Chapter 1

はじめに

この講義録の題名を当初予定していた「ビーム力学入門」から現題名の「ビーム物理学入門」へと変更した主たる理由は、扱うビームの範囲を加速器の中を進行する粒子ビームだけでなくシンクロトロン放射光に代表される光ビームにまで広げたかったからである。これらをビームという名の下に統一的に把握し取り扱うことが一般に行われるようになることを期待している。そしてこれが関連する研究分野の今後の発展に必要な事と考えている。

粒子ビームと光ビームの統一的アプローチをするという特定の狙いを込めて用意するものであるが、この講義録の中で加速器科学や放射光科学の分野で歴史的に発展してきた概念、専門用語、計算手法などへの入門をないがしろにするつもりはない。実務の場できちんと役立つ学問体系の構築が、ビーム物理学の最大の目的でもある。未来加速器や、自由電子レーザーなど先端的開発研究の場に、信頼できる学問的基礎の在ることが必要であると共に、既存の加速器ビームや日常的なシンクロトロン放射光の研究現場に於いても、基礎的かつ統一的視点から検討を加えることで得る所も大きいと考える。

以下にこの講義録の構成とその狙い目に関して簡単な紹介をする。

Chapter 2　ビームの概念

此処ではまず、ビームの概念的紹介をする。

2.1　ビームと位相空間

粒子ビームと光ビームを統一的に把握するための最大の拠り所は位相空間であり、始めにその概念を把握する。そして、その運動を記述する転送行列について学ぶ。また位相空間楕円の加速器一般に行われているパラメター化についても触れる。

2.2　転送行列による光ビーム追跡と限界

位相空間と、その運動を記述する転送行列を用いて光ビームの取り扱いの実例を経験する。同時に、光ビームの波動性という特徴のために粒子ビームと全く同じように取り扱うことはできない事も知る。

Chapter 3　荷電粒子の運動

この章では荷電粒子ビームを念頭に置く。加速器ビームの取扱方法について学ぶことになる。此処では、シンクロトロン放射によるビーム運動への影響は未だ考えない。

3.1　運動方程式

加速器ビームの表示に用いられる座標系を導入する。Frenet-Serretの公式とLorentz力から荷電粒子の運動方程式を、解析的および数値的取り扱い両者の基礎となるよう厳密な形で求める。

3.2　加速器構成要素

一般に最も良く使われる加速器構成要素における運動方程式を厳密な形で書き下す。その後、線形近似を適用し、運動を転送行列として表現する方法を学ぶ。

3.3　周回運動　I　ベータトロン振動

円形加速器を念頭に置いた周期条件を導入して、粒子ビームの進行方向に垂直な面内における運動（ベータトロン振動）を調べる。ビーム運動の安定条件を学ぶ。周期条件における転送行列（周回行列）の要素と、擬調和振動運動方程式の解との関係が説明され、Twissパラメターが定義される。

3.4　周回運動　II　シンクロトロン振動

ここでは円形加速器における粒子ビームの進行方向の運動（シンクロトロン振動）を学ぶ。運動量偏差を持つ粒子運動を解析し、時間偏差とそれに伴う加速エネルギーの違いから生じる影響を転送行列を使って解析する。一定条件下で成立する「分離されたシンクロトロン振動」から、安定

位相、振動数そしてTwissパラメターを、ベータトロン振動における取扱と同じ方法で導出する。

Chapter 4　シンクロトロン放射の特性

此処ではシンクロトロン放射光の特性について、光を使う側の立場から学ぶ。

4.1　シンクロトロン放射計算の基礎

Maxwellの方程式から出発して、運動荷電粒子から生じる電磁場の発光体時間表示および観測者時間表示（いわゆるFeynmann表現）を導く。これらが後の解析的および数値的電磁場計算の基礎となる。

さらに遠距離場近似に基づく解析的電磁場計算方法を展開し、シンクロトロン放射光取り扱いの一般論を学ぶ。

4.2　偏向磁石のシンクロトロン放射

解析的方法により、偏向磁石を通過する荷電粒子から生じるシンクロトロン放射光について調べる。角度発散、偏光特性、角密度光束スペクトルなどの放射特性を知る。

4.3　アンジュレータのシンクロトロン放射

アンジュレータから出る放射は、偏向磁石とは基本的に異なった性格を有している。解析的方法により、アンジュレータ磁石を通過する荷電粒子から生じるシンクロトロン放射光の特性を知る。

また電子ビームの角度拡がりが光ビームの特性に影響することを学ぶ。

4.4　シンクロトロン放射の数値的取り扱い

遠距離場近似が成立しない時や誤差磁場を有するアンジュレータからのシンクロトロン放射光については解析的取り扱いが殆ど困難である。数値的取り扱いに基づいて、シンクロトロン放射光の特性を計算できることを学ぶ。

実例として、アンジュレータ磁石に不整磁場が存在する場合を取り上げる。電子ビームの角度拡がり同様、シンクロトロン放射光の特性劣化が此処では起こる。数値的シュミレーションによりこの影響を定量的に評価できることを知る。

Chapter 5　シンクロトロン放射から決まる電子ビーム特性

シンクロトロン放射はその反作用として、放射をする電子ビームに影響を与える。この影響は放射の２つの側面、即ち古典的連続的放射と量子的非連続的放射、を通じて電子のベータトロン振動およびシンクロトロン振動に影響する。

5.1　電子ビーム特性に影響するシンクロトロン放射

量子的非連続的放射としてのシンクロトロン放射光はその統計的性格を通じて電子ビームに影響を与える、此処では第４章の結果を利用してシンクロトロン放射光の統計的性格について纏めておく。

古典的連続的放射としてのシンクロトロン放射光が電子ビーム運動へ影響するのは、シンクロトロン放射量の個々の電子エネルギーへの依存度を通じてである。シンクロトロン放射によるエネルギー損失量の電子エネルギー依存率をここで計算する。

5.2　放射減衰

シンクロトロン放射の古典的連続的放射の性格から、電子の振動運動は減衰する。これを非斉次項を含む転送行列を使って解析し減衰率を求める。

5.3　ビームの平衡分布

シンクロトロン放射の量子的非連続的放射とは光子として量子化された電磁場の放出である。この光子放出の反作用は電子の運動を励起し、これが量子励起と呼ばれる。この効果と先の減衰効果との平衡条件から、ビームのエネルギー拡がりやエミッタンスが決まる事を学ぶ。

Chapter 2

ビームの概念

一口にビームといってもその範囲は広く、この講義録の中でも常に一定のものを意味してはいない。線形加速器のビーム、ビーム輸送路におけるビーム、円形加速器のビームそして電子ビーム、陽子ビーム、さらにはシンクロトロン放射光の様な光ビームなどがある。

このような各種ビームには各々に特徴的な性格や取扱手法が存在する一方、ビーム一般として共通する性質や取扱手法も存在している。

この章はまずビーム一般の概念的把握で始まる。ここで扱うビームの範囲には光ビームまで含まれており最も幅が広い。

2.1 ビームと位相空間

このセクションはビームの概念的把握を目的とする。特に位相空間を使ってビームを理解することの本質的重要性を理解して欲しい。そしてビーム運動の追跡の上で転送行列が有効な手段であることを実感してもらいたい。ビーム表現に於いてしばしば用いられる位相空間中の楕円を表わすパラメターについても学ぶ、これは後にTwissパラメターとして後に再び現れる。

2.1.1 位相空間によるビームの表現

まず最初は、あまり広い概念でビームを把握すると混乱が生じる恐れがあるので、次のような定義から出発しよう。

> ビームとは狭い空間領域に局在する非常に多数の同種粒子の集まりが、ほとんど同じ方向に向かって、ほとんど同じ速さで進行しているもの。

円形加速器の中から一例を挙げよう、電子陽電子衝突型加速器TRISTAN主リングの30GeVにおける電子ないし陽電子のビームの進行速度は光速の99.99999997%で、その空間的広がりは、電子と陽電子ビームがぶつかる衝突点で、進行方向の長さ約2cm、水平幅約600μm、垂直高さ約16μmであり、この内には約2.5×10^{11}個の電子または陽電子が集まっている。

ビームの進行速度、ビームサイズ、さらに含まれる粒子数は加速器の種類により、また同じ加速器でもビームエネルギーや運転条件によって異なる。またビームサイズについては加速器リング中の場所毎でも異なった値を持つものである。

位相空間

ビームを構成する個々の粒子の位置を横軸に、速度を縦軸にプロットしたものが位相空間を使ったビーム表現である。このように位相空間上の点集合としてビームを表す事の利点は次のように明瞭である。

Fig. 2.1に示すのは実空間と位相空間におけるビーム表現の違いである。3次元の実空間上の表示では、空間内の同一点から出発した粒子が時間の経過とともに別々の場所に移動したり、逆に異なった場所にあった粒子が同一場所に集まったりする。このように粒子を表す初期の点集合からその後の運動を予測することができない。

一方、6次元位相空間では（図中では水平方向を表すx-方向のみ表示）、同一点から出発した粒子は時間の経過によっても常に同一点にあり、また異なる点から出発した粒子が同一点に至ることがない。

粒子の従う運動方程式は2階微分方程式であり、初期値としての位置と速度が決まればその後の運動は一意的に決定される。そのため位相空間上の同一点は運動によっても同一の点に至り、また異なる点が同一点に至ることもない。即ち位相空間上にビームを表現すれば、それはビーム運動の初期値に関する全情報を示したことになり、以後のビーム運動を予測することが可能になる。

正準運動

このようにビームを構成する個々の粒子が同一の運動方程式で記述されるとき、言葉を換えれば同一Hamiltonianに支配されるとき、ビーム運動は正準（canonical）でありシンプレクティック(symplectic)条件[1]を満たしている。

[1]この講義録ではHamilton形式にもとづいた正準変換やシンプレクティック条件の議論は行わない。しかしこれは非常に重要なテーマであ

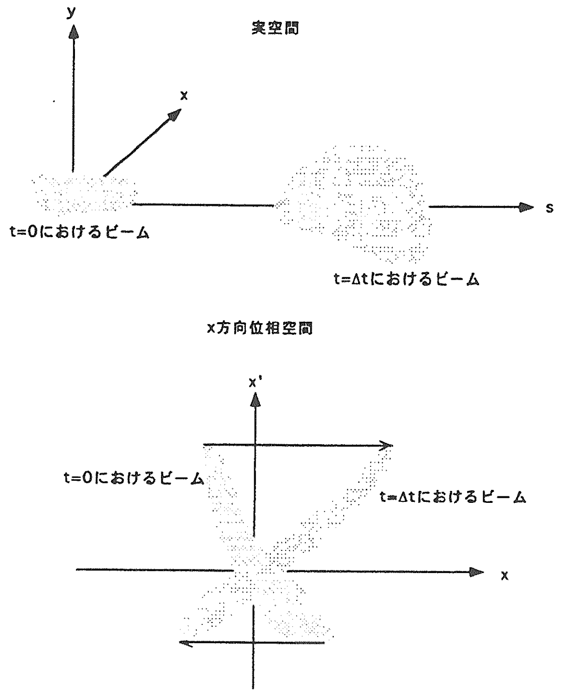


Figure 2.1: 実空間と位相空間におけるビーム表現の違い

Liouvilleの定理として知られる「ビームが位相空間上に占める面積は運動によって変わらない。」と言う事実はこのシンプレクティック条件の一部である[2]。第3章で扱うビームの運動は正準運動である。

非正準運動

実際のビームをとりまく環境は、しかしながら、より多彩な物理現象に満ちており正準運動として記述できない現象も起きる。それは例えば、ビーム内粒子間の相互散乱、残留ガスとの散乱、シンクロトロン放射による振動の減衰、シンクロトロン放射による振動の量子励起などである。これらの現象ではビームを構成する個々の粒子が確率的に運動に異なった影響を受け、それを同一Hamiltonianで記述することはできない。このような場合については、後に第5章で学ぶ。

2.1.2 転送行列とビームの軌跡

位相空間の点集合として表現されたビームを追跡する最も簡便な方法が転送行列（transfer matrix）の利用である。この方法が適用できる条件は運動方程式が線形であることないし線形近似が許されるときである。

そのため、粒子位置$z \ll 1$および粒子進行角度$z' = p_z/p_s \ll 1$を前提とした近似が可能なように、ビームの進行方向にできるだけ沿って座標系を選ぶものとする。この目的のために参照粒子の軌跡そのものを座標系として選ぶこともあるが、これ自身は必須条件ではない。

線形の運動方程式に従う運動は一般に2つの線形独立解の重ね合せで表わすことができる。

$$\begin{cases} C(s_0, s_0) = 1 \\ C'(s_0, s_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} S(s_0, s_0) = 0 \\ S'(s_0, s_0) = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

特に線形独立解として（2.1）式の初期条件により定義されたコサイン型軌跡$C(s, s_0)$とサイン型軌跡$S(s, s_0)$を使用することにより、重ね合せの係数として運動を追跡しようとする粒子自身の初期値$z(s_0)$および$z'(s_0)$が使える。

$$\begin{cases} z(s) = C(s, s_0)\, z(s_0) + S(s, s_0)\, z'(s_0) \\ z'(s) = C'(s, s_0)\, z(s_0) + S'(s, s_0)\, z'(s_0) \end{cases} \tag{2.2}$$

（2.2）式を行列表示で示す事で転送行列$M(s, s_0)$が定義される。

$$\mathbf{z}(s) \equiv \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = M(s, s_0)\, \mathbf{z}(s_0) \tag{2.3}$$

ここで見るように転送行列$M(s, s_0)$の行列要素を求めることはコサイン型とサイン型の初期値（2.1）式に対する運動方程式の解を求めることに帰着する。

$$M(s, s_0) = \begin{pmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

2.1.3 位相空間楕円の表示

ここでビームの位相空間における分布としてしばしば登場する楕円の記述方法を導入しておく。

一般の楕円は面積πW、長短軸の長さ比率aそして回転角Ωによって特徴づけられる。そしてこの楕円上の一点は媒介変数θを使い（2.5）式で与えられる。ここで$\mathbf{x}(\theta)$が位相空間上の位置を表すベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\theta) &\equiv \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{aW}\cos\theta \\ \sqrt{\frac{W}{a}}\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

（2.5）式を逆に解き、媒介変数θを消去することにより楕円の方程式が$\mathbf{x}(\theta)$の成分を使って(2.6) 式に表される。

$$W = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \tag{2.6}$$

ここで係数β、γそしてαは長短軸比率aと回転角Ωにより(2.7) 式に定義される。当然、係数同士は独立ではなく

る。生出勝宣氏による「ビーム力学入門」JLC-FFIR92研究会講義録・研究報告集、田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings 93-6 (1993) がこの分野への最良の入門書であろう。

[2]後に（3.112）式でSymplectic条件の他の具体例が示される。

相互間に(2.8) 式の関係が存在する。

$$\begin{cases} \beta &= a\cos^2\Omega + \frac{\sin^2\Omega}{a} \\ \gamma &= \frac{\cos^2\Omega}{a} + a\sin^2\Omega \\ \alpha &= \frac{-\left(-1+a^2\right)\sin 2\Omega}{2a} \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\beta\gamma = 1 + \alpha^2 \tag{2.8}$$

ここで導入した楕円表示の係数β、γそしてαは周回運動における転送行列の行列要素およびベータトロン振動の擬調和振動子解と深い関係にありTwissパラメターと呼ばる。また特に係数βはベータ関数ないし振幅関数とも呼ばれている。そのような物理的側面については後に学ぶ。

Fig. 2.2に位相空間の楕円の例を示す。 これは(2.5)式で$a=3$、$W=1$、$\Omega=\frac{\pi}{6}$とした場合のものである。

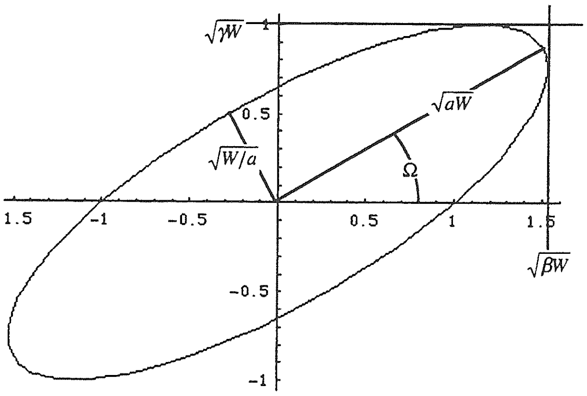


Figure 2.2: 位相空間の楕円。

2.2 転送行列による光ビーム追跡と限界

位相空間上に表現されたビームの運動を転送行列で追跡することは、簡単ではあるが幅広く有効な手段である。

光もまたビームの一例である、特に幾何光学で有効に扱える光ビームは粒子ビームと同等に取り扱うことができる。

この方法を偏向磁石中を走る電子ビームから発生するシンクロトロン放射光の解析に適用してみる。

ただ光の波動性が露になる条件下では、異なった取り扱いが必要になる。近似的なシュミレーション演習の中でその関係を理解しよう。

ここで扱う内容は、この講義録のかなり先の方で説明される題材を多く含んでいる。早めにビーム物理に対する具体的問題意識を喚起しておきたいと言う筆者の意図が背景にある。

2.2.1 放射光測定システムの物理

Fig. 2.3 にここで扱う放射光観測システムの模式図を示す。8GeVの電子ビームが曲率半径250mの偏向磁石中を通過するときに出す波長500nmの可視光を観測して、電子ビームのサイズを測定しそこから電子ビームのエミッタンスを求めようと言うシステムである。

偏向磁石内で発生する放射光はベリリウム製の鏡で反射されサファイヤ窓を通して真空ダクトの外に取り出される。発光基準点より 6 m程度下流におかれた可動水平スリットは奥行き効果と回折効果の最適値を得るために使われる。その直後に焦点距離 1 mの凸レンズが置かれている。バンドパスフィルター（BPF）により、観測する光の波長として500 ± 5nmが選択され、フィルターで減光された光はCCDカメラにより観測される。このシステムはトリスタンMR放射光実験の一部として行われた電子ビームエミッタンス測定に使用された[3]。

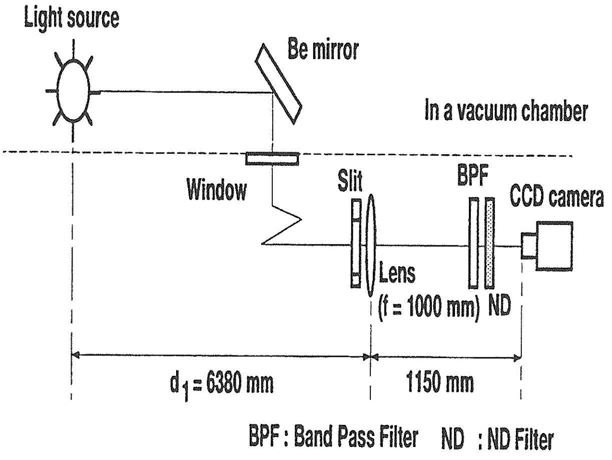


Figure 2.3: 放射光観測システム模式図。

物理条件

ここで考慮されるべき物理的状況を数え上げてみる。

位相空間内ビーム分布。 電子ビームは位相空間の中でTwissパラメターとエミッタンスによって記述できる特定の分布をしている。この分布の形は、観測用光学システムによる結像条件に影響を与えるため定量評価が必要である。

奥行きの効果。 電子ビームから光が放射される場所は基準点ばかりではなく、電子ビームは偏向磁石の全域に渡って光っている。この基準点前後からの放射光の寄与も定量見積もりを要することである。

[3]小方厚 '放射光可視成分によるエミッタンス測定', 日本放射光学会誌 Vol.10,No.2 pp129(1997)

放射光発散角度。 一個の電子から放射されるシンクロトロン光は波長に応じた特定の発散角[4]を有し、光ビームの位相空間分布として結像条件に影響する。さらにこれは、次に挙げる回折効果とも関連する。

回折効果。 光は波動特有の回折現象を生じる。この効果は不確定性関係として次のように表現できる。

$$\sigma_{photon}\psi_{photon} \geq \frac{\lambda_{photon}}{4\pi} \qquad (2.9)$$

光の発生については、遠距離場近似を使って発散角ψ_{photon}が計算できるので、不確定性関係から光の拡がりσ_{photon}が推定できる[5]。また光路上にスリットのような狭い場所があると光の拡がりが限定され、上式で評価される角度発散がこの場所でも新たに生じることになる。

2.2.2 シュミレーションの方法

これらの物理条件を定量的かつ総合的に取り扱えることが実験結果の解析のために必要である。そして様々な条件を同時に考慮して定量評価を行うには計算機シュミレーションが不可欠である。この放射光発生過程と観測用光学システムに於ける光ビームの伝搬について計算機シュミレーションを行ってみよう。

以下に順を追ってそのプロセスを説明する。

1. まず、発光基準点における電子ビームの分布を実現する。位相空間の位置ベクトル$\overline{X}_B(0)$を（2.10）式を使い、乱数を振って作る。このやり方で電子ビームの分布が与えられることは、後に学ぶTwissパラメターと擬調和振動子解との関係および平衡エミッタンスの概念から理解される。

$$\overline{X}_B(0) \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_x\varepsilon_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_x\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x}} & \sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\beta_y\varepsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_y\sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y}} & \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ran1 \\ Ran2 \\ Ran3 \\ Ran4 \end{pmatrix} \qquad (2.10)$$

ここで$Ran\sharp$はゼロを中心とする標準偏差1の独立なガウス乱数である。β、α、γはTwissパラメター、εはエミッタンス、そして添字のxは水平方向、yは垂直方向を示す。

2. 奥行き効果のシュミレーションのために、距離s上流にある発光点に電子ビームを転送行列で運ぶ。

$$\overline{X}_B(-s) = M(-s)\,\overline{X}_B(0) \qquad (2.11)$$

ここで転送行列$M(-s)$の具体的な形としては、収束作用を含まない偏向磁石の場合、自由空間の転送行列$L(s)$の逆行列が使える。

3. 発光時の放射光の角度発散および回折効果を取り入れるために電子ビーム位置$\overline{X}_B(-s)$を中心に(2.12)式で光子ビームの位相空間分布を与える。

$$\overline{X}_P(-s) \equiv \overline{X}_B(-s) + \begin{pmatrix} \sigma_{photon} \times Ran5 \\ \psi_{photon} \times Ran6 \\ \sigma_{photon} \times Ran7 \\ \psi_{photon} \times Ran8 \end{pmatrix} \qquad (2.12)$$

4. ここからは電荷を持たない光子の追跡になる。自由空間の転送行列を使って基準点にまで運ぶ。ここで(2.13)式の第２項の存在は位相空間の座標原点が偏向磁石（曲率ρ）中では場所毎に変わるためである。

$$\overline{X}_P(0) = L(s)\,\overline{X}_P(-s) + \begin{pmatrix} s^2/(2\rho) \\ -s/\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

純粋な偏向磁石の場合には、次のようになる。

$$\overline{X}_P(0) = \overline{X}_B(0) + L(s)\begin{pmatrix} \sigma_{photon} \times Ran5 \\ \psi_{photon} \times Ran6 \\ \sigma_{photon} \times Ran7 \\ \psi_{photon} \times Ran8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s^2/(2\rho) \\ -s/\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

5. 以下光学系のパラメターに従い（2.15）や（2.16）式で与えられる転送行列を使い光子の軌跡を追うことができる。途中のスリット位置では、座標値がスリット幅を超える粒子を捨て、通過する粒子にはスリット幅と不確定性関係（2.9）式を使い新たな角度拡がりを乱数を用いて付加する。

長さlの自由空間の転送行列。

$$L(l) = \begin{pmatrix} 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

[4]これについては第4章Fig. 4.4に遠距離場近似に基づいて得られる結果を先取りして使う。

[5]このことは光が電子からの放出点において不確定性関係で決まる拡がりを有する事を意味しない。遠距離場近似が適用されるまで離れた地点で観測すると、そこでの光伝搬の有り様に従って放射点近傍まで遡ると発光点ではあたかも光がそのような拡がりを持っていたかのように見えるということである。

焦点距離fの凸レンズを表す転送行列。

$$F(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

2.2.3 シュミレーションの結果と考察

シュミレーション結果

このシュミレーションにより結像位置に於ける光子の位相空間分布を求め、Fig. 2.4およびFig. 2.5に示す。Fig. 2.4に見られる水平分布の湾曲構造は奥行きの効果であり、偏向磁石中では座標原点がビーム進行方向の位置とともに変化することから生じている。また垂直方向の鼓型分布構造も奥行きの効果である。

Fig. 2.5ではスリット幅を少なくしたため奥行きを見込む量が減少し、位相空間の光子分布から奥行きに特徴的な形が薄れていることがはっきりとわかる。

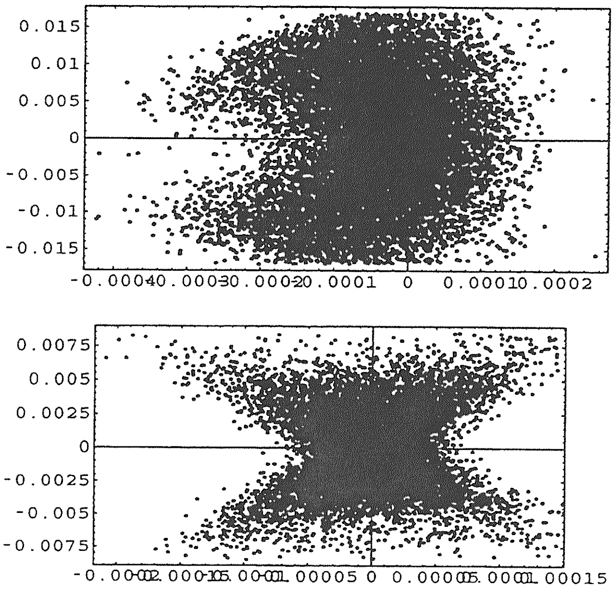


Figure 2.4: 位相空間光子分布、スリット半幅20mmの時。上図は水平方向、下図は垂直方向の位相空間。水平軸の単位はメートル[m]、垂直軸の単位はラディアン[rad]。

スリット幅により結像点に於ける光像のサイズがどう変化するか、シュミレーションにより求めてみた。

Fig. 2.6にその結果が示されている。スリット幅を狭めることで奥行き効果が減少するが、更に狭めていくと水平方向で回折効果が増大して光像が大きくなってくる。垂直方向ではこの増大が生じていない。その為にスリットは水平方向のみに導入されている。

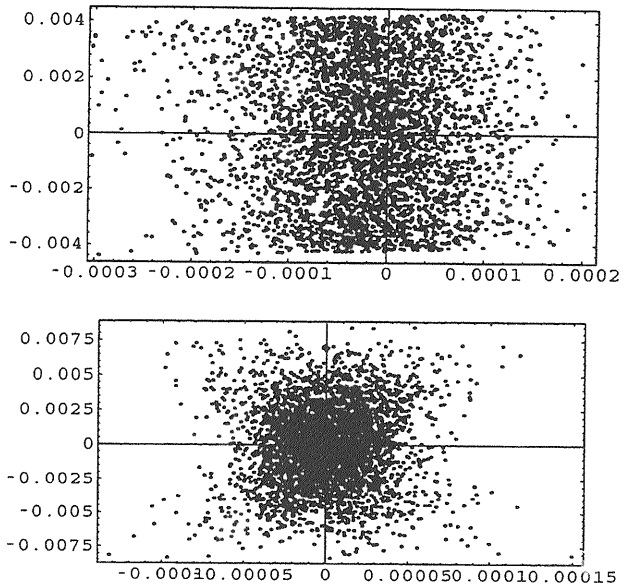


Figure 2.5: 位相空間光子分布、スリット半幅5mmの時。上図は水平方向、下図は垂直方向の位相空間。水平軸の単位はメートル[m]、垂直軸の単位はラディアン[rad]。

このシュミレーションでは、発光基準点に於ける電子ビームのTwissパラメター、$\beta_x = 23$m、$\beta_y = 16$m、$\alpha_x = -3.8$、$\alpha_y = 1.36$、およびエミッタンス$\varepsilon_x = 5$nm、$\varepsilon_y = 0.5$nmを仮定した。また水平スリットと同じ場所に高さ±10mmの固定垂直スリットが置かれている。ビームの運動量拡がりの影響については無視している。

実験におけるエミッタンス測定では、スリット幅を変化させ光像サイズを実測する。このデータを、エミッタンス値を色々変えて行ったFig. 2.6のシュミレーションと比較してエミッタンス値を推定する。

現実には、他にも考慮すべき要素があり、必ずしも同じ方法でエミッタンス評価が成されているわけではないが、基本的考え方はこのシュミレーションと同じである。

考察

このように光を粒子として捉え、回折現象を光ビーム自身のエミッタンスとして繰り込むことで、転送行列により光の振る舞いのシュミレーションができた。しかし、これは簡便で一定の実用上の成果を生む方法ではあるが、光の波動としての位相情報が完全に失われてしまうという致命的欠陥を有している。二重スリットを通過する光の干渉現象等の解析には全く無力である。光の位相情報を保った総合的シュミレーション手法があれば実験結果から過不足のない情報が引き出せるはずであるが、この開発はビーム物理学の今後の課題である[6]。

[6] K-J. Kim氏によりWigner分布関数の利用が提唱されている。こ

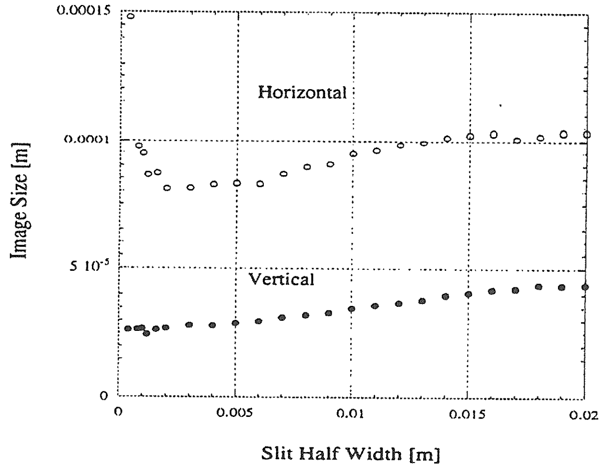


Figure 2.6: 水平スリット幅に依る光像サイズシュミレーション。

れは1932年、W. Wignerにより量子力学的粒子を位相空間で表現するために導入されたものである。しかし現状では、スリットのような非線形性の強い素子の取り扱いに困難がある。

Chapter 3

荷電粒子の運動

この章ではまず荷電粒子の従う運動方程式を一般的な形で求める。

さらに加速器やビーム輸送路によく用いられる主要加速器要素におけるビーム運動の方程式を具体的に求める。

その上で円形加速器を念頭に措いて、周期条件下での安定なビーム運動について学ぶ。ここで、いわゆるベータトロン振動やシンクロトロン振動について学ぶことになる。この章で扱う範囲では、電子ビームと陽子ビームの本質的な差異は唯一トランジッションエネルギーの有無であり、シンクロトロン放射の影響はまだ考慮されない。

3.1 運動方程式

ここでは荷電粒子の運動方程式を求める。この運動方程式の独立変数は時間tではなくビーム進行方向の座標値sである。

3.1.1 座標系とFrenet-Serretの公式

粒子運動を記述するための座標系を導入しよう。Fig. 3.1に示された移動する座標系$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_s)$の原点は基準座標曲線$C$の上にある。曲線$C$は、ほぼビームの進む道筋に沿った一般の滑らかな曲線で、この曲線は例えば理想的な粒子軌道に選んでもよいし、ビームから大きく離れない限り[1]、運動粒子の運動方程式の解でなくてもよい[2]。

この座標系を使うと、運動粒子の位置$\mathbf{r}\left(s(t)\right)$は (3.1) 式の様に分解した成分$(x, y)$で記述される。また時間$t$と基準座標曲線上の弧長$s$とは $\mathbf{r}\left(s(t)\right)$から曲線$C$に下した垂線の足の位置によって関係付けられる。

$$\mathbf{r}\left(s(t)\right) = \mathbf{r}_0\left(s\left(t\right)\right) + \vec{\delta} = \mathbf{r}_0\left(s(t)\right) + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (3.1)$$

ここで用いる座標系は粒子運動（垂線の足の位置）とともに移動する座標系である。(3.2) 式に示すFrenet-Serretの公式がこの変化の様子を記述する。

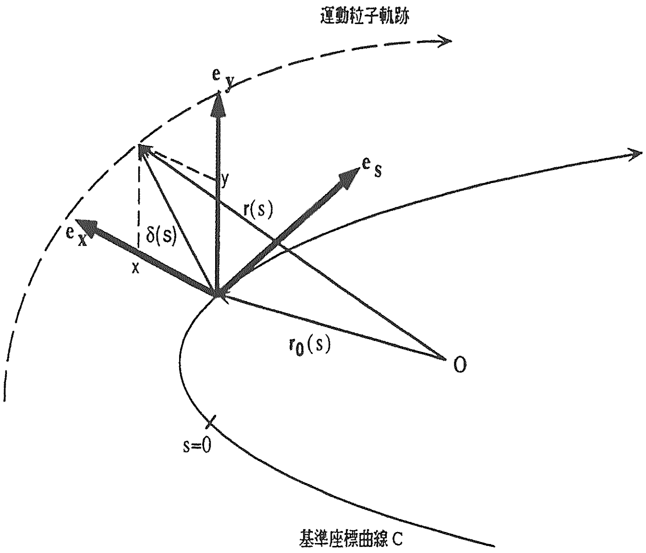


Figure 3.1: 粒子運動を記述する座標系。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_s \equiv \frac{d}{ds} r_0\left(s\right) = r_0'\left(s\right) \\ \mathbf{e}_x' = \qquad -\tau\ \mathbf{e}_y + \kappa\ \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_y' = \quad \tau\ \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_s' = -\kappa\ \mathbf{e}_x \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで曲率κとねじれ率τが一般の基準座標曲線を記述するが、以下の議論では常にねじれ率$\tau = 0$を前提とする。

[1]この条件は、後に線形近似を導入するときに必要である。充分高次の項まで含んだ取り扱いに終始するなら、粒子位置が一意的に記述できればよい。

[2]例えば、アンジュレータ内のビーム運動の記述に使う基準座標曲線としては、運動方程式を満たすサイン関数よりも、満たさない直線のほうが一般には便利であろう。

3.1.2 運動方程式

よく知られるように電磁場中で電荷qの荷電粒子はLorentz力を受け（3.3）式の運動方程式に従って運動する。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P} = \dot{\mathbf{P}} = q\left\{\mathbf{E} + (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right\} \tag{3.3}$$

ここで$\mathbf{P}$は粒子の運動量、$\mathbf{v}$は速度、$\mathbf{E}$は電界強度、$\mathbf{B}$は磁束密度である。さらに電場が存在しない時には運動方程式は次のように簡単になる。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B} \tag{3.4}$$

ここでmは運動粒子の質量で、静止質量m_0と相対論係数γとの積で表わされる。

（3.1）式によって粒子位置を表わし、（3.4）式の運動方程式に代入しよう。このとき位置ベクトル$\mathbf{r}$の時間tによる微分を弧長sによる微分で置き換えるようにする。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}'\tfrac{ds}{dt} = \left\{\mathbf{r}_0' + (x\mathbf{e}_x)' + (y\mathbf{e}_y)'\right\}\dot{s} \\ &= \left\{x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + (1+\kappa x)\,\mathbf{e}_s\right\}\dot{s}\end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで（3.2）式のFrenet-Serretの公式を使った。

さらに時間による２階微分は、

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}''\left(\tfrac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{r}'\tfrac{d^2s}{dt^2} \\ &= \left[\left\{x'' - \kappa(1+\kappa x)\right\}\dot{s}^2 + x'\ddot{s}\right]\mathbf{e}_x \\ &+ \left(y''\dot{s}^2 + y'\ddot{s}\right)\mathbf{e}_y \\ &+ \left\{(2\kappa x' + \kappa' x)\,\dot{s}^2 + (1+\kappa x)\,\ddot{s}\right\}\mathbf{e}_s\end{aligned} \tag{3.6}$$

運動方程式（3.4）式の左辺には今求めた$\ddot{\mathbf{r}}$を、右辺には（3.5）式と次のように成分表示した磁場とを代入することにより、成分表示した運動方程式（3.8）式を得る。

$$\mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_s\mathbf{e}_s \tag{3.7}$$

$$\left\{\begin{aligned} & x'' + \tfrac{\ddot{s}}{\dot{s}^2}x' - \kappa(1+\kappa x) \\ &\qquad = \tfrac{q}{m\dot{s}}\left\{y'B_s - (1+\kappa x)\,B_y\right\} \\ & y'' + \tfrac{\ddot{s}}{\dot{s}^2}y' \\ &\qquad = \tfrac{q}{m\dot{s}}\left\{(1+\kappa x)\,B_x - x'B_s\right\} \\ & 2\kappa x' + \kappa' x + \tfrac{\ddot{s}}{\dot{s}^2}(1+\kappa x) \\ &\qquad = \tfrac{q}{m\dot{s}}\left(x'B_y - y'B_x\right)\end{aligned}\right. \tag{3.8}$$

この運動方程式の第３式は解く事ができる。すなわち第１式の両辺にx'、第２式の両辺にy'を掛けて両式の和をとるとB_s項が消去された次式になる。

$$\begin{aligned}& x'x'' + y'y'' + \tfrac{\ddot{s}}{\dot{s}^2}\left(x'^2 + y'^2\right) - \kappa(1+\kappa x)\,x' \\ &= \tfrac{q}{m\dot{s}}(1+\kappa x)\left(y'B_x - x'B_y\right)\end{aligned} \tag{3.9}$$

（3.9）式右辺の磁場の項は（3.8）式の第３式右辺と同じ形なので消去することができ、磁場項を含まない（3.10）式を得る。

$$\begin{aligned}-\tfrac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} &= \tfrac{x'x'' + y'y'' + (1+\kappa x)(\kappa x' + \kappa' x)}{x'^2 + y'^2 + (1+\kappa x)^2} \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{\frac{d}{ds}\left\{x'^2 + y'^2 + (1+\kappa x)^2\right\}}{x'^2 + y'^2 + (1+\kappa x)^2}\end{aligned} \tag{3.10}$$

上の式は$g \equiv x'^2 + y'^2 + (1+\kappa x)^2$と置くことで簡単になる。

$$-\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{g'}{2g} = \frac{\dot{g}\frac{dt}{ds}}{2g} = \frac{\dot{g}}{2g\dot{s}} \tag{3.11}$$

これを通分すると積分のできる形となる。

$$2g\dot{s}\ddot{s} + \dot{g}\dot{s}^2 = \frac{d}{dt}\left(g\dot{s}^2\right) = 0 \tag{3.12}$$

この積分の結果運動方程式第３式は解け、時間tと弧長sの関係が明示される。

$$\dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + (1+\kappa x)^2} \tag{3.13}$$

この結果は物理的には磁場の働きが粒子の速さを変えない事を示し、積分定数vは粒子速度に対応する。

この結果を運動方程式第１式、第２式に代入すれば、横方向運動の運動方程式を得る。

$$\left\{\begin{aligned} & x'' - \tfrac{2\kappa x' + \kappa' x}{1+\kappa x}x' - \kappa(1+\kappa x) \\ &\quad = \tfrac{q}{mv}\sqrt{x'^2 + y'^2 + (1+\kappa x)^2} \\ &\qquad \times\left[\tfrac{x'y'}{1+\kappa x}B_x - \left(1 + \kappa x + \tfrac{x'^2}{1+\kappa x}\right)B_y + y'B_s\right] \\ & y'' - \tfrac{2\kappa x' + \kappa' x}{1+\kappa x}y' \\ &\quad = \tfrac{q}{mv}\sqrt{x'^2 + y'^2 + (1+\kappa x)^2} \\ &\qquad \times\left[\left(1 + \kappa x + \tfrac{y'^2}{1+\kappa x}\right)B_x - \tfrac{x'y'}{1+\kappa x}B_y - x'B_s\right]\end{aligned}\right. \tag{3.14}$$

これは厳密なベータトロン振動（横方向振動）の運動方程式である。（3.13）式と（3.14）式は数値計算に依る粒子追跡の基礎である一方解析的取り扱いの為にはここに何らかの近似を導入することになる。

3.2 加速器構成要素

ここでは、前のセクションで求めた運動方程式を特定の主要加速器要素ごとに書き下し、その線形近似条件による解から各加速器要素の転送行列を求める。

3.2.1 自由空間

ドリフト空間（drift space）とも呼ばれる電磁場の無い空間である。この場合、基準座標曲線は曲率$\kappa = 0$の直線に選ぶのが自然である。

磁場条件は当然、

$$B_x = B_y = B_s = 0 \tag{3.15}$$

そして運動方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ \dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2+y'^2+1} \end{cases} \tag{3.16}$$

これは厳密に解ける。積分を実行すれば、

$$\begin{cases} x = x'_0 s + x_0 \\ y = y'_0 s + y_0 \\ s = \frac{v}{\sqrt{{x'_0}^2+{y'_0}^2+1}} t + s_0 \end{cases} \tag{3.17}$$

参照運動量p_0の粒子の速さをv_0とすると、運動量がΔp大きい粒子の速さvは次式で与えられる。

$$v \approx v_0 + \frac{dv}{d(\Delta p/p_0)} \frac{\Delta p}{p_0} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0}\right) \tag{3.18}$$

ここでγ_0は参照運動量粒子の相対論係数である。

粒子がその静止質量に比べて非常に高いエネルギーを有するとき、速度は殆ど光速度に達し運動量の違いによる速度差は極めて小さい。このように速度差が無視できるほど高エネルギー領域にある粒子のことを超相対論的粒子と呼ぶ。静止質量が小さいため多くの電子加速器でこの条件が満たされている。

3.2.2 4極磁石

水平および垂直方向で各々収束および発散の効果を持つ磁石である。便宜上、水平方向に収束作用があるとき（垂直方向は発散作用だが）収束磁石（focusing magnet）と、水平方向に発散作用を持つとき（垂直方向は収束作用だが）発散磁石（defocusing magnet）と呼び分けられている。　ビームが設計の上で磁石の中心付近を通る限り、基準座標曲線は自由空間と同じく曲率$\kappa = 0$の直線に選ぶのが自然である。

磁場条件は、

$$\begin{cases} B_x &= \left.\frac{\partial B_x}{\partial y}\right|_{x=y=0} y = b_1 y \\ B_y &= \left.\frac{\partial B_y}{\partial x}\right|_{x=y=0} x = b_1 x \\ B_s &= 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

運動方程式は、

$$\begin{cases} x'' = & \frac{qb_1}{mv}\sqrt{x'^2+y'^2+1} \\ & \times \left\{x'y'y - \left(1+x'^2\right)x\right\} \\ y'' = & \frac{qb_1}{mv}\sqrt{x'^2+y'^2+1} \\ & \times \left\{\left(1+y'^2\right)y - x'y'x\right\} \\ \dot{s}^2 = & \frac{v^2}{x'^2+y'^2+1} \end{cases} \tag{3.20}$$

線形近似を施した運動方程式、

$$\begin{cases} x'' &= -\frac{qb_1}{mv}x \\ y'' &= \frac{qb_1}{mv}y \\ \dot{s} &= v \end{cases} \tag{3.21}$$

参照運動量よりΔp運動量が大きい粒子の従う運動方程式は（3.18）式および（3.22）式を（3.21）式に代入することで（3.23）式に与えられる。

$$\frac{1}{mv} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 + \Delta p} \approx \frac{1}{p_0}\left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right) \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} x'' &= -K_1\left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)x \\ y'' &= K_1\left(1 - \frac{\Delta p}{p_0}\right)y \\ \dot{s} &= v_0\left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}\right) \end{cases} \tag{3.23}$$

ここでK_1は次式で定義されている。

$$K_1 = \frac{qb_1}{p_0} \tag{3.24}$$

3.2.3 2極磁石

偏向磁石（bending magnet）とも言われ、ビーム軌道を曲げる役割を担う。基準座標曲線は参照運動量粒子の軌跡に沿ったものに選ぶのが一般であろう。すなわち曲率$\kappa = 1/\rho_0$の曲線を基準座標曲線に選ぶ、ここでρ_0は参照運動量粒子の曲率半径である。

水平方向偏向磁石の場合の磁場条件は、

$$\begin{cases} B_x &= 0 \\ B_y &= b_0 \\ B_s &= 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

運動方程式は、

$$\begin{cases} x'' - \frac{2\frac{1}{\rho_0}x'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}x' - \frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right) \\ \quad = \frac{qb_0}{mv}\sqrt{x'^2+y'^2+\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \\ \quad\quad \times\left\{-\left(1+\frac{1}{\rho_0}x+\frac{x'^2}{1+\frac{1}{\rho_0}x}\right)\right\} \\ y'' - \frac{2\frac{1}{\rho_0}x'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}y' \\ \quad = \frac{qb_0}{mv}\sqrt{x'^2+y'^2+\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \\ \quad\quad \times\left(-\frac{x'y'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}\right) \\ \dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2+y'^2+\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \end{cases} \tag{3.26}$$

線形近似を施した運動方程式、

$$\begin{cases} x'' = \frac{-qb_0}{mv}\left(1+\frac{2x}{\rho_0}\right)+\frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{x}{\rho_0}\right) \\ y'' = 0 \\ \dot{s} = v\left(1-\frac{1}{\rho_0}x\right) \end{cases} \tag{3.27}$$

参照運動量粒子の運動量p_0、2極磁場強度b_0そして曲率半径ρ_0との間には（3.28）式の関係がある。

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{qb_0}{p_0} \tag{3.28}$$

そこで線形近似を施した参照運動量粒子の運動方程式は（3.29）式となる。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} \\ y'' = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

運動量が参照運動量粒子よりΔp大きい粒子の運動方程式は、線形近似運動方程式（3.27）式に（3.18）式の速度のずれと（3.22）式の運動量のずれの線形近似を代入して作ることができる。

$$\begin{cases} x'' &= -\frac{x}{\rho_0{}^2}+\frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{2x}{\rho_0}\right)\frac{\Delta p}{p_0} \\ y'' &= 0 \\ \dot{s} &= v_0\left(1+\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}\right)\left(1-\frac{1}{\rho_0}x\right) \end{cases} \tag{3.30}$$

端部効果

（3.29）式に見るように、水平偏向磁石では水平方向の運動に収束力が生じている。実際の加速器で水平収束力がこのままに現れるのは、磁石端部でビームが垂直に入出射する扇形磁石（セクター型磁石）の場合である。矩形磁石の様にビームの入射および出射角が90°から外れる場合は、垂直方向の収束力が生じるなど、ここに示された運動方程式と異なる運動をする。この効果は端部効果（edge effect）あるいは楔形効果（wedge effect）といわれる。

Fig. 3.2に示すように、矩形磁石の場合、偏向磁石内部を記述する基準座標曲線とその外側（例えば自由空間）を記述する基準座標曲線との継ぎ目付近では、粒子位置は偏向磁石内部にあるのにそれを記述するのが自由空間の座標系であったりその逆になる場合が生じる。この影響を考慮することで端部効果が理解され、その効果を計算することができる。

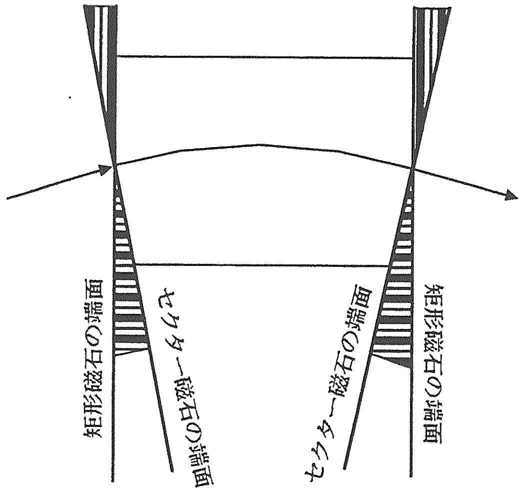


Figure 3.2: セクター磁石と矩形磁石による端部効果の違い。

このほかに磁石端部付近ではフリンジ場の効果がある[3]。これはビーム進行方向に沿って変化する磁場（フリンジ場）をMaxwellの方程式を正しく満たす様に求め運動方程式に取り入れることで影響を評価できる。フリンジ場の効果は2極磁石以外の磁石でも存在する。計算機による粒子追跡コードではこの効果が取り入れられており、ビーム運動に重要な影響を与える場合も知られている[4]。

[3]一般には、端部効果とフリンジ場の効果とは、言葉の用法上、常に区別して使われている訳ではない。

[4]例えば、KEKBや北京のBTCF衝突型加速器計画では、フリンジ場効果が粒子の安定運動領域（dynamic aperture）を制限する上で大きな影響を及ぼしている。これはSADコードによる計算で明らかになった。

3.2.4 高周波加速空洞

直線加速器やシンクロトロンに於けるビーム加速や、貯蔵型リングに於ける放射エネルギーの損失補給という役割を担うのが高周波加速空洞である。ここでは簡単化のため高周波の時間変化は単一周波数のサイン関数とし、また加速空洞の長さはゼロとしておく。

ピーク電圧$\hat{V}_{RF}$、高周波角周波数ω_{RF}の加速空洞に、時刻tに発生している加速電圧$V_{RF}(t)$は (3.31) 式に書ける。

$$V_{RF}(t) = \hat{V}_{RF} \cos(\omega_{RF} t + \phi) \tag{3.31}$$

このとき加速電場の時間勾配は次式になる。

$$\dot{V}_{RF}(t) = -\hat{V}_{RF}\omega_{RF} \sin(\omega_{RF} t + \phi) \tag{3.32}$$

この加速空洞に電荷qの荷電粒子が、基準時刻t_0より時間τだけ早い時刻$t = t_0 - \tau$に到達する際に、粒子が得るエネルギーΔEは高周波電圧の時間的変化を線形近似で表すことにより (3.33) 式で与えられる。

$$\Delta E = qV_{RF}(t) \approx q\left\{V_{RF}(t_0) - \tau \dot{V}_{RF}(t_0)\right\} \tag{3.33}$$

相対論的運動学によれば、このとき粒子の運動量増加は (3.34) 式に示される。

$$\Delta p = \frac{1}{v}\Delta E \tag{3.34}$$

ここでvは運動粒子の速度である。

3.2.5 線形近似解と転送行列

参照運動量粒子の線形運動方程式は、自由空間、2極磁石そして4極磁石について (3.35) 式の形にまとめて記述できる。

$$z'' = K(s)z \tag{3.35}$$

ここでzは水平方向x、垂直方向yの内いずれかを代表するものとする。また今までに紹介した加速器要素についてて$K(s)$は次のように定義されている。

$$K(s) = \begin{cases} -\frac{qb_1}{p_0} - \left(\frac{qb_0}{p_0}\right)^2 \\ \frac{qb_1}{p_0} \end{cases} \tag{3.36}$$

(3.36) 式のb_0およびb_1は、自由空間では、

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = 0 \tag{3.37}$$

2極磁石の場合は、

$$b_0 = B_y, \qquad b_1 = 0 \tag{3.38}$$

4極磁石の場合は、

$$b_0 = 0, \qquad b_1 = \left.\frac{\partial B_y}{\partial x}\right|_{x=y=0} \tag{3.39}$$

と与えられる。

$K(s)$が定数の場合には (3.35) 式は解く事ができる。両辺にz'を掛けると、

$$z'z'' = z'Kz \tag{3.40}$$

積分のできる形になる。

$$\left(z'^2\right)' = \left(z^2\right)' K \tag{3.41}$$

運動の不変量が積分定数c_1に対応して存在する。

$$z'^2 = z^2 K + c_1 \tag{3.42}$$

(3.42) 式から運動粒子は位相空間において$K < 0$の時は楕円、$K = 0$の時は直線、そして$K > 0$の時は双曲線を描くことが判る。更に積分をして (3.42) 式を解いておく[5]。

$$\begin{cases} z(s) = & \dfrac{e^{-(\sqrt{K}\,s)-\sqrt{K}\,c_2}\left(-4\,c_1\,e^{2\sqrt{K}\,s}+e^{2\sqrt{K}\,c_2}\right)}{4\sqrt{K}} \\ z'(s) = & -2\,c_1\,e^{\sqrt{K}\,s-\sqrt{K}\,c_2} \\ & -\dfrac{e^{-(\sqrt{K}\,s)-\sqrt{K}\,c_2}\left(-4\,c_1\,e^{2\sqrt{K}\,s}+e^{2\sqrt{K}\,c_2}\right)}{4} \end{cases} \tag{3.43}$$

この解を表している積分定数c_1とc_2を運動の初期値$z_0 = z(0)$と$z'_0 = z'(0)$を使って置き換えると[6]、

$$\begin{cases} z(s) = \\ \quad \dfrac{e^{-(\sqrt{K}\,s)-\log\{2(\sqrt{K}\,z_0-z'_0)\}}}{4\sqrt{K}} \times \\ \quad \left\{4\left(\sqrt{K}z_0 - z'_0\right)^2 - 4e^{2\sqrt{K}s}\left(-K\,{z_0}^2 + {z'_0}^2\right)\right\} \\ z'(s) = \\ \quad -2\,e^{\sqrt{K}\,s-\log\{2(\sqrt{K}\,z_0-z'_0)\}}\left(-K\,{z_0}^2 + {z'_0}^2\right) \\ \quad -\dfrac{e^{-(\sqrt{K}\,s)-\log(2(\sqrt{K}\,z_0-z'_0))}}{4} \times \\ \quad \left\{4\left(\sqrt{K}z_0 - z'_0\right)^2 - 4e^{2\sqrt{K}s}\left(-K{z_0}^2 + {z'_0}^2\right)\right\} \end{cases} \tag{3.44}$$

具体的に、収束係数K、長さlの加速器要素の転送行列を求めるには、(3.44) 式にサイン型初期値$z_0 = 0$、$z'_0 = 1$およびコサイン型初期値$z_0 = 1$、$z'_0 = 0$を代入して得たサイン型およびコサイン型軌跡とその微分を (2.4) 式に従って配置すればよい。

[5] Mathematica3.0は充分賢く、この微分方程式を一般のKについて正しく積分してくれる。

[6] 筆者はこの作業をMathematica3.0を使って行った。手計算でチェックをするのは少し厄介かも知れない。

自由空間に於ける水平および垂直方向、そして水平偏向磁石に於ける垂直方向の運動は$K=0$の場合であり、転送行列は次のようになる。

$$M(l,0)=\begin{bmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.45}$$

収束磁石や水平偏向磁石に於ける水平方向、また発散磁石に於ける垂直方向の運動は$K<0$の場合である。

$$M(l,0)=\begin{bmatrix}\cos\left(\sqrt{-K}l\right) & \frac{1}{\sqrt{-K}}\sin\left(\sqrt{-K}l\right)\\ -\sqrt{-K}\sin\left(\sqrt{-K}l\right) & \cos\left(\sqrt{-K}l\right)\end{bmatrix} \tag{3.46}$$

収束磁石に於ける垂直方向そして発散磁石に於ける水平方向の運動は$K>0$の場合である。

$$M(l,0)=\begin{bmatrix}\cosh\left(\sqrt{K}l\right) & \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh\left(\sqrt{K}l\right)\\ \sqrt{K}\sinh\left(\sqrt{K}l\right) & \cosh\left(\sqrt{K}l\right)\end{bmatrix} \tag{3.47}$$

3.3 周回運動 I ベータトロン振動

このセクションでは力学系に周期的条件のある場合の粒子運動を考える。これはいわゆるベータトロン振動であり、円形加速器の設計およびビーム運転の基礎を成す題材である。ここでは線形近似の範囲で話を進め、擬調和振動子としての取り扱いを導入し、これと転送行列の方法とを対照させる。この節ではビーム粒子のエネルギーが一定の場合を取り扱い、シンクロトロン振動と呼ばれるエネルギー変動については次節で扱う。

3.3.1 Floquetの定理とビームの安定条件

(3.35) 式の収束力$K(s)$に周期Lの周期性があるとする。

$$K(s+L)=K(s) \tag{3.48}$$

この条件が在る (3.35) 式はHillの方程式と呼ばれる。

$$z''=K(s)z \tag{3.49}$$

Floquetの定理

もし$z_1(s)$と$z_2(s)$が (3.49) 式の2つの線形独立解ならば、周期性のために、$z_1(s+L)$と$z_2(s+L)$もまた線形独立解である。また (3.49) 式の任意の解は2つの線形独立解の線形結合で表す事ができる。そこで$z_1(s+L)$と$z_2(s+L)$を$z_1(s)$と$z_2(s)$の線形結合によって表現する事ができる。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}z_1(s+L)\\ z_2(s+L)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a_{11}z_1(s)+a_{12}z_2(s)\\ a_{21}z_1(s)+a_{22}z_2(s)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1(s)\\ z_2(s)\end{pmatrix}\\ &\equiv A\begin{pmatrix}z_1(s)\\ z_2(s)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.50}$$

ここでAは正則行列であり、行列式$\det A\neq 0$である。さてこのとき次の擬周期条件を満足する解の存否を調べてみよう。

$$z(s+L)=\lambda z(s) \tag{3.51}$$

一般解を

$$z(s)=c_1z_1(s)+c_2z_2(s) \tag{3.52}$$

と表現して擬周期条件 (3.51) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned}z(s+L) &= c_1z_1(s+L)+c_2z_2(s+L)\\ &= c_1\{a_{11}z_1(s)+a_{12}z_2(s)\}\\ &\qquad +c_2\{a_{21}z_1(s)+a_{22}z_2(s)\}\\ &= (c_1a_{11}+c_2a_{21})z_1(s)+(c_1a_{12}+c_2a_{22})z_2(s)\\ &\equiv \lambda\{c_1z_1(s)+c_2z_2(s)\}=\lambda z(s)\end{aligned} \tag{3.53}$$

ここで有意な解$\lambda\neq 0$が存在すれば、擬周期条件 (3.51) 式を満たす形でHill方程式の解を求めた事になる。そのためにλが満たすべき特性方程式は、

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{3.54}$$

であり、これを展開すれば特性方程式は次式になる。

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+detA=0 \tag{3.55}$$

(3.55) 式を見れば$\lambda\neq 0$の解が常に存在することが判る。

さて、この2根が互いに異なる時$\lambda_1\neq\lambda_2$には、$\lambda_i\equiv e^{\alpha_iL}$と置くことができて、擬周期条件を満足するHill方程式の線形独立解$z_i(s)$は次のように書ける。

$$z_i(s+L)=\lambda_iz_i(s)\equiv e^{\alpha_iL}z_i(s) \tag{3.56}$$

ここで次式で定義される関数$\varphi_i(s)$を新たに導入すると、

$$\varphi_i(s)\equiv e^{-\alpha_is}z_i(s) \tag{3.57}$$

この関数は次に示すように周期Lを有している。

$$\begin{aligned}\varphi_i(s+L) &= e^{-\alpha_i(s+L)}z_i(s+L)\\ &= e^{-\alpha_i(s+L)}e^{\alpha_iL}z_i(s)\\ &= e^{-\alpha_is}z_i(s)=\varphi_i(s)\end{aligned} \tag{3.58}$$

最終的にHill方程式の線形独立解$z_i(s)$は次式で記述する事ができ、これはFloquetの定理の一表現である。

$$z_i(s) = e^{\alpha_i s}\varphi_i(s) \tag{3.59}$$

ここで

$$\varphi_i(s) = \varphi_i(s+L) \tag{3.60}$$

ビームの安定条件

Hill方程式については、$detA = 1$と成ることが言える。このとき（3.51）式の表現から分かるように、（3.55）式から与えられるλの２根が複素平面の単位円上に在るとき運動は安定で、そこから外れるとき不安定である。この条件を周期長Lに渡っての転送行列[7]Mの要素で表現すると次式となる。

$$\begin{cases} |TrM| = |m_{11}+m_{22}| < 2 & (\text{安定}) \\ |TrM| = |m_{11}+m_{22}| > 2 & (\text{不安定}) \end{cases} \tag{3.61}$$

また安定不安定の境界条件は$m_{11}+m_{22} = \pm 2$であり、これは重根条件$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$に対応している。このとき粒子の運動は$\lambda = 1$のとき周期$L$の$\lambda = -1$のとき周期$2L$の（擬周期ではない）完全な周期性を持つ。

3.3.2 擬調和振動子解とTwissパラメター

安定解の形

ベータトロン振動を表すHill方程式（3.49）式の解が（3.59）式の形で書けることを学んだが、安定運動の条件が満たされている場合について、より具体的な記述をしてみよう。Floquetの定理により、次の擬調和振動子の形で安定解を記述できることが保証される。

$$z(s) = \sqrt{W}\zeta(s)\cos\{\phi(s)-\theta\} \tag{3.62}$$

ここで振幅を表す項$\zeta(s)$には周期条件が課されている。

$$\zeta(s+L) = \zeta(s) \tag{3.63}$$

運動方程式（3.49）式に以下を代入する、

$$\begin{cases} z' = & \sqrt{W}\zeta'\cos(\phi-\theta) - \sqrt{W}\zeta\phi'\sin(\phi-\theta) \\ z'' = & \sqrt{W}(\zeta''-\zeta\phi'^2)\cos(\phi-\theta) \\ & -\sqrt{W}(2\zeta'\phi'+\zeta\phi'')\sin(\phi-\theta) \end{cases} \tag{3.64}$$

サイン項とコサイン項に整理をしてその各々の係数がゼロになることを要求すれば、

$$\begin{cases} \zeta''-\zeta\phi'^2-K(s)\zeta = 0 \\ 2\zeta'\phi'+\zeta\phi'' = 0 \end{cases} \tag{3.65}$$

[7]このときの転送行列は特に周回行列（revolution matrix）とよばれる。

（3.65）式の第２式を$\phi'\zeta$で除することで、積分の可能な形になる。

$$2\frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{\phi''}{\phi'} = 0 \tag{3.66}$$

これをsで積分し積分定数をゼロに選べば、

$$2\ln\zeta + \ln\phi' = const. = 0 \tag{3.67}$$

位相項$\phi(s)$は次の関係を満たさなければならない事が判る。

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\zeta(s)^2} \tag{3.68}$$

（3.68）式を（3.65）式の第１式に代入すれば、振幅項$\zeta(s)$の従う非線形方程式が導かれる。

$$\zeta'' = K(s)\zeta + \frac{1}{\zeta^3} \tag{3.69}$$

Twissパラメター

（3.69）式に従う振幅項$\zeta(s)$およびそのs微分を使い次式により新しい関数$\beta(s)$、$\alpha(s)$および$\gamma(s)$を定義し、これをTwissパラメターと呼ぶ。

$$\begin{cases} \beta(s) = \zeta(s)^2 \\ \alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s) = -\zeta(s)\zeta'(s) \\ \gamma(s) = \frac{1+\alpha^2(s)}{\beta(s)} \end{cases} \tag{3.70}$$

Twissパラメターを使ってベータトロン振動の解を書くと、

$$z(s) = \sqrt{W}\sqrt{\beta(s)}\cos\{\phi(s)-\theta\} \tag{3.71}$$

またこのs微分は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} z'(s) &= \frac{\beta'(s)}{2\beta(s)}z(s) - \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{\beta(s)}}\sin\{\phi(s)-\theta\} \\ &= \frac{-\sqrt{W}}{\sqrt{\beta(s)}}\left[\alpha(s)\cos\{\phi(s)-\theta\} + \sin\{\phi(s)-\theta\}\right] \\ &= \sqrt{W}\sqrt{\gamma(s)}\sin\{\phi(s)-\theta-\chi\} \end{aligned} \tag{3.72}$$

ここで、

$$\begin{cases} \cos\chi = \frac{-1}{\sqrt{\beta(s)\gamma(s)}} \\ \sin\chi = \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)\gamma(s)}} \end{cases} \tag{3.73}$$

である。

(3.71) 式と (3.72) 式を使うことで定数$\sqrt{W}$をTwissパラメターおよび$z(s)$と$z'(s)$で表す。

$$\begin{aligned} W &= W\cos^2\{\phi(s)-\theta\} + W\sin^2\{\phi(s)-\theta\} \\ &= \left\{\frac{z(s)}{\sqrt{\beta(s)}}\right\}^2 + \left[\sqrt{\beta(s)}\left\{\frac{\beta'(s)}{2\beta(s)}z(s) - z'(s)\right\}\right]^2 \\ &= \gamma(s)z(s)^2 + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'(s)^2 \end{aligned} \tag{3.74}$$

これは (2.6) 式と同じ表式であり、先に導入した位相空間の楕円表示パラメターとここで定義したTwissパラメターとが同一物である事を示している。ここに表われた定数Wは、加速器ビームの分野ではCourant-Snyder不変量と呼ばれる。運動粒子が位相空間において描く楕円の面積がπWであることは前にも述べた通りである。ビームを構成する多数の運動粒子のCourant-Snyder不変量の平均値の半分はエミッタンスと呼ばれ、ビームの大きさや角度拡がりを決める物理量として特に重要である。

3.3.3 転送行列要素と擬調和振動子解

転送行列の要素を擬調和振動子の解を使って表現してみよう。そのためには (3.75) 式のサイン型初期値および (3.76) 式のコサイン型初期値から始まる粒子運動の軌跡とそのs微分を (3.71) 式と (3.72) 式の擬調和振動子解で記述して (3.77) 式に従って配列すればよい。

サイン型初期条件 $$\begin{cases} z(s_0) = 0 \\ z'(s_0) = 1 \end{cases} \tag{3.75}$$

コサイン型初期条件 $$\begin{cases} z(s_0) = 1 \\ z'(s_0) = 0 \end{cases} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned} M(s,s_0) &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(s,s_0) & S(s,s_0) \\ C'(s,s_0) & S'(s,s_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.77}$$

まずコサイン型軌跡について、初期条件を (3.71) 式と (3.72) 式を使って表現する。次式がコサイン型軌跡の振幅a_cおよび初期位相θ_cを定義する。

$$\begin{cases} a_c\sqrt{\beta(s_0)}\cos\{\phi(s_0)-\theta_c\} = 1 \\ \frac{\beta'(s_0)}{2\beta(s_0)} - \frac{a_c}{\sqrt{\beta(s_0)}}\sin\{\phi(s_0)-\theta_c\} = 0 \end{cases} \tag{3.78}$$

若干の計算の後、振幅a_cおよび初期位相θ_cは次式で与えられる。

$$\begin{cases} a_c = \sqrt{\gamma(s_0)} \\ \begin{bmatrix} \cos\theta_c \\ \sin\theta_c \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \cos\phi(s_0) & \sin\phi(s_0) \\ \sin\phi(s_0) & -\cos\phi(s_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta(s_0)\gamma(s_0)}} \\ \frac{-\alpha(s_0)}{\sqrt{\beta(s_0)\gamma(s_0)}} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3.79}$$

このように与えられたa_cとθ_cを使ってコサイン型軌跡は次式で書ける、そしてこれが転送行列の$(1,1)$要素m_{11}である。

$$\begin{aligned} m_{11} = C(s,s_0) &= a_c\sqrt{\beta(s)}\cos\{\phi(s)-\theta_c\} \\ &= \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta(s_0)}}\times \\ &[\cos\{\phi(s)-\phi(s_0)\} + \alpha(s_0)\sin\{\phi(s)-\phi(s_0)\}] \end{aligned} \tag{3.80}$$

サイン型軌跡の振幅a_sおよび初期位相θ_sは次の式で定義される。

$$\begin{cases} a_s\sqrt{\beta(s_0)}\cos\{\phi(s_0)-\theta_s\} = 0 \\ -\frac{a_s}{\sqrt{\beta(s_0)}}\sin\{\phi(s_0)-\theta_s\} = 1 \end{cases} \tag{3.81}$$

a_sおよびθ_sを露に表現すれば、

$$\begin{cases} \theta_s = \phi(s_0) - \frac{\pi}{2} \\ a_s = -\sqrt{\beta(s_0)} \end{cases} \tag{3.82}$$

これを使ってサイン型軌跡を表せば、転送行列の$(1,2)$要素m_{12}が求められる。

$$\begin{aligned} m_{12} = S(s,s_0) &= a_s\sqrt{\beta(s)}\cos\{\phi(s)-\theta_s\} \\ &= \sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}\sin\{\phi(s)-\phi(s_0)\} \end{aligned} \tag{3.83}$$

(3.80) 式のコサイン型軌跡および (3.83) 式のサイン型軌跡をsで微分することにより、それぞれ転送行列の$(2,1)$要素m_{21}および$(2,2)$要素m_{22}を得る。

$$\begin{aligned} m_{21} = C'(s,s_0) = &-\frac{\{1+\alpha(s)\alpha(s_0)\}\sin\{\phi(s)-\phi(s_0)\}}{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}} \\ &-\frac{\{\alpha(s)-\alpha(s_0)\}\cos\{\phi(s)-\phi(s_0)\}}{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}} \end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned} m_{22} = S'(s,s_0) &= \sqrt{\frac{\beta(s_0)}{\beta(s)}}\times \\ &[\cos\{\phi(s)-\phi(s_0)\} - \alpha(s)\sin\{\phi(s)-\phi(s_0)\}] \end{aligned} \tag{3.85}$$

3.3.4 周回行列

前のセクションで得た転送行列が、円形加速器１周分を表すとき即ち周回行列(revolution matrix)になるとき、Twissパラメターの周期性から次のようになる。

$$M(s_0+L,s_0)=\begin{bmatrix}\cos 2\pi\nu+\alpha(s_0)\sin 2\pi\nu & \beta(s_0)\sin 2\pi\nu \\ -\gamma(s_0)\sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu-\alpha(s_0)\sin 2\pi\nu\end{bmatrix} \tag{3.86}$$

ここでνはベータトロン振動数またはベータトロンチューンと呼ばれる量で次式で与えられる。

$$2\pi\nu=\phi(s_0+L)-\phi(s_0)=\int_{s_0}^{s_0+L}\frac{ds}{\beta(s)} \tag{3.87}$$

リング内位置s_0における周回行列R_0を次のように記述してみる。

$$\begin{aligned}R_0 &\equiv M(s_0+L,s_0)\\ &=\begin{bmatrix}\cos 2\pi\nu+\alpha(s_0)\sin 2\pi\nu & \beta(s_0)\sin 2\pi\nu \\ -\gamma(s_0)\sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu-\alpha(s_0)\sin 2\pi\nu\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cos 2\pi\nu+\begin{bmatrix}\alpha(s_0)&\beta(s_0)\\-\gamma(s_0)&-\alpha(s_0)\end{bmatrix}\sin 2\pi\nu\\ &\equiv I\cos 2\pi\nu+J_0\sin 2\pi\nu\end{aligned} \tag{3.88}$$

ここでTwissパラメターで表された行列J_0は次式を満たす。

$$J_0^2=-I \tag{3.89}$$

この性質を使えば、nターン分の運動を表す転送行列$(R_0)^n$は次のようになる事が判る。

$$\begin{aligned}(R_0)^n &=(I\cos 2\pi\nu+J_0\sin 2\pi\nu)^n\\ &=I\cos 2\pi n\nu+J_0\sin 2\pi n\nu\end{aligned} \tag{3.90}$$

リング内位置s_1における周回行列R_1は、

$$R_1\equiv M(s_1+L,s_1)=I\cos 2\pi\nu+J_1\sin 2\pi\nu \tag{3.91}$$

s_0からs_1への転送行列Tと、

$$T\equiv M(s_1,s_0)=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{bmatrix} \tag{3.92}$$

リング内位置s_0における周回行列R_0とを使って次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}R_1 &=M(s_1+L,s_0+L)\,M(s_0+L,s_0)\,M(s_0,s_1)\\ &=TR_0T^{-1}\end{aligned} \tag{3.93}$$

これはまたTwissパラメターの変換規則も与えてくれる。

$$J_1=TJ_0T^{-1} \tag{3.94}$$

3.4 周回運動 II シンクロトロン振動

前節ではビーム内粒子のエネルギー変動は考えなかったが、ここでは粒子エネルギー変動をともなう場合の周回運動について学ぶ。いわゆるシンクロトロン振動について学ぶことになる。

3.4.1 運動量偏差のある粒子の運動

水平方向の運動や運動量偏差によって、運動粒子から基準座標曲線に下された垂線の足の位置sの進行速度は影響を受ける。そして加速空洞では参照運動量粒子との到達時間の差が、受ける加速電圧を左右する。この時間差を追跡することがここの大きなテーマである。

この目的のために参照運動量粒子との時間差$\tau=t_0-t$を使って時間を表す。今まで使ってきた垂線の足の速さ$\dot{s}$とは次式で関係付けられている。

$$\tau'=\frac{dt_0}{ds}-\frac{dt}{ds}=\frac{1}{v_0}-\frac{1}{\dot{s}} \tag{3.95}$$

ここでt_0は参照運動量粒子のsへの到達時刻であり、注目する粒子がこれより早いとき$\tau>0$となる。

運動量偏差の有る線形運動方程式

運動量が参照運動量よりΔp大きい粒子の運動方程式は運動量ずれおよび粒子座標共々に線形近似を施すことで、各加速器要素毎に以下のように取り扱うことができる。

自由空間および４極磁石　自由空間および４極磁石では（3.16）式、（3.18）式および（3.23）式から、まとめて次のように表せる。

$$\begin{cases}x'' &=-K\ \ x\\ y'' &=K\ \ y\\ \dot{s} &=v_0\left(1+\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}\right)\end{cases} \tag{3.96}$$

ここでKは自由空間ではゼロ、４極磁石では（3.24）式により与えられる。

即ちこれら加速器要素で生じる運動量偏差の影響は、施した線形近似の範囲では、粒子の速度の変化から生じる到達時間差のみである。

時間を表す（3.96）第３式を（3.95）式を利用してτで書直す。

$$\tau'=\frac{1}{v_0}\frac{1}{\gamma_0{}^2}\frac{\Delta p}{p_0} \tag{3.97}$$

2極磁石　2極磁石の中では運動量偏差の影響はより複雑である。(3.30) 式に運動量ずれおよび粒子座標共々に線形近似を施し次式を得る。

$$\begin{cases} x'' &= -\frac{x}{{\rho_0}^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta p}{p_0} \\ y'' &= 0 \\ \dot{s} &= v_0\left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0} - \frac{1}{\rho_0}x\right) \end{cases} \tag{3.98}$$

またここでも時間を表す (3.98) 第3式を書直しておく。

$$\tau' = \frac{1}{v_0}\left(-\frac{x}{\rho_0} + \frac{1}{{\gamma_0}^2}\frac{\Delta p}{p_0}\right) \tag{3.99}$$

(3.98) 式によれば、運動量偏差Δpにより水平方向の運動に影響が生じる、更に水平方向の運動および運動量偏差が時間変動に影響する。この影響の流れの向きは偏向磁石内部に限定すれば一方的である。

運動量偏差 $\Longrightarrow$ 水平運動 $\Longrightarrow$ 時間偏差

垂直方向の運動は時間変動に関与しないので、以後この節内では考慮しない。

転送行列の拡張

水平運動への運動量偏差の影響を取り扱うため3元ベクトルを導入する。さらに時間変動を扱うため4元ベクトルに拡張される。これら3元および4元ベクトルの各々に対して拡張された転送行列が準備される。

水平運動　(3.98) 式を、まず水平運動について曲率半径ρ_0が一定な条件下で解く。ここでは右辺第2項の非斉次項の存在に注意する必要がある。C_1とC_2を積分定数として、一般解は (3.100) 式に与えられる。

$$\begin{cases} x(s) = \frac{\Delta p}{p_0}\rho_0 + C_2\cos\frac{s}{\rho_0} + C_1\sin\frac{s}{\rho_0} \\ x'(s) = \frac{1}{\rho_0}\left(-C_2\sin\frac{s}{\rho_0} + C_1\cos\frac{s}{\rho_0}\right) \end{cases} \tag{3.100}$$

運動量のずれΔpから生まれた非斉次項を含めて、転送行列の方法で粒子運動を記述する事を考える。それには3元ベクトル$\mathbf{x}_3(s)$を次式により導入し、

$$\mathbf{x}_3(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \tag{3.101}$$

次式による拡張された初期条件を用いる。

$$\mathbf{x}_{3\sin}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_{3\cos}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \tag{3.102}$$

上式からサイン型初期条件に従いC_1とC_2を決めることで、サイン型軌跡 (3.103) 式を得る。

$$\begin{cases} x_{\sin}(s) = \rho_0\sin\frac{s}{\rho_0} + \frac{\Delta p}{p_0}\rho_0\left(1 - \cos\frac{s}{\rho_0}\right) \\ x'_{\sin}(s) = \cos\frac{s}{\rho_0} + \frac{\Delta p}{p_0}\sin\frac{s}{\rho_0} \end{cases} \tag{3.103}$$

またコサイン型初期条件によりC_1とC_2を決めると、コサイン型軌跡 (3.104) 式を得る。

$$\begin{cases} x_{\cos}(s) = \cos\frac{s}{\rho_0} + \frac{\Delta p}{p_0}\rho_0\left(1 - \cos\frac{s}{\rho_0}\right) \\ x'_{\cos}(s) = -\frac{1}{\rho_0}\sin\frac{s}{\rho_0} + \frac{\Delta p}{p_0}\sin\frac{s}{\rho_0} \end{cases} \tag{3.104}$$

これにより運動量偏差Δpから生じる非斉次項を含めて粒子運動を記述するには拡張した (3.101) 式の3元ベクトル$\mathbf{x}_3(s)$と、対応する3×3転送行列$M_3(s,0)$を次式により導入すればよい事が分かる。

$$M_3(s,0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{s}{\rho_0} & \rho_0\sin\frac{s}{\rho_0} & \rho_0\left(1 - \cos\frac{s}{\rho_0}\right) \\ -\frac{1}{\rho_0}\sin\frac{s}{\rho_0} & \cos\frac{s}{\rho_0} & \sin\frac{s}{\rho_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.105}$$

時間変動　水平方向運動の一般解 (3.100) 式を時間の運動方程式 (3.99) に代入しsで積分すれば、$\tau(s)$の一般解として次式を得る。

$$\begin{aligned} \tau(s) = \; & \frac{1}{v_0}\left(-\frac{\Delta p}{p_0}s + C_1\cos\frac{s}{\rho_0} - C_2\sin\frac{s}{\rho_0}\right) \\ & + \frac{1}{v_0\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}s + C_3 \end{aligned} \tag{3.106}$$

この結果も先程と同じく、転送行列を使って表示できるようにしておこう。次式で定義される更に拡張された4元ベクトル$\mathbf{x}_4$を導入する。

$$\mathbf{x}_4(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ v_0\tau(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \tag{3.107}$$

ここで時間成分を$v_0\tau$としたのは水平方向と次元を合わせるためである。

また次式のさらに拡張された初期条件を用いる。

$$\mathbf{x}_{4\sin}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_{4\cos}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

上記初期条件を満たす時間偏差の解は、積分定数C_1、C_2を（3.103）および（3.104）式のサイン型およびコサイン型軌跡と同じに選び、その各々に対してスタート位置での時間差ゼロ$\tau(0)=0$となるように積分定数C_3を決めた（3.109）式である。

$$\begin{cases} \tau_{\sin}(s) = & \frac{\rho_0}{v_0}\left(\cos\frac{s}{\rho_0}-1\right) \\ & +\frac{1}{v_0}\left\{\rho_0\sin\frac{s}{\rho_0}+\left(\frac{1}{\gamma_0^2}-1\right)s\right\}\frac{\Delta p}{p_0} \\ \tau_{\cos}(s) = & -\frac{1}{v_0}\sin\frac{s}{\rho_0} \\ & +\frac{1}{v_0}\left\{\rho_0\sin\frac{s}{\rho_0}+\left(\frac{1}{\gamma_0^2}-1\right)s\right\}\frac{\Delta p}{p_0} \end{cases} \tag{3.109}$$

この結果から4 × 4転送行列を次のように決めれば、（3.107）式で定義される更に拡張された4元ベクトル$\mathbf{x}_4$追跡できる。

$$M_4(s,0)=$$
$$\begin{pmatrix} \cos\frac{s}{\rho_0} & \rho_0\sin\frac{s}{\rho_0} & 0 & \rho_0\left(1-\cos\frac{s}{\rho_0}\right) \\ -\frac{1}{\rho_0}\sin\frac{s}{\rho_0} & \cos\frac{s}{\rho_0} & 0 & \sin\frac{s}{\rho_0} \\ -\sin\frac{s}{\rho_0} & \rho_0\left(\cos\frac{s}{\rho_0}-1\right) & 1 & \begin{matrix}\rho_0\sin\frac{s}{\rho_0} \\ +\left(\frac{1}{\gamma_0^2}-1\right)s\end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.110}$$

高周波加速空洞　高周波加速空洞が粒子運動へ影響するのは、前に仮定した長さゼロの空洞の場合、到達時間によって異なるエネルギー獲得量である。この獲得エネルギーは加速高周波電圧の時間的変化を線形近似することにより（3.33）式で与えられている。また獲得エネルギーと運動量との関係（3.34）式を使えば、到達時間偏差を距離の次元で示す$v_0\tau$と運動量偏差$\frac{\Delta p}{p_0}$を元とするベクトルと転送行列で次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-q}{v_0^2 p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q}{v_0 p_0}V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \tag{3.111}$$

ここで添え字のinおよびoutは各々加速空洞の直前および直後を意味する。

右辺の非斉次項の存在は、参照運動量粒子が高周波空洞で加速を受ける場合に対応する。この項が必然性をもつ加速器の具体例は、線形加速器における加速、シンクロトロンにおける加速、また貯蔵リングにおけるシンクロトロン放射に依るエネルギー損失の補給を取り扱う場合である。

3.4.2 転送行列によるシンクロトロン振動の追跡

水平方向と時間運動量方向を表わす4元ベクトルとその4 × 4の転送行列を使ってシンクロトロン振動を追跡して見る。

簡単化のため加速空洞はリング中に一箇所にだけ在り、他の加速器要素は磁石のみとする。磁石のみを表わす時、転送行列は一般的に2極磁石の転送行列と同じ次式の形に書ける。

$$M_{4mag}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & e \\ m_{21} & m_{22} & 0 & f \\ h & i & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.112}$$

この形の行列を掛け合わせると再びこの形に書けることは簡単に確認できる。このようにして高周波空洞部以外の転送行列をまとめて書くことにしよう。

Symplectic 条件

（3.112）式の行列要素の自由度は、正準運動を記述する転送行列と言う条件のために、実はもっと少ない。すなわち次式に定義されるSymplectic行列を使って表わされるSymplectic条件（3.114）式を満たさなければならない[8]。

$$S_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.113}$$

$$M_{4mag}^T S_4 M_{4mag} = S_4 \tag{3.114}$$

このSymplectic条件から決まる（3.112）式の行列要素相互の関係を露に書き出せば、次のようになる。

$$\begin{cases} m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}=1 \\ h=-m_{11}f+m_{21}e \\ i=-m_{12}f+m_{22}e \end{cases} \tag{3.115}$$

運動量分散関数

4 × 4転送行列（3.112）式から時間τに対応する行と列を除いて3 × 3転送行列（3.116）式を作れば、（3.101）式

[8]我々の扱う転送行列が、一般にSymplectic条件を満足することを、これまで露には証明していない。しかし具体的に求めた転送行列が、ここで示したSymplectic条件を満たすことは容易に確認できる。さらに条件を満たす転送行列間の積で定義される転送行列が条件を満たすことも明白である。

で定義された3元ベクトルにより運動量偏差（磁場の中では一定に保たれる）を持った粒子の追跡ができる。

$$M_{3mag}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & e \\ m_{21} & m_{22} & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.116}$$

この行列が周回行列である場合には、この行列の固有値1に属する固有ベクトルは、運動量偏差の在る粒子の閉軌道を与える。すなわち運動量によるビーム軌道の分散がこれによって記述される。この固有ベクトルの第１成分を運動量分散関数と称しそのs微分は第２成分で与えられる。一方他の２つの固有値に属する固有ベクトルはこの閉軌道を中心とする自由なベータトロン振動を表わしている。

具体的に周回行列から運動量分散関数η_xを計算するには次式を解けばよい。

$$M_{3mag}\begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_x' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_x' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.117}$$

このようにして、場所sに於ける周回行列からその点の運動量分散関数とその微分を求めると（3.118）式となる。逆にこれを使って周回行列要素を表現すると（3.119）式になる。

$$\begin{cases} \eta_x(s) &= -\frac{e(1-m_{22})+fm_{12}}{-2+m_{11}+m_{22}} \\ \eta_x'(s) &= -\frac{f(1-m_{11})+em_{21}}{-2+m_{11}+m_{22}} \end{cases} \tag{3.118}$$

$$\begin{cases} e(s) &= \eta_x(1-m_{11})-\eta_x' m_{12} \\ f(s) &= \eta_x'(1-m_{22})-\eta_x m_{21} \end{cases} \tag{3.119}$$

運動の分離

上記Symplectic条件と運動量分散関数を使って周回行列としての（3.112）式を書き直すと（3.120）式になる。

$$M_{4mag}=$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & \eta_x(1-m_{11}) \\ & & & -\eta_x' m_{12} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \eta_x'(1-m_{22}) \\ & & & -\eta_x m_{21} \\ \eta_x'(1-m_{11}) & -\eta_x(1-m_{22}) & 1 & g \\ +\eta_x m_{21} & -\eta_x' m_{12} & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.120}$$

この周回行列から知れる所は、一般には水平運動（ベータトロン振動）と時間運動量運動（シンクロトロン振動）とは、線形近似の範囲でも、互いに結合しているということである。運動量分散関数$\eta_x(s)$とその微分$\eta_x'(s)$がゼロの場所に限り周回行列は区分対角化される。しかし円形加速器で全周に亙りゼロ分散を実現することは原理的に不可能である。

重要な点は、加速空洞が設置される場所で周回行列が区分対角化されていることが、運動の分離の為の必要充分条件だと言うことである。この「運動分離」の物理的意味合いは、ベータトロン振動がシンクロトロン振動に影響をしない、またその逆も成立するということである。もちろんたとえ加速空洞がゼロ分散の場所に設置されていても、運動量分散関数がゼロでない場所ではシンクロトロン振動による運動量の増減がビーム位置を通じて観測できるであろう。しかし加速空洞の位置で観測する限り運動が完全に分離されている点が本質的である。

3.4.3 分離されたシンクロトロン振動

運動が分離されている条件、すなわち加速空洞が設置された場所の運動量分散関数とそのs微分がゼロであるときを考える。加速空洞が設置された場所の（磁場のみを考慮した）周回行列に、次のように加速空洞を表わす転送行列をかけて高周波加速を含む全周の周回行列を作ることができる。

$$M_{4tot}\equiv M_{4rf}M_{4mag}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-q}{v_0^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & \frac{-q}{v_0^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) & 1-g\frac{q}{v_0^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

この場所では周回行列が区分対角化されている事が分かる。すなわち加速空洞位置で見る限りベータトロン振動とシンクロトロン振動は、各々の2×2周回行列を使い、独立に運動を追跡できる。ここでは（3.122）式の2×2周回行列を使い、既に学んだベタートロン振動で用いた方法を適用してシンクロトロン振動を調べる。

$$M_{2syn}=\begin{pmatrix} 1 & g \\ \frac{-q}{v_0^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) & 1-g\frac{q}{v_0^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

位相安定性とトランジッションエネルギー

振動の安定条件は、Floquetの定理で学んだように周回行列の跡の絶対値が２を越えないことであり、（3.123）式にその条件を明示する。

$$0 \leq g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \leq 4 \qquad (3.123)$$

この安定性条件を定性的に解釈してみる。$g < 0$の場合には、$\Delta p > 0$の粒子の周回時間が参照運動量粒子より遅れる。安定振動のためには高いエネルギーを持つ粒子の加速は相対的に少なくなければならないから、速く到達した粒子をより多く加速する高周波電場の位相$q\dot{V}_{RF}(t_0) < 0$で運動が安定である。速度が殆ど光速度に達しているため、周回時間が運動量偏差に依存した周長だけで決まる超相対論的粒子の加速は、このような状況下で行われる。

一方、運動量増加に伴う速度増加が大きい低エネルギー領域のビーム加速では、あるいは運動量に伴う経路長増加が無い直線加速器では$g > 0$であり、遅く到達した粒子をより多く加速する高周波電場の位相$q\dot{V}_{RF}(t_0) > 0$でシンクロトロン振動が安定である。

陽子シンクロトロンでは低エネルギーで入射したビームを高エネルギーまで加速する。このとき加速途中でgの符号が正から負へ変わる場合がある。この変わり目のビームエネルギーのことをトランジッションエネルギーと呼び、安定加速のために、ここで高周波位相を大きく変えてやらなければならない。

歴史的には強収束加速器の発明と共にトランジッションエネルギーの存在が問題となった。ブルックヘブン国立研究所（BNL）のAGSや欧州原子核研究所（CERN）のCPSなどの陽子シンクロトロンはこの現象を念頭に起きつつも敢えてトランジッションエネルギーを有する設計で作られている。しかし加速中トランジッションエネルギーの前後では、ビーム不安定現象が生じやすく、ビーム損失やエミッタンス増大につながりがちである。今後に建設が予定されている大型ハドロン施設（JHF）の大強度陽子シンクロトロンでは特殊なビーム光学系を採用することでトランジッションエネルギーを避ける試みも行われている。

振動数とTwissパラメター

ベータトロン振動の周回行列要素をベータトロン振動数やTwissパラメターで表現した（3.86）式に倣い、シンクロトロン振動の周回行列要素（3.122）式からシンクロトロン振動数ν_s（3.124）式やシンクロトロン振動を表現するTwissパラメターβ_s、α_sそしてγ_s（3.126）式を求める。

$$\begin{cases} \cos 2\pi\nu_s = 1 - \frac{1}{2}\left\{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)\right\} \\ \sin 2\pi\nu_s = \frac{g}{|g|}\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \frac{1}{4}\left\{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)\right\}^2} \end{cases} \qquad (3.124)$$

シンクロトロン振動の角速度は、コサイン関数の展開から次のように近似され見慣れた表現を得る。またサイン項の符号から判るように、ν_sの符号はgの符号と同じである。

$$\Omega_s \equiv 2\pi\nu_s \approx \sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)} \qquad (3.125)$$

$$\begin{cases} \beta_s = \dfrac{|g|}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)\right)^2}} \\ \alpha_s = \dfrac{1}{2} \dfrac{|g| \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)\right)^2}} \\ \gamma_s = \dfrac{g}{|g|} \dfrac{\frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)\right)^2}} \end{cases} \qquad (3.126)$$

同一粒子が、シンクロトロン振動を通じて到達する最大時間偏差と最大運動量偏差の比率は、Twissパラメターを使って次のように求めることができる。

$$\frac{\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)_{max}}{(v_0\tau)_{max}} = \sqrt{\frac{\gamma_s}{\beta_s}} = \sqrt{\frac{\frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{g}} \approx \frac{2\pi\nu_s}{g} \qquad (3.127)$$

Chapter 4

シンクロトロン放射の特性

4.1 シンクロトロン放射計算の基礎

4.1.1 Maxwellの方程式からFeynmann表現へ

Maxwellの方程式から波動方程式へ

Maxwellの方程式（4.1）式から出発しよう。

$$\begin{cases} rot\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0 \\ div\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = 0 \\ rot\mathbf{B}(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x},t) \\ div\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x},t) \end{cases} \tag{4.1}$$

ここで $\mathbf{E}$は電界強度$[V/m]$、$\mathbf{B}$は磁束密度$[T]$、$\mathbf{i}$は電流密度$[A/m^2]$、ρは電荷密度$[C/m^3]$、ε_0は真空の誘電率$[F/m]$、μ_0は透磁率$[H/m]$、$\mathbf{x}$は位置$[m]$、tは時間$[sec]$、cは光速度$[m/sec]$を表す。

ここでスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを（4.2）式によって導入する。

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x},t)}{\partial t} - grad\phi(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t) = rot\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \end{cases} \tag{4.2}$$

Lorentzゲージ条件（4.3）式を採用して、

$$div\mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = 0 \tag{4.3}$$

若干の代数演算の後、カーテシアン座標系の場合、ポテンシャルは電荷密度と電流密度を発生源とする（4.4）式の波動方程式で与えられる。

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{x},t) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = -\mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x},t) \end{cases} \tag{4.4}$$

Δは（4.5）式で表わされるカーテシアン座標系におけるラプラシアンである。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z} \tag{4.5}$$

波動方程式の解の中で、発生源から出発して伝搬していくものを選択する。電荷および電流密度が与えられれば、このように因果律に従うスカラーおよびベクトルポテンシャルは遅延ポテンシャルと呼ばれる遅延Green関数（4.6）式によって計算することができる。

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x},t) = \\ \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\rho(\mathbf{x}',t') \\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \\ \quad \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\mathbf{i}(\mathbf{x}',t') \end{cases} \tag{4.6}$$

ここで$\delta(t)$はDiracのデルタ関数である。

運動点電荷が作る電磁場

電荷eを持ち軌道$\mathbf{r}(t')$に沿って運動する点電荷を源とする電荷密度と電流密度は（4.7）式のように表現することができる。

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}',t') = e\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{r}(t')) \\ \mathbf{i}(\mathbf{x}',t') = e\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{r}(t'))\frac{d}{dt'}\mathbf{r}(t') \end{cases} \tag{4.7}$$

このとき（4.6）式で定義された遅延ポテンシャルは（4.8）式の形に書ける。

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x},t) = \\ \quad \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{x}'\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{r}(t')) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\times \\ \int d^3\mathbf{x}'\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\delta^3(\mathbf{x}'-\mathbf{r}(t'))\frac{d}{dt'}\mathbf{r}(t') \end{cases} \tag{4.8}$$

運動点電荷と観測者の位置関係をFig. 4.1に示す。ここでt'は点電荷の発光体時間をtは観測者の観測者時間を表すものとする。時刻t'に放射された光が観測者に届く時刻tは（4.9）式で与えられる。

$$t = t' + \frac{R(t')}{c} \tag{4.9}$$

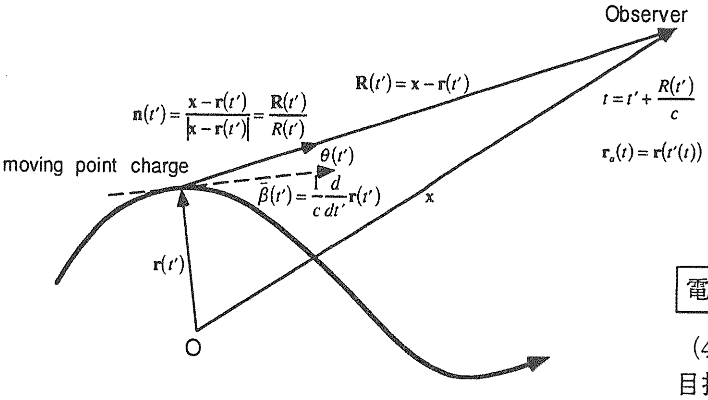


Figure 4.1: 運動点電荷と観測者の位置関係記述法

そのため観測者には点電荷の運動が（4.10）式のように見える。

$$\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}(t(t')) \qquad (4.10)$$

これを点電荷の「見かけの運動」と呼ぶことにする。

Fig. 4.1に基づいて、点電荷と観測者の位置関係の記述方法を導入する。

$$\begin{cases} \mathbf{R}(t') = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t') \\ \mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|} = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \end{cases} \qquad (4.11)$$

また時間変換係数（scale change factor）$\kappa(t')$を（4.13）式により導入する。[1]

$$\begin{aligned} \kappa(t') &\equiv \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left\{t' + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c}\right\} \\ &= 1 - \frac{1}{c}\mathbf{n}(t') \cdot \frac{d}{dt'}\mathbf{r}(t') = 1 - \mathbf{n}(t') \cdot \vec{\beta}(t') \end{aligned} \qquad (4.13)$$

点電荷が観測者に正面から光速度に近い速さで近づくとき、時間変換係数$\kappa(t')$は非常にゼロに近くなる事に留意して置いて欲しい。これは相対論的な光のドップラーシフトを示す量である。

[1]本文の流れを損なわないように、脚注で演算展開の詳細を示す。

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt'}|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')| = \frac{d}{dt'}\{(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{r}(t'))\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt'}\{(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{r}(t'))\}}{\sqrt{\{(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{r}(t'))\}}} \\ &= -\frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|} \cdot \frac{d}{dt'}\mathbf{r}(t') = -\mathbf{n}(t') \cdot \frac{d}{dt'}\mathbf{r}(t') \end{aligned} \qquad (4.12)$$

点電荷の運動から生じる（4.8）式で表された遅延ポテンシャルを空間積分することにより（4.14）式で遅延ポテンシャルが書ける。[2]

$$t = t' + \frac{R(t')}{c}, \quad \mathbf{r}_a(t) = \mathbf{r}(t'(t))$$

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}\frac{d}{dt'}\mathbf{r}(t') \end{cases} \qquad (4.14)$$

電磁場の発光体時間表現

（4.14）式から出発して、理解し易く使い易い電場表現を目指して、計算を進める。

遅延ポテンシャルの微分　（4.2）式に従い遅延ポテンシャルから電磁場を導く事ができる。電場を求めるため（4.14）式に表されたスカラーポテンシャルの空間微分$grad$を行う。これは、スカラーポテンシャルが空間的にはRのみを通じて定義されている為に（4.15）式の関係を使って（4.16）式のように実行される。

$$grad = (grad \quad R)\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{r}}{R}\frac{\partial}{\partial R} = \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial R} \qquad (4.15)$$

$$\begin{aligned} grad\phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right)}{R}\right) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n}\frac{-1}{R^2(t')}\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \\ &\quad + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{n}\frac{1}{R(t')}\frac{\partial}{\partial R(t')}\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \end{aligned} \qquad (4.16)$$

（4.14）式に表されたベクトルポテンシャルの時間tによる微分は（4.17）式のように行うことができる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\mu_0 ce}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\vec{\beta}(t')}{R(t')}\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \\ &= -\frac{\mu_0 c^2 e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\vec{\beta}(t')}{R(t')}\frac{\partial}{\partial R(t')}\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \end{aligned} \qquad (4.17)$$

これらを合計して、観測者位置における電場は（4.18）式で計算される。

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -grad\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\mathbf{n}(t')}{R^2(t')}\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \\ &\quad - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{R(t')}\frac{\partial}{\partial R(t')}\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \end{aligned} \qquad (4.18)$$

[2]既にFiG. 4.1に基付いてtとt'の間の関係を説明したが、積分変数としてのt'はtとは独立である。この先δ関数を含む積分の実行により、（4.21）式でtと関係づけられる。

遅延ポテンシャルの時間積分　(4.18) 式の形で得られた電場を発光体時間について積分する、(4.18) 式第1項については (4.20) 式になる。[3]

$$\left[\text{(4.18) 式第1項} \right] = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t') R^2(t')} \quad (4.20)$$

ここで$t'(t)$はδ関数の積分に際して新たに (4.21) 式で定義される観測者時間tの関数である。即ち特定の観測者時刻tに届く光の発光体時刻がt'であり、この関係は既に見た (4.9) 式と同じものである。

$$t - t'(t) - \frac{R(t'(t))}{c} = 0 \quad (4.21)$$

(4.18) 式第2項については、$y = t' + \frac{R(t')}{c}$と置く事で次のように計算される。[4]

$$\begin{aligned} &\left[\text{(4.18) 式第2項} \right] \\ &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \frac{\partial}{\partial y} \delta(t-y) \end{aligned} \quad (4.23)$$

部分積分をして、

$$\begin{aligned} &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \delta(t-y) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{dt'}{dt} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c} \frac{1}{\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

(4.20) 式と (4.24) 式の和から、最終的に観測者位置における電場は (4.25) 式に与えられる。

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \\ &\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t') R^2(t')} + \frac{1}{c\kappa(t')} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{\mathbf{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{\kappa(t') R(t')} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

電磁場のHeaviside-Feynmann表現

(4.25) 式右辺の電場表現は発光体時間表示であるが、これを観測者時間表示へと変換してみよう。(4.11) 第2式をt'で微分、そして (4.13) 式に$\mathbf{n}$を掛ける事により得られる[5] (4.28) 式の関係を使うことにより、

$$\mathbf{n} - \vec{\beta} = \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \vec{\beta} \right) + \kappa \mathbf{n} = \frac{R}{c} \frac{d\mathbf{n}}{dt'} + \kappa \mathbf{n} \quad (4.28)$$

(4.25) 式は (4.29) 式になる。

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \\ &\frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R} \right) + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

(4.29) 式の右辺第1項と第2項の和は (4.32) 式のように計算される。[6]

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{-1}{R^2} \left(-c\mathbf{n} \cdot \vec{\beta} \right) \mathbf{n} + \frac{1}{c\kappa} \frac{1}{R} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} \left(1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\beta} \right) + \frac{2}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} \left(\mathbf{n} \cdot \vec{\beta} \right) + \frac{1}{c\kappa} \frac{1}{R} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \\ &= \frac{\mathbf{n}}{R^2} - \frac{2}{\kappa} \frac{\mathbf{n}}{R^2} \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} + \frac{1}{c\kappa} \frac{1}{R} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \\ &= \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c\kappa} \left(-2 \frac{\mathbf{n}}{R^3} \frac{dR}{dt'} + \frac{1}{R^2} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \\ &= \frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

依って電場は (4.33) 式になる。

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

ここで独立変数を発光体時間t'から、観測者時間tに変換する。

$$t' \to t(t') = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} \quad (4.34)$$

この変換に伴い、発光体時間による微分も観測者時間による微分へと (4.35) 式のように変換される。

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt'} \to \frac{1}{\kappa} \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \to \frac{d}{dt} \quad (4.35)$$

---

[3]ここで次の関係を使った。

$$\kappa\left(t'(t)\right) = \left[\frac{dt'(t)}{dt} \right]^{-1} \quad (4.19)$$

[4]次の関係を使った。

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial R} &= \frac{1}{c} \\ \frac{dy}{dt'} &= \kappa(t') \end{aligned} \quad (4.22)$$

[5] (4.11) 第2式のt'微分より、

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt'} = -\frac{\dot{\mathbf{R}}}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = \frac{c}{R} \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \vec{\beta} \right) \quad (4.26)$$

(4.13) 式に$\mathbf{n}$を掛け、ベクトル公式を使うことで、

$$\kappa \mathbf{n} = \mathbf{n} - \left(\mathbf{n} \cdot \vec{\beta} \right) \mathbf{n} = \mathbf{n} - \left\{ \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \vec{\beta} \right) + \vec{\beta} \right\} \quad (4.27)$$

[6]この演算では次の関係を使った。

$$\frac{dR}{dt'} = -c\mathbf{n}\vec{\beta} \quad (4.30)$$

および

$$\kappa = 1 - \mathbf{n}\vec{\beta} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR}{dt'} \quad (4.31)$$

この変換を（4.33）式に施すことで、観測者位置における電場のFeynmann表現（4.36）式に到達する。[7]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2}+\frac{R}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{n}}{R^2}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{n}\right] \tag{4.36}$$

（4.36）式によれば、観測者から見た点電荷の運動が、そのまま観測される電場特性に反映する。このために、例えばシンクロトロン放射光の偏光特性などは、観測される点電荷の「見かけの運動」を考える事で殆ど直感的に知ることができる。またこの表現はコンピュータで数値的に電磁場を計算するのに適した形式でもあり、SADコードの電磁場計算はこの表現に基づいて行われている。

磁場と電場

放射磁場の計算　当然、電場と同様に、磁場についても計算することができる。導出は電場と同様比較的手間がかかるが、最終的に観測者位置の磁場は（4.37）式になる。これは電場を与える（4.25）式に対応した表現である。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\frac{\mu_0 ce}{4\pi}\left[\frac{\vec{\beta}(t')\times\mathbf{n}(t')}{\kappa(t')R^2(t')}+\frac{1}{c\kappa(t')}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\frac{\vec{\beta}(t')\times\mathbf{n}(t')}{\kappa(t')R(t')}\right\}\right] \tag{4.37}$$

電場と磁場の関係　（4.37）式の磁場表現を、$\vec{\beta}$を式から消去すると言う方針の元で変換する。（4.28）式の関係を使うと（4.37）式第1項は（4.38）式になる。

$$\begin{aligned}&[\text{（4.37）式角カッコ内第1項}]\\&=\frac{1}{\kappa R^2}\left(-\frac{R}{c}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}+(1-\kappa)\mathbf{n}\right)\times\mathbf{n}\\&=-\frac{1}{c\kappa R}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\times\mathbf{n}\end{aligned} \tag{4.38}$$

（4.38）式に展開された代数計算の結果を使うことで（4.37）式第2項は（4.39）式になる。

$$\begin{aligned}&[\text{（4.37）式角カッコ内第2項}]\\&=-\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\times\mathbf{n}\right)\\&=-\frac{1}{c\kappa}\left\{\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right)\times\mathbf{n}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\times\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right\}\\&=-\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right)\times\mathbf{n}\end{aligned} \tag{4.39}$$

このようにして得た（4.37）式角カッコ内第1項と第2項の和を取ることで、（4.37）式は（4.40）式になる。

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)&=-\frac{\mu_0 ce}{4\pi}\left[\frac{1}{c\kappa R}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right)\right]\times\mathbf{n}\\&=\mathbf{n}\times\frac{\mu_0 ce}{4\pi}\left[\frac{1}{c\kappa R}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.40}$$

[7]この表現はR. Feynmannの物理学教科書で紹介されたため良く知られているが、既に、その昔O. Heavisideが発見していたものである。

ここで電場との比較をするために（4.29）式の電場表現を思い出そう。

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\\&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\kappa}\frac{\mathbf{n}}{R^2}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\mathbf{n}}{R}\right)+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\mathbf{n}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.41}$$

第2項を（4.42）式のように変換する。

$$\begin{aligned}&[\text{（4.41）式角カッコ内第2項}]\\&=\frac{1}{c\kappa}\left\{\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{R}\right)\mathbf{n}+\frac{1}{R}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right\}\end{aligned} \tag{4.42}$$

このようにして（4.43）式を得る。

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\times\\&\left[\frac{1}{\kappa}\frac{\mathbf{n}}{R^2}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{R}\right)\mathbf{n}+\frac{1}{c\kappa R}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\mathbf{n}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.43}$$

（4.43）式と$\mathbf{n}$との外積をとり（4.40）式に示される磁場と比較する事で磁場と電場の関係が分かる。磁場と電場は互いに直交し、また共に進行方向$\mathbf{n}$に直交した場の成分のみを有する横波であることが示されている。

$$\begin{aligned}\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\mathbf{x},t)&=\mathbf{n}\times\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{c\kappa R}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right)\right]\\&=\mathbf{n}\times\frac{\mu_0 ec^2}{4\pi}\left[\frac{1}{c\kappa R}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}+\frac{1}{c\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{c\kappa}\frac{d\mathbf{n}}{dt'}\right)\right]=c\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\end{aligned} \tag{4.44}$$

4.1.2 シンクロトロン放射の解析的計算の方法

一般公式

すでに求めた発光体時間表示の電場表現（4.25）式から出発して、（4.45）式を導いておく。[8] ここでドットは発光体時間微分を表す。

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\\&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{n}(t')}{\kappa(t')R^2(t')}+\frac{1}{c\kappa(t')}\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\frac{\mathbf{n}(t')-\vec{\beta}(t')}{\kappa(t')R(t')}\right\}\right]\\&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{R^2\kappa^3}\left(\mathbf{n}-\vec{\beta}\right)\\&\quad+\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{R\kappa^3}\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}\times\left\{\kappa\dot{\vec{\beta}}+\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)\vec{\beta}\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.45}$$

遠距離場近似

（4.46）式に示される遠距離場近似を使う。

$$\begin{cases}\mathbf{x}=\mathbf{n}R_0\\R_0\to\infty\\|\mathbf{r}(t')|/R_0\to 0\end{cases} \tag{4.46}$$

[8]この（4.45）式の導出は示さないが、かなり長い数式展開が必要である。

この内容を言葉で言えば、次[9]のようになる。

- 光を受けている間、発光体と観測者の位置関係を表すベクトル$\mathbf{n}$は不変であること。
- 発光体と観測者の距離は充分離れていること。
- 光を受けている間、発光体と観測者の距離が変わらないこと。

加速度運動

R_0が大きいと言う条件により、(4.45) 式の第1項は$O\left(R_0^{-2}\right)$ゆえ無視できる。

$$\begin{aligned}&\lim_{R_0\to\infty} R_0\mathbf{E}(\mathbf{n}R_0,t)\\&=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{\kappa^3}\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}\times\left\{\kappa\dot{\vec{\beta}}+\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)\vec{\beta}\right\}\right]\\&\equiv\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\mathbf{a}\end{aligned}\tag{4.47}$$

これにより運動粒子の横方向加速度運動を表す$\mathbf{a}$は(4.48) 式のように定義されたことになる。

$$\mathbf{a}=\frac{c}{\kappa^3}\mathbf{n}\times\left[\mathbf{n}\times\left\{\kappa\dot{\vec{\beta}}+\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)\vec{\beta}\right\}\right]\tag{4.48}$$

後の周波数領域の計算上便利なように (4.48) 式とは違う$\mathbf{a}$の表式を導出しておく。(4.49) 式の関係が導かれるが、この第2項は$R\to\infty$という条件下で無視することができる。これを (4.48) 式に代入することで新たな$\mathbf{a}$の表式 (4.50) 式を得る。

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{\kappa}\vec{\beta}\right)\\&=\frac{1}{\kappa^2}\left\{\frac{c}{R}\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}+\mathbf{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right\}\vec{\beta}+\frac{1}{\kappa}\dot{\vec{\beta}}\\&=\frac{1}{\kappa^2}\left\{\kappa\dot{\vec{\beta}}+\left(\mathbf{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)\vec{\beta}\right\}\\&\qquad+\frac{1}{\kappa^2}\frac{c}{R}\left\{\mathbf{n}\times\left(\mathbf{n}\times\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\beta}\right\}\vec{\beta}\end{aligned}\tag{4.49}$$

$$\mathbf{a}=c\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{n}\times\frac{1}{\kappa}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{\kappa}\vec{\beta}\right)\right\}\tag{4.50}$$

[9]これらの条件が成立しない場合を考えると、近似の意味がより明確になる。例えば、アンジュレータのように長い発光体の光を斜め方向から観測する時、また正面の場合でもアンジュレータの長さ程度の近距離から観測する時などには遠距離場近似が成立しない。

放射のパワー

ポインティングベクトルを計算する。ここでは既に求めた電場と磁場の関係 (4.44) 式を使って電場のみで表そう。

$$\begin{aligned}\mathbf{S}&=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\mathbf{E}\times\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0 c}\mathbf{E}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\\&=\frac{1}{\mu_0 c}\left\{\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\right\}\\&=\frac{1}{\mu_0 c}\mathbf{n}\left|\mathbf{E}\right|^2=\varepsilon_0 c\mathbf{n}\left|\mathbf{E}\right|^2\end{aligned}\tag{4.51}$$

電子1個当たりの角密度パワー (Angular Power Density) は次のように$\mathbf{a}$を使って与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2W}{d^2\Omega}&=\lim_{R_0\to\infty}R_0^2\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}dt\\&=\varepsilon_0 c\int_{-\infty}^{+\infty}\left|R_0\mathbf{E}\right|^2dt\\&=\varepsilon_0 c\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathbf{a}\right|^2dt\end{aligned}\tag{4.52}$$

平行運動をする即ち角度発散のない[10]電子からなる電流Iのビームは、干渉性放射条件を満たさない限り[11]、(4.53) 式の角密度パワーの放射をする。

$$\frac{d^2P}{d^2\Omega}=\varepsilon_0 c\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2\frac{I}{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathbf{a}\right|^2dt\tag{4.53}$$

放射のスペクトル

電場のフーリエ変換を (4.54) 式により導入する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\mathbf{E}(\mathbf{x},t)e^{i\omega t}\tag{4.54}$$

Parsevalの等式 (4.55) 式を利用することで、周波数表示の電場と時間表示の電場が関係づけられる。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\right|^2dt&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)\right|^2d\omega\\&=2\int_0^{\infty}\left|\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega)\right|^2d\omega\end{aligned}\tag{4.55}$$

周波数表示による電場を使って電子1個当たりの角密度パワーが (4.56) 式で与えられる。これは (4.52) 式を別の方法で表現したことになる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2W}{d^2\Omega}&=\lim_{R_0\to\infty}\varepsilon_0 c\int_{-\infty}^{\infty}\left|R_0\mathbf{E}(\mathbf{n}R_0,t)\right|^2dt\\&=\lim_{R_0\to\infty}2\varepsilon_0 c\int_0^{\infty}\left|R_0\mathbf{E}(\mathbf{n}R_0,\omega)\right|^2d\omega\end{aligned}\tag{4.56}$$

(4.56) 式は周波数を含んだ表示なので、周波数で微分することでその情報を取り出すことができる。すなわち電

[10]角度の拡がりのないことだけが条件のように聞こえるが、遠距離場近似により電子ビームサイズは既に無限小が仮定されている。
[11]以下の計算は単一電子による放射を基礎にしている事に留意してほしい。この仮定に基づいて、スペクトルや光の角度発散などを計算することになる。異なる電子から放射される光子間に相関がある自由電子レーザーなどの場合にはこの仮定は成り立たない。

子1個当たりの角密度パワースペクトルが (4.57) 式で与えられる。

$$\frac{d^3W}{d\omega d^2\Omega}=2\varepsilon_0 c\lim_{R_0\to\infty}\left|R_0\mathbf{E}\left(\mathbf{n}R_0,\omega\right)\right|^2 \quad (4.57)$$

次の一連の代数計算によって、周波数表示電場の具体的な形を求めよう。まず (4.54) 式から出発して (4.47) 式と (4.50) 式を順次代入する。その後、積分変数をtからt'に変更して部分積分を実行することで (4.58) 式を得る。

$$\begin{aligned}
&R_0\mathbf{E}\left(\mathbf{x},\omega\right)\\
&=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dtR_0\mathbf{E}\left(\mathbf{n}R_0,t\right)e^{i\omega t}\\
&=\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\tfrac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2}\mathbf{a}e^{i\omega t}\\
&=\tfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{n}\times\tfrac{1}{\kappa}\tfrac{d}{dt'}\left(\tfrac{1}{\kappa}\vec{\beta}\right)\right\}e^{i\omega t}\\
&=\tfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{n}\times\tfrac{d}{dt'}\left(\tfrac{1}{\kappa}\vec{\beta}\right)\right\}e^{i\omega t(t')}\\
&=\tfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{n}\times\left(\tfrac{1}{\kappa}\vec{\beta}\right)e^{i\omega t(t')}\right\}\Big|_{-\infty}^{\infty}\\
&\quad-\tfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{n}\times\left(\tfrac{1}{\kappa}\vec{\beta}\right)i\omega\tfrac{dt}{dt'}e^{i\omega t(t')}\right\}\\
&=\tfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-i\omega\right)\int_{-\infty}^{\infty}dt'\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{n}\times\vec{\beta}e^{i\omega t(t')}\right\}
\end{aligned} \quad (4.58)$$

ここで (4.59) 式によって$\mathbf{A}\left(\omega\right)$を定義する。

$$\mathbf{A}\left(\omega\right)\equiv\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\mathbf{n}\times\left\{\mathbf{n}\times\vec{\beta}e^{i\omega t(t')}\right\} \quad (4.59)$$

電子1個当たりの角密度パワースペクトル (Angular Spectral Power Density) が (4.60) 式で与えられる。

$$\frac{d^3W}{d\omega d^2\Omega}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\left|\mathbf{A}\left(\omega\right)\right|^2 \quad (4.60)$$

そして電流Iの平行運動電子ビームから生まれる角密度パワースペクトル (Spectral Angular Power Density) は (4.61) 式に与えられる。

$$\frac{d^3P}{d\omega d^2\Omega}=\frac{I}{e}\frac{d^3W}{d\omega d^2\Omega}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}I\left|\mathbf{A}\left(\omega\right)\right|^2 \quad (4.61)$$

(4.61) 式を充分狭い帯域$\Delta\omega$で積分してから、光子エネルギー$\hbar\omega$で割ることで、そのエネルギー帯域内の光子数が算出できる。そして角密度光束 (光子数) スペクトル (Spectral Angular Flux Density) $\mathcal{F}$が (4.62) 式に与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathcal{F}}{d^2\Omega}&=\tfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 c}I\left|\mathbf{A}\left(\omega\right)\right|^2\tfrac{\Delta\omega}{\hbar\omega}\\
&=\tfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\tfrac{\Delta\omega}{\omega}\tfrac{I}{e}\left|\mathbf{A}\left(\omega\right)\right|^2\\
&=\alpha\tfrac{\Delta\omega}{\omega}\tfrac{I}{e}\left|\mathbf{A}\left(\omega\right)\right|^2
\end{aligned} \quad (4.62)$$

ここでαは微細構造定数である。

4.1.3 偏光ベクトルと電磁場計算公式

放射電場を記述するために偏光ベクトルを導入する。発光体時間で表示された荷電粒子の軌跡から、時間領域および周波数領域で電場を計算するための一般公式を導く。

偏光ベクトル

具体的な粒子の運動軌跡を元に、発生するシンクロトロン放射光の特性を計算するには観測者の位置を知らなければならない。放射光を観測する座標系を導入する必要がある。荷電粒子の運動を記述する座標系と観測者座標系との関係をFig. 4.2に示す。この図の中にある観測者位置を示す単位ベクトル$\mathbf{n}$は (4.11) 式で定義されたものである。以下の取り扱いでは、ヘリカルアンジュレータのように荷電粒子の運動が平面上に留まらない場合も扱えるよう考慮しておく。

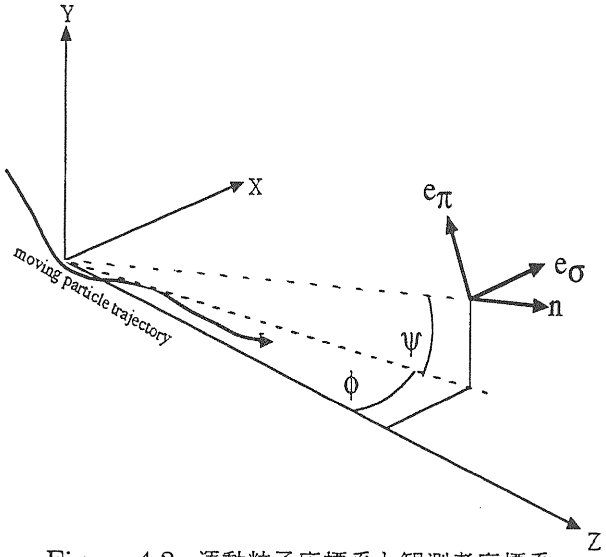


Figure 4.2: 運動粒子座標系と観測者座標系

これらの座標系同士は2度に渡る回転によって結ばれている。即ち、 (4.63) 式に示すように、運動粒子座標系の単位ベクトル$(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$を$y$軸の回りに$\phi$回転させ次に$x$軸の回りで$\psi$回転させると観測者座標系の単位ベクトル$(\mathbf{e}_\sigma,\mathbf{e}_\pi,\mathbf{n})$と一致する。

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\sigma \\ \mathbf{e}_\pi \\ \mathbf{n} \end{pmatrix} \equiv
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ -\sin\psi\sin\phi & \cos\psi & -\sin\psi\cos\phi \\ \cos\psi\sin\phi & \sin\psi & \cos\psi\cos\phi \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \tag{4.63}
$$

このとき、観測者位置を示す単位ベクトル$\mathbf{n}$は(x, y, s)座標系の単位ベクトルを使って（4.64）式で表される。

$$
\mathbf{n} = \cos\psi\sin\phi\mathbf{e}_x + \sin\psi\mathbf{e}_y + \cos\psi\cos\phi\mathbf{e}_z \tag{4.64}
$$

光速度cで割った速度ベクトル$\vec{\beta}$の(x, y, s)座標系での成分は（4.65）式である。ここで$\vec{\beta}$はβ_xとβ_yを通じてのみ変化している。

$$
\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \left(\beta_x, \beta_y, \sqrt{1 - \left(\gamma^{-2} + \beta_x^2 + \beta_y^2\right)}\right) \tag{4.65}
$$

ここでγは運動粒子の相対論係数である。

時間変換係数κは次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\kappa &= 1 - \vec{\beta}\cdot\mathbf{n} \\
&= 1 - \beta_x\cos\psi\sin\phi - \beta_y\sin\psi \\
&\quad - \sqrt{1 - \left(\gamma^{-2} + \beta_x^2 + \beta_y^2\right)}\cos\psi\cos\phi
\end{aligned} \tag{4.66}
$$

発光体時間t'による$\vec{\beta}$の微分（ドットで表す）を計算すると。

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{\beta}} &= \dot{\beta}_x \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\beta_x} + \dot{\beta}_y \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\beta_y} \\
&= \left(\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y, \frac{-\beta_x\dot{\beta}_x - \beta_y\dot{\beta}_y}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}}\right)
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

また$\mathbf{n}$との内積は、

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{\beta}}\cdot\mathbf{n} &= \dot{\beta}_x\cos\psi\sin\phi + \dot{\beta}_y\sin\psi \\
&\quad - \frac{\beta_x\dot{\beta}_x + \beta_y\dot{\beta}_y}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}}\cos\psi\cos\phi
\end{aligned} \tag{4.68}
$$

任意ベクトル$\mathbf{b} = b_x\mathbf{e}_x + b_y\mathbf{e}_y + b_z\mathbf{e}_z$は（4.64）式で定義された$\mathbf{n}$と次の表式を満たす。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b}) \\
&= (-b_x\cos\phi + b_z\sin\phi)\,\mathbf{e}_\sigma \\
&\quad + (b_x\sin\phi\sin\psi - b_y\cos\psi + b_z\cos\phi\sin\psi)\,\mathbf{e}_\pi \\
&\approx (-b_x + b_z\phi)\,\mathbf{e}_\sigma + (-b_y + b_z\psi)\,\mathbf{e}_\pi
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

放射光電場がこのように表された場合、電場の$\mathbf{n}$成分が存在しないことに注意しよう。既に述べたように、点電荷からの放射光は常に横波である。$\mathbf{e}_\sigma$および$\mathbf{e}_\pi$は単位偏光ベクトルと呼び、各々σ偏光成分とπ偏光成分を表示する為に用いられる。

時間領域の電場計算

時間領域での電場計算に際しては、（4.48）式で与えられる$\mathbf{a}$を計算するため$\mathbf{b}$として（4.70）式を使えばよい。

$$
\mathbf{b} \equiv \frac{\dot{\vec{\beta}}\kappa + \left(\mathbf{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}\right)\vec{\beta}}{\kappa^3} \tag{4.70}
$$

このとき、$\mathbf{b}$は（4.65）式から（4.68）式の間に求めた結果を代入することで(x, y, s)座標系の成分を使って（4.71）式で表現される。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b} =\ & \frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3}
\begin{pmatrix}
\kappa - \frac{\beta_x^2\cos\phi\cos\psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_x\cos\psi\sin\phi \\
-\frac{\beta_x\beta_y\cos\phi\cos\psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_y\cos\psi\sin\phi \\
\frac{-\kappa\beta_x}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} - \beta_x\cos\psi\cos\phi \\
\quad + \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}\cos\psi\sin\phi
\end{pmatrix} \\
&+ \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3}
\begin{pmatrix}
-\frac{\beta_x\beta_y\cos\phi\cos\psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_x\sin\psi \\
\kappa - \frac{\beta_y^2\cos\phi\cos\psi}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} + \beta_y\sin\psi \\
\frac{-\kappa\beta_y}{\sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}} - \beta_y\cos\psi\cos\phi \\
\quad + \sqrt{1-\beta_x^2-\beta_y^2-\gamma^{-2}}\sin\psi
\end{pmatrix} . \\
\approx\ & \frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3}
\begin{pmatrix} \kappa + (\phi-\beta_x)\beta_x \\ (\phi-\beta_x)\beta_y \\ \phi-\beta_x \end{pmatrix}
+ \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3}
\begin{pmatrix} (\psi-\beta_y)\beta_x \\ \kappa + (\psi-\beta_y)\beta_y \\ \psi-\beta_y \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

（4.71）式の近似として得た$\mathbf{b}$の成分表示を（4.69）式に代入することにより、（4.72）式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b}) \approx \\
&\left[\frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3}\left\{(\phi-\beta_x)^2 - \kappa\right\} + \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3}(\psi-\beta_y)(\phi-\beta_x)\right]\mathbf{e}_\sigma \\
&+ \left[\frac{\dot{\beta}_x}{\kappa^3}(\phi-\beta_x)(\psi-\beta_y) + \frac{\dot{\beta}_y}{\kappa^3}\left\{(\psi-\beta_y)^2 - \kappa\right\}\right]\mathbf{e}_\pi
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

（4.72）式の結果を（4.48）式と照らし合わせることで、偏光ベクトルを基底として$\mathbf{a}$を表現できる。これを

(4.53) 式に代入することで、各偏光状態に対する電流Iにおける角密度パワーが (4.73) 式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2P_\sigma}{d^2\Omega} \\ \frac{d^2P_\pi}{d^2\Omega} \end{pmatrix} = \varepsilon_0 c \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2 \frac{I}{e} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} |a_\sigma|^2 \\ |a_\pi|^2 \end{pmatrix} dt$$
$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi c}\frac{I}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \times$$
$$\begin{pmatrix} \left[\frac{\dot\beta_x}{\kappa^3}\left\{(\phi-\beta_x)^2-\kappa\right\}+\frac{\dot\beta_y}{\kappa^3}(\psi-\beta_y)(\phi-\beta_x)\right]^2 \\ \left[\frac{\dot\beta_x}{\kappa^3}(\phi-\beta_x)(\psi-\beta_y)+\frac{\dot\beta_y}{\kappa^3}\left\{(\psi-\beta_y)^2-\kappa\right\}\right]^2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi c}\frac{I}{e}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \times \frac{1}{\kappa^5}$$
$$\begin{pmatrix} \left[\dot\beta_x\left\{(\phi-\beta_x)^2-\kappa\right\}+\dot\beta_y(\psi-\beta_y)(\phi-\beta_x)\right]^2 \\ \left[\dot\beta_x(\phi-\beta_x)(\psi-\beta_y)+\dot\beta_y\left\{(\psi-\beta_y)^2-\kappa\right\}\right]^2 \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

周波数領域の電場計算

周波数領域における電場計算のためには、(4.59) 式の$\mathbf{A}(\omega)$の定義より、$\mathbf{b}$として次のものを使えばよい事が判る。

$$\mathbf{b} \equiv \vec\beta \approx \left(\beta_x, \beta_y, 1-\frac{1}{2\gamma^2}-\frac{1}{2}\beta_x^2-\frac{1}{2}\beta_y^2\right) \tag{4.74}$$

これを (4.69) 式に代入すると、

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b}) \approx (\phi-\beta_x)\,\mathbf{e}_\sigma + (\psi-\beta_y)\,\mathbf{e}_\pi \tag{4.75}$$

これを (4.59) 式に代入して得る$\mathbf{A}(\omega)$を (4.62) 式に代入すれば、各偏光状態に対する電流Iにおける角密度光束スペクトルは次式で書ける。

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\mathcal{F}_\sigma}{d^2\Omega} \\ \frac{d^2\mathcal{F}_\pi}{d^2\Omega} \end{pmatrix} = \alpha\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{I}{e}\begin{pmatrix} |A_\sigma(\omega)|^2 \\ |A_\pi(\omega)|^2 \end{pmatrix}$$
$$= \alpha\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{I}{e}\begin{pmatrix} \left|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt'(\phi-\beta_x)\,e^{i\omega t(t')}\right|^2 \\ \left|\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt'(\psi-\beta_y)\,e^{i\omega t(t')}\right|^2 \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

4.2 偏向磁石のシンクロトロン放射

偏向磁石から出てくるシンクロトロン放射光は、歴史的には、高エネルギーを追求する電子シンクロトロンないし電子陽電子衝突型貯蔵リングのビームエネルギーを制限する要因としての意味合いが強かった。しかしこの一見邪魔者であった放射光を積極的に利用するという発想の転換により、今日に至る放射光科学建設が始まった訳である。

しかしながら今日においても、偏向磁石から出てくる放射光の重要性は、電子ビーム特性に対する影響という面で大きい。具体的な電子ビームへの影響評価については次の章で学ぶとして、ここではその基礎となる偏向磁石放射光の特性を調べる。

4.2.1 電子の軌跡と「見かけの運動」

電子の軌跡

まず偏向磁石において電子が描く軌跡を求める。磁場$\mathbf{B}=(B_x,B_y,B_z)=(0,B,0)$によるローレンツ力から運動方程式を書き下すと。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = m_e\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt'} = e\mathbf{v}\times\mathbf{B} = e(-v_zB, 0, v_xB) \tag{4.77}$$

ここでは(x,y,z)カーテシアン座標系を使うことにする[12]。(4.77) 式を座標成分で書くと、

$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2} = (\ddot x, \ddot y, \ddot z) = \frac{eB}{m_e\gamma}(-\dot z, 0, \dot x) \tag{4.78}$$

m_eは電子の静止質量、eは電荷、γは相対論係数である。ここで、曲率半径と回転周波数を定義しておく。

$$\rho \equiv \frac{m_e\gamma c\beta}{eB} \quad \text{曲率半径} \tag{4.79}$$

$$\omega_\rho \equiv \frac{c\beta}{\rho} \quad \text{回転周波数} \tag{4.80}$$

これにより (4.78) 式を書き直すと、

$$\begin{cases} \ddot x = -\omega_\rho \dot z \\ \ddot z = \omega_\rho \dot x \end{cases} \tag{4.81}$$

時間で積分すると、

$$\begin{cases} \dot x = -\omega_\rho z \\ \dot z = \omega_\rho x \end{cases} \tag{4.82}$$

これを (4.81) 式の右辺に代入すると、2個の調和振動子の式に導かれる。

$$\begin{cases} \ddot x = -\omega_\rho^2 x \\ \ddot z = -\omega_\rho^2 z \end{cases} \tag{4.83}$$

これをFig. 4.3に示される初期条件の元で解くと、電子の軌跡を (4.84) 式で得る。

$$\mathbf{r}(t') = \rho\left(1-\cos(\omega_\rho t'), 0, \sin(\omega_\rho t')\right) \tag{4.84}$$

また速度は次のようになる。

$$\vec\beta(t') \equiv \dot{\mathbf{r}}(t')/c = \beta\left(\sin(\omega_\rho t'), 0, \cos(\omega_\rho t)\right) \tag{4.85}$$

[12] 荷電粒子ビーム運動の記述の時とは異なり、ここでは時間が前面に登場する必要がある。そして粒子運動を記述するときには発光体時間t'を使う。

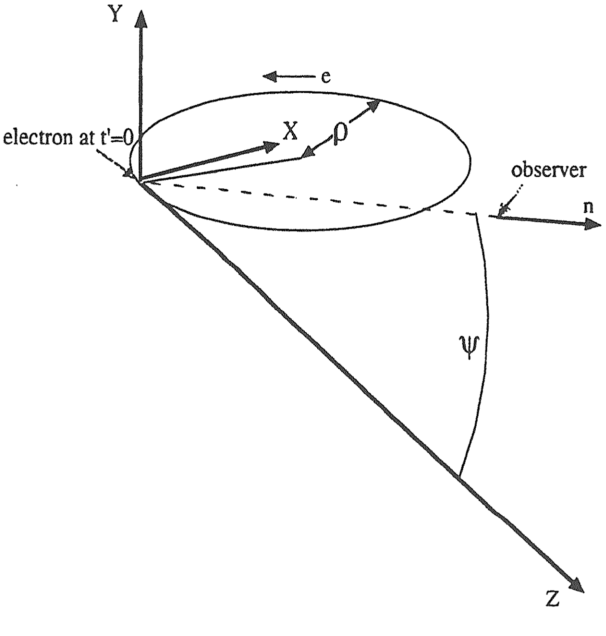


Figure 4.3: 偏向磁石放射光の座標系

見かけの運動

観測者から見た電子軌跡の「見かけの運動」を次の条件で成立する近似を使って求める。

$$\omega_\rho t' << 1, \quad 1/\gamma << 1 \tag{4.86}$$

まず速度は、

$$\overline{\beta}\left(t'\right) \approx \left(\omega_\rho t', 0, 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\left(\omega_\rho t'\right)^2}{2}\right) \tag{4.87}$$

観測者位置を示す$\mathbf{n}$ベクトルは上下から見込む角度が小さいという条件で、

$$\mathbf{n} \approx \left(0, \psi, 1 - \frac{\psi^2}{2}\right) \tag{4.88}$$

これらの近似の下で時間変換係数は次のようになり、

$$\kappa\left(t'\right) = \frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n}\cdot\overline{\beta} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \left(\omega_\rho t'\right)^2 + \psi^2\right) \tag{4.89}$$

観測者時間tと発光体時間t'との関係が具体的に次式で与えられる。

$$t\left(t'\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)t' + \frac{\omega_\rho^2 t'^3}{6} \tag{4.90}$$

4.2.2 周波数領域の電場計算

今までの準備に基づき、偏向磁石で発生するシンクロトロン放射光の周波数領域の電場計算を展開する。これにより光子エネルギー毎の光子数の角度分布[13] (Angular Density of Spectral Flux) が計算される。偏向磁石の場合、電子の軌跡は水平方向全部を覆うので、この角度分布は水平方向ϕには一定で、意味が有るのは垂直方向ψの角度分布である。

(4.76) 式に電子の速度 (4.87) 式と発光体時間で表した観測者時間 (4.90) 式とを代入する。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega)\end{pmatrix} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \begin{pmatrix}\phi - \beta_x \\ \psi - \beta_y\end{pmatrix} e^{i\omega t(t')} \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \begin{pmatrix} -\omega_\rho t' \\ \psi\end{pmatrix} e^{i\omega\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2\right)t + \frac{\omega_\rho^2 t^3}{6}\right\}}\end{aligned} \tag{4.91}$$

要はこの積分を評価すればよい訳で、これを解析的に行うために、幾つかのパラメター化を順次行う。

まず時間変換係数を次のように展開して、

$$\begin{aligned} t\left(t'\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)t' + \frac{\omega_\rho^2 t'^3}{6} \\ &= \frac{\omega_\rho^2}{2}\left\{\frac{1}{\omega_\rho^2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)t + \frac{t'^3}{3}\right\} \\ &= \frac{\omega_\rho^2}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)}\right)^3 \times \\ &\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2\right)}}t' + \frac{1}{3}\left(\frac{t'}{\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\psi^2\right)}}\right)^3\right\}\end{aligned} \tag{4.92}$$

ここに現れた同形の項は$X \equiv \gamma\psi$を導入することにより次式の様に記述される。

$$\sqrt{\frac{1}{\omega_\rho^2}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \psi^2\right)} = \frac{\sqrt{1+\gamma^2\psi^2}}{\omega_\rho\gamma} = \frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho\gamma} \tag{4.93}$$

そして時間変換係数は次式で書かれる。

$$t\left(t'\right) = \frac{1}{2\omega_\rho\gamma^3}\sqrt{1+X^2}^3\left\{\frac{\omega_\rho\gamma}{\sqrt{1+X^2}}t' + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega_\rho\gamma}{\sqrt{1+X^2}}t'\right)^3\right\} \tag{4.94}$$

さらに新パラメターτと、

$$\frac{\omega_\rho\gamma}{\sqrt{1+X^2}}t' \equiv \tau \tag{4.95}$$

臨界周波数ω_cを導入する。

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2}\omega_\rho\gamma^3 \tag{4.96}$$

[13] 角密度光束スペクトルと呼ぶ。スペクトルとは言葉元来の意味で光波長別ないし光子エネルギー別の物理量の事。光束とは光子の数密度のことだが、空間密度、角密度、時間密度、エネルギー密度等の中で何を指すかは状況による。

これにより（4.91）式の被積分関数の位相項は、新パラメターηの定義を伴い、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\omega t\left(t'\right) &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_c}\sqrt{1+X^2}^3\right)\left\{\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right\}\\ &\equiv \frac{3}{2}\eta\left\{\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right\}\end{aligned} \tag{4.97}$$

これらのパラメター化を（4.91）式に代入し、被積分関数の偶奇性を考慮することにより、最終的に次の形の積分を評価すればよいことになる。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_\sigma(\omega)\\ A_\pi(\omega)\end{pmatrix} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\begin{pmatrix}-\omega_\rho t'\\ \psi\end{pmatrix}e^{i\omega t(t')}\\
&= \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left(\frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho\gamma}\right)\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{1+X^2}}{\gamma}\tau\\ \psi\end{pmatrix}e^{i\left\{\frac{3}{2}\eta\left(\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right)\right\}}\\
&= \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho\gamma}\right)\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{1+X^2}}{\gamma}\\ \psi\end{pmatrix}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix}\times\\
&\qquad\left[\cos\left\{\frac{3}{2}\eta\left(\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right)\right\}+i\sin\left\{\frac{3}{2}\eta\left(\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right)\right\}\right]\\
&= \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho\gamma}\right)\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{1+X^2}}{\gamma}\\ \psi\end{pmatrix}\times\\
&\qquad\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\begin{pmatrix}i\tau\sin\left\{\frac{3}{2}\eta\left(\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right)\right\}\\ \cos\left\{\frac{3}{2}\eta\left(\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right)\right\}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.98}$$

次式で定義される変形Bessel関数を使えば、

$$\begin{cases}K_{2/3}(\eta)\equiv\sqrt{3}\int_0^{\infty}\tau\sin\left\{\frac{3}{2}\eta\left(\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right)\right\}d\tau\\ K_{1/3}(\eta)\equiv\sqrt{3}\int_0^{\infty}\cos\left\{\frac{3}{2}\eta\left(\tau+\frac{1}{3}\tau^3\right)\right\}d\tau\end{cases} \tag{4.99}$$

積分が既知の関数で表現できる。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_\sigma(\omega)\\ A_\pi(\omega)\end{pmatrix}
&= \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{\sqrt{1+X^2}}{\omega_\rho\gamma}\right)\begin{pmatrix}-i\frac{\sqrt{1+X^2}}{\gamma}\\ \psi\end{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}K_{2/3}(\eta)\\ K_{1/3}(\eta)\end{pmatrix}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\gamma\omega\frac{2}{3\omega_\rho\gamma^3}\left(1+X^2\right)\begin{pmatrix}-i\\ \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{2/3}(\eta)\\ K_{1/3}(\eta)\end{pmatrix}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\gamma\frac{\omega}{\omega_c}\left(1+X^2\right)\begin{pmatrix}-i\\ \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}K_{2/3}(\eta)\\ K_{1/3}(\eta)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.100}$$

斯くして、角密度光束スペクトル（Spectral Angular Density of Flux）が計算できた。

$$\begin{pmatrix}\frac{d^2\mathcal{F}_\sigma}{d^2\Omega}\\ \frac{d^2\mathcal{F}_\pi}{d^2\Omega}\end{pmatrix} = \frac{3\alpha}{4\pi^2}\gamma^2\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{I}{e}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\left(1+X^2\right)^2\begin{pmatrix}K_{2/3}^2(\eta)\\ \frac{X^2}{1+X^2}K_{1/3}^2(\eta)\end{pmatrix} \tag{4.101}$$

さらに（4.101）式を垂直角度ψで積分した結果のみを示しておく。これは後にシンクロトロン放射で決まる電子ビームの性質を調べるときに必要となる。

$$\begin{pmatrix}\frac{d\mathcal{F}_\sigma}{d\phi}\\ \frac{d\mathcal{F}_\pi}{d\phi}\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}\alpha}{4\pi}\gamma\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{I}{e}\frac{\omega}{\omega_c}\begin{pmatrix}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty}K_{5/3}(y')\,dy'+K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\\ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty}K_{5/3}(y')\,dy'-K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\end{pmatrix} \tag{4.102}$$

これは水平角度ϕ分布と言う体裁と次元を有しているが、冒頭でも触れたようにϕに依存した量ではない。

偏向磁石放射光の特性

Fig. 4.4に（4.101）式を使って計算した偏向磁石シンクロトロン放射光の波長別角度分布を示す。

横軸は電子の相対論係数を掛けた垂直方向の角度[rad]、縦軸は光子の数密度(Spectral Angular Flux Density)で単位は[photons/sec/mrad^2/0.1%バンド幅]である。上図はσ偏光成分、中図はπ偏光成分、下図はそれらの合計である。

各図には臨界波長ω_cの１０倍の波長から１０分の１の波長まで計２１本の曲線が描かれている。ただし短波長側は線幅の範囲でゼロになっている物がある。

使用した電子ビームエネルギーは6.5GeV、偏向磁石の曲率半径は$\rho=23.48$mでTRISTAN-ARを想定している。また平行に進行する1mAの電子ビームを仮定している。

上図のσ偏光成分で見れば、常に中心$\phi=0$即ち電子ビーム運動と同じ平面上に放射光のピークがある。またピーク幅は長波長側で広く短波長側で狭い。$\phi=0$で最も光子数が多い光子エネルギーは臨界波長ω_c付近であり、このときピーク幅は$1/\gamma$よりやや狭い程度である。中図のπ偏光成分はσ偏光成分と異なり、常に中心$\phi=0$でゼロである。ピーク位置は長波長側で中心から遠く短波長側で近くなっている。σ偏光成分と同様、光子数が最大となる光子エネルギーは臨界波長ω_c付近であり、このとき角度分布のピーク位置は$1/\gamma$程度である。

この偏光成分に依る振る舞いの差は、電子の「見かけの運動」から定性的に解釈する事ができる。電子ビーム運動と同じ平面上で観測すれば、電子は水平直線運動をしている、これは放射電場が水平成分即ちσ偏光成分のみを有する直線偏光であることを示す。水平面を離れ上ないし下から観測すれば、電子の垂直方向の運動が見える、即ちπ偏光成分が観測される。このとき電子の「見かけの運動」は円弧の一部を描くもので水平垂直の運動は90°ずれている。これによりσ偏光成分とπ偏光成分の位相も90°ずれた楕円偏光と言うことになる。この楕円偏光の回転方向が水平面の上下で反転することも電子の「見かけの運動」を考えれば理解できよう。

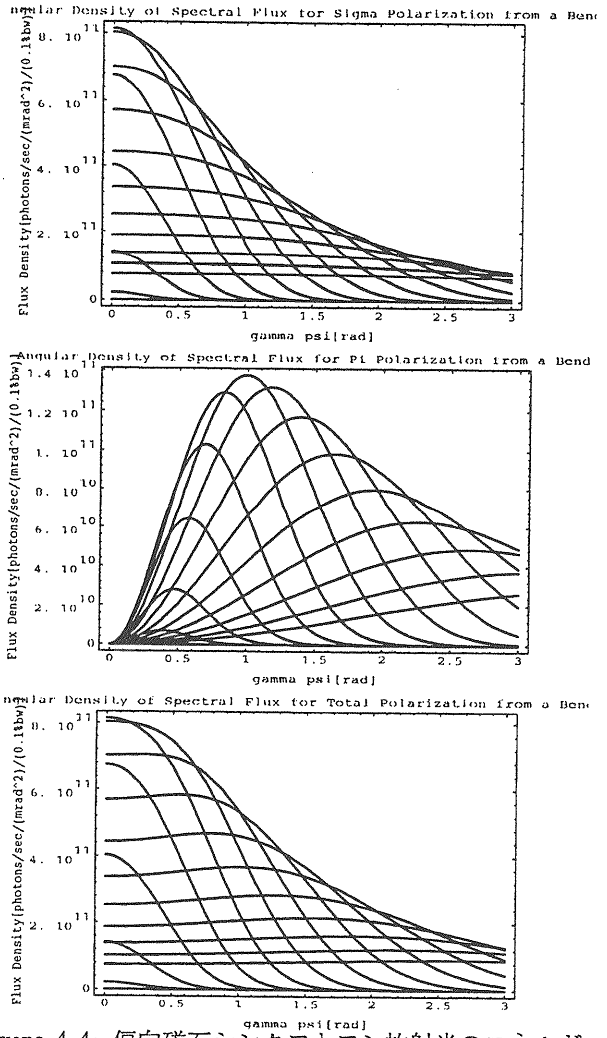


Figure 4.4: 偏向磁石シンクロトロン放射光のエネルギー別光子数角度分布。

当然、これらの事は数式の上でも確認することができる。(4.100) 式に示される 2 つの偏光成分の位相差を見れば理解できるであろう。

4.2.3 時間領域の電場計算

光子エネルギーを積分した形で扱う時間領域の電場計算の出発点は (4.73) 式である。これに$\phi=0$および電子の運動が平面内に留まると言う条件を付けると簡単化された次式になる。

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2P_\sigma}{d^2\Omega} \\ \frac{d^2P_\pi}{d^2\Omega} \end{pmatrix} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi c}\frac{I}{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\dot{\beta}_x^2}{\kappa^5}\begin{pmatrix} \left(\beta_x^2-\kappa\right)^2 \\ \left(\beta_x\psi\right)^2 \end{pmatrix}dt' \tag{4.103}$$

ここに次の偏向磁石中の電子運動に対応する速度と時間変換係数を用いる。

$$\vec{\beta}\left(t'\right) \approx \left(\omega_\rho t', 0, 1-\frac{1}{2\gamma^2}-\frac{\left(\omega_\rho t'\right)^2}{2}\right) \tag{4.104}$$

$$\kappa\left(t'\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\left(\omega_\rho t'\right)^2+\psi^2\right) \tag{4.105}$$

これらを (4.103) 式に代入後、さらに$\xi=\omega_\rho t'$と記述することで次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \frac{d^2P_\sigma}{d^2\Omega} \\ \frac{d^2P_\pi}{d^2\Omega} \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi c}\frac{I}{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_\rho^2}{\kappa^5}\times \\
&\qquad \begin{pmatrix} \left(\left(\omega_\rho t'\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\left(\omega_\rho t'\right)^2+\psi^2\right)\right)^2 \\ \left(\left(\omega_\rho t'\right)\psi\right)^2 \end{pmatrix}dt' \\
&= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_\rho}{4\pi c}\frac{I}{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\kappa^5}\begin{pmatrix} \left\{\xi^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\xi^2+\psi^2\right)\right\}^2 \\ \left(\xi\psi\right)^2 \end{pmatrix}d\xi \\
&= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_\rho}{4\pi c}\frac{I}{e}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\kappa^5}\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\xi^2-\frac{1}{\gamma^2}-\psi^2\right)^2 \\ \left(\xi\psi\right)^2 \end{pmatrix}d\xi
\end{aligned} \tag{4.106}$$

これを$Mathematica$を使ってξで積分すれば、全放射パワーの角度分布を得る。

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2P_\sigma}{d^2\Omega} \\ \frac{d^2P_\pi}{d^2\Omega} \end{pmatrix} = \left[\frac{7}{64\pi}\frac{e^2}{\varepsilon_0}\frac{eB}{m_ec}\gamma^4\frac{I}{e}\right]\frac{1}{(1+\gamma^2\psi^2)^{5/2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{7}\frac{\gamma^2\psi^2}{1+\gamma^2\psi^2} \end{pmatrix} \tag{4.107}$$

(4.107) 式を使って描いた全放射パワーの角度分布をFig. 4.5に示す。σ偏光成分を 1 点鎖線でπ偏光成分を破線でこれらの合計を実線で示した。これはFig. 4.4に示された光子エネルギー別分布の光子エネルギーでの積分に対応する。シンクロトロン放射の熱負荷を考えるときにはこの表式が有用である。さらに垂直方向の角度ψで積分すれ

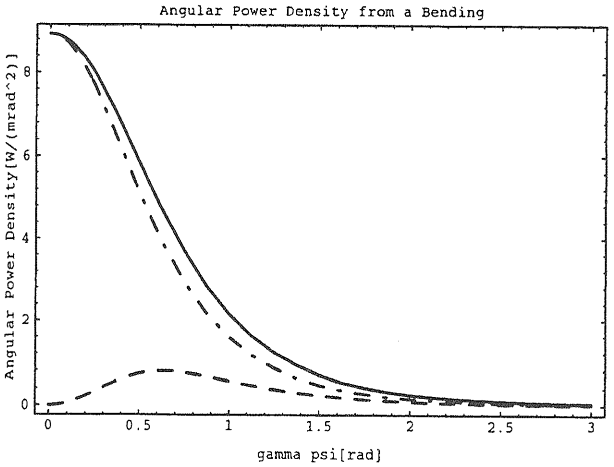


Figure 4.5: 偏向磁石シンクロトロン放射光の全放射パワー角度分布。

ば、$l=\rho\Delta\phi$の弧長の軌跡を描くときに、電子は全放射エネルギーの８分の７をσ偏光として、残り８分の１をπ偏光として放出することが判る。

$$\begin{pmatrix} P_\sigma \\ P_\pi \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma^4}{\rho^2}\frac{I}{e}l\begin{pmatrix} 7/8 \\ 1/8 \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

シンクロトロン放射による電子のエネルギー損失はこれから計算することができる。

4.3 アンジュレータのシンクロトロン放射

近年稼働を開始したSPring-8、APS、ALS、ESRF、ELLETRA等いわゆる第３世代と言われるシンクロトロン放射光源の特徴は低エミッタンスビームと長いアンジュレータ磁石の組み合わせである。この組み合わせに基づいて、輝度と呼ばれる放射光源評価の究極パラメターを高くする事を追求している。輝度とは６次元位相空間における光子数密度のことであり、アンジュレータではこれを高くするため、１個の電子から出てくる光の干渉を実現している。アンジュレータの全長Lに渡って出てくる光が観測者に途切れ無く見え続けることがこの干渉性の所以である。偏向磁石では１個の電子から出てくる放射光は弧長$l\approx\rho/\gamma$に相当する間しか観測されない、ここから大きな違いが生まれてくる。

ここでは平面型アンジュレータから出てくる放射光ビームの特性を調べる。最近の典型的平面型アンジュレータ像として、非常に大雑把に言って、次のものを念頭に置いて欲しい。周期長は数cm、周期数は100程度、全長は数mの永久磁石列で最大強度１０分の数テスラの垂直磁場を発生する。そしてギャップ間隔は最小値数cmで、最大磁場を変えられるように可変である。

4.3.1 電子軌跡と「見かけの運動」

周期長λ_uの平面型アンジュレータの近似磁場、

$$\mathbf{B}=(B_x,B_y,B_z)=(0,-B_0\sin(2\pi z/\lambda_u),0) \tag{4.109}$$

これはMaxwell方程式を満たしていないが、アンジュレータの中心軸に近い限りよい近似である。周期数Nとすると磁場が存在する領域は$0\le z\le N\lambda_u$である。

ローレンツ力による運動方程式を成分表示すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} m_e\gamma\frac{d^2\mathbf{r}}{dt'^2} &= m_e\gamma(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) = e(\dot{x},\dot{y},\dot{z})\times(0,B_y,0) \\ &= eB_0\left(\sin(2\pi z/\lambda_u)\dot{z},0,-\sin(2\pi z/\lambda_u)\dot{x}\right) \end{aligned} \tag{4.110}$$

ここでアンジュレータパラメターKを導入する。ここでは運動粒子の電荷eに正負があることを考慮して、次式の定義に従いアンジュレータパラメターにも正負があることにしておく[14]。

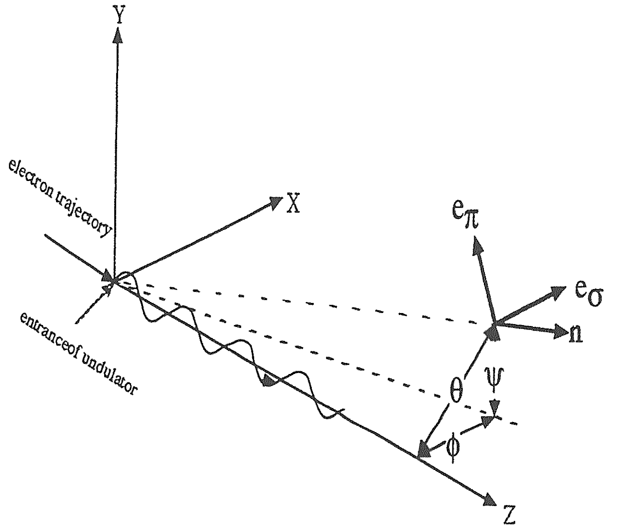


Figure 4.6: アンジュレータ放射の座標系

$$K\equiv\frac{eB_0\lambda_u}{2\pi m_e c} \tag{4.111}$$

運動方程式はKを使って次式に書ける。

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{K}{\gamma}\frac{2\pi c}{\lambda_u}\sin(2\pi z/\lambda_u)\dot{z} \\ \ddot{z} = -\frac{K}{\gamma}\frac{2\pi c}{\lambda_u}\sin(2\pi z/\lambda_u)\dot{x} \end{cases} \tag{4.112}$$

この第１式の右辺は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{K}{\gamma}\frac{2\pi c}{\lambda_u}\frac{d}{dt'}\left[-\frac{\lambda_u}{2\pi}\cos(2\pi z/\lambda_u)\right] \\ &= -c\frac{K}{\gamma}\frac{d}{dt'}\left[\cos(2\pi z/\lambda_u)\right] \end{aligned} \tag{4.113}$$

すると両辺が簡単にt'で積分されてx方向の速度を得る。

$$\dot{x}=-\frac{cK}{\gamma}\cos(2\pi z/\lambda_u)\equiv c\beta_x \tag{4.114}$$

一方（4.112）第１式に$\dot{x}$そして第２式に$\dot{z}$を掛けて両式の和を取ればサイン関数が消去された次式を得る。

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{z}\ddot{z}=0 \tag{4.115}$$

[14]一般にはKは正値として扱われているので要注意。ここでは電子および陽電子を形式的に統一した運動方程式の中でKを使いたかったのでこうした。Kの正負はB_0の正負にも依るので、アンジュレータ内の電子軌道の位相を気にしないなら、符号の調整をB_0にまかせ常に$K>0$と思うこともできる。

これを積分することで、磁場中での速度不変が示される。

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{z}^2 &= const.\\ &\equiv (c\beta)^2 = c^2\left(\beta_x^2+\beta_z^2\right) = c^2\left(1-\tfrac{1}{\gamma^2}\right)\end{aligned} \tag{4.116}$$

そこで β_zが次式で表される。近似の成立条件は超相対論的粒子$1 \ll \gamma$かつ$K \ll \gamma$である。

$$\beta_z = \left(1-\frac{1}{\gamma^2}-\beta_x^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\beta_x^2\right) \tag{4.117}$$

ここでβ_xとして（4.114）式を代入すると、β_zを次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\beta_z &= 1-\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{\gamma^2}+\left\{-\tfrac{K}{\gamma}\cos\left(2\pi z/\lambda_u\right)\right\}^2\right]\\ &= 1-\tfrac{1}{2\gamma^2}\left[1+\tfrac{1}{2}K^2\left\{1+\cos\left(4\pi z/\lambda_u\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.118}$$

結局、電子の速度ベクトルを次式に得た。

$$\overline{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_x\\ 0\\ \beta_z\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}-\frac{K}{\gamma}\cos\left(2\pi z/\lambda_u\right)\\ 0\\ 1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}-\frac{K^2}{4\gamma^2}\cos\left(4\pi z/\lambda_u\right)\end{pmatrix} \tag{4.119}$$

$z \approx \beta ct'$と言う近似条件[15]を使って、積分ができ電子軌道が求められる。

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{c}\mathbf{r}\left(t'\right) &= \int_0^{t'}\overline{\beta}dt'\\ &\approx \int_0^{t'}\begin{pmatrix}-\frac{K}{\gamma}\cos\left(2\pi ct'/\lambda_u\right)\\ 0\\ 1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}-\frac{K^2}{4\gamma^2}\cos\left(4\pi ct'/\lambda_u\right)\end{pmatrix}dt'\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{K}{\gamma}\frac{\lambda_u}{2\pi c}\sin\left(2\pi ct'/\lambda_u\right)\\ 0\\ \left(1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\right)t'-\frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{\lambda_u}{2\pi c}\sin\left(4\pi ct'/\lambda_u\right)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.120}$$

ここで積分定数はFig. 4.6に示された座標の原点に電子が居る時$t'=0$となるように決めた。

アンジュレータの周期に対応する周波数を定義する。

$$\omega_u \equiv \frac{2\pi c}{\lambda_u} \tag{4.121}$$

これにより電子軌道は次式で表せる。

$$\frac{1}{c}\mathbf{r}\left(t'\right) = \begin{pmatrix}-\frac{K}{\gamma}\frac{1}{\omega_u}\sin\left(\omega_u t'\right)\\ 0\\ \left(1-\frac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\right)t'-\frac{K^2}{8\gamma^2}\frac{1}{\omega_u}\sin\left(2\omega_u t'\right)\end{pmatrix} \tag{4.122}$$

[15]この近似条件は少し気がかりであるが、解析的取り扱い上は避け難く思われる。

この座標系では発光体から観測者を向いた単位ベクトルは次式である。

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}\cos\psi\sin\phi\\ \sin\psi\\ \cos\psi\cos\phi\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\\ 1-\frac{1}{2}\left(\phi^2+\psi^2\right)\end{pmatrix} \tag{4.123}$$

（4.122）式と（4.123）式を使えば、発光体時間と観測者時間の関係が次式に書ける。

$$\begin{aligned}t\left(t'\right) &= t'-\tfrac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\left(t'\right)\\ &= t'-\left(-\tfrac{K}{\gamma}\tfrac{1}{\omega_u}\sin\left(\omega_u t'\right)\right)\phi\\ &\quad -\left\{\left(1-\tfrac{1+K^2/2}{2\gamma^2}\right)t'-\tfrac{K^2}{8\gamma^2}\tfrac{1}{\omega_u}\sin\left(2\omega_u t'\right)\right\}\times\\ &\quad \left\{1-\tfrac{1}{2}\left(\phi^2+\psi^2\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.124}$$

ここで、観測見込み角が小さく電子が超相対論的という条件を考慮して2次までの近似を作ろう。

$$\phi, \psi, 1/\gamma \ll 1 \tag{4.125}$$

観測者時間が次式の形で発光体時間の関数として書ける。

$$\begin{aligned}t\left(t'\right) \approx\ & t'\left\{\tfrac{1+K^2/2+\gamma^2\left(\phi^2+\psi^2\right)}{2\gamma^2}\right\}\\ &+\tfrac{K^2}{8\omega_u\gamma^2}\sin\left(2\omega_u t'\right)+\tfrac{K\phi}{\omega_u\gamma}\sin\left(\omega_u t'\right)\end{aligned} \tag{4.126}$$

4.3.2 周波数領域の電場計算

周波数表示の電場を求めるためには（4.76）式に、求めた電子速度（4.119）式と発光体時間で表した観測者時間（4.126）式を代入してやればよい。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_\sigma(\omega)\\ A_\pi(\omega)\end{pmatrix} &= \tfrac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\begin{pmatrix}\phi-\beta_x\\ \psi-\beta_y\end{pmatrix}e^{i\omega t(t')}\\ &= \tfrac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\begin{pmatrix}\phi+\frac{K}{\gamma}\cos\left(2\pi ct'/\lambda_u\right)\\ \psi\end{pmatrix}\times\\ &\quad e^{i\omega\left[t'\left\{\frac{1+K^2/2+\gamma^2\left(\phi^2+\psi^2\right)}{2\gamma^2}\right\}+\frac{K^2}{8\omega_u\gamma^2}\sin(2\omega_u t')+\frac{K\phi}{\omega_u\gamma}\sin(\omega_u t')\right]}\end{aligned} \tag{4.127}$$

ここで指数関数の肩を簡潔に表現するため、（4.121）式および下の3つの式を使ったパラメターの書き換えを行う。

$$\xi \equiv \omega_u t' \tag{4.128}$$

$$\theta^2 \equiv \phi^2+\psi^2 \tag{4.129}$$

$$\omega_1(\theta) \equiv \omega_u\frac{2\gamma^2}{1+K^2/2+\gamma^2\theta^2} \tag{4.130}$$

これらのパラメター化の結果、まず次式を得る。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\omega_u}\begin{pmatrix} \phi+\frac{K}{\gamma}\cos\xi \\ \psi \end{pmatrix}\times$$
$$e^{i\omega\left\{\xi\frac{1}{\omega_1(\theta)}+\frac{K^2}{8\omega_u\gamma^2}\sin(2\xi)+\frac{K\phi}{\omega_u\gamma}\sin(\xi)\right\}} \qquad (4.131)$$

さらに（4.130）式によりω_uは次に書けるので、

$$\frac{1}{\omega_u}\equiv\frac{1}{\omega_1(0)}\frac{2\gamma^2}{1+K^2/2} \qquad (4.132)$$

下の式を得る。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix}$$
$$=\frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\gamma K}{(1+K^2/2)}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\begin{pmatrix} \gamma\phi/K+\cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix}\times$$
$$e^{i\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\xi+\frac{1}{4}\frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{K^2}{1+K^2/2}\sin(2\xi)+2\frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\gamma K\phi}{1+K^2/2}\sin(\xi)\right\}} \qquad (4.133)$$

ここで次に定義するpとqを導入する。

$$p\equiv 2\frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\phi\gamma K}{1+K^2/2} \qquad (4.134)$$

$$q\equiv\frac{1}{4}\frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{K^2}{1+K^2/2} \qquad (4.135)$$

これで指数関数の肩の記述が簡略化される。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\gamma K}{(1+K^2/2)}\times$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\begin{pmatrix} \gamma\phi/K+\cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix}e^{i\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\xi+q\sin(2\xi)+p\sin(\xi)\right\}} \qquad (4.136)$$

ここで積分変数ξの範囲を考えてみよう。

$$\xi=\omega_u t'=\frac{2\pi c}{\lambda_u}t' \qquad (4.137)$$

被積分関数はアンジュレータの中でだけゼロでない事を考慮して、発光体時間t'の原点をアンジュレータの中心に移す。

$$-\frac{N\lambda_u}{2c}\leq t'\leq\frac{N\lambda_u}{2c} \qquad (4.138)$$

そこでξの積分範囲は次のようになる。

$$-\pi N\leq\xi\leq\pi N \qquad (4.139)$$

この積分はアンジュレータの周期長λ_uに対応するξの範囲$\pm\pi$の積分と周期数N分の総和とに分けることができる。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\gamma K}{(1+K^2/2)}\times$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\left[2\pi k\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}-\pi(N-1)\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}\right]}\times$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}d\xi\begin{pmatrix} \gamma\phi/K+\cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix}e^{i\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\xi+q\sin(2\xi)+p\sin(\xi)\right\}} \qquad (4.140)$$

総和については幾何級数の和を取ることで計算される。

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\left[2\pi k\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}-\pi(N-1)\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}\right]}$$
$$=e^{i\left[-\pi(N-1)\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}\right]}\frac{1-e^{i2\pi N\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}}{1-e^{i2\pi\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}}$$
$$=\frac{e^{i\left[-\pi N\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}\right]}}{e^{i\left[-\pi\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}\right]}}\frac{1-e^{i2\pi N\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}}{1-e^{i2\pi\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}}$$
$$=\frac{e^{-i\pi N\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}-e^{i\pi N\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}}{e^{-i\pi\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}-e^{i\pi\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right\}}}=\frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)} \qquad (4.141)$$

よって周波数表示の電場が次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\gamma K}{(1+K^2/2)}\frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}\times$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\xi\begin{pmatrix} \gamma\phi/K+\cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix}e^{i\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\xi+q\sin(2\xi)+p\sin(\xi)\right\}} \qquad (4.142)$$

ここで2つの関数を新たに定義する、一つは（4.142）式の総和の部分を表す。

$$S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right)\equiv\left\{\frac{\sin\left(\frac{N\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{N\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}\right\}^2 \qquad (4.143)$$

もう一つは1周期内の積分を表す。

$$\begin{pmatrix} B_\sigma(\omega,\phi,\psi) \\ B_\pi(\omega,\phi,\psi) \end{pmatrix}\equiv$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\xi\begin{pmatrix} \gamma\phi/K+\cos\xi \\ \gamma\psi/K \end{pmatrix}e^{i\left\{\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\xi+q\sin(2\xi)+p\sin(\xi)\right\}} \qquad (4.144)$$

これを使うと周波数表示の電場は次のように書ける[16]。

$$\begin{pmatrix} A_\sigma(\omega) \\ A_\pi(\omega) \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\gamma K}{(1+K^2/2)}N\sqrt{S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}\begin{pmatrix} B_\sigma(\omega,\phi,\psi) \\ B_\pi(\omega,\phi,\psi) \end{pmatrix} \tag{4.145}$$

上式を（4.76）式に代入することで角密度光束スペクトルを得る。

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\mathcal{F}_\sigma}{d^2\Omega} \\ \frac{d^2\mathcal{F}_\pi}{d^2\Omega} \end{pmatrix} = \alpha\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{I}{e}\begin{pmatrix} |A_\sigma(\omega)|^2 \\ |A_\pi(\omega)|^2 \end{pmatrix} = \alpha\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{I}{e}\left[\frac{\omega}{\omega_1(0)}\frac{\gamma K}{(1+K^2/2)}N\right]^2 S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right)\begin{pmatrix} |B_\sigma(\omega,\phi,\psi)|^2 \\ |B_\pi(\omega,\phi,\psi)|^2 \end{pmatrix} \tag{4.146}$$

4.3.3 平面型アンジュレータ放射の特性

角密度光束スペクトルを構成する２つの関数のうち、１周期内の積分を表わす$B_{\sigma,\pi}$は角度についても周波数についても比較的おとなしい振る舞いをする。一方周期数分の総和を表わす関数S_Nは角度、周波数ともに激しい依存性が有る。すなわち、平面型アンジュレータ放射の角密度光束スペクトルに特徴的な角度や周波数依存性は関数S_Nに由来する。

スペクトル特性

S_N関数の周波数特性を見ておこう。観測者位置つまり角度ϕとψが与えられθが決まった時、スペクトルがピークになる周波数ωは、S_Nを定義した（4.143）式の分母がゼロに近いとき、即ち次式を満たす所にある。

$$\omega = n\omega_1(\theta) \equiv \omega_n \tag{4.147}$$

ここでnは任意の整数である。nが１の場合は基本波と呼ばれ、１より大きいときには各々n倍の高調波あるいはハーモニクスと呼んでいる。このスペクトルがピークになる周波数を波長で表わせば、

$$\lambda_n(\theta) = \frac{1}{n}\lambda_u\frac{1+K^2/2+\gamma^2\theta^2}{2\gamma^2} \tag{4.148}$$

スペクトルピークの波長は、およそアンジュレータの周期長を電子ビームの相対論係数の２乗で割ったものの$2n$分の１であることが解る。またアンジュレータパラメタのK値や、観測見込み角度θが大きくなるに連れ長波長側にシフトすることも示されている。

[16]このように書くと（4.145）式は（4.142）式を符号については再現できないが、（4.146）式で絶対値のみ意味を持つように使う限り問題はない。

スペクトル線幅を調べるために、スペクトルピーク付近で、次のように書いてみる。

$$\omega = n\omega_1(\theta) + \Delta\omega \tag{4.149}$$

ここで$\Delta\omega \ll 1$とする。これをS_N関数の定義式に代入することで、スペクトルピーク付近における次の近似式を得る。

$$S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) = S_N\left(\frac{n\omega_1(\theta)+\Delta\omega}{\omega_1(\theta)}\right) \approx \left\{\frac{\sin\left(N\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_1(\theta)}\right)}{N\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_1(\theta)}}\right\}^2 \tag{4.150}$$

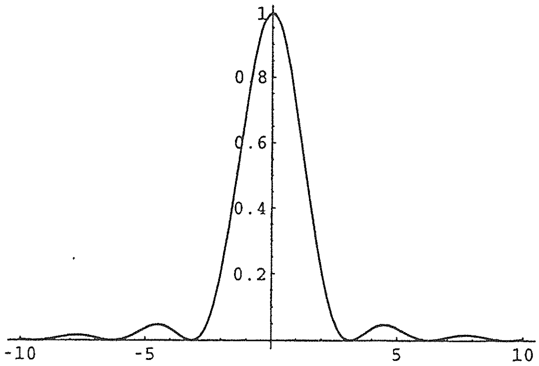


Figure 4.7: スペクトルピーク周辺のS_N関数の振る舞い。

この式はスペクトル拡がりがアンジュレータの周期数に反比例していることを示している。Fig. 4.7にこのスペクトルピーク付近でのS_N関数の近似形を描いて見た。横軸は$N\pi\frac{\Delta\omega}{\omega_1(\theta)}$を表し、縦軸はこれを引き数とする$S_N$関数の（4.150）式による近似値である。これによりスペクトル線幅の半値全幅（FWHM）は次のように評価される。

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_n} \approx \frac{2.8}{\pi nN} \approx \frac{0.9}{nN} \tag{4.151}$$

このようにスペクトル幅がアンジュレータ周期数に反比例すると言うことは、１個の電子がアンジュレータを通過する間に放射する光は、アンジュレータ周期数分[17]の時間干渉性を有する事を物語っている。つまりアンジュレータ磁極相互間からの放射には干渉性が有るともいえる。電磁場のFeynmann表現から言えば、電子の周期運動を時間的に連続して観測した時、そのFourier変換で与えられるスペクトル線幅は、当然、周期数に反比例していると解釈することもできる。

[17]自由電子レーザーが発振すると、同じアンジュレータから出てくる光でも、発振前に比べてスペクトル線幅が非常に狭くなる。これは電子相互間に放射電磁場を媒介とした運動の相関が起き、異なる電子から放射された光の間にも時間干渉性が生じるからである。先行する電子の運動状態が後から来る電子に引き継がれるので、実効的にアンジュレータの周期数が増加した、とも解釈できる。

放射の角分布

観測見込み角θに依存した放射光の特性を調べるために、一定周波数におけるS_N関数を角度の関数として調べる必要がある。周波数を次式で表されるようにスペクトルのピーク近くに選んで様子を見てみよう。

$$\frac{\omega}{\omega_1(0)} = n + \Delta\nu \qquad (4.152)$$

$\omega_1(\theta)$の定義（4.130）式を次のように観測角度θが目立つように書き換える。

$$\begin{aligned}\omega_1(\theta) &= \frac{2\gamma^2}{1+K^2/2+\gamma^2\theta^2}\omega_u \\ &= \frac{2\gamma^2}{1+K^2/2}\omega_u\frac{1+K^2/2}{1+K^2/2+\gamma^2\theta^2} \\ &= \omega_1(0)\frac{1+K^2/2}{1+K^2/2+\gamma^2\theta^2} \\ &\equiv \omega_1(0)\frac{1}{1+\gamma^{*2}\theta^2}\end{aligned} \qquad (4.153)$$

ここで現われたγ^*は、粒子のアンジュレータ内平均進行速度に対応する相対論係数と言う物理的意味を持つ量で次式で定義される。

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{\sqrt{1+K^2/2}} \qquad (4.154)$$

これらに依り、S_N関数の引き数が次のように書かれる。

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\omega_1(\theta)} &= \frac{\omega_1(0)(n+\Delta\nu)}{\omega_1(\theta)} \\ &= (n+\Delta\nu)\left(1+\gamma^{*2}\theta^2\right)\end{aligned} \qquad (4.155)$$

この形でS_Nに代入し、$\Delta\nu \ll 1$および$\gamma^*\theta \ll 1$として近似を施す。

$$\begin{aligned}S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) &= \left[\frac{\sin\{N\pi(n+\Delta\nu)(1+\gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\sin\{\pi(n+\Delta\nu)(1+\gamma^{*2}\theta^2)\}}\right]^2 \\ &\approx \left[\frac{\sin\{N\pi(\Delta\nu+n\gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\pi(\Delta\nu+n\gamma^{*2}\theta^2)}\right]^2\end{aligned} \qquad (4.156)$$

この近似式の分母を見れば、$\Delta\nu \geq 0$の時は放射の角分布は前方にピークをもつこと、また$\Delta\nu < 0$の時の角分布は前方に窪みを持つことが理解される。前方にピークをもつ角度分布の時はこれをガウス関数で近似することが可能である。

$$S_N \sim exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma_{r'}^2}\right) \qquad (4.157)$$

ここで$\Delta\nu = 0$の時、光の角度発散の標準偏差$\sigma_{r'}$は近似のS_N関数（4.156）式を使って次式で評価される。

$$\sigma_{r'}^2 \equiv \frac{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}}\theta^2 S_N d\theta}{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}} S_N d\theta} \approx \frac{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}}\theta^2\left[\frac{\sin\{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)}\right]^2 d\theta}{\int_0^{\frac{1}{\gamma^*}}\left[\frac{\sin\{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)\}}{N\pi(n\gamma^{*2}\theta^2)}\right]^2 d\theta} \qquad (4.158)$$

ここではセントラルコーン全体での積分を行おうとしている。この積分の実行は、積分変数を$\varsigma = \gamma^*\theta$と変更することで、サイン型およびコサイン型のFresnel積分[18]を使い次のように行われ、放射の角度分散が与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_{r'}^2 &= \frac{\int_0^1\left(\frac{\varsigma}{\gamma^*}\right)^2\left[\frac{\sin(N\pi n\varsigma^2)}{N\pi n\varsigma^2}\right]^2 d\varsigma}{\int_0^1\left[\frac{\sin(N\pi n\varsigma^2)}{N\pi n\varsigma^2}\right]^2 d\varsigma} \\ &= \frac{3}{4\gamma^{*2}Nn\pi}\frac{S(2\sqrt{Nn})}{C(2\sqrt{Nn})} \approx \frac{1}{4\gamma^{*2}Nn}\end{aligned} \qquad (4.160)$$

このようにして放射光の角度拡がりの標準偏差は次の式で与えられた。

$$\sigma_{r'} \approx \frac{1}{2\gamma^*\sqrt{Nn}} = \frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{1+K^2/2}{Nn}} \qquad (4.161)$$

これを光の波長と、

$$\lambda_n = \frac{1+K^2/2}{2\gamma^2 n}\lambda_u \qquad (4.162)$$

アンジュレータの全長Lを使って、次のように書くこともできる。

$$\sigma_{r'} = \sqrt{\frac{\lambda_n}{2L}} \qquad (4.163)$$

角度効果によるスペクトル線幅増大

先に求めた放射光スペクトルの線幅は、定められた観測角度で受光面の角度拡がりゼロを仮定したものであった。実際に放射光を使用する場合はある有限の立体角で光を受ける訳で、（4.153）式に示されたスペクトルピーク位置の観測見込み角依存性のためにスペクトル線幅の増大が起こる。受光角口径が$\Delta\theta$の時生じるスペクトル幅の増加$\Delta\omega$は、（4.153）式からおよそ次のように見積もることができる。

$$\left.\frac{\Delta\omega}{\omega}\right|_{\Delta\theta} \sim \gamma^{*2}\Delta\theta^2 \qquad (4.164)$$

正面放射場のハーモニック成分

平行電子ビームによるアンジュレータ光の正面におけるn倍ハーモニクス成分を調べる。

$$\omega_n = n\omega_1(0) \qquad (4.165)$$

[18]Fresnel積分の定義。

$$\begin{aligned}S(z) &\equiv \int_0^z sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt \\ C(z) &\equiv \int_0^z cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt\end{aligned} \qquad (4.159)$$

周波数表示による放射電場（4.144）式を正面放射$\phi = 0, \psi = 0$について評価して見る。π偏光成分は正面ではゼロなのでσ偏光成分だけ考える。

$$B_\sigma(\omega_n, 0, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos\xi e^{i\{n\xi + q\sin(2\xi)\}} \tag{4.166}$$

ここで

$$q = \frac{n}{4}\left(\frac{K^2}{1+K^2/2}\right) \tag{4.167}$$

この積分評価の計算過程は示さないが、次式で定義されるBessel関数を使うことで、

$$J_k(q) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(k\theta - q\sin\theta)d\theta \tag{4.168}$$

積分がBessel関数で表現できる。

nが奇数次ハーモニクスの時

$$B_\sigma(\omega_n, 0, 0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{J_{\frac{n-1}{2}}(q) - J_{\frac{n+1}{2}}(q)\right\} \tag{4.169}$$

nが偶数次ハーモニクスの時

$$B_\sigma(\omega_n, 0, 0) = 0 \tag{4.170}$$

と評価される。

電子ビーム角度発散の影響

さて今までは電子については平行ビーム、即ちゼロエミッタンスビームを前提にしていた。電子ビームに角度発散が有るときアンジュレータ放射光に生じる影響を検討しよう。

電子ビームの角度拡がりの標準偏差が水平垂直共に充分小さいとする、すなわち$\sigma_{x'} \ll 1/\gamma$かつ$\sigma_{y'} \ll 1/\gamma$である。

等価仮定　ここで、「電子軌跡がアンジュレータに対してθ傾いている時にアンジュレータの正面から観測した光の性質は、電子軌跡がアンジュレータに対し真直ぐだがアンジュレータの正面からθ外れて観測した光の性質と等しい。」という等価仮定を採用する。

この仮定を使えば、電子ビーム角度発散の効果を含んだ角密度光束スペクトルは放射の正面では次のように表わすことができる。

$$\left.\frac{d^2\mathcal{F}}{d^2\Omega}\right|_0 = \int \frac{d^2\mathcal{F}^0(\phi,\psi)}{d^2\Omega} g(\phi,\psi)\, d\phi d\psi \tag{4.171}$$

ここで

$$\frac{d^2\mathcal{F}^0(\phi,\psi)}{d^2\Omega} \tag{4.172}$$

は平行電子ビームの角密度光束スペクトルである。また、gは電子ビームの角度分布関数で、次式で与えられる[19]。

$$g(\phi,\psi) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x'}\sigma_{y'}}\exp\left[-\frac{\phi^2}{2\sigma_{x'}^2} - \frac{\psi^2}{2\sigma_{y'}^2}\right] \tag{4.174}$$

奇数ハーモニクスの場合、角密度光束スペクトル$d^2\mathcal{F}^0/d^2\Omega$は、$S_N$関数に支配され、近似的にガウス型である。

$$S_N\left(\frac{\omega}{\omega_1(\theta)}\right) \approx \exp\left[-\frac{\phi^2+\psi^2}{2\sigma_{r'}^2}\right] \tag{4.175}$$

この平行電子ビーム光の角度分布関数と（4.174）式の電子ビームの角度分布関数とを畳み込み計算することで、有限な角度拡がりのある電子ビームから発生する放射光ビームの角度分布関数を計算することができる。今の場合、分布関数同士ガウス関数なので、畳み込みの結果もまたガウス関数となる。畳み込みの結果として得る、放射光ビーム角度の標準偏差$\sigma_{Tx'}$は、電子ビーム角度の標準偏差$\sigma_{x'}$と平行電子ビームから出る光の角度の標準偏差$\sigma_{r'}$を使い次の関係で与えられる。

$$\sigma_{Tx'} = \sqrt{\sigma_{r'}^2 + \sigma_{x'}^2} \tag{4.176}$$

偶数ハーモニクスの場合、ガウス型からほど遠いため、積分$B_{\sigma,\pi}$を評価する必要があり、ここでは取り扱わない。

4.4　シンクロトロン放射の数値的取り扱い

ここまではシンクロトロン放射を解析的に取り扱ってきた。しかし解析的取り扱いにも限界が有る。その代表例は、各種誤差磁場の問題であり、またさらに遠距離場近似の適用できない領域のシンクロトロン放射である。

ここでは誤差磁場の実例としてアンジュレータを取り上げ、その数値的取り扱いについて紹介する。

今までの議論では、アンジュレータ磁場には無誤差を仮定して解析的手法を適用してきた。しかし現実のアンジュレータには多かれ少なかれ誤差が含まれている。光ビームや電子ビームによる実験や観測の結果を理解することで、誤差の原因を特定しアンジュレータの製作方法や補正の方法を考えていくことが大切である。

このためにはアンジュレータの不整磁場が光ビームへどの様に影響するか、定量的に評価しなければならない。しかしこの様な場面で、解析的取り扱いは非常に困難になる。

[19] ここに現れる電子の角度分布の標準偏差$\sigma_{x'}$および$\sigma_{y'}$は、電子ビームのエミッタンス$\varepsilon_{x,y}$と発光位置におけるTwissパラメター$\gamma_{x,y}$を使って次のように書ける。

$$\sigma_{x'} = \sqrt{\varepsilon_x\gamma_x}, \quad \sigma_{y'} = \sqrt{\varepsilon_y\gamma_y} \tag{4.173}$$

以下ではアンジュレータの誤差モデルを使って、不整磁場の光ビーム特性への影響をシュミレーションによって調べる。順を追って、シンクロトロン放射電磁場の数値的計算方法、不整磁場のモデル化、シュミレーションの方法とその結果について説明する。

4.4.1 任意磁場中の荷電粒子運動から生じる電磁場

加速器設計、解析そして運転用の総合的計算コードSAD (Strategic Accelerator Design) には１９９５年以来、誤差磁場のシンクロトロン放射光への影響を知るために、任意磁場における電子運動から生じるシンクロトロン放射光の電磁場波形及びそのスペクトルを計算する機能が付加されている[20]。

ここで紹介するのはSADによるシンクロトロン放射電磁場の計算方法であり、それは次の段階的プロセスから成っている。

1. SADに既に組み込んである加速器要素を使って誤差を含んだ磁場を表現する。

2. SADの粒子トラッキング機能を使って、運動粒子時間で時刻を付した電子の軌跡を計算する。

3. 電磁場を求めるようとする観測点の座標を与え、電子の軌跡に付された運動粒子時間を観測者時間に変換する。

4. 運動荷電粒子の作る電場に関するFeynmann表現 (4.36) 式に基づいて、放射電磁場を数値精度の範囲内で厳密に計算する。

5. 必要に応じ、観測者時間を付された電磁場波形をフーリエ変換して周波数成分を計算、光のスペクトルを求める。

4.4.2 アンジュレータ磁場のモデル化

誤差を含んだアンジュレータ磁場を表現できるように、磁場の与え方を工夫しなければならない。ここではSADコードに加速器要素として登録されているシャープエッジ偏向磁石を用いることにする。このため従来のアンジュレータ磁場の取り扱いとの間に、Fig. 4.8に示されるような違いが生じる。

誤差を含まないアンジュレータ磁場を計算する解析的方法では、アンジュレータ磁場はサイン関数[21]によって表現される。これは解析的取り扱いを可能にするためで、アンジュレータのギャップ間隔が遠い時成立する近似である。一方偏向磁石による表現も近似的で、その成立条件はギャップ間隔が狭い時であるが、アンジュレータの永久磁石の配列方法は、Fig. 4.8にも見られるように、シュミレーション計算に用いた偏向磁石の配列方法とは基本的に異なっている。

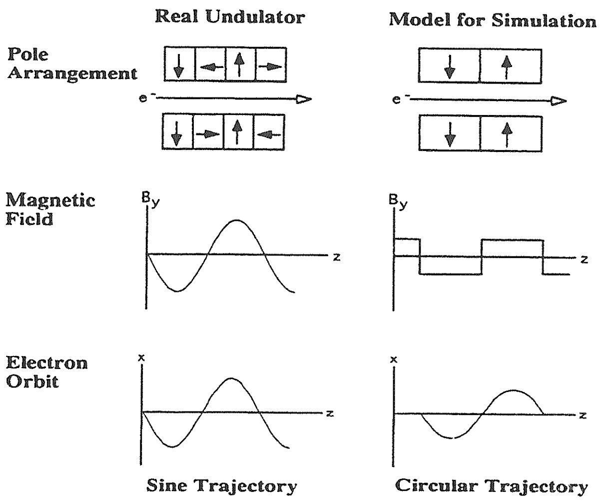


Figure 4.8: アンジュレータ磁場のモデル化。

ここではサイン関数磁場による計算とスペクトルのピーク位置が一致するように偏向磁石強度を決めよう。このためにはアンジュレータパラメターKに応じて、サイン型軌道の電子軌道長に円弧型軌道の電子軌道長が等しくなるように偏向磁石強度を設定すればよい[22]。

不整磁場のモデル

ここで考えようとしているアンジュレータの不整磁場とは、アンジュレータを構成する個々の永久磁石の磁化方向のランダムなばらつきである。

アンジュレータ製作上、水平方向磁場の測定には限界があり、従来それは磁化方向精度で0.5度程度とされてきた。これが光ビームの特性にどの様な影響を及ぼすかを考えるのが今のシュミレーションの目的である。

この磁化方向誤差を表現するために、アンジュレータモデルを構成する個々の偏向磁石に、標準偏差値が0.5度となる磁極の傾き誤差を乱数発生により与えた。さらに誤差キック総量が20μradとなるように一様偏向磁場を重ね合わせた[23]。

[20]生出勝宣氏によるプログラミング。

[21]Maxwell方程式を満足しないから、これ自体が近似である。

[22]スペクトルのピーク位置を一致させるこの近似には、放射光強度について若干の問題を含む。それは高次ハーモニック光のパワーが円弧型軌道では低下する事である。ただし基本次光については、影響は２～３％である。精度が要求されるときには、分割数を増した磁石で近似を良くすればよい。

[23]これはシュミレーション実施時の電子軌道変動に関する実験観測結果を考慮したためで、この講義録の文脈には直接は関係しない事柄である。詳しくは、報告書「MR放射光総合報告」p.51 KEK Proceedings

4.4.3 シュミレーションの方法と結果

シュミレーション I

シュミレーションによって求める物は、1個の電子から発生する、光ビーム特性を示す次のような物理量である。

- シンクロトロン放射スペクトルのピーク位置と幅。得られた電場波形をFourier変換して周波数成分毎のパワーをプロットする。
- スペクトルのピークエネルギーで見た光ビームの水平垂直角度分布。観測点を上下、左右に変えて、前に求めたスペクトルのピークに相当する周波数成分のパワーをプロットする。

これらの物理量を磁場に不整が有るときと無いときについて比較する。現実の有限エミッタンスの電子ビームから発生する放射光特性は、このシュミレーションで求める物理量と電子ビームの角度分布との畳み込みにより計算される。

またここでは光ビーム観測の原点は電子軌道がアンジュレータに入出射する点の延長上にとった。たとえ不整磁場のため電子ビーム軌道にずれが生じても、実際の測定では、光ビームの中心部を選択して観測するからである。

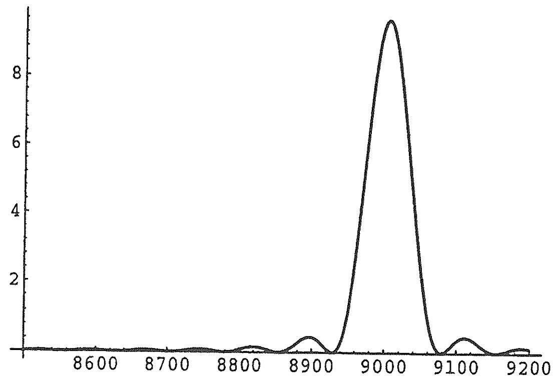
Fig. 4.9にスペクトルシュミレーションの結果を示す。上図が無誤差、下図が誤差有りである。横軸は光子のエネルギーで単位[eV]、縦軸は角密度光束スペクトルで単位[photons/electron/mrad^2/0.1%バンド幅]。無誤差のスペクトル曲線の形は、先に見たS_N関数の近似形Fig. 4.7と良く一致している。

Fig. 4.10に水平方向光発散角を、Fig. 4.11に垂直方向光発散角のシュミレーション結果を示す。共に上図が無誤差、下図が誤差有りである。横軸は発光点から100m下流に想定した観測点の水平ないし垂直方向の位置である単位[m]、縦軸は角密度光束スペクトルで単位[photons/electron/mrad^2/0.1%バンド幅]。光ビーム角度発散に対する不整磁場の影響は垂直方向で著しいことが示されている。

シュミレーション II

アンジュレータ磁場誤差が存在するとき、ギャップ間隔を変えることにより光ビームのパラメターがどのように変化するかも興味のあることである。次のようなシュミレーションを行って、不整磁場の存在による光ビーム特性のギャップ間隔依存性を調べた。

アンジュレータパラメターK値を変化させ、無誤差および有誤差の場合の光ビームパラメターを前のシュミレーション Iと同じやり方で求めた。ただし誤差の与え方は、磁極傾き誤差の標準偏差値が0.5度となるようにした上で、



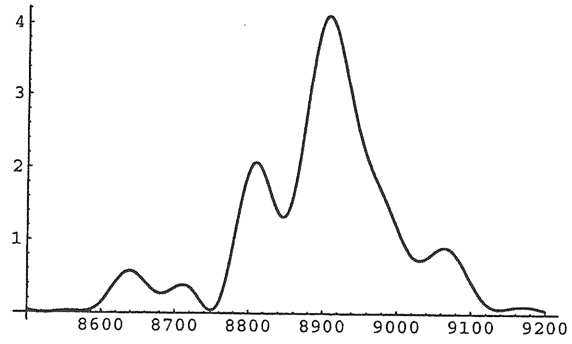


Figure 4.9: 不整磁場の有無によるスペクトルの違い。

K値に応じた誤差キック総量が観測で得た値になるよう一様磁場を重ね合わせてある[24]。

Fig. 4.12およびFig. 4.13には、それぞれ光発散角のK値依存性および角密度光束スペクトルピーク値とスペクトル幅のK値依存性が誤差無しおよび誤差有りの場合について示されている。

Fig. 4.12の光発散角を結ぶフィッティング曲線は2次関数であり、これが充分良い精度のフィッティングを与える。K値が0.2程度では殆ど誤差の影響がない。ギャップを閉めるに連れ誤差の影響が、急速に特に垂直方向で、増大してゆく様子が示されている。無誤差における光発散角のギャップ閉に連れたわずかな増大は、光波長の変化に伴うもので、これは (4.162) 式および (4.155) 式で表された現象である。

増加するK値と共に増大する誤差磁場の影響は、Fig. 4.13にさらに端的に示されている。ここではスペクトルのピーク幅の大きな増大と共に、この図の範囲では本来ならばK値と共に単調増加すべき角密度光束スペクトルのピーク値が、誤差磁場の影響により或特定のK値（このばあいでは0.7～0.8）で極大値をとっている。

96-8 および日本放射光学会誌Vol.10,No.2,p.173 Apr.1997

[24]これもシュミレーション実施時の状況に由来する。

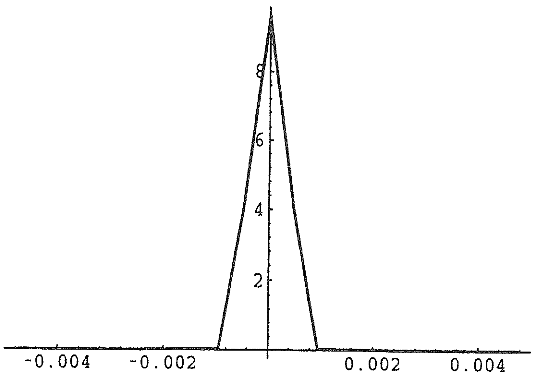


Figure 4.10: 不整磁場の有無による水平光発散角の違い。

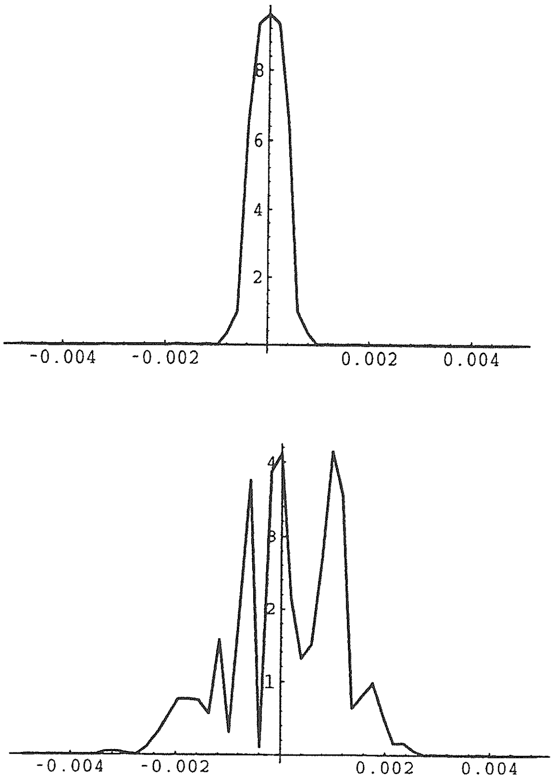


Figure 4.11: 不整磁場の有無による垂直光発散角の違い。

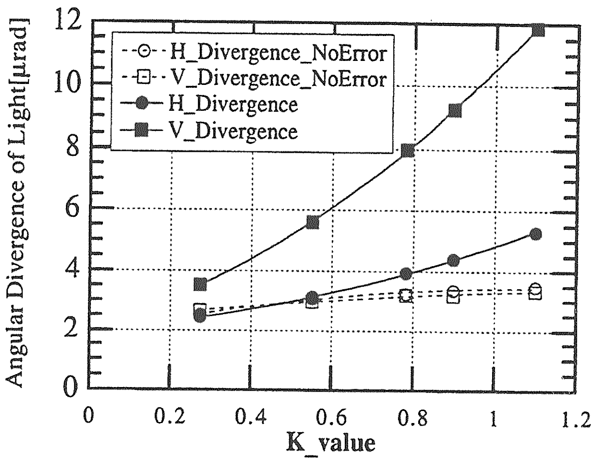


Figure 4.12: K値による光発散角の変化。

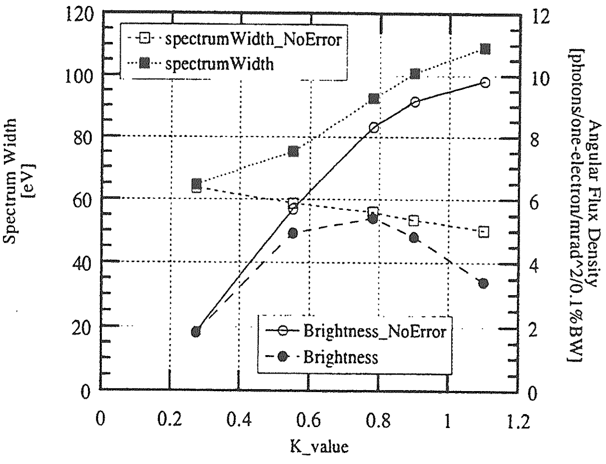


Figure 4.13: K値による光束スペクトルの変化。

Chapter 5

シンクロトロン放射から決まる電子ビーム特性

前章ではシンクロトロン放射について主に光を使う側の立場から調べた。この章では、シンクロトロン放射をすることで荷電粒子に生じる影響を調べる。

電子貯蔵リングにおける電子ビームの特性はこのシンクロトロン放射の影響によって支配されている。

またハドロン貯蔵型加速器においても、CERNのLHC（Large Hadron Collider）加速器のような、非常な高エネルギー領域を目指す場合にはシンクロトロン放射の影響を無視できなくなる。

5.1 電子ビーム特性に影響するシンクロトロン放射

電子ビームの特性に影響を与えるものを纏めておく。ここでは偏向磁石から発生するシンクロトロン放射のみを考えることにする。

既に学んだシンクロトロン放射の特性を使い1個の電子が放射するシンクロトロン光の統計的性格について纏めておく。

次に放射エネルギー量の電子エネルギー偏差への線形依存率を求める。

5.1.1 シンクロトロン放射の統計的性格

まず1個の電子から放出されるシンクロトロン光を全て集める作業をしよう。

偏向磁石の角密度光束スペクトルを観測見込み角の垂直方向で積分して得る光束スペクトルは（4.102）式で与えられている。

ここでは偏光成分についてはσとπ両成分の合計を考える。このとき電子1個当たりの光束スペクトルを（5.1）式に示す。

$$\frac{d\mathcal{F}_{tot}(\omega)}{d\phi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\alpha\gamma\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{\omega}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y)\,dy \qquad (5.1)$$

ここでω_cは電子の相対論係数γと曲率半径ρ_0で次のように決まる臨界周波数である。またαは微細構造定数である。

$$\omega_c = \frac{3}{2}\frac{c\gamma^3}{\rho_0} \qquad (5.2)$$

（5.1）式は水平角度ϕ分布と言う体裁を有しているが、曲率半径が一定な場合にはϕへの依存性はない。このとき加速器一周の間に1個の電子が放出する光を集めるためには、2πを掛ければよく、電子が周回毎に放出する光子数のスペクトル密度が与えられる。

$$\mathcal{N}_{rev}(\omega) = \sqrt{3}\alpha\gamma\frac{1}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y)\,dy \qquad (5.3)$$

これに光子エネルギー$\hbar\omega$を掛けることで、パワースペクトル密度を得る。ここでは古典電磁場に本質的でないPlank定数は微細構造定数αと共に消去される。

$$\begin{aligned} P_{rev}(\omega) &= \sqrt{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\gamma\frac{\omega}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(y)\,dy \\ &\equiv \frac{2}{9}\frac{e^2}{\varepsilon_o c}\gamma S\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{aligned} \qquad (5.4)$$

ここでは次に定義される関数を導入した。

$$S(\xi) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi}\xi\int_{\xi}^{\infty} K_{5/3}(y)dy \qquad (5.5)$$

この関数は次のように正規化されている[1]。

$$1 = \int_0^{\infty} S(\xi)d\xi \qquad (5.8)$$

（5.4）式を周波数について積分すれば、電子がリング加速器一周の間に失う放射エネルギーが計算される。

$$U_0 \equiv \int_0^{\infty} P_{rev}(\omega)\,d\omega = \frac{e^2}{3\varepsilon_0}\frac{\gamma^4}{\rho_0} \qquad (5.9)$$

[1] 以下に展開される一連のBessel関数の積分は、部分積分から導かれる次の関係と、

$$\int_0^{\infty} y^m\left(\int_y^{\infty} K_n(x)\,dx\right)dy = \frac{1}{m+1}\int_0^{\infty} y^{m+1}K_n(y)\,dy \qquad (5.6)$$

Bessel関数の次の性質を使って計算される。

$$\int_0^{\infty} K_n(y)\,y^m dy = 2^{m-1}\Gamma\left(\frac{m+1+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1-n}{2}\right) \qquad (5.7)$$

またこの間に放出する光子の総数は、(5.3) 式を周波数で積分して次式となる。

$$N_{rev} = \int_0^\infty \mathcal{N}_{rev}(\omega)\,d\omega = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3}\alpha\gamma \qquad (5.10)$$

従って、放出される光子の平均エネルギーは次のようになる。

$$< u > = \frac{U_0}{N_{rev}} = \frac{4}{5\sqrt{3}}\hbar c\frac{\gamma^3}{\rho_0} = \frac{8}{15\sqrt{3}}\hbar\omega_c \qquad (5.11)$$

また放出される光子の2乗平均エネルギーは次のようになる。

$$\begin{aligned}\langle u^2\rangle &= \frac{1}{N_{rev}}\int_0^\infty(\hbar\omega)^2\mathcal{N}_{rev}(\omega)\,d\omega\\ &= \frac{3}{5\pi}(\hbar\omega_c)^2\int_0^\infty y^2\left(\int_y^\infty K_{5/3}(x)\,dx\right)dy\\ &= \frac{3}{5\pi}(\hbar\omega_c)^2\frac{55\pi}{81} = \frac{11}{27}(\hbar\omega_c)^2\end{aligned} \qquad (5.12)$$

電磁場計算の限界

Fig. 5.1にパワースペクトル密度を表す関数$S(\xi)$の振る舞いを描いておく。実は、これまでの電磁場計算方法の限界が、この図の左右両端に潜んでいる。

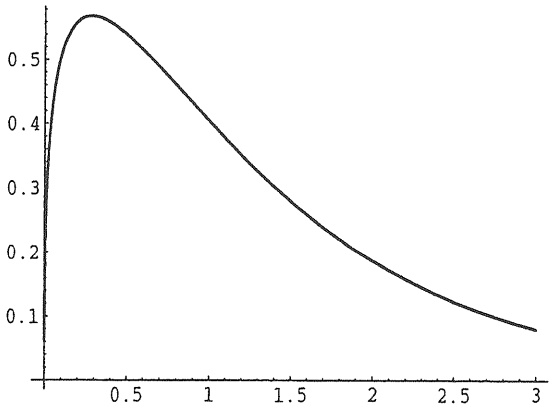


Figure 5.1: 関数$S(\xi)$の振る舞い。

臨界波長は電子エネルギーに3乗で依存するため、非常に高いエネルギーの電子の場合、自分自身より高いエネルギーの光子放出があり得る事になってしまう。あるいはFig. 5.1で高エネルギー側に延びる裾野は電子自身のエネルギーを越えている。これは勿論非物理的状況であり古典電磁気学の限界を示す。このような状況では量子電気力学を適用して考えなければならない。例えば、リニアーコライダーのビーム衝突部ではこの取り扱いを必要としている。

低エネルギー側にも限界が有る、即ち干渉性放射である。光の波長が電子ビームの拡がり程度に長くなると、個々の電子からの放射と言う扱いができなくなり、電子ビーム全体としての放射として考える必要がある。この実例として、自由電子レーザー、電磁場によるビーム不安定現象、高周波源に使われるクライストロンの原理などがある。

5.1.2 放射損失のビームエネルギー依存率

シンクロトロン放射による電子ビーム特性を求めるためには、、放射損失のビームエネルギー依存性を知る必要がある。これを行うために以下の手続きを進める[2]。

磁場中を運動する粒子のエネルギー損失率は (4.108) 式から計算することができる。ここでも2つの偏光成分は合計して扱うことにする。$l = c\,\Delta t$の軌道長を走るときに、1個の電子が放出するエネルギーは次式で与えられる。

$$P_{tot} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma^4}{\rho^2}l \qquad (5.13)$$

ここで曲率半径$\rho \approx \frac{m_e\gamma c}{eB}$は磁場を使って表してやる[3]。

$$\begin{aligned}P_{tot} &= \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{eB}{m_e\gamma c}\right)^2\gamma^4 l\\ &= \frac{e^2c^3}{2\pi}C_\gamma E^2B^2\Delta t\\ &\equiv P_\gamma\Delta t\end{aligned} \qquad (5.14)$$

ここでビームエネルギー$E = m_e\gamma c^2$を使い、さらに次に定義される定数C_γを用いた。

$$\begin{aligned}C_\gamma \equiv \frac{4\pi}{3}\frac{r_e}{(m_ec^2)^3} &\approx 2.1508\times10^{25}mJoule^3\\ &\approx 8.846\times10^{-5}mGeV^3\end{aligned} \qquad (5.15)$$

ここでr_eは次に示される古典電子半径である。

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_ec^2} \approx 2.81794\times10^{-15}m \qquad (5.16)$$

参照エネルギー電子の周回当たりエネルギー損失は、

$$\begin{aligned}U_0 \equiv U_{rev}(0) &= \frac{C_\gamma E_0^4}{2\pi}\oint\frac{ds}{\rho^2}\\ &= \frac{C_\gamma E_0^4}{\rho_0}\end{aligned} \qquad (5.17)$$

最後の等号は加速器の磁場が一定値(等磁場条件)ρ_0の時に成立する。また当然これは (5.9) 式の結果と一致している。

エネルギー偏差ΔEのある電子の周回当たりエネルギー損失を次のように見積もる。

[2]この章内では超相対論的粒子$\beta = 1$を仮定する。このときビームのエネルギーと運動量は定数cの違いだけで同等に扱われる。

[3]ここでは後戻りの印象を与えるかも知れない。前章のシンクロトロン放射光の計算ではビームエネルギーの参照値からのずれを扱うようになっていなかったため、ここでその作業を行う必要がある。

エネルギー放射損失量は、(5.14) 式に見るように、ビームエネルギー、磁場値そして時間の長さ(あるいは軌道長)に依存している。まず、軌道長によるエネルギー放射量の違いが表現できるようにして評価を始めよう。

$$
\begin{aligned}
U_{rev}(\Delta E) &= \oint P_\gamma dt = \oint P_\gamma \tfrac{dt}{ds} ds \\
&= \oint P_\gamma \tfrac{1}{c}\left(1+\tfrac{x}{\rho_0}\right) ds \\
&= \tfrac{1}{c}\oint P_\gamma \left(1+\tfrac{\eta}{\rho_0}\tfrac{\Delta E}{E_0}\right) ds
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

上式の演算の内2行目から3行目への移行に当たっては、水平位置xについて平均化操作を施した。これによってベータトロン振動の寄与は振動数が速い為に影響が消え、シンクロトロン振動によるエネルギー偏差の効果だけが考慮の対象となる。さらにこれが運動量分散関数とエネルギー偏差によって表現されている。

ここでエネルギー損失のビームエネルギーへの線形依存率を評価しよう。

$$
\begin{aligned}
\Delta_{rad} &\equiv \left.\tfrac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E}\right|_{\Delta E=0} \\
&= \tfrac{1}{c}\oint\left(\tfrac{dP_\gamma}{d\Delta E} + P_\gamma \tfrac{\eta}{\rho_0}\tfrac{1}{E_0}\right) ds
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

上式被積分関数の第1項は (5.14) 式から理解されるように2つの部分から成る。第1の部分はビームエネルギーに直接依存する項で、第2の部分は磁場の変化[4]を通じてビームエネルギーに依存する項である。即ち次式に表すことができる。

$$
\frac{dP_\gamma}{d\Delta E} = 2\frac{P_\gamma}{E_0} + 2\frac{P_\gamma}{B}\frac{dB}{d\Delta E} \tag{5.20}
$$

磁場変化を通じてビームエネルギーに依存する項は、運動量分散関数で表される平衡軌道変化率を使い表現できる。

$$
\frac{dB}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{dx}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\eta}{E_0} \tag{5.21}
$$

これらを纏めると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Delta_{rad} &= \left.\tfrac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E}\right|_{\Delta E=0} \\
&= \tfrac{U_0}{E_0}\left[2 + \tfrac{1}{cU_0}\oint\left\{\eta P_\gamma\left(\tfrac{1}{\rho_0}+\tfrac{2}{B}\tfrac{\partial B}{\partial x}\right)\right\}_{\Delta E=0} ds\right] \\
&= \tfrac{U_0}{E_0}(2+\mathcal{D})
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

ここで$\mathcal{D}$は次式で定義され積分部を表す。

$$
\mathcal{D} \equiv \tfrac{1}{cU_0}\oint\left\{\eta P_\gamma\left(\tfrac{1}{\rho_0}+\tfrac{2}{B}\tfrac{\partial B}{\partial x}\right)\right\}_{\Delta E=0} ds \tag{5.23}
$$

[4]これはエネルギー変化の結果、水平方向にビーム軌道が移動して異なる磁場値の所を通る事に対応する。

もし4極磁場と2極磁場が、参照運動量粒子の軌道上で重畳せず分離されているならば、$\mathcal{D}$は次のように評価される。

$$
\mathcal{D} = \frac{1}{cU_0}\oint \eta P_\gamma \frac{1}{\rho_0} ds \tag{5.24}
$$

さらに等磁場条件を満たす加速器の場合には次のようになる。

$$
\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\eta}{\rho_0^2} ds \equiv \frac{R}{\rho_0}\alpha \tag{5.25}
$$

次式で計算されるαはモメンタムコンパクションファクターと呼ばれ、ビームエネルギー偏差から生じる軌道長の変化率を示す量である。

$$
\alpha = \frac{1}{2\pi R}\oint \frac{\eta}{\rho} ds \tag{5.26}
$$

ここでRは平均軌道半径である。

5.2 放射減衰

シンクロトロン放射によるビームエネルギー損失は、先に学んだ粒子の振動に対して影響を及ぼし、振動の減衰へと導く。そしてこの影響はシンクロトロン振動とベータトロン振動の両者に生じる。

5.2.1 シンクロトロン振動

シンクロトロン放射によるエネルギー損失とそれを補う高周波加速の働きを、既に学んだ転送行列の方法で調べてみよう。シンクロトロン放射によるビームエネルギー損失と高周波加速空洞によるエネルギー補給の様子をFig. 5.2に模式的に表した。

簡単化された転送行列で問題を分かり易く取り扱うために次の限定条件を設定する[5]。すなわち、

- 加速空洞およびシンクロトロン放射が起こる場所はリング中の各々1箇所[6]とする。
- 更にそれらの場所では運動量分散関数はその微分を含めて消去されているものとする。これにより「分離されたシンクロトロン振動」として2×2転送行列でシンクロトロン振動のみ取り出して扱える。
- リングの収束磁石システムには最低2の周期性があるものとする。この仮定により加速空洞の場所から放射損失の場所へあるいは放射損失点から加速空洞の場所まで、リング半周分の同一の転送行列R_Hで運動が追跡できる。

[5]複雑で分かり難く厳密な取扱は計算機シュミレーションによって行うことができる。しかし基本的な考え方は此処で述べるものと同じである。
[6]この仮定は加速空洞についてはともかく、放射損失については現実的とはいえないが、簡単化のために用いる。

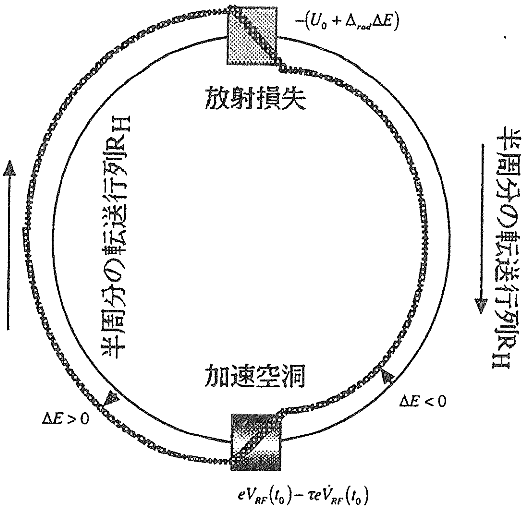


Figure 5.2: ビームエネルギー変動模式図。シンクロトロン放射によるエネルギー損失と高周波加速によるエネルギー補給。

転送行列による表現

磁場要素　磁場要素によるリング半周の転送行列R_Hは、(3.121) 式に示された様に区分対角化された4×4転送行列からシンクロトロン振動部分を抜き出して次式で表される。

$$R_H = \begin{pmatrix} 1 & g/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.27)$$

加速空洞　加速空洞の働きは (3.111) 式に、転送行列C_{acc}と正味の加速を表す非斉次項$\mathbf{c}$を含む形で与えられている。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} = \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e}{c^2 p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e}{cp_0} V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \\
&\equiv C_{acc} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \mathbf{c}
\end{aligned} \qquad (5.28)$$

但し此処で電子は超相対論的であるとして$v_0 = c$の近似をした。

放射損失　放射損失については、周回当たり放射エネルギー損失の線形近似を表す次式を基に、

$$\begin{aligned}
U_{rev}(\Delta E) &= U_{rev}(0) + \left.\frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E}\right|_{\Delta E=0} \Delta E \\
&= U_0 + \Delta_{rad}\Delta E
\end{aligned} \qquad (5.29)$$

次のように転送行列S_{rad}とそれに付随する非斉次項$\mathbf{s}$とで表現することができる。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} = \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\Delta_{rad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} - \begin{pmatrix} 0 \\ U_0/cp_0 \end{pmatrix} \\
&\equiv S_{rad} \begin{pmatrix} c\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \mathbf{s}
\end{aligned} \qquad (5.30)$$

電子は超相対論的であるとして近似をした。

リング一周の運動追跡

加速空洞の入り口から出発して、加速空洞、磁場半周、放射損失そして磁場半周後、再び元の地点に来るまでの運動を転送行列と非斉次項の混在した形で書き下すと次式のように書ける。

$$\mathbf{z}_{out} = R_H \left[S_{rad} R_H \left\{ C_{acc}\mathbf{z}_{in} + \mathbf{c} \right\} - \mathbf{s} \right] \qquad (5.31)$$

始め$\mathbf{z}_{in}$で出発した運動状態が周回後は$\mathbf{z}_{out}$になる。

平衡軌道　ここで特別解とその回りでの自由シンクロトロン振動として運動を取扱う事にしよう。次式のようにリング一周で元に戻る$\mathbf{z}_0$を求めると、これはシンクロトロン振動の平衡軌道を表わす特別解である。

$$\mathbf{z}_0 \equiv \mathbf{z}_{out} = \mathbf{z}_{in} \qquad (5.32)$$

上式を満たす$\mathbf{z}_0$の成分を露に求める。

$$\begin{cases} c\tau &= \frac{2U_0 - (2-\Delta_{rad}) eV_{RF}(t_0)}{(-2+\Delta_{rad})\frac{e}{c}\dot{V}_{RF}(t_0)} \\ \Delta p/p_0 &= \frac{U_0}{cp_0}\frac{1}{-2+\Delta_{rad}} \end{cases} \qquad (5.33)$$

時間τの原点をゼロにする条件を探すと。次式を満たすようにt_0を決めればよいことが分かる。即ち参照運動量粒子のエネルギー収支釣合条件である。

$$eV_{RF}(t_0) = \frac{2U_0}{2-\Delta_{rad}} \approx U_0 \qquad (5.34)$$

参照運動量粒子のエネルギー収支釣合条件から決まる平衡位相角は、

$$\omega_{RF} t_0 = \cos^{-1}\left(\frac{U_0}{e\hat{V}_{RF}}\right) \qquad (5.35)$$

そして平衡位相角における加速電圧勾配が決まる。

$$\dot{V}_{RF}(t_0) \quad = -\omega_{RF}\hat{V}_{RF}\sin\omega_{RF}t_0 \tag{5.36}$$

このとき加速空洞入り口における参照運動量粒子の運動量偏差は次のようになる。

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{-1}{2-\Delta_{rad}}\frac{U_0}{cp_0} \approx -\frac{1}{2}\frac{U_0}{cp_0} \tag{5.37}$$

此処では明らかに参照運動量とはリングの場所毎に決まる量である。

減衰シンクロトロン振動　このように決まった平衡軌道を中心とする自由シンクロトロン振動は次の転送行列によって記述される。

$$R_H S_{rad} R_H C_{acc} = \begin{pmatrix} 1-(1-\frac{\Delta_{rad}}{2})g\frac{e}{c^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) & (1-\frac{\Delta_{rad}}{2})g \\ -(1-\Delta_{rad})\frac{e}{c^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0) & (1-\Delta_{rad}) \end{pmatrix} \tag{5.38}$$

これは放射損失のためSymplectic条件を満たさない。そしてこの行列式を計算することで、シンクロトロン振動のCourant-Snyder不変量の周回当たり減衰率がΔ_{rad}であることが示される。

$$det|R_H S_{rad} R_H C_{acc}| = 1-\Delta_{rad} \approx e^{-\Delta_{rad}} \tag{5.39}$$

エネルギー偏差ないし時間偏差の時間当たり振幅減衰率はリングの周回時間T_0を使って次式で与えられる。

$$\alpha_E = \frac{\Delta_{rad}}{2T_0} \tag{5.40}$$

シンクロトロン振動の１周期内における減衰が小さいと言う条件下で、減衰調和振動子としての解を書くことができる。

$$\alpha_E << \Omega \tag{5.41}$$

$$\tau(t) = \hat{\tau}e^{-\alpha_E t}\cos(\Omega t - \theta_0) \tag{5.42}$$

ここでΩはシンクロトロン振動の角周波数で次式で与えられる。これは（3.125）式で求めたΩ_sを周回時間で除した物に等しい。

$$\Omega = \frac{1}{T_0}\sqrt{g\frac{e}{c^2p_0}\dot{V}_{RF}(t_0)} \tag{5.43}$$

5.2.2　垂直方向ベータトロン振動

シンクロトロン放射の影響はベータートロン振動の減衰としても現れる。まず比較的状況の単純な垂直方向でその影響を考えてみる。

垂直ベータトロン振動の大きさを、（3.74）式で定義した運動粒子のCourant-Snyder不変量で評価する。これが放射時と引き続く加速時とにどの様な振る舞いをするか考えてみる。

$$W \quad = \gamma(s)z(s)^2 + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'(s)^2 \tag{5.44}$$

電子が放射によってエネルギーを失うとき、放射は殆ど電子の進行方向に放出される[7]。このため放射の前後で、横方向運動量p_yと平衡軌道に沿った運動量成分p_s同士の比率は、各々一定比率で減少するが、不変である。そのためこの放射過程ではCourant-Snyder不変量は保存する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \tag{5.45}$$

一方加速空洞での加速に際しては、横方向運動量p_yは一定のまま進行方向運動量成分p_sのみ増加する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \quad \rightarrow \quad \frac{p_y}{p_s+\delta p} = y'\left(1-\frac{\delta p}{p_s}\right) \tag{5.46}$$

加速によるエネルギー増加δEに対応して横方向運動量は次式のような減少$\delta y'$をする。

$$\delta y' = -y'\frac{\delta p}{p_s} \approx -y'\frac{\delta E}{E} \tag{5.47}$$

従ってCourant-Snyder不変量は次のように減少する。

$$\delta W = -2\left(\alpha y y' + \beta y'^2\right)\frac{\delta E}{E} \tag{5.48}$$

ベータトロン振動をTwissパラメター、Courant-Snyder不変量そしてベータトロン位相を使って表す。これは（3.71）式および（3.72）式と同じ物であり、χは（3.73）式で与えられる。

$$\begin{cases} y &= \sqrt{W\beta}\cos(\phi-\theta) \\ y' &= \frac{\beta'}{2\beta}y - \sqrt{\frac{W}{\beta}}\sin(\phi-\theta) \\ &= -\sqrt{\frac{W}{\beta}}\left[\alpha\cos(\phi-\theta)+\sin(\phi-\theta)\right] \\ &= \sqrt{W\gamma}\sin(\phi-\theta-\chi) \end{cases} \tag{5.49}$$

[7]先に学んだように、放射される光にはある範囲での角度拡がりがある。このことは後に考えるが、量子励起の垂直方向への影響をもたらす。

Courant-Snyder不変量の変動（5.48）式を評価するために、シンクロトロン放射はベータトロン位相と相関が無いと考えて、位相について平均操作をする。

$$\begin{cases} \langle yy' \rangle &= -\frac{\alpha}{2} W \\ \langle y'^2 \rangle &= \frac{\gamma}{2} W \end{cases} \tag{5.50}$$

この結果と、Twissパラメター間の関係を使って纏めると、エネルギー放射に伴うCourant-Snyder不変量の減少が次のように求められる。

$$\frac{\delta W}{W} = -\frac{\delta E}{E} \tag{5.51}$$

リング1周における放射損失の効果を平均する事により次のCourant-Snyder不変量に関する微分方程式を得る。

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = -\frac{U_0}{T_0 E_0} \tag{5.52}$$

此処でT_0は参照運動量粒子のリング周回時間である。

垂直ベータトロン振動の放射減衰による単位時間当たり振幅減衰率は次のようになる。

$$\alpha_y = \frac{1}{2}\frac{U_0}{T_0 E_0} \tag{5.53}$$

5.2.3 水平方向ベータトロン振動

水平方向における垂直方向との事情の違いは、曲率と運動量分散関数の存在である。エネルギー放射量自体、曲率のある場所では水平位置に依存する[8]、更に、運動量分散関数が存在するとエネルギー放射に伴い電子平衡軌道が変化する。この二者の組み合せから垂直方向とは若干異なった効果が生じる。

以下では垂直方向の時には現れなかったこの効果についてのみ検討を進め、最後に既に学んだ垂直方向の場合と共通の効果を足し合わせて考えることにしよう。

電子平衡軌道の変化を考慮するため、電子の軌道を自由ベータトロン振動と平衡軌道部分とに分離して表す。

$$\begin{cases} x &= x_\beta + x_{co} \\ x' &= x'_\beta + x'_{co} \end{cases} \tag{5.54}$$

平衡軌道変動は放出エネルギーと運動量分散関数との積で表せる。

$$\begin{cases} \delta x_{co} &= -\eta \frac{\delta E}{E} \\ \delta x'_{co} &= -\eta' \frac{\delta E}{E} \end{cases} \tag{5.55}$$

エネルギー放出に際して電子は垂直方向の時と同様、位置も角度も変化しない。

$$\begin{cases} \delta x &= 0 = \delta x_\beta + \delta x_{co} \\ \delta x' &= 0 = \delta x'_\beta + \delta x'_{co} \end{cases} \tag{5.56}$$

しかしエネルギー放出による平衡軌道の変化がベータトロン振動を励起する。

$$\begin{cases} \delta x_\beta &= \eta \frac{\delta E}{E} \\ \delta x'_\beta &= \eta' \frac{\delta E}{E} \end{cases} \tag{5.57}$$

このために次式のような水平方向特有のCourant-Snyder不変量の変化が生じる。

$$\begin{aligned} \delta W &= 2\left\{\gamma x_\beta \delta x_\beta + \alpha\left(x'_\beta \delta x_\beta + x_\beta \delta x'_\beta\right) + \beta x'_\beta \delta x'_\beta\right\} \\ &= 2\frac{\delta E}{E}\left\{(\gamma\eta + \alpha\eta')\, x_\beta + (\alpha\eta + \beta\eta')\, x'_\beta\right\} \end{aligned} \tag{5.58}$$

基準座標上でΔs進むとき粒子の描く軌道長Δlは曲率のある場所では水平位置に依存し、従って放出エネルギー量も水平位置に依存する。

$$\delta E = \frac{\Delta l}{c} P_\gamma = \frac{1}{c}\left(1 + \frac{x_\beta}{\rho}\right)\Delta s P_\gamma \tag{5.59}$$

上式を（5.58）式に代入すればCourant-Snyder不変量の変動が次のように表せる。

$$\begin{aligned} \delta W = &\ \frac{1}{c}\left(1 + \frac{x_\beta}{\rho}\right)\Delta s P_\gamma \times \\ &2\frac{1}{E}\left\{(\gamma\eta + \alpha\eta')\, x_\beta + (\alpha\eta + \beta\eta')\, x'_\beta\right\} \end{aligned} \tag{5.60}$$

此処でベータトロン位相について平均化操作をする事により、

$$\begin{cases} \left\langle x_\beta^2 \right\rangle &= \frac{\beta}{2} W \\ \left\langle x_\beta x'_\beta \right\rangle &= -\frac{\alpha}{2} W \end{cases} \tag{5.61}$$

次の表式を得る。

$$\frac{\delta W}{W} = \frac{\Delta s P_\gamma}{cE}\frac{\eta}{\rho} \tag{5.62}$$

この表式をリング全体で積分した上で時間平均をとれば、Courant-Snyder 不変量の時間変動を表す微分方程式の項の内、水平方向に特徴的な項が算出される。

$$\left(\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}\right)_{Hspecific} = \frac{1}{T_0}\frac{1}{2\pi R}\oint \frac{P_\gamma}{cE}\frac{\eta}{\rho} ds \tag{5.63}$$

等磁場条件を満たすリングでは、P_γと$\frac{\eta}{\rho_0}$とは分離して積分できるので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{W}\frac{dW}{dt}\right)_{Hspecific} &= \frac{1}{T_0 E_0}\frac{1}{2\pi R}\oint \frac{P_\gamma}{c} ds \oint \frac{\eta}{\rho_0} ds \\ &= \frac{U_0}{T_0 E_0}\frac{1}{2\pi R}\oint \frac{\eta}{\rho_0} ds = \frac{U_0}{T_0 E_0}\alpha \end{aligned} \tag{5.64}$$

[8] 例えばセクター型磁石の場合、電子軌道が外側を通るとき、磁石内軌道長が延びるので、放射エネルギー量が大きい。

此処でαはモメンタムコンパクションファクターである。

最後に、垂直方向と共通の項を足し合わせることで水平方向ベータトロン振動の時間当たり振幅減衰率として次の表式を得る。

$$\alpha_x = \frac{1}{2}\frac{U_0}{T_0 E_0}(1-\alpha) \tag{5.65}$$

5.3 ビームの平衡分布

シンクロトロン放射の影響は、既に見たシンクロトロン振動やベータトロン振動の減衰だけではない。シンクロトロン放射は光子として量子化されたエネルギーの放出であるために、ビーム運動に雑音的揺らぎをもたらす。この揺らぎと放射減衰の結果、ビームのエネルギー拡がりやエミッタンスは、加速器パラメターから決まる特定の値を取ることになる。[9]

5.3.1 量子励起と中心極限定理

多数の光量子のランダムな放出を統計的に取り扱い、電子ビーム特性に与える影響を見積もることができる。この中で中心極限定理（central limit theorem）が重要な役割を果たす。

この定理の主張は

「互いに独立な確率変数の和は、或条件の下では、近似的にガウスの正規分布に成る。」

ということである。

此処で或条件とは、数学的には色々難しいことがあるようだが、簡単に言えば、「非常に多数の和であること、そして少数の確率変数が特に大きく他を圧倒するようなことがないこと。」である。

これをシンクロトロン放射に当てはめれば、減衰時間内の放出光子数が充分多いこと、そして極端に高いエネルギーの光子放出がないことである。さらに独立な確率変数と言う条件から、電子のベータトロンないしシンクロトロン振動の位相と光子放出との間に相関のないことが要求される。

このような条件が満たされていれば、個々の光子のエネルギー分布はFig. 5.1に従っているが、それを積み上げた個々の電子の（減衰時間内の）放出エネルギー量はガウス分布に従う。

5.3.2 エネルギー分布

量子化されたシンクロトロン放射をする電子のエネルギー偏差[10]を考えてみよう。

時間tにおける一個の電子のエネルギー偏差は、過去における光子放出と引き続く放射減衰の蓄積の結果として次式に表すことができる。

$$\Delta E(t) = \sum_{t_i<t} u_i e^{-(t-t_i)\alpha_E} \cos\Omega(t-t_i) \tag{5.66}$$

此処でi番目の放出光子エネルギーu_iとその放出時刻t_iとは確率変数である。一方シンクロトロン振動減衰率α_Eとシンクロトロン振動の角周波数Ωは確定した量で既に求めてある。

電子エネルギー偏差の２乗を次の形に書き、

$$\begin{aligned}\Delta E(t)^2 &= \sum_{t_i<t} u_i e^{-(t-t_i)\alpha_E} \cos\Omega(t-t_i) \sum_{t_j<t} u_j e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos\Omega(t-t_j) \\ &= \sum_{t_i,t_j<t} u_i u_j e^{-(t-t_i)\alpha_E} e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos\Omega(t-t_i)\cos\Omega(t-t_j)\end{aligned} \tag{5.67}$$

上式のアンサンブル平均が計算できれば、電子ビームのエネルギー分布の分散が得られることになる。

ここで、一シンクロトロン振動周期内の放射減衰は充分小さいことを仮定する。これにより次式を満足する特性時間Δtを導入することができる。

$$\alpha_E \ll \frac{1}{\Delta t} \ll \frac{\Omega}{2\pi} \tag{5.68}$$

ここで特性時間Δt内において、確率変数u_iとt_iに関してアンサンブル平均を取ってみよう。

$$\left\langle \Delta E(t)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{t_i,t_j<t} u_i u_j e^{-(t-t_i)\alpha_E} e^{-(t-t_j)\alpha_E} \cos\Omega(t-t_i)\cos\Omega(t-t_j) \right\rangle \tag{5.69}$$

放射減衰項を括るために、時間を特性時間Δt幅にスライスし、そのスライスの総和を取る形に書く。

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{n\Delta t \le 2t-(t_i+t_j) \le (n+1)\Delta t} u_i u_j e^{-\{2t-(t_i+t_j)\}\alpha_E} \cos\Omega(t-t_i)\cos\Omega(t-t_j) \right\rangle \tag{5.70}$$

---

[9]ここでは幅を占める数式が避けられない為、単コラムにする。

[10]超相対論的電子の場合、運動量偏差と同義語と考えて良い。

既に仮定したように、特性時間Δt内における減衰項の変化は無視できる。そこで減衰項を内側の総和の外に出すことができ次式のようになる。

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-n\Delta t\alpha_E}\left\langle \sum_{n\Delta t\le 2t-(t_i+t_j)\le (n+1)\Delta t} u_i u_j \cos\Omega\left(t-t_i\right)\cos\Omega\left(t-t_j\right)\right\rangle\right\} \tag{5.71}$$

2個の光子放出の間に、シンクロトロン振動の位相に関して相関が無いと考えられるから、異なる放出光子エネルギーの積$u_i u_j$（$i \neq j$）はアンサンブル平均に寄与しない。

$$\begin{aligned}&\approx \sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-n\Delta t\alpha_E}\left\langle \sum_{n\Delta t\le 2t-2t_i\le (n+1)\Delta t} u_i^2 \cos^2\Omega\left(t-t_i\right)\right\rangle\right\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-n\Delta t\alpha_E}\left\langle \sum_{n\Delta t\le 2t-2t_i\le (n+1)\Delta t} u_i^2\frac{1}{2}\left\{1+\cos 2\Omega\left(t-t_i\right)\right\}\right\rangle\right\}\end{aligned} \tag{5.72}$$

特性時間Δt内でシンクロトロン振動の位相に関して平均ができ、これによりアンサンブル平均へ寄与するのは次の項のみである。

$$\approx \sum_{n=0}^{\infty}\left\{e^{-n\Delta t\alpha_E}\frac{1}{2}\left\langle \sum_{n\Delta t\le 2t-2t_i\le (n+1)\Delta t} u_i^2\right\rangle\right\} \tag{5.73}$$

特性時間Δt内におけるアンサンブル平均において、確率変数 u_iとt_iの分布は先に求めた統計的分布を再現するはずである。即ち（5.12）式で与えられる2乗平均光子エネルギー$< u^2 >$および（5.10）式の周回当たり放出光子数N_{rev}を時間当たりに換算した物を使いアンサンブル平均を書くことができる[11]。

$$\left\langle \Delta E\left(t\right)^2\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{e^{-n\Delta t\alpha_E}\frac{\Delta t}{2}\frac{N_{rev}}{T_0}\left\langle u^2\right\rangle\right\} \tag{5.74}$$

現在から無限過去にまで積分することで、電子ビームのエネルギー偏差の分散が計算できる。

$$\left\langle \Delta E^2\right\rangle = \frac{N_{rev}\left\langle u^2\right\rangle}{4\alpha_E T_0} \tag{5.75}$$

上記の積分実行に際して次の関係を利用した。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\Delta t\alpha_E} = \int_0^{\infty}e^{-t\alpha_E}dt = \frac{1}{\alpha_E} \tag{5.76}$$

中心極限定理が成立するならば、電子ビームのエネルギー分布の形はガウス関数である。

$$w\left(\Delta E\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E}\exp\left(-\frac{\Delta E^2}{2\sigma_E^2}\right) \tag{5.77}$$

そしてそのエネルギー分布の標準偏差は既に求められている。

$$\sigma_E^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Delta E\right)^2 w\left(\Delta E\right)d\left(\Delta E\right) = \left\langle \Delta E^2\right\rangle = \frac{N_{rev}\left\langle u^2\right\rangle}{4\alpha_E T_0} \tag{5.78}$$

この導出の中で中心極限定理の役割は決定的である。もし中心極限定理が成立しないときには、電子ビームのエネルギー分布はガウス型でなくなる。思いつくままにその例を挙げてみよう。

- シンクロトロン振動が非線形なとき。$\Longrightarrow$ 大振幅振動時、ビームローディング効果
- 特性時間が設定できないとき。$\Longrightarrow$ 放射減衰が非常に速いとき、シンクロトロン振動が非常に速いとき
- 特性時間内に放出される光子数が充分多くないとき。$\Longrightarrow$ 非常に高いエネルギー光子放出、残留ガスやビーム間相互作用によるBremsstrahlung
- 異なる光子放出の間にシンクロトロン位相に関して相関があるとき。$\Longrightarrow$ FEL発振

[11]総和内の時間幅に注意。

5.3.3 ベータトロン振動の量子励起と自然エミッタンス

ベータトロン振動に対する光量子放出の効果を見積もろう。

水平方向

エネルギーuの光子放出によって生じるCourant-Snyder不変量の変動量δWは光子放出点におけるTwissパラメターと運動量分散関数を使って、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\delta W &= \left\{\beta\left(x'+\tfrac{u}{E}\eta'\right)^2+2\alpha\left(x'+\tfrac{u}{E}\eta'\right)\left(x+\tfrac{u}{E}\eta\right)+\gamma\left(x+\tfrac{u}{E}\eta\right)^2\right\}-\left(\beta x'^2+2\alpha xx'+\gamma x^2\right)\\ &= \left(\tfrac{u}{E}\right)^2\left(\beta\eta'^2+2\alpha\eta\eta'+\gamma\eta^2\right)+2\tfrac{u}{E}\left\{\beta x'\eta'+\alpha\left(x\eta'+x'\eta\right)+\gamma x\eta\right\}\end{aligned} \tag{5.79}$$

ここでEは運動電子のエネルギー。

ベータトロン振動について平均操作を行うと、光子エネルギーに関して2次の項が残る。

$$\delta W=\left(\frac{u}{E}\right)^2\left(\beta\eta'^2+2\alpha\eta\eta'+\gamma\eta^2\right)\equiv\left(\frac{u}{E}\right)^2\mathcal{H}(s) \tag{5.80}$$

此処で定義された関数$\mathcal{H}(s)$は、円形加速器のラティス（ビーム収束光学系）構造によって決まる。

(5.80) 式を放出光子の全スペクトルに渡って積分し、リング1周での平均を取ることで、Courant-Snyder不変量の変化を示す微分方程式の内、光子放出に伴う増加を示す項が計算される。

$$\begin{aligned}\left.\tfrac{dW}{dt}\right|_{QuantumExct.} &= \tfrac{1}{L}\oint\left[\tfrac{1}{T}\int_0^T\delta W dt\right]ds\\ &= \tfrac{1}{L}\oint\mathcal{H}(s)\left[\tfrac{1}{T}\int_0^T\left(\tfrac{u}{E}\right)^2 dt\right]ds\\ &= \tfrac{1}{L}\oint\mathcal{H}(s)\left[\tfrac{1}{E^2}N_{rev}\left\langle u^2\right\rangle\right]ds\end{aligned} \tag{5.81}$$

Courant-Snyder不変量の平衡値$W_{Eq.}$は次に示す量子励起と放射減衰の釣り合い条件から決まる。以下の計算では、等磁場条件を仮定している。この条件により光子スペクトルとしてリング全体を通じて同じ物が使える。

$$\left.\frac{dW}{dt}\right|_{Total}=\left.\frac{dW}{dt}\right|_{QuantumExct.}+\left.\frac{dW}{dt}\right|_{Rad.Damp.}=\left.\frac{dW}{dt}\right|_{QuantumExct.}-2\alpha_x W=0 \tag{5.82}$$

自然エミッタンスε_xはCourant-Snyder不変量の平衡値$W_{Eq.}$から次のように計算される。

$$\varepsilon_x\equiv\tfrac{1}{2}W_{Eq.}=\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2\alpha_x}\tfrac{dW}{dt}\left|_{QuantumExct.}\right.=\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2\alpha_x}\tfrac{1}{L}\oint\mathcal{H}(s)\left[\tfrac{1}{E^2}N_{rev}\left\langle u^2\right\rangle\right]ds \tag{5.83}$$

シンクロトロン放射の統計的性格として求めた所を積分に代入することで、自然エミッタンスを次式の表現として得る。

$$\varepsilon_x=\tfrac{55}{32\sqrt{3}}\tfrac{\hbar}{m_0c}\tfrac{\gamma^2}{J_x\rho}\tfrac{1}{2\pi\rho}\oint_{mag.}\mathcal{H}(s)\,ds=\tfrac{55}{32\sqrt{3}}\tfrac{\hbar}{m_0c}\tfrac{\gamma^2}{J_x\rho}\left\langle\mathcal{H}(s)\right\rangle_{mag.} \tag{5.84}$$

此処で積分や平均は磁石内でのみ行う。またJ_xは水平方向減衰分配率と呼ばれ等磁場条件下では$1-\alpha$である（αはモメンタムコンパクションファクター）。

垂直方向

垂直方向では通常、運動量分散関数がゼロなので、エミッタンス発生の元となる物が存在しない様に思える。しかし詳細に見れば、放射光自身にも発散角があり、それは前の章で求めたところに依ればおよそ$1/\gamma$である。これによるCourant-Snyder不変量の増加量は (5.80) 式に倣い次式で評価される。

$$\delta W=\left(\frac{u}{E}\right)^2\beta\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \tag{5.85}$$

超相対論的電子ではこの値はとても小さい。現実には垂直方向のエミッタンスを決めるのは、磁場誤差から生じる垂直方向運動量分散関数および水平方向との結合である。勿論、垂直方向の偏向磁石がある場合には、その影響は水平方向同様に生じるものである。

コメント

此処ではシンクロトロン放射によるエミッタンスやエネルギー拡がりの議論をした。しかし、此処の議論は中心極限定理が適用できる物理現象なら幅広く使える。

例えば、電子ビームと残留ガスとの散乱を考えてみよう。通常はビーム寿命を制限する1度の大振幅散乱から要求真空度が決まる。しかしビーム損失にはつながらない小振幅散乱の効果もある。この小振幅多重散乱の効果は基本的にシンクロトロン放射に依る量子励起と同じであり、電子ビームエネルギー幅の増大やエミッタンスの増大を生じる。

さらにバンチ内電子同士のイントラビーム散乱や衝突型加速器のビームビーム間相互作用からも同様な寄与がある。

これらの寄与は、シンクロトロン放射の光子エネルギー分布と異なり、比較的大振幅側に裾野が延びている。このため単一大振幅散乱が大きな影響を持ち易く、中心極限定理の成立条件を脅かし、非ガウス型テイル分布の発生原因になりがちである。

終わりに

今回のOHO'97は（続）加速器入門と言うことで、比較的幅広い立場からビームへの入門を試みる必要があった。

多種多様なビームの検討方法や手段があるが、それらを網羅的に使用するのでは入門と言う名にそぐわ無いし、筆者の任にも耐えない。転送行列の方法を繰り返し適用したのは、一元化した方法で話を進めるためである。

しかしこの転送行列の方法には、現代的な位置付けもできる。転送行列の方法は、磁石や加速空洞の要素毎に運動を考え追跡する方法であり計算機コードに於ける取り扱いと軌を一にしている。

非線形な変換（マッピング）は転送行列では扱えないが、最近展開されてきたDA（Differencial Algebra）の方法を使えば、非線形の世界が転送行列的に処理できる。かつてK. L. BrownのTRANSPORTと言うトラッキングコードを使った事があるが、そこで使われている非線形転送行列の拡張、体系化とでも言えようか。

現在、計算機シュミレーションの重要性は、計算機能力の拡大とコードの進歩のため昔日の比ではない。解析的検討と対比して常に念頭に置かれなければならないと思う。この点から転送行列を使った入門にも意味があるのではないかと思う。

光ビームを同時に取り上げた点については、光ビームに縁のない加速器で研究をする方にとっては賛否もあるかも知れない。ただ放射光源加速器で仕事をする場合は光ビームと粒子ビームの間に壁があってはならない。この講義録がそのような壁を、もしあるとしたら、破壊するきっかけに成れば幸いである。

気負って書き始めてみたが、やはり拙いところが目に付く。この講義録の執筆は筆者にとっても「ビーム物理学入門」の役割を果たして呉れそうである。

参考文献など

この講義録の準備に当たり、今回特に参照した文献は無いが、下に挙げる文献には日頃基本的な考え方の部分で影響を受けている。

特にシンクロトロン放射光の部分については、

K. J. Kim "Characteristics of Synchrotron Radiation" AIP Conference Proceedings 184 vol.I p.567

に負う所が非常に大きい。比較的最近勉強したこともあって、かなり生の形でこの講義録にも反映されている面がある。

また加速器のビームに関する転送行列の使用については、

E. D. Courant and H. S. Snyder "Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron" Annals of Physics: 3,1-48(1958)

から基本的な考え方を学んだ。これは加速器ビーム理論の古典であり、折々に立ち返ってみると最近の話題の源泉となるものの存在に気づくことがある。

シンクロトロン放射から決まる電子ビーム特性については、

M. Sands "The Physics of Electron Storage Rings, An Introduction" SLAC-121 (1970)

および

K. Ohmi, K. Hirata, and K. Oide "From the beam-envelope matrix to synchrotron-radiation integrals" Phys. Rev. **E49**,751(1994)

を挙げておく。この両者の対照的なアプローチは興味深い。

約1カ月でこの講義録を準備したが、日本語ワープロとしてはTextureと組み合わせて使うJTeXEdit3.6.0eを利用した。おかげで、限られた時間の中で、数多い数式を何とか処理することができた。フリーウエアとして提供されている小磯憲史氏に感謝したい。

加速器研究施設の小磯晴代氏には忙しい中、原稿の一部をチェックして頂いた。かなり本質的な誤りを指摘して貰い感謝している。

それにも関わらず、多分、未だ多くの誤謬や改善の余地が有ることであろう。もし気の付くことが有れば、教えて頂ければ幸いである。今後もし改訂の機会が有れば取り入れたいと思っている。