

第1章 はじめに

今年のOHOのテーマは大型ハドロン計画における加速器ということであるが、ここではそのなかの大強度陽子シンクロトロンについて、オプティクスとビームダイナミクスの観点から述べる。シンクロトロン一般の包括的な説明は別の講義でなされるはずであるので、以下では特に“大強度”と言う点に重点を置いてそれに関わるトピックスをいくつか取り上げる。現時点での大型ハドロン計画における陽子シンクロトロンのパラメーターについても、簡単に紹介する。

大型ハドロン計画のシンクロトロンの特徴としては、平均ビーム強度のみならず、パルスあたりの粒子数が現存する陽子シンクロトロンに比べて1桁以上多いことがあげられる。もちろん、TRIUMFで計画されたKAONプロジェクトのように、早い繰り返しのシンクロトロンを組み合わせる平均ビーム電流を上げる方法もある。しかしながら、そのためにはビームを中間エネルギーや最終エネルギーで蓄積するためのリングが必要となり、コストの上からも、計画全体のスケールが大きなものになりすぎる。

ここでは、大電流を達成するための2つの要因、すなわち 1)パルスあたりの粒子数を増やす、2)繰り返しの速くする、のうち前者をとる。平均電流でそれぞれ200 μ A (ブースター)と10 μ A (主リング)を達成するために、バンチあたりの粒子数が 1×10^{13} 以上、バンチの数がブースターで4、主リングで16または17必要となり、合計で 1×10^{14} 以上を蓄積、加速する。このためにいくつかの新しい試みが必要となる。

一方で、加速エネルギーに関して言えば、取り出し時でのエネルギーがブースターで3GeV、主リングで50GeVというようにエネルギーフロンティアをめざす加速器に比べそれほど高くはない。

大強度陽子シンクロトロンを設計するための処方箋といったものを確立しようとした例は過去にもある[1]。しかしそれに従えば、目標とした性能

が得られるといったものでももちろんない。筆者の個人的な感想を述べれば、陽子シンクロトロンにおける問題点、研究課題といったものはかなり前からいろいろ項目としてはあげられているにもかかわらず、基本的な理解や解決策の確立が進んではいない。特に低エネルギーシンクロトロンでビーム強度をあげる際に起こる問題に対処するには、ビームチャンバーの大きさを大きくするなど単純な方法しか考えられなかった。もちろん、今までに建設し、運転を行ってきた経験をもとに必要な処置を考えるとといった小さな作業の積み重ねはいたる所にあった。

そうした現状を説明するであろう、大強度の陽子加速器に共通する問題点は、残留放射線である。ビームロスの低減は第1に考えるべきものであり、加速器の運転は残留放射線のレベルをある値以下に保つ範囲内で行われる。ある意味で、こうした制限が加速器を使ったビームスタディーに限界を与え、もっと基本的な実験的理解を困難にしてきたと言えなくもない。

いずれにせよ、現在運転中の高エネルギー研12GeV陽子シンクロトロンが教えるところによれば、ビーム強度をあげるうえで制限を与える場所は2つある。1つは、入射エネルギー付近でビーム自身がつくるクーロン力が無視できない効果、つまりスペースチャージ効果[space charge effects]である。スペースチャージ効果によって、横方向[2]のビームエミッタンスが増大し、ビームチャンバーの大きさよりもベータートロン振動の振幅が大きくなった粒子は壁にぶつかりビームロスとなる、と考えられている。特に、KEKの主リングの様に、ブースターから何パルスも入射する方法では、入射磁場一定で数100ms間、ビームを保持する必要があり、この間幾ら弱くてもスペースチャージ効果が、ビームロスにつながる原因となりうる。

もう一つは、いわゆるトランジションエネルギー[transition energy]を越える際の様々な問題である。加速バケツの非線形性や、ビーム不安定性による縦方向のエミッタンス増加によってビームロスが引き起こされる。横方向の場合と比べ、一般

[1] K. H. Reich, K. Schindl, H. Schoenauer, "An approach to the design of space-charge limited high intensity synchrotrons", Proceedings of the international conference of high energy particle accelerators, 1983, pp. 438-443.

[2] 以下では、水平方向と垂直方向をともに、横方向[transverse direction]といい、ビームの進行方向を縦方向[longitudinal direction]と呼ぶ。

的に言えばビームのエミッタンス増加それ自身はあまり気にならない。ビームロスにつながらない限り、むしろエミッタンスの増加をいかにコントロールした上で実現するかは、ビーム不安定性を抑える上でよく取り上げられる課題である。問題なのは、コントロールしきれない部分でビームの端が起こすビームロスである。

これ以外にも、取り出し時でのビームロスなど問題になる場所は他にもあるが、以下では上にあげた2つの項目について述べる。まずはじめにスペースチャージ効果について、次にトランジションエネルギーに対処するラティス設計について論ずる。

第2章 スペースチャージ効果

大強度加速器では、粒子間のクーロン力が無視できなくなる。こうした力は発散力として働くために、極端な場合、外部の収束電磁石の収束力に打ち勝つようになり、もはやビームは一つの集団としてまとまっていられなくなる。

加速器におけるスペースチャージ効果と言っても、ビームトランスポートラインや陽子リニアックのようなビームが一度しか通過しない加速器と、陽子シンクロトロンのような何回も同じ軌道を通る加速器ではだいぶその様相が異なる。陽子リニアックのようなビームが一度しか通過しない加速器の場合には、粒子の共鳴現象といったメカニズムがほとんど問題にならないので、そこでいうスペースチャージ効果とは、外部の収束力と同程度の力がスペースチャージ力によってつくられた場合を指す。

ある意味で、この場合は理解しやすい。そもそも外部の収束力を感じなくなれば、ビーム中の粒子は初期値によって勝手な方向に動きだしビームサイズは大きくなり最終的にはビームチャンバーの壁にぶつかる。はじめから、スペースチャージ効果による発散力が分かっているならば、それを補正するように外部の収束力を強めておけばよい。

それに比べ、陽子シンクロトロンでは、外部の収束力よりもずっと弱いスペースチャージによる発散力で、加速器内に蓄積できる粒子数が決まってしまう。これは、粒子の共鳴現象によると言えば簡単だが、内容はそれほど単純ではない。

§2.1 スペースチャージ力とチューンシフト

まずはじめに、横方向のスペースチャージ力を計算する。縦方向には一様分布していると仮定する。つまり、縦方向には、対称性から電場は生じない。横方向の粒子密度分布を $\rho(r)$ とすと、マックスウェルの方程式から

$$\Delta \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE_r) = \frac{q}{\epsilon_0} \rho(r)$$

$$(\nabla \times \vec{B})_s = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_\theta) = \mu_0 q v \rho(r)$$

ここで、 q は単位電荷、 ϵ_0 は誘電率、 μ_0 は透磁率、 v はビームの速度、また、図1に示すように円柱座標系をとった。これらの式は積分されて

$$E_r = \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^r r_1 \rho(r_1) dr_1$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 q v}{r} \int_0^r r_1 \rho(r_1) dr_1$$

粒子は、これらの電磁場からローレンツ力を受ける。

$$F(r) = q(E_r - \beta c B_\theta)$$

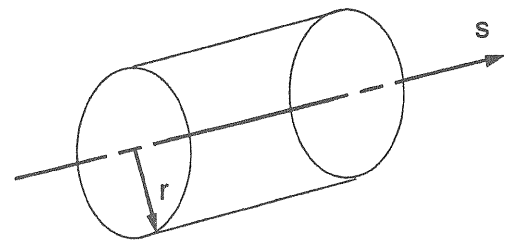


図1： 縦方向には無限に長い円柱を考え、粒子密度は半径のみの関数とする。

β や γ はローレンツファクターである。粒子の横方向の分布が一様の時、すなわち、

$$\rho(r) = \frac{n_e}{\pi a^2}$$

(ここで、 n_e は、単位長さあたりの粒子の線密度、

a は、ビームサイズ) ローレンツ力は半径に比例するようになり、

$$F_r = \frac{q^2 n_e}{2\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{r}{a^2} = \frac{q^2 n_e}{2\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{r}{a^2}$$

この式からわかることの1つは、粒子のエネルギーが上がり、ローレンツファクター β が1に近づくとスペースチャージ力はほとんどゼロになる。ただし、力の符号まで変わることは無いので発散力が収束力にはならない。入射エネルギー付近でスペースチャージ効果は最も顕著に現れる。

スペースチャージ力によって、粒子の運動がどう変わるかを次に見る。ベータートロン振動の運動方程式は、右辺に上で求めた力が加わり、

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + v_y^2 y = \frac{R^2}{\beta^2 \gamma m_0 c^2} F(r)$$

ここで、

$$\theta = \frac{s}{R}$$

を用いて、縦方向の変数を定義し直した。 R は平均半径、 m_0 は陽子の静止質量、 c は光速、 v_y は垂直方向のチューンである。ビームは円柱であり、水平と垂直方向は対称としたので、垂直平面のみの運動を考えた。

力は線形なので、 y でくり出すことができ

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + \left(v_y^2 - \frac{2n_e r_p R^2}{a^2 \beta^2 \gamma^3} \right) y = 0$$

ここで、

$$r_p = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}$$

とおいた。いわゆる陽子の古典半径である。さらに、近似的に

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + (v_y + \Delta v_{sc})^2 y = 0$$

ここで

$$\Delta v_{sc} = -\frac{n_e r_p R^2}{v_y a^2 \beta^2 \gamma^3}$$

$$= -\frac{n_e r_p}{2\pi\epsilon_0 \beta^2 \gamma^3}$$

ただし、 $a^2 = \beta_y \epsilon_y$ 、 $\beta_y = R/v_y$ 。また $n_e = 2\pi R n_l$ として全電流を定義した。

以上をまとめると、一様分布のビームは線形のスペースチャージ力を生み出し、それがチューンシフトをおこす。なお、ここまでは、縦方向は一様分布であるとしてきたが、ビームがバンチしている場合には、スペースチャージ力の最大値は平均の線密度の代わりにピークの線密度がきめると便宜的に考えて、バンチングファクターを次のように定義する。

$$B_f = \frac{I_{average}}{I_{peak}}$$

これはゼロと1の間の値をとる。これを用いると、チューンシフトは

$$\Delta v_{sc} = -\frac{n_e r_p}{2\pi\epsilon_0 \beta^2 \gamma^3} \frac{1}{B_f}$$

となる。

この値を、ラスレットチューンシフト[Laslett tune shift]と呼ぶことがある[3]。ただしこれは厳密な意味では正しくない。本来、ラスレットの仕事は、上に求めた自由空間でのスペースチャージ効果によるチューンシフトではなく、ビームチャンバーや電磁石のイメージカレントやイメージチャージを考慮した境界条件のある場合のチューンシフトを公式化した点にある。上で求めた式に、フォームファクターとしてそうした効果を取り入れる。極端な場合、ラスレットチューンシフトとして、自由空間からの寄与以外を指すこともあるので注意が必要である。

§ 2.2 KV分布

では次に、実空間で一様分布を与える粒子分布が現実により得るのか。そうだとしたら、位相空

[3] L. J. Laslett, "On Intensity Limitations Imposed by Transverse Space-charge Effects in Circular Particle Accelerators", Proceedings of 1963 Summer Study on Storage Rings, BNL-7534, pp.324-367, 1963.

間ではどんな関数になるかを求める。水平、垂直の実空間で2次元の一様分布に対応する4次元位相空間の位相変数を (x, x', y, y') と置く。分布の対称性を考慮して、4次元の球面の関数として位相分布関数 f を表すと、

$$\int_{x^2+x'^2+y^2+y'^2 \leq 1} f(x^2+x'^2+y^2+y'^2) dx' dy' = const.$$

x と y を固定して、次のような新しい変数を用いると

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta \\ y' &= r \sin \theta \end{aligned}$$

前式は、

$$\int_{x^2+y^2+r^2 \leq 1} f(x^2+y^2+r^2) r dr d\theta = const.$$

さらに変数を変換して、

$$\begin{aligned} q &= r^2 \\ dq &= 2r dr \end{aligned}$$

と置くと、

$$\int_0^{1-x^2-y^2} f(x^2+y^2+q) dq = const.$$

となり、解は、

$$\begin{aligned} f(x^2+y^2+q) &= const \cdot \delta(x^2+y^2+q-1) \\ &= const \cdot \delta(x^2+y^2+x'^2+y'^2-1) \end{aligned}$$

という、位相空間内の δ 関数となる。これを、最初に提唱したKapchinskijとVladimirskij[4]の名前をとってKV分布と呼ぶ。スペースチャージ力を計算する上では最も簡単な一様分布ではあるが、位相空間では特異な関数である δ 関数となる。つまり、現実的には別の分布について見てみる必要がある。

[4] I. M. Kapchinskij and V. V. Vladimirskij, "Limitations of Proton Beam Current in a Strong Focusing Linear Accelerator Associated with the Beam Space Charge", Proceedings of the Second International Conference on High Energy Accelerators, pp. 274-288, 1959.

§ 2.3 非一様分布とチューンスプレッド

今度は、ガウス分布の時、スペースチャージ力とそれによって引き起こされるチューンシフトを計算する。ガウス分布では、

$$\rho(r) = \frac{n_e}{2\pi\sigma_r^2} e^{-r^2/2\sigma_r^2}$$

ここで、 σ_r はガウス分布における標準偏差である。このときのローレンツ力は、

$$F_r = \frac{q^2 n_e}{2\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{1 - e^{-r^2/2\sigma_r^2}}{r}$$

つまり、運動方程式は、

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + v_y^2 y = \frac{2n_e r_p R^2}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1 - e^{-y^2/2\sigma_y^2}}{y}$$

右辺を展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-y^2/2\sigma_y^2}}{y} &= \frac{y}{2\sigma_y^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{y^{2n-1}}{\sigma_y^{2n}} \\ &= \frac{y}{2\sigma_y^2} - \frac{y^3}{8\sigma_y^4} + \dots \end{aligned}$$

つまり、チューンシフトをおこす第1項の線形部分に加えて、それ以外の非線形項が加わる。粒子分布の対称性から、最低次の非線形項はオクタポール[octupole]成分となる。この非線形項の効果を見るにはハミルトニアンを用いるのが考えやすい。ガウス分布の場合に、最低次の非線形性を取り入れてチューンシフトを次に導く。ハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} \Delta H_{sp} &= \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \left[-\frac{2}{\sqrt{2}\sigma_x(\sqrt{2}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y)} x^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\sqrt{2}\sigma_y(\sqrt{2}\sigma_y + \sqrt{2}\sigma_x)} y^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{2}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y}{3(\sqrt{2}\sigma_x)^3(\sqrt{2}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y)^2} x^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{2}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y}{3(\sqrt{2}\sigma_y)^3(\sqrt{2}\sigma_x + \sqrt{2}\sigma_y)^2} y^4 \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{2\sigma_x}\sqrt{2\sigma_y}(\sqrt{2\sigma_x}+\sqrt{2\sigma_y})^2}x^2y^2$$

$$+\frac{2\sqrt{2\sigma_y}+\sqrt{2\sigma_x}}{3(\sqrt{2\sigma_y})^3(\sqrt{2\sigma_y}+\sqrt{2\sigma_x})^2}y^4+\dots\Big]$$

アクション J 、アングル ψ に変数変換する。

$$x = \sqrt{2J_x\beta_x} \cos\psi_x$$

$$y = \sqrt{2J_y\beta_y} \cos\psi_y$$

ここで、 $\beta_{x,y}$ はベーター関数。ハミルトニアン H の時、アングルの変化 ψ は、次の様に表されるから、

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial H}{\partial J}$$

スペースチャージ力によるチューンシフトは、

$$\Delta v_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Delta H_{sp}}{\partial J_x} ds$$

$$\Delta v_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{\partial \Delta H_{sp}}{\partial J_y} ds$$

アクションの次数ごとにチューンシフトを計算する。ハミルトニアンでアクションの1次の部分からは、

$$\Delta v_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} -\frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{2\beta_x \cos^2 \psi_x}{\sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)} ds$$

$$= -\frac{r_p n_e \beta_x}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{1}{\sigma_x (\sigma_x + \sigma_y)}$$

ここで、

$$\int_0^{2\pi R} \cos^2 \psi_x ds = \pi R$$

とした。 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ の時、

$$\Delta v_x = -\frac{r_p n_e}{4\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \frac{\beta_x}{\sigma^2} = -\frac{r_p n_e}{4\pi \beta^2 \gamma^3 \epsilon B_f}$$

となる。さらに、ハミルトニアンでアクションの2次の部分から、

$$\Delta v_x = \frac{r_p n_e}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \left[\frac{2\sigma_x + \sigma_y}{4\sigma_x^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x^2 J_x \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sigma_x \sigma_y (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_x \beta_y J_y \right]$$

$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ の時、

$$\Delta v_x = \frac{r_p n_e}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \left[\frac{3\beta_x^2 J_x}{16\sigma^4} + \frac{\beta_x \beta_y J_y}{8\sigma^4} \right]$$

$$= \frac{r_p n_e}{2\pi \beta^2 \gamma^3 B_f} \left[\frac{3J_x}{16\epsilon^2} + \frac{J_y}{8\epsilon^2} \right]$$

つまり、チューンがベーターatron振動の振幅の関数となる。

また、パラボラ分布の時には、

$$\rho(r) = \frac{2n_e}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]$$

このときのローレンツ力は、

$$F_r = \frac{q^2 n_e}{\pi a^2 \epsilon_0 \gamma^2} \left(r - \frac{r^3}{2a^2} \right)$$

これを、ガウス分布の場合と比べる。 $a = 2\sigma_r$ と置いてみると、線形部分はパラボラ分布とガウス分布で共に等しくなり、一様分布の場合の2倍である。最低次の非線形部分であるオクタポール成分はパラボラ分布の場合、ガウス分布の半分になる。明らかなことではあるが、ガウス分布が無数の非線形成分を持つのに対して、パラボラ分布はオクタポール成分以外の非線形性を持たない。

いずれにせよ、ひとたび分布が一様分布とは異なり、スペースチャージ力が非線形成分を持つと、粒子のチューンはベーターatron振動の振幅の関数になる。粒子集団としてのビームは、粒子ごとに個別のチューンを持ち、チューンスペース上で図2に示すようなチューンスプレッドと呼ばれる領域をつくる。

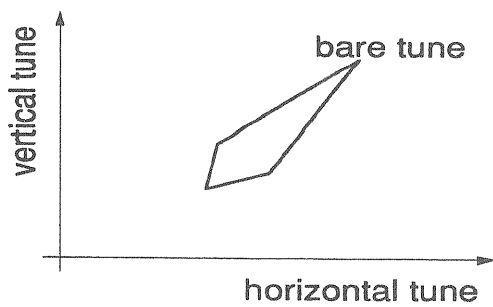


図2: スペースチャージによるチューンシフトの大きさがベータートロン振動の振幅の関数になるとき、各粒子は個別のチューンを持ち、チューンスペース上でチューンスプレッドと呼ばれる領域をつくる。

§ 2.4 ビームロスとエミッタンス増加

さて、いくつかの分布を例にとってスペースチャージ力を計算し、それによるチューンシフト、またはチューンスプレッドがおきることがわかったが、これがビームにどのような影響があるのかをあらためて考えてみる。

陽子シンクロトロンにおいて蓄積できる最大粒子数、すなわちスペースチャージリミットと呼ばれる粒子数は、ラティスによる外部の収束力よりはるかに弱いスペースチャージ力によって決まってしまうと考えられている。そのわけは、次のように説明する。ラティスをつくる電磁石は、設計値どおりに製造された設置されるものではなく、必ず何らかの理想値からのずれが存在する。そうした磁場のエラーは粒子の運動を微妙に変える。シンクロトロンのような円形加速器では、ビームが同じ軌道を何周も繰り返して回るために、ある1カ所に、磁石のエラーが存在するとそれが共鳴現象を起こす。チューンが整数となるときに励起される整数共鳴、整数または、半整数の時に励起される半整数共鳴などは、比較的強い共鳴であり、ひとたび粒子が共鳴条件を満たす、具体的にはチューンが整数または半整数となる、と粒子のベータートロン振動の振幅が大きくなり最終的にはビームチャンバーにぶつかりビームロスとなる。

言うまでもなく、整数共鳴と半整数共鳴は

チューンスペース上で0.5の間隔で存在する。また、強収束シンクロトロンチューンの整数部は1よりも（はるかに）大きい。したがって、外部の収束力よりもずっと弱いスペースチャージ力による小さなチューンシフトにより、粒子は整数共鳴または半整数共鳴にひっかかる可能性がある。

もちろん、粒子が一様分布をして、すべての粒子が同一のチューンシフトを持つとしたら、上に説明した共鳴条件は避けることができる。つまり、スペースチャージの線形力を、補正するようにラティスの4極電磁石を補正すればよい。具体的には、全体として収束力を強める。

スペースチャージ力に非線形性が存在し、チューンスプレッドがあることが、スペースチャージ効果が問題となる原因である。チューンスプレッドがある時には、その巾が共鳴条件の間隔、例えば0.5、よりも小さくしなければ必ずビームの一部の粒子は共鳴にひっかかる。4極電磁石は、チューンスプレッド全体の位置をずらすことはできるが、巾を小さくすることはできない。そして、チューンスプレッドの大きさを見積もる手段として、先に導いた線形力からくるチューンシフトがだいたいの指標となる。

それでは、チューンシフトまたはチューンスプレッドの大きさは、どの程度まで許されるか。または、スペースチャージリミットを次の式で計算する際に、 $(-\Delta v_{sc})$ としていくつを仮定すべきであるか。

$$n_i \leq \frac{2\pi\epsilon_y \beta^2 \gamma^3 B_f (-\Delta v_{sc})}{r_p}$$

整数、半整数共鳴のみならず、3次や4次の共鳴まで考慮し、ビームの一部なりともこうした共鳴にひっかからないようにするには、 $(-\Delta v_{sc})$ は多くとも0.25以下でなければならない。実際、古くから陽子シンクロトロンを設計する際に、スペースチャージリミットとして引用する数値は、だいたいその程度のチューンシフトを仮定してきた。

結論から言えば、チューンシフトとして許される量は根拠ある決まった数値としては規定できない。大まかに、0.1から0.5程度と言うことはできるが、それが2倍変わったとしても何も驚かない。それは、対象としているシンクロトロンアクセプタンスや繰り返し、電磁石の出来不出来などに大きく依存するからである。例えば、早い繰り返し

し(数10Hz)のシンクロトロンでは、エネルギーすなわちローレンツファクターが急速に変化する。チューンシフトがたとえ入射エネルギーで大きくとも数10msのうちにほとんどゼロになることが期待される。はじめにうちに、ビームの一部が3次や4次の共鳴にたとえひっかかったとしても、ビームロスを起こす前に共鳴から抜け出すこともあり得る。そうであれば、チューンシフトは0.25よりもずっと大きくて問題はない。

逆に、エネルギーがほとんど変化しないような、繰り返しの遅いシンクロトロンや、またはエネルギー一定の蓄積リングでは、4次以上の共鳴がビームに影響を与えるかもしれない。そこでは、たとえビームロスを起こさせるほどベータートロン振動の振幅を増大させなくとも、ビーム全体としてのエミッタンス増加を起こし、それが問題となる場合もある。これを避けるには、チューンシフトを0.25よりもはるかに小さくする必要がある。

§2.5 共鳴の源としてのスペースチャージ効果

ここまでは、スペースチャージ効果は粒子のチューンを変化させる源として扱い、これとは別にラティスの磁場エラーによって決まる共鳴に粒子がひっかかったときにビームロスやエミッタンス増加がおきるといった見方をしてきた。ここでは、スペースチャージ力が共鳴の源となりうることを示す。その前に、まずは一般的に共鳴の強さを表す目安となる、共鳴の巾を定義する。ラティスの磁場成分を次のようにハミルトニアンで表す。

$$H_{mg} = \frac{1}{B\rho} \left[\frac{1}{2!} \frac{\partial B_y}{\partial x} (x^2 - y^2) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} (x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{4!} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \dots \right]$$

ここで、 $B\rho$ はリジディティ[rigidity]である。このとき、例えば4次の共鳴 $4\nu_y = n$ の巾は次のように定義される。

$$\Delta e_{mg} = \frac{2J_y}{4\pi} \frac{1}{B\rho} \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4!} \frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \beta_y^2 e^{-i4\psi_y} ds$$

なお、上の値は位相と振幅を持つベクトル量であるので、これの大きさをとる必要がある。

同様に、前出のスペースチャージのハミルトニアンから、スペースチャージ力をつくる共鳴の巾が定義できて、例えば4次の共鳴 $4\nu_y = n$ の巾は次のように表される。

$$\Delta e_{sc} = \frac{2J_y}{4\pi} \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3 B_f} \times \int_0^{2\pi R} \frac{2\sigma_y + \sigma_x}{12\sigma_y^3 (\sigma_x + \sigma_y)^2} \beta_y^2 e^{-i4\psi_y} ds$$

ラティスの磁場の非線形性は、クロマティシティーを補正する6極磁場を除けば、システムティックには存在しない。それに対して、スペースチャージ力がつくる非線形性は、例えば上に示したガウス分布の場合、すべての偶数項(2極、8極、12極、...)がシステムティックにでてくる。特に、最低次の非線形性である8極成分は、大強度シンクロトロンでは無視できない[5]。しかも、ラティスがどんなに理想的につくられていても、システムティック成分である限りこの共鳴条件を消すことはできず、究極的なスペースチャージリミットを与える。

また、ラティスの対称性とは別のハーモニク成分を持つ非線形性が、スペースチャージ力から生まれる可能性もある。つまり、スペースチャージがつくる共鳴の巾を定義する式で、ベーター関数やビームサイズが何らかのエラーで変調を受けている場合、全周で積分するとラティスの対称性とは別のハーモニクが残る。これは、ラティスの磁場を持つ同様のハーモニク成分よりもはるかに大きくなる場合があり、無視できない[6]。この場合、スペースチャージ自身がつくる共鳴に、

[5] S. Machida, "Space-charge effects in low-energy proton synchrotrons", Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A309 (1991), pp.43-59.

[6] S. Machida, "Simulation of space charge induced resonances", to be published in Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A.

スペースチャージ力でチューンシフトを起こした粒子がひっかかるといった現象が起きると考えられている。

§2.6 1粒子共鳴モデルの限界

今までは、スペースチャージ力によるチューンシフトを計算し、ラティスの磁場成分またはスペースチャージ力自身がつくる共鳴に個々の粒子がひっかかり、ビームロスまたはエミッタンス増加が起きるといった見方を通してきた。実はこうした、1粒子ごとに共鳴が起こるといった見方が本当に正しいかどうか疑わしい面もある。今まで見てきたように、一様分布で無い限り、チューンはベータートロン振動の振幅の関数となる。つまり、ある共鳴条件を満たし、振幅が大きくなった粒子はもはや共鳴条件を満たさない。ひとたび条件を満たさなくなれば後はスペースチャージ以外の別の条件がなければ、ビームロスがおきるほど大きな振幅にはならないだろう。これは、いわゆるディチューニング効果[detuning effects]と呼ばれるもので、スペースチャージ効果によるビームダイナミクスを難しくしている(図3を参照)。

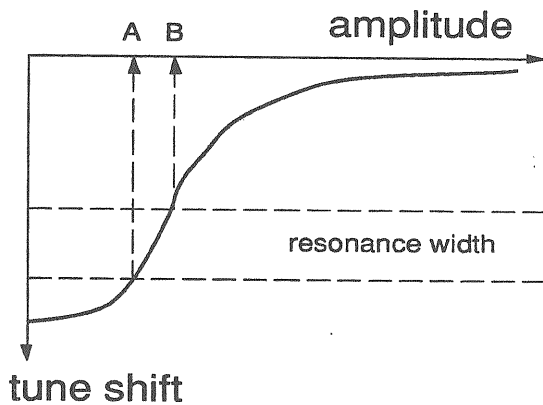


図3: スペースチャージ力によるチューンシフトは、ベータートロン振動の振幅の関数である。振幅がAとBの間にあるときには共鳴条件を満たすが、ひとたび振幅が変わると、もはや共鳴による影響を受けなくなる。

§2.7 エンベロップ方程式

ここまでは、スペースチャージ力によるチューンの低下とそのビームに対する影響を評価してきたが、いうまでもなく、スペースチャージ力によりベータートロン関数自身が変化を受け、ビームサイズが変わる。ひとたびビームサイズが変わればスペースチャージ力もまた計算し直さなければならない。こうした意味で、本来は、チューンシフトを計算する際にビームサイズの変化を取り入れ、いわゆるセルフコンシステントに解く必要があったが、その補正量は小さいとしてきた。

ビームエンベロップ(ビームサイズ)をビーム電流とビームエミッタンスを使って一様分布の場合に定式化したのが、先にKV分布を導いた際に登場したKapchinskijとVladimirskijである[4]。KV分布では、セルフコンシステントに解けることが彼らによって示された。その後、一様分布でなくても、エミッタンスの変化が事前に予測できる場合には、ビームエンベロップのrmsの値はKV分布の時と同じ微分方程式に従うことをSachererが示した[7]。以下にはKVと一般の分布の場合について、エンベロップ方程式を導く。

はじめに粒子分布の2次までのモーメント方程式をつくる。ここでも、縦方向にビームは一様であるとし、水平方向と垂直方向はカップリングが無く、別々に考えることができるとする。粒子の水平方向 x の運動方程式を以下のように書くことから始める。

$$\frac{dx}{ds} = p_x$$

$$\frac{dp_x}{ds} = F_{ex}(x,s) + F_{sp}(x,s)$$

垂直方向 y についても同様である。ここで、 $F_{ex}(x,s)$ はラティスの磁石による収束および発散力であるとし、 $F_{sp}(x,s)$ は、スペースチャージ力を表す。また、いずれの力も粒子の運動量の微小変化にはよらないとした。一般的な粒子分布

[7] F. J. Sacherer, "RMS Envelope Equations with Space Charge", IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol. NS-18, No. 3, pp.1105-1107, 1971.

$f(x, p_x, s)$ に対して、1次のモーメントは次の式を満たす。

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{d}{ds} \int x f(x, p_x, s) dx dp_x = \bar{p}_x$$

$$\frac{d\bar{p}_x}{ds} = \frac{d}{ds} \int p_x f(x, p_x, s) dx dp_x$$

$$= \overline{F_{ex} + F_{sp}} = -k(s)\bar{x}$$

最後の部分では、ニュートンの第3法則から、

$\overline{F_{sp}} = 0$ とし、また外力は線形であると仮定した。

2次のモーメントについても同様に、

$$\frac{d\overline{x^2}}{ds} = 2\bar{x} \frac{d\bar{x}}{ds} = 2\overline{xp_x}$$

$$\frac{d\overline{xp_x}}{ds} = \frac{d\bar{x}}{ds} \bar{p}_x + \bar{x} \frac{d\bar{p}_x}{ds}$$

$$= \overline{p_x^2} - k(s)\overline{x^2} + \overline{xF_{sp}}$$

$$\frac{d\overline{p_x^2}}{ds} = 2\bar{p}_x \frac{d\bar{p}_x}{ds} = -2k(s)\overline{xp_x} + 2\overline{p_x F_{sp}}$$

rms ビームサイズの1次と2次の微分は次のようになる。

$$\frac{d\sqrt{\overline{x^2}}}{ds} = \frac{\overline{xp_x}}{\sqrt{\overline{x^2}}}$$

$$\frac{d^2\sqrt{\overline{x^2}}}{ds^2} = -k(s)\sqrt{\overline{x^2}}$$

$$+ \frac{(\overline{x^2})(\overline{p_x^2}) - (\overline{xp_x})^2}{(\sqrt{\overline{x^2}})^3} + \frac{\overline{xF_{sp}}}{\sqrt{\overline{x^2}}}$$

ここで、 $\overline{p_x^2}$ を評価する代わりに rms エミッタンスを次のように導入する。

$$\epsilon_{rms} = \sqrt{(\overline{x^2})(\overline{p_x^2}) - (\overline{xp_x})^2}$$

これを用いると rms エンベロップ方程式は、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{\overline{xF_{sp}}}{\tilde{x}} = 0$$

ここで、 \tilde{x} は $\sqrt{\overline{x^2}}$ を書き換えたものである。スペースチャージ力は以前導いたように、電場 E_x を使って表すと、

$$F_{sp} = \frac{q}{m_0 c^2 \beta^2 \gamma^3} E_x$$

これを用いてエンベロップ方程式を書き直すと、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{q}{m_0 c^2 \beta^2 \gamma^3} \frac{\overline{xE_x}}{\tilde{x}} = 0$$

最後の項は、線形部分のスペースチャージ力が最小2乗法で決まっていると解釈できる。つまり、電場を線形部分とそのほかに分けて、

$$E_x(x, s) = k_{sp}(s)x + \dots$$

このとき、線形部分の取り方として

$$0 = \frac{d}{d(k_{sp})} \int [k_{sp}(s)x - E_x(x, s)]^2$$

$$\times f(x, p_x, s) dx dp_x$$

とすると、

$$k_{sp}(x, s) = \frac{\overline{xE_x}}{\tilde{x}^2}$$

となる。さて次に、この最後の項は、粒子分布の詳細によらないことを示す。

まず、一様分布 (KV 分布) の時には、スペースチャージ力は線形部分のみで、上の最小2乗法できめたものと何ら変わらない。すなわち、

$$E_x(x, s) = k_{sp}(s)x = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{4\tilde{x}^2}$$

となり、エンベロップ方程式は

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{2\tilde{x}} = 0$$

ただし、ビームの断面積は円と仮定している。

一般の粒子分布の時は複雑になる。ここでは、次のように実空間で楕円の対称性があるものと仮定する。

$$f(x, p_x, y, p_y, s) = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, p_x, p_y, s\right)$$

実空間での分布関数は運動量方向で積分して、

$$\begin{aligned} n\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, s\right) \\ = \frac{1}{ab} \int dp_x dp_y f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, p_x, p_y, s\right) \end{aligned}$$

これから、電場はポアソン方程式の解として、

$$E_x = \frac{qn_e abx}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} dt \frac{n\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t}, s\right)}{(a^2+t)^{3/2} (b^2+t)^{1/2}}$$

同様に垂直方向の電場も決まる。エンベロープ方程式の最後の項は、

$$\begin{aligned} \overline{x E_x} &= \frac{qn_e ab}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \\ &\quad \times \frac{x^2 n\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t}, s\right)}{(a^2+t)^{3/2} (b^2+t)^{1/2}} n\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, s\right) \end{aligned}$$

途中の計算は付録を参照。結局、

$$\overline{x E_x} = \frac{qn_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{a+b} = \frac{qn_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} + \tilde{y}}$$

エンベロープ方程式は、

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{ds^2} + k(s) \tilde{x} - \frac{\epsilon_{x,rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{x} + \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{d^2 \tilde{y}}{ds^2} + k(s) \tilde{y} - \frac{\epsilon_{y,rms}^2}{\tilde{y}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{y} + \tilde{x}} = 0$$

つまり、rms ビームサイズが同じビームは同じエンベロープ方程式に従う。

§ 2.8 対処法

以上、スペースチャージ効果をもたらす現象について述べてきた。それでは大強度シンクロトロ

ンを設計し運転する際に、少しでも効果を下げるにはどんなことができるか、を次に見てみる。大きく分けて、共鳴条件を弱くする方法と、スペースチャージ力を弱くする2つの方法に分けることができる。

2.8.1 共鳴を弱くする方法

2.8.1.1 補正磁石

ビームロスやエミッタンス増加が、ラティス自身が持つ共鳴条件によって起こるとすれば、共鳴の強さを何らかの方法で弱めればよい。ビームロス等が起きる原因となっている共鳴の次数とハーモニクスがあらかじめ知られている場合には、その共鳴の次数と同じ極を持つ補正磁石を励磁する事により、共鳴を打ち消すことができる。

原理的には、ラティスの磁場の非線形性を共鳴の中として定義した際に出てきた、位相と振幅を持つベクトル量を、補正磁石がつくる反対向きのベクトル量によってゼロにする。実際には、複数の補正磁石を置く位置（位相）関係、励磁の大きさなどを調整する。

図4に、ブルックヘブンのAGSで、共鳴補正を施した前と後で、蓄積されるビーム強度が改善された様子を示す。

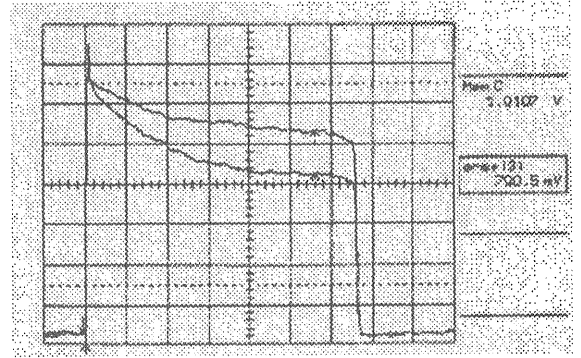


図4: ブルックヘブンのAGSでの共鳴補正。時間 (10ms/div.) に対するビーム強度の変化を表す。共鳴補正を行うと、下のグラフが上のように生き残り率が上がる。

[8] Y. Shoji, private communications

2.8.1.2 ビームエンベロープの補正

スペースチャージ自身が共鳴の源となる場合を説明した際に、ベーター関数やビームエンベロープに変調があると、ラティスの持つ周期性以外のハーモニクスが生まれることを述べた。これはどんな次数の共鳴にも当てはまるが、8極成分が通常、支配的である。もし、これがビームロス等の原因になっている場合には、1つの方法としては、ラティスによりつくられた共鳴を補正するように8極補正磁石を励磁する事も考えられるが、もう1つの方法として、ベーター関数やビームエンベロープ自身からの変調分をなくすことが考えられる。非線形成分のハーモニクスを消すために線形磁石で補正するこうした試みが高エネルギー研究所で行われている[8]。

2.8.2 スペースチャージ力を弱くする方法

2.8.2.1 入射エネルギー

スペースチャージ力を抑えるには、原理的に上で定義されたチューンシフトまたはチューンスプレッドを小さくするように加速器のパラメータを決めればよい。まずはじめに気づくのは、粒子のエネルギーであり、これはローレンツファクターで表されているように、 β の3乗、 γ の2乗と、大きくエネルギーに依存する。具体的には、シンクロトロンに入射器の取り出しエネルギーをなるべく上げたいわけであるが、以下の様な問題点が生ずる。

まず、入射器として、通常使われる陽子リニアックのシステムは、エネルギーを上げるにつれ複雑になるし、コストは当然高くなる。もう少し、システムを具体的に考えてみる。例えば取り出しエネルギーが200MeVあたりまでならば、ドリフトチューブリニアックで実現可能であるが、それ以上のエネルギーを狙う場合には、高エネルギー側で別の加速空洞のタイプを取らない限り、加速の効率、すなわちシャントインピーダンスが落ちる。サイドカップルドリニアックやアニュラーカップルドリニアック等が使われて、また設計されている。高エネルギー側では、加速空洞の周波数も変わり、複数の高周波源が必要になる。

今一つの問題点は、シンクロトロンに入射付近

でのロスによる残留放射線である。早い繰り返しのシンクロトロンでよく行われているような、アディアバティックキャプチャーでは、入射付近での粒子の捕獲効率は、高々90%程度である。一方、シンクロトロンに入射するタイミングで、すでに十分な大きさのrfバケツを作り、入射器のどこかの段階でチョップしたビームを、バケツの中心付近に入れるようにした場合でも、数パーセントのビームロスは避けられない。さらにいずれの場合にも、H⁺イオンの電子をストリッピングホイルではぎ取る際に、H⁰として残る割合は多いときには1%に達しこれらの中性粒子はビームロスとなる。

問題は、そうした入射エネルギーでのビームロスは、入射エネルギーを高くするほど残留放射線を発生する割合を多くすることである。はじめに述べたように、大強度陽子シンクロトロンでは残留放射線をなるべく下げるような運転をするのが第1条件であり、この点のみからいえば低いエネルギーでの入射が望ましい。

2.8.2.2 アパーチャー

入射エネルギーと並んでもう1つあきらかにチューンシフトを抑える要因は、アパーチャーを広げビームのエミッタンスをアパーチャーいっぱい大きくすることである。チューンシフトはエミッタンスに逆比例し、またビームサイズはエミッタンスの平方根で大きくなるので、例えば、ビームチャンバーのサイズを2倍大きくすれば、チューンシフトは4分の1になる。

無論、それだけアパーチャーを大きくするには、電磁石のサイズも大きくせざるを得ないわけで、製作のコストと運転のための電気代など考慮すべき点は数多くある。

しかしながら、繰り返し述べているように、大強度加速器ではパーセント以下のビームロスがすでに大きな問題となるわけであり、そもそもビームチャンバーの大きさとエミッタンスの比をどの程度見込むべきであるかの考え方が、今までと大きく違う可能性がある。つまり、スペースチャージチューンシフトを押さえる目的とは別に、ビームチャンバーに余裕を持つ必要がある。

2.8.2.3 横方向のペインティング

スペースチャージ力を計算した際に、一様分布に比べ、ガウス分布やパラボラ分布の場合には、

ビーム軸の中心付近での粒子密度が大きく、スペースチャージ力の線形成分が大きくなることが示された。これは、すなわち、たとえ粒子数が同じでもチューンシフトは粒子分布の関数であることを示している。では、粒子分布をコントロールする手段を考える。

ブースターシンクロトロンから、さらに次のシンクロトロンへビームを受け渡す際には、通常いわゆるバンチバケツ受け渡し[bunch to bucket transfer]が行われるため、コントロールのしようがない。これに対して、リニアックなどの入射器から初段のシンクロトロンに入射する際には、 H^- から H^+ への荷電交換を行いつつ、数10から数1000ターンにわたってビームを蓄積した後、または蓄積しながら同時に加速を開始する。 H^- の荷電交換入射方式は、位相空間上で同じ場所に、後から来た粒子が、すでに存在する粒子の存在に左右されないで入射されることにある。

しかし、だからといって位相空間上の1点に集中して入射すれば、その粒子密度が他に比べて極端に高くなり、スペースチャージ効果の点から考えれば、不利である。もちろん、衝突型加速器のように、最終的にビームサイズが小さくミノシティーを上げなければならない加速器ではそうしたビームが必要であるが、大強度を目指すような加速器では、むしろ、位相空間上にまんべんなく粒子を入射する。いかにも、使える位相空間を塗りつぶす様に粒子を入れるという意味で、こうしたコントロールをペインティング[painting]と称する。

具体的には、例えば、位相空間上でわざと入射点を中心からずらしておく。ひとたび加速器内を回り始めた粒子は、チューンの端数部に対応して位相空間内を回転し始める。このままでは、ベータートロン振動の振幅が等しいので、入射のタイミングによって回転角度の違う粒子がホロー状[hollow]分布をつくる。入射の時間と共に、中心から入射点までの振幅を変えると、今度は、次々に入射される粒子はスパイラルを描く。十分に時間をかけて入射すれば、位相空間内が一様に粒子で満たされる。時間と共に変える入射点の振幅として、いろいろな関数を仮定することにより原理的にはいかような粒子分布もつくりことができる。ただし、ここでは、入射器から入射されるビーム自身のエミッタンスはシンクロトロンのアクセプタンスに比べて十分に小さいと仮定した。

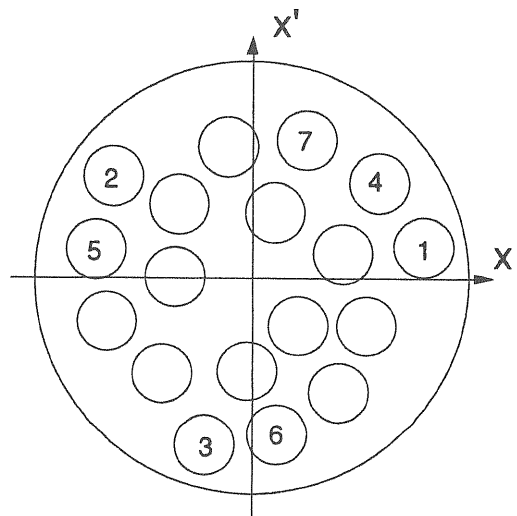


図5： 水平方向のペインティングの例。

例えばチューンの端数部が1/3に近いとき、位相空間の中心からわざとずらした入射ビームは、位相空間上にとびとびに入る。同時に、中心から入射点までの距離を変えると、位相空間上を埋め尽くす。

細かくいえば、ここでは次のようなことに気をつけなければいけない。スペースチャージ力は実空間の粒子分布の関数であり、ペインティングをする際に、水平方向と垂直方向の位相分布のカップリングを考慮する必要がある。具体的には、水平方向の位相空間で、ベータートロン振動の振幅の小さい場所に入射する時には、垂直方向の位相空間で、振幅の大きな場所に入るようにする。こうすることによりどちらの方向でも振幅の大きな粒子、または、どちらの方向でも振幅の小さな粒子というように、分布に偏りができるのを避ける。

2.8.2.4 ピーク電流を下げる方法

 [9]M. Blaskiewicz, et. al., "High Intensity Proton Operation at Brookhaven", Proceedings of the 1995 Particle Accelerator Conference and International Conference on High-Energy Accelerators, pp. 383-385, 1995.

縦方向についても、横方向と同様に位相空間内で粒子がまんべんなく分布するような入射を行うことができる。ここで、縦方向の位相空間内で入射点を変えるには、バケツに対して、入射のタイミングを変える、または、エネルギーを若干ずらせばよい。なお、入射ビームは入射器のどこかの段階でチョップされているものと仮定し、また、シンクロトロンバケツはすでに必要な大きさに形成されているとした。

縦方向でのペインティングの効用は、バンチングファクターを大きくすることといえる。通常よく見られるようなバンチの波形は、中心付近で局所的にビーム電流が大きく、端にいくに従って次第に局所的な電流が下がっていく。ペインティングをすることにより、バケツの中心付近の粒子密度を下げ、ピーク電流を下げる。

横方向の時と異なり、縦方向ではバケツの形自身を変形することによりバンチングファクターを下げる操作も行われる。以下に、そうした試みのいくつかを見てみよう。

2倍(3倍)高調波を加えたバケツ

通常、バケツは1つのrf成分によって形作られるので位相空間では、図6(a)のようになる。このようなバケツに粒子が一樣に分布していたとすると、実空間への射影を取ればわかるように、そもそも中心付近でピーク電流が高くなる。

ここに、2倍または3倍の高調波を混ぜると、加速電圧の形は図6(b)のようになり、中心付近に平坦な部分ができる。バケツを見てもわかるように、井戸型ポテンシャルに近づき、中心付近で粒子は自由に振る舞い、端に行くとたんに急激な収束力を受けるようになる。こうした分布を実空間に射影してみると、ピーク電流は下がり、バンチの長さが長いビームとなる。このようなバケツによる運転は例えばブルックヘブン研究所のAGS Boosterですで行われている[9]。

[10] J. E. Griffin, "Isolated bucket RF systems in the FAF", IEEE NS-30, (1983), p. 3502.

[11] M. Blaskiewicz and J. M. Brennan, "A Barrier Bucket Experiment for Accumulating De-bunched Beam in the AGS", to be published in the proceedings of EPAC 96, 1996.

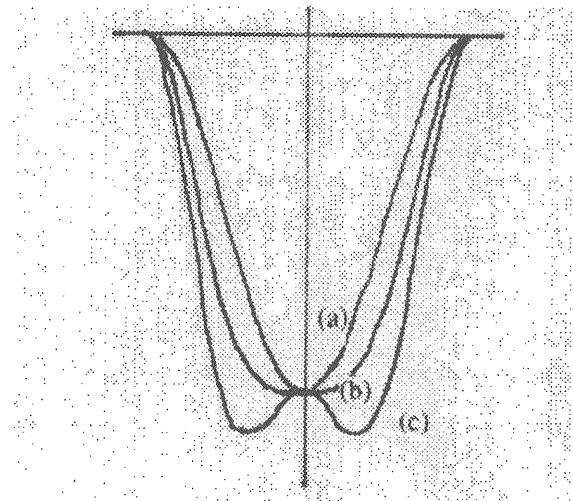


図6： 縦方向のバケツに2倍の高調波を混ぜるとポテンシャルの形がゆがみ、中心付近で平坦な部分ができる。(a)2倍の高調波がゼロの場合。(b)2倍の高調波を、基本周波数の大きさの半分入れた場合。このときバケツに平坦な部分ができる。(c)2倍の高調波を、基本周波数と同じ大きさだけ入れた場合。

バリアーバケツ(barrier bucket)

極端な話、コースティングビームでは、ピーク電流と平均電流の比は1、つまりバンチングファクターが最も大きくなる。もちろん加速するためにはrfバケツが必要で、その中に粒子がバンチされている必要があるが、エネルギーが一定のもとで粒子をリングにためるには原理的にビームがバンチしている必要はない。

しかし、ブースターから主リングへの入射のように、下のリングの幾パルスをとめるにはバケツでバンチを保ち、入射のエネルギーで1秒近くの間、ビームを蓄積しておく必要がある。荷電交換入射ではなく、しかもブースターからはある間隔を置いていくつかのパルスが入射されるので、後から入射されるパルスのために位相空間に隙間が必要であるからである。

さてそれでは、バンチングファクターがほぼ1であるという、コースティングビームの利点と、

後からくるビームのために隙間を残しておくというバンチビームの両方の利点を実現するにはどうすればよいか。バリアーバケツとはまさにこれに対する答えであり、すでにフェルミ研究所[10]やブルックヘブン研究所[11]で実験が行われ、実際に使われている。

バリアーバケツの原理を以下に見てみる。ビーム1周の周期ごとにrfを1波長分だけ励起する様な空洞がシンクロトロンのある1カ所にあるとする。これは、図7に示されるように、シンクロトロン縦方向の位相空間にバリアーをつくる。ここでブースターからビームを入射すると、通常のrfバケツがないコースティングビームとほとんど同様の状況で粒子は全周にわたって広がる。ただし、バリアーがあるので、バリアーの近くまでドリフトしてきた粒子は反対方向に戻される。このままでは、次にブースターから来るビームが入る隙間がない。

次のブースタービームが来るまでに、1波長分だけ隙間をあけるために、2つの空洞を使って、始めには同じタイミングで立てていたバリアーの間隔を徐々に広げる。左にあるバリアーの左から右に粒子が流れ込むことはなく、また右にあるバリアーの右から左に粒子が流れ込むことはないので、2つのバリアーの間には隙間ができ、ここにブースターから来る新しいビームを入射する。

ひとたび入射されたビームは、コースティングビームの様に全周にわたってなるべく一様に分布させたいので、片方のバリアーの高さを徐々に下げていく。はじめから回っていた粒子と後から入射された粒子は、片側のバリアーが消滅した時点で混ざりあう。ただし、もう一方のバリアーは1カ所に存在する。

さらに次のブースターからのビームが来るときには、同じ手順を繰り返す。つまり、2つのバリアーを使って隙間をあけ、新しいビームを入射した後に1つのバリアーを消滅して全体を一様に分布させる。これらの過程では、原理的にバンチングファクターはほぼ1であり、しかも入射を何回でも繰り返すことができる。バリアーバケツを使わない入射に比べバンチングファクターの分だけスペースチャージチューンシフトが小さくできるか、または同じスペースチャージチューンシフトでビーム強度を増やせる。

ビームを蓄積した後はアディアバティックキャプチャー[adiabatic capture]を行う。ここでの、

rfの周波数は、前段のシンクロトロンとは全く別々に決めることができるのも大きな利点である。

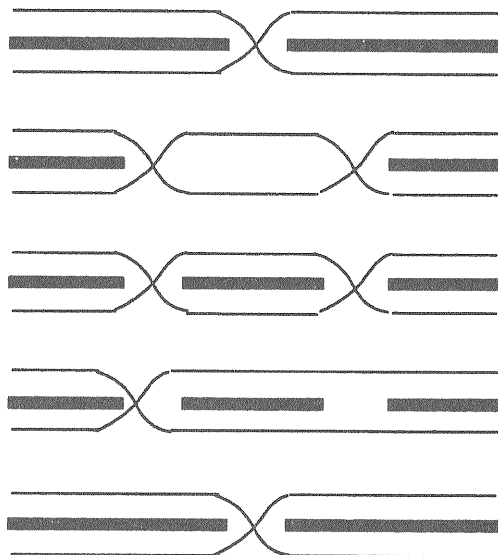


図7： 縦方向の位相空間でのバリアーバケツの原理図。バケツの中のビームを太線で表す。

§ 2.9 縦方向のスペースチャージ効果

ここまでは、横方向のスペースチャージ効果を見てきたが、最後に縦方向のスペースチャージ効果を考える。ビームが縦方向に一様分布の際には、スペースチャージ力は横方向にしか存在しなかったが、ひとたびビームがバンチし縦方向に粒子密度の濃淡ができると縦方向の電場が生じる。

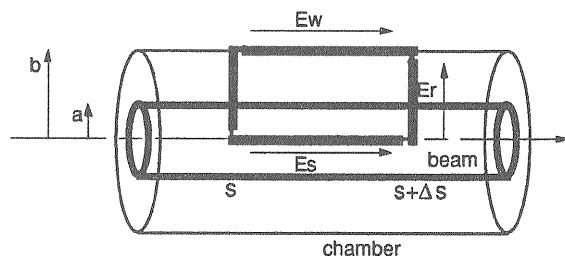


図8： 縦方向のスペースチャージを計算

するために、上の様な積分路をとる。

図8の様な線路を考え、積分形のマックスウェル方程式を使って計算する。

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\sigma$$

ビームの横方向の粒子分布が一様だとすると、径方向の電場は、

$$E_r = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} \quad r \leq a$$

$$E_r = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > a$$

従って、左辺の電場の積分は、

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = (E_s - E_w) \Delta s + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + 2 \log \frac{b}{a}\right) \Delta s \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

ここで、

$$n_e(s + \Delta s) - n_e(s) = \Delta s \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

と置き換えた。

また、周方向の磁場は、

$$B_\theta = \frac{qn_e v \mu_0}{2\pi} \frac{r}{a^2} \quad r \leq a$$

$$B_\theta = \frac{qn_e v \mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} \quad r > a$$

従って、右辺の磁場の積分の時間微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\sigma = \frac{\partial n_e}{\partial t} \Delta s \frac{qv\mu_0}{4\pi} \left(1 + 2 \log \frac{b}{a}\right)$$

ここで、

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\frac{ds}{dt} \frac{\partial n_e}{\partial s} = -v \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

であるから、

$$E_s - E_w = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + 2 \log \frac{b}{a}\right) (1 - \beta^2) \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

なお、

$$g_0 = 1 + 2 \log \frac{b}{a}$$

と置き換えて、 g_0 ファクターと呼ぶ。最も簡単な例として、壁が完全導体の場合を考える。壁中の電位はゼロなので、縦方向のスペースチャージ力は、

$$F_s = -\frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{\partial n_e}{\partial s} = -\frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{\partial n_e}{\partial s}$$

ビームの横方向の粒子分布がパラボラ分布の時には、 g_0 ファクターが、

$$g_0 = \frac{3}{2} + 2 \log \frac{b}{a}$$

となる以外は上と同様である。

さて、スペースチャージ力がわかったので、横方向の場合と同様に、縦方向の運動方程式がどのように変わるかを見てみる。縦方向の分布関数として、パラボラ分布をとる。

$$n_e(s) = \frac{3n_t}{4l} \left[1 - \left(\frac{s}{l}\right)^2\right]$$

ここで、 l はバンチの半幅である。このとき、力は線形となり、

$$F_s = \frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{3n_t}{2l^3} s$$

rf位相の相対的な関数 $\varphi = \phi - \phi_s$ として書き換える。

$$\varphi = -\frac{h}{R} s$$

を用いて、

$$F_s = -\frac{q^2 g_0}{4\pi\epsilon_0} (1 - \beta^2) \frac{3n_t R}{2l^3 h} \varphi$$

つまり、スペースチャージ力による、1周あたりのエネルギー増加は、

$$\delta U = \int_0^{2\pi R} F_s ds = -\frac{3q^2 g_0 n_t R^2}{4\epsilon_0 \gamma^2 l^3 h} \varphi$$

これにより、シンクロトロン振動の方程式は、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{qV}{2\pi h} (\sin\phi_s - \sin\phi) + \frac{3q^2 g_0 n_r R^2}{8\pi\epsilon_0 \gamma^2 l^3 h^2} \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_s^2 h^2 \eta}{\beta^2 \gamma m_0 c^2} W$$

の2式を組み合わせることにより、

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\Omega_s^2}{\cos\phi_s} (\sin\phi - \sin\phi_s) - \kappa\phi = 0$$

ただし、

$$\Omega_s = \omega_s \sqrt{\frac{h\eta \cos\phi_s qV}{2\pi\beta^2 \gamma m_0 c^2}}$$

$$\kappa = \frac{3g_0 n_r r_0 \eta c^2}{2l^3 \gamma^3}$$

振動の振幅が小さい部分では、

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + (\Omega_s^2 - \kappa)\phi = 0$$

となり、スペースチャージ力によるシンクロトロン振動のチューンの変化が求められる。

第3章 ラティスとトランジションエネルギー

§3.1 トランジションエネルギーの基礎知識

はじめにトランジションエネルギーが存在するわけについて考えてみる。直感的には、運動量の大きな粒子は、シンクロトロンの回転周期が小さくなり早く回ってきそうであるが、そう単純ではない。

回転周期は、軌道長 L と速さ β の関数として、

$$T = \frac{L}{\beta c}$$

微分をとって、

$$\frac{dT}{T} = \frac{dL}{L} - \frac{d\beta}{\beta}$$

つまり、磁場一定のもとでは回転周期は速さとともに軌道長の変化も考慮しなければならない。第2項は運動量を用いて次のように書き換えられる。

$$\frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p}$$

第1項もモーメンタムコンパクションファクター[momentum compaction factor]を定義することにより、軌道長の変化を運動量の変化で表すことができる。

$$\alpha_p = \frac{dL}{L} / \frac{dp}{p}$$

さて、両方ともに運動量でくり直すと

$$\frac{dT}{T} = \left(\alpha_p - \frac{1}{\gamma^2}\right) \frac{dp}{p}$$

ここでカッコ内をフェーズスリッページファクター[phase slippage factor]と呼び、 η で表す。

$$\eta = \alpha_p - \frac{1}{\gamma^2}$$

電子シンクロトロンでは、 γ が非常に大きいのでフェーズスリッページファクターとモーメンタムコンパクションファクターを区別せずに用いる傾向もあるので、注意が必要である。

次にモーメンタムコンパクションファクターを実際のラティスで計算するにはどうするかをみる。運動量の異なる粒子は、その変化に応じて異なる閉軌道を持つ。

$$x_p = D_x \frac{dp}{p}$$

ここで D_x はディスパージョン関数[dispersion function]である。ディスパージョン関数は $dp/p=1$ の粒子の閉軌道と言える。偏向電磁石成分が存在しない直線部で、運動量による閉軌道のずれは全体の軌道長の変化に寄与しない。横方向の平行移動だけである。それに対し、偏向電磁石成分があり、曲率が無限大でない部分では

$$dl = x_p \theta = D_x \frac{dp}{p} \cdot \frac{l}{\rho}$$

両辺を積分して、モーメンタムコンパクションファクターの定義と比べることにより

$$\alpha_p = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{D_x}{\rho} ds$$

となる。

例えば、一様な磁場中でモーメントムコンパクションファクターは1である。つまり、相対論的効果が無視できる範囲で ($\gamma \approx 1$) フェーズスリッページファクターはゼロ、つまり回転周期は運動量によらない。相対論的効果がでてきた後もモーメントムコンパクションファクターはゼロから正に変わるが、ゼロをまたがって符号が変わることはない。

こうした状況は強収束のシンクロトロンでは一変する。ディスパージョン関数は次の非斉次方程式を解くことにより求められる。

$$\frac{d^2 x_p}{ds^2} + k(s)x_p = \frac{1}{\rho(s)} \frac{\Delta p}{p}$$

ここで、次のように規格化した変数を導入することにより、右辺がゼロの時、粒子の運動は調和振動的となる。

$$x_n = \frac{x_p}{\sqrt{\beta}}, \quad \phi = \frac{1}{v} \int_0^s ds$$

ここで、 β はラティス振幅関数で、 v はチューンを表す。

$$\frac{d^2 x_n}{d\phi^2} + v^2 x_n = v^2 \beta^{3/2} \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

フーリエ変換を使って、上の微分方程式を解くと、

$$x_p = \frac{\Delta p}{p} \beta^{1/2} v^2 \sum_k \frac{a_k e^{ik\phi}}{v^2 - k^2}$$

ただし、

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta^{3/2}}{\rho} e^{-ik\phi} d\phi$$

[12] K. Johnsen, Proceedings of CERN Symposium on High Energy Accelerators and Pion Physics, Geneva, 1956, Vol. 1, p. 106.

[13] A. Sorensen, Particle Accelerators, Vol. 6, p. 141, 1975.

つまり、ディスパージョン関数は、

$$D_x(s) = \beta^{1/2}(s) v^2 \sum_k \frac{a_k e^{ik\phi}}{v^2 - k^2}$$

モーメントムコンパクションファクターを求めるには、さらに積分して、

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{v}{L} \int_0^{2\pi} \frac{\beta D_x}{\rho} d\phi \\ &= \frac{2\pi v^3}{L} \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta^{3/2}}{\rho} e^{ik\phi} \frac{1}{v^2 - k^2} \\ &= \frac{v^3}{R} \sum_k \frac{|a_k|^2}{v^2 - k^2} \end{aligned}$$

普通は、 $k=0$ の項が支配的になり、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta^{3/2}}{\rho} d\phi \\ &\approx \left(\frac{R}{v^3} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

ここで、 β を R/v で置き換えた。また、2極電磁石がセルにほぼ一様に詰まっている仮定して、 $\rho=R$ なる置き換えを行った。したがって、

$$\alpha_p = \frac{1}{v^2}$$

フェイズスリッページファクターは

$$\eta = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{\gamma^2}$$

つまり、ローレンツファクターが水平方向のチューンよりも小さいときにフェイズスリッページファクターは負、これは運動量の大きな粒子は回転周期が小さくなり早く回ることを意味する。この γ を境として運動量依存性の符号が変わる。つまり、シンクロトロンにおいてトランジションエネルギー[transition energy]が存在し、その値はほぼ水平方向のチューンになる。

§ 3.2 トランジションエネルギーでの問題点

トランジションエネルギーの前では運動量の大きな粒子は早く回り、小さな粒子は遅く回る。トランジションエネルギーを越えた後ではこの関係が逆転する。これは、シンクロトロン振動の位相安定性から言えば位相の安定領域が変わることに対応する。原理的には、ここでrfの位相を瞬時に変えることにより、ビーム中の各粒子はトランジションエネルギーを越えたことに気づかなくできそうであるがそう単純ではない。

一つはトランジションエネルギー付近の非線形効果と呼ばれるものであり、これは次のように説明できる[12]。つまり、ビーム中の各粒子は縦方向のエミッタンスの範囲内で運動量の広がりを持っている。これは dp/p でたかだか1%程度の大きさではあるが、この運動量の違いにより各粒子はトランジションエネルギーを越えるタイミングが厳密には異なる。運動量の中心付近の粒子がトランジションエネルギーを越えるタイミングでrfの位相を変えた場合、運動量の大きな粒子にとっては、すでに位相を変えるタイミングが遅すぎ、小さな粒子にとっては早すぎる。

こうして縦方向のエミッタンス内の粒子が高運動量側と低運動量側で逆向きに回りだし、全体としてエミッタンスが大きくなる。これをジョンセン効果[Johnsen effects]と呼ぶ。

各粒子が各々別のトランジションエネルギーを持つ原因としては上記の他に、横方向のスペースチャージ力によるチューンシフトに起因するものもある[13]。トランジションエネルギーはだいたい水平方向のチューンに一致することを見てきたが、横方向のスペースチャージ効果が水平方向のチューンをシフトすると、それに伴いトランジションエネルギーもシフトする。前に述べたように、粒子の横方向分布が一様でない限り、チューンのシフト量は各粒子によりまちまちで、結果的には上で述べた運動量の違いによる効果と同様のエミッタンス増加をもたらす。こちらはウムシュタッター効果[Umstatter effects]と呼ばれる。

さて、以上の2つの効果はいわばシングルパーティクルがもたらす効果であったが、(ウムシュタッター効果は横方向のコレクティブなスペースチャージ効果を原因としてはいるが、縦方向のコレクティブな効果ではない)、トランジションエネルギー付近では、そのほかにもビーム不安定性の問題がある。そのうち、マイクロウェーブ不安定性[microwave instability]について見てみる。

いわゆるカイル・シュネル閾値[Keil-Schnell criterion]で定義される、コースティングビームを考えたときに縦方向ビーム不安定性が起きないためのインピーダンスに対する条件は、

$$\left| \frac{Z}{n} \right| \leq F \frac{m_0 c^2 \beta^2 \gamma |\eta|}{q l_p} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^2$$

つまり、フェーズスリッページファクターがゼロに近づくと、許されるインピーダンスもゼロになる。もちろんビームはコースティングではないが、トランジションエネルギー付近ではシンクロトロン振動もゼロに近づきバンチはほぼ動かない状況にあるので、バンチ内を局所的に眺めればコースティングビームの近似はかなり正しい。こうした効果は、高エネルギー研にある陽子シンクロトロン他、実際の加速器で観測されている。

§ 3.3 解決策

トランジションエネルギーが存在するために、上に述べたような問題が起こりうるが、一つの解決法として、トランジションを越えるスピードを速めることが行われた[14]。図9に示すように、ラティスにパルス励磁する4極電磁石を加え、ラティスから決まるトランジションエネルギーを急激に変化させる。トランジションエネルギーでの問題点が発生するよりも速くトランジションエネルギーを越えてしまおうと言う発想である。はじめセルンの陽子シンクロトロン[CERN-PS]で使われたが、その後、トランジションエネルギーを持つ多くのシンクロトロンで同種の手法が組み込まれている。

[14] W. Hardt, "Gamma Transition-Jump Scheme of the CPS", 9th International Conference on High Energy Particle Accelerators, Stanford, 1974.

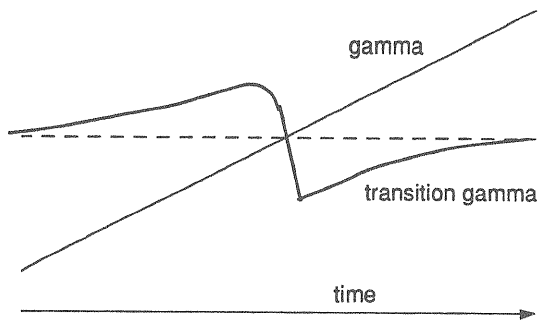


図9： 通常、ラティスから決まるトランジションエネルギー（トランジションでのローレンツファクター）は一定であるが、ここでは、パルス4極電磁石を励起して、トランジションエネルギーを短時間の間に変化させる。これにより、ビームのエネルギーがトランジションエネルギーの近傍である時間が短くなる。

すでに存在するラティスで解決策を考えるのではなく、新しいシンクロトロンをゼロから作り始める際にはもっと自由度がある。最も効果的な解決策は、トランジションエネルギーを取り出しエネルギーよりもずっと上に上げてしまうか、または、モーメントムコンパクションファクターを負にすることによりトランジションエネルギーをイマジナリーにしてしまうことである。そこで、トランジションを自由に選べるラティスをつくるにはどうするかを次に考えてみる。

§3.4 トランジションエネルギーを選べるラティス

前に述べたように、特別な操作をしない限り通常のシンクロトロンでは、トランジションエネルギーでのローレンツファクター γ はほぼ、水平方向のチューンになる。ただし、これは絶対的な原則ではない。強収束を論じたオリジナルペーパーである Courant と Snyder の論文の最後には、逆方向の偏向電磁石を用いてモーメントムコンパクションファクターをゼロまたは負にする方法について簡単に触れられている。

逆方向の偏向電磁石を用いたデザインは、アイデアに止まっているわけではなく、最近設計され

た姫路工業大学のニュースバルと呼ばれる放射光利用のための蓄積リングでは具体的に建設のための計算が行われた[15]。図10に、ラティスの配置図を示す。

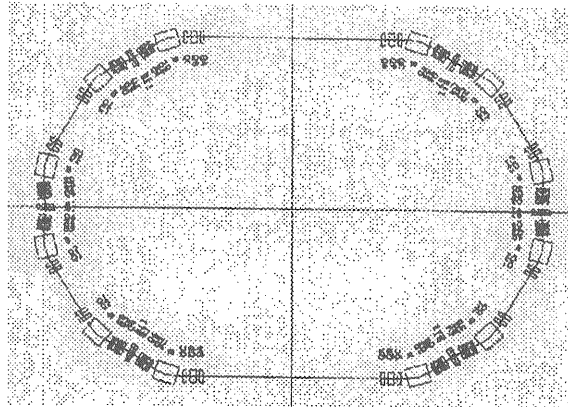


図10： 姫路工業大学のニュースバルのためのラティス。逆向きに曲げる2極電磁石を置いてモーメントムコンパクションファクターを負にする。

それではもっと一般にモーメントムコンパクションファクターを自由に選べる [flexible momentum compaction] ラティスを設計するにはどうするかについて次に考えてみる。

以前モーメントムコンパクションファクターを計算する際に、 $k=0$ の項が支配的でそれ以外の関与は少ないとした。逆に言えば、実際のラティスのパラメーターを選ぶ際に、 $k=0$ 以外の項が無視できないようにすればよい。通常の高対称性のラティスでは（例えば1種類の収束電磁石と1種類の発散電磁石のみからなるFODOラティス）セルあたりの位相の進みが90度付近とすると、水平方向のチューン ν_x は対称性から決まる最も小さいハーモニクス $k=\pm N$ よりはずっと小さい。つまり、 $\nu_x \approx N/4$ 程度にしかならない。

a_k ($k=0$ 以外) の寄与を大きくするために、 β

[15] Y. Shoji, private communications

または ρ に変調をかけることを考える。例えば、4極電磁石の強さにゆっくりとした周期性を持たせる。または、2極電磁石の強さに同じような周期性を持たせたり、ある周期で2極電磁石のない部分をつくる。こうして、 a_k の絶対値を大きくする。

例として、水平方向のチューンとほぼ似かよった周期性を上 に述べたようなやり方でつくったとする。このとき、 $k = \pm N$ の項が無視できなくなるので、モーメントコンパクションファクターの積分をする際にこの寄与も残して以下ようになる。

$$\alpha_p \approx \frac{1}{v^2} \left(1 + 2v^2 \frac{v^3}{R} \frac{|a_N|^2}{v^2 - N^2} \right)$$

第2項のファクター2は $k = \pm N$ から両方の寄与を意味する。もっと正確には、モーメントコンパクションファクターをゼロまたは負にするには水平方向のチューンを、変調をかけた後の対称性よりも多少小さく選ぶ。

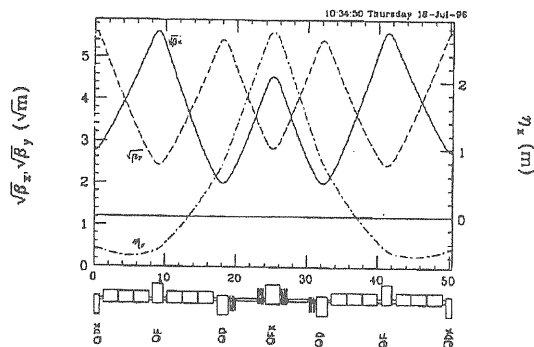


図 11: 3セル DOFO と呼ばれるラティスの基本構成要素。中心付近の1セルから2極電磁石を抜く。

図11には、このような方針でつくられた一つのモジュールを示す。ここでは、FODOセルが3つあるうちの真ん中の2つの2極電磁石を抜き取り、大きな周期性を持たしている。セルあたりの位相の進みはほぼ90度選ばれており、一つのモジュールでは270度。これは前式の水平方向のチューンで言えば0.75に相当する。

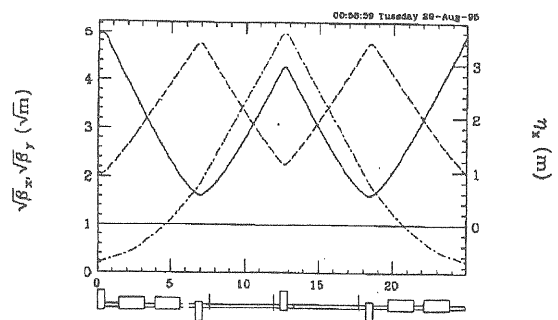
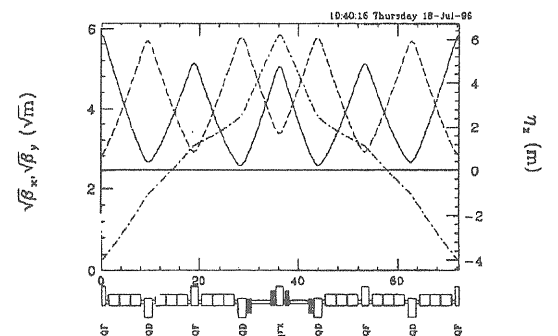


図 12: 2セル FODO と呼ばれるラティスの基本構成要素。中心付近の1セルから2極電磁石を抜く。

同様に、FODOセルが2つあるうちの真ん中の2つの2極電磁石を抜き取った場合、またFODOセルが4つあるうちの真ん中の2つの2極電磁石を抜き取った場合をそれぞれ図12、13に示す。セルあたりの位相の進みはそれぞれ、120度、60度付近に選ばれている。



[16] N. I. Golubeva, A. I. Iliev, Yu. V. Senichev, "The new lattices for the booster of Moscow kaon factory", Proceedings of International Seminar on Intermediate Energy Physics, 1989, Moscow, USSR, pp.290-297.

[17] L. C. Teng, "Infinite transition-energy synchrotron lattice using π -straight sections", Particle Accelerators, 1972, Vol.4, pp.81-85.

[18] S. Y. Lee, K. Y. Ng, and D. Trbojevic, "Minimizing Dispersion in Flexible Momentum Compaction Lattices", Fermilab-Pub-93/187, 1993.

図13： 4セルFODOと呼ばれるラティスの基本構成要素。中心付近の1セルから2極電磁石を抜く。前2つの場合に比べてディスパージョン関数の最大値が大きい。

以上のような場合に確かに $k = \pm N$ の項が無視できなくなっていることを見してみる。1つのモジュールでの ρ に対する変調を、図14のように簡単化する。以下では、1つのモジュールについてのみ積分を行うので、 $N = 1$ の成分が支配的になるはずである。このときフーリエコンポーネントは対称性から $\cos \phi$ で積分することができて、

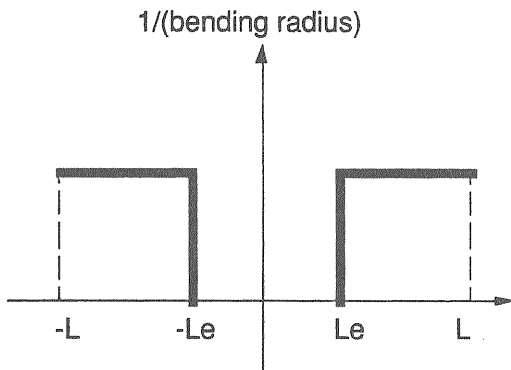


図14： モーメントムコンパクションファクターの位相進み依存性を見るために簡略化したラティス。モジュールの真ん中付近で2極電磁石を抜いた効果を見る。

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\beta^{3/2}}{\rho} \cos \phi d\phi$$

さらに、以前と同様に $R/v = \beta$ なる置き換えをする。ただし、今度は $\rho = R$ とはせずに2極電磁石がない部分を考慮して、

$$\rho = \frac{L - L_m R}{L}$$

とする。ここで、 L_e は2極電磁石のない部分の距離である。以上を代入して、

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{R}{v^3} \right)^{3/2} \frac{L}{L - L_e} \frac{1}{R} \int_{L_e/L}^{\pi} \cos \phi d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{R}{v^3} \right)^{3/2} \frac{L}{L - L_e} \frac{1}{R} \left(-\sin \frac{L_e}{L} \pi \right)$$

したがって、

$$\alpha_p \approx \frac{1}{v^2} \left[1 + \frac{2v^2}{\pi^2} \left(\frac{L}{L_e - L} \right)^2 \left(\sin \frac{L_e}{L} \pi \right)^2 \frac{1}{v^2 - 1} \right]$$

これを、あらわすと、図15のようになり、確かに位相の進みを適当に選ぶとモーメントムコンパクションファクターはゼロまたは負になる。

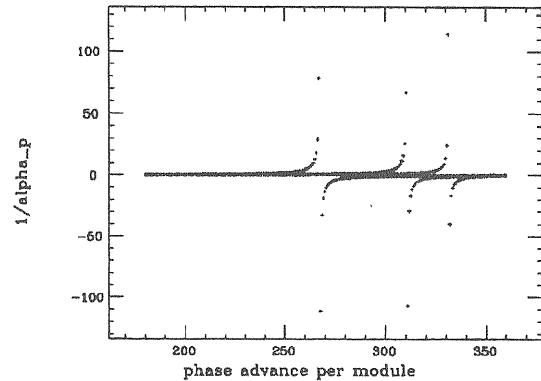


図15： モーメントムコンパクションファクターの位相進み依存性。図ではその逆数、すなわちトランジションエネルギーの2乗を縦軸に取る。270度付近のピークが2セルFODOのとき、310度付近のピークが3セルDOFOのとき、330度付近のピークが4セルFODOのときにそれぞれ対応する。

ここでは具体例を示さなかったが、4極電磁石の強さに変調をかけモーメントムコンパクションファクターはゼロまたは負にすることもできる。いずれにせよ、フーリエ成分のうちのあるハーモニクスを2極電磁石または、4極電磁石を使って励起しモーメントムコンパクションファクターの値

を変えるという意味で、以上の方法をハーモニックメソッド[harmonic method]と呼ぶ[16]。

これに対して、モジュラーメソッド[modular method]と称する、次のような方法もある。通常のFODOセルの間に水平方向の位相の進みが180度になるような直線部を挟む。こうすることにより、挟んだ直線部の間では、運動量の増加による軌道長の増加はゼロとなる。残りの通常のFODOセル部分では、運動量の増加が軌道長を減少する方向に働くので、全体としてはモーメントムコンパクションファクターが負になる。

こうしたアイデアは、古くからあり[17]、最近フェルミ研究所で新しい加速器を設計する際に詳細に検討された[18]。大型ハドロン計画のためのラティスとしても調べられ、図16に示すようなモジュールを計算した。これを見る限り、 DISPERSION のハーモニクスという観点から見れば、ハーモニックメソッドで計算した3セルDOFOと同じハーモニクスを使っており、ハーモニクスメソッドとモジュラーメソッドを全く別の方法と考えることはできないように思われる。

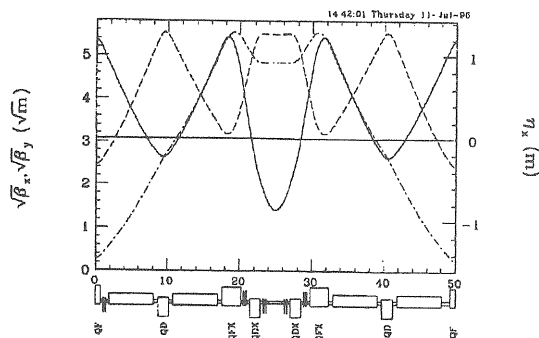


図16： モジュラーメソッドを使ったモジュール。両端のFODOセルを、真ん中の180度直線部でつなげる。

第4章 大型ハドロン計画の陽子シンクロトロン

最後に大型ハドロン計画のシンクロトロンについて、スペースチャージチューンシフトの見積も

りと現在検討中のラティスを示す。

§4.1 スペースチャージ効果によるチューンシフト

ブースター入射時

規格化エミッタンス	140 π mmrad
全粒子数	5 $\times 10^{13}$
バンチングファクター	0.30
フォームファクター	1.0
チューンシフト	-0.35

主リング入射時

規格化エミッタンス	220 π mmrad
全粒子数	2 $\times 10^{14}$
バンチングファクター	0.28
フォームファクター	2.4
チューンシフト	-0.11

§4.2 大型ハドロン計画のシンクロトロンのラティス

ここでは、3セルDOFOを使って、50GeV主リングのラティスを設計した例と、2セルFODOを使って、3GeVブースターを設計した例を示す。

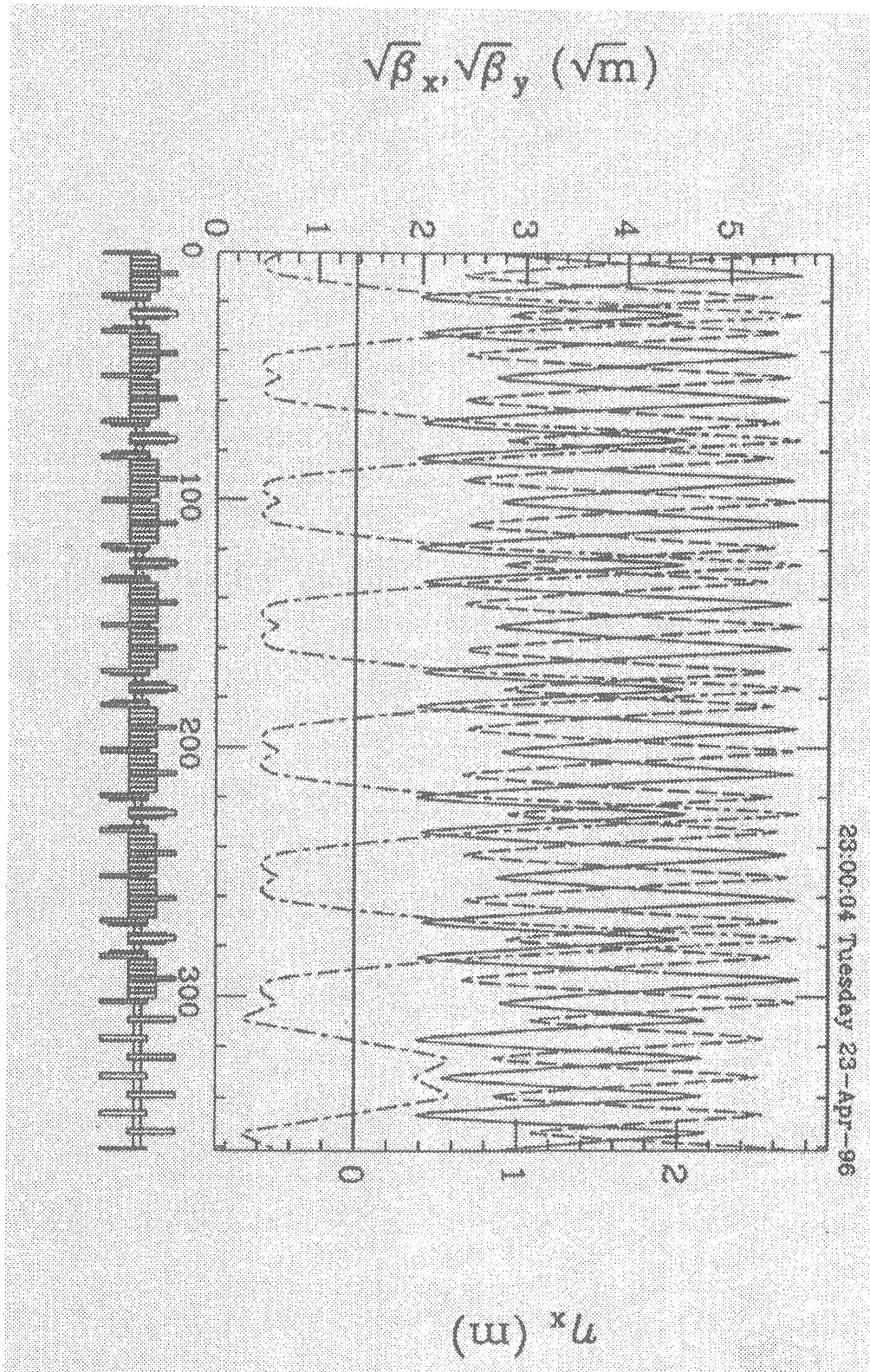


図 17: 50GeV 主リングのラティス。1/4周を示す。3セル DOFO を一つのモジュールとし、スーパーペリオドは4である。

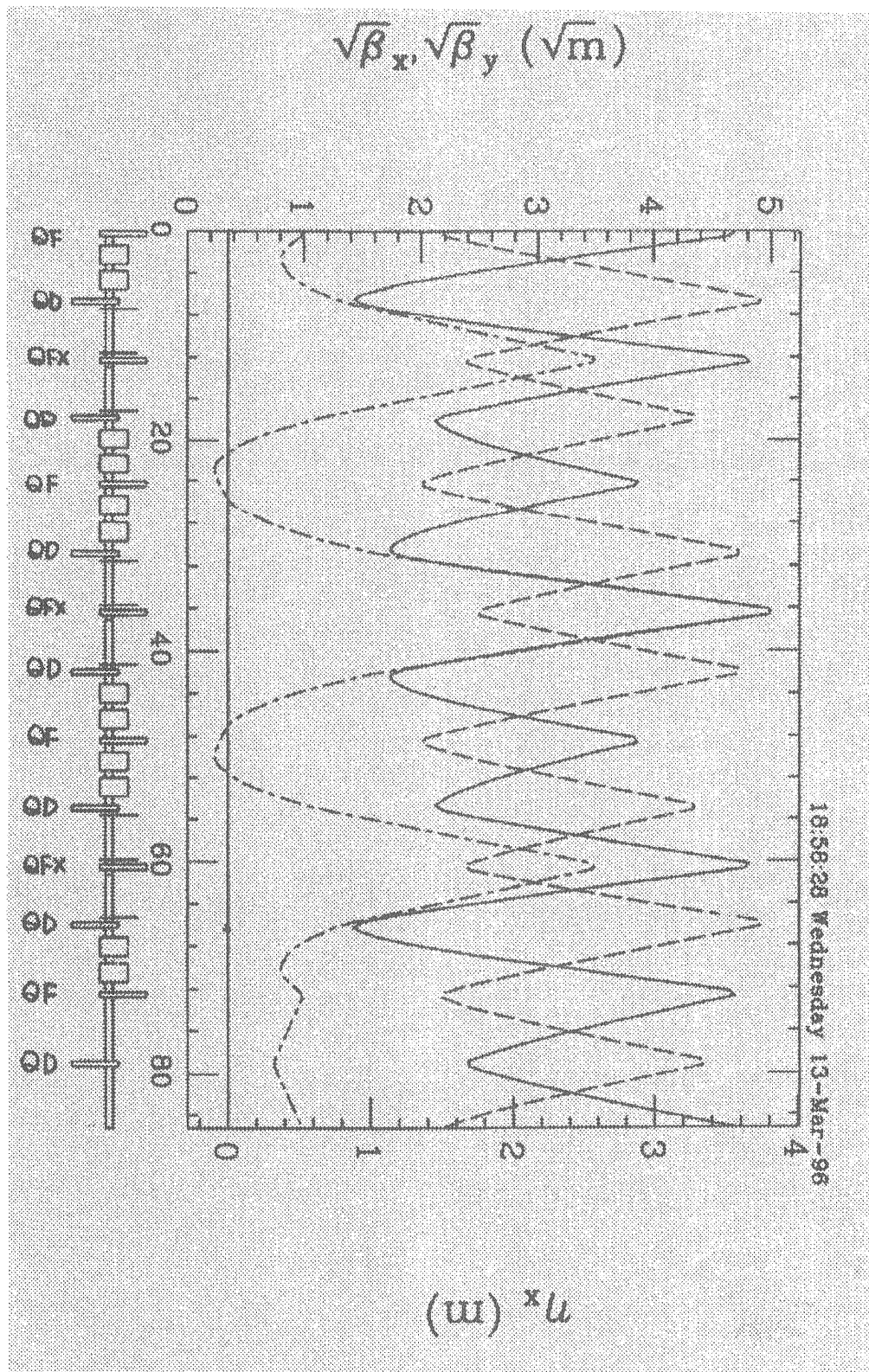


図18: 3GeVブースターのラティス。1/4周を示す。2セルFODOを一つのモジュールとし、スーパーペリオドは4である。

付録

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e ab}{2\epsilon_0} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy$$

$$\times \frac{x^2 n\left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t}, s\right)}{(a^2+t)^{3/2} (b^2+t)^{1/2}} n\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, s\right)$$

の積分を実行するために、次のような変数変換を行う。

$$u = \frac{x}{\sqrt{a^2+t}}$$

$$v = \frac{y}{\sqrt{b^2+t}}$$

$$p^2 = t$$

$$dxdydt = \frac{\partial(x, y, t)}{\partial(u, v, p)} du dv dp$$

このとき、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e ab}{2\epsilon_0} \int_{-\infty}^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv u^2 (u^2 + v^2)$$

$$\times \int_0^\infty dp 2pn \left[u^2 + v^2 + \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) p^2 \right]$$

さらに、変数を変換する。

$$\rho^2 = u^2 + v^2 + \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) p^2$$

最後の積分は、

$$\int_0^\infty dp 2pn \left[u^2 + v^2 + \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) p^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} \int_{u^2+v^2}^\infty dp 2p n(\rho^2)$$

従って、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e a^3 b}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^\infty du$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty dv \frac{\frac{u^2}{a^2}}{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} n(u^2 + v^2) \int_{u^2+v^2}^\infty d\rho 2p n(\rho^2)$$

さらに変数を変換する。

$$u = r \cos \theta$$

$$v = r \sin \theta$$

積分は、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e a^3 b}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty r dr$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\frac{\cos^2 \theta}{a^2}}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}} n(r^2) \int_r^\infty 2p n(\rho^2)$$

$$= \frac{qn_e a^3 b^2}{2\pi\epsilon_0 a + b} \int_0^\infty 2\pi r dr n(r^2)$$

$$\times \left[\int_0^\infty 2p n(\rho^2) - \int_0^r 2p n(\rho^2) \right]$$

ここでは、次の積分を行った。

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\frac{\cos^2 \theta}{a^2}}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}} = \frac{2\pi b}{a + b}$$

ここで、半径の中に含まれる粒子を次の様に定義し直す。

$$q(r) = ab \int_0^r 2p n(\rho^2)$$

定義から、 $q(\infty) = 1$ 。これを使うと、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{a+b} \int_0^{\infty} \frac{dq(r)}{dr} dr [1-q(r)]$$

積分は簡単に実行できて、

$$\int_0^{\infty} \frac{dq(r)}{dr} dr [1-q(r)] = \frac{1}{2}$$

従って、

$$\overline{xE_x} = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{a+b} = \frac{qn_e}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x} + \tilde{y}}$$

以上から、rms のエンベロップ方程式は、

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + k_x(s)\tilde{x} - \frac{\epsilon_{x,rms}^2}{\tilde{x}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{x} + \tilde{y}} = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + k_x(s)\tilde{y} - \frac{\epsilon_{y,rms}^2}{\tilde{y}^3} - \frac{r_p n_e}{\beta^2 \gamma^3} \frac{1}{\tilde{y} + \tilde{x}} = 0$$