である。安定条件としては、 $s \rightarrow \infty$  において単にトランスファ・マトリクスの行列要素が有限であればよい。 $n$ セル分のトランスファ・マトリクスは、単純に  $M(s)$  を  $n$ 乗することによって得られるが、非常に都合のいいことに  $M^n(s)$  は

$$M^n(s) = \begin{pmatrix} \cos n\mu - w(s)w'(s) \sin n\mu & w(s)^2 \sin n\mu \\ -\frac{1 + w^2(s)w'^2(s)}{w(s)^2} \sin n\mu & \cos n\mu + w(s)w'(s) \sin n\mu \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

と極めて簡単であり、 $\mu$  が実数であればすべての行列要素は有限である。 $M^n(s)$  が上のようになるのは、2、3乗してみればすぐに気が付くであろう。したがって、周回軌道の安定条件は

$$|\cos \mu| < 1 \quad (3.33)$$

だけである。すなわち、 $\mu$  が実数であれば十分である。ただし、これはあくまで加速器が理想的である場合であり、実際のシンクロトロンには、必ず誤差磁場が存在する。この誤差磁場は、本来安定であるはずの軌道を不安定なものに変えてしまう。安定条件に関するこれ以上の議論については、つぎの章でとりあつかう。

$\mu$  が実数であることから、 $x(s), x'(s)$  が振動解であることも容易に察しがつくであろう。実際、 $x(s), x'(s)$  は  $s$  軸  $(0, 0, s)$  を中心とする振動解であり、理想的なシンクロトロンでは周回粒子の運動量さえ正しければ、このように平衡軌道は  $s$  軸に重なり設計軌道に一致している。この平衡軌道まわりの振動をベータatron振動とよぶ。リング一周当たりのベータatron振動の回数を、ベータatronチューン、またはたんにチューンとよび  $\nu$  であらわす。リング一周当たりの位相進みを  $\mu_{ring}$  とかくと、

$$\mu_{ring} = 2\pi\nu \quad (3.34)$$

の関係がある。

### 3.2.4 エミッタンス

周回軌道が安定であるとして、もう少し軌道の一般的な性質について考察しておこう。荷電粒子の運動は、上記の  $x(s), x'(s)$  により、完全に記述される。ここで位相平面  $(x, x')$  を考え、粒子の運動がこの  $(x, x')$  平面上でどのような振る舞いをするのかみてみよう。まず、軌道の一般解(3.27)を  $x_0, x'_0$  ではなく三角関数について整理しなおしてみる。すると、適当な位相  $\delta$  をつかって

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{x_0}{w(s_0)} w(s) \cos \Delta\psi(s) + (x'_0 w(s_0) - x_0 w'(s_0)) w(s) \sin \Delta\psi(s) \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_0}{w(s_0)}\right)^2 + (x'_0 w(s_0) - x_0 w'(s_0))^2} w(s) \cos(\Delta\psi(s) + \delta) \\ &= a w(s) \cos(\Delta\psi(s) + \delta) \end{aligned} \quad (3.35)$$

<sup>3</sup>普通、位相進みという場合、1セルではなくリング一周分の位相進み  $\mu_{ring}$  を指すほうが多い。

### 3.2. 運動方程式から軌道を計算する

と書き直せる。 $w(s)$  の前は、根号の中が全て定数なので、これを  $a$  とおいた。 $x'(s)$  はこれを微分して、

$$\begin{aligned} x'(s) &= aw'(s) \cos(\Delta\psi(s) + \delta) - aw(s)\psi'(s) \sin(\Delta\psi(s) + \delta) \\ &= aw'(s) \cos(\Delta\psi(s) + \delta) - \frac{a}{w(s)} \sin(\Delta\psi(s) + \delta) \end{aligned} \quad (3.36)$$

となる。こうすると、 $x(s), x'(s)$  が  $(0, 0, s)$  を中心とする振動解であることがはっきり見てとれる。 $x(s), x'(s)$  の最大値はそれぞれ  $aw(s), a\sqrt{(1 + w(s)^2 w'^2(s))/w^2(s)}$  である。この二式 (3.35), (3.36) より、ただちに

$$\begin{aligned} x^2(s) + w^2(s)(w'(s)x(s) - w(s)x'(s))^2 &= a^2 w^2(s) \\ \frac{1 + w(s)w'(s)}{w^2(s)} x^2(s) - 2w(s)w'(s)x(s)x'(s) + w^2(s)x'(s)^2 &= a^2 = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.37)$$

が導ける。この式が楕円を表していることはお分かりだと思うが、 $x(s)x'(s)$  のクロスタームがあるので、図4のような軸の傾いた楕円である。これが位相平面上での、粒子の運動の軌跡になる。つまり、この楕円は運動の広がりをお示ししており、 $a^2$  は  $s$  に依らず運動の広がりをお特徴付けるパラメータでエミッタンスと呼ばれる。

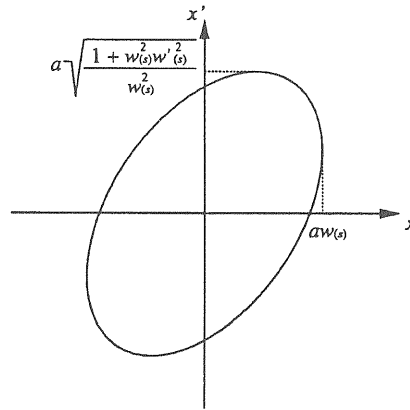


図4、エミッタンス

この楕円の面積を計算すると

$$\begin{aligned} \iint_D dx dx' &= \int x'(s) dx \\ &= \int_0^2 \pi [aw'(s) \cos(\Delta\psi(s) + \delta) - \frac{a}{w(s)} \sin(\Delta\psi(s) + \delta)] [-\sin(\Delta\psi(s) + \delta)] d(\Delta\psi(s) + \delta) \\ &= \int_0^2 \pi a^2 \left[ -w(s)w'(s) \frac{\sin 2(\Delta\psi(s) + \delta)}{2} + \frac{1 - \cos 2(\Delta\psi(s) + \delta)}{2} \right] d(\Delta\psi(s) + \delta) \\ &= a^2 \left[ w(s)w'(s) \frac{\cos 2(\Delta\psi(s) + \delta)}{4} + \frac{\Delta\psi(s) + \delta}{2} - \frac{\sin 2(\Delta\psi(s) + \delta)}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi a^2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

であり、楕円の面積がエミッタンスそのものを表していることが分かる。ここから、エミッタンスの単位としては  $[\text{mm}\cdot\text{mrad}]$  がよくもちいられる。

#### 3.2.5 Twiss パラメータの導入

これまでの計算式を振り返ってみると、係数として同じ形のもので何度か出てきたことに気が付かれるかもしれない。そこで

$$\beta(s) = w^2(s) \quad (3.39)$$

$$\alpha(s) = w(s)w'(s) \quad (3.40)$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + w^2(s)w'^2(s)}{w(s)^2} \quad (3.41)$$

なる関数を定義しよう。これらは Twiss パラメータとよばれるものであり、やはり 1 セルの長さ  $L$  を周期とする周期関数である。これらをもちいて 1 セル分のトランスファ・マトリクスを書きなおすと、

$$M(s) = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha(s) \sin \mu & \beta(s) \sin \mu \\ -\gamma(s) \sin \mu & \cos \mu - \alpha(s) \sin \mu \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

と大変簡潔になる。ここで出てきた  $\beta(s)$  はベータatron 振幅、またはベータ関数<sup>4</sup>などと呼ばれ、加速器の重要な概念のひとつである。何故このような名前がついているのかは、軌道の一般解 (3.35) をみればすぐに納得いただけると思う。 $\beta(s)$  は、ベータatron 振動の振幅を決定している関数である。

### 3.3 理想的なシンクロトロン軌道

一般的な計算ばかりしてきたので、いったいなにがどうなったのかさっぱり分からなくなってしまった、かもしれない。ここで具体的なモデルを使って実際に軌道計算を試みることにしよう。ただ、ゼロから物事をつくるのは総じて大変なので、ここでは既存のシンクロトロン、高エネ研の 12 GeV 陽子シンクロトロン (以下、PS) を例にとる。PS は図 5 に示すようなセル構造をもち、4 セルでひとつのリングを構成している。この図ではセル構造の説明のため二極マグネット  $B$  を真っ直ぐに描いてあるが、これは実際は図 2 にあるような曲がったセクターマグネットである。

パラメータ一覧

| エレメント  | 長さ [m] | パラメータ | 単位                       |
|--------|--------|-------|--------------------------|
| D1     | 5.447  | G     | 0.040 [m <sup>-1</sup> ] |
| D2     | 1.816  | k1    | 0.394 [T/m]              |
| D3     | 0.377  | k2    | 0.397 [T/m]              |
| B      | 3.258  |       |                          |
| QF, QD | 0.600  |       |                          |

- D1, D2, D3 : 自由空間
- B : 二極マグネット
- QF : 四極マグネット (収束型)
- QD : 四極マグネット (発散型)

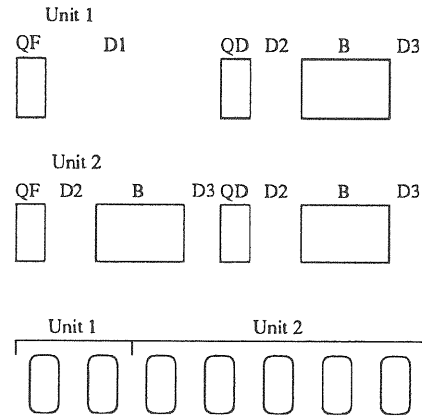


図 5、陽子シンクロトロン構造  
二種類のユニットを 7 つ並べて 1 セルとしている。

これまで加速器内の荷電粒子の運動について運動方程式をもとに見てきたわけであるが、実際に加速器内でのビームの振る舞いを計算するにおいて、微分方程式を直接解いてゆくようなことは殆んど行なわれていない。前節まででできたトランスファ・マトリクスを使えば、いちいち微分方程式を解かなくてもマトリクスの四則演算だけで粒子の運動を完全に記述できるからである。マグネットが理想的であるとするならば、必要な運動方程式は (3.21) ですべてあたえられている。自由空間、二極マグネット、四極マグネットの各々についてトランスファ・マトリクスをもとめてみよう。今回、微分方程式の係数は全て定数なので、それぞれの一般解はどれも簡単に算出できる。トランスファ・マトリクスをもとめただけなので、初期条件としてどれも  $s = 0$  の場合を考えればよい。 $s = 0$  での  $x, x', z, z'$  の値を  $x_0^{free}, x_0'^{free}, \dots$  のように書くと、それぞれ

#### 自由空間

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0'^{free} s + x_0^{free} & x'(s) &= x_0'^{free} \\ z(s) &= z_0'^{free} s + z_0^{free} & z'(s) &= z_0'^{free} \end{aligned} \quad (3.43)$$

<sup>4</sup>数学にでてくる  $B$  関数

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

とは関係ない。

### 3.3. 理想的なシンクロトロンの軌道

#### 二極マグネット

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0^{dipole} \cos Gs + \frac{x_0^{dipole}}{G} \sin Gs & x'(s) &= -Gx_0^{dipole} \sin Gs + x_0^{dipole} \cos Gs \\ z(s) &= z_0^{dipole} s + z_0^{dipole} & z'(s) &= z_0^{dipole} \end{aligned} \quad (3.44)$$

#### 四極マグネット

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0^{quad} \cos \sqrt{k}s + \frac{x_0^{quad}}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}s & x'(s) &= -\sqrt{k}x_0^{quad} \sin \sqrt{k}s + x_0^{quad} \cos \sqrt{k}s \\ z(s) &= z_0^{quad} \cosh \sqrt{k}s + \frac{z_0^{quad}}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{k}s & z'(s) &= \sqrt{k}z_0^{quad} \sinh \sqrt{k}s + z_0^{quad} \cosh \sqrt{k}s \end{aligned} \quad (3.45)$$

のようになる。ここで  $k = (e/p_0)a_{11}$  とおいた。四極マグネットについて、上式は  $k > 0$  の場合であるが、 $k < 0$  の場合は単に  $x \leftrightarrow z$  としてやればよい。このように四極磁場に関しては  $x, z$  は全く同等で、二通りの解が存在する。したがって、四極マグネットのトランスファ・マトリクスとしては  $x, z$  共通で  $M_F^{quad}(s), M_D^{quad}(s)$  の二種類を用意してやればよい。それぞれのエレメントのトランスファ・マトリクスをまとめると

$$M_x^{drift}(s) = M_z^{drift}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

$$M_x^{dipole}(s) = \begin{pmatrix} \cos Gs & \frac{1}{G} \sin Gs \\ -G \sin Gs & \cos Gs \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$M_z^{dipole}(s) = M_z^{drift}(s) \quad (3.48)$$

$$M_F^{quad}(s) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k}s & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}s \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k}s & \cos \sqrt{k}s \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$M_D^{quad}(s) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k}s & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{k}s \\ \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}s & \cosh \sqrt{k}s \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

となった。 $s$  にはゼロから各々のエレメントの長さまでの値が入り、エレメント内での軌道もすべて計算できる。これで実際に  $x$  に関して粒子軌道をトレースした例を図6に示す。Unit 1 の QF の入り口を基準  $s = 0$  とした。

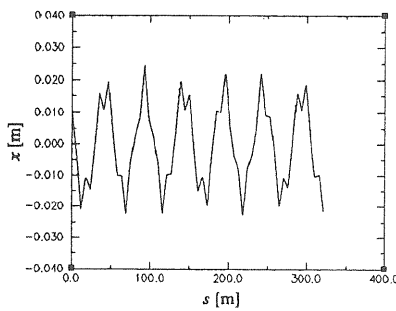


図6、理想的なシンクロトン内の粒子軌道（1周分）初期条件として、 $x = +10\text{mm}$  の変位を入れてある。軌道は閉じていない。

軌道がいびつなのは、ベータ関数  $\beta(s)$  による振幅変調があるためである。ここで鉛直方向のベータatron振動の源になっているのは、四極磁場成分  $a_{11}$  のみである。水平方向については、実は二極磁場もベータatron振動にかかわっている。これは水平方向での二極磁場中の運動方程式が、単振動型であることに由来する。二極磁場も水平方向には、収束力をもっているのである。しかし、運動方程式中の  $x$  の係数を比べればわかるように、二極磁場による振動係数は  $G^2 = 1.6 \times 10^{-3}$  と四極磁場における  $k = (e/p)a_{11} \sim 0.4$  に比べ  $1/250$  しかない。結果、ベータatron振動数は、ほとんど四極磁場による収束力で決まっており、シンクロトロンの収束力は四極磁場で決まっていると考えてよい。



## 第 4 章

### 誤差による軌道の変動

さて、これまで加速器を構成している機器や、入射してくるビームの運動量が理想的であるとして話をすすめてきた。当然のことながら、このような状況は現実にはまず有り得ない。では、これから運動量や磁場の誤差がゼロではない場合、こういった事が起こるのか一つひとつ見ていこう。

#### 4.1 運動量誤差

磁場中の荷電粒子が受ける力はその運動量に比例するので、シンクロトロン内を周回している荷電粒子の運動量に誤差があれば、当然目的の軌道から外れることになる。一様磁場中を運動する粒子の場合、その回転半径が運動量に応じて一定量変るだけで、運動そのものは単純な円運動のままであるが、加速器の中においては粒子の軌道を元々の設計軌道に強制的に修正しようとする力が働いているので、話はそう単純ではない。ここでいう軌道を修正しようとする力を発しているのは、先に加速器の基本エレメントの節でてきた収束用四極マグネットである。では、この収束力があるせいで粒子の運動が実際にどうなるのかを見てみよう。

##### 4.1.1 分散関数 (Dispersion)

運動量誤差の寄与を計算するために、基礎方程式にふたたび立ち戻ろう。(3.12),(3.13)において  $p$  を  $p_0 + \Delta p$  で置き換えて運動方程式をつくりなおしてみる。当然、自由空間では何の影響もない。式(3.14),(3.15)と全く同じ結果を得る。二極マグネット以外ではもちろん、 $G(s) = 0$ としてよい。

では、二極、四極マグネットのある空間ではどうだろう。二極磁場中の運動方程式は  $z$  に関しては式(3.17)と同じであるが、 $x$  に関しては

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{ds^2} &= -(1 + Gx) \frac{e}{p_0 + \Delta p} a_{01} + G \\
 &= -(1 + Gx) \frac{e}{p_0^2 - (\Delta p)^2} a_{01} (p_0 - \Delta p) + G \\
 &\approx -(1 + Gx) \frac{e}{p_0} a_{01} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) + G \\
 &= -\frac{e}{p_0} a_{01} - \frac{e}{p_0} a_{01} Gx + \frac{e}{p_0} a_{01} \frac{\Delta p}{p_0} + \frac{e}{p_0} a_{01} \frac{\Delta p}{p_0} Gx + G \\
 \frac{d^2x}{ds^2} + G^2x &= G \frac{\Delta p}{p_0} + G^2 \frac{\Delta p}{p_0} x \\
 \frac{d^2x}{ds^2} + G^2x &\approx G \frac{\Delta p}{p_0}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

のようになる。幸いなことに、この非同次微分方程式の特解は  $G$  が二極磁場中では定数であることから、 $x = \frac{1}{G} \frac{\Delta p}{p_0}$  と簡単に求まる。これより、一般解は任意定数を  $c_1, c_2$  としてただちに

$$x(s) = c_1 \cos Gs + c_2 \sin Gs + \frac{1}{G} \frac{\Delta p}{p_0} \tag{4.2}$$

ととまる。初期条件を  $x_0^{dipole}, x_0'^{dipole}$  とすれば

$$x(s) = x_0^{dipole} \cos Gs + \frac{x_0'^{dipole}}{G} \sin Gs + \frac{1}{G} (1 - \cos Gs) \frac{\Delta p}{p_0} \tag{4.3}$$

$$x'(s) = -Gx_0^{dipole} \sin Gs + x_0^{dipole} \cos Gs + \sin Gs \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4.4)$$

となり、 $x(s)$  は通常のベータatron振動の他に運動量誤差 ( $\Delta p/p$ ) に比例した変位  $x_\epsilon$  を受けるとわかる。この変位を

$$x_\epsilon = \eta_x(s) \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4.5)$$

とかき、この  $\eta_x(s)$  を分散関数とよぶ。通常、分散関数は  $B_x = 0$  であることから  $x$  軸方向のみに関係し、 $z$  軸方向にはゼロである。

四極磁場中の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= -\frac{e}{p_0 + \Delta p} a_{11} x \\ &= -\frac{e}{p_0} a_{11} x \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) \\ &= -\frac{e}{p_0} a_{11} x + \frac{e}{p_0} a_{11} \frac{\Delta p}{p_0} x \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{ds^2} &= \frac{e}{p_0 + \Delta p} a_{11} z \\ &= \frac{e}{p_0} a_{11} z - \frac{e}{p_0} a_{11} \frac{\Delta p}{p_0} z \end{aligned} \quad (4.7)$$

であり、この場合は  $x, z$  どちらにも関係しているが、運動量誤差は通常微小量であるので二次の効果しかない。<sup>1</sup>  $x_\epsilon$  や分散関数を問題にしているときは、一次近似の範囲で計算することが多いため、このような二次の寄与は無視してよく、結局、運動量誤差による軌道の歪みは二極マグネットだけが引き起こしていると考えてよい。また、二次の効果には平衡軌道を歪める力はない、といえる。運動量誤差 ( $\Delta p/p$ ) があるときの、一次近似での運動方程式をまとめておこう。

$$\begin{aligned} (\text{自由空間}) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} &= 0 & \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \\ (\text{二極磁場}) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} + G^2 x &= G \frac{\Delta p}{p_0} & \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \\ (\text{四極磁場}) \quad \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{e}{p_0} a_{11} x &= 0 & \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{e}{p_0} a_{11} z &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

さて、運動量誤差のあるときの軌道  $x(s), x'(s)$  は、変位  $x_\epsilon$  による歪んだ閉軌道とその周りのベータatron振動と解釈することができる。この歪んだ閉軌道を新しい平衡軌道と考え、 $x(s) = x_\epsilon + x_\beta$  と書けば平衡軌道をあたえる変位  $x_\epsilon$ 、ベータatron振動の成分  $x_\beta$  はともに運動方程式 (4.8) の解である。ここで、特に  $x_\epsilon$  については、それが平衡軌道を表しており閉軌道解であることに注意してもらいたい。すなわち、運動方程式に  $x_\epsilon$  を代入したときは、1セルすすんだ後にもとの値に戻っていなければならない。運動方程式 (4.8) に  $x_\epsilon$  を代入し、両辺を  $\Delta p/p_0$  で割ると

$$\begin{aligned} (\text{自由空間}) \quad \frac{d^2 \eta_x}{ds^2} &= 0 & \frac{d^2 \eta_z}{ds^2} &= 0 \\ (\text{二極磁場}) \quad \frac{d^2 \eta_x}{ds^2} + G^2 \eta_x &= G & \frac{d^2 \eta_z}{ds^2} &= 0 \\ (\text{四極磁場}) \quad \frac{d^2 \eta_x}{ds^2} + \frac{e}{p_0} a_{11} \eta_x &= 0 & \frac{d^2 \eta_z}{ds^2} - \frac{e}{p_0} a_{11} \eta_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

という式を得る。したがって、 $\eta_x(s)$  も実は運動方程式 (4.8) の閉軌道解であり、1セルすすんだ後  $\eta_x(s), \eta'_x(s)$  はもとの値に戻っていなければならない。これで1セル分の運動方程式を解けば、 $\eta_x(s), \eta'_x(s)$  を決定できる。また、 $\eta_z(s) = \eta'_z(s) = 0$  であることは明らかだろう。分散関数  $\eta_x(s)$  は運動量誤差 ( $\Delta p/p$ ) に依らず、セルの構造だけで決まる関数であるが、それは ( $\Delta p/p$ ) が微小量であり、四極磁場中の運動方程式において ( $\Delta p/p$ ) の項を無視できたからである。したがって、もし ( $\Delta p/p$ ) が大きければ、 $\eta_x(s)$  は ( $\Delta p/p$ ) の関数となる。

第三章3節で定義した理想的なシンクロtronリングもちいて具体的な  $\eta_x(s)$  の例を示そう。 $\eta_x(s), \eta'_x(s)$  についての1セル分のトランスファ・マトリクスさえもとめればよいのであるが、運動方程式 (4.9) の中に非同次項  $G$  が

<sup>1</sup>  $\frac{e}{p_0} a_{11} \frac{\Delta p}{p_0} x$  は微小量  $x, (\Delta p/p_0)$  という微小量同士の積である。

#### 4.1. 運動量誤差

あるため、特解  $\eta_x = (1/G)$  に対する補正をしてやらなければならない。これは二極磁場中での計算において補正ベクトル

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{G}(1 - \cos Gs) \\ \sin Gs \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

を足し合わせるか、トランスファ・マトリクスを  $3 \times 3$  に拡張すればよい。計算機で軌道解析をする場合は、すべてを行列の掛け算で行なえるよう後者の方法が用いられることが多い。トランスファ・マトリクスは、これも第三章3節での (3.46) から (3.50) をそのまま使って

$$M_x^{drift}(s) = M_z^{drift}(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$M_x^{dipole}(s) = \begin{pmatrix} \cos Gs & \frac{1}{G} \sin Gs & \frac{1}{G}(1 - \cos Gs) \\ -G \sin Gs & \cos Gs & \sin Gs \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$M_z^{dipole}(s) = M_z^{drift}(s) \quad (4.13)$$

$$M_F^{quad}(s) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k}s & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \sqrt{k}s & 0 \\ -\sqrt{k} \sin \sqrt{k}s & \cos \sqrt{k}s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$M_D^{quad}(s) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{k}s & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh \sqrt{k}s & 0 \\ \sqrt{k} \sinh \sqrt{k}s & \cosh \sqrt{k}s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

と拡張される。  $2 \times 2$  の部分をみればまったく何も変わっていない。二極磁場に対するトランスファ・マトリクスに、補正ベクトル (4.10) が追加されているだけである。

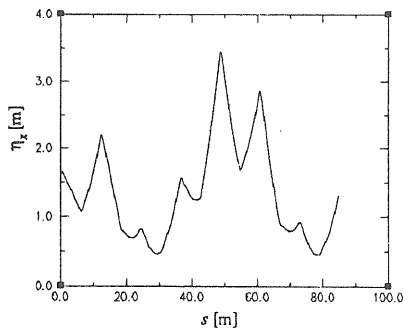


図7、理想的なシンクロトロンに於ける1セル分の分散関数

あとは1セル分のトランスファ・マトリクスを  $M_{cell}(s)$  として

$$M_{cell}(s) \begin{pmatrix} \eta_x(s) \\ \eta'_x(s) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_x(s) \\ \eta'_x(s) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

を解けば具体的な分散関数が得られる。その結果を図7に示す。分散関数は運動量誤差  $\Delta p/p_0$  に対する、平衡軌道の歪みをあたえる。たとえば、このリングでは運動量誤差が1%あると、平衡軌道が最大で35 mmも歪んでしまうことになる。

### 4.1.2 Momentum Compaction factor

運動量誤差をもつ粒子の平衡軌道は、設計軌道と一致しない。運動量誤差  $\Delta p/p_0$  により設計軌道から  $x_\epsilon(s)$  ずれた軌道が、もとの設計軌道に対して、どれだけ長さが変わっているかみてみよう。平衡軌道上をすすんでいる粒子はベータatron振動をしていないが、 $x'(s) = 0$  ではない。これを  $x'_\epsilon(s)$  としよう。図8は、二極磁場中での粒子の軌道を示したものである。点  $P(x_\epsilon, x'_\epsilon)$  の粒子が  $P'$  まですすんだとき、その変位  $x_{P'}$  はトランスファ・マトリクスより

$$\begin{aligned} x_{P'} &= x_\epsilon \cos G\Delta s + \frac{x'_\epsilon}{G} \sin G\Delta s + \frac{1}{G}(1 - \cos G\Delta s) \frac{\Delta p}{p_0} \\ &\approx x_\epsilon + x'_\epsilon \Delta \rightarrow x_\epsilon + x'_\epsilon ds \end{aligned} \quad (4.17)$$

であり、その移動距離の線要素  $dl$  は一次近似で

$$\begin{aligned} dl &\approx \sqrt{\{(\rho(s) + x_\epsilon)d\theta\}^2 + (x'_\epsilon ds)^2} \\ &\approx (\rho(s) + x_\epsilon)d\theta = (1 + G(s)x_\epsilon)ds \end{aligned} \quad (4.18)$$

とあたえられる。これを見れば明らかなように、一次近似では  $G(s) = 0$  であれば  $dl = ds$  であり運動量誤差による軌道長さの変化はない。 $G(s)$  がゼロでないのは二極マグネット内だけであり、運動量誤差による軌道の歪みは二極マグネットだけが引き起こしてると考えた前項の内容と一致する。運動量誤差  $\Delta p/p_0$  をもつことによる平衡軌道の長さの変化  $\Delta C$  は

$$\Delta C = \oint (dl - ds) = \oint G(s)x_\epsilon ds = \frac{\Delta p}{p_0} \cdot \oint G(s)\eta_x(s) ds \quad (4.19)$$

である。

設計軌道の長さ  $C$  に対する平衡軌道の変化分  $\Delta C$  の比を運動量誤差に対して

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_M \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4.20)$$

とかき、この  $\alpha_M$  をモーメンタムコンパクションファクター (Momentum compaction factor) とよぶ。慣習で同じ  $\alpha$  という記号を使うが、Twissパラメタの  $\alpha$  とはまったく別物である。この本では、区別するためにモーメンタムコンパクションファクターに  $M$  という添字をつけているが、世の中の文献を見るだにどちらもただ  $\alpha$  と書いて何の断りもないことが多い。他の本をご覧になるときは、よくよく注意されたい。また、ここでは  $\Delta C$  を一次近似を用いてもとめたが、さらに高次の計算が必要とされる場合もあり、このようなときは  $\Delta C/C$  は  $\Delta p/p_0$  の一次式にはならず

$$\frac{\Delta C}{C} = \alpha_M \frac{\Delta p}{p_0} + \alpha_M^{(1)} \left( \frac{\Delta p}{p_0} \right)^2 + \dots \quad (4.21)$$

のように書き表される。このとき、 $\alpha_M^{(1)}$  は高次のモーメンタムコンパクションファクターとよばれる。

## 4.2 収束力誤差 (Gradient error) とベータatron振動数のずれ (Tune shift)

これまでは理想的なシンクロトロンを仮定して話を進めてきたが、現実にはシンクロトロンを形成しているマグネットには様々な誤差磁場が存在する。ここでは誤差磁場が、粒子の軌道にどのような影響をおよぼすかみてゆこう。

シンクロトロンにおいて、収束力を発生しているのは四極マグネットである。この四極マグネットが四極の誤差磁場をもつとき、それを収束力誤差がある、という。四極磁場成分  $a_{11}$  はベータatron振動の源であり、収束力誤差の存在はベータatron振動数を変えてしまう。これを、チューンシフトと呼んでいる。収束力誤差を  $\Delta k(s)$  とおき、

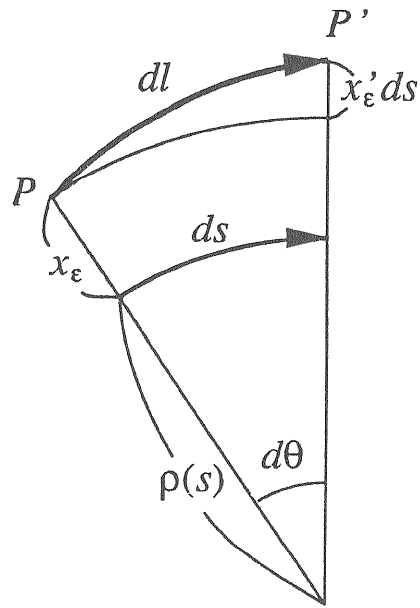


図8、歪んだ平衡軌道の線要素

#### 4.2. 収束力誤差 (GRADIENT ERROR) とベータatron振動数のずれ (TUNE SHIFT)

$\Delta k(s) > 0$  であるとき水平方向に収束力であると定める。すると四極マグネット内での運動方程式は

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\left(\frac{e}{p_0}a_{11} + \Delta k(s)\right)x \quad (4.22)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \left(\frac{e}{p_0}a_{11} + \Delta k(s)\right)z \quad (4.23)$$

となる。収束力誤差による変動は  $\Delta k(s)$  と  $x$  または  $z$  との積による二次の効果であり、分散関数のところで出てきたような軌道そのものを歪めてしまうような効果は無い。

さて、水平方向を例にとり、この二次の効果の現れる様子を見よう。リング一周を  $n$  セルと仮定すると、リング一周のトランスファ・マトリクスを添字 0 をもちいて  $M_0(s)$  と書くことにすれば、 $\mu_0 = n\mu$  とおいて

$$M_0(s) = \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\gamma_0 \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

のように書き表せる。Twiss パラメタや  $\mu_0$  に  $(s)$  をいちいち書くことをしていないが、これらはすべて  $s$  の関数である。 $\Delta k(s)$  の効果は  $\delta$  関数的であるとみなせるならば、 $s$  に無限に薄い四極マグネットを追加したことに等しい。この追加分のトランスファ・マトリクス  $M_{g-err}$  は、Thin-lenz 近似を用いて

$$M_{g-err}(\Delta s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\Delta k(s)}\Delta s & \frac{1}{\sqrt{\Delta k(s)}} \sin \sqrt{\Delta k(s)}\Delta s \\ -\sqrt{\Delta k(s)} \sin \sqrt{\Delta k(s)}\Delta s & \cos \sqrt{\Delta k(s)}\Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k(s) & 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

とかける。ここで  $\Delta s$  が小さいとき、 $\cos a\Delta s \approx 1, \sin a\Delta s \approx a\Delta s$  となることをもちいた。追加されたエレメントは無限に薄いので、一周の長さなどには何の変化もないとみなせる。ならば、一周のトランスファ・マトリクスとして新たに

$$\begin{aligned} M(s) &= M_{g-err}(s)M_0(s) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta k(s) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\gamma_0 \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - \alpha_0 \sin \mu_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mu_0 + \alpha_0 \sin \mu_0 & \beta_0 \sin \mu_0 \\ -\Delta k(s) \cos \mu_0 - (\Delta k(s)\alpha_0 + \gamma_0) \sin \mu_0 & \cos \mu_0 - (\Delta k(s)\beta_0 + \alpha_0) \sin \mu_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.26)$$

としてもよい。1行1列目と2行2列目の成分をつかえば、

$$2 \cos \mu = 2 \cos \mu_0 - \Delta k(s)\beta_0 \sin \mu_0 \quad (4.27)$$

であることがすぐわかり、ここで収束力誤差による位相のずれを  $\Delta\mu$  とおくと  $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$  であるので

$$\cos \mu = \cos \mu_0 \cos \Delta\mu - \sin \mu_0 \sin \Delta\mu = \cos \mu_0 - \frac{\Delta k(s)}{2} \beta_0 \sin \mu_0 \quad (4.28)$$

と書ける。リング一周当たりの位相進み  $\mu_{ring}$  とチューン  $\nu$  とは  $\mu_{ring} = 2\pi\nu$  の関係なので、位相のずれ  $\Delta\mu$  に対してチューンシフト量  $\Delta\nu = \Delta\mu/2\pi$  が

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \Delta k(s)\beta_0(s) \quad (4.29)$$

と予想できる。 $\Delta k(s)$  の符号から余計な収束力があればベータatron振動数は増加し、余計な発散力があればベータatron振動数は減少する。また、チューンシフト量は収束力誤差に比例している。この原理を応用して、逆にリング内に局所的に四極マグネットを設置し、その場所でのベータ関数を測定できる。さらにベータ関数を実測できれば、収束力誤差がリング内にどのように分布しているかを割り出せる。式(4.29)は  $\Delta k(s)$  が極めて狭い範囲で一カ所に局在している場合であるが、リング上に何カ所にもわたって収束力誤差が分布している場合、チューンシフト量は

$$\Delta\nu = \oint \frac{1}{4\pi} \Delta k(s)\beta_0(s) ds \quad (4.30)$$

となる。水平方向を例にとって話を進めたが、鉛直方向にもまったく同様のことが起こる。ただし、 $z$  方向では収束力と発散力の関係が逆であるので、

$$\Delta\nu_x = \oint \frac{1}{4\pi} \Delta k(s) \beta_0(s) ds \quad (4.31)$$

$$\Delta\nu_z = - \oint \frac{1}{4\pi} \Delta k(s) \beta_0(s) ds \quad (4.32)$$

$$(4.33)$$

である。

ここでチューンシフトに関して、もうひとつ重要なことを述べておこう。収束力誤差を引き起こす原因は主に四極マグネットの製作誤差、流れる電流の誤差等であるが、ビーム自身が引き起こすチューンシフトも存在する。シンクロトロン内をまわるビームは同一種類の荷電粒子であり、互いの電荷により絶えず反発しあっている。これはまさに余計な発散力があることに等しく、ビーム強度が上がるにつれてその影響は大きくなる。このようなビーム自身の電荷によるチューンシフトを、特に空間電荷効果によるチューンシフト (Space charge tune shift) とよぶ。英語のスペースチャージチューンシフトという言い方のほうが、より一般的である。スペースチャージチューンシフトの場合、誤差は常に発散力である。したがってベータatron振動数はつねに減少する方向にずれる。

### 4.3 偏向磁場誤差と閉軌道歪み (Closed Orbit Distortion)

収束力誤差である四極の誤差磁場がベータatron振動数のずれを引き起こすのに対して、二極の誤差磁場、すなわち、偏向磁場誤差は運動量誤差とは独立に平衡軌道を設計軌道に対して歪めてしまう。その歪んだ平衡軌道そのものをCODと呼ぶことも多いが、本来は軌道の変位量を指しCODと略称される。CODを引き起こす誤差磁場のものとしては、おもに

1. 二極マグネットの発生磁場の誤差。
2. 二極マグネットの据え付け誤差 (回転)。
3. 四極マグネットの据え付け誤差 (中心軸のずれ)。

などがあげられる。鉛直方向の誤差磁場は水平方向のCODを生じ、水平方向の誤差磁場は鉛直方向のCODを発生する。

では、二極の誤差磁場がある場合の運動方程式をもとめよう。これも基礎方程式(3.12),(3.13)を使えば簡単である。 $x, z$  方向の誤差磁場をそれぞれ  $\Delta B_z(s), \Delta B_x(s)$  とする。これらは少なくとも、リング一周を周期とする周期関数である。さて、具体的には基礎方程式において

- 自由空間では、 $B_z = \Delta B_z(s), B_x = \Delta B_x(s)$  とおく。
- 二極マグネットでは、 $B_z = a_{01} + \Delta B_z(s), B_x = \Delta B_x(s)$  とおく。
- 四極マグネットでは、 $B_z = a_{11}x + \Delta B_z(s), B_x = a_{11}z + \Delta B_x(s)$  とおく。

を計算すればよい。ここでは自由空間についても誤差磁場の存在を仮定しているが、現実問題としてそういうことも有り得る。結果、自由空間での運動方程式

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{e}{p_0} \Delta B_z(s) = -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \quad (4.34)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{e}{p_0} \Delta B_x(s) = G \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} \quad (4.35)$$

二極マグネット中での運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= -(1+Gx) \frac{e}{p_0} (a_{01} + \Delta B_z(s)) + G \\ &= -\frac{e}{p_0} a_{01} - \frac{e}{p_0} a_{01} Gx - \frac{e}{p_0} \Delta B_z(s) - \frac{e}{p_0} \Delta B_z(s) Gx + G \\ \frac{d^2x}{ds^2} + G^2x &= -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} - G^2 \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} x \end{aligned}$$

4.3. 偏向磁場誤差と閉軌道歪み (CLOSED ORBIT DISTORTION)

$$\frac{d^2x}{ds^2} + G^2x \approx -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{ds^2} &= (1 + Gx) \frac{e}{p_0} \Delta B_x(s) \\ &= \frac{e}{p_0} \Delta B_x(s) + \frac{e}{p_0} \Delta B_x(s) Gx \\ &= G \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} + G^2 \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} x \\ &\approx G \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

四極マグネット中での運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= -\frac{e}{p_0} (a_{11}x + \Delta B_z(s)) \\ \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{e}{p_0} a_{11}x &= -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{ds^2} &= \frac{e}{p_0} (a_{11}z + \Delta B_x(s)) \\ \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{e}{p_0} a_{11}z &= G \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

をえた。自由空間と四極マグネット中での運動方程式に  $G$  があることに注意してもらいたい。これは誤差磁場を表す項を  $G(\Delta B/a_{01})$  で統一的に書きあらわそうとしたため、この  $G$  は二極磁場  $a_{01}$  からきているものであり、ゼロとしてはいけない。また、明らかに二極の誤差磁場による変動は一次の効果であり、収束力誤差に比べ軌道に与える影響が大きい。平衡軌道が歪むのはこのためである。

歪んだ平衡軌道はこれらの式を満たす閉軌道解であるので、分散関数と同様に COD  $x_c, z_c$  を算出することができる。ただし、CODの場合誤差磁場が  $s$  の関数であるなど、分散関数のように簡単にはいかない。式(4.34)から(4.39)をみると、 $x, z$  双方とも

$$\frac{d^2x(s)}{ds^2} + K(s)x(s) = F(s) \quad (4.40)$$

という微分方程式でまとめられることがわかる。 $K(s), F(s)$  はどちらも周期関数であるが、誤差磁場の場合、周期は1セルではなくリング1周にわたっているのが常である。したがって、 $K(s), F(s)$  の周期は1セル  $L$  ではなく、リング長  $C$  である。この微分方程式の解は第一章ですでに求めた。 $T$  に対応するものは  $C$  であり、特解(1.83)において  $\psi$  の周期  $\omega$  は一周のベータトロン振動数  $\nu$  により  $\omega = 2\pi\nu$  となる。また、 $h(u)$  には  $w^3(s)G(\Delta B(s)/a_{01})$  が対応する。 $x(s) = w(s)\zeta(s)$  とおくと、特解  $\zeta(\psi)$  は

$$\zeta(\psi) = \frac{1}{2 \sin \pi \nu} \int_{\psi}^{\psi+2\pi\nu} w^3(s) G \frac{\Delta B(s)}{a_{01}} \cos(\pi\nu + \psi - u) du \quad (4.41)$$

となり、ここで変数を  $\psi$  から  $s$  に戻すと  $d\psi = (1/\omega^2)ds$  であるので

$$\zeta(\psi(s)) = \frac{1}{2 \sin \pi \nu} \int_s^{s+C} w(s_0) G \frac{\Delta B(s_0)}{a_{01}} \cos(\pi\nu + \psi(s) - \psi(s_0)) ds_0 \quad (4.42)$$

とあらわせる。これより、CODをあたえる式は  $x, z$  それぞれ

$$x_c(s) = -\frac{\sqrt{\beta_x(s)}}{2 \sin \pi \nu_x} \int_s^{s+C} \sqrt{\beta_x(s_0)} G \frac{\Delta B(s_0)}{a_{01}} \cos(\pi\nu_x + \psi_x(s) - \psi_x(s_0)) ds_0 \quad (4.43)$$

$$z_c(s) = \frac{\sqrt{\beta_z(s)}}{2 \sin \pi \nu_z} \int_s^{s+C} \sqrt{\beta_z(s_0)} G \frac{\Delta B(s_0)}{a_{01}} \cos(\pi\nu_z + \psi_z(s) - \psi_z(s_0)) ds_0 \quad (4.44)$$

となる。 $w(s)$  はそれぞれのベータ関数  $\beta_x(s), \beta_z(s)$  で置き換えた。以前、トランスファ・マトリクス of 安定条件のところ周回軌道の安定にとって閉軌道解は危険であると述べた。(4.43),(4.44)をみれば明らかのように、CODは整数のベータトロンチューンにより発散する。誤差磁場のあるとき、閉軌道解は安定解とはなりえないのである。

このような、ベータトロンチューンが整数値を持つとき発散するといった現象は、実はCODをあたえる微分方程式が強制振動型をしていることによる。強制振動型微分方程式が発散解をもつとき、それを共鳴とよぶ。ベータトロンチューンが整数値となり、軌道が発散するような共鳴は整数共鳴とよばれ、共鳴の中で最も強いものであるが、共鳴の条件はなにもベータトロンチューンが整数値をもつことだけでは限らない。たとえば、CODでは式(4.43),(4.44)から分かるように、ベータトロンチューンが半整数であっても共鳴を引き起こす。

## 4.4 誤差の合成

ここまで運動量、収束力、偏向磁場のそれぞれの誤差についてひとつひとつその効果を見てきたが、これらはそのどれをとっても単独で存在する様な性格のものではなく、実際にはすべて同時に考えられるべきものである。つまり、現実のシンクロトロンには収束力、偏向磁場の両方の誤差があり、中を周回している粒子にもかならずその運動量に誤差がある。では、これらすべてがあるときの運動方程式はどうなっているだろうか。基礎方程式(3.12),(3.13)において

- すべての領域で  $p = p_0 + \Delta p$  とおく。
- 自由空間では、 $B_z = \Delta B_z(s), B_x = \Delta B_x(s)$  とおく。
- 二極マグネットでは、 $B_z = a_{01} + \Delta B_z(s), B_x = \Delta B_x(s)$  とおく。
- 四極マグネットでは、 $B_z = (a_{11} + \Delta k(s))x + \Delta B_z(s), B_x = (a_{11} - \Delta k(s))z + \Delta B_x(s)$  とおく。

を実行する。すると

自由空間での運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= -\frac{e}{p_0 + \Delta p} \Delta B_z(s) \approx -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) \\ &= -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} + G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \frac{\Delta p}{p_0} \approx -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{e}{p_0 + \Delta p} \Delta B_x(s) \approx G \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} \quad (4.46)$$

二極磁場中での運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= -(1 + Gx) \frac{e}{p_0 + \Delta p} (a_{01} + \Delta B_z(s)) + G \\ &\approx -(1 + Gx) \frac{e}{p_0} (a_{01} + \Delta B_z(s)) \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) + G \\ &\approx -(1 + Gx) \frac{e}{p_0} \left(a_{01} + \Delta B_z(s) - a_{01} \frac{\Delta p}{p_0}\right) + G \\ &= -\frac{e}{p} a_{01} - \frac{e}{p_0} a_{01} Gx - \frac{e}{p} \Delta B_z(s) - \frac{e}{p} \Delta B_z(s) Gx + \frac{e}{p} a_{01} \frac{\Delta p}{p_0} + G \\ \frac{d^2 x}{ds^2} + G^2 x &\approx G \frac{\Delta p}{p_0} - G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{ds^2} &= (1 + Gx) \frac{e}{p_0 + \Delta p} \Delta B_x(s) \approx (1 + Gx) \frac{e}{p_0} \Delta B_x(s) \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) \\ &\approx (1 + Gx) \frac{e}{p_0} \Delta B_x(s) \approx G \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

四極磁場中での運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} &= -\frac{e}{p_0 + \Delta p} \{(a_{11} + \Delta k(s))x + \Delta B_z(s)\} \\ &\approx -\frac{e}{p_0} (a_{11} + \Delta k(s))x - \frac{e}{p_0} \Delta B_z(s) \end{aligned}$$



#### 4.5. 色収差とクロマチシティ (CHROMATICITY)

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{e}{p}(a_{11} + \Delta k(s))x = -G \frac{\Delta B_z(s)}{a_{01}} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{ds^2} &= \frac{e}{p_0 + \Delta p} \{(a_{11} - \Delta k(s))z + \Delta B_x(s)\} \\ \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{e}{p}(a_{11} - \Delta k(s))z &\approx G \frac{\Delta B_x(s)}{a_{01}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

となる。これらを見ると、一次近似の範囲ではそれぞれの誤差からの寄与をあらわす項がすべて単純な足し算になっており、同次形の一般解であるベータatron振動  $x_\beta$ 、運動量誤差のみによる変位  $x_\epsilon(s)$ 、収束力誤差のみによる変位  $x(s) = 0$ 、偏向磁場誤差のみによる変位  $x_{COD}(s)$  の和が、すべての誤差がある時の解になることが分かる。つまり、一次近似の範囲ではそれぞれの寄与を独立に計算し最後に足し合わせればよいので、複合誤差がある場合でも1節から3節までの計算法がそのまま使用できる。

#### 4.5 色収差とクロマチシティ (Chromaticity)

運動量誤差による四極磁場の見かけ上の変動は二次の効果であるが、これは分散関数の節にでてきた式(4.6),(4.7)を見れば明らかのように、四極磁場に  $-\left(\frac{e}{p_0} a_{11} \frac{\Delta p}{p_0}\right)$  の収束力誤差があることに等しい。したがって、運動量誤差はチューンシフトを引き起こす。チューンシフト量は収束力誤差に比例し、式(4.31)より

$$\Delta \nu_x = -\frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \frac{\Delta p}{p_0} \oint a_{11}(s) \beta_x(s) ds \quad (4.51)$$

$$\Delta \nu_z = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \frac{\Delta p}{p_0} \oint a_{11}(s) \beta_z(s) ds \quad (4.52)$$

と計算される。 $\beta_x(s), \beta_z(s)$  は  $x, z$  それぞれでのベータ関数である。これを

$$\Delta \nu_x = \xi_x \frac{\Delta p}{p_0} \quad \Delta \nu_z = \xi_z \frac{\Delta p}{p_0} \quad (4.53)$$

と書き、この比例係数  $\xi_x, \xi_z$  をクロマチシティと呼ぶ。ビームを形成している粒子群の運動量が、ある誤差  $\Delta p$  の範囲に分布した拡がりをもっているとき、チューンも拡がり  $\Delta \nu$  をもっているという。こういう意味で使われる場合、 $\Delta \nu$  はチューンシフトではなくチューンの拡がり (Tune spread) とよばれる。

クロマチシティの値は運動量誤差に関係なく、リングの構造により決まる。そのため、特に

$$\xi_x^{natural} = -\frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \oint a_{11}(s) \beta_x(s) ds \quad (4.54)$$

$$\xi_z^{natural} = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \oint a_{11}(s) \beta_z(s) ds \quad (4.55)$$

なるものをナチュラルクロマチシティとよぶ。クロマチシティが大きいと、少しの運動量の拡がりでも大きなチューンスプレッドを起こすため、ビーム全体を安定なベータatronチューンの値に保てなくなり具合が悪い。では何かクロマチシティを小さくする方法はないだろうか。結論からいってしまえば、ある。実は六極マグネットを使うことにより、クロマチシティを小さくすることは可能である。しかしながら、六極マグネットは両刃の剣であり、良いことばかりは起こさない。では、六極マグネットがどういった作用をするのか調べてみよう。

磁場の多極展開式と基礎方程式を、ふたたび振り返ろう。六極磁場成分を担当するのは三次の項  $a_{03}, a_{30}, a_{12}, a_{21}$  の四つである。もちろん、これらは定数を仮定している。ただしここで、 $a_{30}, a_{12}$  の二つはスキュー六極成分であり、通常の六極マグネットが発生できるのは  $a_{03}, a_{21}$  の二つだけである。したがって、

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{a_{03}}{2} z^2 + \frac{a_{21}}{2} x^2 \\ B_x &= a_{21} z x \\ B_s &= 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

を基礎方程式に代入すれば、六極磁場中での運動方程式がもとまる。当然、 $G(s) = 0$  であることはいうまでもない。また、漸化式(2.9)の真ん中の式を使えば  $a_{03}$  を消去できる。ゆえに

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{e}{p_0} \left( \frac{a_{03}}{2} z^2 + \frac{a_{21}}{2} x^2 \right) = -\frac{1}{2} \frac{e}{p_0} a_{21} (x^2 - z^2) \quad (4.57)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{e}{p_0} a_{21} z x \quad (4.58)$$

である。磁場の多極展開式と基礎方程式さえあれば、このように様々な磁場中での運動方程式を求めることは簡単である。

さて、ビームの中にある運動量誤差  $\Delta p/p_0$  をもった粒子がいたとしよう。この粒子は当然、(4.53)にあるようなチューンシフトをおこし、またこの粒子の平衡軌道はその運動量誤差による分散関数により歪んでいる。ここで  $x = x_\epsilon + x_\beta$  とおき、六極磁場中で式(4.8)にあるような計算を行なうと

$$\begin{aligned}
 (\text{自由空間}) \quad & \frac{d^2 \eta_x}{ds^2} = 0 \\
 (\text{二極磁場}) \quad & \frac{d^2 \eta_x}{ds^2} + G^2 \eta_x = G \\
 (\text{四極磁場}) \quad & \frac{d^2 \eta_x}{ds^2} + \frac{e}{p_0} a_{11} \eta_x = 0 \\
 (\text{六極磁場}) \quad & \frac{d^2 \eta_x}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{e}{p_0} a_{21} \eta_x^2 \frac{\Delta p}{p_0} = 0
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

となる。自由空間から四極磁場中までの方程式は(4.8)とまったく同じである。平衡軌道の歪みは  $x$  軸方向のみなので、 $z$  軸方向はここでは問題にしないが、つねに  $z = 0$  であると思っておいていただきたい。六極磁場中での運動方程式に  $x = x_\epsilon + x_\beta$  を代入すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2(x_\epsilon + x_\beta)}{ds^2} &= -\frac{1}{2} \frac{e}{p_0} a_{21} \{(x_\epsilon + x_\beta)^2 - z^2\} \\
 \frac{d^2 x_\epsilon}{ds^2} + \frac{d^2 x_\beta}{ds^2} &= -\frac{1}{2} \frac{e}{p_0} a_{21} (x_\epsilon^2 + 2x_\epsilon x_\beta + x_\beta^2 - z^2)
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

ここで  $x_\epsilon$  は閉軌道解をあたえるので六極磁場中での運動方程式(4.57)から

$$\frac{d^2 x_\epsilon}{ds^2} = -\frac{1}{2} \frac{e}{p_0} a_{21} (x_\epsilon^2 - z^2) = 0 \tag{4.61}$$

であり、 $x_\epsilon$  のみに関係する部分を消去できる。したがって、これまでの常套手段である一次近似の手法をもちいで

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x_\beta}{ds^2} &= -\frac{e}{p_0} a_{21} x_\epsilon x_\beta + x_\beta^2 \\
 &\approx -\frac{e}{p_0} a_{21} x_\epsilon x_\beta \\
 &= -\frac{e}{p_0} a_{21} \eta_x(s) \frac{\Delta p}{p_0} x_\beta
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

なる式を得る。この式は  $x_\beta$  に対する単振動型であり、運動量誤差  $\Delta p/p_0$  に比例する収束力  $\frac{e}{p_0} a_{21} \eta_x(s) \frac{\Delta p}{p_0}$  をもっている。この収束力によるチューンシフトは

$$\Delta \nu_x = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \frac{\Delta p}{p_0} \oint a_{21} \eta_x(s) \beta_x(s) ds \tag{4.63}$$

であり、運動量誤差と合わせたトータルのチューンシフトは

$$\Delta \nu_x = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \frac{\Delta p}{p_0} \oint (a_{21} \eta_x(s) - a_{11}(s)) \beta_x(s) ds \tag{4.64}$$

となるので、六極磁場  $a_{21}$  を上手くあたえてやれば、チューンシフトをゼロにする、すなわち運動量誤差による収束力誤差を打ち消してやることができる。

$z$  についても同様に

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 z}{ds^2} &= \frac{e}{p_0} a_{21} (x_\epsilon + x_\beta) z \\
 &\approx \frac{e}{p_0} a_{21} x_\epsilon z \\
 &= \frac{e}{p_0} a_{21} \eta_x(s) \frac{\Delta p}{p_0} z
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

ともとり、やはり六極磁場  $a_{21}$  によりチューンシフト

$$\Delta \nu_z = -\frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \frac{\Delta p}{p_0} \oint (a_{21} \eta_x(s) - a_{11}(s)) \beta_z(s) ds \tag{4.66}$$

#### 4.5. 色収差とクロマチシティ (CHROMATICITY)

をゼロにすることができる。このように運動量誤差に起因するチューンシフト量を制御することを、クロマチシティ補正という。このとき、クロマチシティは

$$\xi_x = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \oint (a_{21}\eta_x(s) - a_{11}(s))\beta_x(s)ds \quad (4.67)$$

$$\xi_z = -\frac{1}{4\pi} \frac{e}{p_0} \oint (a_{21}\eta_x(s) - a_{11}(s))\beta_z(s)ds \quad (4.68)$$

とあらわされる。 $\eta_x(s)$  だけで  $\xi_x, \xi_z$  の両方を補正できることに注意していただきたい。

こうして数式を追っていくと、何やら非常に複雑なことをしているようにも見えるが、じつはそれほど大したことではない。たとえば、四極マグネットを考えてみよう。四極マグネットでは、その中心軸上を運動するとき荷電粒子は磁場を感じないが、中心から水平方向にある距離  $\Delta x$  ずれると、その変位に比例した鉛直方向の二極磁場を受けた。これと同様のことが、六極マグネットでもおこるのである。荷電粒子が中心軸上を運動するときは、やはり四極マグネット同様磁場を感じないが、中心から水平方向にある距離  $\Delta x$  ずれると、荷電粒子はこんどはその変位に比例した四極磁場を受けるのである。つまり、運動量誤差に比例して分散関数により軌道が水平方向にずれると、六極マグネットはその変位に比例した四極磁場を発生する。そのため、運動量誤差に比例する収束力誤差を打ち消してしまうのである。

こうして六極マグネットによりクロマチシティ補正をすることができたわけであるが、六極マグネットには大きな副作用がある。まず、六極磁場中での運動方程式 (4.57) をみれば分かるように、六極磁場があるとベータatron振動は非線形振動となる。非線形振動には振動の振幅が臨界値を越えると急激に振動が不安定になるなど、線形振動に比べて面倒な現象がいろいろとおこってくる。また、非線形微分方程式がでてくるとなると、もはや計算機による数値計算でなければ軌道を算出できない。そのほかにも、 $x, z$  の運動が独立でない、式 (4.59) にあるように  $\eta(s)$  が非線形で  $\Delta p/p_0$  依存性をもつなどの問題もおこってくる。一般的に、これらは有害であることが多い。

#### 参考文献

- 木原元央、亀井 亨 丸善 「加速器科学」
- 森口繁一、宇田川ケイ久、一松 信 「数学公式 I」
- 矢野健太郎、石原 繁 裳華房 「微分積分学」
- 吉沢太郎 朝倉書店 「微分方程式入門」
- 斎藤利弥 岩波書店 「常微分方程式 I」
- R. V. Churchill, J. W. Brown, R. F. Verhey, McGraw-Hill Book Company Japan  
"Complex Variables & Applications"
- 齋藤正彦 東京大学出版会 基礎数学 1 「線型代数入門」
- 神谷幸秀 OHO'84 「加速器の原理」