

第1章 はじめに

ビーム不安定性の問題は加速器の分野のなかでも比較的良く理論的に整備されているので学生さんにとって取り付き易い分野である。今までにも OHO シリーズの中でたびたび取り上げられていて[1]、加速器物理を勉強する人にとって必修科目であろう。さて、ビーム不安定性の問題が現在の様に良く整理され、勉強しやすくなったのには A. Chao による講義ノート[2]の貢献が大きい。この講義ノートは単に教科書としてだけではなく、公式集としても大変便利である。Chao の講義ノートはまた教科書の構成の仕方にも一種の基本型を与えた。そこでは、まずウェイクの説明から話を興し、次にそのフーリエ展開としてインピーダンスが導入され、最後にそれらを運動方程式やブラソフ方程式に入れることでさまざまなタイプのビーム不安定を解説するといった風に話が展開される。ただし、Chao の講義ノートは主に電子リングを念頭において書かれているために、陽子リングで重要な幾つかのビーム不安定性の解説が抜けているうえに、考えているインピーダンスの周波数帯が高いために (GHz の程度)、多くの公式や計算手法が陽子リングにそのままでは適用できない。

さて、教科書を読んで理論武装しようとする時に、そこで展開されている概念や数式の持つ物理的描像や意味合いといったものをきちんと把握しながら読むことが肝要である。この点検作業を怠ると、いざ加速器設計の段階でビーム不安定性やインピーダンスの問題を検討しようとしたら観測された現象を説明しようとする際に、学んだ知識の応用ができなくなる。どうも教科書が数式を多用してエレガントかつスムーズに書いてあればあるほど、そのテクニックにとかく眼が奪われ、理論と現象との連結作業が難しくなる様である。特に、ビーム不安定性の解析に於いては数式が数式を導きだすと言った場合が多いので、どうしても話が抽象的になりやすく、

話が観念の世界に留まっている限り読者にとって取り付くしまがなくなってしまう。

この講義ノートではさまざまな概念や解析方法を導きだすと同時に、できるだけそれらの持つ物理的描像や直感的な理解を確認していくことで、話を現実の世界に引き戻しながら進めていくつもりである。それは、形式的な説明より、読者の参加を必要とし、また読者を疲労させるだろう。しかし、その結果、読者の物理的理解を少しでも深めることができるならば光栄である。まず、ビーム不安定性やインピーダンスの問題の理解に必要な概念と公式をたっぷり勉強する。最後の章では、学んできた知識を再確認するために、その1部を JHP リングに応用してみる。加速器のタイプとしては陽子シンクロトロンに限定し、例として JHP を考える。従って、電子リングにおけるビーム不安定性の解説に必要な複雑かつ煩雑な理論の展開はできるだけ避ける。

第2章 ウェイク

2-1. 序

ビーム不安定性とは、ビームがそれを取り巻く環境 (真空チェンバーや加速空洞など) と電磁氣的に相互作用した結果起こる、ビーム全体の不安定な振る舞いと定義できる。そこにはビームが環境に作用していかに電磁場を作るかと言う問題と、その電磁場が今度はビームにどう影響を与えるかと言う、2つの問題がある。前者の理解には電磁気学の知識が不可欠で、それゆえに主に RF 関係者がそれらの計算を受け持つことが多い。後者の理解にはプラズマ物理の知識が役立つが、なくてもそう困ることはない。

ビームが環境体と相互作用して出来る電磁場を加速器物理では一般にウェイクと呼ぶ。まず、どうしてウェイクができるのかを考えてみよう。

2-2. ウェイク

完全導体で出来た真っ直ぐなパイプの中心を光速で直進する粒子を考える。パイプの外側で電磁場がゼロになる様にパイプの内側の表面上に鏡像電流が誘起され、粒子との間に電磁場の雲ができる。そして全体がそのまま光速で前方に移動していく。境界の効果はこの鏡像電流によって置き換えることができるので、以下境界の存在をわすれてもかまわない。さて、パイプの先で口径が急に広がっているとしよう(図1参照)。粒子はそのまま直進するが鏡像電流はパイプに沿ってその軌道が曲げられるだろう。その時、シンクロトロン放射を出す。これがウェイクである。広がったパイプの替りにパイプの材質が伝導率有限の物質になっていたとしよう。鏡像電流は急に減速され、前方に制動輻射を出す。これもウェイクである。つまりウェイクとは鏡像電流が出す輻射なのである。では輻射のエネルギーはどこから来ているかと言うと、最終的には粒子からである。輻射場、粒子、そして鏡像電流と粒子間の電磁場、この3つの間でエネルギーのやり取りがなされる。こうして、ウェイクを鏡像電流が出す輻射と考え、その軌道を考察することで、どこでウェイクが作られ易いか等が直感的に理解できる。

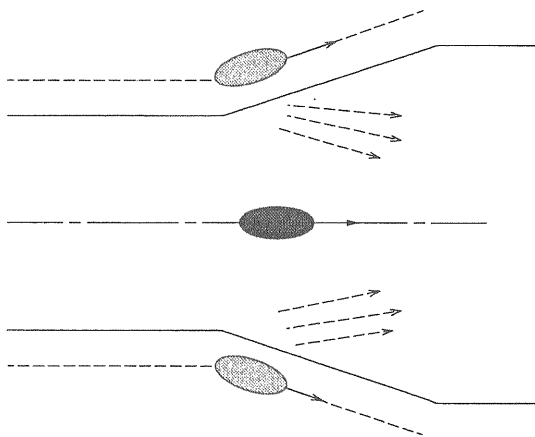


図1：鏡像電流によるウェイクの発生。

ウェイクはMaxwell方程式を解けば求められる。しかしこれは大変な作業であり、ビーム不安定性とインピーダンスの問題を検討するときに最も多くの時間はここに費やされる。解析的にできる場合は、円形のパイプが小さく波打っている場合や、真っ直ぐなパイプが非完全導体でできている場合など極めて限られている。殆どの場合、ABCI[3]やMAFIA[4]などの計算機コードを使って計算することになる。

2-3. ウェイクポテンシャル

さて、粒子の作るウェイクが計算できたとしよう。今度はそのウェイクが粒子の(ウェイクを作った粒子だけでなく周りの他の粒子も含めて)運動にどう影響を与えるかを考えてみよう。これは後でビーム不安定性の解析をする際の重要なインプットになるので、解析に便利な様にうまくパラメータ化しておく必要がある。粒子の運動方程式を書くためには、ウェイクによって与えられた粒子の運動量の変化を知らなければならない。粒子がウェイクの雲の中を通過する間に起きる軌道変化が十分に小さければ、ウェイクフォースによる運動量変化の総量を知れば充分である。

議論を簡単にするために、ウェイクは軸対象構造体の中で出来るとする。対称性から電磁場は軸の周りの角度 θ に関して $\cos m\theta$ の形にフーリエ展開できる。次数の低い順にmonopole ($m=0$)、dipole ($m=1$)と呼ぶ。殆どの場合、問題となるビーム不安定性はこの2つの成分が起こすとみなして充分だが、それらの項をきちんと他から分離して知る必要がある。そのためには、ウェイクを誘起するdriving beamと呼ばれる粒子の集まりを $\cos m\theta$ の電荷分布をもったリング状にすればよい。リングの半径を r_0 とし、リングの中心は構造体の軸上を走る。Driving beamを次数の違うリングの重ね合わせにすると計算は複雑になるので、実際にはmonopoleと

dipole 場の計算はおのこの別のリングを用意して別々に行うのが一般的である。そうして、リングの電流密度を、電荷 q の点電荷が $\theta=0$ の方向に r_0 のオフセットを持った時と同じモーメントを持つ様を選んでおくと後で都合が良い：

$$\lambda = \frac{qc}{\pi r_0(1+\delta_{m0})} \delta(z-ct) \delta(r-r_0) \cos m\theta \quad (2-1)$$

ここで c は光速であり、 δ_{m0} はクロネッカーのデルタである。

次にこのウェイクから力を感じる別の粒子 (test particle) を考える。以下図2を参照せよ。この粒子は同じバンチの中で driving beam を構成する粒子達と一緒に (軸と平行に) 動いている粒子を念頭にいれている。2つの軸方向における相対的位置がウェイクを通過中にあまり変わらないとして、

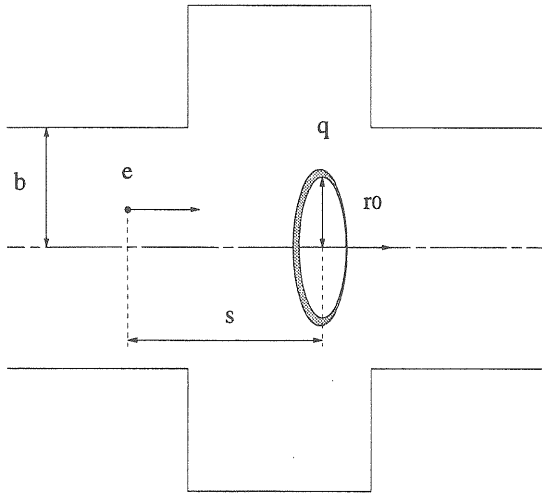


図2 : Driving beam リングと test particle との位置関係。

その距離を s としよう。Test particle は軸から r だけ離れた所を走るとする。この test particle が時間 t の時、軸方向の位置 z で受ける縦方向、横方向 (放射方向) のローレンツ力を F_L , F_T とする：

$$F_L = eE_z \cos m\theta \quad (2-2)$$

$$F_T = e(E_r - c \cdot B_\theta) \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \equiv F_T \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \quad (2-3)$$

ここで、 \mathbf{r} は放射方向の単位ベクトルであり、 E_z , E_r と B_θ はそれぞれ $\theta=0$ での電場と磁場の軸方向、放射方向と角度方向の成分である。Test particle がウェイクの雲を通過中に受ける運動量変化の総量は

$$\begin{aligned} \Delta p_z &= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_L(z, t = \frac{z+s}{c}) \\ &\equiv -eq W_{Lm}(s) \cdot r_0^m r^m \cos m\theta \end{aligned} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_T &= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_T(z, t = \frac{z+s}{c}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_T(z, t = \frac{z+s}{c}) \cdot \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \\ &\equiv eq W_{Tm}(s) \cdot m r_0^m r^{m-1} \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2-5)$$

で与えられる。ここでは証明を省くが、Maxwell 方程式を変換すると、以上の様に定義された $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は driving beam の半径や test particle が構造体のどこを走っているかによらないことが解る[2]。 $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は構造体の形状で一意的に決まる関数で、これをウェイクポテンシャルと言う。Driving beam は光速で走っていると仮定しているのでウェイクポテンシャルは driving beam の前方でゼロになる：

$$W_{Lm}(s) = W_{Tm}(s) = 0 \quad (s < 0) \quad (2-6)$$

Test particle の運動量変化の式 (2-4) と(2-5)をもう少し詳細に調べて見よう。

- monopole 場 ($m=0$)

この時、当然のことながら対称性から横方向のウェイクポテンシャルはゼロである。さて、式 (2-3) から運動量変化は driving beam のリングサイズによらない。また、運動量変化は test

particle の位置にもよらない。結局、

→ Test particle の運動量変化は driving beam と test particle の相対距離だけの関数である。

● Dipole 場 (m=1)

式 (2-5) から、運動量変化は driving beam のリングサイズに比例する。また、運動量変化は自分自身の構造体の軸からのオフセットの量とその向きによらない。一方、 $\cos m\theta$ の電荷分布をもったリングはその電流密度の選択より、構造体の軸から $\theta=0$ の方向に r_0 だけオフセットをもった電荷 q のビームを表現している。結局、

→ Test particle の運動量変化の強さは driving beam のオフセットに比例する。その向きは $W_{Tm}(s)$ が正 (負) ならば、driving beam のオフセットの向き (逆向き) と同じである。

2-4. Panofsky-Wenzel theorem

さて、 $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ との間には Panofsky-Wenzel theorem と呼ばれる関係がある [5] :

$$W_{Tm}(s) = \int_0^s ds W_{Lm}(s) \quad (2-7)$$

この関係はこのままでは殆ど役に立たない。なぜなら $W_{Lm}(s)$ を計算できる環境にあるならば、 $W_{Tm}(s)$ も直接、定義に従って計算できるはずで Panofsky-Wenzel theorem に頼る必要はないからである。この関係はむしろ monopole 場での $W_{L0}(s)$ が計算できるが dipole 場の $W_{T1}(s)$ の計算が困難な場合や、 $W_{T1}(s)$ の直接の計算を端折りたいたときに、 $W_{L0}(s)$ から $W_{T1}(s)$ を近似的に求めるときに用いられる。よく使われる近似式は

$$W_{T1}(s) \approx \frac{2}{b^2} \int_0^s ds W_{L0}(s) \quad (2-8)$$

で、ここで b はビームパイプの内径である。また、Panofsky-Wenzel theorem と式 (2-6) より横方

向のウェイクポテンシャルは原点ではゼロであることがわかる :

$$\lim_{s \rightarrow +0} W_{Tm}(s) = 0 \quad (2-9)$$

一方、縦方向のウェイクポテンシャルの原点近傍での振る舞いはどうであろうか。Driving beam の作ったウェイクが持つエネルギーは、driving beam のエネルギーによって補われなければエネルギーが保存されないので、結局 driving beam はウェイクによって減速される力を受ける筈である。つまり、

$$\lim_{s \rightarrow +0} W_{L1}(s) > 0 \quad (2-10)$$

エネルギー保存則を詳細に吟味すると、driving beam はそのすぐ後ろの test particle が受ける減速力の半分の力を受けることがわかる。これを “fundamental theorem of beam loading” [6] と呼ぶ。以上の結果をまとめると、縦方向と横方向のウェイクポテンシャルは一般的に図 3 でスケッチした様に振る舞う。

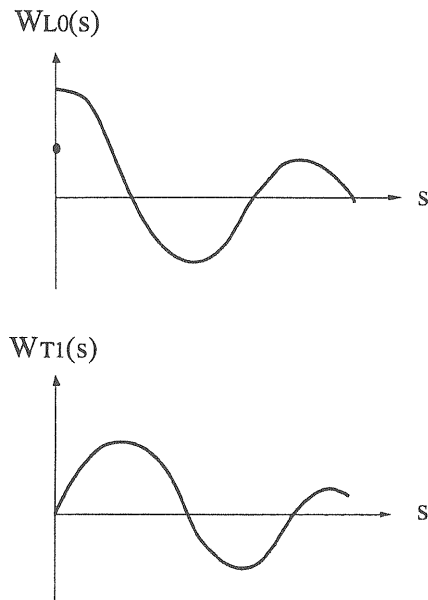


図 3 : 一般的な縦方向と横方向のウェイクポテンシャルのスケッチ。

さて、ここでどうして縦方向のウェイクはそれを作った driving beam に影響を与えることができるのに、横方向の場合はそれができないのかを考えてみよう。簡単のために driving beam の半径はビームパイプのそれと等しいとし、ウェイクは図2に示したような空洞で出来るとしよう。また、縦方向の代表として monopole 場を、横方向の代表として dipole 場を考える。この章の第2節で説明した様に、ウェイクは導体の表面を走る鏡像電流からの輻射によって作られる。この輻射は当然前方にできるので、長い距離を走る内に driving beam に追い付くことができる。このことは縦方向と横方向の場合で変わらない。それではなぜ横方向の場合 driving beam はウェイクから力を受けないのか。その鍵は鏡像電流の流れ方の違いにある。縦方向の場合、鏡像電流はビームパイプ上を軸対称的に流れるが、横方向の場合、鏡像電流のポーラリティが上下で ($\theta=0$ と $\theta=\pi$ とで) 逆転していて、違った角度にある鏡像電流からの輻射の差が横方向のローレンツ力を作っている。従って、例えば $\theta=0$ の軌道を走る test particle は $\theta=0$ で発せられた輻射のみならず、他の部位 (例えば $\theta=\pi$) で発せられた輻射がビームパイプ上を斜めに走ってきて追い付いて始めて横方向のローレンツ力を感じるのである。この場合、 $\theta=0$ 以外での輻射の軌道は driving beam のそれより長くなるため driving beam に追い付くことはできない。つまり、driving beam はウェイクを感じないのである。

第3章 インピーダンス

3-1. インピーダンスの定義

前章で求めたウェイクポテンシャルは、ビームの振る舞いを時間領域で調べるのに都合が良く、トラッキング等を行う時に便利である。しかしビームの振る舞いを解析的に調べようと

すると、周波数領域で議論した方が簡単で都合が良いことが多い。そこでインピーダンスという量を電気回路や RF での定義に沿うように定義しよう。以下、説明の簡略化のために monopole 場での縦方向インピーダンスと dipole 場での横方向インピーダンスの場合に議論を限る。実用上、これで問題はない。まず光速で移動する電荷 q のリング状 driving beam 考え、その電流を $I(\tau)$ と書く (i.e., $I(\tau) = q\delta(\tau)$)。ここで $\tau = t - z/c$ である。このビームより距離 s だけ遅れて走る粒子がウェイクから受ける軸方向電場の積分値 (つまり電圧) は

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(z, t = \frac{z+s}{c}) \quad (3-1)$$

で与えられる。これは式 (2-4) を使えば

$$V(s) = -qW_{L0}(s) \quad (3-2)$$

書ける。つまりウェイクポテンシャルその物である。この電圧をフーリエ変換して周波数の関数としたものを $V(\omega)$ とし、

$$V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} V(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} = -\frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{L0}(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} \quad (3-3)$$

また電流のフーリエ変換を $I(\omega)$ とすると

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I(\tau) e^{i\omega\tau} = \frac{q}{2\pi} \quad (3-4)$$

縦方向インピーダンス $Z_L(\omega)$ は以下の式で定義される：

$$V(\omega) = -Z_L(\omega)I(\omega) \quad (3-5)$$

式 (3-3) と (3-5) より明らかな様に $Z_L(\omega)$ は $W_{L0}(s)$ のフーリエ変換である：

$$Z_L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{L0}(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} \quad (3-6)$$

Dipole 場での横方向インピーダンスも同様に定義できる：

$$V_T(\omega) = iZ_T(\omega) \cdot r_0 I(\omega)$$

横方向ウェイクポテンシャルとは

$$Z_T(\omega) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{T1}(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} \quad (3-7)$$

の関係がある。ここで虚数 i が入っているのは横方向電圧の位相が電流の位相より 90 度ずれることが多いのを考慮してあるからである。

ここで注意する必要があるのは、インピーダンスの定義はあくまでも式 (3-5) であって、式 (3-6) と (3-7) はインピーダンスとウェイクポテンシャルの関係を示しているにすぎない。つまり、インピーダンスはウェイクポテンシャルを知らなくてもその定義から独立に計算できる。関係式 (3-6,7) からインピーダンスを計算するのは余り実際的でない。むしろインピーダンスを求めてそれからウェイクポテンシャルを関係 (3-6,7) を使って計算することはよくある。次の節でそれらの例を幾つか上げる。

3-2. インピーダンスの種類

さて、インピーダンスにはどんな種類があるのだろう。典型的な縦方向インピーダンスを書いてみると

$$Z_L = -i\omega L + R_w \sqrt{\omega} + R_\Omega + \frac{R_c}{\sqrt{\omega}} + \dots \quad (3-8)$$

ここで第 1 項はインダクタンス、第 2 項は resistive-wall と呼ばれる伝導率有限の物質で

きているパイプからのインピーダンス、第 3 項は抵抗、そして最後の項は加速空洞の全インピーダンスの高周波成分である。第 1 項で L が負の時、加速器ではキャパシタンスと呼んでいる。もう一つ重要なインピーダンスにローレンツ型があり、加速空洞のインピーダンスはこの形で書ける：

$$Z_L(\omega) = \frac{R_L}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)} \quad (3-9)$$

$$Z_T(\omega) = \frac{R_T \frac{\omega_R}{\omega}}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)} \quad (3-10)$$

ここで R_L と R_T は縦方向と横方向のカップリングインピーダンス、 Q は Q 値で ω_R は共振周波数である。

これら代表的なインピーダンスに対応するウェイクポテンシャルは式 (3-6,7) の逆変換をすれば求まる。ここではインダクタンスとローレンツ型インピーダンスのウェイクポテンシャルを列記するに留めよう：

1) インダクタンス：

$$W_{L0}(s) = L\delta'(s/c) \quad (3-8')$$

2) ローレンツ型インピーダンス

$$W_{L0}(s) = \begin{cases} 0 & (s < 0) \\ \alpha R_L & (s = 0) \\ 2\alpha R_L e^{-\alpha \frac{s}{c}} \left[\cos \frac{\omega' s}{c} - \frac{\alpha}{\omega'} \sin \frac{\omega' s}{c} \right] & (s > 0) \end{cases} \quad (3-9')$$

$$W_{T1}(s) = \begin{cases} 0 & (s \leq 0) \\ \frac{R_T \omega_R^2}{Q\omega'} e^{-\alpha \frac{s}{c}} \sin \frac{\omega' s}{c} & (s > 0) \end{cases} \quad (3-10')$$

ここで、 $\alpha = \omega_R / (2Q)$ 、 $\omega' = \sqrt{\omega_R^2 - \alpha^2}$ である。

以上のような形式的な説明では、インピーダンスの種類とその名前はわかっていても、実際にどういった構造体がどういうインピーダンスを作るかはよくわからない。そこでいくつかの重要なインピーダンスを簡単に求めてみよう。

3-3 インダクタンス

まずインダクタンスの説明から始めよう。ビームパイプ上に図4で示した様な小さな空洞のような構造体があり、このビームパイプの軸上をビームが通過するとする。

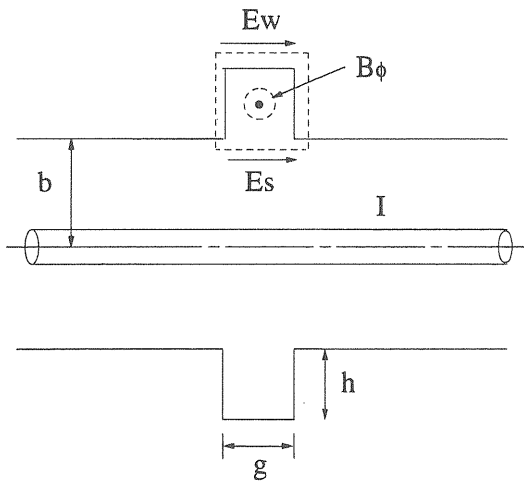


図4：小さな空洞の作るインダクタンス。

ビームと一緒に走る電磁場の内、電場はビームパイプの近傍では殆どゼロであるから、空洞の中では磁場だけを考えればよい。今知りたいのはギャップ間に立つ電場 E_s である。そこで点線で示した積分路を考える。この積分路にそっての電場の積分は空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい（ファラデーの法則）：

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-11)$$

ビームパイプが完全導体で出来ているとすると

($E_w = 0$)、左辺はギャップ間電圧そのものである：

$$V = \int_{gap} E_s ds \quad (3-12)$$

さて問題は右辺である。ビーム電流を I とし、 $\exp(-i\omega t)$ の様に時間変化するとする。すると空洞内の磁場は（ギャップの深さはパイプの半径に対し充分小さいとして、磁場が一定と見なせると仮定）

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (3-13)$$

で与えられ、式 (3-11) の右辺は

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = i\omega \frac{\mu_0 g h}{2\pi b} I \quad (3-14)$$

となる。ここで μ_0 は真空の透磁率を表す。つまり

$$V = i\omega \frac{\mu_0 g h}{2\pi b} I \quad (3-15)$$

インピーダンスの定義よりこの小さな空洞が作るインピーダンスは

$$Z = -i\omega \frac{\mu_0 g h}{2\pi b} = -i\omega \frac{Z_0 g h}{2\pi b c} \quad (3-16)$$

となり、インダクタンスである。ここで Z_0 は真空のインピーダンス (=120 π) である。このインピーダンスを、 $\omega = n\omega_0$ (ω_0 は回転周波数) を使って次の様に書くのが一般的である：

$$\frac{Z}{n} = -i\omega_0 \frac{Z_0 g h}{2\pi b c} \quad (3-17)$$

この結果はギャップ間電圧が空洞内に立つ磁場の誘導起電力によることを考えれば（つまりギャップはコイルの役割をする）容易に理解できる。

3-4. Resistive-wall impedance

次にこの速空洞の中が伝導率有限の物質で満たされているとしよう。この場合、電磁場はスキンドープ以上にはこの物質の中に入っていないので、空洞の深さがスキンドープ以上であれば、結果は空洞の深さによらないはずである。従って、いっそ空洞の深さをスキンドープにとってしまおう。この時、電場の積分路上でギャップ以外のところでも積分路に平行に電場ができる。その強さはスキンドープに比例するので空洞の放射方向での電場の積分はスキンドープの2乗に比例することになり無視できる。そこで図4の中で E_w で示された寄与だけを考える。 E_w は

$$E_w = \frac{\omega}{2} \delta (1+i) B_\phi \quad (3-18)$$

で与えられる。ここで $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$ はスキンドープである（ ρ ：体積抵抗率、 μ ：透磁率）。従って

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int E_w ds \\ &= i\omega \frac{\mu_0 \delta h}{2\pi b} I - \frac{\omega}{2} \delta (1+i) h \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \\ &= -\frac{\omega}{2} (1-i) \frac{Z_0 \delta h}{2\pi bc} I \end{aligned} \quad (3-19)$$

インピーダンスは

$$Z_L = \frac{\omega}{2} (1-i) \frac{Z_0 \delta h}{2\pi bc} \quad (3-20)$$

となる。この空洞がリング一周にわたってあるとして $h = 2\pi R$ と採り（ R はリングの平均半径）、また $\omega = n\omega_0$ とおくと、リング全体のインピーダンスは次のように書ける：

$$\frac{Z_L}{n} = Z_0 \left(\frac{1-i}{2} \right) \frac{\delta}{b} \quad (3-21)$$

これが縦方向の resistive-wall impedance[7]である。ビームパイプが非完全導体でできているときのインピーダンスを与える。ちなみに横方向の resistive-wall impedance は

$$Z_T = Z_0 (\text{sgn}(\omega) - i) \frac{\delta R}{b^3} \quad (3-22)$$

で与えられ、大電流加速器では深刻である。

さて、縦方向の resistive-wall impedance の式 (3-20) の物理的意味合いを考えて見よう。第1項、インピーダンスの実部は抵抗を表しているが、これは次の様にしても求まる。この空洞は体積抵抗率 ρ の円筒の筒（半径 b 、厚さ δ 、長さ h ）と考えてよく、その電気回路的な抵抗値は

$$R = \frac{\rho h}{2\pi b \delta} \quad (3-23)$$

で与えられる。この中で ρ/δ は次の様に変換できる（ $\mu = \mu_0$ として）：

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\delta} &= \frac{\rho}{\sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}}} = \frac{\omega\mu_0}{2} \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}} \\ &= \frac{\omega\mu_0}{2} \delta = \frac{\omega}{2} \frac{Z_0}{c} \delta \end{aligned} \quad (3-24)$$

従って、式 (3-23) は以下の様に書き換えることができる：

$$R = \frac{\omega}{2} \frac{Z_0 \delta h}{2\pi bc} \quad (3-25)$$

これは式 (3-20) の第1項と同じである。つまり、式 (3-20) の第1項はこの物質の抵抗そのものである。次に第2項を見てみよう。この項はインダクタンスを与えているが、式 (3-16) と比較すると内部の磁場が半分になったと解釈すればよい。これは実際に尤もな話で、磁場は空洞内部で指数関数的に減衰するから、空洞の外半径で

の磁場をゼロと近似すると、実効的な磁場は内部が真空の時の磁場 (3-13) の約半分ぐらいになる。以上の様に、式 (3-20) は我々の直感とよく合う。

3-5. 空間電荷インピーダンス

最後に縦方向の空間電荷インピーダンスを求めよう[8]。ビーム内の粒子は他の粒子からクーロン反発力を受ける。バンチの中心から前方の粒子は前方に押し出される様な力を受け、後方の粒子は後方に押し戻される。この力は後で述べるインダクタンスの効果と逆の方向である。求め方はインダクタンスの場合と同じである。ビームパイプは完全導体で出来ているとして、図5の様な積分路を考える。\$E_w\$は境界条件よりゼロである。インダクタンスの場合との違いは積分路がビームの内部まで入っているのでビームがあるときのビームパイプ内の電磁場をちゃんと求めておく必要があることである。また両サイドの積分も自由空間上で行なわれるのでゼロではない。また、結果がビームの横方向分布による。一般には円筒形で内部では粒子密度が様な分布を考えることが多い。ここでもこのモデルを採用するが、後でパラボラ分布の時の結果も記す。

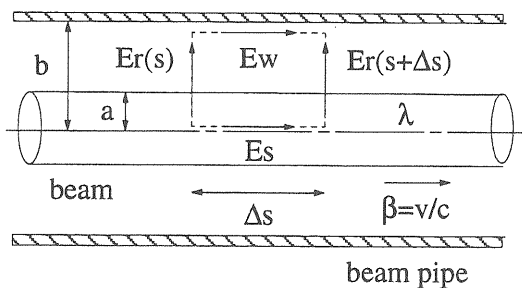


図5： 空間電荷インピーダンス計算のための積分路の取り方。

さて、円筒形ビームの半径を \$a\$ とし、ビームの線密度を \$\lambda\$ とした時に、横方向の電磁場は

$$E_r = \begin{cases} \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (3-26)$$

$$H_\phi = \begin{cases} \frac{e\lambda v}{2\pi} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda v}{2\pi} \frac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (3-27)$$

で与えられる。ここで、\$\epsilon_0\$は真空の誘電率を、\$v = \beta c\$は粒子の速度を表す。インダクタンスの場合と同様に式を展開すると、最終的に空間電荷インピーダンスは次の様に書けるのがわかる(質問：以下の公式を導け)：

$$\frac{Z}{n} = \frac{Z_0 g_0}{2\beta\gamma^2} \quad (3-28)$$

ここで

$$g_0 = 1 + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (3-29)$$

はジオメトリカルファクターであり、ビームの分布関数が違うとこのファクターが変わる。パラボラビームの場合 (\$a\$ は一番端でのビームの半径)、

$$g_0 = 1.5 + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (3-30)$$

になる。ここで、\$\gamma\$はビームのローレンツファクターである。式 (3-28) を見るとインダクタンスとは負号が逆なことに気がつくだろう。また \$\gamma^2\$ファクターのため高エネルギーでは効かなくなることもわかる。このファクターは電場と磁場の寄与が高エネルギーでは打ち消し合うために起こる(電場は押し出そうとし、磁場は押し戻そうとする)。

この章を終える前に、後でビーム不安定性を考える時に役立つ大事な指摘をしておく、 ω が正と負の領域でのインピーダンスの間にはウェイクポテンシャルが実数であるために、次の関係がある：

$$Z_L(-\omega) = Z_L^*(\omega) \quad (3-28)$$

$$Z_T(-\omega) = -Z_T^*(\omega) \quad (3-29)$$

縦方向の場合、インピーダンスに周波数を掛けたり割ったりしたものがビーム不安定性の公式に現れることが多いので、実際には横方向と同じポラリティを持つと考えた方が都合が良い。図6に今までに求めた縦方向のインピーダンスを周波数の関数として概念的に示した。また、第2章の Panofsky-Wenzel theorem の項で披露した、 $m=0$ の縦方向ウェイクポテンシャルと $m=1$ の横方向ウェイクポテンシャルを関係づける便利な式 (2-7) に対応して、両インピーダンスを関係づける次の近似式がよく使われる：

$$Z_T \cong \frac{2c}{b^2} \frac{Z_L}{\omega} \quad (3-30)$$

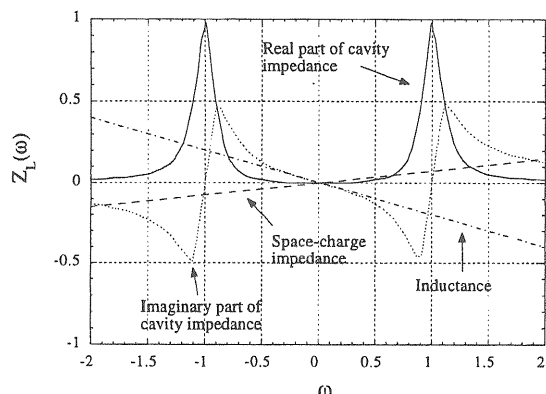


図6：縦方向のインピーダンスの概念図。横方向インピーダンスでは負の周波数部分が上の絵に対して反転している（図14参照）。

4-1. 序

前章で、ビームがどうまわりの環境と相互作用して電磁場（ウェイク）を作るか、またウェイクがどうビームまたはその廻りの粒子に力を及ぼすかを学んだ。この章では今度はビームの運動がそれによってどう変化するかを考えてみよう。陽子リングにおいて問題になるビーム不安定性には主に次の様な種類がある：

1. Microwave instability (縦方向のみ)
2. Negative mass instability (縦方向のみ)
3. Robinson instability (縦、横方向両方)
4. Coupled-bunch instability (縦、横方向両方)
5. Head-tail instability (縦、横方向が結合)

この中で、最初の2つの不安定性は coasting beam と呼ばれる、バンチしていない進行方向に均一なビームにおける解析結果がそのままバンチしたビームの場合に比較的良い精度で使えることが実験的に解っている。Robinson instability[9]はバンチ全体がまるで1つの粒子の様に振る舞うので、バンチを1つの macro particle と見なして解析を定式化することが多い (rigid bunch model)。また複数バンチ間で起こる coupled-bunch instability は Robinson instability の変形であり、解析的には同時に扱える。Head-tail instability[10]はバンチ内部の運動が問題になるので、バンチを複数 (2個以上) の粒子の集合体と見なすか、またはある分布を持った関数として解析する必要がある。インピーダンスの章で覚えた知識が未だフレッシュな内に、それを駆使することになる Robinson instability の説明からこの章を始めよう。

4-2. Robinson instability

Robinson instability[9]は最も基本的なビーム不安定性の一つである。バンチがコヒーレントに全体として縦方向や横方向に振動したとき、その運動がインピーダンスとの相互作用によって不安定に増大する現象を一般にRobinson instabilityと呼ぶ。バンチ内部の運動を考えなくてよいのでバンチを点電荷と見なして以下の様に解析できる。ここではChaoの講義ノートの様にウェイクポテンシャルを導入せずにインピーダンスの定義に従って式を展開する。

バンチが縦方向に振動しながらリングの中を回っているとしよう。バンチの縦方向振動は

$$\tau = \hat{\tau} \exp(-i\Omega \frac{t}{c}) \quad (4-1)$$

の様に変化すると仮定する。この時インピーダンスが局在するリング上のある一点(この点を原点 $s=0$ とする)に於いてビーム電流を観測すると、シグナルは図7の様にある一定の周期のまわりを振動しながら現れる様に見える。これを式で表すと次の様になる：

$$I(t) = Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 - \tau + \tau_k) \quad (4-2)$$

ここで N はバンチ内の電荷の総量、 δ はデルタ関数、 T_0 は周回周期であり、 τ_k は k -th turn でのバンチの到着時間の進みである。

縦方向振動の振幅が小さいとすると、ビーム電流のシグナルは以下の様に近似できる：

$$\begin{aligned} I(t) &= Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0 - \tau + \tau_k) \\ &\equiv Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) - (\tau - \tau_k) \frac{d}{dt} \delta(t - kT_0) \end{aligned} \quad (4-3)$$

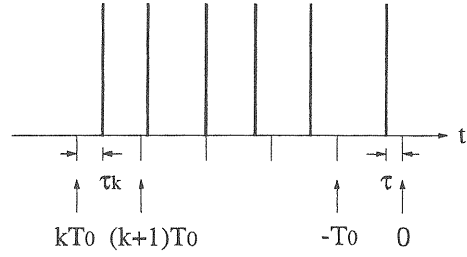


図7：インピーダンスが局在するリング上の観測点(原点)でみたビーム電流シグナル。

ここで第1項はいわゆる beam loading の項でバンチの縦方向振動とは関係なく存在し、バンチのエネルギーロスを表す。この項は加速空洞の位相を変えることで相殺できるので以下無視する。第2項のフーリエ変換は以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} I(\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\tau - \tau_k) \frac{d}{dt} \delta(t - kT_0) \exp(i\omega t) \\ &= i \frac{Ne}{2\pi} \hat{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega [\exp(ikT_0\omega) - \exp(ikT_0(\omega - \Omega))] \\ &= i \frac{Ne}{T_0} \hat{\tau} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega [\delta(\omega - p\omega_0) - \delta(\omega - p\omega_0 - \Omega)] \end{aligned} \quad (4-4)$$

ここで Poisson の和公式

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(x + 2\pi p) \quad (4-5)$$

を第2式から第3式への変換に使った[11]。従って、バンチが感じる電圧のフーリエ変換はインピーダンスの定義より

$$\begin{aligned} V(\omega) &= -i \frac{Ne}{T_0} \hat{\tau} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega Z_L(\omega) [\delta(\omega - p\omega_0) \\ &\quad - \delta(\omega - p\omega_0 - \Omega)] \end{aligned} \quad (4-6)$$

で与えられる。

一方、バンチの運動方程式は以下の式で

書ける。

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{ds} &= -\frac{\eta}{c} \delta \\ \frac{d\delta}{ds} &= \frac{\omega_s^2}{\eta c} \tau\end{aligned}\quad (4-7)$$

ここで δ は理想値 E_0 からのエネルギーの相対的なズレ割る E_0 を表し、 η はスリページファクター、 ω_s はシンクロトロン振動周波数である。この2つの方程式を τ に関する式に一本化し、さらにバンチが感じる電圧の項を加えてやると

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} + \frac{\omega_s^2}{c^2} \tau = -\frac{\eta V(s)}{c^2 T_0 E_0} \quad (4-8)$$

となる。両辺に式 (4-6) をいれ $s=0$ ととると、

$$\left(-\frac{\Omega^2}{c^2} + \frac{\omega_s^2}{c^2}\right) = i \frac{Ne^2 \eta}{c^2 T_0^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [p\omega_0 Z_L(p\omega_0) - (p\omega_0 + \Omega) Z_L(p\omega_0 + \Omega)] \quad (4-9)$$

となる。 $\Omega \approx \omega_s$ と近似すると

$$\Omega - \omega_s \equiv -i \frac{Ne^2 \eta}{2\omega_s T_0^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [p\omega_0 Z_L(p\omega_0) - (p\omega_0 + \omega_s) Z_L(p\omega_0 + \omega_s)] \quad (4-10)$$

縦方向振動の振幅の増加率は $\Omega - \omega_s$ の虚部で与えられる：

$$\begin{aligned}\tau^{-1} &\equiv \frac{Ne^2 \eta}{2\omega_s T_0^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) \operatorname{Re} Z_L(p\omega_0 + \omega_s) \\ &= \frac{I_b \eta}{4\pi Q_s E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (p\omega_0 + \omega_s) \operatorname{Re} Z_L(p\omega_0 + \omega_s)\end{aligned}\quad (4-11)$$

ここで縦方向インピーダンスの実部が $\pm\omega$ に対して対称であることを使った。式 (4-11) において、 $I_b (= Ne/T_0)$ はバンチ電流を、 $Q_s = \omega_s / \omega_0$ はシンクロトロンチューンである。

横方向の Robinson instability も同様に導くことができる。やはりビームは全体が同位相で横方向に振動していると仮定する (rigid bunch model)。原点でのビームシグナルは

$$I(t) = Ne \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \cdot \delta(t - kT_0) \quad (4-12)$$

の様に見える。ここでバンチの横方向振動は

$$y = \hat{y} \exp(-i\Omega \frac{s}{c}) \quad (4-13)$$

の様に変化すると仮定する。量 y_k は k -th turn での横方向振動位置である。このビームシグナルのフーリエ変換を実行すると、結局、

$$I_T(\omega) = \frac{Ne}{T_0} \hat{y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - p\omega_0 - \Omega) \quad (4-14)$$

となる。従って、ビームの作る横方向の電圧は

$$V(\omega) = iZ_T(\omega) \cdot I_T(\omega) \quad (4-15)$$

の定義式より

$$V(\omega) = i \frac{Ne}{T_0} \hat{y} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega) \delta(\omega - p\omega_0 - \Omega) \quad (4-16)$$

なる。この式をバンチの運動方程式

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{\omega_\beta^2}{c^2} y = \frac{V(s)}{cT_0 E_0} \quad (4-17)$$

に挿入し、結果を整理すると次の増大率に関する公式に達する：

$$\begin{aligned}\tau^{-1} &\equiv -\frac{Ne^2 c}{2\omega_\beta T_0^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} Z_T(p\omega_0 + \omega_\beta) \\ &= -\frac{I_b c}{4\pi Q_\beta E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} Z_T(p\omega_0 + \omega_\beta)\end{aligned}\quad (4-18)$$

ここで、 ω_β と $Q_\beta = \omega_\beta / \omega_0$ はそれぞれベータトロン周波数とチューンである。

ここでもう一度インピーダンスの章で記した次のインピーダンスの性質を思い出そう：

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_L(-\omega) &= \operatorname{Re} Z_L(\omega) \\ \operatorname{Re} Z_T(-\omega) &= -\operatorname{Re} Z_T(\omega) \end{aligned} \quad (4-19)$$

式 (4-11) と (4-18) を見ると Robinson instability はインピーダンスが周波数の関数として急激に変化する場合に起こり易いことが解る。例えば、Q 値の大きい RF 空洞内のモードとか低周波部でインピーダンスが $1/\sqrt{\omega}$ で急速に落ちる transverse resistive-wall impedance が Robinson instability の主なソースである。式

(4-11) を RF 空洞内のモードに対して図解したのが図 8 である。ビーム振動の増加率は周波数 $p\omega_0 + \omega_s$ と $p\omega_0 - \omega_s$ でのインピーダンスの差に比例する。周波数 $p\omega_0 - \omega_s$ でのインピーダンスの方が大きければビーム振動は増大する。つぎに、このことの物理的意味合いを考えてみよう。以下では簡単のためにトランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) の場合を想定する。

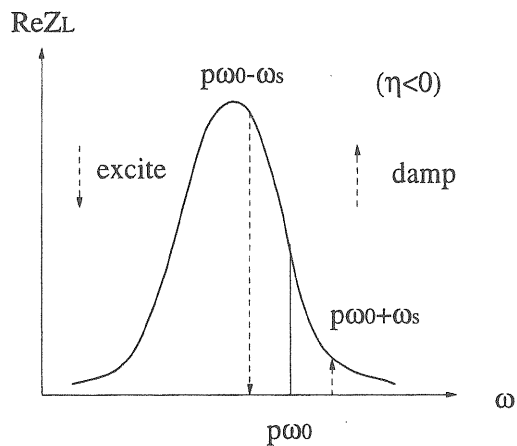


図 8：縦方向 Robinson instability の起こる条件（トランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) で運転している場合を想定）。

観測点におけるビームシグナルはバンチ全体が縦方向に振動しているためにビームの到着する周期が変化する。この変化は式 (4-7) で解るように $\frac{d\tau}{dt} = -\eta\delta$ で変化する。そのため、ビームはシンクロトロン位相空間上で $\delta > 0$ の領域に居るときにリング中を速く廻り、 $\delta < 0$ の領域では遅く廻る (図 9 を参照)。ここで、 δ は ω_s の周波数で振動していることを思い出そう。その結果、シンクロトロン位相空間上でビームは $\delta > 0$ の領域にいる時は高い周波数 ($p\omega_0 + \omega_s$) のインピーダンスを、 $\delta < 0$ の領域にいる時は低い周波数 ($p\omega_0 - \omega_s$) のインピーダンスを感じる。インピーダンスの実部は常に正であるから、ビームは位相空間上で下側 (エネルギーを失う方向に) 力を受ける。これらの力は $\delta > 0$ の領域ではビームの振動を減衰させ、 $\delta < 0$ の領域では逆に増大させる (図 9 を参照)。ビームが位相空間を一周すると、正味にはこれら 2 つの周波数でのインピーダンスの差がビームの受ける運動量変化となり、その向きが振動の安定性を決める。

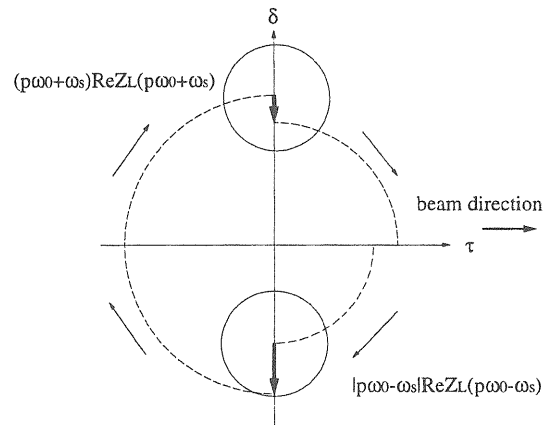


図 9：シンクロトロン位相空間上でビームが受ける力（トランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) で運転している場合を想定）。

なお、インピーダンスの前に $p\omega_0$ のファクターが掛かっている理由であるが、これは $p\omega_0$ で振動しているインピーダンスのソースから見たビーム

振動の振幅は、波長がファクター p だけリングの全周より短いため相対的な振幅幅が大きく見えるためである。式 (4-4) を見ると、周波数が増大するに比例して、ビーム電流のフーリエ変換成分も増大しているのがわかる。

4-3. Coupled-bunch instability

Robinson instability は単バンチの時でも起こりうるが、もしリングの中を多数のバンチが周遊していて、しかもインピーダンスの Q 値が大きい時 (つまり 1 バンチが誘起したウェイクが次のバンチが到着したときにもまだ充分残っている時) には、各バンチの Robinson instability が結合 (同期) してウェイクの build-up が起こり、新しいタイプのビーム不安定性が起こり得る。これを coupled-bunch instability と呼ぶ。しかも、後述する様に coupled-bunch instability の増大率は全バンチの粒子数の総和に比例するので、多バンチオペレーションの時は coupled-bunch instability の方が個々のバンチの Robinson instability よりも深刻になるのが一般的である。

さて、リング内を M 個のバンチが等間隔で回っているとしよう。それぞれのバンチが単独で Robinson instability を起こしている時には、各バンチの振動の位相の間には何の関係もない。しかし、もしそれらが結合した場合、 M 個の独立の振動パターンが考えられる。バンチに優劣はないから、振動振幅は全バンチ同じである。従って、振動パターンは各バンチの振動の位相差によって特徴づけられる事になる。さて、ある瞬間にリング一周にわたってバンチ振動のスナップ写真を撮ったとしよう (図 10 参照)。あるバンチから始めて、それぞれのバンチ振動の位相差を測り、それらを足し上げていくと、もとのバンチに戻ったときは位相差の総和は 2π の整数倍になる筈である。またバンチに優劣はないので、バンチ間振動位相差はどのバンチ間でも等しく

ならなければならない。結局、バンチ間振動位相差は

$$\frac{2\pi}{M} \times \mu \quad \text{ただし} \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4-20)$$

で与えられる。

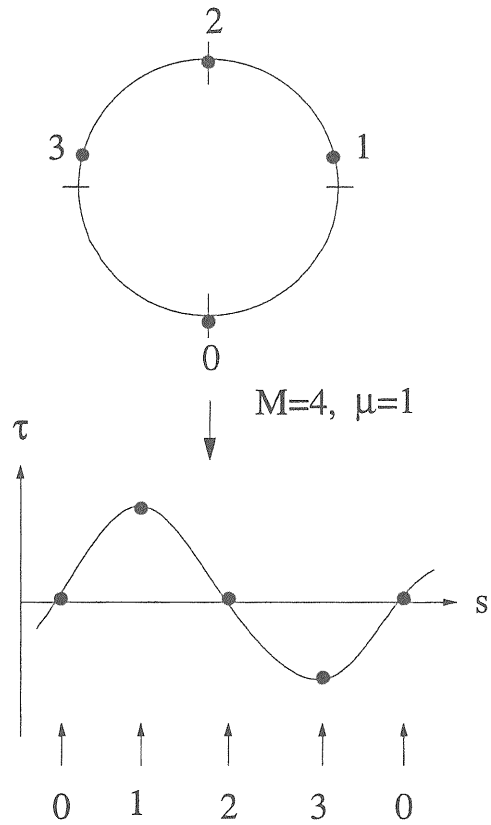


図 10: ある瞬間における各バンチのシンクロトロン振動のスナップ写真 ($M=4$ 、 $\mu=1$)。

多バンチの存在とこのバンチ間振動位相差によって何が変わるのであろうか。それは結局ウェイクの発生源のところで観測されるビーム電流に違いが現れる。まず、バンチが一周してくるのを待たなくても T_0/M 時間後には次のバンチがくるので、周期が短くなったように見える。また、バンチ間振動位相差のため次々に来るバンチの振動の位相を観測すると一周で $2\pi\mu$ だけ位相が速く回るように見える。これらの変化はビーム電流のフーリエ変換を与える式 (4-4) において

T_0 (ω_0)を T_0/M ($M\omega_0$)に置き換え、 Ω を $\Omega + \mu\omega_0$ に変えることで表すことができる。それ以後の式の展開は Robinson instabilityの時の全く同じにでき、最終的に coupled-bunch instabilityの増加率は次の式で与えられる：

$$\begin{aligned}\tau^{-1} &\equiv \frac{MNe^2\eta}{2\omega_s T_0^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} ((Mp + \mu)\omega_0 + \omega_s) \\ &\quad \times \text{Re} Z_L((Mp + \mu)\omega_0 + \omega_s) \\ &= \frac{MI_b\eta}{4\pi Q_s E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} ((Mp + \mu)\omega_0 + \omega_s) \\ &\quad \times \text{Re} Z_L((Mp + \mu)\omega_0 + \omega_s)\end{aligned}\quad (4-21)$$

この式から解る様に増加率はバンチ電流ではなくて全ビーム電流による。ちなみに横方向 coupled-bunch instabilityの増大率の公式は

$$\begin{aligned}\tau^{-1} &\equiv \frac{MNe^2c}{2\omega_\beta T_0^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re} Z_T((Mp + \mu)\omega_0 + \omega_\beta) \\ &= \frac{MI_b c}{4\pi Q_\beta E_0 / e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \text{Re} Z_T((Mp + \mu)\omega_0 + \omega_\beta)\end{aligned}\quad (4-22)$$

で与えられる。

4-4. Head-tail instability

Robinson instabilityの章で横方向の Robinson instabilityを議論した時に、バンチは全体が同位相で振動すると仮定した。しかし、長い陽子バンチにおいて縦方向の全ての部分が同位相で動かなければならない必要はない。例えば図 11 に図解した様に、ある瞬間にバンチの先方は右に振れているが、バンチの後方では 180 度位相がずれて左に振れていることもありうる。この時、後方の粒子は前方の粒子が作った新鮮なウェイクを感じる事ができる。一方、前方の粒子は一周回ってこないバンチの前方と後方の両方が作ったウェイクを感じることはできない (rigid bunch model を使って Robinson

instability を議論した時にはバンチは 1 個の粒子と考えていたので、一周回ってこないバンチ内の粒子は自分が作ったウェイクを感じる事が出来なかった)。このために、たとえウェイクの寿命が短くても (つまり、バンチが一周回って来るころにはすでに減衰している場合でも)、後方の粒子は常にウェイクを感じる事ができる。バンチ内の粒子はシンクロトロン振動をしているから、先方にあった粒子群はやがて後方に移り、逆に後方の粒子は前方に移動する。そのため、バンチ内の全ての粒子が何時かは寿命の短いウェイクの力を受けることになる。

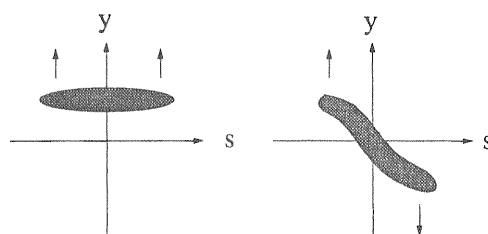


図 11：バンチの前後が同位相と逆位相でベータトロン振動している場合のスナップ写真。

こういったバンチ内の縦方向位置によって位相の違う不安定な横方向振動は、実際に CERN PS を始めとする多くの陽子加速器において観測されていて、これを head-tail instability と呼ぶ。図 12 に CERN PS Booster で観測されたバンチ電流シグナルを示した[12]。

一般に寿命の短いウェイク (或いはブロードバンドなインピーダンス) によって引き起こされる head-tail instability (これを古典的 head-tail instability と呼ぶ) は、後で述べるクロマティシティ (色収差) が小さい時には transverse mode-coupling instability[13]を除いてあまり問題にならない。むしろ、寿命の長いウェイクによる方が大きな増大率を持つことが多い。これは、寿命の短いウェイクの中にバンチの前後で位相が 90° 変わる様な速く波打つ成分が余り無いためである。バンチの後方が受

ける（前方の作った）ウェイクの効果を考慮にいれなければ、解析方法は coupled-bunch instability のそれと殆ど同じである。バンチ内のシンクロトロン振動を表すために、位相空間上の円周上に macro particle を等間隔で置いていくと、観測点で見たビーム電流シグナルは式 (4-2) の様な変調がかかったものになる。ただし、この変調は macro particle の数だけシンクロトロン振動より速く振動している様に見える。結果として式 (4-18) のインピーダンスの引数が $p\omega_0 + \omega_\beta$ から $p\omega_0 + \omega_\beta + l\omega_s$ に代わる。ここで l は想定している macro particle の数である。

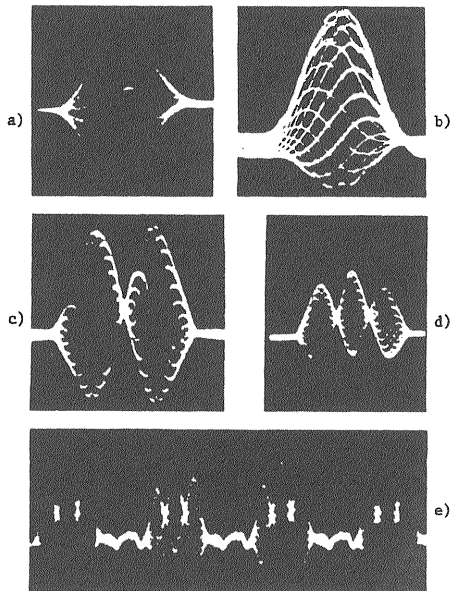


図 12 : CERN PS Booster で観測されたバンチの横方向振動[12]。

さて、高次の head-tail instability が起こり易くなるためにはクロマティシティが重要な役割を果たす。クロマティシティ（色収差）とは、4 極磁石における収束力がエネルギーによって違うことによって作られるベータトロン振動数の幅で、以下の式で定義される：

$$\xi = \frac{d\omega_\beta}{\omega_\beta} / \delta \quad (4-23)$$

つまり、ベータトロン振動数はオフモーメントム粒子に対して以下の様に変化する：

$$\omega_\beta(\delta) = \omega_\beta(1 + \xi\delta) \quad (4-24)$$

シンクロトロン位相空間上でバンチの先頭にいる粒子を考えよう（図 13 参照）。

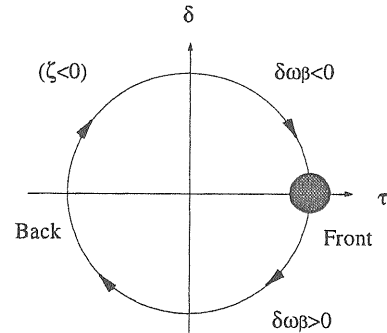


図 13 : シンクロトロン位相空間上でのベータトロン振動数の変化。

クロマティシティは負とすると、この粒子が後方へ移動するにつれてベータトロン振動数は徐々に増加し、バンチの一番後ろで最大になる。その後バンチの先頭に戻るにつれてベータトロン振動数は減少し、先頭でもとの値に戻る。この振動数の変化により、ベータトロン位相は次の様に変化する：

$$\begin{aligned} \phi_\beta(s) &= \int \omega_\beta(\delta) \frac{ds}{c} \\ &= \omega_\beta \left(\frac{s}{c} + \xi \int \delta \frac{ds}{c} \right) \\ &= \omega_\beta \left(\frac{s}{c} - \frac{\xi}{\eta} \tau \right) \end{aligned} \quad (4-25)$$

つまり、位相の変化は粒子のシンクロトロン振動の縦方向位置による。今、トランジション・エネルギー以下 ($\eta < 0$) で加速器は運転されているとし、またクロマティシティは負とすると、バンチの後方ではベータトロン振動の位相がバンチの前方より早い。全ての粒子はシンクロトロ

ン位相空間上で一周すると元の位相に戻るから、位相差は蓄積することはなく、バンチの前後で固定されている。このバンチ内の位相差があると、殆ど位相の変化しないウェイクでも見かけ上、バンチの後方をドライブする 90° 位相の廻った成分が現れる様になる。

さて、クロマティシティがあるとビームの横方向振動シグナルはどう見えるのであろうか。まず、ビーム電流の dipole moment (横方向振動に電流密度を掛けたもの) の振幅が

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m+1)\pi \frac{t}{\tau_L} & m = 0, 2, 4, \dots \\ \sin(m+1)\pi \frac{t}{\tau_L} & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (4-26)$$

で与えられる定在波のパターンをもっていると仮定しよう。ここで τ_L はバンチの全長である。この仮定は図 12 に見られる実際のビーム電流の dipole moment とよく一致している。この時、リング上のある一点で観測されるビームの横方向振動シグナルはビームが通過する時に

$$I_m(t) \propto p_m(t) \exp(i\omega_\xi t + i2\pi k Q_\beta)$$

の様に変化する。ここで

$$\omega_\xi = \frac{\xi}{\eta} \omega_\beta \quad (4-27)$$

である。図 14 にいろいろなクロマティシティに対してビームの横方向振動シグナルがどう見えるかを図式的に示した[12]。この図において

$$\chi = \omega_\xi \tau_L = \frac{\xi}{\eta} \omega_\beta \tau_L \quad (4-28)$$

はバンチ前後での最大ベータトロン振動位相差を表す (式 (4-25) を見よ)。また、モード番号 m はシンクロトロン振動の高次の次数であるが、上記の説明及び観測の観点からいうとビーム

内の個々の位置での横方向振動の位相差からできる縦方向のノードの数を表す。例えば、rigid bunch の場合は $m = 0$ 、上記の例の様にバンチの前後で位相が反転している場合は $m = 1$ である。

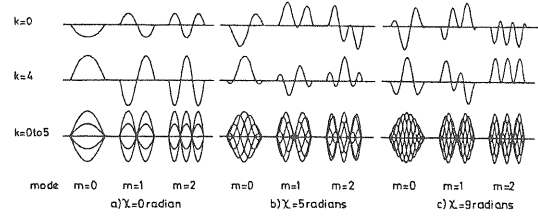


図 14 : ビームの横方向振動シグナルの時間変化 [12]。

バンチ内部の運動とクロマティシティの効果を正しく考慮した解析は少し複雑なので、ここでは単にビーム不安定性によって起こる複素周波数変化 (この虚部が増大率を与える) だけを記す[10]:

$$\Delta\omega = -i \frac{1}{1+m} \frac{1}{4\pi Q_\beta} \frac{I_b c}{E_c l e} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_T(\omega_p') F_m'(\omega_p' - \omega_\xi) \quad (4-29)$$

ここで

$$\omega_p' = p\omega_0 + \omega_\beta + m\omega_s \quad (4-30)$$

である。図 15 に関数 $F_m'(\omega)$ を $\chi = \omega\tau_L$ の関数としてプロットした[12]。図 15 からわかる様に、関数 $F_m'(\omega)$ は高次のモード程高い周波数でピークを持つが、ピークでの値はほぼ一定で ($m = 0$ は除いて)、0.5 ぐらいである。従って、式 (4-29) から高次のモードは $1+m$ のファクターの分だけ抑えられることになる。関数 $F_m'(\omega)$ はクロマティシティの分だけ左右にずれるが、トランジション以下 ($\eta < 0$) では、クロマティシティは補正をしない場合、負であることが一般的なので関数 $F_m'(\omega)$ は正の周波数の方へずれる。

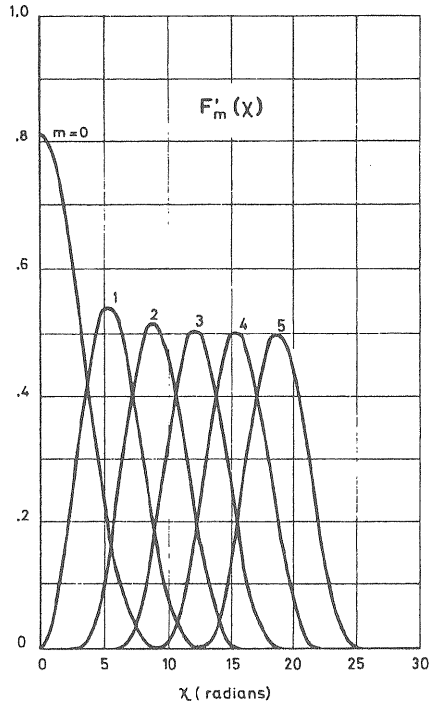


図 15 : バンチスペクトラム $F'_m(\omega)$ 。

この時、図 16 に示されている様に正の周波数領域でのインピーダンスの寄与が大きくなるので $m=0$ のビームの振動は安定化する。しかし、逆に高次のモードが不安定に成りやすくなる。図 16 ではモード 1 が transverse resistive-wall impedance によって不安定になる。

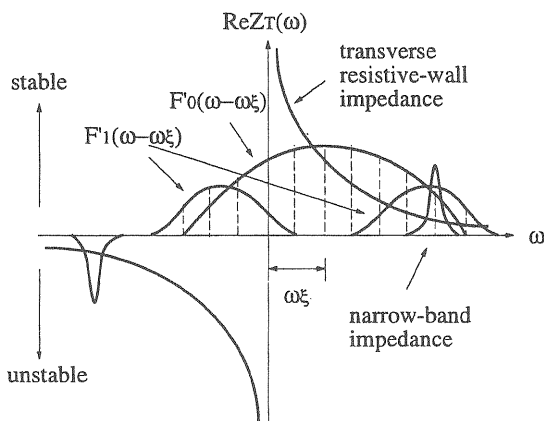


図 16 : Head-tail instabilityにおけるクロマティシティの効果の例。モード 0 は安定化されるがモード 1 は逆に不安定になる。

ここでバンチスペクトラム $F'_m(\omega)$ の物理的意味合いを少し考えて見よう。関数 $F'_m(\omega)$ のピークでの値は、仮定したバンチの分布関数に依存するのでそう神経質になる必要はない。ファクター $m+1$ を含めて一般に高次モードほど励起され憎いと理解すればよいだろう。問題はそれぞれのピークの位置である。まず、 $m=0$ の場合を考える。このモードではバンチの前後が同位相で振動している。従って、バンチの前部が励起したウェイクが殆ど振動しないで後部のバンチに横方向キックを与えた時にバンチの振動とウェイクの振動が同期してこのモードが励起され易くなる。従って、このモードのスペクトラムは低周波にピークを持っている。次に、 $m=1$ の場合を考察しよう。前にも述べた様に、このモードではバンチの前後が逆位相で振動している。さて、図 15 では $m=1$ モードのスペクトラムは $\chi = \omega\tau_L = 2\pi$ にピークを持っている。バンチの先端が励起したウェイクが $\omega = 2\pi/\tau_L$ の周波数で振動しているとすると、バンチの前後が端から端まで τ_L だけ離れているから、その位相はバンチの後部端が到達するまでに $\tau_L/\lambda = \tau_L/(2\pi\tau_L/2\pi) = 1$ 波長だけ位相が進んでいることになる。この内、バンチ内で逆位相で振動している部分間の位相の進みだけを見ると(図 14 参照)、ちょうど半波長になる。つまり、ウェイクは逆位相になる。一方、ビームがバンチ長だけ前方に移動する間の横方向振動の位相の変化は無視できる程小さいので、このウェイクの反転振動はビームの逆位相振動と同期してその振幅を増大させ易い。これが $m=1$ モードのスペクトラムのピークが $\chi = 2\pi$ に在る理由である。高次のモードに対しても全く同様に説明していくことができる。

次にクロマティシティがあるとスペクトラムが $\omega_\beta \frac{\xi}{\eta}$ だけ左右にシフトする物理的理由を考えて見よ。先程説明した様に、バンチの方では $\omega_\beta \frac{\xi}{\eta} \tau_L$ だけベータトロン振動の位相がバン

チの前方より早い。この位相差を補ってバンチ内振動とウェイクの振動とが同期するためにはウェイクがクロマティシティがゼロの時に比べて周波数で $\omega_\beta \frac{\xi}{\eta}$ だけ（バンチの全長 τ_L の通過で位相は $\omega_\beta \frac{\xi}{\eta} \tau_L$ 進む）速く振動すればよい。例えば、 $m=0$ モードの場合、振動しないウェイクではなく $\omega_\beta \frac{\xi}{\eta}$ で振動するウェイクと同期して励起され易くなる。これを数式化すると各モードのスペクトラムが $\omega_\beta \frac{\xi}{\eta}$ だけ右にシフトする。

4-5. Negative mass instability と Microwave instability

これら2つのビーム不安定性は縦方向にのみ起こり、解析的には coasting beam 近似の範囲内で同様に扱うことができる。ただし、それらを起こしているインピーダンスの周波数帯が違い、negative mass instability ではバンチ長程度の波長（～MHz）でのインピーダンスが主に寄与しているのに対し、microwave instability はビームパイプ程度の波長（～GHz）領域のインピーダンスが関与していると思われる。まず、negative mass instability の定性的説明から始めよう。

4-5-1. Negative mass instability

簡単のために、トランジションエネルギー以下で加速器が運転されているとしよう。この状態は真つ当な世界であり、加速（減速）された粒子はバンチの前方（後方）へ移動していく。さて、このビーム不安定性を起こすのは、インダクタンスで代表されるインピーダンスの虚部である。仮に、加速器リング中にインダクタンスインピーダンスを作る構造体があるとしよう。ビームがこの構造体を通過するとき力を受ける。電気回路の類推から解る様にこの時電圧は

$$V(\omega) = i\omega L \cdot I(\omega) \quad (4-31)$$

或いは

$$V(\tau) = -L \frac{dI}{d\tau} \quad (4-32)$$

で与えられる。ここで I はビームの縦方向電流密度、 τ はバンチ内部の縦方向の座標であり、 L はインダクタンスである。式 (4-32) はビームの前方では減速力を受け、後方では加速力をうけることを表している。その結果、ビームは中心付近に集まってくる。すると $\frac{dI}{d\tau}$ は更に増加するので、ビームが同じ構造体に戻って来た時に一層強い求心力を受けることになる（図17を見よ）。この悪循環は結局、バンチが破壊されるまで続く。この現象を negative mass instability [14] と呼ぶ。トランジションエネルギー以上ではインダクタンスが負の時（加速器では一般にキャパシタンスと呼ぶ）にこの不安定性が起こりうる。そうしたインピーダンスとして後に述べる空間電荷インピーダンスがある。

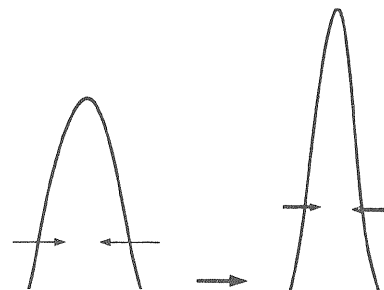


図17：インダクタンスによる negative mass instability。バンチは求心力を受け、縮む。

4-5-2. Microwave instability

この現象は電子ビームでも良く観測されているが、最初は CERN の PS や ISR リングでビームのデバンチングの際に観測された [15]。ビーム電流シグナルをスペクトラルアナライザ

一でみると、高周波成分（数 100MHz～数 GHz）が広い範囲に渡って強くエキサイトされているのが観測されたためにこの名が付いた[16]。Microwave instability が起こるとバンチ長が延びたり、ビームのエネルギー幅が増大したりする。この現象にはビーム電流に敷居値があり、ビーム電流がある一定以上にならないと microwave instability は起きない。観測の例として図 18 に CERN ISR でのバンチ長とエネルギー幅の測定結果を示した[15]。

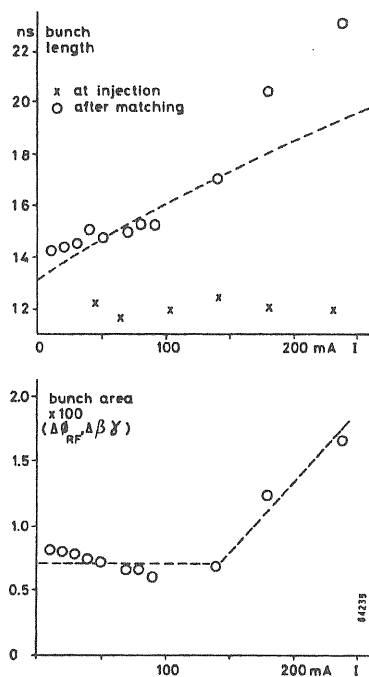


図 18 : CERN ISR で観測された microwave instability によるバンチ長とエネルギー幅の増大。約 130mA あたりにビーム電流の敷居値がある。

4-6. Keil-Schnell-Boussard criterion

以上の 2 つのビーム不安定性を定量的に扱うためにブラソフ理論を展開しよう[17]。その結果は最終的に Keil-Schnell-Boussard criterion[18]と呼ばれるビーム安定化のためのインピーダンスに対する条件式にまとめられる。話を簡単にするために、ここではビームはバンチ

しておらず、リング上に均一に分布していると考えられる。しかしビームは有限幅のエネルギー分布を持っていて、それがランダウ減衰を引き起こす。

4-6-1. ブラソフ方程式

さて、ビームの位相空間上での分布関数を f とすると、個々の粒子の運動がハミルトニアンで記述できるときに、その時間に関する全微分はゼロになる（リウビルの定理）：

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad (4-33)$$

この式は位相空間上で運動している粒子の近傍の密度は粒子と一緒に動いている系からみると時間的に不変であることを述べている。ここで f は 1 体分布関数とし（1 粒子の運動方程式で表せる）、さらに式 (4-33) を各変数の偏微分に書き直して粒子の運動方程式を入れれば、ブラソフ方程式になる。それでは、その変数に何をとりかを考えよう。Coasting beam ではバンチの内部座標といった物はないので独立変数の取り方がバンチしたビームと異なり、時間 t をそのまま独立変数に取る。つまり、リング内ではビーム不安定性が一樣に起こっているとする（ s を独立変数としたときはリングのスナップショットを撮った時にリングの下流にいくにつれてビーム振動の振幅は増大していることになる）。縦方向の正準変数としては以下の 2 つの量を定義する：

$$\theta = \frac{s}{R} \quad (4-34)$$

$$w = 2\pi \int_{E_c}^E \frac{dE}{\omega} \quad (4-35)$$

ここで R はリングの平均半径、 E は粒子のエネルギー（ E_c は平均エネルギー）、 ω は粒子の回転周期である。 θ は粒子のリング上での位置を角度で

表したものである。

ところで、量 w は取扱い憎い変数である。そこで ω のエネルギー依存性が小さいことを使って、 w の替りに

$$\varepsilon = E - E_c \quad (4-36)$$

を変数として使うことにする。ブラソフ方程式をこれらの変数を使って書くと、

$$\frac{\partial f(\varepsilon, \theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(\varepsilon, \theta, t)}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial f(\varepsilon, \theta, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = 0 \quad (4-37)$$

となる。

4-6-2. 分散関係式

粒子の分布関数に対して摂動理論が適用できるとすると、分布関数は次の様に分解できる：

$$f = f_0 + f_1 \quad (4-38)$$

ここで f_0 は非摂動項で時間的にも空間的にも不変だとし（エネルギー分布は持っている）、摂動項の f_1 だけが変化していくと考える。摂動項 f_1 は f_0 よりずっと小さいと仮定する。摂動項 f_1 の θ 依存性をリング一周に渡って測ると、測り始めた元の場所に戻ると f_1 の値は元に戻るの、 f_1 は θ に関してフーリエ展開できることが解る：

$$f_1(\varepsilon, \theta, t) = \sum_{n \neq 0} h_n(\varepsilon, t) e^{in\theta} \quad (4-39)$$

粒子のエネルギー変化はインピーダンスと f_1 を使って以下の式で与えられる：

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= -\frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} \sum_{n \neq 0} Z_n \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\varepsilon, t) e^{in\theta} d\varepsilon \\ &= -e\omega_0 \sum_{n \neq 0} Z_n \phi_n(t) e^{in\theta} \end{aligned} \quad (4-40)$$

ここで

$$\phi_n(t) = \frac{e\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\varepsilon, t) d\varepsilon \quad (4-41)$$

は電流線密度の n -th 成分であり、 Z_n は周波数 $n\omega_0$ でのインピーダンスである。エネルギー変化 $\dot{\varepsilon}$ は摂動項に比例するので、ブラソフ方程式に式 (4-40) を入れた後に摂動項に関して線形化すると

$$\frac{\partial f_1(\varepsilon, \theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial f_1(\varepsilon, \theta, t)}{\partial \theta} \omega + \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = 0 \quad (4-42)$$

となる。この線形化されたブラソフ方程式に式 (4-39) と (4-40) をいれて、 f_1 や $\phi_n(t)$ の時間依存性として

$$f_1 \propto \phi_n \propto \exp(-i\Omega t) \quad (4-43)$$

を仮定すると線形化されたブラソフ方程式は次の様に変形できる：

$$h_n(\varepsilon) = i \frac{e\omega_0 Z_n \phi_n \frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}}{\Omega - n\omega} \quad (4-44)$$

ここで粒子の回転周期のエネルギー依存性は以下で与えられる：

$$\omega = \omega_0 + k_0 \varepsilon \quad (4-45)$$

ここで

$$k_0 = -\eta \frac{\omega_0}{\beta^2 E_c} \quad (4-46)$$

である。式 (4-44) の両辺を ε で積分すると、式 (4-41) から

$$\phi_n \left[1 - \frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} i Z_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon}{\Omega - n(\omega_0 + k_0 \varepsilon)} \right] = 0 \quad (4-47)$$

量 ϕ_n が有限の解を持つためにはブラケットの中がゼロでなくてはならない：

$$1 - \frac{(e\omega_0)^2}{2\pi} iZ_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{df_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon}{\Omega - n(\omega_0 + k_0\varepsilon)} = 0 \quad (4-48)$$

これが所謂、分散関係式である。

4-6-3. Stability diagram と Keil-Schnell-Boussard criterion

さて分散関係式は f_0 のエネルギー分布関数と積分路の取り方を指定すれば解ける。この積分路の取り方が有名なランダウの積分路 [19] であり、ここではその導き方を詳しく述べないが、一口でいうならば ε の複素空間で積分路は常に Ω が作るポールの下側を走らなければならないと言うものである。 Ω の虚部がゼロの時にポールは ε の実軸上にあるが、 ε の積分路はこのポールを迂回するように下側に小さな半円を作って回る。この時、分散関係式を満たすインピーダンス Z_n が所謂、安定限界値 (stability limit) を与える。例に分散関係式を解いて見よう。本来ならば、まずリングのインピーダンス Z_n がまず計算されていて、その Z_n に対する固有解 Ω を求めるべきだろうが、通常は逆に Ω を与えて分散関係式中の積分を実行し、その逆数から Z_n を求めて、それを stability diagram と呼ばれるマップを作るのが一般的である。必要ならそのマップから Z_n に対応する固有解 Ω を読み取ればよい。

分散関係式を任意のエネルギー分布関数に適用するために規格化しよう。まずエネルギーエラー ε を規格化して $x = \varepsilon / \Delta E$ を導入する。ここで ΔE はエネルギーの半値全幅である。回転周期の半値全幅は

$$S = \Delta E \cdot k_0 \quad (4-49)$$

であり、分散関係式のポールは

$$x_1 = \frac{\Omega - n\omega_0}{nS} \quad (4-50)$$

で与えられる。規格化されたエネルギー分布関数はこの x を使って以下の様に書ける：

$$g_0(x) = \frac{\pi \Delta E}{N} f_0(\varepsilon) \quad (4-51)$$

ここで N は coasting beam 中の全粒子数である。こうして定義された $g_0(x)$ は以下の様に規格化されている：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) dx = 1 \quad (4-52)$$

分散関係式はこうした規格化変数や関数を使って次の様に書き換えることができる：

$$1 = -\text{sgn}(\eta) \cdot (U - iV) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{dg_0(x)}{dx} dx}{x - x_1} \quad (4-53)$$

ここで規格化されたインピーダンス U と V を以下の様に導入した：

$$U - iV = \frac{-2I_0\beta^2}{\pi \left(\frac{\Delta E}{E_c}\right)^2 |\eta| E_c / e} i \frac{Z_n}{n} \quad (4-54)$$

ここで $I_0 = Ne\omega_0 / (2\pi)$ は平均ビーム電流である。

エネルギーの分布関数の例として以下の関数を考えよう：

$$g_0(x) = \frac{8a}{3\pi} (1 - a^2 x^2)^{3/2} \quad (4-55)$$

ただし、 $|x| < 1/a$ であり、 $a^2 = 5/6$ である。トランジション以下での規格化された分散関係式の解を、 (U, V) 複素平面上に $(\text{Re } x_1, \text{Im } x_1)$ からのマ

ッピングとしてプロットしたのが図 19 であり、これを stability diagram と呼ぶ。

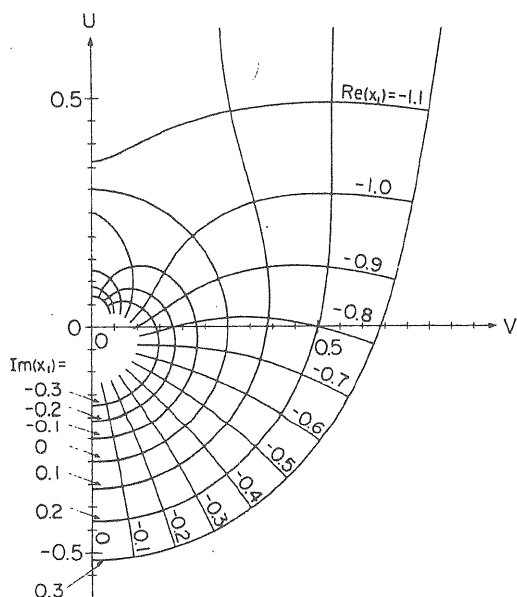


図 19： 式 (4-55) で与えられる分布関数に対する stability diagram (トランジションエネルギー以下) [17]。

前にも述べた様に、 $\text{Im } x_1 = 0$ の曲線が stability limit を与え、これより原点寄りに規格化されたインピーダンスが在る時はビームの振動は安定である。つまり、

$$|U - iV| = \left| \frac{-2I_0\beta^2}{\pi \left(\frac{\Delta E}{E_c}\right)^2} \frac{Z_n}{n} \right| \leq 0.3 \quad (4-56)$$

がビームが安定であるための条件である。これを書き換えると

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| \leq F \cdot \frac{|\eta| E_c / e}{I_0 \beta^2} \left(\frac{\Delta E}{E_c} \right)^2 \quad (4-57)$$

となる。ここでフォームファクター F はこの例の場合は約 0.5 であるが、仮定した分布関数に依る

パラメーターであり、さまざまな分布関数に対する値を比べてみると、一般には約 1 ぐらいの値になる。条件式 (4-57) は Keil-Schnell-Boussard criterion と呼ばれている。ここで ΔE がエネルギー分布の半値全幅であることを再度確認しておこう。

4-6-4. バンチしたビームに対する Keil-Schnell-Boussard criterion

さて、こうして求められた公式はあくまで coasting beam に対してであり、バンチしたビームに対してはもっと精密な理論が必要である。しかし実際には多くの陽子リングでは Keil-Schnell-Boussard criterion は実験値と良く一致していることが知られている。なるほど、いま問題にしているビーム不安定性の振動の波長がバンチ長よりずっと短かったり、振動の増大時間がシンクロトン振動数よりずっと速ければ、ビーム不安定性から見て、バンチしたビームは限りなく coasting beam に近く見えるはずである。そこで、Keil-Schnell-Boussard criterion を陽子バンチに適用するとき I_0 や $\frac{\Delta E}{E_c}$ としてバンチ内の局所的な値を使うことにする：

$$\left| \frac{Z_n}{n} \right| \leq F \cdot \frac{|\eta| E_c / e}{\beta^2} \left[\frac{1}{I} \left(\frac{\Delta E}{E_c} \right)^2 \right]_{local} \quad (4-58)$$

ここで次の様な疑問が湧くかもしれない。バンチ内でのエネルギー分布幅や電流値は縦方向の位置によるが、いったいどの位置での値を使ったらよいのであろうか。実は粒子の空間分布関数がパラボラの際は局所的電流値 I と局所的エネルギー幅 $\left(\frac{\Delta E}{E_c} \right)^2$ の変化はお互いに相殺しあい、

Keil-Schnell-Boussard criterion はバンチ内の位置によらなくなる。このパラボラ分布は陽子バンチの空間分布関数をモデル化するとき最

も良く使われる分布関数で、実験的にも陽子バンチの分布はパラボラ分布に近いことが確認されている。従って、陽子バンチの中心での値を使えばだいたいよいことになる。

第5章 JHPにおける加速器設計作業

第4章までにビーム不安定性とインピーダンスの問題を考えるに当たって必要な知識を学んだ。この章ではそれらの知識をどうやって実際の加速器設計作業に適用するかをJHPの50GeVリングを例にとって体験していこう。表1に50GeVリングの主なパラメータをまとめた[20]。

エネルギー、 E_0 (GeV)	3.0 → 50.0
全周長 (m)	1442
ハーモニック数、 h	17
バンチ内粒子数、 N	1.25×10^{13}
平均電流、 $\langle I \rangle$ (μA)	9.6
トランジションエネルギー、 γ_t	271
垂直方向ベータトロン振動数、 Q_y	20.7
垂直方向クロマティシティ、 ζQ_y	-34

表1 : JHP 50GeV リングの主なパラメータ。

5-1. 問題となりそうなビーム不安定性の洗いだし

陽子シンクロトロンにおいて問題になりそうなビーム不安定性でまず考えられるのが microwave instability と negative mass instability であろう。これらはバンチ内部で起こる効果なのでフィードバック等によって抑えることができない。そのため設計の段階でこれらが起こらないようにパラメータを慎重に選んでやる必要がある。これらは単バンチでも起こる効果であるが、多バンチ運転であるためにや

はり coupled-bunch instability が深刻であろう。基礎編でも述べた様にこの不安定性はQ値の高いインピーダンスによって引き起こされるが、加速器のコンポーネントがまだ設計されていない現状では、coupled-bunch instability の増加率の評価ではなく、むしろ不安定性の増加率がコントロールできる範囲に収まる様なインピーダンスの大きさの上限を決める。そういった高いQ値を持つインピーダンスの中で殆ど唯一すぐに評価できるインピーダンスに transverse resistive-wall impedance があり、これは第3章で示した公式を使えば計算できる。この計算はビームパイプの材質を選択する上で重要である。もし、JHP でインコネル（抵抗値の大きい合金）を使用することになれば、transverse resistive-wall impedance が横方向インピーダンスの大半をしめることになる。まず microwave instability と negative mass instability がどの程度深刻か評価してみよう。

5-2. Microwave instability と negative mass instability

この2つのビーム不安定性を起こす主なインピーダンスのソースは空間電荷インピーダンスとインダクタンスである。ともにインピーダンスの虚部を与える。基礎編第3章で示した様に空間電荷インピーダンスはエネルギーの2乗の逆数に比例して小さくなるので、3GeVでの入射時に最もその効果は大きくなる。一方インダクタンスはエネルギーに依存しない。

Microwave instability と negative mass instability を起こすインピーダンスの敷居値は Keil-Schnell-Boussard criterion を計算すればわかる。3GeV リングから来るビームの縦方向エミッタンスを $1\text{eV}\cdot\text{s}$ としたとき、3GeVでのエネルギー半値全幅は約0.25%で、50GeVまでランプされた後には0.084%まで減少する。それにもましてスリページファクターが3GeV

から 5GeV の間に 60 倍近く下がる。このため高エネルギーに行く程敷居値は低くなる。まず、3GeV における microwave instability と negative mass instability を調べて見よう。このエネルギーでは空間電荷インピーダンスが優勢である（インダクタンスは数 Ω ぐらいだと仮定）。その精確な値を実際のリングでのビームサイズの変化からジオメトリカルファクター “ $g_0 = 1 + 2 \ln \frac{b}{a}$ ” を計算し、その平均値（約 2.4）を式 (3-25) に挿入して求めたところ約 44 Ω であった。一方、Keil-Schnell-Boussard criterion から計算されたインピーダンスの敷居値は 20 Ω である。つまり、空間電荷インピーダンスが敷居値を約 2.5 上回っている。今トランジション以下で運転していると仮定しているので、この結果は入射時に microwave instability が起こり、バンチ長やエネルギー幅の増加が起ることを示している。これらを防ぐためには入射する前に（つまり 3GeV リングと 50GeV リングの間の輸送路で）縦方向エミッタンスを 2.5eV \cdot s 程度に増大させてやらなければならない。次に 50GeV でのビーム不安定性を考えてみよう。このエネルギーでは空間電荷インピーダンスは約 0.2 Ω と無視できる程小さくなるので、インダクタンスの効果だけを考慮すればよい。入射時に増大されたエミッタンスを使って 50GeV でのインピーダンスの敷居値を計算すると約 2.5 Ω になる。もし、インダクタンスがこの値より大きいと、50GeV で microwave instability と negative mass instability の両方が起ることになる。従って、さまざまな beamline components の設計の段階で、インダクタンスを 2.5 Ω 以下に抑えることが必要である。最近の陽子リングではこれは難しい要求ではない（因みに昔作られた CERN の SPS リングでは $Z_L/n = 20\Omega$ であった）。基礎編第 3 章でのインダクタンスの式 (3-17) を使うとインダクタンスが 2.5 Ω になるためには半径 4.5cm のビームパイ

プに幅 3cm、深さ 1cm の空洞的構造体が全部で 1,500 個（つまり 1 個/m）必要である。普通に設計すれば、ビームパイプの中はこんなにデコボコにはならない。

5-3. Transverse resistive-wall impedance

第 3 章で導いた transverse resistive-wall impedance の公式を使ってまず JHP におけるこのインピーダンスの大きさを計算しよう。スキンドープスは $1/\sqrt{\omega}$ に比例して周波数が小さくなるほど大きくなるので、transverse resistive-wall impedance が最も大きく Robinson instability 等のビーム不安定性に寄与するのは周波数 $\omega = (-1 + \Delta Q_\beta)\omega_0$ においてである。ここで ΔQ_β はベータatron 振動周波数の小数点以下の部分を表す。仮に $\Delta Q_\beta = 0.5$ とすると $\omega \approx 2\pi \times 100\text{kHz}$ での transverse resistive-wall impedance を計算すればよい。ビームパイプがインコネルでできているとしよう（体積抵抗率 $\rho = 130\mu\Omega\cdot\text{cm}$ ）。周波数 100kHz でのスキンドープスは約 2mm になる。リング一周のインピーダンスは約 2M Ω/m となる。

さて、以上の結果から JHP に入射時における transverse resistive-wall instability の大きさを計算してみよう。表 1 からこの時の非補正クロマティシティによる関数 $F_m(\omega)$ の正の周波数の方へのずれが大変大きく、殆どの低次のモードは安定化されるので、結果的にモード 20 あたりで不安定性の増大率が最大になることが別の計算でわかっている。これらの結果を式 (4-22) に入れた後に複素周波数のズレの虚部だけとると、増大率は

$$\tau^{-1} \approx 100s^{-1} \quad (5-2)$$

と求まる。この値が許容できるかはこの講義では触れなかった別の議論が必要になるので、ここで話を終えよう。

参考文献

- [1] 鈴木敏郎 (OHO86) , 久保浄 (OHO91) , 赤井和憲 (OHO94) .
- [2] A. W. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993).
- [3] Y. H. Chin, "User's Guide for ABCI Verion 8.8", LBL-35258 (1994).
- [4] T. Weiland, *Particle Accelerators* 15, 245 (1984).
- [5] W. K. H. Panofsky and W. A. Wenzel, *Rev. Sci. Instrum.* 27, 967 (1956).
- [6] Perry B. Wilson, *AIP Proc.* 87, *Phys. High Energy Accelerators* (Fermilab, 1981), p. 450.
- [7] V. K. Neil and A. M. Sessler, *Rev. Sci. Instrum.* 36, 429 (1965).
- [8] A. Hofmann, "Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings", CERN 77-13 (1977), p.139.
- [9] K. W. Robinson, SLAC-49 (1965) p. 32.
- [10] F. Sacherer, "Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings", CERN 77-13 (1977), p.198.
- [11] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathmatical Functions* (Dover, New York, 1965).
- [12] J. Gareyte and F. Sacherer, in *Proc. of 9th Int. Conf. on High Energy Accelerators* (Stanford, 1974), p. 341.
- [13] Y. H. Chin, CERN /SPS/85-2 (1985).
- [14] C. E. Nielsen, A. M. Sessler and K. R. Symon, in *Proc. of 1959 CERN Accelerator Conf.* (CERN, 1959), p.239.
- [15] S. Hansen, H. G. Hereward, A. Hofmann, K. Huebner and S. Myers, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* NS-22, 1381 (1975).
- [16] D. Boussard, CERN/Lab II/RF/Int/75-2 (1975).
- [17] Y. H. Chin and K. Yokoya, *Phys. Rev. D*, 28, 2141 (1983).
- [18] K. Keil and W. Schnell, CERN-ISR-TH-RF/69-48 (1969).
- [19] L. D. Landau, *J. Phys. (Moscow)* 10, 25 (1946).
- [20] 大強度陽子シンクロトロンワークショップ (東京大学原子核研究所, 1996), JHP-Supplement-19.