

加速器における電磁石の基礎

第1章 加速器の電磁石

加速器技術の発展と共に電磁石に通常の技術以上の精度が要求されるようになった。構造的に簡単であるが、精密な加速器の主要構成要素として非常に高度な設計が要求される。これは単に磁場を発生する構造以上に、加速器で加速される荷電粒子を安定な軌道に長時間保つために必要な精度の磁場を維持しなければならないことによる。電磁石設計の基本的原理は19世紀の物理学によって確立されたにもかかわらず、現在でも依然として加速器専門家の頭を悩ます問題である。これと共に、20世紀初めに発見された超伝導現象は近年の技術開発によって実用的な超伝導電磁石技術として加速器の分野に新たな可能性をもたらした。これら加速器用の常伝導および超伝導電磁石の設計は物理学、電気技術、電子技術、機械技術などの最新の技術を総動員する総合技術であると同時に、加速器で蓄積された電磁石の精密な技術は他分野に波及し先端的技術分野にフィードバックされている。電磁石は加速器の重要な要素の1つであるが、加速器に組み込まれて総合的に性能を発揮するためには電磁石設計の他に、電磁石製作技術、電流制御技術、電流測定技術、アライメント（測量）技術、磁場測定技術などが必須である。これらの技術はすべて世間一般のレベルを遥かに凌駕し、いずれも「精密」という文字が頭に冠される。他分野に波及している加速器電磁石技術は、例えば、コンピュータによる2次元、3次元磁界解析法、耐放射線性絶縁処理法、精密機械加工法、精密測量法、精密磁場測定法などである。

電磁石の設計理論（電磁気学）は原理的には正確であるが、設計への応用はなかなか困難である。コンピュータによる磁場解析が一般的になる迄は、電磁石設計は近似的な理論的手法、アナログモデルや試行錯誤によって問題の解決を図ってきた。このような方法はある意味では強力であるが、コンピュータの登場によりアプローチの方法はすっかり変化してしまった。過去の困難は鉄の非線形性によるもので、透磁率は磁束密度に強く依存する関数であるため、電磁石（磁気回路）の設計は非常に複雑である。しかし、近代的なコンピュータの登場により、比較

的短時間に問題を解くことができるようになった。時期的にシンクロトロン大型化が始まった1960年代はこのようなコンピュータによる電磁石設計の黎明期で、新たな専門家集団が登場し非線形問題として磁場解析を行う汎用的なプログラムによる電磁石の設計が可能な時代が到来した。現在では、磁場問題の定式化は比較的容易で、コンピュータを使用する問題解決の手法はほぼ確立している。

BNLのAGSやCERNのCPSはほぼ同じ時期に建設された大型陽子シンクロトロンであるが、この時代には電磁石形状は数値計算によらないで理論的に決められたものであるが、電磁石設計は理論的な予想と完全に一致していた。この後、シンクロトロンはFNALやSPSのように超大型したが、これらの電磁石にはコンピュータが設計の常套手段として活用された。

（1）加速器用電磁石の特徴

加速器用電磁石では空隙（ギャップ、air gap）における正確な磁場分布が必要になるため、磁極形状を精度よく決めなければならない。磁極形状を精密に機械加工し、製作された磁極形状を確認するために磁場を測定する精密な装置が開発された。また、加速器電磁石にとって必要な一様な磁気特性をもつ軟磁性材料の改良も行われた。

電磁石を磁気回路として工学的に完全に、電氣的に経済性を重視しようとしても、電磁石の設計は加速器の別の要素から制限される。一般に、真空チェンバーを挿入する磁極まわりの余裕や製作精度の方が経済的な形状や磁氣的設計の完全さよりも優先される。加速される粒子の軌道制御に必要な正確な磁場形状は必ずしも前もって決定される訳ではなくて、場合によっては、取り外しのできる磁極をもつ電磁石、あるいはシムや補正巻線を取付けることも考慮しなければならない。また、加速器を利用する研究計画の変更にも柔軟に対処できるように配慮することも必要である。多くの場合、電磁石の設計は様々な要素の妥協の上に成り立つ性格をもっている。

加速器の応用には2種類の基本的な電磁石形状がある。1つは円筒形状の大きな空間に一様な大きな磁束密度を発生するサイクロトロン電磁石である。サイクロトロン電磁石の磁場は時間的に変化しない

で一定である。磁気回路は大きなソリッド鋳造鋼のブロックで組み立てられ、磁極面は平らで平行である。磁極間隙は磁極直径に比べて小さい。励磁コイルは2ユニットから構成され、磁場中心面に関して対称に配置される。コイルは中空導体の多層巻線構造をもち、水で冷却される。図1は代表的なサイクロトロン直流電磁石の断面である。

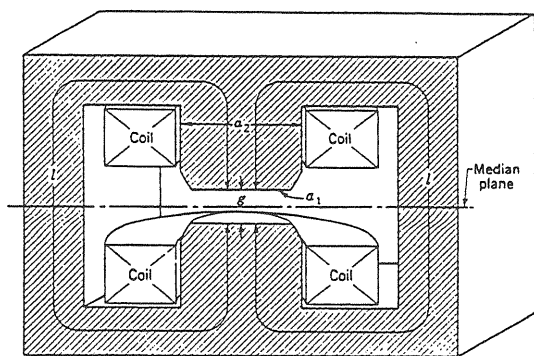


図1 サイクロトロンに使用される定常磁場の電磁石の磁気回路の断面

リング状の電磁石は、ベータトロンや多くのシンクロトロンのように、ほぼ一定半径の軌道で粒子を加速するために使用される。ドーナツ状の真空チェンバーは磁極間隙に挿入される。半径がほぼ一定の軌道に粒子を留めるように、加速期間中磁場を増加させる。電磁石は、パルス電流で一方向に、または交流電流で、低磁場から高磁場まで周期的に励磁される。渦電流損失を少なくするように鉄心にはラミネーション(鋼板)を使用し、ヒステリシス損失の小さな材料を使用する。磁気回路はラミネーション構造の鉄ブロックから構成される。ラミネーションを固定するため、溶接または樹脂による接着が施される。励磁コイルは2ユニットからなり、磁場間隙の上下に取付けられる。コイルは巻数を少なくして印加電圧を低くするよう配慮される。導体中の渦電流を減らすため熱線で作られる場合もある。電子シンクロトロンに一般的なリング電磁石の断面を図2に示す。

1943年Birmingham大学のOliphantのメモにすでに電子や陽子を1 GeV以上に加速するシンクロトロン構想があったが、1945年にMcMillanがシンクロトロン理論を論文として発表した後、陽子シンクロトロンが相次いで、Birmingham (1.3 GeV, 1953年完成)、BNL (3 GeV "Cosmotron", 1952年完成)、LBL (6 GeV "Bevatron", 1954年完成)で建設された。

Birmingham machineではシンクロトロンの原理を

忠実に実現する設計がなされ、直線部の無いリング構造をしたものであった(図3)。最大陽子エネルギーは1.3 GeVであった。この電磁石のパラメータを表1に示す。電磁石は0.5インチの0.1%低炭素鋼

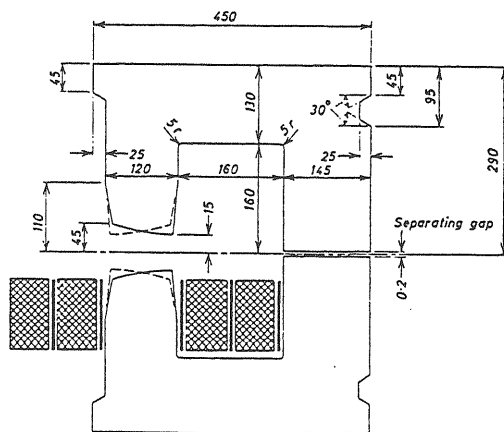


図2 電子シンクロトロンに使用される外側に帰還磁気回路をもつC型リング電磁石断面

板を円周状に並べた構造でリング外側(開口部側)にはくさび状の隙間があり、この隙間を更に別のくさび型低炭素鋼板で埋めたものである。鉄心の上下前後のエッジ部が溶接された。コイルスロットと磁極は磁束変化による渦電流を避けるため溶接されていない。磁極は1/3インチ厚の軟鉄板で作られ、鉄板の間はペイントと紙で絶縁された。磁極間の組立精度は0.1 mmである。リング一周にわたってこの

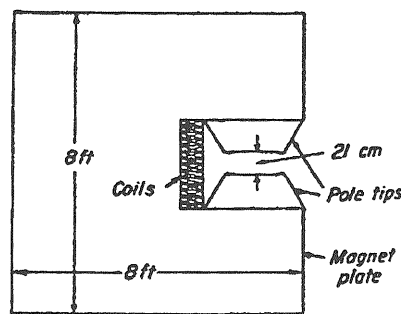
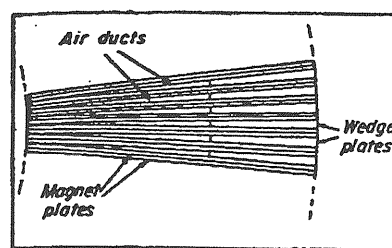


図3 Birmingham 1.3 GeVシンクロトロン電磁石の構造

精度を達成するために水のレベルゲージと望遠鏡が使用された（測定精度は0.025 mm）。ヨーク側に残った隙間はコイルを空冷するための空気ダクトとして利用された。この電磁石の磁場指標 $n = -\rho(dB/dr)/B$ は0.7の「弱収束」加速器であった。弱収束の原理は円形軌道を描く荷電粒子に働く遠心力と磁場による求心力の釣合によるものである。

岩盤まで届くパイルの上に置かれたコンクリートの基礎の上に橋梁レールを敷き、その上に電磁石が組み立てられた。電磁石は温度変化による伸縮でレールの上をスライドするが、1方向に行き過ぎないように基礎の周りは補強コンクリートによるアンカーリングで取り囲まれた。

このような用意周到な配慮がなされていたにも拘らず、コイルが電磁石の外側にリターンを持っていなかったために漏れ磁束が大きく溶接部分を渦電流が流れ、励磁を止めても長時間流れ続けた。このため残留磁場に影響が現れた。このような問題は励磁サイクルを制御（10秒に1回励磁）することによって解決が図られた。

表1 初期の陽子シンクロトロン
(Birmingham 1.3 GeVシンクロトロン)

最大磁場	1.5	T
ギャップ	21	cm
アパーチャ	35 x 10	cm
電磁石半径	4.8	m
電磁石断面	2.4 x 2.4	m
重量	810	ton
最大電流	12,000	A

この他、弱収束に基づくシンクロトロンとしてRALのNimrod、ANLのZGSなどが建設された。表1からも分かるように弱収束のビームアパーチャは非常に大きく、したがってこれらの加速器で作られ

表2 弱収束シンクロトロンの電磁石パラメータ

加速器	最大陽子 エネルギー (GeV)	軌道 半径 (m)	電磁石 重量 (ton)	最大 磁場 (T)
Birmingham	1.3	4.	810	1.25
Cosmotron	3.0	9.	1,640	1.4
Bevatron	6.2	15.2	13,000	1.5
ZGS	12.5	2.9	1,500	2.0
Synchro- phasotron	10.0	28.	36,000	1.3

た電磁石は巨大なモニュメントである。表2に弱収束電磁石のパラメータを示す。

折しも弱収束シンクロトロンが建設中であった1949年に、アテネのChristofilosによって「強収束」の方法が考案され、1952年にはCourant, Livingston, Snyderによる論文が発表された。この方法はビームに収束力と発散力を交互に連続して及ぼすことにより全体で強い収束が得られるという原理に基づくものである。

強収束により大きな磁場勾配の4極電磁石が使用されるため、ミスアライメントによる軌道への影響がAdams, Hine, Lawsonによって指摘された。すなわち、わずかなアライメント誤差が軌道に拡大されて現れる。磁場勾配を下げればアライメント誤差に対する感度は下げられるが、その結果ビーム入射軌道の誤差や残留ガスによる散乱のためビームの振幅が増加する。ビームの振幅が収まるアパーチャを最小にするための入射磁場勾配は、達成できる最大磁場勾配の約1/10が現実的な値であると見なされた。

強収束に基づく軌道の安定性の研究は主にヨーロッパとアメリカで展開され、非線形磁場の影響、ミスアライメントの影響、製作誤差の影響などの解析や数値シミュレーションが行われた。Cornell大学では強収束電子シンクロトロンが建設されてこの原理が実証され、BNLの33 GeV-AGSとCERNの25 GeV-CPSが建設された。これらの加速器ではビームの偏向と収束を同じ電磁石で行う機能結合型 (combined function type) と呼ばれるラティス構造が採用された。しかし、この構造では収束のための4極磁場と偏向のための2極磁場を1台の電磁石に重畳させるため、利用できる磁場の最大値が制限される。もし両者の機能が分離できるならば、偏向磁場と収束磁場は独立の電磁石で発生できるので、それぞれに最大性能を発揮させることが可能になる。このようなラティス構造が機能分離型 (separated function type) である。

BNLとCERNで陽子シンクロトロンがまだ設計段階にあった頃、Whiteの率いるPrinceton大学では機能分離型の設計を進め、その理論的な研究から機能結合型と本質的なオプティックス (軌道光学) の相違が無いことが確認された。

参考のため、過去に日本で設計された電磁石で、ラティス構造の違いによる電磁石の発生できる磁場強度を表3に示す。機能結合型ではアパーチャ端における許容最大磁場により偏向磁場、磁場勾配ともに制限される。機能分離型の最初の加速器はFNALの500 GeV陽子シンクロトロン (平均半径 1,000 m)

である。

機能分離型ラティス構造を採用することにより、偏向と収束のために別々の電磁石のスペースが増えるが、それぞれの電磁石の機能が十分発揮されるため、大型の加速器では有利である。FNAL以来、大型シンクロトロンはすべて機能分離型である。表4に代表的な強収束陽子シンクロトロンの電磁石についてパラメータを示す。

表3 ラティス構造の違いによる電磁石の発生できる磁場強度（機能結合型は素粒子研究所準備室で検討されていた42 GeV陽子シンクロトロン計画の設計値、機能分離型はKEK-PSの12 - GeVにおける設計値である）

ラティス構造	機能結合型 (42 GeV素研計画)		機能分離型 (KEK-PS)
平均リング半径	202 m		54 m
曲率半径	120 m		24.6 m
電磁石	C型	C型	4極
アパーチャ			
水平 (cm)	±8.0	±7.0	±7.0
垂直 (cm)	±4.0	±2.5	±2.7 cm
中心軌道の			ボア-直径
ギャップ (cm)	8.5	5.6	10
中心偏向磁場 (T)	1.2	1.75	
と勾配 (T/m)	4.0		18

表4 強収束陽子シンクロトロンの電磁石

	エネ ルギー (GeV)	n値	平均 半径 (m)	アパー チャ HxV(cm)	電磁石 全重量 (ton)	機能 結合 /分離
CPS	28	288	100	14.5x7	3,600	結合
AGS	30	357	128.5	15x7	4,000	結合
FNAL	500	10400	748	13x5	10,000	分離
SPS	500	7000	741	12x5	20,000	分離
KEK-PS	12	253	54	14x5	1,000	分離
TRISTAN*	35	~8000	480	9x5	5,000	分離

*) TRISTANは電子・陽電子蓄積衝突型加速器である (参考)

図2の電磁石は軌道の内側に鉄の帰還回路をもつ構造である。これはC型電磁石と呼ばれ、電磁石の磁極間隙の片側は真空チェンバーの挿入や保守のためにアクセスが容易である。この構造ではビームの入出射に便利である。軌道の内側と外側に帰還磁気回路がある電磁石はH型である。高エネルギーの電子リングでは、シンクロトロン放射光の遮蔽を兼ね

て帰還磁気回路が軌道の外側に置かれる。

直流と交流電磁石の大きな差異は鉄の特性と最大磁束密度である。直流電磁石には通常、軟鉄が使用され、交流電磁石に使用されるヒステリシス損失の低いケイ素鋼より大きな透磁率をもつ。ラミネーション構造では占積率が若干下がるため最大磁場も少し下がる。ベータトロンや電子シンクロトロンの電磁石では磁束密度が1.4 Tを越えることはまれであるが、最新のサイクロトロンでは1.8 T以上で設計される。交流またはパルス運転される電磁石の中を流れる渦電流による磁場への影響も無視できない。磁場の動的な性質に関して詳細な測定、特に低磁場での測定、が必要である。

(2) 磁気回路としての電磁石

前節で加速器の電磁石における歴史的流れを見てきたが、電磁石は全て1つの目的、磁極間隙に大きな磁束密度と一様な磁場を発生することである。利用できる領域は磁極面間の近似的に一様な磁場領域である。磁極の外の磁束は漏洩磁束またはフリンジング磁束と呼ばれる。この種の磁気回路の設計で先ず考慮することは出来るだけ多くの磁束を利用できるようにすることと、フリンジング磁束に蓄えられるエネルギーを減らすことである。鉄の帰還磁気回路にフリンジング磁束を含む全磁束を通さなければならないので、フリンジング磁束が増えれば帰還磁気回路の断面積を大きくしなければならない。

図1の磁気回路において、各回路は長さ g 、面積 a_1 の空気間隙をもち、鉄の磁路は長さ l 、面積 a_2 とする（H型の場合は左右のリターンに各 $a_2/2$ とする）。簡単のため磁束密度は磁気回路全体で一定と仮定する。励磁コイルと磁極の間には隙間がなく、空隙全域で対称面に関して電磁石は対称である。

閉じた磁気回路の性質を記述する第1の関係式は4番目のMaxwell方程式で、時間変化の項をゼロに等しいとして、

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) ds = \iint I da \quad (1)$$

ここで線積分は閉じたループのまわりで行い、表面積分はループ内で行う。(1)の右辺は積分ループと交叉する全アンペアターンを与える。

磁気回路の解析で第2に重要な関係式は2番目のMaxwell方程式である。 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ から、Gaussの定理により次の関係が得られる。

$$\iint B_n da = 0 \quad (2)$$

ここで B_n は積分面に垂直な \mathbf{B} の成分である。この式から、磁気回路を通る任意の面を横切る全磁束は一定であることが分かる。多くの場合、任意の面を横切る磁束密度はかなり一様であると仮定できるので、全磁束 $\Phi = Ba$ (ここで a は磁気回路の断面積) は一定である。

磁気回路が長さ l の鉄の磁路、長さ g の空隙 (図1参照) から成り立っていれば、(1)(2)は簡単になり、

$$\Phi = Ba = \frac{Ni}{g/(\mu_0 a_1) + l/(\mu a_2)} \quad (3)$$

ここで、
 Ni = 励磁巻線のアンペアターン数
 a_1 = 電磁石磁極面の面積
 a_2 = 帰還磁気回路の鉄の断面積
 μ = 透磁率

(3)は電磁石設計の第1次近似の設計に特別有用である。その理由は所定の磁場と空隙形状に対して、電磁石の励磁に必要なアンペアターンを与え、鉄の透磁率が減少し始める高磁場における影響が予測できる。この式は磁気回路と電気回路が類似していることを示している。電気回路が2つの抵抗 $g/(\mu_0 a_1)$ と $l/(\mu a_2)$ をもち、起電力 (emf) が Ni であれば、回路のOhmの法則は正しく(3)で与えられる。この理由から Ni は回路の起電力 (magnetomotive force)、 $g/(\mu_0 a_1)$ と $l/(\mu a_2)$ はそれぞれ空隙と鉄路の磁気抵抗 (reluctance) と呼ばれる。そうすれば、

$$\text{Flux} = \frac{\text{magnetomotive force}}{\text{total reluctance}} \quad (4)$$

約10 kGまでの磁束密度において軟鉄の透磁率は真空の透磁率 μ_0 の1,000倍以上もあり、磁気回路の鉄の磁気抵抗は無視できる。そうであれば、空隙の磁束密度は電流に比例する。図4は代表的な電磁石について B と i の関係をプロットしたものである。直線部分は約10 kGまで伸びている。この励磁領域では磁束密度はかなり正確に次式で与えられる。

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{g} \quad [\text{Wb/m}^2] \quad (5)$$

ここで、
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (真空の透磁率)
 Ni = アンペアターン [AT]
 g = ギャップ [m]

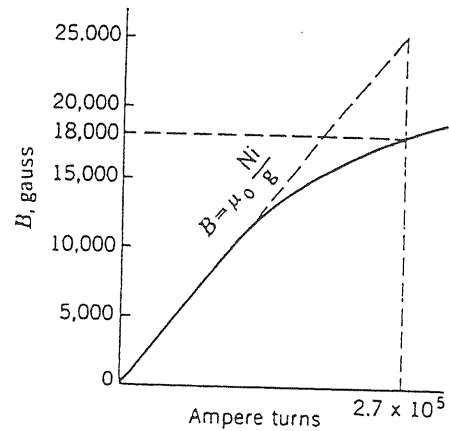


図4 代表的な電磁石の励磁による空隙の磁束密度

例えば、ギャップ10 [cm]の1 [Wb/m²]の磁場を発生させるために必要なアンペアターンは7.96 x 10⁴ [AT]である。1000ターンのコイルで電流は79.6 [A]である。

鉄の透磁率は磁束密度と共に変化し、低磁場で最大値に達してから高磁場で減少する。図5 (a)は磁化力 H [A/m] に対する磁束密度 B のプロットである。この図は電気機械 (変圧器など) に使用される一般的なケイ素鋼と、電磁石に使用される低炭素鋼の磁気特性を示す。図5 (b)は同じ2種類の鉄の透磁率を磁束密度に対してプロットしたものである。ケイ素鋼の透磁率は軟鉄よりも急速に大きな値になるが、軟鉄は高磁場で大きな透磁率をもつ。

高磁束密度では鉄の磁気抵抗が増加するため、(5)の線形関係の代わりに(3)に従う必要がある。この様子は図4に見ることができる。すなわち、観測値は低磁場側から外挿した直線より下側にくる。これは鉄に飽和が現れるためで、電磁石の設計に影響を与える。

鉄の透磁率が減少すれば、フリンジング磁束は変化し、磁束が大幅に磁極の幾何学的境界の外側へ押しやられる。磁極に付けるシム形状はこのフリンジング領域の磁束パターンを決める際に最も重要である。磁極境界がシャープな角をもてば、その部分の鉄は飽和する。漏洩磁束のパターンは励磁コイルの位置によっても影響を受ける。定性的に考えれば、励磁コイルは漏洩磁束をコイルの中に閉じ込めるので、コイルがギャップに最接近した場合に全漏洩磁束は最少になる。鉄回路の中ではギャップから離れ

た磁極の付け根で全磁束が最大になる。この部分はコイルの寸法で制限されるため、一般に磁束密度は大きく他の鉄回路領域より早く飽和する。

高い磁束密度における複雑な飽和のために励磁に必要なパラメータを計算する簡単な関係はない。し

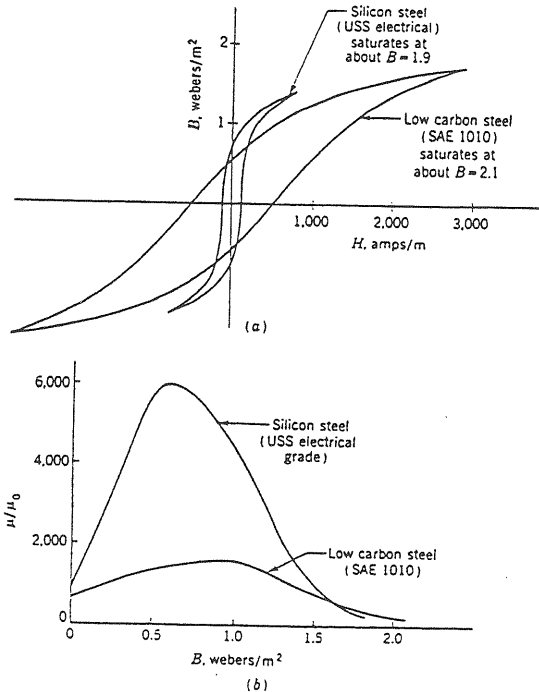


図5 軟低炭素鋼とケイ素鋼の磁气的性質、
(a) B-H ; (b) $\mu - B$

かし、対象になっている電磁石に似た磁気回路の磁場測定から有用な情報を得ることができる。多くの種類の磁気回路と磁性材料に関する大量の経験情報は有用である。図4の励磁曲線に対して図1に示した電磁石に類似の磁気回路を考える。励磁パラメータは次の経験式で与えられる。

$$B = K\mu_0 Ni / g \quad (6)$$

ここで、 K は励磁と共に減少する係数である。例えば、1.8Tにおける B の測定によれば、(5)の関係からの求めた値の0.73倍である ($K=0.73$)。予備設計としての励磁パラメータは係数 K を正しく推定すれば十分である。

磁極面の直径または幅は、必要な一様磁場領域を確保するために、設計の初期段階で決めなければならない。フリンジング磁束は磁極境界の外側にはみ出すため、境界内の磁束は減少し、一様磁場も減少する。経験から、磁極間隙の利用できない磁場領域の境界(アパーチャ限界)はギャップの半分だけ磁極境界の内側になる。有効領域の境界は低磁場では

磁極境界に近づき、高磁場では磁極コーナー部の飽和のため内側へ移動する。

(3) 磁場のマッピングとプロット

電磁石の設計と利用の上で、ギャップ、磁極コーナー部、励磁コイルまわりの2次元的な磁場のマップを得ることが望ましい。このマップは部分的な飽和を見たり、磁極形状の変更の必要性を調べたり、磁極や導体に働く力を評価するために利用できる。

磁場マップに利用する磁場の性質はMaxwell方程式 $\text{div}\mathbf{B}=0$ と $\text{rot}\mathbf{B}=\mu\mathbf{I}$ から得られる。 $\mathbf{I}=0$ であれば、これらの方程式から \mathbf{B} は2次元で定義されたスカラーポテンシャル ϕ から次のように導かれる。

$$B_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad B_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (7)$$

$\text{div}\mathbf{B}=0$ であるため、 $\nabla^2\phi=0$ である。 \mathbf{I} がゼロであっても、 \mathbf{B} は別のベクトルポテンシャル A によって次のように導かれる。

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \quad (8)$$

$\text{rot}\mathbf{B}=\mu\mathbf{I}$ から $\nabla^2 A=\mu\mathbf{I}$ が導かれる。この A はベクトルポテンシャルの z 成分である。3次元問題では x, y 成分も存在する。

A =一定の線は"力線"と定義されるが、 ϕ =一定の線は"等ポテンシャル線"である。 $\mathbf{I}=0$ の磁場において等ポテンシャル線と力線を描くことができる。力線の方程式は

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0 \quad (9)$$

したがって、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial A}{\partial x} / \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{B_y}{B_x} \quad (10)$$

である。同様に等ポテンシャル線の方程式は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{B_x}{B_y} \quad (11)$$

である。(10)(11)から

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A=\text{const}} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{const}} = -1 \quad (12)$$

が成立するので、力線は等ポテンシャル線に常に垂直である。また、(10)から力線の接線方向が磁場の方向である。

第2章 シンクロトロン電磁石

この章では、電磁石として独自の発展を遂げたシンクロトロン電磁石について、設計面を中心に述べる。強収束の原理と機能分離により、シンクロトロン電磁石はそれぞれの機能別に、ビームの偏向、収束、補正を行う電磁石が個別に設計されるようになった。これらの電磁石はビームオプティクスからの要請に応じて設計され、加速器全体として協調的に励磁される。

(1) 偏向電磁石 (dipole magnet)

偏向電磁石は荷電粒子の偏向 (deflection) に使用される。光学システムにたとえれば、光の方向を変えるプリズムの働きをする。このプリズム作用の他に、磁場の組み合わせにより半径方向と垂直方向にも収束作用を持たせることができる。また、粒子の運動量の相違によりビームを分離することができる。この性質は分散 (dispersion) と呼ばれる。

円形加速器においてビームの軌道を決定する要素は偏向電磁石の磁場強度である。リング一周にわたる偏向電磁石の全長 L [m] は

$$L = \ell_B N \quad (1)$$

ここで、 ℓ_B は1台の偏向電磁石の実効長 [m]、 N は偏向電磁石の台数である。偏向電磁石以外のリング長を L' [m] とすれば、リングの平均半径 [m] は

$$R = \frac{L + L'}{2\pi} \quad (2)$$

である。 L' は4極電磁石や補正電磁石、ストレートセクションの占める長さである。

ビームに要求される軌道と磁場の関係は

$$B\rho = 3.3356p \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 B は磁場 [Tesla または T]、 ρ は軌道の曲率半径 [m]、 p はビームの運動量 [GeV/c] である。 ρ は偏向電磁石だけに関係するビームの軌道半径であるので

$$L = 2\pi\rho \quad (4)$$

が成立する。

[1-1] 磁場中の半径方向の運動

2次元磁場中における荷電粒子の運動を扱い、図1に示す中心軌道半径 r_0 と、この点より r だけ離れた軌道半径 $r_0 + r$ における運動を考える。それぞれの位置における磁場を $B_y(r_0)$ 、 $B_y(r_0 + r)$ とする。

$$r_0 = mv / eB_y(r_0) \quad (5)$$

$r_0 + r$ における磁場は

$$B_y(r_0 + r) = B_y(r_0) + r(dB_y / dr) \quad (6)$$

または磁場指標 (field index)

$$n = -\frac{r_0}{B_y} \left(\frac{dB_y}{dr} \right) \quad (7)$$

を用いて、

$$B_y(r_0 + r) = B_y(r_0) \left(1 - n \frac{r}{r_0} \right) \quad (8)$$

と表すことができる。 $r_0 + r$ における粒子の運動方程式は

$$m\ddot{r} = mv^2 / (r_0 + r) - evB_y(r_0 + r) \quad (9)$$

ここで $evB_y(r_0 + r)$ と $mv^2 / (r_0 + r)$ はそれぞれ粒子に働く Lorentz 力と遠心力である。 $r \ll r_0$ と仮定すれば、 $1 / (r_0 + r) = (1 - r / r_0) / r_0$ と近似できるので、(9) は

$$\ddot{r} = -v^2 \{ (1 - n) / r_0^2 \} r \quad (10)$$

となる。時間微分をビーム進行方向の位置座標 s による微分に置き換える。

$$\ddot{r} = d^2 r / dt^2 = v^2 d^2 r / ds^2 = v^2 r'' \quad (11)$$

を考慮して、

$$r'' = -(1 - n)r / r_0^2 \quad (12)$$

もし、 $n < 1$ であれば軌道 GEF は ABC 側へ収束力を受けて安定であるが、 $n > 1$ であれば軌道は外側へ向かい不安定である。 $n = 1$ の場合は中心軌道を外れた粒子は自由空間の運動を行う。(12) の安定軌

道の一般解は

$$r = A \cos[s\sqrt{1-n}/r_0] + B \sin[s\sqrt{1-n}/r_0] \quad (13)$$

ここでA, Bは初期条件から決まる定数である。

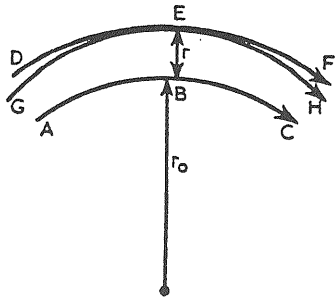


図1 偏向電磁石の対称中心面における粒子の軌道、ABCは中心軌道、GEFはABCに戻る軌道。

[1-2] 磁場中の垂直方向の運動

対称水平面に垂直な方向の運動は、対称面からyだけズレた軌道を考える。図2において運動方程式は

$$m\ddot{y} = evB_r(y) \quad (14)$$

ここで $B_r(y)$ は磁場の水平成分である。1次近似で $B_r(y) = (dB_r/dy)y$ 、および $\text{rot}\mathbf{B} = 0$ により $dB_r/dy = dB_y/dr$ の関係を利用して、(12)と同じく位置座標sによる微分で表せば、

$$y' = -(n/r_0^2)y \quad (15)$$

前と同じく $n > 0$ であれば粒子は収束力を受け安定軌道を描く。 $n < 0$ で発散、 $n = 0$ では自由運動である。したがって、偏向磁場による水平、垂直の両方向に収束を得るための条件は、

$$0 < n < 1 \quad (16)$$

である。これは弱収束サイクロトロンや弱収束シンクロトロンの安定条件である。

[1-3] フリンジング磁場における水平運動

電磁石の端部は実際の端部に平行で、その外側に実効的な端 (hard edge) を持つものとして近似的に扱うことができる。端部がビームに垂直であれば端部

を通ることによって影響は受けない。しかし、図3に示すように端部が実効的に角度 β をもっていれば、Bの粒子は中心軌道A (点線は軌道に垂直) より余分に磁場の中を進むので、それだけAの軌道に近づくように偏向を受ける。Cの軌道は逆に磁場の中にある長さが短くなるため、曲げられる角度が小さくなり、やはりAに近づくため収束作用を受ける。

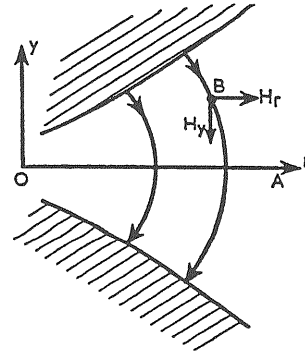


図2 $n > 0$ の場合の磁力線、OAは対称水平面

端部の角度が反対の傾きを持てば、逆の結果が得られ、ビームは発散する。

中心軌道からrだけ離れた軌道Dを通過する粒子は、中心軌道の粒子よりDEだけ長い距離 ($r \tan \beta$) 磁場の中にある。Dを通る軌道の曲率半径を r_D は、中心軌道の曲率半径を r_0 として、

$$B_y(1 - nr/r_0)r_D = B_y r_0 = \text{磁気剛性} \quad (17)$$

の関係から

$$r_D = r_0 / (1 - nr/r_0) \quad (18)$$

で与えられる。 $r \tan \beta$ により曲げられる角度は

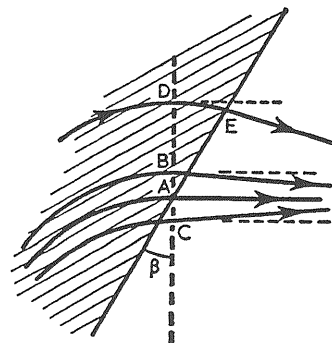


図3 電磁石の端部をある角度をもって出る粒子

$$\theta = r \tan \beta / r_D = r \tan \beta (1 - nr / r_0) / r_0 \quad (19)$$

である。 $r \ll r_0$ であるので、

$$\theta = r \tan \beta / r_0 \quad (20)$$

したがって、軌道Dは端部の出口で $r^2 \tan^2 \beta / r_0$ だけ中心軌道Aに近づく。

[1-4] フリッジング磁場における垂直運動

図4(b)に示すようにビームの運動に垂直な磁場成分を B_z とする。A点における粒子に働く垂直力は

$$F_y = evB_z \sin \beta \quad (21)$$

であるので、垂直方向の運動量の変化を求めるためBCに沿って積分する。

$$\Delta p_y = \int_B^C F_y dt = e \sin \beta \int_B^C v B_z dt = e \sin \beta \int_B^C B_z ds \quad (22)$$

この積分を評価するため、電磁石のギャップ内の閉じた積分路BCDEBで磁場の線積分を行えば、このループには電流が存在しないのでゼロである。積分路CDは電磁石の十分内部を、EBが磁場の無い十分外側を選べば、

$$\int_B^C (B_z / \mu_0) \cos \beta ds - B_y y / \mu_0 = 0 \quad (23)$$

である。したがって、軌道の勾配の変化 $\Delta y'$ は

$$\Delta y' = \Delta p_y / mv = y \tan \beta / r_0 \quad (24)$$

である。

フリッジング磁場による影響は形の上では(20)と同じであるが、フリッジング磁場により半径方向には収束作用を受け、垂直方向には発散作用を受ける。偏向電磁石の端部がビームに垂直でなくて傾斜している場合、端部を薄いレンズ (thin quadrupole, thin lens) と見なすことができる。

[1-5] 偏向電磁石のフリッジング磁場

水平対称面における電磁石端部の磁場分布を図5に示す。鉄の飽和がなければ、鉄の表面が等ポテンシャル面であるとして、等角写像により解析的に表現できる。

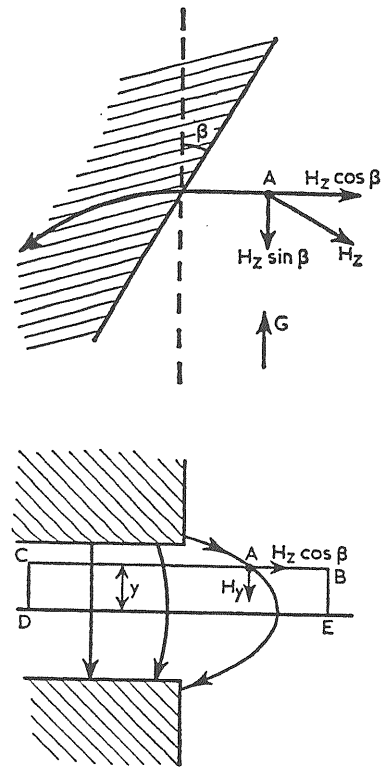


図4 (a)端部平面図 (実効磁場端部の角度を β)、(b)正面図

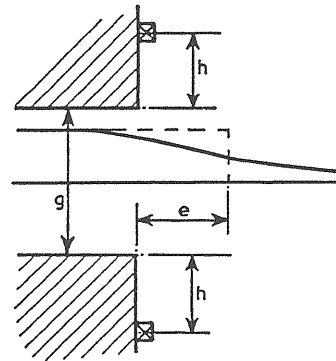


図5 水平対称面における電磁石端部の磁場分布、実線は実際の磁場分布、点線は等価実効長磁場 (hard edge field)

$$2\pi x / g = 2B^{-1} - \ln\{(1+B)/(1-B)\} \quad (25)$$

ここで B はギャップ内で1に規格化した磁場、 x は磁極端から測った距離である。励磁コイルの影響により磁場実効長に相当する端 (hard edge) の磁極端

からの距離 e は

$$e = g\{2 - \ln(4/q)\}/2\pi \quad (26)$$

ここで q はコイルの位置に関するパラメータで、次式で与えられる。

$$\pi h/g = \sqrt{q-1} - \tan^{-1} \sqrt{q-1} \quad (27)$$

$h = g$ ならば、 $q = 22$ 、 $e = 0.6g$ である。鉄の飽和のある場合や、コイルの構造が複雑な場合は実験的に決めなければならない。

[1-6] 偏向電磁石 (bending magnet, dipole magnet)

偏向電磁石には 3 種類の基本型 ; C型、H型、窓枠型がある(図 6)。C型はギャップへのアクセスが容易であるが、漏洩磁束が大きく、高磁場では磁極に働く磁気力のためギャップが変形する。H型はこのような心配はないが、ギャップへのアクセスが困難である。窓枠型 (window frame type) は漏洩磁束が無いので効率がよく、高磁場の発生が可能であるが、コイルスペースが狭い。

高さ g [m] のギャップに磁場 B [T] を発生させるために必要はアンペアターン Ni [AT] は

$$Ni = Bg / \mu_0 + B_{iron} \ell / (\mu_0 \mu_r) \quad (28)$$

ここで B_{iron} 、 ℓ 、 μ_r はそれぞれ鉄の中の磁束密度、磁路長、比透磁率である。鉄の飽和が殆どない 1 T 以下では鉄の比透磁率が大きく、(28) の右辺第 2 項は無視できる。しかし、磁場が高くなって飽和の影響が表れるとこの項は無視できなくなる。

磁極の側面から漏れる漏洩磁束が多くなれば磁極中の磁束密度がギャップの磁束密度より大きくなり、磁極が飽和しやすくなる。このため磁極幅の選択や磁極形状の最適化によって漏洩磁束を減らす工夫が必要である。

[1-6-1] 偏向電磁石 (H型)

磁極の幅方向への広がり有限であるため、磁極の両側で磁場が低下する。ビーム方向に長い電磁石を考えれば、2次元問題として扱うことができる。図 7 (a) の磁極コーナー部が直角の場合、磁場有効領域の端で所定の $\Delta B/B$ を得るために必要なオーバハンガ a は経験式から求めることができる。

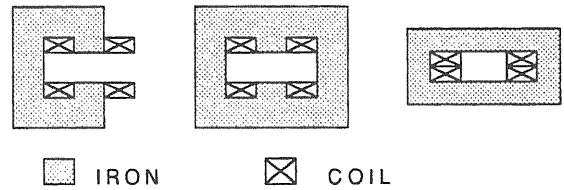


図 6 偏向電磁石、左からC型、H型、窓枠型

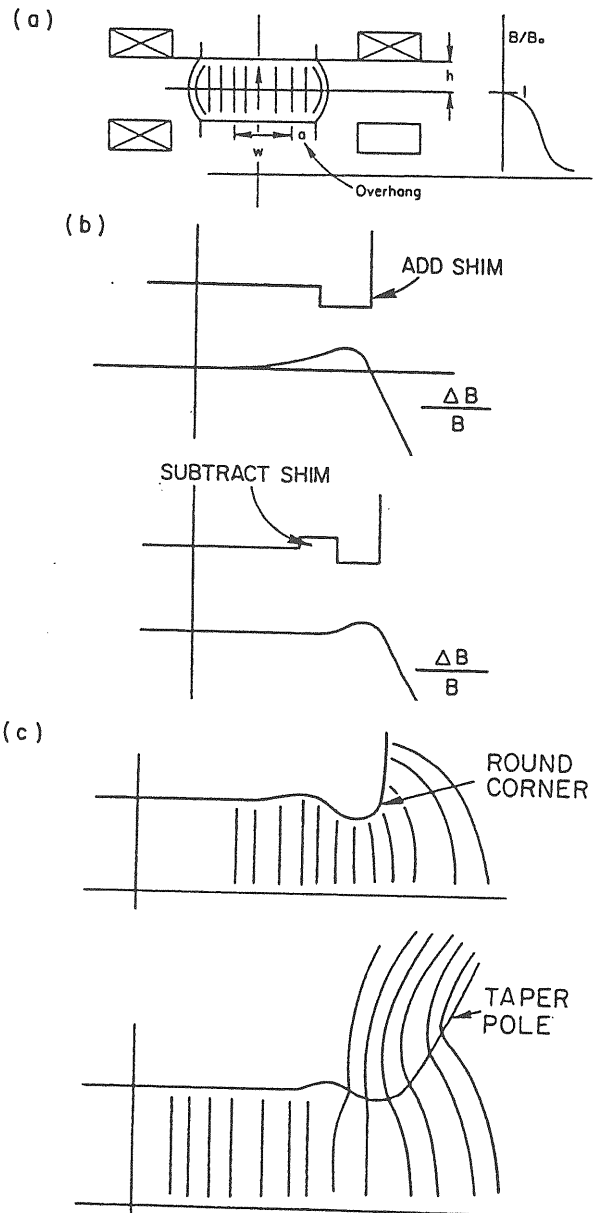


図 7 H型偏向電磁石の磁極フリッジ部の磁場変化、(a) 2次元断面のフリッジ磁場、(b) 磁極コーナー部のシム、(c) 高磁場における磁極コーナー部

$$X = \frac{a}{h} = 0.75 - 0.36 \ln \left(100 \left| \frac{\Delta B}{B} \right| \right) \quad (29)$$

$\Delta B/B=0.01\%$ に対して、 $a/h=2.4$ が得られ、 a はギャップ寸法より大きくなる。この場合、磁極中心から離れるにしたがって磁場は減少する。これは当然のことで、無限の磁極幅に対して磁場一定であるところを、磁極幅を有限にしたためである。ギャップ両側に鉄を追加してこの鉄不足を補う。これがシムと呼ばれるものであるが、外側に拡がっていた磁束がこの部分に集まり磁場が上昇し、その外側で急激に低下する。

しかし、コーナー部分の鉄が飽和するため磁束の分布が変化する。シムの飽和を避けるため、磁束が集中しやすい角型シムの代わりに滑らかな曲線形状のシムを採用する。磁極の基部（根元）は全磁束が通過するため、もっと飽和しやすい。高磁場電磁石ではこの部分の飽和を避けるように磁極基部の幅を広げるために磁極をテーパ状にする。テーパ状にすれば、コイルスロットでの漏れ磁場が増えるためヨーク（継鉄）幅を増やす必要がある。磁場分布が励磁によって変化しない場合は磁極面が等磁気スカラーポテンシャル面になっている。このような磁極面をRogowsky形状と呼ぶ。

[1-6-2] 偏向電磁石（C型）

H型偏向電磁石が水平面と垂直面の2重の対称性をもっているのに対し、C型電磁石は水平面だけの対称性しか持っていない。しかし、真空チェンバーの挿入や保守のための接近性（accessibility）がよいためしばしば採用される。C型偏向電磁石の特徴は、図8に示すようにギャップの開口部に近い側を通る磁束は鉄の中で長い磁路を通る。したがって、鉄が有限の透磁率をもつ場合には開口部に近づくにつれてギャップの磁場が低下し、磁場勾配が現れる。この様子は磁場が低い場合は逆の傾向を示す。その理由は透磁率がある比較的低い磁束密度で最大値をもち、その両側でなだらかに減少するためである。そのため、最大透磁率より低い磁束密度の磁場では透磁率を局所的に増やすように磁束が集まる。同じことは、最大透磁率より高い磁束密度の磁場でも起こり、この場合は最大透磁率に近づくように鉄の中の磁束が分散する。

[1-6-3] C型の鋼・セメント電磁石

電子シンクロトロンの場合、シンクロトロン放射

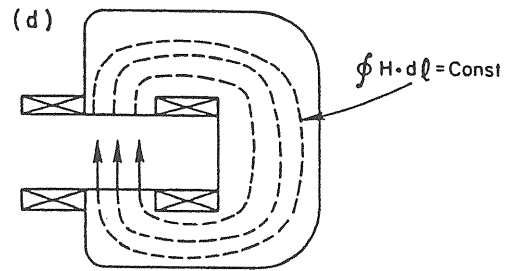


図8 C型偏向電磁石に磁場勾配が現れる理由

を減らすため、できる限り大きな径になるようにリングの設計がなされる。LEP電磁石は周長約27 kmの巨大な電子・陽電子衝突型の加速器であるが、入射磁場が0.017Tと低いため、残留磁場が一様にならないことが問題になった。この問題はラミネーションのパッキングファクターを27%に減らすことで解決された。すなわち、ラミネーションの間に4mmの空間を設け、粒度の小さな砂とセメントのモルタルで埋めた構造である。機械的にはプレストレスのコンクリート棒として働き、スチールの中の磁気誘導は強くなる（図8）。セメントは鋼材より安価であるため、電磁石の製作コストの削減にも寄与した。

130GeVの最大磁場でも0.1231Tであるため、高磁場における飽和は問題ではなく、むしろ低磁場における保持力と透磁率の低いことによる磁場性能への影響が問題である。ヨークは鉄の飽和よりは機械的強度に重点が置かれ、最大磁束密度は130GeVで1.6 T以下である。

鉄中の磁束密度は残留磁場の寄与も考慮して、

$$B = \mu_0 \mu_r (H + H_c) \quad (30)$$

で与えられる。図10の磁束チューブについて磁束の連続性から

$$BA = B_{iron} a \quad (31)$$

ここで B と A はギャップの磁束密度と磁束チューブの断面積、 B_{iron} と a は鉄中の磁束密度と磁束チューブの断面積である。

Ampereの法則

$$\frac{B}{\mu_0} g + \int_{iron} H ds = Ni \quad (32)$$

に(30)(31)の関係を代入すれば、

$$B = \frac{\mu_0}{g} (Ni + \int_{iron} H_c ds) \frac{1}{(1 + \frac{A}{g} \int_{iron} \frac{ds}{\mu_r a})} \quad (33)$$

(33)において $Ni = 0$ とおけば、残留磁場 B_{rem} は近似的に

$$B_{rem} \approx \frac{\mu_0}{g} \int_{iron} H_c ds \approx \frac{\ell}{g} \mu_0 H_c \quad (34)$$

である。ここで H_c は保持力、 ℓ/g は鉄中の磁路長とギャップの比である。この比は通常10~15程度であるので、保持力の大きさから直ちに残留磁場が推定できる。残留磁場を低く抑えるため、LEPでは保持力の小さな低炭素鋼が選択された。表1にCERNとPETRAで使用された鋼鉄の保持力を示す。

(33)を半径方向(x方向)に微分すれば磁場勾配が得られる。

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \approx \left(\frac{H_c}{Ni} - \frac{1}{g\mu_r a/A} \right) \frac{d\ell}{dx} \quad (35)$$

ここで a/A は鋼鉄の占積率を与える。低磁場では Ni と μ_r が小さくなるが、お互いにキャンセルし合うので磁場勾配は小さくなる。高磁場では両者ともに増加するので磁場勾配は小さい。占積率を小さくすれば、鉄中の磁束密度は増加し、表1に示すように保持力も増加するが、透磁率も増加するのでお互いに相殺し合う。

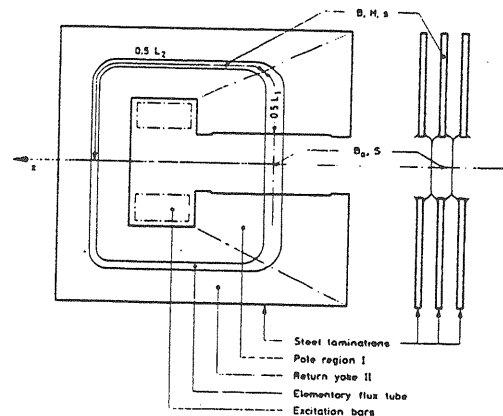


図10 鋼・セメント電磁石断面の磁路

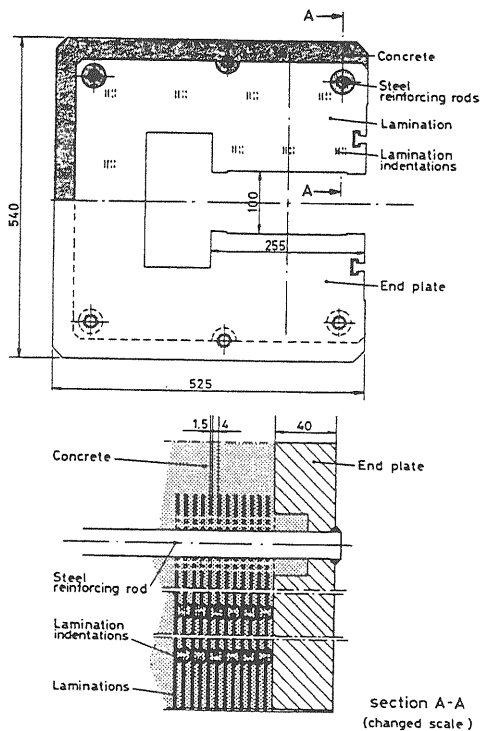


図9 CERN-LEPの鋼・セメント電磁石の構造

表1 保持力の測定データ (単位はA/m)

	低炭素鋼板		ケイ素鋼板
	SPS	ISR	PETRA
H_c^{sat}	39.0	50.2	61.8
$0 \rightarrow B_{max} \rightarrow 0$ の励磁サイクル後の H_c			
$B_{max} = 0.7$ T	31.2	40.7	50.7
$B_{max} = 0.4$ T	24.4	32.0	40.2
$B_{max} = 0.25$ T	19.4	26.1	33.6
$B_{max} = 0.1$ T	13.6	17.8	22.2

H_c^{sat} は鋼鉄を完全に飽和させた後での測定値

[1-6-4] H型偏向電磁石とC型偏向電磁石の比較

図11はH型とC型の偏向電磁石の磁場を比較したものである。形状から現れる特徴的な相違はC型電磁石にはB' (4極成分)、B''' (8極成分) などの垂直軸に関する非対称性による不整磁場成分が現れることである。図11(a)に示した形状に対する2次元磁場計算から、図11(b)の磁場分布が得られた。縦

軸は $k = -\frac{1}{B_0} \frac{dB}{dr}$ [m⁻¹] である。図11(c)において励磁レベルが同じであれば偏向電磁石に現れる6極成分 B'' は同じであるが、C型には鉄の飽和による B' 成分が現れる。6極成分は磁極両側の飽和の影響を受けるためH型もC型も同じ程度になるが、4極成分は鉄中の磁路の非対称性によるものである。

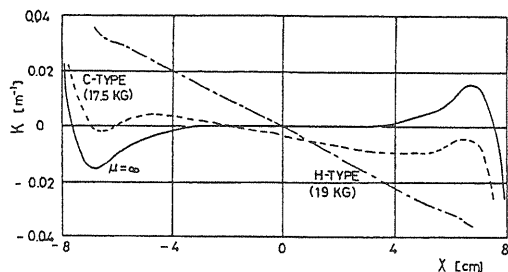
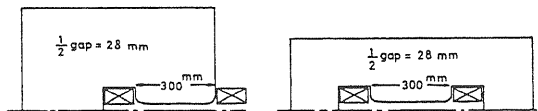


FIG. 2

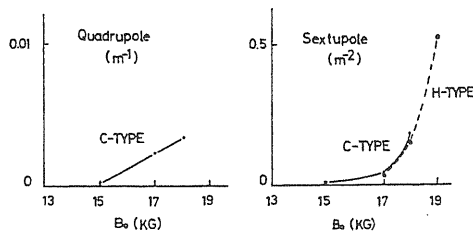


図 1 1 H型とC型の偏向電磁石の磁場を比較 (KEK-PS主リング偏向電磁石における検討)

[1-6-5] 窓枠型+H型偏向電磁石 (window-frame + H-type)

窓枠型は、2 T以上の磁場が要求される偏向電磁石に採用される。この構造ではC型やH型と異なり、コイルがアパーチャに近いギャップ内に置かれるため、コイルを流れる電流による磁場が直接ギャップ磁場に寄与する。このため、コイルの位置精度が要求される。

この種の偏向電磁石は発生する磁場のわりにコイルスペースが小さいため、FNALやCERN-SPSでは図12に示すようにH型磁極構造を持ちながら、ギャッ

プ内に更にコイル (inner coil) を配置する構造を採用している。基本的にはH型であるが、ギャップ間にコイルを置くことにより、低磁場における磁場一様性が悪くなる (コイルに近づくにつれて磁場が低下する)。これはこのコイルのターン間隔および磁極・コイル間隔を適当に選ぶことによって解決できる。高磁場では、鉄の飽和によりコイルウインドウの電流による磁場はコイルに近づくにつれて低下し、ギャップ間のコイルの寄与はコイルに近づくにつれて増加する。コイルウインドウとギャップ間コイルの電流比を最適化することにより広い磁場範囲で一様な磁場分布が得られる。このよな設計上の配慮と、複雑なシムと設けることによって使用最大磁場は2.25 T、必要なコイルの位置精度は上下方向に厳しく±0.1 mm以下である。また、このコイル導体の冷却水チャンネルの孔の位置による影響も受ける。

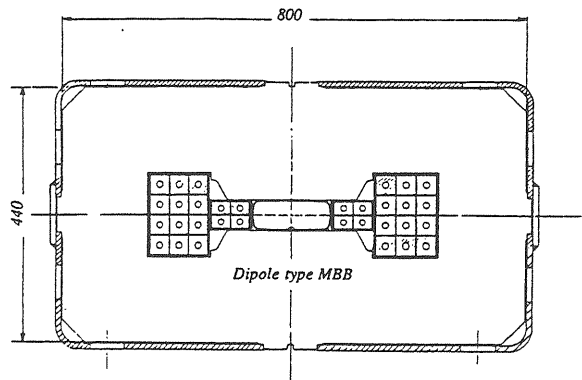


図 1 2 SPSの窓枠型+H型偏向電磁石

(2) 4極電磁石 (quadrupole magnet, quad)

弱収束の加速器では半径方向と垂直方向の収束を同時に行うため磁場指標は $0 < n < 1$ (通常は0.6付近) であった。しかし、強収束の原理により非常に大きな n 値により強いビーム収束が可能になり、4極電磁石は機能分離型シンクロトロンにとって重要な構成要素になった。

4極電磁石の理想的な磁極形状は図12に示すように双曲線 $xy = R^2/2$ (R はボア半径) で与えられる。この双曲線に直交する磁力線は $y^2 - x^2 = const$ で与えられる。水平軸 (x 軸) の座標 x [m] における垂直方向の磁場成分 B_y [T] と垂直軸 (y 軸) の座標 y [m] における磁場成分 B_x [T] は

$$B_y = gx, \quad B_x = gy \quad (36)$$

である。ここで、 g [T/m]は磁場勾配である4極電磁石の概略設計において有用な式は、鉄中の寄与を無視して、

$$\frac{1}{2}gR^2[T/m \cdot m^2] = \mu_0 NI[A \cdot \text{turns} / \text{pole}] \quad (37)$$

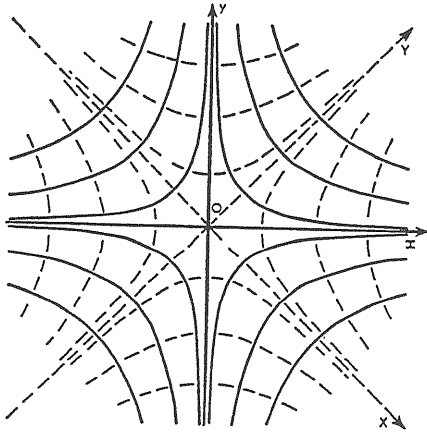


図13 4極電磁石の等ポテンシャル線と磁力線（共に双曲線）

である。 NI は磁極当たりのアンペアターンである。

4極電磁石における磁場と荷電粒子に働く力の方向を図14に示す。この図で「電磁石の中心軸に向かう力を受ければ、収束(Focus)、外側に向かう力を受ければ、発散(Defocus)」である。4極電磁石の励磁の向き(コイルを流れる電流の方向)によって、収束作用と発散作用の2通りの使い方がある。4極電磁石に付けられた収束、発散は水平面におけるビームの運動に対する4極電磁石の作用から区別される。図14から分かるように、水平面内で収束作用を受ければ、垂直面内では発散作用を受ける。この逆も成立するので、両方の面内で同時に収束作用を持たせるため、収束用4極電磁石(F-quad)と発散用4極電磁石(D-quad)を交互に並べる必要がある。

[2-1] 収束面内における運動

4極電磁石の断面構造を示す図13において、ビームが通過する空隙領域を取り囲むように4つの磁極がある。対向する磁極は同じ極性を持ち、磁力線はN極から出て、S極に入る。磁場は磁力線の接線方向に向かうので、水平および垂直の対称面以外では両方の磁場成分をもつが、ビームの水平運動に対して水平磁場は作用を及ぼさない。同様に、垂直運動に対して垂直磁場は作用を及ぼさないので、水平お

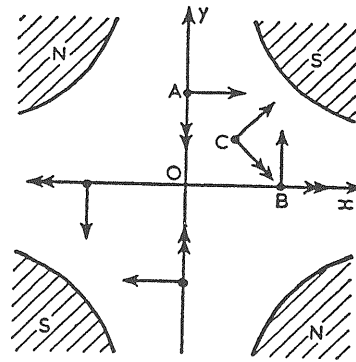


図14 4極電磁石における磁場と荷電粒子に働く力の方向(正の荷電粒子を仮定し、紙面の表から垂直に裏に向かう場合)

よび垂直方向のビームの運動は独立に扱うことができる。

粒子の運動方程式は

$$m\ddot{x} = -evB_y = -evgx \quad (38)$$

時間微分をビーム進行方向の座標 s による微分に置き換え、磁気剛性 ($B_y r_0$) を導入すれば、

$$x'' = -\{g/(B_y r_0)\}x \quad (39)$$

この式は調和振動の方程式である。 $\omega^2 = g/B_y r_0$ とおけば、(39)の一般解は

$$x = A \cos \omega s + B \sin \omega s \quad (40)$$

である。ここでA, Bは初期条件から決まる定数である。

[2-2] 発散面内における運動

粒子の運動方程式は符号に注意して、

$$m\ddot{y} = +evB_x = +evgy \quad (41)$$

時間微分をビーム進行方向の座標 s による微分に置き換え、磁気剛性を導入すれば、

$$y'' = +\{g/(B_x r_0)\}y \quad (42)$$

(39)と同じく $\omega^2 = g/B_y r_0$ とおけば、(42)の一般解は

$$y = C \cosh \omega x + D \sinh \omega x \quad (43)$$

である。収束面内の運動は三角関数で記述されたが、発散面内では双曲線関数で記述される。

[2-3] 4 極電磁石の磁極設計

無限に続く双曲線の磁極形状により理想的な4極磁場が発生できるが、コイルスロットを設けるために双曲線の裾を有限幅で切断 (truncation) しなければならない (図15)。このために4極磁場が歪むので、双曲線形状を修正して4極磁場の歪みを最小限に抑える。修正方法には双曲線を円弧で近似する方法と、双曲線の端にシムを付ける方法がある。

4極電磁石の磁極先端に内接する円の半径をボア半径 (bore radius) R_0 と呼び、この半径と磁極幅 P の比 (P/R_0) で磁場有効領域 (good field region) が決まる。例えば、 $\Delta g/g \leq 0.1\%$ を基準として、 $P/R_0=1.5$ であれば磁場有効領域は $0.7 R_0$ である。 $P/R_0=1.76$ とすれば $0.9 R_0$ である。

機械加工の上で磁極を円弧で近似することは容易であり、安価であるため、それほど磁場性能が要求されない場合にしばしば採用される。磁極対称性から発生する高次の多極磁場成分は12極であるが、円弧の半径をボア半径の1.15倍に選ぶことによってボア径の0.9倍のオーバーチャが確保できる。このときの円弧は1/4円で、磁極幅はボア半径の約1.6倍である。図16に双曲線を円弧で近似する様子を示す。

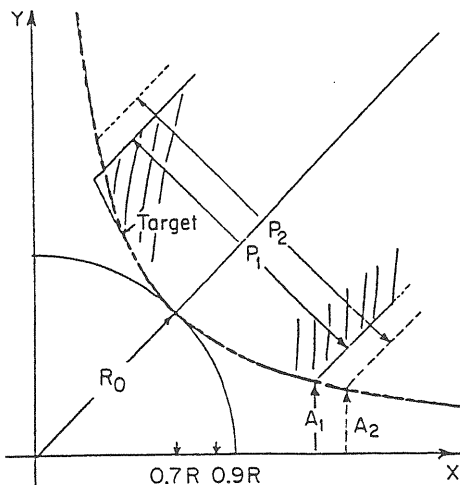


図15 4極電磁石の双曲線形状の磁極裾野を有限幅で切断

水平方向と垂直方向に全く同じ磁場有効領域を持たせる対称4極電磁石 (Symmetric quadrupole、図17) では、磁極中心線に関して磁極は対称である。蓄積衝突型シンクロトロンではビームパラメータを自在に変えてルミノシティを最大にする必要性から垂直

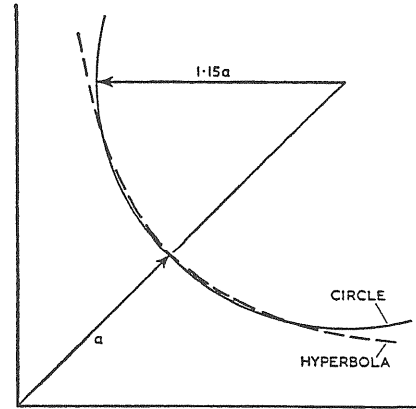


図16 双極線を1/4円で近似する磁極

方向にも有効領域が確保できる対称4極電磁石が選択される。特に衝突点近くに配置される多くの4極電磁石は単独に、あるいは衝突点を挟んで対称配置された4極電磁石 (local quadrupole) は対にして独立に励磁される。

通常のシンクロトロンではビーム領域は垂直方向に狭いので、非対称4極電磁石 (Asymmetric quadrupole、図18) が使用される場合が多い。この場合、垂直面に面するシムと水平面に面するシム形状は異なる。

ソリッドの鉄から磁極を機械加工する場合の磁極シムは図15に示すように、磁極面の1点から接線で伸ばす形状が一般的である。シンクロトロンでは加速のために電磁石はパルス励磁されるので、鉄中の渦電流による磁場への影響を避けるため、積層型の電磁石が採用される。この場合、薄い鋼板 (laminated steel) が採用され、複雑な磁極形状でも抜型の構造で精度よく加工することが可能である。加速器の電磁石製作に採用される精密抜型は一般にミクロン程度の精度で作られ、生産性の上で雌雄の抜型の隙間 (clearance) として通常 $\sim 20 \mu\text{m}$ に選ばれる。このため打抜かれた鋼板の寸法誤差もこの程度である。

積層型電磁石の設計で考慮しなければならない点は、打抜かれた鋼板の精度を積層段階でも維持することである。図19のように積層基準面を磁極シム。

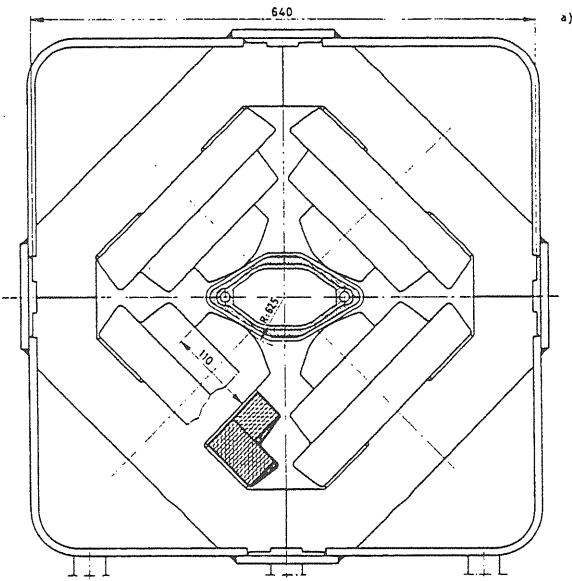


図17 対称4極電磁石

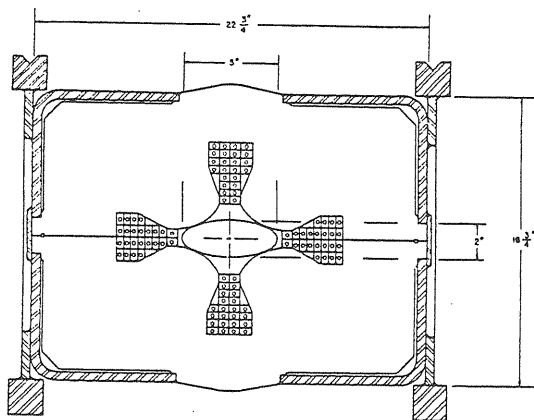


図18 非対称4極電磁石

形状の中に持たせ、組み立て誤差を最小限に留める工夫が必要である。このことは積層型の偏向電磁石についても言える。この基準面は対向する磁極と間のギャップが最も狭くなる部分 (minimum gap) に設けられる

次にコイルは磁極との相対的な位置関係によって磁場有効領域に於ける磁場分布に影響が表れる。コイルがminimum gapの影に隠れる様な位置にあれば、ギャップ内の磁場分布は主に磁極形状から決まる。しかし、minimum gap付近にコイルのエッジがあれば、磁場分布への影響が表れる。図20は後者の場合に磁場有効領域に面するコイルの配置を変えた時の磁場分布の変化を示している。

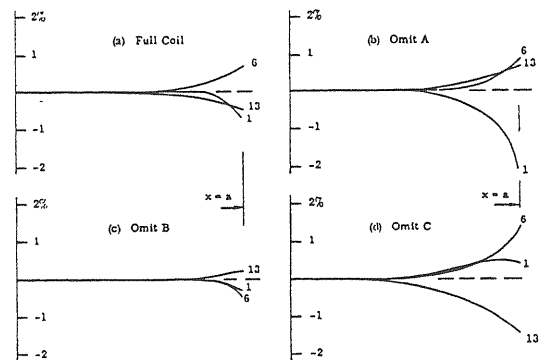
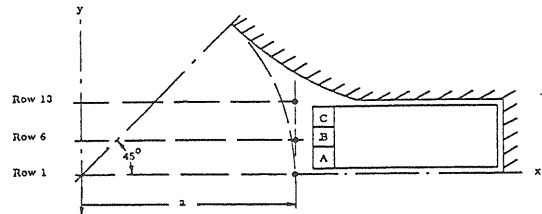


図20 4極電磁石のコイル導体の配置による磁場分布への影響 (SLACスペクトロメータ4極電磁石)

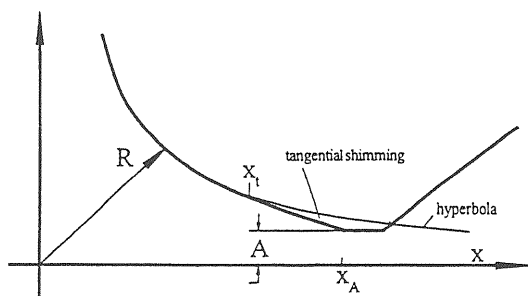


図19 積層基準面のある磁極設計例

[2-4] 4極電磁石の実効長

磁極端部内側から外側に向かって距離とともに4極磁場は徐々に減少する (図21)。このように変化する磁場分布を次のように電磁石中心の磁場勾配 $g(0)$ を一様にもつ実効的な長さで表すことができる。

$$l_{Geff} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) ds / g(0) \quad (44)$$

ここで l_{Geff} は4極電磁石の実効長である。一般に
実効長は電磁石の物理的長さより長く、

$$l_{Geff} = l + kR_0 \quad (45)$$

で与えられる。 l と R_0 はそれぞれ電磁石の物理的長さ
とボア半径、 k は磁極形状にもよるが0.9~1.1
程度である。磁場勾配が一定な領域は l より狭いので、
ボア半径より短い電磁石は非効率的である。

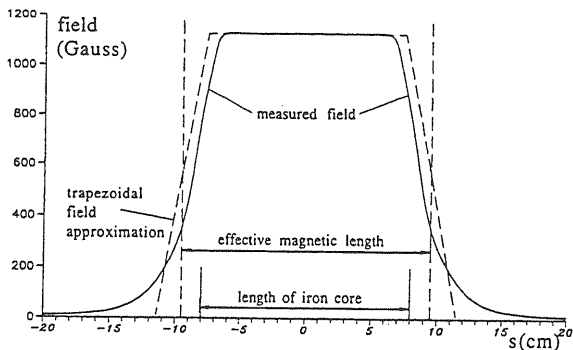


図 2 1 4 極電磁石の軸方向の磁場勾配分布

[2-5] 色収差 (chromatic aberration)

粒子の運動量の相違による4極電磁石の焦点距離
の変化から色収差が発生する。このために起こる運
動量の違いによるチューンの変化をクロマティシティ
(chromaticity)と呼ぶ。理想的な4極電磁石はアパー
チャ内はどこでも磁場勾配が一定であるので、正しい
運動量(公称運動量)の粒子に対して4極電磁石
の強さが指定される。一般にビームは運動量の拡が
りをもち、中心運動量のまわりにガウス分布してい
る。運動量の小さな粒子はチューン(ベータatron
振動数)が大きく、逆に運動量の大きな粒子はチュー
ンが小さい。言い換えれば、運動量の拡がりにより、
チューンに拡がり(tune spread)ができる。この現象
は水平、垂直の両方向に同じように現れる。チュー
ンの拡がりが大きくなれば、すなわちクロマティシ
ティが大きくなれば共鳴線による制約のため、チュー
ンダイアグラム上の安定なビーム領域が狭くなる。

[2-6] 特殊な構造の4極電磁石

通常の4極電磁石は左右に開口部を持たないため、
ビームハンドリングの上で制約を受ける場合がある。
例えば、放射光リングでは取出されるシンクロト
ン光が4極電磁石に邪魔されることがしばしば起

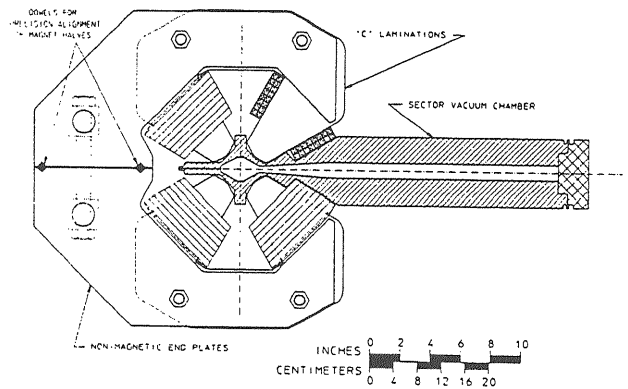


図 2 2 開口部のある4極電磁石(LBL放射光リング)

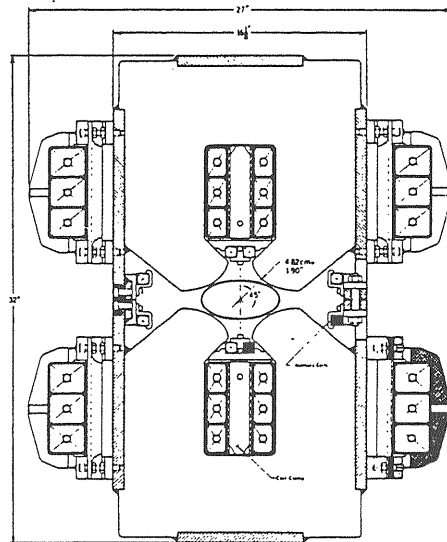


図 2 3 Collins型4極電磁石(または八の字
型4極電磁石)

る。LBLの放射光リングでは図22に示すように、
片側に開口部をもつ左右非対称な4極電磁石が採用
されている。

また、図23に示すように両側にヨークのない
Collins型4極電磁石(または八の字型4極電磁石)
と呼ばれるものもある。

(3) 機能結合型電磁石の設計

同じ電磁石にビームの偏向と収束の機能を持たせ
る設計はC型(図24)やH型で実現できる。理想的

な磁極形状は中性極 (neutral pole) をもつ双曲線で表わされる。

磁極中央部で磁場指標 n

$$n = -\frac{r_0}{R_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (46)$$

をできるだけ広い範囲で一定に保つようにアパーチャ両側の領域のシム形状を決定する。磁場指標は x 座標に関係しないので、この関係から

$$B_y = B_0 \left(1 - n \frac{x}{r_0}\right) \quad (47)$$

ここで x は中心軌道 r_0 (磁極中心) から測った半径方向の距離、 B_0 は中心軌道の磁場である。

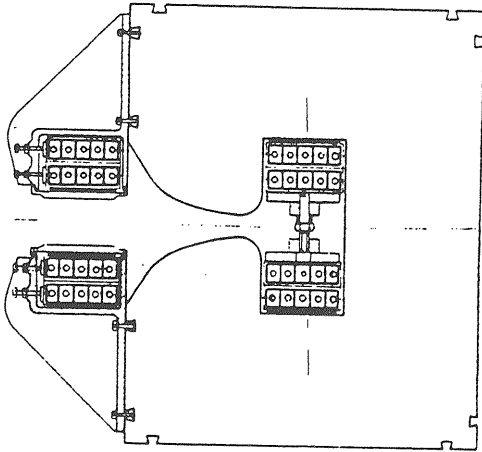


図 2 4 機能結合型電磁石

半ギャップ (half gap) を $x=0$ において y_0 、 $x=x$ において y とすれば、Ampere の法則から

$$B_0 y_0 = B_0 \left(1 - n \frac{x}{r_0}\right) y = \mu_0 n i \quad (48)$$

すなわち、磁極の曲線は

$$\left(\frac{r_0}{n} - x\right) y = \frac{r_0}{n} y_0 \quad (49)$$

で与えられる。

クロマティシティ補正のため、さらに 6 極成分を付け加える設計もある。磁場勾配を b_2 、6 極成分を b_3 として、対称中心面の磁場を

$$B_y = B_0 (1 + b_2 x + b_3 x^2) \quad (50)$$

とすれば、通常

$$b_2 \cong 4/m$$

$$b_3 \cong 0.5/m^2$$

である。機能結合型の電磁石の例を表 2 に示す。

表 2 機能結合型の電磁石

加速器	KEK- booster	CPS	AGS	FNAL- booster
最大エネルギー (GeV)	0.5	28	30	10
b_1 (m^{-1})	3.66	4.12	4.25	2.5
b_2 (m^{-2})	-0.31	0	0	-1.28
ギャップ (cm)	7.6	7	7	6
中心軌道磁場				
最大 (T)	1.1	1.2	1.3	0.8
入射 (T)	0.2	0.0147	0.0121	0.05
曲率半径 (m)	3.3	70	80	45

このような機能結合型電磁石は SLAC のリニアークライダ SLAC にも採用されている (図 25)。この電磁石は中性極をもつ構造で、中性極から中心軌道までの距離は 8 mm、ギャップが 6.4 mm である。また、クロマティシティ補正のための 6 極成分も含めてある。図から分かるように電磁石断面は非常に小さく、ブックサイズである。主要パラメータを表 3 に示す。アパーチャが小さいため非常に大きな磁場勾配の発生が可能である。

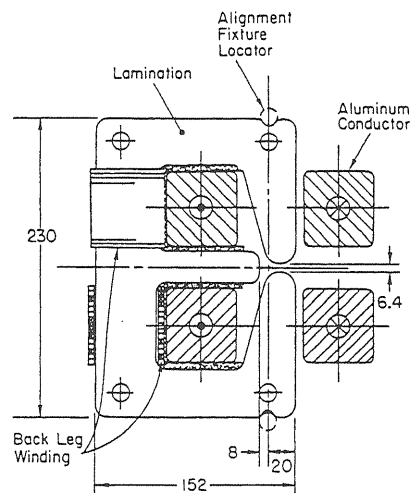


図 2 5 SLAC-SLC の機能結合型電磁石

表3 SLACリニアコライダの電磁石

ギャップ	6.4	mm
アパーチャ	10	mm
最大磁場	0.8	T
磁場勾配	100	T/m
断面寸法、幅x高	152 x 230	mm ²
電磁石長	2.4	m

(4) 6極電磁石 (sextupole magnet)

6極電磁石は図26に示すようにS, N極が交互に等間隔に並んだ構造をしている。6極電磁石の設計上、有用な関係は、

$$\frac{1}{6}b_3R^3[T/m^2 \cdot m^3] = \mu_0NI[AT/pole] \quad (51)$$

で与えられる。

6極電磁石の理想的磁極形状は $3x^2y - y^3 = R^3$ (R はボア半径)の曲線(等ポテンシャル線)である。6極電磁石の断面で水平方向を x 座標、垂直方向を y 座標で表せば、この曲線は $y=0$ と $y=\pm\sqrt{3}x$ を漸近線とする曲線である。それぞれの方向の磁場成分は

$$B_x = b_3xy \quad (52)$$

$$B_y = b_3(x^2 - y^2)/2 \quad (53)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = b_3(x^2 + y^2)/2 \quad (54)$$

である。この式から6極磁場の強さは中心からの半径の2乗に比例する。

6極磁場の中における粒子の運動方程式は

$$\ddot{x} = (b_3 / B_{r0})(x^2 - y^2)/2 \quad (55)$$

$$\ddot{y} = -(b_3 / B_{r0})xy \quad (56)$$

である。

図26において正電荷の粒子が紙面の表から裏に向かうものとして、 x 方向の運動を考えると、

- (i) $b_3 < 0$ 、 $y=0$ で、軌道が $x > 0$ にある場合は x 方向に収束力が働く。
- (ii) $b_3 < 0$ 、 $y=0$ で、軌道が $x < 0$ にある場合は x 方向に発散力が働く。

次に、 y 方向の運動を考えると、

- (iii) $b_3 > 0$ で、軌道が $x > 0$ にある場合は y 方向

に収束力が働く。

- (iv) $b_3 > 0$ で、軌道が $x < 0$ にある場合は y 方向に発散力が働く。

F-6極 ($b_3 < 0$)とD-6極 ($b_3 > 0$)で、 $x > 0$ であれば収束力、 $x < 0$ であれば発散力を受けるので、6極磁場はクロマチシティの補正に利用される。ただし、運動量の大きな粒子が $x > 0$ 側に、運動量の小さな粒子が $x < 0$ 側に来ていなければならないので、分散関数がゼロにならない場所でしか有効でない。図27に6極電磁石によるクロマチシティ補正の様子を示す。

6極電磁石の場合もコイルスロットを設けるため、理想的磁極線の裾を切断し、4極電磁石と同じく、磁極シムを設けることによって6極磁場の一様性が改善できる。

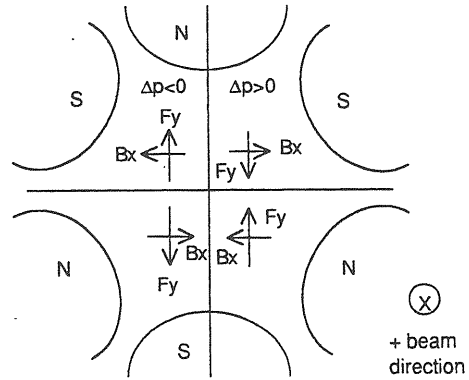


図26 6極磁極による収束、発散作用

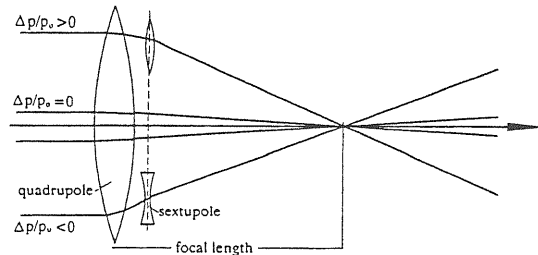
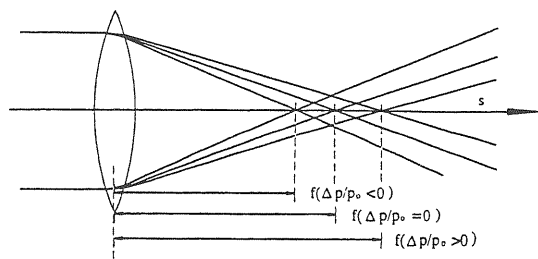


図27 6極電磁石によるクロマチシティ補正、上=補正前、下=補正後

6極電磁石でも楕円形のビームアパーチャに合わせた非対称な設計もなされている。図27は対称な構造をもち、各磁極のアンペアターンは同じである。しかし、非対称になれば図28のように中心軸から各磁極までの距離が異なるため、各磁極のアンペアターンは同じではない。90度と270度磁極までの距離を a_1 、±30度と±150度の磁極までの距離を a_2 とすれば、これら2種類の磁極のアンペアターン比は

$$\frac{(Ni)_1}{(Ni)_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad (57)$$

で与えられる。非対称な設計の長所は全体のアンペアターンが減少し、したがって電力が低減できる。さらに、コイルを挿入するために上下の2分割ですむことである。アンペアターンは a_1 、 a_2 の3乗に比例するため、90度と270度磁極のアンペアターン

は極めて少ない。対称な設計では鉄心は少なくとも3分割にしなければならない。表4はこれら2種類のパラメータを比較したものである。

表4 対称、非対称6極電磁石のパラメータ比較

	対称	非対称	
6極磁場強さ	394	394	T/m ²
a_1	-	33.3	mm
a_2	65.5	56.6	mm
a_1 磁極最大AT	-	1,910	AT
a_2 磁極最大AT	14,600	9,520	AT
全アンペアターン	87,600	41,900	AT
デューティファクター	0.5	0.5	
rms電流密度	7.6	3.0	A/mm ²
電力	7.5	1.4	kW

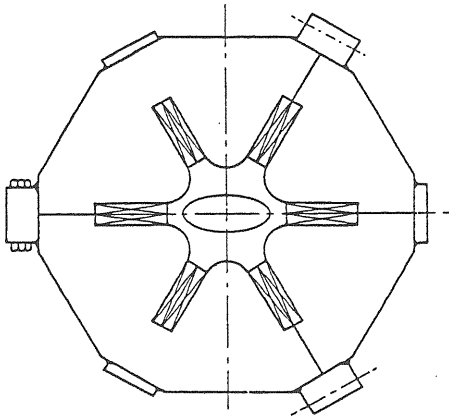


図28 対称6極電磁石

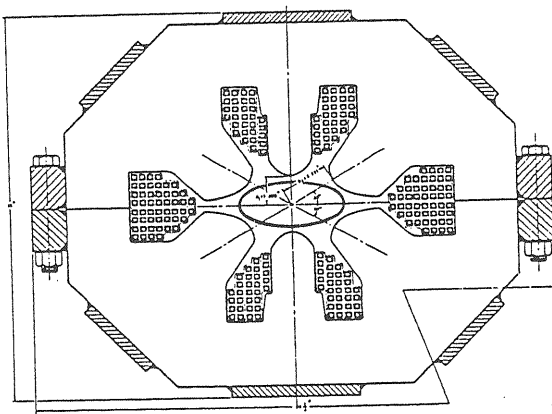


図29 非対称6極電磁石

第3章 永久磁石

永久磁石は電磁石ではないが、透磁率がほぼ1であるため、検出器の磁場との干渉が殆どないので、高エネルギー物理実験の検出器に最も近く置かれるビーム収束用あるいは偏向用の磁石として使用されている。

元素比でCoと希土類金属を5:1の割合で溶解した混合物を急冷し、5ミクロン程度の微粒子の粉末を作る。これを強磁場の中で磁化容易軸の方向を揃えて焼結し、最終的に強磁場で磁化容易方向に磁化させたものが希土類コバルト (REC, Rare Earth Cobalt) の永久磁石である。このRECを利用することにより、通常の電磁石よりコンパクトな磁石を製作することができる。永久磁石は小型にしても強さが変わらないため、特殊な使い方ができる。強さばかりでなく、磁氣的性質が簡単であることも長所になっている。

永久磁石は磁化された結果として残る残留磁場を利用する。自分自身のもつN, S極によって外部に磁界を作ると共に、自分自身の中にも磁界を作る。後者の磁化は永久磁石に加わる反磁界であり、その強さによって動作点がきまる。反磁界と動作点の関係は減磁曲線と呼ばれ、図1に示すようにヒステリシスの第2象限で与えられる。反磁界を H_d とすれば動作点は B_d で与えられる。残留磁束密度 B_r と保持力 H_c が大きいものが優れた永久磁石であると言える。永久磁石または永久磁石と強磁性体を組み合わせることで磁気回路を作り、反磁界を減らせば動作点は B_r に近づく。

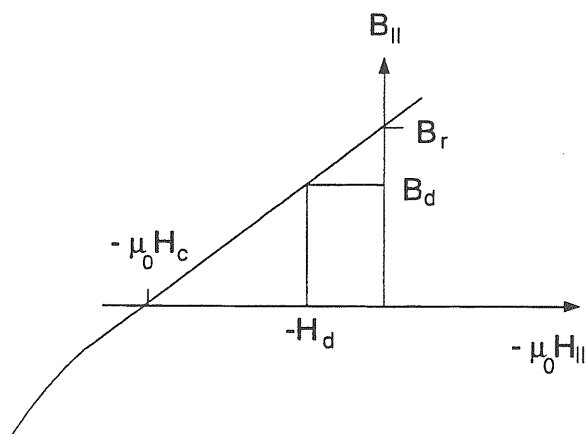


図1 永久磁石の磁化容易軸方向の減磁曲線と動作点

REC永久磁石は残留磁束密度も保持力も大きく、加速器に要求される強い磁場の発生が可能である。

現在、

$$B_r = 0.6 \sim 1.15T$$

$$H_c = 300 \sim 750kA/m$$

の範囲のものが入手できる。永久磁石の磁気特性の優劣を簡単に判定する方法は $H_d B_d$ の最大値、すなわち最大エネルギー積を見ればよい。RECの場合、 $H_d B_d = 10 \sim 30MGOe$ である。フェライト系の永久磁石に比べて1桁も大きい。

(1) 永久磁石の基本公式

2次元の計算では複素数が使用できるので、2次元座標を表す

$$z = x + iy = re^{i\varphi} \quad (1)$$

とその複素共役を

$$z^* = x - iy = re^{-i\varphi} \quad (2)$$

とする。2次元磁場はスカラーポテンシャル V またはベクトルポテンシャル A から

$$B_x = \partial A / \partial y = -\partial V / \partial x \quad (3)$$

$$B_y = -\partial A / \partial x = -\partial V / \partial y \quad (4)$$

V と A の間の関係は複素変数 z の解析関数の実数部と虚数部のCauchy-Riemann条件と同じであるので、複素ポテンシャルとして $F(z) = A + iV$ を定義することができる。 $\underline{B} = B_x + iB_y$ を2次元のベクトルとすれば、

$$\underline{B}^* = i \frac{dF}{dz} = (B_x - iB_y) \quad (5)$$

z の位置にある電流フィラメント I による z_0 における磁場は

$$B^*(z_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi i} \frac{1}{z_0 - z} \quad (6)$$

である。 F と B^* のTaylor展開を

$$F(z_0) = \sum_{n=1} a_n z_0^n \quad (7)$$

$$\underline{B}^*(z_0) = \sum_{n=1} b_n z_0^{n-1}, \quad b_n = i n a_n \quad (8)$$

とする。

(2) RECのB-H特性

磁化容易軸方向の B_{II} と H_{II} の関係 (図1) は非常

に広い範囲で勾配が一定で

$$dB_{\parallel} / dH_{\parallel} = \mu_{\parallel} \approx 1.04 \sim 1.08 \quad (9)$$

である。 $B_{\parallel}(H_{\parallel})$ 曲線の原点からのズレは残留磁場であり、保磁力 $\mu_0 H_c$ は B_r より 4~8% 低い。

$B_{\parallel}(H_{\parallel})$ の関係は

$$B_{\parallel} = \mu_0 \mu_{\parallel} H_{\parallel} + B_r \quad (10)$$

または

$$H_{\parallel} = \gamma_{\parallel} B_{\parallel} / \mu_0 - H_c \quad (11)$$

ただし $\gamma = 1/\mu$ である。容易軸に垂直な方向の $B_{\perp}(H_{\perp})$ の関係はよい近似で

$$B_{\perp} = \mu_0 \mu_{\perp} H_{\perp} + B_r (H_{\perp} / H_A) \quad (12)$$

または

$$B_{\perp} = \mu_0 \mu_{\perp} H_{\perp} \quad (13)$$

ただし $\mu_{\perp} = 1/\gamma_{\perp} = 1 + B_r / \mu_0 H_A$ である。ここで $\mu_0 H_A$ は異方性磁界と呼ばれるもので、大きな値 (12~40 T) をもち、 $\mu_{\perp} = 1.02 \sim 1.08$ である。

(3) REC の特性

$B_{\parallel}(H_{\parallel})$ と $B_{\perp}(H_{\perp})$ の関係をベクトルで表現する。

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu^* \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (14)$$

\mathbf{B}_r は大きさ B_r で方向は容易軸方向である。 $\mu^* \mathbf{H} = \mu_{\perp} H_{\perp} + \mu_{\parallel} H_{\parallel}$ であるので、 \mathbf{H} についても同様に、

$$\mathbf{H} = \gamma^* \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{H}_c \quad (15)$$

である。 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ と $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ の関係から、

$$\text{div}(\mu_0 \mu^* \mathbf{H}) = \rho = -\text{div} \mathbf{B}_r \quad (16)$$

$$\text{rot}(\gamma^* \mathbf{B} / \mu_0) = \mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H}_c \quad (17)$$

ここで実電流は $\mathbf{J} = 0$ であるから、 \mathbf{j} は見掛け上の電流である。すなわち、 $-\text{div} \mathbf{B}_r$ は見掛け上の磁荷であり、 $\text{rot} \mathbf{H}_c$ は見掛け上の電流密度である。比透磁率は非常に 1 に近いので $\mu_{\parallel} = \mu_{\perp} = 1$ と仮定することが

でき、 B_r と H_c は定数であるので、見掛け上真空中に磁荷または電流が存在し、それによる磁場が現れるものと解釈することができる。言い換えれば、磁化方向の異なる永久磁石のセグメントを空間に配置すれば、任意の点における磁場は個々の空間磁荷または空間電流の寄与が線形的に重畳したものとして計算できる。ただし、この場合、鉄のような磁性体が近くにないものと仮定する。永久磁石のセグメント内で B_r と H_c が一様であれば、磁荷と電流は表面だけに現れる。

(4) REC による磁場の計算

永久磁石の外部の点 \mathbf{r}_0 におけるスカラーポテンシャル V は

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{-\text{div} \mathbf{B}_r(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV \\ &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{-\mathbf{B}_r(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{-\mathbf{H}_c \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{\mathbf{H}_c}{4\pi} \cdot \int \frac{d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで $\mathbf{B}_r = \mu_0 \mathbf{H}_c$ の関係を代入した。

周囲に磁性体のない z 方向に十分長い REC アセンブリーであれば、 \mathbf{B}_r は z 成分をもたないので z 方向だけの電流を考える。

$$j_z = (\text{rot} \mathbf{H}_c)_z = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} \right) \quad (19)$$

この電流による磁場は

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{\mu_0}{2\pi i} \int \frac{j_z}{z_0 - z} dx dy \quad (20)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \underline{B}^*(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{1}{z_0 - z} \left(\frac{\partial B_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint \frac{B_{ry} dy}{z_0 - x - iy} - \int \frac{B_{ry} dx dy}{(z_0 - z)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint \frac{B_{rx} dx}{z_0 - x - iy} - i \int \frac{B_{rx} dx dy}{(z_0 - z)^2} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int \frac{B_{ry} dx dy}{(z_0 - z)^2} - i \int \frac{B_{rx} dx dy}{(z_0 - z)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \frac{B_r dx dy}{(z_0 - z)^2} \quad (21)$$

ここで $B_r = B_{rx} + iB_{ry}$ である。この式は2次元表現である。xとyについて別々に積分を行い、それらを平均すれば複素線積分になる。

$$\begin{aligned} \underline{B}^*(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{B_r dx dy}{(z_0 - z)^2} = \frac{B_r}{2\pi} \left\{ \oint \frac{dy}{z_0 - z} \right\} \\ &= -\frac{B_r}{2\pi i} \left\{ \oint \frac{dx}{z_0 - z} \right\} = -\frac{B_r}{4\pi i} \left\{ \oint \frac{dz^*}{z_0 - z} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

$1/(z_0 - z)$ の級数展開は磁石の内側で、

$$\frac{1}{z_0 - z} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0^{n-1}}{z^n} \quad (23)$$

外側で

$$\frac{1}{z_0 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^{n-1}}{z^n} \quad (24)$$

微分して、磁石の内側で

$$\frac{1}{(z_0 - z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz_0^{n-1}}{z^{n+1}} \quad (25)$$

外側で

$$\frac{1}{(z_0 - z)^2} = -\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{nz_0^{n-1}}{z^{n+1}} \quad (26)$$

が得られる。 $\underline{B}^*(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{b}_n z_0^{n-1}$ のTaylor展開において、

$$\underline{b}_n = \frac{n}{2\pi} \int \frac{B_r}{z^{n+1}} dx dy \quad (27)$$

同じ形状で同じ強さの永久磁石があり、一方の容易軸に対して他方の容易軸が2次元平面内で角度 β だけ回転しているとすれば、この回転しているセグメントによる磁場への寄与は

$$B_r = B_r e^{i\beta(\varphi)}, \quad z = r e^{i\varphi} \text{ から}$$

$$\underline{b}_n = \frac{n}{2\pi} \int \frac{B_r e^{i[\beta(\varphi) - (n+1)\varphi]}}{r^{n+1}} r dr d\varphi \quad (28)$$

この関係を利用すれば、2N極磁場を発生させるためには、 \underline{b}_N を最大にして、それ以外の \underline{b}_n を最小にすればよいことが分かる。すなわち、

$$\beta(\varphi) = (N+1)\varphi \quad (29)$$

さらに、 $r \rightarrow 0$ とすれば \underline{b}_N は大きくなることも分かる。図2の積分路（内側と外側の円の半径をそれぞれ r_1 、 r_2 として、2つの円の間はRECで満たされているものとする）に沿って積分すれば

$$\underline{b}_N = \frac{1}{r_1^{N-1}} B_r \frac{N}{(N-1)} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{N-1} \right], \quad N \geq 2 \quad (30)$$

$$\underline{b}_N = B_r \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right), \quad N=1 \quad (31)$$

すなわち、

$$\underline{B}^*_N = \left(\frac{z_0}{r_1} \right)^{N-1} B_r \frac{N}{(N-1)} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{N-1} \right], \quad N \geq 2 \quad (32)$$

$$\underline{B}^*_N = B_r \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right), \quad N=1 \quad (33)$$

また、RECの外側では(25)の代わりに(28)を用いて計算すれば、磁場はゼロになる。

以上から、ドーナツ状のRECで(29)の関係を満足するように、磁化の方向が連続的に変化すれば、純粋なN極成分だけが現れる。

(5) 永久磁石による多極磁石

(29)の関係から、 (r, φ) におけるRECの容易軸方向は $\varphi=0$ 方向を基準にして角度 $(N+1)\varphi$ で与えられる。この関係をREC内部において連続的に成立させることはできないので、M個の形状の同じブロック（セグメント）に分割する。各ブロック内で容易

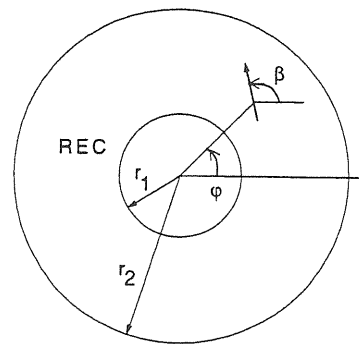


図2 REC内部の磁場計算のための積分領域

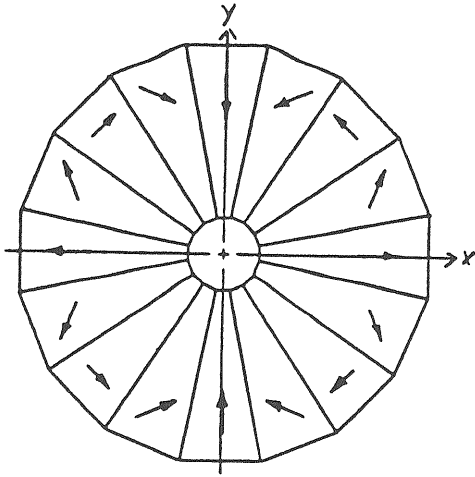


図3 REC 4極磁石 (16セグメント) の断面

軸方向は同じである。図3に示す4極磁石は16個のブロックで構成したもので、矢印は容易軸の方向である。ブロック間の容易軸の角度の変化は $2\pi(N+1)/M$ である。(22)から

$$\underline{b}_n = \frac{B_r}{4\pi i} \oint \frac{dz^*}{z^n} \quad (34)$$

基準ブロックとして1セグメントを考え、 \underline{b}_n への寄与を \underline{C}_n とする。基準セグメントに関して角度 $\alpha = 2\pi m/M$ だけ回転したセグメントからの寄与は

$$\underline{C}_n e^{i\alpha(N+1)} e^{-i\alpha(n+1)} \quad (35)$$

指数関数の初めの項は容易軸の角度 $\alpha(N+1)$ の回転によるもので、2番目の指数関数項は(34)の積分による。全部のセグメントからの寄与の合計は

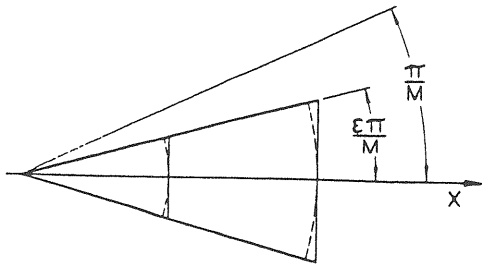


図4 REC多極磁石の1セグメント

$$\begin{aligned} \underline{b}_n &= \underline{C}_n \sum_{m=0}^{M-1} e^{i2\pi m(N-n)/M} \\ &= \begin{cases} \underline{C}_n M, & (N-n)/M = \text{integer} \\ 0, & (N-n)/M \neq \text{integer} \end{cases} \quad (36) \end{aligned}$$

したがって、

$$\underline{B}_n^* = M \sum_v \underline{C}_n z_0^{n-1}; \quad n = N + vM \quad (37)$$

x軸で2等分される配置にある図4の台形状のブロックを考える。ブロックの角度を $\epsilon 2\pi/M$ として、台形について面積積分する。この積分をM倍して、 $N \geq 2$ の場合、

$$\begin{aligned} \underline{B}^*(z_0) &= M \frac{B_r}{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \iint \frac{nz_0^{n-1}}{z^{n+1}} dx dy \\ &= M \frac{B_r}{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} nz_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \int_{-x \tan(\epsilon\pi/M)}^{x \tan(\epsilon\pi/M)} \frac{1}{(x+iy)^{n+1}} dy \\ &= -M \frac{B_r}{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} z_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{1}{i} \left[\frac{1}{(x+iy)^n} \right]_{-x \tan(\epsilon\pi/M)}^{x \tan(\epsilon\pi/M)} \\ &= -M \frac{B_r}{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} z_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{1}{i} \left[\frac{1}{(x+ix \tan(\epsilon\pi/M))^n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(x-ix \tan(\epsilon\pi/M))^n} \right] \\ &= M \frac{B_r}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} z_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{\cos^n(\epsilon\pi/M) \sin(n\epsilon\pi/M)}{nx^n} \\ &= -M \frac{B_r}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} z_0^{n-1} \frac{\cos^n(\epsilon\pi/M) \sin(n\epsilon\pi/M)}{n-1} \left[\frac{1}{x^{n-1}} \right]_{r_1}^{r_2} \\ &= M \frac{B_r}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} z_0^{n-1} \frac{\cos^n(\epsilon\pi/M) \sin(n\epsilon\pi/M)}{n-1} \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{r_1^{n-1}} - \frac{1}{r_2^{n-1}} \right) \\ &= \underline{B}_r \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\cos^n(\epsilon\pi/M) \sin(n\epsilon\pi/M)}{n\pi/M} \cdot \frac{n}{n-1} \left(\frac{z_0}{r_1} \right)^{n-1} \\ &\quad \cdot \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{n-1} \right] \quad (38) \end{aligned}$$

もし縁が点線の円 (扇形の場合) の場合は、面積積分すれば、 $N \geq 2$ の場合、

$$\begin{aligned} \underline{B}^*(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{B_r dx dy}{(z_0 - z)^2} \\ &= -M \frac{B_r}{2\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \iint \frac{nz_0^{n-1}}{r^n e^{i(n+1)\varphi}} dr d\varphi \\ &= \underline{B}_r \sum_{v=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(n+1)\epsilon\pi/M}{(n+1)\pi/M} \cdot \frac{n}{n-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{z_0}{r_1} \right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{n-1} \right] \right] \end{aligned}$$

以上まとめて、

$$\underline{B}^*(z_0) = B_r \sum_{v=0}^{\infty} \frac{n}{n-1} \left(\frac{z_0}{r_1}\right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-1}\right] K_n \quad (40)$$

$$n = N + vM \quad (41)$$

$$K_n = \frac{\cos^n(\varepsilon\pi/M) \sin(n\varepsilon\pi/M)}{n\pi/M} \quad (\text{台形の場合}) \quad (42)$$

$$K_n = \frac{\sin(n+1)\varepsilon\pi/M}{(n+1)\pi/M} \quad (\text{扇形の場合}) \quad (43)$$

どちらの場合も

$$\frac{n}{n-1} \left(\frac{z_0}{r_1}\right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-1}\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (44)$$

である。

理想的な場合と比較すれば、セグメント多極磁石は K_n の値だけ低下する。 $\varepsilon=1$ のとき、一周期当たりのセグメントの数 (M/N) が 8 以上の場合に理想的な強さの近づく。このような場合の永久磁石の構成を図 5 に示す

(6) 4 極永久磁石

セグメント化することにより、磁石の外側に磁場が漏れるが、セグメントの数を多くすることで、無視できるくらい漏れ磁場は小さくなる。前節の式 (40) からセグメント REC 4 極磁石の式は $\varepsilon=1$ に対して、

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{z_0}{r_1} B_r 2 \left[1 - \frac{r_1}{r_2}\right] K_2 \quad (45)$$

$$K_2 = \frac{\cos^2(\pi/M) \sin(2\pi/M)}{2\pi/M} \quad (46)$$

この式に従って、 M の違いによる K_2 の値は

$M=$	4	8	12	16	20	24
$K_2=$	0.32	0.77	0.89	0.94	0.96	0.97

である。セグメントの数として、 $M=12, 16$ を選択すべきである。磁場の強さを数値的にみれば、

$M=16$ 、 $r_2/r_1=4$ 、 $B_r=0.95[T]$ の場合、

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{z_0}{r_1} 1.34[T] \quad (47)$$

である。このようにアパーチャにおける磁場は B_r より大きくなる。セグメントにより K_2 で与えられる割合で磁場は低下し、ハーモニクスが混入する ($M=16$ の場合、 $n=N+vM=18, 34, \dots$)。基本磁場

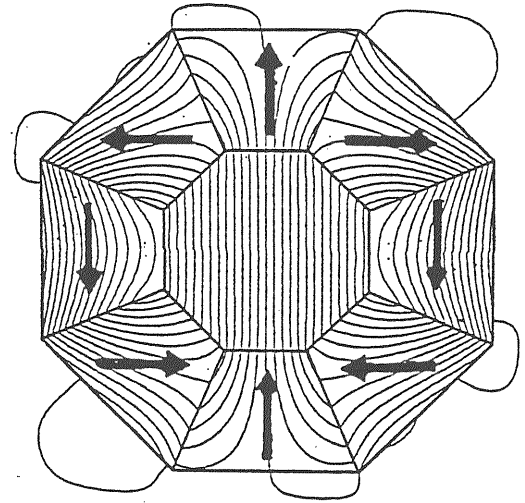
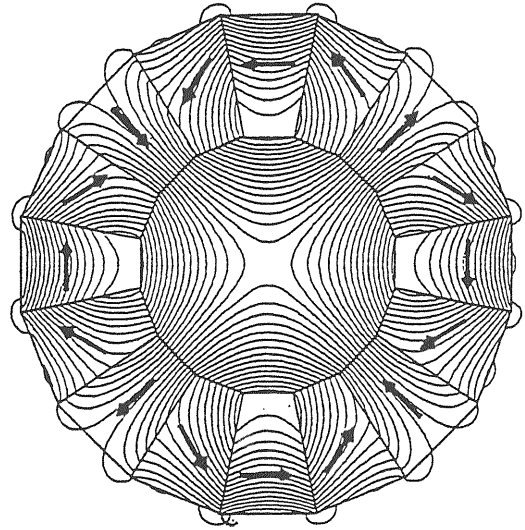


図 5 SLAC の Final IR Quad と Dipole の磁束パターン (理想的なセグメント数の場合、矢印は磁化容易方向を示す)

に対するハーモニクスの大きさの比は

$$Q(v) = \left(\frac{z_0}{r_1}\right)^{vM} \frac{N-1}{n-1} \frac{1 - (r_1/r_2)^{n-1}}{1 - (r_1/r_2)^{N-1}} \cos^{vM}(\pi/M) \quad (48)$$

で与えられる。 $n=18$ 成分の基本磁場に対する割合は約 6% である。 $n=34$ の割合は約 2% である。モデルについての測定およびコンピュータによるシミュレーション (POISSON の PANDIRA コード) からは、 $n=6, 10, 14$ の成分が現れる。これは $\mu_{||} = \mu_{\perp} = 1$ の仮定が厳密ではないことを示し、基本磁場に対する割合は、 $n=6$ で 0.2%、 $n=10$ で 0.1% 以下、 $n=14$ で 0.1% である。これらの割合は非常に小さく、実用上問題になるとは思われない。必要ならばセグメントの間に非磁性のスペーサーを入れて特定のハーモニクスを除去する設計も可能である。

このような4極永久磁石は小型で大きな磁場勾配が必要とされる線形加速器の収束用に適している。この例でアパーチャの半径を1cmとすれば、得られる磁場勾配は1.34[T/cm]である。また、REC磁石は他の電磁石の中に入れても、アパーチャ内で磁場が線形的に重畳されるだけで、他の磁場と殆ど干渉を引起さない。このため、衝突リングの検出器ソレノイドの中でビーム収束用（final focus REC）に使用される。RECアンジュレータとして放射光や自由電子レーザにも応用されている。

この他、SLACのDamping ringにおいてクロマティシティ補正用の6極磁石、入出射用のmatching用4極磁石にも使用されている。

4極磁石の強さを調節するために、幾つかの方法が考案されている。

- 1) 同じセグメント構造の2台の4極磁石を他方のボアーの中に同軸に挿入し、お互いに逆方向に回転させることにより、2つの磁場を重ね合わせる。この場合は端部磁場の方向が変化する。
- 2) セグメントを半径方向に動かす。
- 3) 長さ方向にスライスし、カップリングを起させないような方法で回転させて実効長を調節する。

端部磁場に関して、軸に垂直にカットした端部の多極永久磁石では、

- 1) 磁場実効長は物理的長さに等しい。
- 2) 2次元磁場に含まれない多極成分は、端部にも現れない。

SLACのFinal IR QuadとDipole（図5）はサマリウムコバルト（Sm₂Co₁₇）の台形状のセグメントから構成されている。図の断面形状をもち、軸方向にスライスされた永久磁石が共通の枠に多数嵌め込まれている。B_r=1.05 [T]から生まれる磁気圧は非常に大きく、

$$P_{magnetic} = \frac{(1.05[T])^2}{2\mu_0} = 4.387 \times 10^6 [N/m^2]$$

$$= 4.3 \text{気圧} \quad (49)$$

である。断面内では磁気圧は引力であるが、スライス面では同じ磁極が重なるため、軸方向に反発力が働き、スライスを面内で回転させる力も働く。このような反発力と回転力を押さえ込む非磁性の構造が必要である。

(7) アンジュレータ（undulator）

電子蓄積リングにおける挿入光源または自由電子

レーザー源として、アンジュレータは多くの研究機関で利用されている。この装置の大部分はREC永久磁石による磁場を利用している。アンジュレータには2種類のタイプがある。「純RECアンジュレータ」と鉄を併用する「ハイブリッドアンジュレータ」である。後者の設計は鉄の非線形性を考慮しなければならないため複雑であるが、前者はRECの性質による磁場の線形的な重畳ができるので簡単である。図6に示す純RECアンジュレータの磁場は、RECの透磁率が1、各RECブロックの磁化は一樣であるという仮定により、RECの表面電流シートだけを考えればよい。

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{M} \times d\mathbf{A}) \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M})d\mathbf{A} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A})\mathbf{M}}{r^3} \quad (50)$$

ここでMは磁化の強さ、dAはRECブロックの表面積要素で方向は面に垂直で外向き、rはREC表面から磁場計算点までの位置ベクトルである。B_y成分について上の式を書き直せば、

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(xM_x + yM_y + zM_z)dA_y - (xA_x + ydA_y + zdA_z)M_y}{r^3}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(xM_x + zM_z)dA_y - (xA_x + zdA_z)M_y}{r^3} \quad (51)$$

この式でx,y,zは循環変数であるので、一般的に表せば、

$$B_i = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \left[\iint \frac{M_j x_j dA_i - M_i x_j dA_j}{r^3} \right] \quad (52)$$

ここで、i, j = x, y, zである。図6のようにMがy, z方向の成分だけをもてば、y方向（垂直方向）の磁場は

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[M_z \iint \frac{zdx dz}{r^3} - M_y \iint \frac{xdy dz}{r^3} - M_y \iint \frac{zdx dy}{r^3} \right] \quad (53)$$

で与えられる。

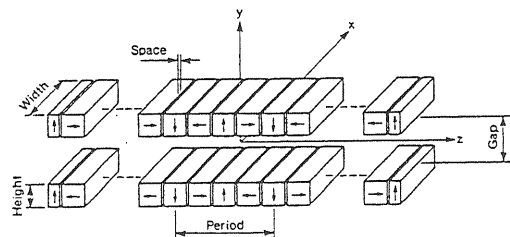


図6 アンジュレータにおけるRECブロックの座標の定義

第4章 多極磁場展開

電磁石の磁極形状について見てきたが、2極、4極、6極などと言われる磁場成分は磁極の数に基づく磁場のパターンを表し、一口に多極磁場成分 (multipole field component) と呼ばれる。一般に観測される磁場を成分に分解すれば、様々な成分の重ね合わせであることが分かる。ここでは、Laplace方程式から出発して磁場成分を2次元面内で統一的に扱い、その表現方法と、電磁石の対称性から現れる成分について検討する。

(1) Laplace方程式

電磁石のギャップ内の電流が存在しない領域において磁気スカラーポテンシャル V に関する Laplace 方程式が成立する。粒子が会う磁場はこのポテンシャルから導くことができる。

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1)$$

加速器の電磁石はビームの軌道に関してある対称性をもって作られるので、座標系の選択により磁場の表現が簡単になる。例えば、円柱座標系 (r, φ, z) で Laplace 方程式を記述すれば、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

中心軌道 $r=0$ のまわりでポテンシャルを Taylor 展開して、

$$V(r, \varphi, z) = \sum_{n>0} \frac{1}{n!} A_n(z) r^n e^{in\varphi} \quad (3)$$

以下の議論を transverse 磁場だけに限定して2次元磁場を仮定する。(3)を(2)に代入すれば、

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n!} \left[\frac{n(n-1) + n - n^2}{r^2} A_n(z) \right] r^n e^{in\varphi} = 0 \quad (4)$$

がすべての n について成立するので、(3)の形でポテンシャルが与えられる。 n 次のポテンシャルを

$$V_n(r, \varphi) = \frac{1}{n!} A_n r^n e^{in\varphi} \quad (5)$$

または、直交座標系で、

$$V_n(x, y) = \frac{1}{n!} A_n (x + iy)^n \quad (6)$$

とする。複素数で表されるポテンシャルは実数部も虚数部も独立な解であるので、係数 A_n も独立である。 n の値によって、2極磁場 ($n=1$)、4極磁場 ($n=2$)、6極磁場 ($n=3$)、 \dots である。2項定理にしたがって(6)を書き直せば、

$$V_n(x, y) = \sum_{j=0}^n \frac{A_{n-j} \cdot j}{(n-j)! j!} x^{n-j} (iy)^j \quad (7)$$

実数部と虚数部を分離すれば、

$$\text{Re}[V_n(x, y)] = \sum_{m=0}^{n/2} \frac{(-1)^m A_{n-2m} \cdot 2m}{(n-2m)! (2m)!} x^{n-2m} y^{2m} \quad (8)$$

$$\text{Im}[V_n(x, y)] = \sum_{m=1}^{(n+1)/2} \frac{(-1)^{m-1} A_{n-2m+1} \cdot 2m-1}{(n-2m+1)! (2m-1)!} \cdot x^{n-2m+1} y^{2m-1} \quad (9)$$

が得られる。

(2) 電磁石磁場

加速器は一般に水平面に設置されるため、通常利用される磁場はポテンシャルの虚数部から得られるノーマル成分 (normal component) である。すなわち、

$$\begin{aligned} B_{nx}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \text{Im}[V_n(x, y)] \\ &= -\sum_{m=1}^{(n+1)/2} \frac{(-1)^{m-1} A_{n-2m+1} \cdot 2m-1}{(n-2m)! (2m-1)!} x^{n-2m} y^{2m-1} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_{ny}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} \text{Im}[V_n(x, y)] \\ &= -\sum_{m=1}^{(n+1)/2} \frac{(-1)^{m-1} A_{n-2m+1} \cdot 2m-1}{(n-2m+1)! (2m-2)!} x^{n-2m+1} y^{2m-2} \end{aligned} \quad (11)$$

(11)において $B_{ny}(x, y) = B_{ny}(x, -y)$ が成立するので、磁場は水平対称面をもつことが分かる。また、 $y=0$ において $B_{nx}(x, 0) = 0$ であるので、水平対称面には水平方向の磁場をもたない。言い換えれば、水平面を運動する荷電粒子は水平面に留まることを意味す

る。

(8)の実数部からの磁場はスキュー成分 (skew component) と呼ばれ、ノーマル磁場の回転によって得られる。表1、2にそれぞれの磁場成分を示す。ノーマルとスキューで B_{nx} と B_{ny} が入れ替わっていることが分かる。

表1 ノーマル磁場成分

n	B_{nx} (水平磁場成分)
1	0
2	b_2y
3	b_3xy
4	$(1/6)b_4(3x^2y-y^3)$
5	$(1/6)b_5(x^3y-xy^3)$
6	$(1/120)b_6(5x^4y-10x^2y^3+y^5)$

n	B_{ny} (垂直磁場成分)
1	b_1
2	b_2x
3	$(1/2)b_3(x^2-y^2)$
4	$(1/6)b_4(x^3-3xy^2)$
5	$(1/24)b_5(x^4-6x^2y^2+y^4)$
6	$(1/120)b_6(x^5-10x^3y^2+5xy^4)$

したがって、

$$B_x = b_2y + b_3xy + \frac{1}{6}b_4(3x^2y - y^3) + \dots \quad (12)$$

$$B_y = b_1 + b_2x + \frac{1}{2}b_3(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}b_4(x^3 - 3xy^2) + \dots \quad (13)$$

水平対称面 ($y=0$) では、

$$B_x = 0 \quad (14)$$

$$B_y = b_1 + b_2x + \frac{1}{2}b_3x^2 + \frac{1}{6}b_4x^3 + \dots \quad (15)$$

である。

(3) 磁極形状

鉄の飽和がない場合を考えると、鉄表面は等スカラーポテンシャル面に相当する。すなわち、 $V=$ 一定の曲線が2次元磁場の理想的な磁極形状を与える。多くの場合、電磁石長はギャップに比べて十分長いので電磁石のかなりの部分は2次元的であると考え、差し支えない。表3は理想的な磁極形状を与える

磁気スカラーポテンシャルの関数である。

表2 スキュー磁場成分

n	B_{nx} (水平磁場成分)
1	a_1
2	a_2x
3	$(1/2)a_3(x^2-y^2)$
4	$(1/6)a_4(x^3-3xy^2)$
5	$(1/24)a_5(x^4-6x^2y^2+y^4)$
6	$(1/120)a_6(x^5-10x^3y^2+5xy^4)$

n	B_{ny} (垂直磁場成分)
1	0
2	a_2y
3	a_3xy
4	$(1/6)a_4(3x^2y-y^3)$
5	$(1/6)a_5(x^3y-xy^3)$
6	$(1/120)a_6(5x^4y-10x^2y^3+y^5)$

表3 2次元の磁気スカラーポテンシャル

1) ノーマル部分	
V_1	b_1y
V_2	b_2xy
V_3	$(1/6)b_3(3x^2y-y^3)$
V_4	$(1/6)b_4(x^3y-xy^3)$
V_5	$(1/120)b_5(5x^4y-10x^2y^3+y^5)$
V_6	$(1/720)b_6(6x^5y-20x^3y^3+6xy^5)$

2) スキュー部分	
V_1	a_1x
V_2	$(1/2)a_2(x^2-y^2)$
V_3	$(1/6)a_3(x^3-3xy^2)$
V_4	$(1/24)a_4(x^4-6x^2y^2+y^4)$
V_5	$(1/120)a_5(x^5-10x^3y^2+5xy^4)$
V_6	$(1/720)a_6(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6)$

次数1~4について磁極形状の曲線はそれぞれ

$$y = \text{const} \quad (16)$$

$$xy = \text{const} \quad (17)$$

$$3x^2y - y^3 = \text{const} \quad (18)$$

$$x^3y - xy^3 = \text{const} \quad (19)$$

である。これらの式に対応する曲線を図1に示す。

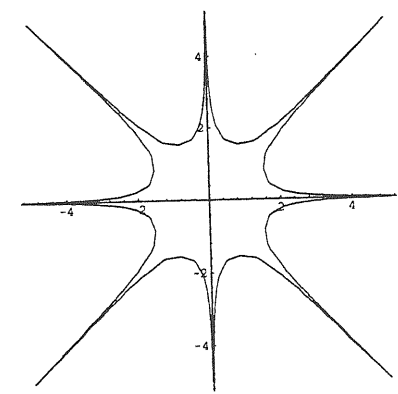
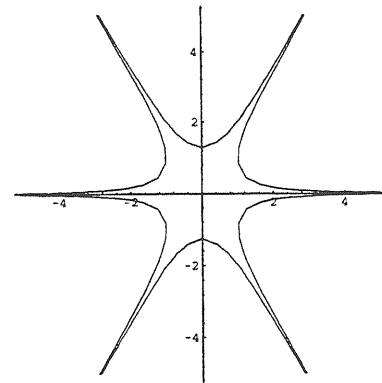
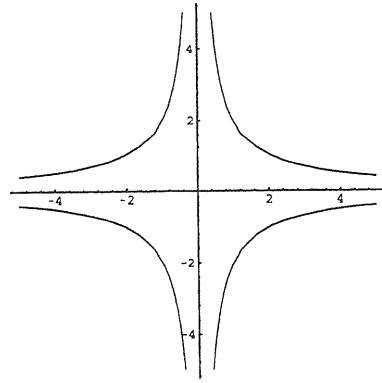
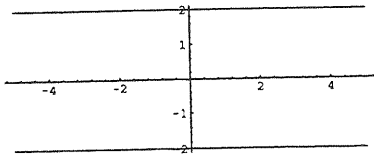


図1 次数1～4の磁極形状

通常使用される電磁石の磁場は表3のノーマル部分によるもので、このポテンシャルの対称性を調べる。 y に関して $V(x, y) = -V(x, -y)$ の反対称性はすべてのポテンシャル ($V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, \dots$) にあり、 $V(x, y) = V(x, -y)$ の対称性を示すものはない。したがって、次の2種類に区別される。

$$V(x, y) = V(-x, y) = -V(-x, -y) \quad V_1, V_3, V_5, \dots \quad (20)$$

$$V(x, y) = -V(-x, y) = V(-x, -y) \quad V_2, V_4, V_6, \dots \quad (21)$$

これから x, y 軸および中心軸に関する対称性のズレによる多極成分が分かる。すなわち、

$$V_1 \text{からは} \quad V_1, V_3, V_5, \dots$$

$$V_2 \text{からは} \quad V_2, V_4, V_6, \dots$$

$$V_3 \text{からは} \quad V_3, V_5, V_7, \dots$$

である。この関係を一般的に表せば、 $2n$ 磁極 (V_n) からは

$$n+2p \text{ 次} \quad (2n+4p \text{ 磁極成分}, p=0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

の成分が現れる。このようなズレは磁極中心線に関する非対称なズレや、4極以上の電磁石の磁極組立における対称性のあるズレから発生する。

さらに磁極中心線に関する対称性のズレを考慮すれば、

$$n+(2n)q \text{ 次} \quad (2n+4nq \text{ 磁極成分}, q=0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

なる成分しか現れない。例えば、 $n=2$ (4極電磁石) の場合、現れる磁場成分は2, 6, 10, ...次成分である。

V =一定の曲線は漸近線をもつ無限に長い曲線であるので、電磁石のコイルを設けるスペースを作るため、磁極形状の対称性を保ちながら、適当な長さで曲線の裾を切り捨てる (truncation)。このため理想的な磁場分布が崩れ、望ましくない磁場成分が現れる。この場合(23)の多極磁場成分が現れる (表4)。このような磁場成分は精密に作られた電磁石に必然的に現れる成分であるので、許される多極成分 (allowed multipole component) と呼ばれる。電磁石の鉄心材料の一様性も含めて、製作誤差や組み立て誤差は一般的に対称性を持たないので、これらの誤差による多極成分はあらゆる成分を含むものと考えるのが妥当である。電磁石に厳しい機械的工作精度や材料一様性が要求されるのは、加速器に好ましくない磁場成分を持ち込まないためである。

表4 理想的磁極形状のtruncationによる磁場成分

電磁石	磁場成分 (極数)	対称組立誤差 による磁場成分
2極(n=1)	2, 6, 10, ...	6, 10, ...
4極(n=2)	4, 12, 20, ...	8, 12, ...
6極(n=3)	6, 18, 30, ...	10, 14, ...
8極(n=4)	8, 24, 40, ...	12, 16, ...

表4から分かるように磁極の数が少ないほど低次の多極成分が現れるので、それだけ誤差に対する条件が厳しくなる。高次成分による磁場への寄与は $(1/n!)b_n x^{n-1}$ であるため、中心軸付近におけるビームへの影響は小さい。

(4) 磁極間隙とポアー半径

要求される電磁石の磁極間隙（ギャップ）またはポアー半径はビームのベータatron振動、閉軌道歪み（COD）、運動量分散による軌道の拡がり、および真空チェンバーの厚みから決められる。

[4-1] 2極電磁石

2極（偏向）電磁石に要求される半ギャップ高さが h [m] であれば、 $2h$ がギャップ間隔になる。図2の偏向電磁石において電流 i [A]、巻数 n [turns/pole] のコイルによって作られるギャップ内の最大磁束密度を B_g [T]、全アンペアターンを ni [AT] とすれば、

$$\frac{B_g}{\mu_0} h + \frac{B}{\mu} \ell = ni \quad (24)$$

ここで B 、 ℓ 、 μ はそれぞれ鉄の中の磁束密度、磁路長、透磁率である。書き換えて、

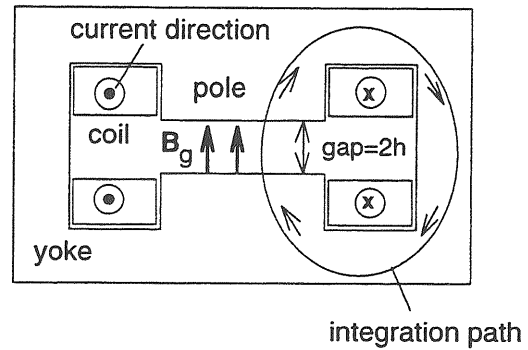
$$B_g + B \left(\frac{1}{\mu_r} \frac{\ell}{h} \right) = \frac{\mu_0 ni}{h} \quad (25)$$

ここで、 μ_r は鉄の比透磁率である。 $B = B_g$ が成り立ち、また第2項の括弧内は1に比べて小さいので、この項を無視すれば、

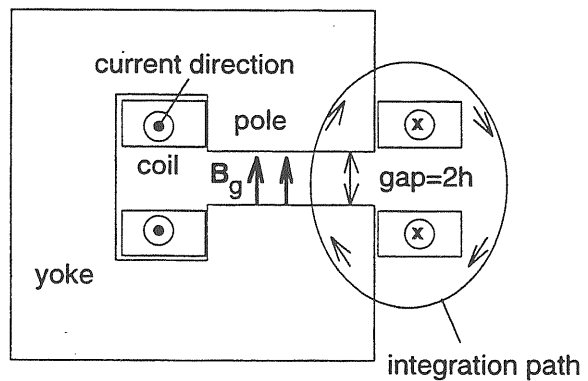
$$B_g h [T \cdot m] = \mu_0 ni [A \cdot \text{turn} / \text{pole}] \quad (26)$$

この式は鉄心の飽和を無視したものであるが、磁場

が高くなれば鉄心の飽和のため必要な磁場を得るために励磁電流はこの式から計算されるアンペアターンより多くなる。電流を何%多く流すかは、鉄の磁化曲線（B-H特性、図3）を考慮した磁場の数値計算から得られる。



H-type dipole magnet



C-type dipole magnet

図2 偏向電磁石の断面形状
(上=H型、下=C型)

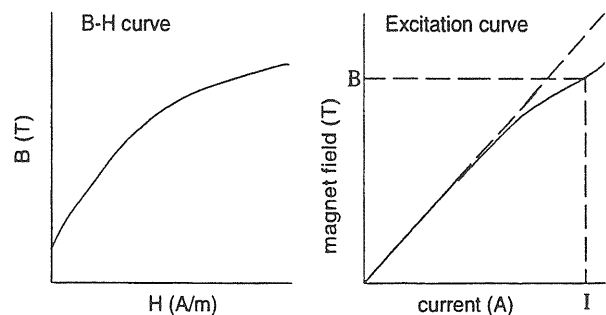


図3 鉄の磁化曲線と飽和特性。右図において磁場 B を発生するために必要な電流は I である。

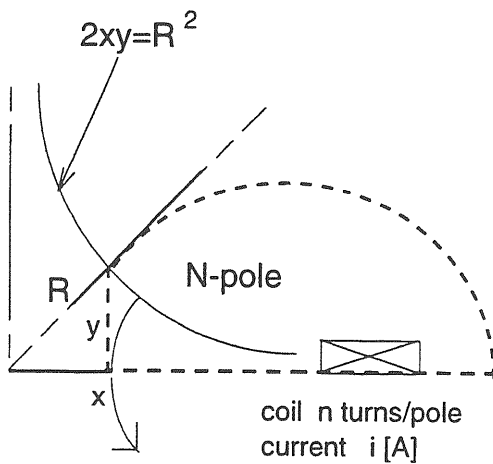
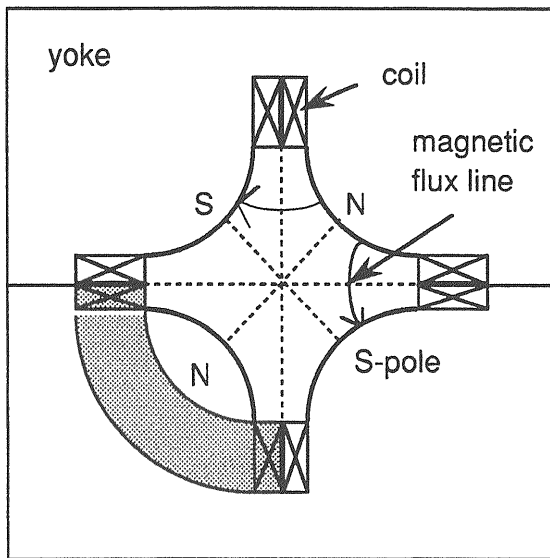
[4-2] 4極電磁石

4極電磁石の場合、ボア半径がR[m]であれば、磁極形状の双曲線は

$$2xy = R^2 \quad \text{または} \quad xy = R^2 / 2 \quad (27)$$

である。必要な最大磁場勾配をg[T/m]とすれば、水平軸(x軸)の座標x[m]における垂直方向の磁場成分は、

$$B_y = gx \quad (28)$$



dashed line=integration path

図4 4極電磁石の断面構造。右図=左図の第1象限の磁極部分のみを取り出したもので、磁場勾配をgとすれば、xにおけるy方向磁場はgxである。点線は積分路である。座標xにおける磁極までの半ギャップ高さ

(half gap height) をy[m]として図4の点線で示した積分路に沿って積分すれば、

$$\int B_y dy = \int_0^y gx dy = gxy = \frac{1}{2} gR^2 \quad (29)$$

Ampereの法則において鉄中の寄与を無視して、

$$\frac{1}{2} gR^2 = \mu_0 ni [AT / pole] \quad (30)$$

の関係が成立する。勿論、この式でも鉄心の飽和は考慮外であるので、飽和を考慮して所要の磁場勾配を発生させるために電流を多めに流す必要がある。

[4-3] 6極電磁石

同様に図5に示す6極電磁石の場合は、水平座標xにおけるy方向磁場成分は

$$B_y = \frac{1}{2} b_3 (x^2 - y^2) \quad (31)$$

であるので、これを図に示したの点線の積分路に沿ってy軸に平行に積分するとき、ボア内の磁場は場所によって変化することを考慮して、

$$\int B_y dy = \int_0^y \frac{1}{2} b_3 (x^2 - y^2) dy = \frac{b_3}{6} [3x^2 y - y^3] = \frac{b_3 R^3}{6} \quad (32)$$

すなわち、Ampereの法則において鉄中の積分を無視して、6極電磁石では

$$\frac{b_3 R^3}{6} = \mu_0 ni [AT / pole] \quad (33)$$

ここで注意しなければならないのは、6極磁場の強さ $b_3 [T/m^2]$ の定義である。ここではx軸上での6極磁場が

$$B_y = \frac{1}{2} b_3 x^2 [T] \quad (34)$$

で与えられる。

[4-4] 8極電磁石

ついでに8極電磁石も同じように検討しよう。図6において、水平座標xにおけるy方向磁場成分は

$$B_y = \frac{1}{6}b_4(x^3 - 3xy^2) \quad (35)$$

であるので、これを図に示したの点線の積分路に沿ってy軸に平行に積分すれば、

$$\int B_y dy = \int_0^y \frac{1}{6}b_4(x^3 - 3xy^2) dy = \frac{b_4}{6} [x^3 y - xy^3] = \frac{b_4 R^4}{24} \quad (36)$$

すなわち、Ampereの法則において鉄中の積分を無視して、8極電磁石では

$$\frac{b_4 R^4}{24} = \mu_0 ni [AT / pole] \quad (37)$$

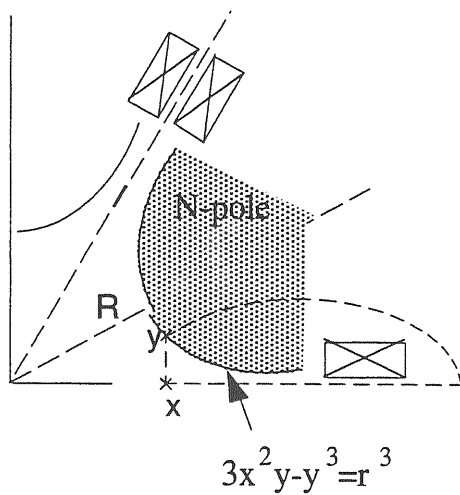
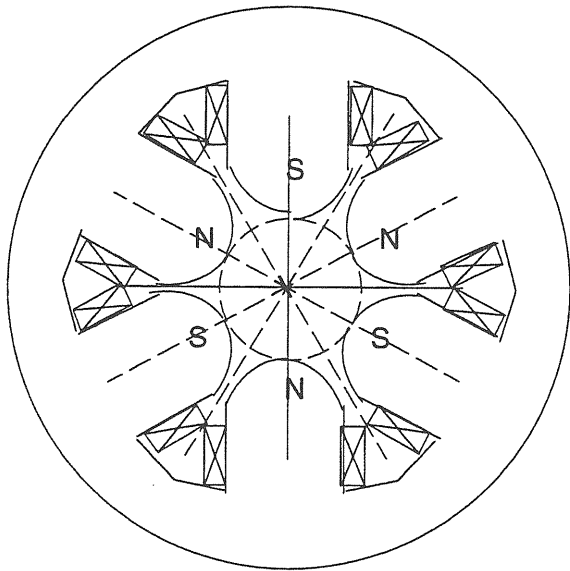


図5 6極電磁石断面図。右図=左図の第1象限のみを取り出したもの。

ここで注意しなければならないのは、8極磁場の強さ $b_4[T/m^2]$ の定義である。ここではx軸上での8極磁場が

$$B_y = \frac{1}{6}b_4 x^3 [T] \quad (38)$$

で与えられる。

以上の式の中の $R[m]$ はいずれの場合もボア一半径を与える。

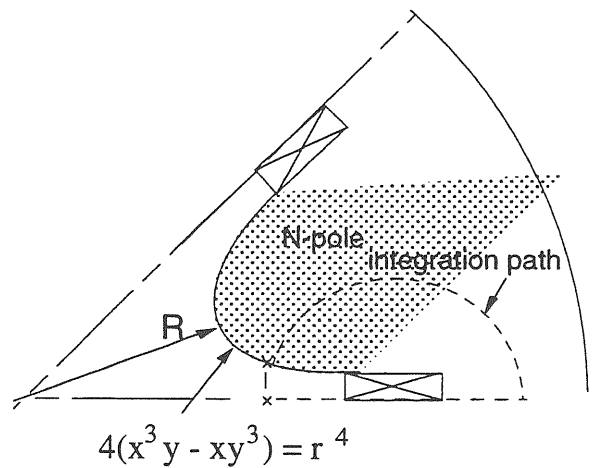
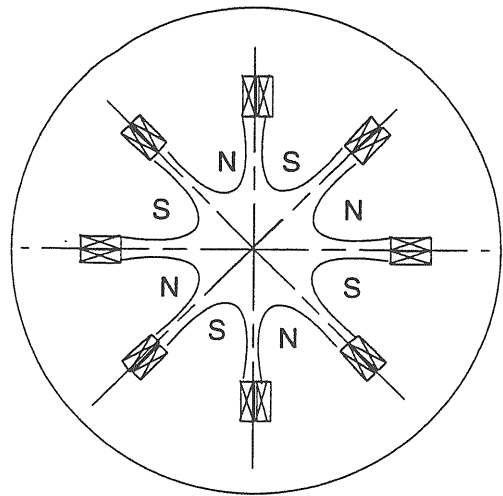


図6 8極電磁石の構造。右図は1極分だけを图示したもので、点線に沿って磁界の強さを積分する。

第5章 電磁石の磁場誤差の影響

電磁石の磁場誤差として加速器に持ち込まれた擾乱がどのようなプロセスでビームに影響を与えるか考察する。ビームへの影響を知ることによって加速器における電磁石の役割とビームの横方向不安定性 (transverse instability) にどのように関係するか知ることができる。また、誤差磁場がある場合の補正方法についても検討し、対策をたてる必要がある。

(1) 加速器の磁場誤差によるビームへの影響

円形加速器は粒子ビームの軌道を曲げる偏向電磁石 (bending magnet、dipole magnet) とビーム収束のための4極電磁石 (focusing magnet、quadrupole magnetまたはquad) を具えている。これら2種類の電磁石は加速器に必須の電磁石で、主電磁石とも呼ばれる。

偏向電磁石はビームが円形リングを一周して軌道が閉じるように全体で360度の偏向角を与える。全体でN台の偏向電磁石があれば、1台当たりの偏向角は $360/N$ 度である。これは陽子シンクロトロンのようにN台が平等な偏向作用を持つ場合であるが、電子・陽電子衝突リングでは衝突点に置かれた検出器にシンクロトン放射光のバックグラウンドを与えないために、衝突点に最も近く置かれる偏向電磁石の磁場を特別低くする。このような偏向電磁石は弱偏向電磁石 (weak bend) と呼ばれ、衝突点の前後に各1台ずつ置かれる。これ以外の偏向電磁石はnormal bendと呼ばれる。衝突点をmカ所としweak bendの偏向角を θ_w 、normal bendの偏向角を θ_n とすれば、 $2m\theta_w + (N-2m)\theta_n = 360$ 度である。

4極電磁石は偏向電磁石で確立された中心軌道からビームが外れないように収束作用を及ぼす。4極電磁石のギャップ (ポア) には水平対称面と垂直対称面があり、ビームは水平面内の収束と垂直面内の収束を受ける。しかし、4極電磁石の磁場パターンから1台の4極電磁石ではどちらかの面で収束作用を持たば、他の面では発散作用を及ぼす。水平面で収束作用 (垂直面で発散作用) をもつ4極電磁石をF-4極電磁石 (FQ, focusing quad)、水平面で発散作用 (垂直面で収束作用) をもつものをD-4極電磁石 (DQ, defocusing quad) と言い、両者を交互に並べることにより両方の面で収束作用をもつ。

シンクロトロンでは多数の偏向電磁石、FおよびD-4極電磁石から構成され、リングを構成する基本単位はFODOセルと呼ばれる。ここでFとDは4極電

磁石で、Oは収束作用をもたない偏向電磁石とドリフト空間 (drift space) を表す。粒子は図1に示すように平衡軌道の周りをベータトロン振動 (betatron oscillation) をしながら運動する。

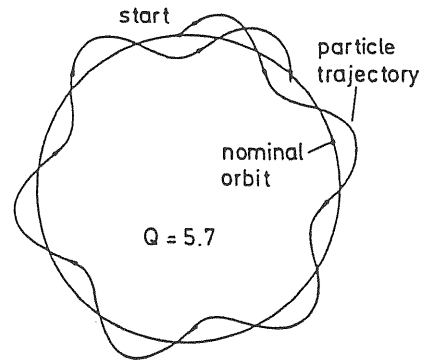


図1 シンクロトロン平衡軌道とベータトロン振動

粒子がリングを一周する間の振動数はベータトロン振動数と呼ばれ、 Q または ν の記号で示される。水平方向は添字 x を、垂直方向は添字 y を付けて区別する (Q_x, Q_y または ν_x, ν_y)。 Q が整数の場合、すなわちベータトロン振動が一周で閉じる場合には、粒子の運動の同じ位相で偏向電磁石の磁場誤差による偏向 (deflectionまたはkick) をコヒーレントに受けるため、ベータトロン振動の振幅が急速に増加し真空チェンバーに衝突してビームが失われる。同じようにベータトロン振動数が半整数の場合には、リング2周毎に軌道が閉じるため、例えば1周目にある4極電磁石の磁場勾配の誤差により半径方向の+側で+方向にキックを受けた粒子は2周目に同じ4極電磁石の一侧を通り一方向にキックされる。すなわち、1周目と2周目で運動の位相が180度異なるところで、どちらもベータトロン振動の振幅が大きくなる方向にキックされる。整数および半整数のベータトロン振動数は、磁場および磁場勾配の誤差が小さくても、どちらも共鳴的に運動の振幅が増加するためビームはリングを数ターンする間に失われてしまう。

加速器に入射されるビームにはエネルギー (運動量) に拡がり (energy spreadまたはmomentum spread) があり、公称運動量 p_0 より大きな運動量をもつ粒子に対して4極電磁石の収束作用は弱く、逆に小さな運動量をもつ粒子に対して収束作用は強い。このため運動量の大きな粒子のベータトロン振動数は公称振動数より小さく、運動量の小さな粒子のベータトロン振動数は公称振動数より大きい。このような

運動量によるベータトロン振動数の変化をクロマチシティ (chromaticity) と呼び、記号 ξ で示す。

$$dv = \xi \frac{dp}{p_0} \quad (1)$$

4 極電磁石から発生するクロマチシティは自然クロマチシティ (natural chromaticity) と呼ばれる。蓄積型衝突リングではルミノシティ (luminosity) を上げるため衝突点でビームを絞る 4 極電磁石が強く、これからの寄与が大きいため、クロマチシティは非常に大きい。TRISTAN の自然クロマチシティは -40 程度であり、電子の運動量の拡がり $\Delta p/p = \pm 10^{-3}$ 程度であるため、自然クロマチシティによるベータトロン振動数の拡がり (tune spread) は ± 0.04 になる。この値は加速器にとってかなり大きな値で、クロマチシティ補正のために 6 極電磁石が使用される。しかし、このような 6 極磁場の存在により $1/3$ 整数のベータトロン振動数も同じような理由により禁止される。

分散関数がゼロでないところでは運動量の違いにより粒子の軌道も異なる。大きな運動量の粒子は大きな軌道半径をもち、中心軌道から

$$x(s) = \eta(s)(p - p_0) / p_0 \quad (2)$$

だけずれた軌道を運動する。ここで $\eta(s)$ は分散関数 (dispersion function) と呼ばれる。

上の述べた 2 極、4 極、6 極電磁石はいずれもノーマル成分を発生する電磁石であるが、製作あるいはアライメントによる 4 極電磁石の軸周りの回転によりスキュー 4 極磁場が現れる。これにより水平および垂直ベータトロン振動が結合 (coupling) し、

$$mv_x + nv_y = \text{integer} \quad (m, n \text{ は整数}) \quad (3)$$

なる条件が成立するベータトロン振動数で共鳴が起こる。スキュー 4 極磁場は衝突リングの検出器に使用されるソレノイド磁場や、超伝導 2 極電磁石の上下コイルの非対称性からも現れる。

実際に加速器のベータトロン振動数は図 2 のチューンダイアグラム (tune diagram) でビーム損失につながる共鳴線 avoiding を避けて選ばれる。共鳴線には対応する多極磁場成分の大きさに応じて幅があるため、加速器の運転に許されるチューンの安定領域は狭い。これが磁場誤差を小さくしなければならない理由である。このように選ばれたベータトロン振動数では、

磁場誤差によるキックはコヒーレントでなくなるため、ビームは安定である。

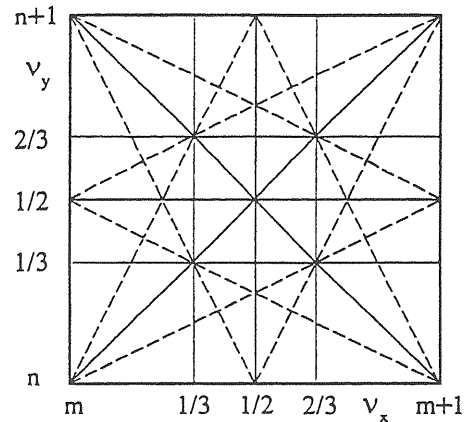


図 2 チューンダイアグラムでビーム損失につながる共鳴線

(2) 偏向磁場の擾乱

偏向磁場の誤差によりビームが理想軌道から外れる。この誤差によりリングの位置 s_k で角度 θ のキックを受ける。

$$\theta = (\Delta B \cdot \ell) / (B\rho) \quad [\text{rad}] \quad (4)$$

ここで $B\rho$ は磁気剛性、 $\Delta B \cdot \ell$ は磁場誤差とその長さの積である。

キックを受けたビームを s_m の位置で観測するとき、 s_k と s_m の間のトランスファーマトリックス (transfer matrix) を $M(s_m | s_k)$ とすれば、 s_m で観測されるビーム中心の変位は

$$\Delta u = M_{12}\theta \quad (5)$$

である。ここで M_{12} はトランスファーマトリックスの (1,2) 要素である。リングに並ぶ多くの偏向電磁石からそれぞれの誤差によるキックを受ければ、観測点における軌道の変位はそれぞれのキックによる影響の和として得られる。すなわち、

$$\Delta u = \sum_k M_{12}(s_m | s_k)\theta_k \quad (6)$$

s_k の位置にある偏向電磁石の磁場誤差によるキックを θ_k とすれば、 $M_{12}(s_m | s_k)$ は軌道理論から

$$M_{12}(s_m | s_k) = \sqrt{\beta_m \beta_k} \sin(\psi_m - \psi_k) \quad (7)$$

で与えられる。ここで β_m 、 β_k は観測点と誤差磁場（擾乱）のある位置のベータトロン関数、 ψ_m 、 ψ_k はそれぞれの位置でビームがもつ位相である。一般に擾乱の大きさや位置は分からないので、統計的にビームの変位を推定する。キック角の標準偏差を

$$\langle \theta_k^2 \rangle = \sigma_\theta^2 \quad (8)$$

とすれば、観測点における軌道歪みの標準偏差を $\langle \Delta u^2 \rangle = \sigma_u^2$ として、期待値は

$$\sigma_u = \sqrt{\beta_m \langle \beta \rangle} \sqrt{N_\theta} \sigma_\theta \quad (9)$$

で与えられる。ここで粒子の位相はランダムとして、 $\langle \beta \rangle$ と N_θ は磁場誤差のある位置のベータトロン関数の平均値と偏向電磁石の台数である。

シンクロトロンでは粒子はある平衡軌道の周りにベータトロン振動し、粒子がリングを一周する間に偏向磁場の誤差によりキックを受ける。位置 s におけるキックによる粒子のベータトロン振動は

$$x(s) = \sqrt{\beta(s)} \beta_\theta \theta \sin[\psi(s) - \psi_\theta] \quad (10)$$

で与えられる。このような振動は粒子が1ターンする間の全てのキックから引き起こされるので、これらのキックの影響は重畳され、

$$x(s) = \sum_i \sqrt{\beta(s)} \beta_i \theta_i \sin[\psi(s) - \psi_i] \quad (11)$$

ここで ψ はビームの位相でリングを1ターンする間に $2\pi Q$ だけ位相が進む。ベータトロン振動数を Q とすれば、

$$\varphi(s) = \frac{\psi(s)}{Q} = \int_0^s \frac{ds}{Q\beta(s)} \quad (12)$$

しかし、粒子はリングを何ターンも回る間に同じようなキックを各回転ごとに受けるので、1ターンだけではなく、多数回のターンの間の平均として軌道への影響を考えなければならない。電子や陽電子はシンクロトロン放射により、粒子の受けた影響は時間とともにある時定数 τ で減衰するので、時間経過による減衰を考慮する。粒子の回転周期を T_0 とすれば、 k ターン前の影響は $e^{-kT_0/\tau}$ に減衰するので、 k ターン前のベータトロン振動への影響は

$$\Delta x_k = \sum_i \sqrt{\beta(s)} \beta_i \theta_i \sin Q[2\pi k + \varphi(s) - \varphi_i] e^{-kT_0/\tau} \quad (13)$$

である。すべてのターンからの寄与を考慮すれば、

$$x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_0/\tau} \sum_i \sqrt{\beta(s)} \beta_i \theta_i \cdot \sin Q[2\pi k + \varphi(s) - \varphi_i] \quad (14)$$

この式を書き換えて、

$$x(s) = C_\theta \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_0/\tau} \sin[2\pi Qk] + S_\theta \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_0/\tau} \cos[2\pi Qk] \quad (15)$$

ここで、

$$C_\theta = \sum_i \sqrt{\beta(s)} \beta_i \theta_i \cos Q[\varphi(s) - \varphi_i] \quad (16)$$

$$S_\theta = \sum_i \sqrt{\beta(s)} \beta_i \theta_i \sin Q[\varphi(s) - \varphi_i] \quad (17)$$

である。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_0/\tau} \sin[2\pi Qk] &= \\ &= \frac{e^{-T_0/\tau} \sin[2\pi Q]}{1 - 2e^{-T_0/\tau} \cos[2\pi Q] + (e^{-T_0/\tau})^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT_0/\tau} \cos[2\pi Qk] &= \\ &= \frac{1 - e^{-T_0/\tau} \cos[2\pi Q]}{1 - 2e^{-T_0/\tau} \cos[2\pi Q] + (e^{-T_0/\tau})^2} \end{aligned} \quad (19)$$

の関係から

$$x(s) = \frac{e^{-T_0/\tau} C_\theta \sin[2\pi Q] + S_\theta (1 - e^{-T_0/\tau} \cos[2\pi Q])}{1 - 2e^{-T_0/\tau} \cos[2\pi Q] + (e^{-T_0/\tau})^2} \quad (20)$$

が得られる。一般に $T_0 \ll \tau$ であるので、

$$x(s) = \frac{C_\theta \cos[\pi Q] + S_\theta \sin[\pi Q]}{2 \sin[\pi Q]} \quad (21)$$

したがって、

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin[\pi Q]} \sum_i \sqrt{\beta_i} \theta_i \cos Q[\pi - \varphi(s) + \varphi_i] \quad (22)$$

この式がベータトロン振動の減衰を考慮した、偏

向磁場の誤差による平衡状態の軌道歪み（平衡軌道、参照軌道、閉軌道と呼ばれる）である。シンクロトロン放射を伴わない陽子のような荷電粒子に対しても、非同次微分方程式（運動方程式）の周期解として同じ式が得られるが、減衰がないためこの軌道の周りで単にベータトロン振動をするだけである。陽子でもエネルギーが非常に高くなればシンクロトロン放射を伴うので、平衡軌道に達する。(22)はビーム経路 σ の関数として分布する擾乱 $p(\sigma)$ に対して次のように書き直すことができる。

$$x(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi Q} \int_s^{s+C} \sqrt{\beta(\sigma)} p(\sigma) \cos Q[\pi - \varphi(s) + \varphi(\sigma)] d\sigma \quad (23)$$

ただし、磁場の擾乱 $p(\sigma)$ によるキックはビーム経路による積分で与えられる。

$$\theta_i = \int p(\sigma) d\sigma \quad (24)$$

磁場誤差やアライメント誤差により偏向磁場が発生する。この擾乱を表1に示す。

一般には擾乱の大きさや場所は分からないので、ビームの位置を直接ビームモニターで観測して、ステアリング電磁石による軌道補正を行う。加速器の設計段階では磁場やアライメントの統計誤差を考慮して、平衡軌道を推定する。すべての電磁石が許容誤差範囲内であれば、推定される平衡軌道の中心軌道からのズレをアパーチャに見込むことができる。

表1 擾乱磁場によるキック

擾乱の種類	キックの原因	RMS値	キック量(θ_i)	キックの方向
4極電磁石	位置誤差	$\langle \Delta y \rangle$	$K_i \ell_i \langle \Delta y \rangle$	水平、垂直
偏向電磁石	傾き	$\langle \Delta \theta \rangle$	$\vartheta_i \langle \Delta \theta \rangle$	垂直
偏向電磁石	磁場誤差	$\langle \frac{\Delta B}{B} \rangle$	$\vartheta_i \langle \frac{\Delta B}{B} \rangle$	水平
直線部	浮遊磁場	$\langle \Delta B_s \rangle$	$\ell_i \langle \frac{\Delta B_s}{B\rho} \rangle$	水平、垂直
機能結合型電磁石	変位と磁場誤差	$\langle \Delta y \rangle$ と $\langle \frac{\Delta B}{B} \rangle$	$K_i \ell_i [\langle \Delta y^2 \rangle + (\frac{\rho}{n})^2 \langle (\frac{\Delta B}{B})^2 \rangle]^{1/2}$	水平、垂直

ここで $\vartheta_i = B_i \ell_i / B\rho$ 、 $\ell_i =$ 実効長、 $K_i = g_i / B\rho$ である。

軌道歪みの期待値は(23)からRMS値を求めることによって知ることができる。

$$x^2(s) = \frac{\beta(s)}{4 \sin^2 \pi Q} \int_s^{s+C} \int_s^{s+C} \sqrt{\beta(\sigma)\beta(\tau)} p(\sigma)p(\tau) \cdot \cos Q[\pi - \varphi(s) + \varphi(\sigma)] \cos Q[\pi - \varphi(s) + \varphi(\tau)] d\sigma d\tau \quad (25)$$

から、擾乱はランダムで場所による相関がないとすれば、 $\sigma = \tau$ 以外の項は積分に寄与しない。擾乱要素の長さを ℓ_i として、積分を和の形に置き換えれば、

$$\langle x^2(s) \rangle = \frac{\beta(s)}{8 \sin^2 \pi Q} \sum_i \langle p^2(\sigma_i) \beta(\sigma_i) \ell_i^2 \rangle \quad (26)$$

ただし、 $\theta_i = p(\sigma_i) \ell_i$ である。 $\bar{\beta} = (1/C) \int_C \beta(\sigma) d\sigma$ として、この式をもっと簡略化すれば、

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2} \sin \pi Q} \sqrt{\bar{\beta}} \sqrt{\sum_i \langle \beta(\sigma_i) \theta_i^2 \rangle} \quad (27)$$

キック量 θ_i はそれぞれの擾乱に対して表1に示す。この式から得られる軌道歪みは68%確度の期待値である。軌道歪みの最大値 $\langle \hat{x}^2(s) \rangle$ は期待値より大きく、

$$\langle \hat{x}^2(s) \rangle = 2 \langle x^2(s) \rangle \quad (28)$$

である。この2倍の余裕をもたせるのが通例である。一般的な基準として、多くの場合補正前の軌道歪みは5~10 mmであるので、この程度の余裕が電磁石のアパーチャに見込まれる。

ビーム方向に特定の周期をもつ磁場誤差パターンが最も軌道歪みに影響する。この誤差パターンを調べるためにベータトロン振動の方程式を調べる。磁場誤差 ΔB があるとき x, y 方向の粒子の運動方程式は一般的に

$$u' + K_{x,y}(s)u = \Delta B / B\rho \quad (29)$$

で表される。ここで、

$$K_x = \rho^{-2} - k, \quad K_y = k \quad (30)$$

ただし、 $k = g / B\rho$ で g は磁場勾配である。(29)をFloquet変換 $\eta = x / \sqrt{\beta(s)}$ 、 $\psi = \int ds / Q\beta(s)$ すれば、次の方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \eta}{d\psi^2} + Q^2 \eta = Q^2 \beta^{3/2} F(\psi) \quad (31)$$

ここで $F(\psi) = \Delta B(\psi) / B\rho$ である。非同次項をFourier展開して

$$\beta^{3/2} F(\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{ik\psi} \quad (32)$$

とする。ただし、

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta^{3/2}(\psi) F(\psi) e^{-ik\psi} d\psi \quad (33)$$

$$0 \leq \psi = \int \frac{ds}{Q\beta} \leq 2\pi \quad (34)$$

である。そうすれば、

$$\frac{d^2\eta}{d\psi^2} + Q^2\eta = \sum_{k=1}^{\infty} Q^2 f_k e^{ik\psi} \quad (35)$$

この微分方程式の解は

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q^2}{Q^2 - k^2} f_k e^{ik\psi} \quad (36)$$

である。これよりチューンに最も近いFourier成分が軌道歪みに大きく寄与することが分かる。

(3) 4極電磁石の磁場勾配の擾乱

4極磁場は円形加速器のベータatron関数やベータatron振動数(チューン)に影響するため、磁場勾配の誤差はこれらの軌道パラメータを変化させる。

[3-1] チューンシフト (tune shift)

ビーム損失を防ぐため、磁場勾配の誤差によるチューンの変化は安定値から大きくズレてはならない。簡単のため、対称点を起点とするリング一周のトランスファーマトリックス (single turn transfer matrix) を考え、対称点の両側に薄いレンズ (thin lens) の擾乱を持ち込む。4極磁場は軌道に対して線形的であるため、このようなマトリックス演算ができる。

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \beta \sin \psi \\ -\sin \psi / \beta & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi - \beta \sin \psi / f & \beta \sin \psi \\ -2 \cos \psi / f + \beta \sin \psi / f^2 - \sin \psi / \beta & \cos \psi - \beta \sin \psi / f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2} \int p(\sigma) d\sigma \quad (38)$$

である。Mのトレースは

$$\text{Tr}M = 2 \cos \psi - \frac{2\beta \sin \psi}{f} \quad (39)$$

擾乱がなければ $\psi = 2\pi Q$ である。擾乱を受けた軌道の位相の進みを ψ' とすれば、チューンは ΔQ だけ変化し $\psi' = 2\pi(Q + \Delta Q)$ である。

$$\cos \psi' = \cos \psi - \frac{\beta \sin \psi}{f} \quad (40)$$

$\Delta Q \ll 1$ として、

$$\Delta Q = \frac{\beta}{2\pi f} = \frac{\beta}{4\pi} \int p(\sigma) d\sigma \quad (41)$$

すなわち、磁場勾配の誤差によりチューンシフトが発生する。このチューンシフトは1カ所の4極電磁石に誤差がある場合であるが、リング全体に一般化すれば、

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \oint_C \beta(\sigma) p(\sigma) d\sigma \quad (42)$$

この式を簡略化して、

$$\Delta Q = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\sum_i (\beta_i p_i l_i)^2} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\sum_i (\beta_i K_i l_i)^2} < \frac{\Delta K}{K} > \quad (43)$$

ここで $< \Delta K / K > (= < \Delta g / g >)$ は磁場勾配の相対誤差、 $p_i = \Delta K_i = \Delta g_i / B\rho$ 、 $K_i = g_i / B\rho$ である。

[3-2] ベータatron関数への影響

ここでも薄いレンズによる近似を利用する。リングにおいて σ の位置に $d\sigma$ の長さの磁場勾配誤差 $p(\sigma)$ があり、 s の位置で観測するものとする。 s から σ までの擾乱のないマトリックスを A 、 σ から s までの擾乱のないマトリックスを B とする。一周のトランスファーマトリックスは

$$M(s+C|s) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pd\sigma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (44)$$

このマトリックスの(1,2)成分を求めると、

$$\begin{aligned} M_{12} &= b_{11}a_{12} + b_{12}(kd\sigma a_{12} + a_{22}) \\ &= m_{12} + pd\sigma a_{12} b_{12} \end{aligned} \quad (45)$$

ここで m_{12} は擾乱のないときの(1,2)成分である。擾乱によるこのマトリックス要素の変化は

$$\Delta m_{12} = pd\sigma a_{12} b_{12} \quad (46)$$

である。薄いレンズ（擾乱）による位相の進み（phase advance）はないことを考慮して、一般化トランスファーマトリックス

$$a_{12} = \sqrt{\beta_s \beta_\sigma} \sin(\mu_\sigma - \mu_s) \quad (47)$$

$$b_{12} = \sqrt{\beta_s \beta_\sigma} \sin(2\pi Q_0 - \mu_\sigma + \mu_s) \quad (48)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \Delta(\beta_s \sin 2\pi Q_0) &= \\ &= pd\sigma \beta_s \beta_\sigma \sin(\mu_\sigma - \mu_s) \sin(2\pi Q_0 - \mu_\sigma + \mu_s) \end{aligned} \quad (49)$$

この式から

$$\begin{aligned} \Delta\beta_s \sin 2\pi Q_0 + 2\pi\beta_s \Delta Q \cos 2\pi Q_0 &= \\ &= \frac{1}{2} pd\sigma \beta_s \beta_\sigma [\cos 2\pi Q_0 - \cos 2(\mu_\sigma - \mu_s - \pi Q_0)] \end{aligned} \quad (50)$$

前節のチューンシフト ΔQ を考慮して、リング一周にわたって磁場勾配の擾乱があるものと仮定すれば、リングの任意の場所におけるベータatron関数の変化が求められる。ただし、位相の進みは

$$\mu(s) = \int_0^s \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)} \quad (51)$$

である。(50)から

$$\begin{aligned} \Delta\beta(s) &= \\ &= -\frac{\beta(s)}{2\sin 2\pi Q_0} \int_s^{s+C} p\beta_\sigma d\sigma \cos 2(\mu_\sigma - \mu_s - \pi Q_0) \end{aligned} \quad (52)$$

これがリングに分布する磁場勾配の誤差によるベータatron関数の変化である。ベータatron振動の振幅は $\sqrt{\beta(s)}$ に比例するので、ビームの安定性に影響

する。

[3-3] クロマティシテイ (chromaticity)

粒子のエネルギーの違いによるチューンの変化はクロマティシテイと呼ばれ、4極電磁石の焦点距離が粒子のエネルギーによって異なるため起こる現象である。光学の分野では光の波長によってレンズ系の焦点距離が異なるため、白色光が色付いて見える現象に相当し、色収差 (chromatic aberration) と呼ばれる。光学機械では屈折率の異なるレンズを組み合わせた色消レンズ（2色の色収差を補正したアクロマートレンズ、3色の色収差を補正したアポクロマートレンズ）によって部分的に補正される。

加速器ではエネルギーの大きな粒子に対して焦点距離は長く、エネルギーの小さな粒子に対しては逆に短い。エネルギーによって軌道の分離ができれば、クロマティシテイを補正することができる。幸い、シンクロトロンには分散函数と呼ばれる軌道パラメータによって半径方向にエネルギーに比例して軌道が分れる。分散函数の大きな場所に補正要素として、エネルギーの大きな粒子に対して収束を与え、エネルギーの小さな粒子に対して発散を与える6極電磁石を置けばよい。

エネルギーによるチューンの変化は

$$\xi = \frac{\Delta Q}{\Delta p / p_0} \quad (53)$$

で定義される。

粒子の理想的な運動量を p_0 として、 Δp だけ運動量の異なる粒子を考え、 $\delta = \Delta p / p_0$ とする。クロマティシテイは4極磁場および高次の多極磁場から発生するので、6極成分まで考慮した運動方程式は、

$$x'' + kx = kx\delta - \frac{1}{2}m(x^2 - y^2) \quad (54)$$

$$y'' - ky = -ky\delta + mxy \quad (55)$$

ただし、 $m = b_3 / B\rho$ である。運動量 $p_0 + \Delta p$ の粒子の軌道は分散函数 η_x を考慮して、

$$x = x_\beta + \eta_x \delta, \quad y = y_\beta \quad (56)$$

ただし垂直方向の分散は $\eta_y = 0$ である。これを(54)(55)に代入して、

$$x_\beta'' + kx_\beta = (k - m\eta_x)x_\beta\delta + O(x_\beta^2, y_\beta^2) \quad (57)$$

$$y_\beta'' - ky_\beta = -(k - m\eta_x)y_\beta\delta + O(x_\beta y_\beta) \quad (58)$$

ここで x_β 、 y_β の 2 次以上の項は無視して、擾乱によるチューンシフトは

$$\Delta Q_x = -\frac{\delta}{4\pi} \oint \beta_x (k - m\eta_x) ds \quad (59)$$

$$\Delta Q_y = \frac{\delta}{4\pi} \oint \beta_y (k - m\eta_x) ds \quad (60)$$

である。チューンシフトのうち 4 極磁場に基づく自然クロマティシティは次式で与えられる。

$$\xi_{x0} = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x k ds \quad (61)$$

$$\xi_{y0} = \frac{1}{4\pi} \oint \beta_y k ds \quad (62)$$

運動量が大きくなればチューンは下がるので、自然クロマティシティは必ず負の値をもつ。

(57)(58)から 6 極磁場 b_3 が存在すればチューンが変化する。偏向電磁石の 3 次の磁場成分はクロマティシティに寄与する。逆に、 $\eta_x \neq 0$ の場所に 6 極補正電磁石を置けば、クロマティシティを完全に打ち消すことができる。水平と垂直の両方向で補正するためには、最低 2 ファミリーの補正が必要であるが、収差が大きな場合はもっと多くのファミリーに分ける。一般的な補正は

$$\xi_x = \xi_{x0} + \frac{1}{4\pi} \sum_i m_i \eta_{xi} \beta_{xi} \ell_i = 0 \quad (63)$$

$$\xi_y = \xi_{y0} + \frac{1}{4\pi} \sum_i m_i \eta_{xi} \beta_{yi} \ell_i = 0 \quad (64)$$

である。この式から分散函数とベータatron函数の大きい場所が有利であることが分かる。

(4) 磁場の補正要素

電磁石の磁場誤差には、鉄心の飽和による磁場の歪みのように設計上認められた理想値からの系統的偏差として現れる不完全性や、制御できないランダムな磁場誤差やアライメント誤差がある。これらの誤差を表 2 に分類する。

以下に、大型リングに関して、誤差によるビームへの影響を簡単に評価する方法を紹介する。

(A-1) 偏向電磁石のランダムな磁場誤差

閉軌道歪み (COD) の半径方向の rms 最大振幅 $\langle \hat{x} \rangle$ は(27)(28)より

表 2 磁場誤差とその影響

誤差の型	軌道への影響
(A) 偏向電磁石	
ランダム磁場誤差	水平方向COD
系統的磁場勾配誤差	チューンシフト
ランダム磁場勾配誤差	無視できる
系統的 6 極磁場成分	6 極電磁石で補正
(B) 4 極電磁石	
系統的磁場勾配誤差	チューンシフト
ランダム磁場勾配誤差	半整数共鳴の誘発
(C) 偏向電磁石のランダムなミスアライメント	
ビーム方向の変位	無視できる
半径方向の変位	無視できる
ビーム軸まわりの回転	CODの垂直方向の歪み
垂直、半径方向軸周りの回転	無視できる
(D) 4 極電磁石のランダムなミスアライメント	
ビーム方向変位	無視できる
垂直、半径方向変位	水平、垂直COD
ビーム軸まわり回転	垂直、水平振動の カップリング
垂直、半径方向軸周り回転	無視できる

$$\langle \hat{x} \rangle = \frac{\pi}{|\sin \pi Q_x|} \frac{R}{Q_x} \frac{1}{\sqrt{N_B}} \left\langle \frac{\Delta B}{B} \right\rangle \quad (65)$$

ここで N_B = 偏向電磁石の総数、 R = リング半径[m]、 Q_x = 水平チューン、 $\beta_x = R/Q_x$ である。

CODで問題になる別の振幅は水平チューンに最も近い整数値のハーモニックスの半径方向振幅である。これは、

$$x^{[Q_x]} = \frac{R^2 / \rho}{Q_x^2 - [Q_x]^2} \left(\frac{\Delta B}{B} \right)^{[Q_x]} \quad (66)$$

ここで、 ρ = 偏向電磁石の軌道半径、 $[Q_x] = Q_x$ に最も近い整数、 $(\Delta B/B)^{[Q_x]} = [Q_x]$ 次ハーモニックスである。一般に $[Q_x]$ 次のハーモニックスによる CODの方が rms 誤差より大きい。

(A-2) 偏向電磁石の系統的磁場勾配の誤差 偏向電磁石の鉄心の飽和による磁場勾配を

$$k = \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} = \frac{B'}{B} \neq 0 \quad (67)$$

とすれば、チューンシフトは

$$\Delta Q = \frac{R}{2Q} k \quad (68)$$

ΔQ ($= -0.25 \sim +0.25$) として許容できるチューンシフトを与えれば、 k の許容限界が得られる。

(A-3) 偏向電磁石のランダムな磁場勾配誤差

一般にこの種の誤差は半整数共鳴を引き起こす。偏向電磁石では鉄の飽和による小さな磁場勾配があるので、ランダムな誤差は2次のオーダーでその影響は無視できる。

(A-4) 偏向電磁石の6極磁場成分

偏向電磁石の6極磁場成分は鉄の飽和によって引き起こされ、直線部に置かれる6極電磁石で補正できる。補正6極の強さ B_6'' は近似的に

$$b_3 = \frac{N_s L_s}{2\pi\rho} B_6'' \quad (69)$$

ここで分散関数とベータatron関数は偏向電磁石の場所と直線部で同じと仮定した。 N_s と L_s は補正6極の台数と長さである。

(B-1) 4極電磁石の系統的磁場勾配の誤差

4極電磁石の鉄心が飽和すれば、磁場勾配が変化する。さらに、偏向電磁石と4極電磁石の間で鉄の飽和に差があれば、4極電磁石で系統的な $\Delta B'/B'$ が発生する。FODOラティスでは、thin lens 近似を用いてチューンシフトは

$$\Delta Q = 2 \frac{Q}{\mu} \frac{1 - \cos \mu}{\sin \mu} \left(\frac{\Delta B'}{B'} \right) \quad (70)$$

ここで、 μ = セル当たりのベータatron振動の位相の増加 (phase advance) である。

(B-2) 4極電磁石のランダム磁場勾配誤差

4極電磁石の磁場勾配のランダム誤差は半整数共鳴を引き起こす。共鳴バンドの全幅 W と共鳴中心における振幅 x の増加率は

$$W = \frac{2}{Q} C_Q \quad (71)$$

$$\frac{d \ln x}{dn} = \frac{\pi}{Q} C_Q \quad (72)$$

ここで d/dn はターン当たりの増加を表し、

$$C_Q = \frac{F_Q}{\sqrt{N_Q}} \frac{R^2 B'}{B\rho} < \frac{\Delta B'}{B'} > \quad (73)$$

F_Q = リング周長で4極電磁石の占める割合

N_Q = 4極電磁石の総数

(C-1) 偏向電磁石のビーム方向への変位

この種のミスアライメント誤差による軌道への影響は無視できる。

(C-2) 偏向電磁石の半径方向への変位

BM磁場は一様であるので、この種のミスアライメント誤差による軌道への影響は無視できる。

(C-3) 偏向電磁石のビーム軸まわりの回転

CODの垂直方向の変位の振幅 $\langle \hat{y} \rangle$ は次式で与えられる。

$$\langle \hat{y} \rangle = \frac{\pi}{|\sin \pi Q_y|} \frac{R}{Q_y} \frac{1}{\sqrt{N_B}} \langle \Delta \theta \rangle \quad (74)$$

ここで、 $\Delta \theta$ = 回転角である。

(C-4) 偏向電磁石の垂直、半径方向軸周りの回転

偏向電磁石磁場は一様であるので、垂直軸周りの回転誤差の粒子ビームへの影響は無視できる。また、半径方向の軸周りの回転では運動方向の磁場成分だけが現れるのでこの影響は無視できる。

(D-1) 4極電磁石のビーム方向の変位

この種の誤差による4極電磁石の収束への影響は無視できる。

(D-2) 4極電磁石の横 (transverse) 方向の変位

CODのrms横方向の振幅 $\langle \hat{x} \rangle$ と $\langle \hat{y} \rangle$ は

$$\langle \hat{x} \rangle = \frac{\pi}{Q_x |\sin \pi Q_x|} \frac{F_Q}{\sqrt{N_Q}} \frac{R^2 B'}{B\rho} \langle \Delta x \rangle \quad (75)$$

$$\langle \hat{y} \rangle = \frac{\pi}{Q_y |\sin \pi Q_y|} \frac{F_Q}{\sqrt{N_Q}} \frac{R^2 B'}{B\rho} \langle \Delta y \rangle \quad (76)$$

である。ここで $\langle \Delta x \rangle$ と $\langle \Delta y \rangle$ は x, y 方向のrmsミスアライメントである。

(D-3) 4極電磁石のビーム軸まわりの回転

この種の誤差は半径方向と垂直方向のベータトロ
ン振動のカップリング (coupling) 共鳴を励起する。
共鳴幅 W と振幅 A_x と A_y の増加率は

$$W = \frac{4A_x A_y}{Q_x A_x^2 \pm Q_y A_y^2} K_Q \quad (77)$$

$$\frac{dA_x}{dn} = \frac{\pi A_y}{Q_x} K_Q \quad (78)$$

$$\frac{dA_y}{dn} = \pm \frac{\pi A_x}{Q_y} K_Q \quad (79)$$

ここで、+と-の符号はそれぞれ和共鳴 (sum
resonance, $Q_x + Q_y = \text{整数}$) と差共鳴 (difference
resonance, $Q_x - Q_y = 0$) を表す。また、回転角を
 $\Delta\theta$ とすれば、

$$K_Q = \frac{2F_Q}{\sqrt{N_Q}} \left(\frac{R^2 B'}{B\rho} \right) \langle \Delta\theta \rangle \quad (80)$$

である。

(D-4) 4極電磁石の垂直、半径方向軸周りの回転

この種の誤差による粒子軌道への影響は一般に無
視できる。

(5) 補正電磁石 (correction magnet)

水平方向の閉軌道歪みの補正には垂直な磁場方向
をもつ水平ステアリング (steering) 電磁石または
偏向電磁石のヨークに補正コイルとして巻かれたバッ
クレグ巻線 (backleg winding) を使用する。これは
磁場の方向が垂直であるのでノーマル2極電磁石で
ある。

また、垂直方向の閉軌道歪みの補正には水平な磁
場方向をもつ垂直ステアリング電磁石を使用する。
磁場の方向からこの補正電磁石はスキュー2極電磁
石である。

これらのステアリング電磁石あるいはバックレグ
巻線の励磁パターンは入射磁場だけを補正する場合
とフラットトップまで補正する場合がある。

陽子シンクロトロンではビームの振動振幅はエネ
ルギーと共に減衰 (断熱減衰) するので、加速によっ
てアパーチャに余裕ができる。そのため振幅の最も
大きくなる入射磁場においてだけ補正される。

電子シンクロトロンではシンクロトロン放射のた

め、逆にエネルギーが高くなると振動の振幅が増加
する。特に、電子・陽電子衝突型のシンクロトロン
では、ビーム衝突点におけるルミノシティをできる
だけ大きくする必要から加速中も軌道補正を行い、
ビーム強度の損失を避けることが重要である。

補正電磁石による磁場補正量は、予想される磁場
誤差の程度とリング内に置かれる場所のベータトロ
ン関数の大きさに依存する。x, y方向それぞれにベ
ータトロンの大きい場所が異なり、水平ステアリン
グ電磁石は水平ベータトロンの大きなF-4極電
磁石の近くに、垂直ステアリング電磁石は垂直ベ
ータトロンの大きなD-4極電磁石の近くに置かれ
る。閉軌道の補正方法によっても強さに対する要求
が異なる。

磁場勾配の系統的な誤差の補正は、機能分離型の
シンクロトロンでは容易である。F-またはD-4極電
磁石の励磁の強さを調整することで可能である。ラン
ダムな磁場誤差については、個別に補正巻線を取
付ける方法による。4極電磁石の製作時の工程管理
や品質管理をしっかりと行えば、ランダム誤差は
0.001%以下で、補正巻線は殆ど不要である。補正
が必要であれば、フラットトップにおける補正を想
定して、ランダム誤差の2倍程度のアンペアターンの
補正量を見込むことになる。

機能結合型シンクロトロンでは、チューンは電磁
石の出来、不出来を反映するので、設計段階の十分
な検討が必要である。不幸にして安定点からチュー
ンが外れてしまった場合は、トリム用の小型補正4
極電磁石で調整しなければならない。

6極磁場の補正は補正用の6極電磁石による。最
大ビームエネルギーまでの補正が必要で、自然クロ
マティシティの他に、偏向電磁石に現れる6極磁場
成分も見込み、リング内の置かれる場所の分散関数
やベータトロンの大きさも考慮しなければならない。
水平、垂直の両方向に同時に補正するため、
(63)(64)の連立方程式を解いて、水平6極と垂直6
極の電磁石の強さを決めなければならない。

第6章 鉄の磁氣的性質

加速器に要求される電磁石の磁場性能には非常に厳しい精度が要求される。鉄は鉄心材料として優れた磁氣的性質を持っているが、加速器の電磁石としての性能を発揮させるためには、磁氣的性質は勿論、品質の一樣性も要求される。加速器が大型になれば、使用される鋼板の量も多くなり、数カ月から1年以上のわたって徐々に納入されるため、その期間の製鉄の状況により鉄の磁氣的性質が変化する可能性がある。このような状況を避けるため一度に購入しようとするれば、その保管場所に困る。長期にわたって品質を一定に保つ努力は加速器の電磁石にとって重要である。

(1) 鉄の磁氣的性質

物質中の磁界の強さ H と磁化の強さ I の関係は物質によって異なり、つぎの3種類に分類される。

- 1) 反磁性体：磁場と反対の方向に僅かに磁化される物質 (Cu, Pb, Au, 水など)
- 2) 常磁性体：磁場の方向に僅かに磁化される物質 (Mn, Al, Na, 空気など)
- 3) 強磁性体：磁場の方向に強く磁化される物質 (Fe, Ni, Coなど)

強磁性体にくらべ反磁性体と常磁性体は殆ど磁化されないの非磁性体とも呼ばれる。強磁性体は用途により軟磁性材料と硬磁性材料に区別される。軟磁性材料は磁化が大きく、ヒステリシス損の小さい材料、硬磁性材料は保磁力の大きな材料である。電磁石に使用される鉄は軟磁性材料 (soft magnetic material) に属する。

磁性材料の磁化曲線は実用的な理由から磁化 $M = M(H)$ の代りに図1に示すように磁束密度 $B = B(H)$ で示される。ここに電磁石の設計に使用される透磁率 μ は

$$\mu = B / H \quad (1)$$

で定義される。ただし、 B は磁束密度 [T]、 H は磁化力 (外部磁界の強さ) [A/m]である。透磁率は真空の透磁率 $\mu_0 (= 4\pi \times 10^{-7} [T \cdot m / A])$ を用いて、

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (2)$$

と表わされ、 μ_r は比透磁率と呼ばれる無次元量である。図2に透磁率による磁性体の分類を示す。

B (Tesla)

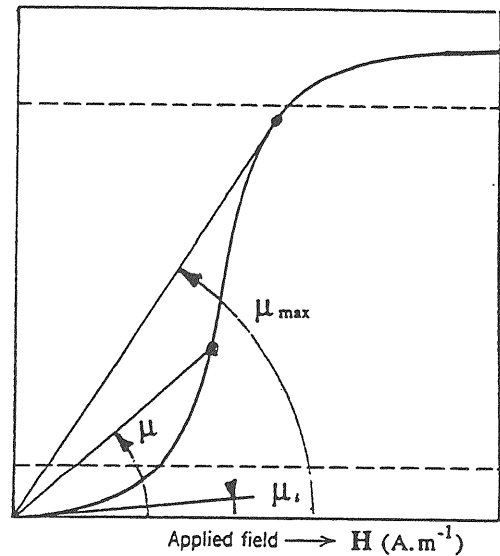


図1 初期磁化曲線と透磁率の定義

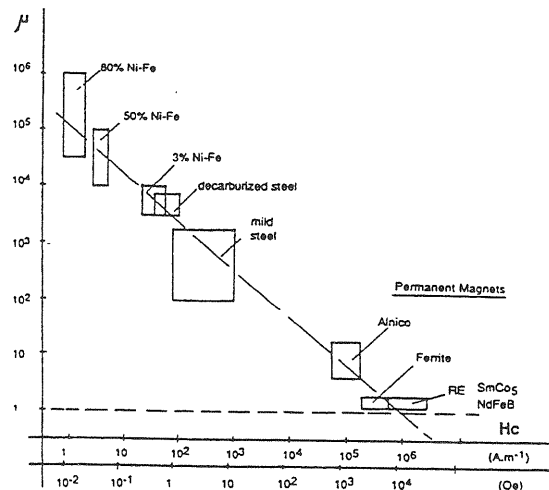


図2 磁性材料の透磁率による分類

強磁性体の磁氣的性質は図3に示す B - H 曲線 (磁化曲線、magnetization curve) で表される。この曲線は3つの部分に分けて考えることができる。図3は消磁状態から出発して、磁化力を+の方向に増加させた曲線である。この図の(1)の領域は磁束密度が有限の傾きで磁界 H とともに上昇する。すなわち、

$$B = \mu_i H + v H^2 \quad (3)$$

ここで $v = d\mu / dH$ は定数である。この領域は可逆的で H をゼロに戻せば、近似的に同じ曲線に戻る (厳

密には可逆的でないことに注意)。 $dB/dH = \mu_i$ を初期透磁率と呼ぶ。

図3の(2)の領域は比透磁率 dB/dH が大きくなる場所である。ここでは最早可逆的ではなく、 H を減少させれば全く異なる曲線をたどり、 $dB/dH \gg \mu_i$ である。比透磁率の最大値は 10^6 にもなるものがある。

(3)の領域では dB/dH は小さくなり、比透磁率は

$$\frac{1}{\mu} = a + bH \quad (4)$$

で近似される。ここで曲線は広い範囲で可逆的になり、 $dB/dH \approx const$ の関係がある。さらに磁場を増加させれば、遂に飽和に達する。

(3)の飽和状態から磁場を下げていけば、図4のように CD と減少し、 $H=0$ でも OD に相当する磁化が残る。これを残留磁化 (residual magnetization) と呼ぶ。磁場を負の方向に増やせば、 E 点で磁化はゼロになる。この OE の値を保磁力 (coercive force) と呼ぶ。磁場をさらに負の方向に増加させれば、 F 点で負の方向に飽和する。ここで、今度は正の方向に磁場を増やせば FGC の経路を通して正に飽和する。このように磁場を正 \rightarrow ゼロ \rightarrow 負 \rightarrow ゼロ \rightarrow 正と一巡させることによって描かれる曲線をヒステリシスループ (hysteresis loop) と呼ぶ。 OBC は初期磁化曲線と呼ばれ、消磁状態から出発した場合のみ得られる。(2)または(3)の領域に達したあと磁場を一順させればヒステリシスループが現れる。ヒステリシスループを一順する間になされる仕事は、ヒステリシスループの囲む面積に相当し、すべて熱エネルギーとして失われる (ヒステリシス損)。

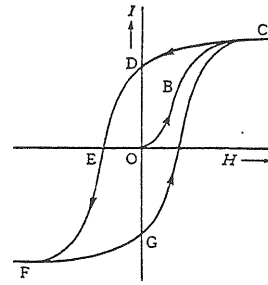


図4 ヒステリシス曲線

理論によれば強磁性体は多くの磁区 (domain) から構成され、それぞれ勝手な方向に飽和点まで磁化されている。磁化されていない状態では磁区の磁化方向がランダムで全体としての磁化はゼロである。磁界をかけることにより、磁化の大きさは変わらず、磁化の方向だけが変化する。この方向の変化における特徴から図3の3つの領域が区別される。

外部磁場がなければ磁区の磁化方向は結晶構造や結晶歪による影響を受ける。鉄の単結晶について、3つの主結晶軸に沿う方向の磁化を図5に示す。

歪みや外部磁場の影響を受けない鉄単結晶の磁区においては、磁化は結晶軸 $[100]$ の1つの方向を向いている。このような方向は6つあり、磁化容易軸 (easy axis) と呼ぶ。磁区の $1/6$ ずつが別々の方向を向いていれば、全体として磁化されていない状態である。外部磁場を与えることにより、

- 1) 磁区の磁化方向が変化する (回転磁化)、
- 2) 磁区の体積が変化する (磁壁移動)。

可逆、非可逆の区別はこの2つの過程で、磁区のもつポテンシャルエネルギーが熱として放出される割合に依存する。そうすれば、図1の3つの領域は、(1)可逆磁壁移動、(2)非可逆磁壁移動、(3)可逆回転磁化に相当する。第4の非可逆回転磁化は一般に非常に強い磁界を必要とする。通常の磁性体ではこのような磁界に達する前に非可逆磁壁移動が起こるので、非可逆磁化は殆どすべて磁壁移動で行われる。これらの磁化の様子は概念的に図6で表される。

非可逆磁化が起きる理由として、磁壁の位置によるエネルギーの変化があるため、外部磁界を取り去っても磁壁が移動した近傍にある極小点に磁壁がひかかり、元に戻らないことによる。磁壁を束縛する原因として、内部応力、非磁性夾雑物、格子欠陥などが考えられる。

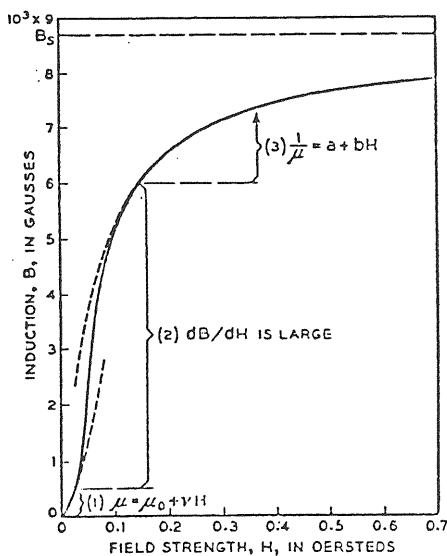


図3 強磁性体の磁化曲線における3つの領域

結晶構造、歪み、外部磁場のそれぞれによるポテンシャルエネルギーは

$$E_k = K(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2) \quad (5)$$

$$E_\sigma = \frac{3}{2} \lambda_s \sigma \sin^2 \theta \quad (6)$$

$$E_H = -H I_s \cos \phi \quad (7)$$

ここで E_k は結晶磁気異方性エネルギー、 K は結晶の異方性定数（鉄の場合、 $K = 4.2 \times 10^4 [J/m^3]$ ）、鉄のような立方晶系の結晶について、立方体の各稜に関する磁化の方向余弦を $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とする。

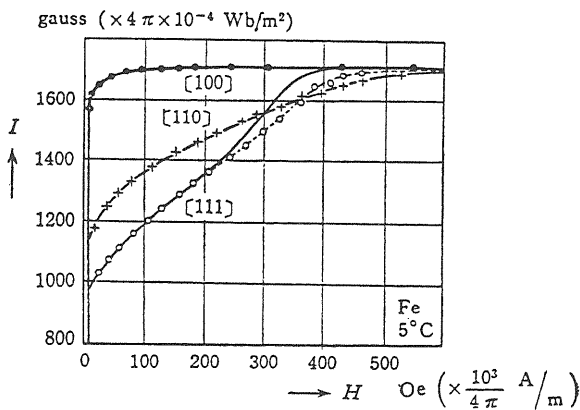
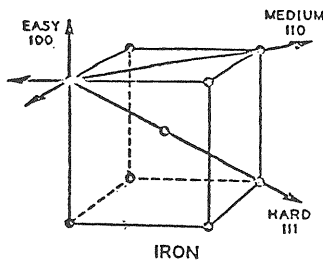


図5 鉄単結晶の結晶軸と各軸方向の磁化曲線

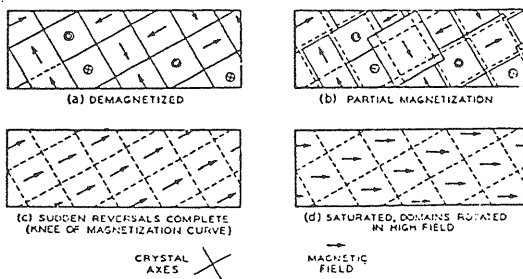


図6 磁化による磁区の変化、(a) 磁化されていない状態、(b) 可逆的磁壁移動、(c) 非可逆的磁壁移動、(d) 可逆的回転磁化(飽和状態)

磁性体を磁化したときに磁性体の外形が変化する。この現象は磁歪 (magnetostriction) と呼ばれ、その変化率は $\delta \ell / \ell \approx 10^{-5} \sim 10^{-6}$ 程度で僅かであるが、磁区構造に影響を与える。 λ_s は消磁状態から飽和磁化されるまでの磁歪による外形の変化率（磁歪定数、 $\lambda = \frac{2}{3} \frac{\delta \ell}{\ell}$ 、 $\lambda_{Fe} = 20.7 \times 10^{-6}$ ）である。 E_σ は磁歪エネルギー、 σ は磁区が受ける引張応力、 θ は磁化と張力との間の角度である。

強磁性体が磁区構造をもつ主な理由は結晶粒界に現れる磁極による静磁エネルギー（磁極間に作用するCoulomb力によるエネルギー）を下げるためである。 E_H は外部磁場 H による磁区の静磁エネルギー、 I_s は飽和磁化、 ϕ は磁化方向と外部磁場の間の角度である。

図7に示すようにエネルギーは磁化の方向によって変化し、最小になるところが安定点である。

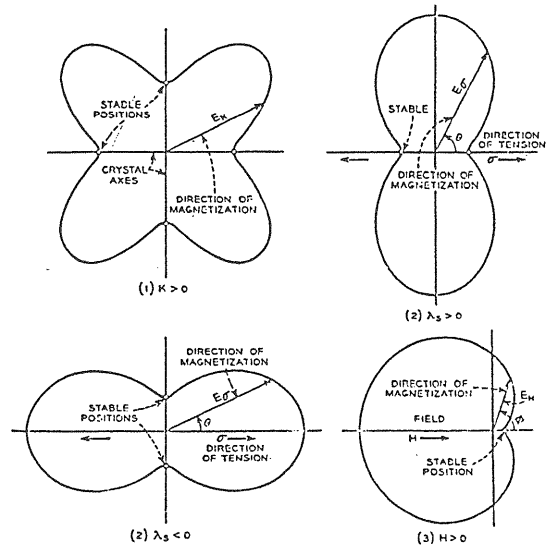


図7 エネルギー安定点（磁気異方性エネルギー、磁歪エネルギー、静磁エネルギー）

(2) 電磁石用スチール（鉄）の選択

加速器まわりの電磁石には、高磁場の直流電磁石、交流電磁石、パルス電磁石、超伝導電磁石があるが、電磁石の種類や用途によって構成材料に対する要求は異なる。加速器やビーム輸送に使用される同じ種類の電磁石では、加速サイクルを通して全ての磁場性能が同じ（ $10^{-3} \sim 10^{-4}$ ）であることが重要である。

鉄心用スチールの選択は直流または交流電磁石によって異なるため、別々に扱う必要がある。電磁石

に使用される軟鉄の磁氣的性質は化学的組成や製法（溶解、圧延、熱処理）によって異なる。電磁石の鉄心材料に要求される性質として、

- 1) 保持力が小さい（ヒステリシス損失が少ない）
- 2) 渦電流損失が少ない
- 3) 低磁場における透磁率が高い
- 4) 飽和磁束密度が高い
- 5) 経年変化 (ageing) が無い
- 6) 同じ種類の電磁石全体についてスチールの磁氣的性質が一様である
- 7) 機械加工性がよい

しかし、これらの性質のあるものはお互いに矛盾するものがあるため、最適な解を選択することになる。直流電磁石か交流電磁石、使用磁場範囲などに応じて優先させる性質に差が現れる。これらの磁氣的性質に影響を与える要因として、合金元素、不純物、機械的歪（応力）、磁気異方性、熱処理などが考えられる。

純鉄は優れた強磁性体であるが、微量の炭素と酸素が結合してCOを発生するため、高純度で気泡のないインゴットを作ることは困難である。その上、高価で、電気抵抗が低いため交流電磁石には採用されない。また、機械的に柔らかいため精度良く加工することが難しい。SiやAlなどを混ぜて合金にすることにより、電気抵抗が増加し、磁氣的性質の経年変化や加工性が改善される。

SiやAlは置換固溶体を形成し、結晶格子に歪みを与えない。このため磁氣的性質には悪い影響を与えない。その上、鉄の同素性の転移（相転移、phase transition、変態）を阻止するため、相転移を受けることなく高温における熱処理が可能である。

SiやAlは優れた脱酸素剤であり、還元前の鉄に添加すればそれらの酸化物が作られる。しかし、酸化物は磁氣的性質にとって有害である。Alの酸化物はSi酸化物以上に有害である。

SiやAlとの合金により飽和磁場は低下し、鉄が脆くなるので、ケイ素鋼板ではSiの上限は約3.2%である。交流電磁石の鉄心の最適値は1~2%Siの合金である。磁氣的性質の経年変化は減少するが、1.5%ケイ素鋼板では経年変化が観測されている。しかし、保磁力は約70 A/mに減少し、低磁場の透磁率は約750に増加する。ケイ素鋼板は一般的に、低磁場で高い透磁率をもつ鋼板は保持力が低く、高磁場における透磁率も低い。

電気品位のケイ素鋼板（1.5% Si）の透磁率は0.01Tで750、 $H_c \sim 72$ A/mである。低炭素鋼（~0.1% Si）では透磁率は250~500、 $H_c \sim 120-160$ A/m

である。極低温で使用する電磁石では9%程度までNiを添加した合金のスチールが使用される。これは4.2 Kまでの機械的性質が優れ、磁気飽和の低下が少ないことによる。

直流電磁石には合金元素はあまり使用されない。経年変化はそれほど重視されないので、0.1%のSiまたは0.01%のAlで十分である。Si含有量が0.05~0.2%の範囲で変化すれば、1~1.5 T領域のB-H曲線に影響が現れ、直列接続された電磁石の間で磁場特性が一様でなくなる。

パルス電磁石には、低炭素鋼板（あるいは脱炭鋼板）やケイ素鋼板が採用される。特に日本では、電気機械用に用途が広く磁気特性が保証されたケイ素鋼板が入手しやすく、一般的である。ヨーロッパで製造されたこれらの2種類の鋼板（ケイ素鋼板は0.5 mm厚のEuronorm 106-84規格のFev 330-50、低炭素鋼板は1.5 mm厚脱炭鋼板）についてEpstein試験器で比較測定された磁気特性を図8に示す。また、ケイ素鋼板の低磁場における透磁率と保磁力の関係を図9に示す。図9から保磁力を制御すれば透磁率の拡がりも制御できるので、電磁石の性能再現性がよくなる。この関係は0.9 Tまでよく成立つ。

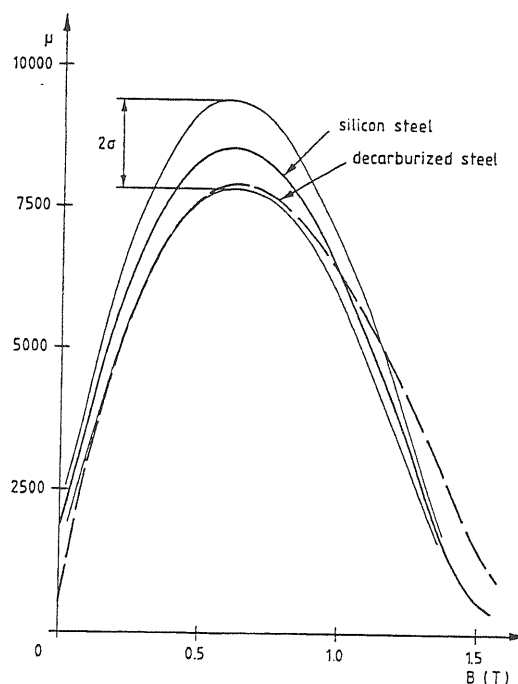


図8 ケイ素鋼板と脱炭鋼板の平均比透磁率

冷間圧延電磁石用スチール（Armco社、USA）は電磁石用に開発された鋼板（1.5 mm厚）である。焼鈍段階で炭素を0.006%まで除去できる雰囲気中で、鋼板コイルを巻き戻しながら焼鈍する。鋼板が

薄いため、この方法でよい結果が得られる。この材料はFNAL主リング、PEP蓄積リングなどに使用されている。

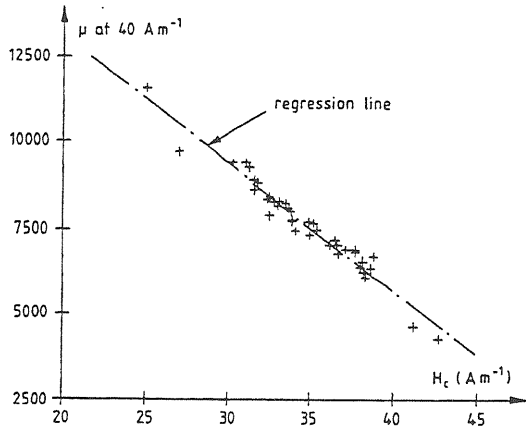


図9 ケイ素鋼板の低磁場における透磁率と保磁力の関係

(3) 不純物の影響

強磁性は結晶格子が完全であるかどうかによって影響される。固溶体の不純物は磁氣的性質に影響する。炭素、窒素、ボロンなどの非金属元素は格子間不純物として格子に歪を与える。これらの不純物はS, P, Mn, Cr, Cuなどの置換不純物よりも有害である。

水素は格子間不純物であるが、磁氣的性質への影響は系統的には調べられていない。CやNは最も有害な格子間不純物であるが、市販のステールの窒素含有量は約0.003%と低く問題にならない。しかし、炭素は有害であるが、除去が困難である。

Geroldの測定によれば、1%以下の不純物の添加によって磁束密度が濃度に比例して低下する。1%の各種不純物によるB-H曲線とΔB-H曲線を図10に示す。H=10⁴[A/m]における純鉄の磁束密度はB_{Fe}=1.9 Tであるが、各種不純物の含有により磁束密度が低下する。各種元素の1%含有による磁束密度の低下は図10から、表1で与えられる。

表1から不純物の含有量に合わせて、各成分からの寄与の和をΔBとすれば、予測される磁束密度は

$$B_{H=10^4 A/m} = B_{Fe} - \Delta B \quad (8)$$

である。この表はH ≥ 2.5 × 10³ [A/m]に対して成り立つが、低い磁束密度では低めのBを与える。

保磁力は不純物の量と分布状態に依存する。不純物の影響は不純物と結晶マトリックスとの間の境界で磁壁の移動が阻止されることによる。図11に示すように定量的に炭素と窒素は保磁力に大きな影響を与える。Cr, V, Moなどの合金元素は高温で窒素と化合させて安定な化合物を生成させれば、大型鉄心の磁氣的性質に対して窒素は無害になる。

表1 H=10⁴[A/m]における不純物1%含有による磁束密度の低下

元素 (各1%含有)	C	Si	Mn	Cr
磁束密度の低下(T)	0.3	0.032	0.075	0.033
元素 (各1%含有)	Mo	Cu	Al	N
磁束密度の低下(T)	0.075	0.016	0.068	0.7

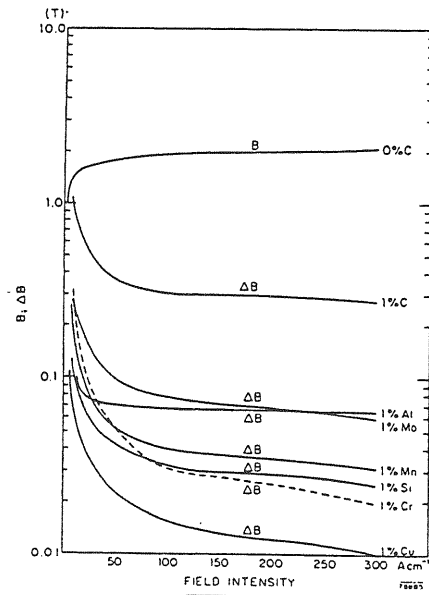


図10 純鉄のB-H曲線と不純物による磁束密度への影響

薄い鋼板では真空中または水素雰囲気中での焼鈍により脱炭、脱窒が容易にできる。この方法で窒素は0.001%に減らすことができる。

酸素、炭素、窒素などの非金属格子間元素は鉄中にある程度、固溶体として溶け込み、分散硬化を引起す。これらの元素は鉄の融点より低い高温で鉄中を拡散し、表面で水素と結合するため、薄板については水素雰囲気中の熱処理で除去可能である。これらの室温における含有量は溶解度以下にする必要が

ある。燐は水素の影響を受けないが、0.01%以下の含有量であれば磁氣的性質には影響を与えない。

酸素や窒素などの気体元素は温度が下がれば溶解度も低下するので、溶解度限界以上に存在する気体は鉄中に気泡を作り、鋼材の中に拡がって分布する。気泡の存在により鉄中の平均磁束密度は低下する。

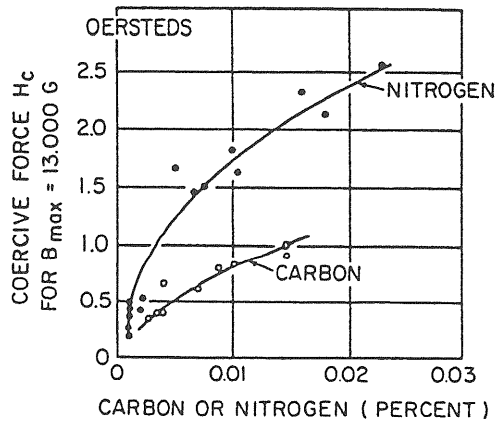


図11 3%ケイ素鋼板の保磁力に及ぼす炭素と窒素の影響

(4) 鍛造

以上に述べた欠点のため、直流電磁石の鉄心は鍛造鋼または圧延鋼から作られる。鍛造による効果は、

- 1) インゴット中に閉じ込められた気泡に接する金属面は還元雰囲気(COまたは水素)であるため、活性状態になっている。加熱と鍛造圧力の組み合わせにより、気泡を潰して金属面を溶着させる。
- 2) 鍛造により硬い金属間化合物を壊し、鉄中に再溶解させて均質化をはかる。

鍛造により結晶粒度は小さくなるが、最終段階における鍛造の温度条件と焼鈍により粒度の制御ができる。最終鍛造を低い温度で行い、比較的高い温度で焼鈍すれば、大きな結晶粒度が得られる。

鍛造の代りに、不純物を低減する清浄鋼精練法で作ったスラブを高形状圧延機で圧延する方法もある。この方法によりコスト高な鍛造工程を避け、鋼板中心部まで均質な厚板(厚さ600mm)の製造が可能である。この方法で作られた厚板について採取したサンプルの化学組成を表2に示す。

(5) 磁氣的性質の経年変化

低炭素鋼の磁氣的性質の経年変化は炭素含有量を下げるか、または室温まで徐冷することによって抑

表2 600mm厚板の化学組成分布(各部から採取したサンプル)

元素	C	Si	Mn	P	S	Cu	
wt. %	0.005 -0.010	0.074 -0.080	0.12 -0.13	0.007 -0.008	0.002 -0.003	0.015	
元素	Ni	Cr	Mo	Ti	V	Tr.N	Tr.Al
wt. %	0.034 -0.035	0.020 -0.021	0.015	0.001	0.001	0.0049 -0.0061	0.017 -0.024

えることができる。経年変化としては保磁力の増加と透磁率の低下である。これは炭素や窒素の格子間溶解元素の凝縮によるので、炭素と窒素の総含有量を減らすか、あるいは磁氣特性に効かない炭化物や窒化物に凝縮させて固溶体中の炭素、窒素の濃度を減らすことで経年変化を抑えることができる。同じ固溶体の濃度では、炭素より窒素の方が保磁力に大きく寄与する(図11)。窒素を0.005%から0.002%に減らすことで、保磁力は約15%減少する。ケイ素鋼板について150℃、100時間の加速試験を行った結果では、保磁力の変化は殆ど認められていない。

(6) 結晶粒度

多結晶体の結晶間のlattice registryはエネルギー損失の原因になり、望ましくない。磁氣的性質は単結晶でよく、結晶粒が大きくなればエネルギー損失は小さくなり、透磁率が上がる。粒度は炭素とSiの含有量と共に変化する。結晶粒度は保磁力に大きな影響を与える(図12、ケイ素鋼の保磁力は粒度とともに増加する)。大きな結晶粒でも不純物の影響は無視できない。冷間加工と焼鈍により純鉄の粒度は大きくできる。しかし、冷間加工が結晶粒の方向性に関係するので、結晶粒の向きを揃えることにより磁氣的性質の改良が可能である。

(7) 塑性歪

弾性歪および塑性歪は磁氣的性質に大きな影響を与える。鉄のように正の磁歪をもつ物質では、ある程度までの引張応力によりB-H曲線の間領域における透磁率が增加するが、限度を越えれば減少する(負の磁歪では透磁率は引張応力により減少する)。

塑性歪は軟磁性材料の全てに有害で、透磁率は減少し、保磁力は増加し、鉄損も増加する。

交流およびパルス電磁石には低炭素鋼板やケイ素鋼板(0.35-0.5mm厚)が使用され、鉄心積層時の

加圧により圧縮力を受ける。この圧縮応力により保磁力が増加し、鉄損が少し増える。方向性鋼板の圧縮応力を 1 kg/cm^2 から 11.5 kg/cm^2 に増やせば、 1.5 T における鉄損は8%増加する。方向性鋼板の圧縮応力を 1 kg/cm^2 から 10 kg/cm^2 に増やせば、保磁力は12%増加する。

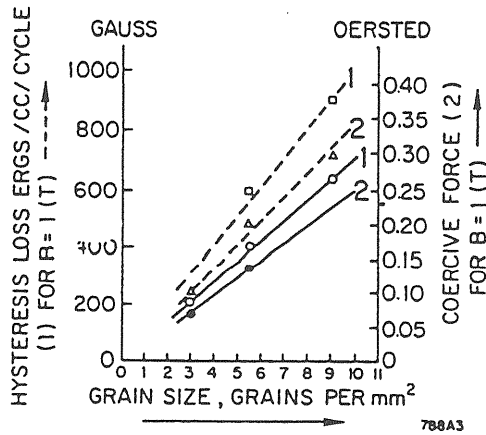


図12 ケイ素鋼板のヒステリシス損失と保磁力の結晶粒度依存性、1=3% Si (0.005% C), 2=5-6% Si (<0.01% C)

実際には、個々に絶縁された鋼板を積層治具上で積み重ね、 $\sim 20 \text{ kg/cm}^2$ の平均圧力をかける。この状態で鉄心をボルト、または外周の溶接で固める。溶接法では一様な圧縮応力が得られるが、溶接により鉄心が変形する。鉄心の変形を防ぐためにスルーボルトを追加することもあるが、この場合ボルト周辺部の応力は4～6倍大きくなる。鉄心の変形を嫌う電磁石では、エポキシ樹脂による接着法が採用され、構造的安定性を保つため鉄製のフレームで外周部を固定する。

(8) 方向性

結晶の磁気異方性のため、多結晶材料でも磁気的性質に方向性がある。適当な冷間加工と焼鈍の組合せにより方向性を持たせることができる。方向性ケイ素鋼板 (Goss鋼板) は変圧器や電磁石 (KEK-PS) に利用されている。保磁力と鉄損は圧延方向に最小で、直角方向に3～4倍大きい。圧延方向に比べ、垂直方向の透磁率は低磁場で約15%低い。非常に低い保磁力 (鉄損) が重要であれば、圧延方向を磁束の方向に選ばなければならない。偏向電磁石においても圧延方向にB-H特性がすぐれているので、磁極部の磁束の方向が圧延方向になるように選ばれる。4極電磁石では、磁極部で磁束は水平と垂直の両方

向に別れるので、方向性鋼板を使用する利点は垂直、水平方向のどちらかのアパーチャが他方に比べて大きい場合に現れる。図13はKEK-PSに使用された方向性ケイ素鋼板 (1 mm厚) の磁気特性である。この鋼板を1.8 Tまで励磁した後の圧延方向の保持力は圧延方向で15 A/m、直角方向で31 A/mである。

無方向性鋼板でも、圧延方向とこれに直角な方向で磁気特性に若干の相違があり、方向性を嫌う電磁石では打抜き方向を90度異にする2種類の鋼板を交互に積層して特性を平均化することが行われる。

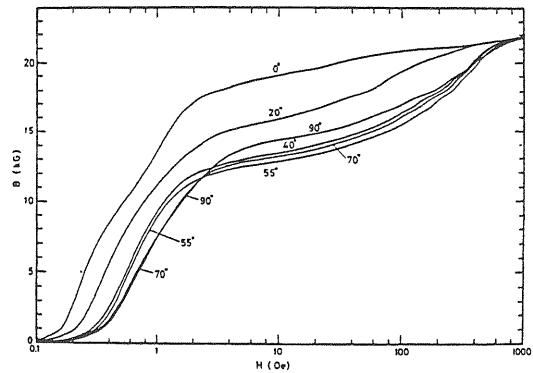


図13 方向性ケイ素鋼板の方向による磁気特性、0度が圧延方向 (KEK-PS用 3% Si)

(9) 鋼板の絶縁被膜

鋼板には絶縁が施されていて、絶縁物の組成は無機質、無機質ベース+有機質がある。放射線下で使用する場合は一般に無機質絶縁が選ばれる。積層の作業性の上では無機質ベース+有機質が優れているが、溶接性は無機質絶縁がよい。絶縁被膜のため若干占積率は下がるが、それでも0.5 mm鋼板で98.5%は確保できる。

以上のように、電磁石鉄心材料である軟磁性材料としての鉄の品質管理や取り扱いには細心の注意が必要である。パルス電磁石や交流電磁石の鋼板は購入した材料を電磁石製造現場において、鋼板ロールを巻戻しながらダイにより打抜き、そのまま積層するので、この過程で機械的歪を与えないようにしなければならない。一般に鋼板はロールされた状態で納入されるので、ロール巻枠の径を大きくして巻取歪を与えないようにする。積層で注意することは、JIS規格で許容される鋼板の厚み偏差 (0.03 mm以下) があるので、積層全長で積厚が偏らないように鋼板を裏返しなから調整する必要がある。

第7章 磁場の計算法（2次元）

磁場の数値計算の歴史は長く、SIBYL、LINDA、TRIMなどの2次元磁場計算コードは何年にも亘って改良が重ねられ、測定値との比較から実用に耐えるものとして加速器の電磁石の設計に長年使用されてきた。前2者はLaplace方程式あるいはPoisson方程式を有限差分方程式（FDE, Finite Difference Equation）で近似するもので、SIBYLが最も古く、LINDAはその改良版である。これらが正方形（または長方形）メッシュを採用したのに対し、TRIMは3角メッシュを採用した差分近似法である。後者の長所は3角形メッシュの1辺を領域境界に沿わせることによって境界部分での接続誤差を減らすことができる。正方形メッシュの場合はメッシュを構成する4点が鉄と空気の媒質を異にする領域にまたがるため、境界におけるポテンシャルの計算に誤差が入りやすい。これらの計算アルゴリズムは磁場計算の黎明期において成功を納め、広く利用された。計算プログラムには磁束密度と透磁率の関係を表として入力できるので、鉄の非線形性を考慮した磁場計算が可能である。これらのプログラムでは逐次過大緩和法（successive over-relaxation method, SOR）と呼ばれる繰り返し計算で収束解を得る。

今では2次元計算にはHalbachとHolsingerが開発したPOISSONが一般的に使用され、サブルーチンのMINTは磁場有効領域のハーモニク磁場成分の計算を行い、MIRTはシム領域の鉄を動かして望ましい磁場分布が得られるように再配置する。これには等角写像（conformal transformation）の手法が採用されている。TRIMが境界の決められた磁場問題を受動的に計算するのに対し、積極的に境界を修正するためTRIMを逆に並べてMIRTの名が誕生したそうである。また、方向性鋼板からつくられた電磁石のように異方性のある磁場問題にはPANDIRAコードが利用できる。永久磁石や方向性鋼板のような異方性問題では、磁化容易軸（easy axis）と困難軸（hard axis）方向の磁気抵抗率をそれぞれ γ_{\parallel} と γ_{\perp} として扱う。

これらのプログラムは直交座標の2次元問題は勿論、2次元問題に帰着する回転対称（円柱座標）の磁場問題も扱うことができる。一般に2次元問題で処理するメッシュ点数は100 x 100程度であるが、3次元問題になれば2次元面に垂直な方向に更に100倍とはならない。計算時間や記憶容量の関係からメッシュ点数を減らし、精度はある程度犠牲にし

なければならない。Trowbridgeが開発したTOSCA、OPERAなどの3次元磁場計算コードはフリレンジング磁場の計算に威力を発揮している。

（1）差分法によるアルゴリズム

[1-1] ベクトルポテンシャルによる定式化

差分法は四角メッシュによるアルゴリズムもあるが、ここでは磁場計算によく利用されるPOISSONを例にとり、三角メッシュによる差分法のアルゴリズムを扱う。このコンピュータコードは2次元の静的Maxwell方程式（MSE's, Maxwell Static Equations）をある境界条件のもとで積分形式で解くものである。MSE'sは時間的に変化しないことを仮定して、Maxwell方程式から導かれる。これらのMSE'sは3つの型に分けられる。

(i) Ampereの法則に基づく式

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2)$$

(ii) Gaussの法則に基づく式

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int \rho dv \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4)$$

(iii) 材料の種類による式

等方性材料

$$\mathbf{H} = \gamma(|\mathbf{B}|)\mathbf{B} / \mu_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \kappa_e(|\mathbf{E}|)\mathbf{E} \quad (6)$$

異方性材料

$$\mathbf{H} = \overset{\Rightarrow}{\gamma} \cdot \mathbf{B} / \mu_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \overset{\Rightarrow}{\kappa_e} \cdot \mathbf{E} \quad (8)$$

異方性永久磁石材料

$$\mathbf{H} = \overset{\Rightarrow}{\gamma} \cdot \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{H}_c \quad (9)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \overset{\Rightarrow}{\kappa_e} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{D}_e \quad (10)$$

ここで、 γ は磁気抵抗率（reluctivity、比透磁率 κ_m の逆数）、 κ_e は誘電率（dielectric constant）、異方性材料に対する $\overset{\Rightarrow}{\gamma}$ と $\overset{\Rightarrow}{\kappa_e}$ はテンソル（例えば、磁場と磁気誘導の方向が異なる）である。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (11)$$

を仮定することにより、一般化されたPoisson方程

式が得られる。2次元の直交座標系の場合

$$\mathbf{A} = A_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\hat{\mathbf{e}}_z \text{は} z \text{方向の単位ベクトル}) \quad (12)$$

から

$$H_x = \frac{\gamma}{\mu_0} \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\gamma}{\mu_0} \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y \\ &+ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad (14)$$

が得られるので、これを $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ に代入すれば、次の一般化されたPoisson方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\gamma(|\mathbf{B}(x,y)|) \frac{\partial}{\partial x} A_z(x,y)] \\ + \frac{\partial}{\partial y} [\gamma(|\mathbf{B}(x,y)|) \frac{\partial}{\partial y} A_z(x,y)] = -\mu_0 J_z(x,y) \end{aligned} \quad (15)$$

回転対称のある電磁石においては、円柱座標系において $\mathbf{A} = A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$ と置けば、

$$H_r = \frac{\gamma}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})_r = -\frac{\gamma}{\mu_0} \frac{\partial A_\phi(r,z)}{\partial z}$$

$$\text{および} \quad H_z = \frac{\gamma}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\gamma}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_z = \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned} \quad (17)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} [\gamma(|\mathbf{B}(r,z)|) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)] \\ + \frac{\partial}{\partial z} [\gamma(|\mathbf{B}(r,z)|) \frac{\partial}{\partial z} A_\phi(r,z)] = -\mu_0 J_\phi \end{aligned} \quad (18)$$

直交座標においても円柱座標においてもベクトルポテンシャルで扱われる。

POISSONの基本的なアルゴリズムは位相幾何学的に一樣な3角メッシュ点のポテンシャルを求めることである。位相幾何学的に一樣ということは、メッ

シュ点为正三角形メッシュ(論理メッシュ)の点と1対1の対応が成立つことを意味する。磁場問題の物理的形状に合わせて論理メッシュを歪めたものが物理メッシュである。この状態でも位相幾何学的には一樣性が保たれている。各メッシュ点の周りには図1(a)の論理メッシュに示すように等距離にある最近接メッシュ点がある。論理メッシュ点の番号により図1(b)の物理メッシュ点である6個の最近接メッシュ点が識別される。図1(b)の六角形の中心のベクトルポテンシャルを A_0 とし、最近接メッシュ点におけるポテンシャルを $A_i (i=1,2,\dots,6)$ とする。そうすればAmpereの法則が離散化され、

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i A_i + \frac{\mu_0}{3} \sum_{i=1}^6 J_i a_i}{\sum_{i=1}^6 w_i} \quad (19)$$

ここで a_i は積分路で取り囲まれる各三角形の面積、 w_i は次のように表される磁気抵抗率 γ_i の線形関数である。

$$w_i = \frac{1}{2} [\gamma_1(|\mathbf{B}|) \cos \theta_1 + \gamma_2(|\mathbf{B}|) \cos \theta_2] \quad (20)$$

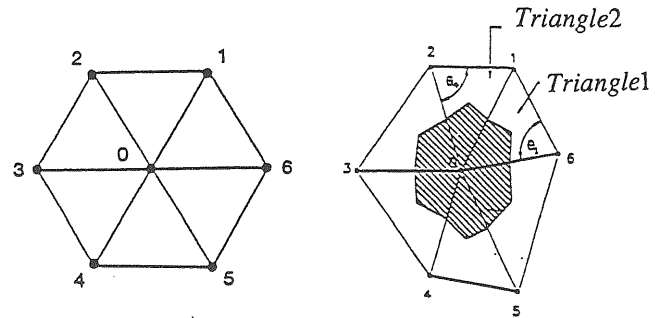


図1 (a) 論理メッシュと (b) 物理メッシュの関係

[1-2] 差分方程式

2次元磁場問題におけるAmpereの法則はベクトルポテンシャルを用いて、次のように表現される。

$$\oint_C \gamma(|\mathbf{B}(\mathbf{r})|) \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y \right] \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (22)$$

ここで

$$B(x, y) = \frac{\partial A_z}{\partial y} + i \left(-\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (23)$$

に複素共役な量として

$$B^*(x, y) = \frac{\partial A_z}{\partial y} + i \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (24)$$

を考える。 $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y$ を複素数 $a = a_x + ia_y$ とし
て表現し、その複素共役を $a^* = a_x - ia_y$ とすれば、

$$\begin{aligned} a^* b &= (a_x - ia_y)(b_x + ib_y) \\ &= (a_x b_x + a_y b_y) + i(a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned} \quad (25)$$

すなわち 2 つのベクトルの内積と外積は複素数の演算で次のように表される。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \text{Re}\{a^* b\}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{Im}\{a^* b\} \quad (26)$$

ベクトル $d\mathbf{s}$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \text{Re}\{B^* ds\} = \text{Re}\left\{ \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} + i \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] ds \right\} \quad (27)$$

ポテンシャル A_z は

$$A_z(x, y) = A_z(z, z^*) \quad (28)$$

$$z = (x + iy)/2 \quad (29)$$

$$z^* = (x - iy)/2 \quad (30)$$

のように z と z^* の関数として表現できるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial x} &= \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} \\ &= \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} + \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial y} &= \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y} \\ &= i \left[\frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

すなわち、

$$\frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) A_z(z, z^*) \quad (33)$$

$$\frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} \right) A_z(z, z^*) \quad (34)$$

これらをまとめて、

$$\begin{aligned} B^*(x, y) &= i \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \right] A_z(z, z^*) \\ &= 2i \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} \end{aligned} \quad (35)$$

すなわち、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \text{Re}\{B^* ds\} = \text{Re}\left\{ 2i \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} ds \right\} \quad (36)$$

図 1 (b) の三角メッシュの内部の点を考える。この 6 角形の代わりに図の斜線で示した 1 2 角形を定義する。この頂点は 1 つ飛びに隣り合う 3 角形の重心と辺の中点である。このようにして作られた 1 2 角形の 2 次メッシュラインで囲まれる面積は元の 6 角形の面積の 1/3 である。元の 3 角形の面積 S は面積が $a = S/3$ の 3 個の四辺形に分割される。

三角メッシュで作られる 6 角形におけるベクトルポテンシャルの計算に必要な記号を図 2 に示す。また、記号の簡単化のため、

$$A_i \equiv A_z(z_i, z_i^*), \quad J_i \equiv J_z(z_i, z_i^*) \quad (37)$$

とする。積分路は図 4 の隣合う三角形の共有する辺の中点と、三角形の重心を結ぶ 1 2 角形の辺に沿って行う。

複素数による図 3 の斜線部分の Ampere の法則は次式で与えられる。

$$\oint_C \gamma_2(|\mathbf{B}(\mathbf{r})|) \text{Re}\left\{ 2i \frac{\partial A}{\partial z} ds \right\} = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (38)$$

ここで積分路 C は図 4 に示す $p_0 p_1 p_2 p_3 p_0$ 、 a_2 は三角形 2 の面積、 J_2 は三角形 2 の電流密度である。

(22) の左辺を評価するために、三角形全体のポテンシャルを場所の関数として与える必要がある。すなわち、3 つの頂点におけるポテンシャルと座標から三角形内部のポテンシャルが場所に線形的に依存する式 (平面を表す方程式) を求める (図 5)。すなわち、

$$\begin{vmatrix} z-z_0 & z^*-z_0^* & A-A_0 \\ z_1-z_0 & z_1^*-z_0^* & A_1-A_0 \\ z_2-z_0 & z_2^*-z_0^* & A_2-A_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

がポテンシャルの線形的変化を表す平面の方程式である。これを A について解けば、

$$A = A_0 + \frac{\{(z-z_0)(z_2^*-z_0^*) - (z_2-z_0)(z^*-z_0^*)\}\Delta A_1}{(z_1-z_0)(z_2^*-z_0^*) - (z_2-z_0)(z_1^*-z_0^*)} + \frac{\{(z_1-z_0)(z^*-z_0^*) - (z-z_0)(z_1^*-z_0^*)\}\Delta A_2}{(z_1-z_0)(z_2^*-z_0^*) - (z_2-z_0)(z_1^*-z_0^*)} \quad (40)$$

ただし、

$$\Delta A_1 = A_1 - A_0, \quad \Delta A_2 = A_2 - A_0 \quad (41)$$

z_0 と z_0^* を原点に選べば、

$$A = A_0 + \frac{\Delta A_1 z_2^* - \Delta A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} z + \frac{\Delta A_2 z_1 - \Delta A_1 z_2}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} z^* \quad (42)$$

または、

$$A = A_0 + Cz - C^* z^* \quad (43)$$

ここで、

$$C = \frac{\Delta A_1 z_2^* - \Delta A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*}, \quad C^* = \frac{\Delta A_1 z_2 - \Delta A_2 z_1}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} \quad (44)$$

である。この関係から

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\Delta A_1 z_2^* - \Delta A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} \quad (45)$$

これを(38)に代入して、

$$\oint_C \gamma_2 \operatorname{Re} \left\{ 2i \frac{\Delta A_1 z_2^* - \Delta A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} ds \right\} = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (46)$$

被積分項は z の関数ではなく、 γ_2 も三角形の中で一定であるため、積分の外に出せて、

$$\gamma_2 \operatorname{Re} \left[2i \frac{\Delta A_1 z_2^* - \Delta A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} \right] \oint_C ds = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (47)$$

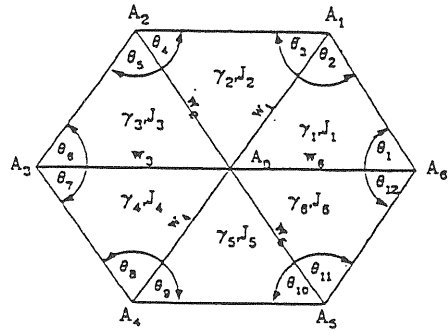


図2 三角メッシュにおける物理量の定義。 A_i はメッシュ点 i におけるベクトルポテンシャル、 J_i は電流密度、 γ_i は磁気抵抗率、 w_i は結合係数

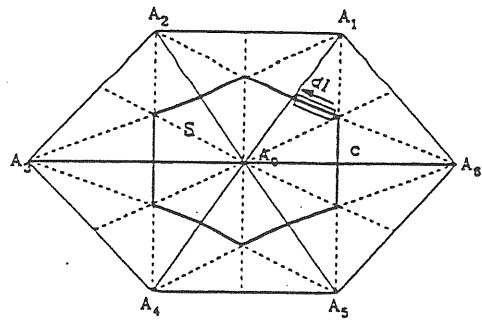


図3 Ampereの法則の経路積分における積分路

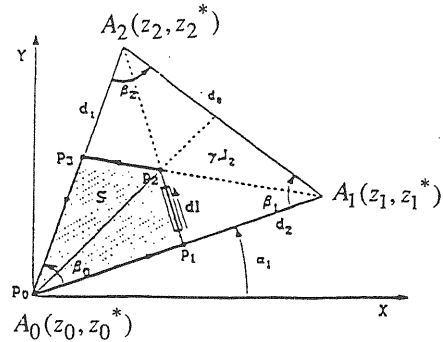


図4 12角形の辺に沿う積分路

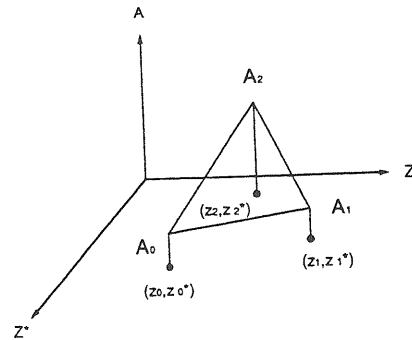


図5 三角メッシュ内の位置の線形関数としてベクトルポテンシャルを表す平面

あるメッシュ点の周りにこの積分を行えば、三角形の辺では隣合う三角形の積分方向が逆になるため、お互いにキャンセルし合い、12角形の辺の積分しか残らない。すなわち、積分で残る項は

$$\oint_C ds = \int_{p_1}^{p_2} ds + \int_{p_2}^{p_3} ds = (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) \\ = p_3 - p_1 = \frac{z_2 + z_0}{2} - \frac{z_1 + z_0}{2} = \frac{z_2 - z_1}{2} \quad (48)$$

したがって、(47)は

$$\gamma_2 \operatorname{Re} \left[i \frac{(\Delta A_1 z_2^* - \Delta A_2 z_1^*)(z_2 - z_1)}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} \right] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (49)$$

この式の計算は、

$$z_1 = d_2 e^{i\alpha_1}, \quad z_1^* = d_2 e^{-i\alpha_1}, \\ z_2 = d_1 e^{i(\alpha_1 + \beta_0)}, \quad z_2^* = d_1 e^{-i(\alpha_1 + \beta_0)}$$

であるから、

$$z_1 z_2^* - z_2 z_1^* = d_1 d_2 (e^{-i\beta_0} - e^{i\beta_0}) = -i 2 d_1 d_2 \sin \beta_0 \\ z_2 - z_1 = d_1 e^{i(\alpha_1 + \beta_0)} - d_2 e^{i\alpha_1} \\ = -d_0 \cos(\beta_1 - \alpha_1) + i d_0 \sin(\beta_1 - \alpha_1) \\ = d_0 e^{i(\pi + \alpha_1 - \beta_1)}$$

$$z_1^*(z_2 - z_1) = -d_0 d_2 e^{-i\beta_1} \\ z_2^*(z_2 - z_1) = d_0 d_1 e^{i\beta_2}$$

したがって、(49)は

$$\gamma_2 \operatorname{Re} \left[-\frac{(\Delta A_1 d_0 d_1 e^{i\beta_2} + \Delta A_2 d_0 d_2 e^{-i\beta_1})}{2 d_1 d_2 \sin \beta_0} \right] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (50)$$

これより

$$-\gamma_2 \left[\frac{\Delta A_1 d_0 \cos \beta_2}{2 d_2 \sin \beta_0} + \frac{\Delta A_2 d_0 \cos \beta_1}{2 d_1 \sin \beta_0} \right] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (51)$$

これに $\frac{d_0}{\sin \beta_0} = \frac{d_1}{\sin \beta_1} = \frac{d_2}{\sin \beta_2}$ の関係を用いて、

$$-\frac{\gamma_2}{2} [\Delta A_1 \cot \beta_2 + \Delta A_2 \cot \beta_1] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (52)$$

故に、

$$-\frac{\gamma_2}{2} [(A_1 - A_0) \cot \beta_2 + (A_2 - A_0) \cot \beta_1] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (53)$$

整理して、

$$\frac{\gamma_2}{2} [A_0 (\cot \beta_1 + \cot \beta_2) - (A_1 \cot \beta_2 + A_2 \cot \beta_1)] \\ = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (54)$$

図2のように β から θ に角度を変更すれば、

$$\frac{\gamma_2}{2} [A_0 (\cot \theta_3 + \cot \theta_4) - (A_1 \cot \theta_4 + A_2 \cot \theta_3)] \\ = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (55)$$

が得られる。図3の積分路に対して、

$$\sum_{i=1}^6 (w_i A_0 - w_i A_i) = \frac{\mu_0}{3} \sum_{i=1}^6 J_i a_i \quad (56)$$

$$w_i = \frac{1}{2} (\gamma_i \cos \theta_{MOD(2i-1,12)} \\ + \gamma_{MOD(i+1,6)} \cos \theta_{MOD(2i,12)}) \quad (57)$$

ここで、 w_i は結合係数 (coupling coefficient) である。添え字の $MOD(a,b)$ は $a > b$ の場合、 a を b で割ったときの余りを意味する。(56) を書き換えて、

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i A_i + \frac{\mu_0}{3} \sum_{i=1}^6 J_i a_i}{\sum_{i=1}^6 w_i} \quad (58)$$

ここで θ_1 と θ_4 は図1(b)に示す角度でもある。このような方程式が各メッシュ点について得られる。これらは1組の線形連立方程式を構成する。 γ_i は A_i の関数であるため、非線形問題を逐次過大緩和法 (SOR) で解き、収束解が得られるように計算の途中で γ_i を変化させる。ベクトルポテンシャルの収束解が得られたならば、これから磁束密度や磁場勾配が計算できる。

[1-3] 逐次過大緩和法 (SOR)

あるメッシュ点における A の $(n+1)$ 番目の繰り返し解を

$$A^{n+1} = \frac{\sum_i w_i A_i^n + \frac{\mu_0}{3} \sum_i J_i a_i}{\sum_i w_i} \quad (59)$$

とする。過大緩和 (over-relaxation) パラメータを ω ($0 < \omega < 2$) とすれば、

$$A^{n+1} = A^n + \omega \left(\frac{\sum_i w_i A_i^n + \frac{\mu_0}{3} \sum_i J_i a_i}{\sum_i w_i} - A^n \right) \quad (60)$$

または

$$A^{n+1} = A^n + \omega \frac{\sum_i w_i (A_i^{n,n+1} - A^n) + \frac{\mu_0}{3} \sum_i J_i a_i}{\sum_i w_i} \quad (61)$$

繰り返し計算サイクルごとに全てのメッシュ点が再計算されるが、ここで $A_i^{n,n+1}$ は再計算済みであれば A_i^{n+1} 、そうでなければ A_i^n を表す。 w_i は磁束密度の関数であるので、 A が変われば w_i も変化する。この変化を(60)に反映させるため、各繰り返し計算サイクルの前に w_i を再計算する。新しく得られた値を w_i^{new} とすれば、次の計算サイクルで使用する w_i^{n+1} は次のように過小緩和 (under-relaxation) する。

$$w_i^{n+1} = \rho w_i^{new} + (1 - \rho) w_i^n \quad (62)$$

ここで、 $0 < \rho < 1$ である。このようにして非線形問題が線形の繰り返し計算の計算に置き換えられ、 ρ が十分小さければ繰り返し得られる解は安定に収束する。

非線形領域で使用する ω の値は 1 に近付け、線形領域では収束率 η を最適化するように ω を選択する。

$$\eta^n = \left[\frac{\sum_i (A_i^{n+1} - A_i^n)^2}{\sum_i (A_i^n - A_i^{n-1})^2} \right]^{1/2} \quad (63)$$

ここでは全メッシュに対する和である。逐次過大緩和法の理論からの帰結として、自動的に ω を最適化するため、ある ω^n と η^n に対して、

$$\lambda = \frac{\omega^n + \eta^n - 1}{\omega^n \sqrt{\eta^n}} \quad (64)$$

$$\omega'_{opt} = \frac{2}{1 + (1 - \lambda^2)^{1/2}} - \omega_0 \quad (65)$$

$$\omega^{n+1} = \beta \omega'_{opt} + (1 - \beta) \omega^n \quad (66)$$

ここで、 $\omega_0 = 0.01$ は非線形問題において必要に応じて ω の値を減らす定数である。しかし、線形問題では小さすぎるよりは大きめの方がよい。 ω の変化による擾乱を少なくするため、 $\beta = 0.05$ として ω を

過小緩和する。 $\eta > 1$ となることもあり、このときは数サイクルの間 ω を一定に保ち、 $\eta < 1$ となるまで待つ。

収束の判定には

$$\varepsilon^{n+1} = \left[\frac{\sum_i (A_i^{n+1} - A_i^n)^2}{\sum_i (A_i^{n+1})^2} \right]^{1/2} \quad (67)$$

を全メッシュ点について評価する。通常は $\varepsilon^{n+1} < 10^{-6} \sim 10^{-7}$ である。

[1-4] ハーモニック解析

磁場のハーモニック解析により電磁石ギャップ内の磁場の多極成分を求めることができる。ハーモニック解析を行う座標 (一般にギャップ中心点) を指定し、その点を中心とする半径 r (鉄領域およびコイル領域を含まない半径) の円周上で解析を行う。ベクトルポテンシャルは複素関数 $F(z) = A(x, y) + iV(x, y)$ (ただし、 $z = x + iy$) の実数部分として与えられるので、 $F(z)$ を級数展開して、

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n / r_{norm}^n) z^n \quad (68)$$

ここで、 r_{norm} は規格化半径である。

$$c_n = a_n + ib_n \quad (69)$$

$$z^n = u_n + iv_n \quad (70)$$

と置けば、ベクトルポテンシャルは

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n u_n - b_n v_n) / r_{norm}^n \quad (71)$$

u_n と v_n はハーモニック多項式と呼ばれるもので、表 1 に最初に 10 項を与える。

$u_n(x, y)$ は多極磁場成分のノーマル成分、 $v_n(x, y)$ はスキュー成分に相当する。 a_n および b_n を求めれば、それぞれの多極成分に分解できたことになる。指定した半径 r を用いて、複素平面で極座標を用いて行う。

$$z = r e^{i\varphi} \quad (72)$$

$$c_n = |c_n| e^{i\alpha_n} \quad (73)$$

と置けば、

$$A(x, y) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{norm}} \right)^n |c_n| e^{i\alpha_n} e^{in\varphi} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{norm}} \right)^n |c_n| \cos(\alpha_n + n\varphi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{norm}} \right)^n |c_n| \{ \cos \alpha_n \cos(n\varphi) - \sin \alpha_n \sin(n\varphi) \} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{norm}} \right)^n \{ a_n \cos(n\varphi) - b_n \sin(n\varphi) \}
\end{aligned} \tag{74}$$

これは変数 φ で表したFourier級数である。すなわち、

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(r, \varphi) d\varphi, \quad b_0 = 0 \tag{75}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{r_{norm}}{r} \right)^n \int_0^{2\pi} A(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \tag{76}$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{r_{norm}}{r} \right)^n \int_0^{2\pi} A(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \tag{77}$$

表1 ハーモニク多項式 (直交座標の場合)

n	$u_n(x, y)$
1	x
2	$x^2 - y^2$
3	$x^3 - 3xy^2$
4	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
5	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$
6	$x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$
7	$x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6$
8	$x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8$
9	$x^9 - 36x^7y^2 + 126x^5y^4 - 84x^3y^6 + 9xy^8$
10	$x^{10} - 45x^8y^2 + 210x^6y^4 - 210x^4y^6 + 45x^2y^8 - y^{10}$

n	$v_n(x, y)$
1	y
2	2xy
3	$3x^2y - y^3$
4	$4x^3y - 4xy^3$
5	$5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$
6	$6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5$
7	$7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$
8	$8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7$
9	$9x^8y - 84x^6y^3 + 126x^4y^5 - 36x^2y^7 + y^9$
10	$10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 - 120x^3y^7 + 10xy^9$

積分には鉄やコイルを含んではいけない。何故なら、複素ポテンシャルF(z)の仮定に反するからである。

電磁石に対称性のある場合は、円を一周積分しなくてもよい。 $\varphi = \phi_z$ から $\varphi = \phi$ までの積分で対称性が得られるならば、

$$a_0 = \frac{1}{\phi - \phi_z} \int_{\phi_z}^{\phi} A(r, \varphi) d\varphi, \quad b_0 = 0 \tag{78}$$

$$a_n = \frac{2}{\phi - \phi_z} \left(\frac{r_{norm}}{r} \right)^n \int_{\phi_z}^{\phi} A(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \tag{79}$$

$$b_n = -\frac{2}{\phi - \phi_z} \left(\frac{r_{norm}}{r} \right)^n \int_{\phi_z}^{\phi} A(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \tag{80}$$

Fourier係数は上の式で数値計算される。このときの積分の角度ステップは

$$\Delta\varphi = \frac{\phi - \phi_z}{N_{ptc} - 1} \tag{81}$$

である。ここで N_{ptc} は半径rの円弧を等間隔に分割する点の数である。分割点でベクトルポテンシャルが内挿される。

[1-5] 磁場に蓄積されるエネルギー

電磁場中の体積Vに蓄えられたエネルギーは

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv \tag{82}$$

ここでは静磁場問題だけを考察するので $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ 項はゼロである。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を代入して、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} \int_V [\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H}] dv \tag{83}$$

ここでGreenの定理と $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ により、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \oint_A (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dv \tag{84}$$

図6に示す直交座標で2次元の任意の体積(z方向には長さ ℓ で、同じ断面形状と正面と後面の断面積は a_1 、側面の面積は a_2 である)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \oint_{a_2} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} + \frac{\ell}{2} \int_{a_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) da \tag{85}$$

リボン状の側面の面積は

$$d\mathbf{a} = ds \times d\hat{\mathbf{z}} \tag{86}$$

ベクトル ds は面積 a_1 を反時計周りに取り囲む曲

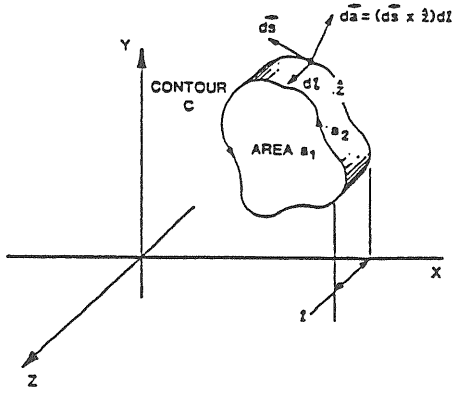


図6 2次元問題における任意の体積要素、直交座標系。断面積 a_1 で側面の面積は a_2

線Cに沿う長さの要素である。

$$\varepsilon = \frac{\ell}{2} \left[\oint_C (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot ds \times \hat{z} + \int_{a_1} A_z J_z da \right] \quad (87)$$

左辺第1項は

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot ds \times \hat{z} &= (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \times ds \cdot \hat{z} \\ &= (ds \cdot \mathbf{A})(\mathbf{H} \cdot \hat{z}) - (\mathbf{H} \cdot ds) \mathbf{A} \cdot \hat{z} \\ &= -(\mathbf{H} \cdot ds) \mathbf{A} \cdot \hat{z} = -A_z \mathbf{H} \cdot ds \end{aligned} \quad (88)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\ell}{2} \left[-\oint_C A_z \mathbf{H} \cdot ds + \int_{a_1} A_z J_z da \right] \\ &= \frac{\ell}{2} \left[-\oint_C A_z H_x dx - \oint_C A_z H_y dy + \int_{a_1} A_z J_z dx dy \right] \end{aligned} \quad (89)$$

ところが、

$$\oint_{a_2} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot da = \int_0^\ell d\ell \oint_C ds (\mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \hat{n}) \quad (90)$$

において、磁場問題の境界条件は純Dirichlet ($A_z=0$) または純Neumann ($\mathbf{B} \cdot \hat{n}=0$) であることから、この積分はゼロになる。メッシュ要素間の境界ではお互いの積分方向が逆になるため消去し合う。そのため問題領域の外周部の積分が残るが、Dirichlet境界またはNeumannの条件から積分への寄与はない。したがって、単位長さ当たりのエネルギーは

$$\varepsilon/\ell = \frac{J}{2} \left[\int_{coil} A_z da \right] \quad (91)$$

である。すなわち、電流が存在するコイル領域におけるベクトルポテンシャルの積分の $J/2$ 倍である。

永久磁石の蓄積エネルギーは、この場合は電流密度は存在しないが、永久磁石を取り囲む面の積分(全領域の境界積分ではない)で与えられる。円柱座標系の場合は、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{a_2} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot da + \pi \int_{a_1} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}) r dr dz \quad (92)$$

$$da = rd\theta ds \hat{n} = rd\theta \hat{\theta} \times ds \quad (93)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\theta} \times ds &= -(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \times ds \cdot \hat{\theta} \\ &= (\mathbf{H} \cdot ds) \mathbf{A} \cdot \hat{\theta} - (ds \cdot \mathbf{A})(\mathbf{H} \cdot \hat{\theta}) \\ &= (\mathbf{H} \cdot ds) \mathbf{A} \cdot \hat{\theta} = A_\theta H_r dr + A_\theta H_z dz \end{aligned} \quad (94)$$

したがって、

$$\varepsilon = \pi \oint_C (A_\theta H_r r dr + A_\theta H_z r dz) + \pi \int_{a_1} (J_\theta A_\theta) r dr dz \quad (95)$$

直交座標の場合の議論と同じく、全領域の境界条件から第1項の積分の寄与はなくなるので、

$$\varepsilon = \pi \int_{a_1} (J_\theta A_\theta) r dr dz \quad (96)$$

である。

[1-6] 境界条件

2次元の磁場問題に現れる2階の偏微分方程式の解は境界条件を設けることによって一義的に決定される。しかし、境界条件を任意に設定することはできない。許される境界条件は微分方程式のタイプによって決まる。ベクトルポテンシャルを扱うPoisson方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \gamma(A) \frac{\partial A}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \gamma(A) \frac{\partial A}{\partial y} \right\} + \mu_0 J(x, y) = 0 \quad (97)$$

で与えられる楕円型微分方程式である。この方程式の一般的な境界条件は

$$aA + b \left\{ n_x \frac{\partial A}{\partial x} + n_y \frac{\partial A}{\partial y} \right\} = c \quad (98)$$

である。a, b, cは境界上の座標の関数である。 n_x と n_y は境界から内側に向かう単位法線ベクトルの各成分である。cは通常はゼロであるが、

bとcは境界上でどちらかがゼロである。
 通常使用される境界条件として、
 Dirichlet - 境界上で $A(x,y)$ を指定
 Neumann - 境界上で $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla A$ を指定
 境界における単位法線ベクトルは

$$\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{e}}_x + n_y \hat{\mathbf{e}}_y \quad (99)$$

境界の接線方向の単位ベクトルは

$$\hat{\mathbf{t}} = t_x \hat{\mathbf{e}}_x + t_y \hat{\mathbf{e}}_y = n_y \hat{\mathbf{e}}_x - n_x \hat{\mathbf{e}}_y \quad (100)$$

Dirichlet条件に対して、 $A(x,y)$ 一定であるので、
 境界の接線方向の磁場成分はゼロである。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla A &= n_y \frac{\partial A}{\partial x} - n_x \frac{\partial A}{\partial y} \\ &= -(n_x B_x + n_y B_y) = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

すなわち、磁場は境界に平行である。

Neumann条件に対して、 $A(x,y)$ の法線方向の微分はゼロである。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla A &= n_x \frac{\partial A}{\partial x} + n_y \frac{\partial A}{\partial y} \\ &= t_x B_x + t_y B_y = \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (102)$$

すなわち、磁場は境界に垂直である。

[1-7] 三角メッシュの発生

問題領域全体に不規則なメッシュを発生するため、
 トポロジカルには正三角形の配列に等しく（論理メッシュ）、
 各サブ領域（鉄、コイル、空隙）が実際の配置と形状をもつように三角メッシュを変形させて張り詰める（物理メッシュ）。外部境界に沿う三角メッシュは直線を決めるために2つの頂点を境界上におく。問題領域内部のどのメッシュ点も6個の三角形の頂点で共有される。どのような多角形でも三角メッシュで埋めることができるので、境界やサブ領域の境界はメッシュライン上に乗せることができる。磁束密度が大きいところはメッシュを細かくするよう工夫する必要がある。このようにして得られる論理メッシュと物理メッシュの対応を図7に示す。

正三角形のメッシュ座標上で、メッシュラインに沿って、問題領域とサブ領域の境界を定義する。境界上のメッシュ点に物理座標（直交座標系では x,y

座標、円柱座標系では r,z 座標）を定義する。定義された座標が物理座標系で正しい位置に来るように三角メッシュを変形させる。この方法による三角メッシュの発生の理論的根拠を説明するため、図8に示す正三角形メッシュ座標を考える。お互いに60度で交差する2組みの直線群 $\chi(x,y)$ と $\psi(x,y)$ はLaplace方程式を満足する。

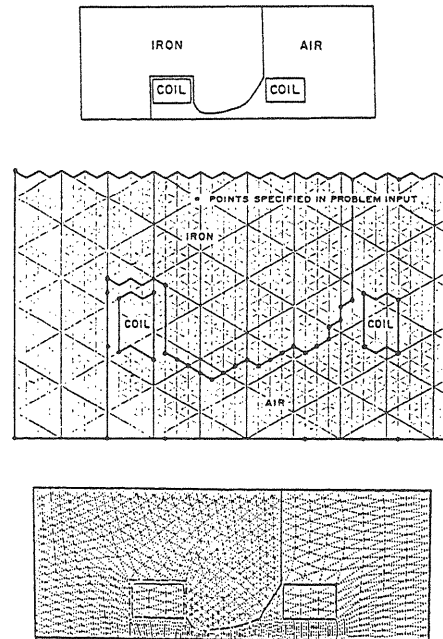


図7 論理メッシュと物理メッシュの対応

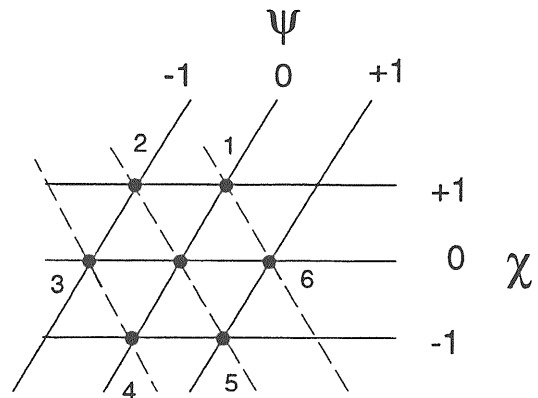


図8 (χ, ψ) 平面における6個の最近接三角形と頂点(点1~6)

$$\nabla^2 \chi(x,y) = 0 \quad (103)$$

$$\nabla^2 \psi(x,y) = 0 \quad (104)$$

この方程式を解くことにより、 χ 一定、 ψ 一定

の等ポテンシャル線および χ と ψ の交点を連ねる第3の直線群が得られ、必要な三角メッシュが形成される。これらのPoisson方程式は x, y を χ と ψ の関数として書き換えることにより数値的に解くことができる。

$$u = \chi(x, y) \quad (105)$$

$$v = \psi(x, y) \quad (106)$$

これらの逆関数が存在するものとして、 x, y を χ と ψ の関数として求める。

$$x = f(u, v) \quad (107)$$

$$y = g(u, v) \quad (108)$$

とすれば、

$$x = f(\chi(x, y), \psi(x, y)) \quad (109)$$

$$y = g(\chi(x, y), \psi(x, y)) \quad (110)$$

が得られる。 u, v に関して微分すれば、

$$1 = f_\chi \chi_x + f_\psi \psi_x \quad (111)$$

$$0 = f_\chi \chi_y + f_\psi \psi_y \quad (112)$$

$$0 = g_\chi \chi_x + g_\psi \psi_x \quad (113)$$

$$1 = g_\chi \chi_y + g_\psi \psi_y \quad (114)$$

これより、 $f \rightarrow x, g \rightarrow y$ として、

$$\chi_x = -\frac{1}{J} \psi_y \quad \psi_x = \frac{1}{J} y_\chi \quad (115)$$

$$\chi_y = \frac{1}{J} x_\psi \quad \psi_y = -\frac{1}{J} x_\chi \quad (116)$$

ここで $J = x_\psi y_\chi - x_\chi y_\psi$ (ヤコビアン) である。

さらに(111)-(114)を x, y で偏微分して(115), (116)の関係を代入すれば、次の逆変換Laplace方程式が得られる。

$$\alpha x_{\chi\chi} - 2\beta x_{\chi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} = 0 \quad (117)$$

$$\alpha y_{\chi\chi} - 2\beta y_{\chi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} = 0 \quad (118)$$

が得られる。ここで

$$\alpha = x_\psi^2 + y_\psi^2 \quad (119)$$

$$\beta = x_\chi x_\psi + y_\chi y_\psi \quad (120)$$

$$\gamma = x_\chi^2 + y_\chi^2 \quad (121)$$

である。(115)-(121)の偏微分を有限差分方程式(FDE's)に直す。このためには、 x, y を三角メッシュの六角形の中心にある頂点(x, y)の周りに χ, ψ で展開する。

$$x_i = x + x_\chi \chi + x_\psi \psi + \frac{1}{2} x_{\chi\chi} \chi^2 + x_{\chi\psi} \chi\psi + \frac{1}{2} x_{\psi\psi} \psi^2 + O(\Delta^3) \quad (122)$$

$$y_i = y + y_\chi \chi + y_\psi \psi + \frac{1}{2} y_{\chi\chi} \chi^2 + y_{\chi\psi} \chi\psi + \frac{1}{2} y_{\psi\psi} \psi^2 + O(\Delta^3) \quad (123)$$

ただし $i=1, 2, \dots, 6$ である。また、六角形の各頂点の χ と ψ の隣合う値は1ずつ異なるので、 $\chi, \psi = -1, 0, 1$ である。頂点の番号 $i=1, 2, \dots, 6$ に合わせて(122), (123)の χ, ψ の値を選択する。

$$x_1 = x + x_\chi + \frac{1}{2} x_{\chi\chi} \quad (124)$$

$$x_2 = x + x_\chi - x_\psi + \frac{1}{2} x_{\chi\chi} - x_{\chi\psi} + \frac{1}{2} x_{\psi\psi} \quad (125)$$

$$x_3 = x - x_\psi + \frac{1}{2} x_{\psi\psi} \quad (126)$$

$$x_4 = x - x_\chi + \frac{1}{2} x_{\chi\chi} \quad (127)$$

$$x_5 = x - x_\chi + x_\psi + \frac{1}{2} x_{\chi\chi} - x_{\chi\psi} + \frac{1}{2} x_{\psi\psi} \quad (128)$$

$$x_6 = x + x_\psi + \frac{1}{2} x_{\psi\psi} \quad (129)$$

これらの式からつぎの関係が得られる。

$$x_\chi = \frac{1}{6} \{(x_2 + 2x_1 + x_6) - (x_3 + 2x_4 + x_2)\} \quad (130)$$

$$x_\psi = \frac{1}{6} \{(x_1 + 2x_6 + x_5) - (x_2 + 2x_3 + x_4)\} \quad (131)$$

$$x_{\chi\chi} = x_1 - 2x + x_4 \quad (132)$$

$$x_{\chi\psi} = \frac{1}{2} \{(x_1 + x_6 + x_3 + x_4) - (x_2 + x_5 + 2x)\} \quad (133)$$

$$x_{\psi\psi} = x_6 - 2x + x_3 \quad (134)$$

y に関して同様の式が得られる。これらの式を(117)-(121)に代入すれば、

$$\sum_{i=1}^6 c_i(x_i - x) = 0, \quad \sum_{i=1}^6 c_i(y_i - y) = 0 \quad (135)$$

ここで、

$$\begin{aligned} c_1 &= c_4 = \alpha - \beta \\ c_2 &= c_5 = \beta \\ c_3 &= c_6 = \gamma - \beta \end{aligned} \quad (136)$$

である。(135)をSOR法で数値的に解けば問題領域全体の物理的メッシュ点座標が得られる。結合係数 c_i は (x, y) には依存しないで、 (x_i, y_i) にのみ依存する。すなわち、

$$x = \frac{\sum_i c_i x_i}{\sum_i c_i} \quad \text{および} \quad y = \frac{\sum_i c_i y_i}{\sum_i c_i} \quad (137)$$

を連続的に評価することになる。

図7のメッシュで計算されたCPSの機能結合型電磁石の磁力線の様子を図9に示す。

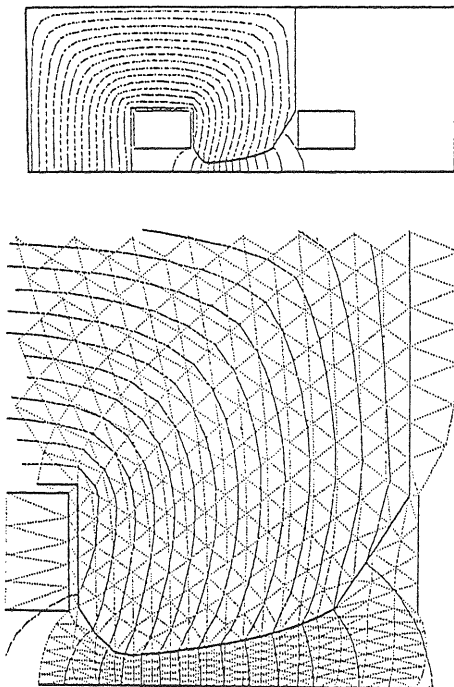


図9 CPSの機能結合型電磁石の磁力線

[1-8] 異方性のある静磁場問題

磁気異方性 (magnetic anisotropy) は磁化の方向が磁場の方向と異なる現象である。これは磁性体の結晶の方向によって磁化されやすい方向 (磁化容易軸) とこれと直交する磁化されにくい方向 (磁化困難軸) があるためである。ケイ素鋼板では、一方向に大きな透磁率を得るため磁化容易軸を揃えた所謂 Goss組織 (Goss texture) を有する方向性ケイ素鋼板がある。このような鋼板を採用する電磁石では異方性の取り扱いが必要である。

2次元コードに異方性問題を組込む試みもなされたが、逐次過大緩和法によるプログラムでは収束が思わしくなく、POISSONには直接解法によるパッケージPANDIRAが用意されている。磁気抵抗率テンソル $\vec{\gamma}$ を導入することにより、

$$\mathbf{H} = \vec{\gamma} \cdot \mathbf{B} / \mu_0 + \mathbf{H}_c \quad (138)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\parallel} + \mathbf{H}_{\perp} \quad (139)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \gamma_{\parallel} \mathbf{B}_{\parallel} / \mu_0 + \mathbf{H}_c \quad (140)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \gamma_{\perp} \mathbf{B}_{\perp} / \mu_0 \quad (141)$$

ここで、 \mathbf{H}_{\parallel} 、 \mathbf{B}_{\parallel} 、 γ_{\parallel} は容易軸に平行な磁場、磁束密度、磁気抵抗率である。また、 \mathbf{H}_{\perp} 、 \mathbf{B}_{\perp} 、 γ_{\perp} は困難軸方向の磁場、磁束密度、磁気抵抗率である。容易軸方向に保持力 \mathbf{H}_c と残留磁場 \mathbf{B}_r が現れる。電磁石において、ある方向に容易軸を揃えた問題では、磁場 \mathbf{B} は2つの座標系で

$$\mathbf{B} = B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y = B_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + B_{\perp} \hat{e}_{\perp} \quad (142)$$

と表され、単位ベクトルの座標変換 (図9) は、

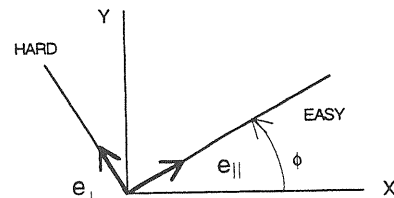


図9 単位ベクトルの座標変換

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{\parallel} \\ \hat{e}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} \quad (143)$$

$$\text{または} \quad \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_{\parallel} \\ \hat{e}_{\perp} \end{pmatrix} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (\gamma_{\parallel} B_{\parallel} / \mu_0 + H_c) \hat{e}_{\parallel} + (\gamma_{\perp} B_{\perp} / \mu_0) \hat{e}_{\perp} \\ &= H_{\parallel} \hat{e}_{\parallel} + H_{\perp} \hat{e}_{\perp} \end{aligned} \quad (145)$$

に座標変換を行えば、

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (H_{\parallel} \cos \phi - H_{\perp} \sin \phi) \hat{e}_x \\ &\quad + (H_{\parallel} \sin \phi + H_{\perp} \cos \phi) \hat{e}_y \end{aligned} \quad (146)$$

また、逆変換により $\mathbf{B} = B_x \hat{e}_x + B_y \hat{e}_y$ から

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (B_x \cos \phi + B_y \sin \phi) \hat{e}_{\parallel} \\ &\quad + (-B_x \sin \phi + B_y \cos \phi) \hat{e}_{\perp} \end{aligned} \quad (147)$$

H_x 、 H_y をそれぞれ B_x と B_y で表現すれば、

$$\begin{aligned} H_x &= (\gamma_{\parallel} \cos^2 \phi + \gamma_{\perp} \sin^2 \phi) B_x / \mu_0 \\ &\quad + \sin 2\phi (\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp}) B_y / (2\mu_0) + H_c \cos \phi \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} H_y &= \sin 2\phi (\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp}) B_x / (2\mu_0) \\ &\quad + (\gamma_{\parallel} \sin^2 \phi + \gamma_{\perp} \cos^2 \phi) B_y / \mu_0 + H_c \sin \phi \end{aligned} \quad (149)$$

書き換えて、

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{cx} \\ H_{cy} \end{pmatrix} \quad (150)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \gamma_{\parallel} \cos^2 \phi + \gamma_{\perp} \sin^2 \phi \\ \gamma_{xy} &= \sin 2\phi (\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp}) / 2 \\ \gamma_{yy} &= \gamma_{\parallel} \sin^2 \phi + \gamma_{\perp} \cos^2 \phi \\ H_{cx} &= H_c \cos \phi \\ H_{cy} &= H_c \sin \phi \end{aligned} \quad (151)$$

である。

[1-9] 容易軸が場所の関数である場合

磁化方向の異なる永久磁石を組み合わせる場合、容易軸を場所の関数として表現する。図10の磁石は永久磁石の楔型ブロックの組み合わせたものである。

円の中心の周りの角度の関数として磁化方向が決まる場合、PANDIRAで扱うことができる。円の中心が座標系の中心である必要はない。容易軸の方向は図11のように3つのパラメータ (X_A, Y_A, ϕ_A) で決定される。図11のように単位ベクトル ($\hat{e}_{\xi}, \hat{e}_{\eta}$) をもつ座標系を考えれば、この座標系で \hat{e}_{ξ} と角度 ϕ_A をなす方向が容易軸方向である。したがって、

$$(\hat{e}_{\xi}, \hat{e}_{\eta}) \Leftrightarrow (\hat{e}_{\parallel}, \hat{e}_{\perp}) \quad (152)$$

の変換は(150)に対応する。また、

$$(\hat{e}_{\xi}, \hat{e}_{\eta}) \Leftrightarrow (\hat{e}_x, \hat{e}_y) \quad (153)$$

の変換は通常の座標変換

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{\xi} \\ \hat{e}_{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} \quad (154)$$

である。また、

$$(\hat{e}_{\parallel}, \hat{e}_{\perp}) \Leftrightarrow (\hat{e}_x, \hat{e}_y) \quad (155)$$

の座標変換は

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{\parallel} \\ \hat{e}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_A + \theta) & \sin(\phi_A + \theta) \\ -\sin(\phi_A + \theta) & \cos(\phi_A + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} \quad (156)$$

である。

したがって、図11の座標で考える場合、(150)における磁気抵抗テンソル $\vec{\gamma}$ と保持力 \mathbf{H}_c の角度 ϕ を

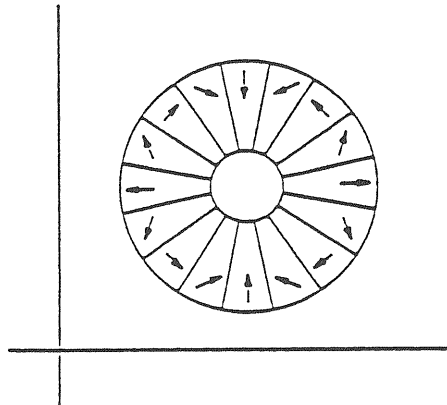


図10 磁化方向の異なる永久磁石ブロックの組み合わせた磁石

のように簡単化できる。 γ は B_x と B_y の非線形関数であり、繰り返し計算で解くことになる。

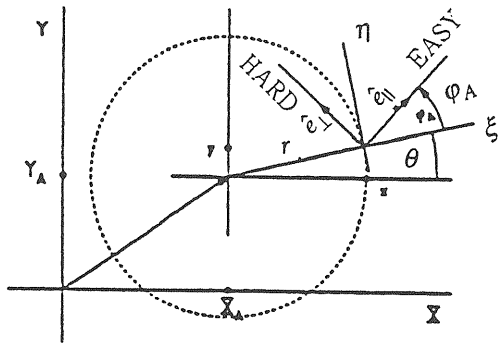


図1-1 座標系の中心が円の中心と異なる異方性材料のパラメータ

$\phi_A + \theta$ に置き換える必要がある。永久磁石の場合、

$$\gamma_{||} = B_r / (\mu_0 H_c) \quad (157)$$

である。以上からAmpereの法則を永久磁石に適用すれば、

$$\oint_c [\gamma_{||} \nabla \times \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{H}_c] \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (158)$$

直交座標系で $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ なるCoulombゲージを選べば、 $\mathbf{A} = A_z \hat{e}_z$ 、 $J_x = J_y = 0$ となる。従って、解くべき方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \oint_c \{ (\gamma_{xx} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \gamma_{xy} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \mu_0 H_{cx}) dx + \\ + (\gamma_{xy} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \gamma_{yy} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \mu_0 H_{cy}) dy \} \\ = \mu_0 \int_A J_z dx dy \end{aligned} \quad (159)$$

微小領域では γ と J_z は一定で、

$$A_z = -b_y x + b_x y + a_0 \quad (160)$$

は x と y の線形関数で近似できるので、

$$\begin{aligned} (\gamma_{xx} \oint_c dx + \gamma_{xy} \oint_c dy) b_x + (\gamma_{xy} \oint_c dx + \gamma_{yy} \oint_c dy) b_y \\ = \mu_0 \{ J_z A - H_{cx} \oint_c dx - H_{cy} \oint_c dy \} \end{aligned} \quad (161)$$

[1-10] MIRTによる磁極のトリミング

MIRTと呼ばれるポストプロセッサは偏向電磁石の磁場を整形するための最適化プログラムである。また、コイル導体の形状を変えるためにも使用できる。磁極の形状を最適化するためには、先ず単純なフラットな形状の磁極でPOISSONの計算を行い、電磁石のギャップ内で必要磁場を指定する。さらに、磁極を整形するために移動できる境界点を指定する。MIRTはこれらの指示に従って、指定した磁場分布が得られるようにコイルの電流と磁極形状を変更する。

磁極境界にバンプを取付けたり、あるいは取除いたりして境界の変更を行う。バンプ形状は図12に示す5種類が指定できる。一度に使用できるバンプの数は磁場を指定するギャップ内の点数に依存する。最適化は最小二乗法によって行われ、フィットされるべき点数が調整するパラメータの数より多い場合に意味のある結果が得られる。

POISSONの計算精度は使用するB-Hテーブルの精度、電磁石の長さ（2次元計算であるため、長さは無限に長いと仮定される）、低磁場での鉄のヒステリシスによる影響などのため絶対精度は数%程度、相対精度は 10^{-4} 程度である。

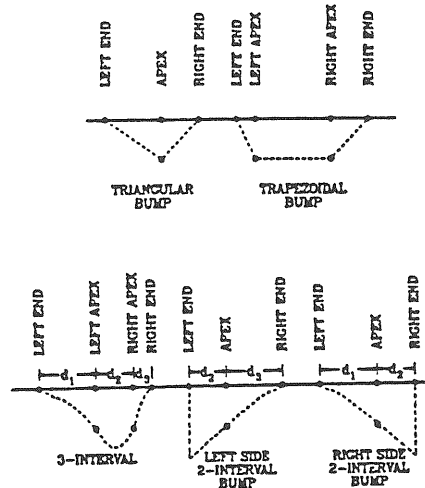


図1-2 5種類のバンプ形状、実線はもとの境界で点線は追加または除去するバンプ形状。

(2) 有限要素法 (FEM, Finite Element Method)

による2次元静磁場問題

三角メッシュによる差分法はトポロジカルに規則的なメッシュでPoisson方程式を有限差分方程式で扱うものであったが、有限要素法はやはり同じ三角メッシュでもトポロジカルな規則性はなく局所的に自由にメッシュを細分化できる。このため詳しく計算したい領域は三角形の連続条件を満たせば、メッシュサイズを細分化することが可能である。したがって計算の途中でメッシュの細分化が必要になれば、自動的にメッシュをの発生することもできる。この計算法はANSYSなどのように磁場解析ばかりでなく、構造解析、伝熱解析、流体解析、音響解析などにも応用できる。

[2-1] 三角形要素と形状関数

磁場問題を解く領域には鉄のような磁性体、電流の流れるコイル、磁場を発生させる空気領域が存在する。これらは問題領域に2次元的に分散配置されているとする。

図1の三角形要素(e)において、要素内の任意の点(x,y)におけるベクトルポテンシャルを $A^{(e)}$ を

$$A^{(e)}(x,y) = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}x + \alpha_3^{(e)}y = \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^{(e)} \\ \alpha_2^{(e)} \\ \alpha_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

とすれば、図1の各節点におけるベクトルポテンシャルは

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^{(e)} \\ \alpha_2^{(e)} \\ \alpha_3^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

したがって、

$$A^{(e)}(x,y) = \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \\ = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで、

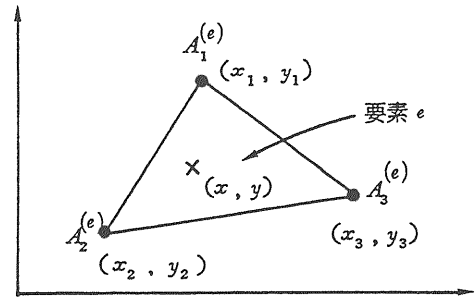


図1 一次三角形要素

$$\Delta^{(e)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$b_i = x_j y_k - x_k y_j \quad (5)$$

$$c_i = y_i - y_k \quad (6)$$

$$d_i = x_k - x_j \quad (7)$$

である。ただし、i, j, k は循環添字である。 $\Delta^{(e)}$ は三角要素の面積で、節点順位は反時計周りに1-->2-->3-->1とする。このとき、面積は必ず $\Delta^{(e)} > 0$ になる。

形状関数 $N_i^{(e)}$ を導入して、

$$A^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)} A_i \quad (8)$$

とすれば、

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} (b_i + c_i x + d_i y) \quad (9)$$

が得られる。

[2-2] 要素係数マトリックス

2次元静磁場問題におけるエネルギー汎関数 X は

$$X = \iint_S \left(\int_0^B H dB \right) dS - \iint_S J A dS \quad (10)$$

である。ここで A はベクトルポテンシャル、 J は電流密度である。透磁率 μ が磁束密度 B によって変化しなければ、

$$X = \iint_S \frac{1}{2\mu} B^2 dS - \iint_S J A dS \\ = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ \frac{1}{\mu_x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\mu_y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right\} dS - \iint_S J A dS$$

エネルギーを最小にする条件 (11)

$$\frac{\partial X}{\partial A_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,N), \quad (N \text{ は節点の総数})$$

(12)

から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{(e)}}{\partial A_i} &= \iint_{S^{(e)}} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{1}{\mu_y} \left(\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_x} \left(\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} \right) \right\} A_j dS - \iint_{S^{(e)}} J N_i^{(e)} dS \\ &= \frac{1}{4\Delta^{(e)}} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{c_i c_j}{\mu_y} + \frac{d_i d_j}{\mu_x} \right) A_j - \frac{J}{3} \Delta^{(e)} \equiv 0 \end{aligned} \quad (13)$$

これをマトリックスの形に書き直せば、

$$\begin{pmatrix} S_{11}^{(e)} & S_{12}^{(e)} & S_{13}^{(e)} \\ S_{21}^{(e)} & S_{22}^{(e)} & S_{23}^{(e)} \\ S_{31}^{(e)} & S_{32}^{(e)} & S_{33}^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_1^{(e)} \\ K_2^{(e)} \\ K_3^{(e)} \end{pmatrix} \equiv 0 \quad (14)$$

ここで、

$$S_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4\Delta^{(e)}} \left(\frac{c_i c_j}{\mu_y} + \frac{d_i d_j}{\mu_x} \right) \quad (15)$$

$$K_i^{(e)} = \frac{J}{3} \Delta^{(e)} \quad (16)$$

である。 $[S_{ij}^{(e)}]$ が要素係数マトリックスである。

[2-3] 全体係数マトリックス
全要素に対する汎関数は、

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + \dots + X^{(M)} \quad (17)$$

ここで M は要素の数である。(17)を考慮して、全要素に(14)を適用すれば

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{M1} & S_{M2} & \dots & S_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_N \end{pmatrix} \quad (18)$$

(18)のベクトルポテンシャルに既知のものが含まれていれば、それに対応する行を除くとともに、そのポテンシャルを対応する列に掛けて右辺に移す。このようにして得られた方程式

$$\begin{pmatrix} S'_{11} & S'_{12} & \dots & S'_{1L} \\ S'_{21} & S'_{22} & \dots & S'_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S'_{L1} & S'_{L2} & \dots & S'_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ K_L \end{pmatrix} \quad (19)$$

が解くべき方程式である。ここで、 $[S'_{ij}]$ が全体係数マトリックスで、対称マトリックスになっている。

[2-4] 連立方程式の解法

上に求めた連立方程式(19)を解くためには、直接解法としてのガウス消去法または変型コレスキー法がある。また、ハウスホルダー変換を利用して、係数マトリックスの逆行列を求めて一気に解くこともできる。このような解法において三角要素の磁束密度に応じて鉄の透磁率を変化させなければならないので、一度計算する度に各要素の磁束密度を計算し、透磁率を変えてまた計算するという反復計算が必要である。

節点数が多くなれば全体係数マトリックスも大きくなる。このような場合には全章の逐次過大緩和法(SOR)が利用され、この場合も1回繰り返す度に透磁率を変える反復計算になる。

(2-4-1) ガウスの消去法

全体係数マトリックスを上三角行列に直す前進消去と、最下段の式から始めて、順次1つずつ解を求める後退代入からなる。

1) 前進消去

第 k 行を用いて $k+1 \sim L$ 行の第 k 列を消去する手続を $k=1, 2, \dots, L-1$ の各行について順次行う。

$$S'_{ij} \leftarrow S'_{ij} - S'_{ik} S'_{kj} / S'_{kk} \quad (20)$$

$$K'_i \leftarrow K'_i - S'_{ik} K'_k / S'_{kk} \quad (21)$$

ここで ($k=1, 2, \dots, L-1, i, j=k+1, k+2, \dots, L$) である。

2) 後退代入

前進消去により(4)は次式のように変形される。

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & \dots & H_{1L} \\ 0 & H_{22} & \dots & \dots & H_{2L} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & H_{LL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \dots \\ G_L \end{pmatrix} \quad (22)$$

この式は第L行から始めて、後退しながら順次解くことができる。すなわち、

$$A_i = (G_i - \sum_{j=i+1}^L H_{ij} A_j) / H_{ii} \quad (23)$$

ここで (i=L, L-1, ..., 1) である。

(2-4-2) 変形コレスキー法

(19)の全体係数マトリックスが対称 $S'_{ij} = S'_{ji}$ であることを利用すれば、ガウス消去法の前進消去における反復計算が省略できる。後退代入は上に同じである。

$$H_{1j} \leftarrow S'_{1j} \quad (24)$$

$$H_{ij} \leftarrow S'_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} H_{ki} H_{kj} / H_{kk} \quad (25)$$

$$G_1 \leftarrow K'_1 \quad (26)$$

$$G_i \leftarrow K'_i - \sum_{k=1}^{i-1} H_{ki} G_k / H_{kk} \quad (27)$$

ここで (i, j=2, 3, ..., L) である。

[2-5] 磁束密度の計算

2次元磁場であるので、ベクトルポテンシャルから、

$$B_x = \partial A / \partial y, \quad B_y = -\partial A / \partial x \quad (28)$$

であるので、(3)から三角要素内の磁場は一定で、

$$B_x = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} (d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3) \quad (29)$$

$$B_y = -\frac{1}{2\Delta^{(e)}} (c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3) \quad (30)$$

が成立する。

[2-6] 軸対称磁場問題

軸対称問題は円柱座標 (r, θ, z) で扱えば、 θ 方向にポテンシャルの変化がないので、 (r, z) の2次元磁場問題として扱うことができる。静磁場の場合 $A = A_\theta$ として磁束密度は

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} \quad (31)$$

$$B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) = \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \quad (32)$$

磁気抵抗率 $\nu (=1/\mu)$ の方向性を考慮して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{B} \nu \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \{B_r \quad B_z\} \begin{bmatrix} \nu_r & 0 \\ 0 & \nu_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_r \\ B_z \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \nu_r \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + \nu_z \left(\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

から、軸対称磁場の汎関数 X は

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \iint_S \left\{ \nu_r \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + \nu_z \left(\frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 \right\} 2\pi r dr dz \\ &\quad - \iint_S J A 2\pi r dr dz \end{aligned} \quad (34)$$

ここで $J = J_\theta$ である。要素内の任意の点におけるベクトルポテンシャルを

$$A^{(e)} = \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)} r + \alpha_3^{(e)} z \quad (35)$$

で近似し、要素 e における形状関数による $A^{(e)}$ の近似式を

$$A^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)} A_i \quad (36)$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{(e)}}{\partial A_i} &= 2\pi \left[\iint_{S^{(e)}} \sum_{j=1}^3 \left\{ \nu_r \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial z} \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial z} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu_z \left(\frac{N_i^{(e)}}{r} + \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial r} \right) \left(-\frac{N_j^{(e)}}{r} + \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial r} \right) \right\} A_j r dr dz \right. \\ &\quad \left. - \iint_{S^{(e)}} J N_i^{(e)} r dr dz \right] \equiv 0 \end{aligned} \quad (37)$$

x, y 座標の場合と同じように

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} (b_i^{(e)} + c_i^{(e)} r + d_i^{(e)} z) \quad (38)$$

ただし、

$$b_i^{(e)} = r_j^{(e)} z_k^{(e)} - r_k^{(e)} z_j^{(e)} \quad (39)$$

$$c_i^{(e)} = z_j^{(e)} - z_k^{(e)} \quad (40)$$

$$d_i^{(e)} = r_k^{(e)} - r_j^{(e)} \quad (41)$$

ここで i, j, k は循環添字である。(38)を(37)に代入して

$$\begin{aligned}
& \frac{r_0^{(e)}}{4\Delta^{(e)}} \sum_{j=1}^3 (v_z c_i^{(e)} c_j^{(e)} + v_r d_i^{(e)} d_j^{(e)}) A_j \\
& + \frac{v_z \Delta^{(e)}}{9r_0^{(e)}} \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} A_j + \frac{v_z}{6} \sum_{j=1}^3 (c_i^{(e)} + c_j^{(e)}) A_j \\
& - \frac{J\Delta^{(e)}}{4} (r_0^{(e)} + \frac{r_i^{(e)}}{3}) = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

が得られる。 $r_0^{(e)} = (r_1^{(e)} + r_2^{(e)} + r_3^{(e)})/3$ である。

[2-7] メッシュの発生

前章のトポロジカルなメッシュによる三角メッシュの発生が利用できるが、この方法ではこれ以上の再分割を行うことはできないので、あらかじめ細かなメッシュが必要な領域は物理座標を割り付ける最初の段階で考慮しなければならない。

有限要素法におけるメッシュ発生を人為的に行えばかなり手のかかる問題であるが、最初問題領域を比較的粗い三角要素に分けて計算し、計算の途中結果を見ながら必要な場所は三角要素を更に細かく自動的に再分割するものである。この方法では、メッシュに粗密を与え、粗くてよい場所は粗く、密にしなければならない場所は細かく分割できる。このようなメッシュ発生は最適メッシュ発生法と呼ばれる。メッシュの粗密を与える基準は、逐次近似の途中で得られるポテンシャルである。鉄の透磁率が磁場によって変化する非線形問題では、磁束密度の高い領域がポテンシャルの変化が大きいため、簡単には隣合う節点間の磁場勾配に応じて要素の再分割を行うことができる。

この自動メッシュ発生法では、計算が進むにつれて、新たにメッシュが追加されるので、個々のメッシュ形状の整形が必要になる。例えば平たい三角形ではポテンシャルの計算精度が悪くなるので、隣合う要素の形状を考慮しながらできるだけ正三角形に近づくように三角要素の組み替えを行う。このような組み替えにはDelaunay三角法が適用できる。

Delaunay三角法は分割使用とする三角要素と辺を共有する周りの三角要素を構成するメッシュ点（最大6節点）に対して1つの多角形を作り、次の規則で新しい要素を作る。

(i) 要素の重心または頂点から等距離にある点を新しい節点とし、新節点とすでに存在する各節点を結ぶ直線を垂直に二等分する線分を辺とする多角形を作る。多角形が六角形であれば新節点と元の節点を結んでできる6個の三角形が組み替えられた新しい要素である（図2）。

(ii) 多角形の頂点を中心として、最も近い節点までの距離を半径とする円を描き、円周上の3点で三角要素を作る。

(iii) 上の操作を補完する要素の分割に、要素内に新節点を作り、3つの頂点を結んで3個の要素をつくる。または一辺の中点に新節点を作り、これに対向する頂点と結んで2分割する。この辺を共有する要素も同じように2分割する。

(i)の場合は、作られる要素が扁平になる場合（多角形が六角形にならない場合）は元の要素を1部残して組み替える。このようにしても要素の数は2個増える。(ii)の場合は一辺を共有する2個の要素をそれぞれ2個の要素に分けるので、このときも2個増える。要素を構成する節点の組み替えができるのは、媒質の異なる境界および問題領域を越えない範囲である。

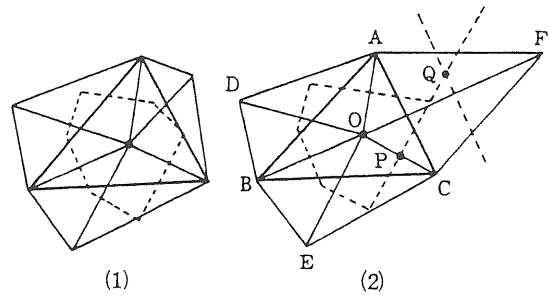


図2 Delaunay三角法による有限要素の自動発生（点線がVoronoi多角形である）

(3) 四角メッシュによる差分法（SIBYL, LINDA, MAREなど）

スカラーポテンシャル ϕ を記述する2階微分方程式を数値的に解くことを考える。このポテンシャルは $\nabla^2\phi=0$ を満足する。既知のポテンシャルをもつ境界の中の領域に間隔 δ の正方形メッシュを描く。図3はこのネットの一部分を表す。番号の付いた点のポテンシャルが ϕ_1, ϕ_2, \dots であれば、点0における ϕ の方程式を有限差分方程式として次のように表すことができる。

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0}{\delta^2} = 0 \tag{43}$$

全てのメッシュ点に対してこの方程式をSOR法で解く。この方法で仮定されたポテンシャル分布の誤差は繰り返し計算によって緩和される。誤差は残差として表現され、所定の点の残差は次式で与えられ

る。

$$\text{点Oの残差} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 \quad (44)$$

仮定された分布に対する残差を各メッシュ点に対して決定し、その点のポテンシャルを修飾するためにこの残差を利用する。この方法で解は急速に収束し、全ての残差が許容誤差以下になったところで最終解が得られる。

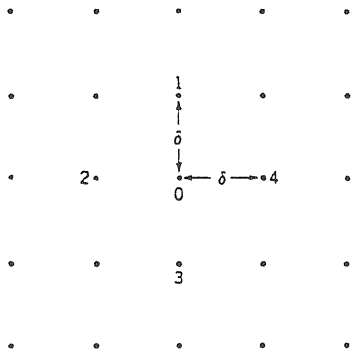


図3 四角メッシュによる磁場計算に使用されるメッシュ

対象領域に電流の流れる導体があれば。スカラーポテンシャルは最早使用できない。この場合はベクトルポテンシャルAを使用しなければならない。この場合の残差は次のようになる。

$$\text{点Oの残差} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 4A_0 - \mu I a \quad (45)$$

ここでaはメッシュの面積である。

SOR法はスカラーポテンシャルの場合と同じである。ベクトルポテンシャルを使用するとき、鉄境界の状況はスカラーポテンシャルの場合よりもっと複雑である。後者の場合境界のポテンシャルが指定され、境界上のメッシュ点には残差が現れない。ベクトルポテンシャルでは鉄表面に垂直に入る磁力線の条件から、Aの法線方向の微分はゼロである。このことは鉄表面内部の"仮想的メッシュ点"を計算に含めることで考慮される。これらの点のベクトルポテンシャルは、鉄表面に関して仮想点と鏡像の関係にあるギャップ内の点のベクトルポテンシャルに等しいと置かれる。

メッシュ線上にない境界をもつ領域の磁場計算において、SOR法でベクトルポテンシャルを使用する際の不利なことは鉄-空気境界における法線微分がゼロという条件から生ずる。この種の境界条件に

対して使用される仮想点は最早真のメッシュ点上ではなく、相当量の補助的な計算をしなければならない。

この欠点を克服するため、次のように修正スカラーポテンシャルψが導入された。Aが通常のベクトルポテンシャルであれば、

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} \quad (46)$$

と置いて、

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \mu I + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \quad (47)$$

yに関して積分すれば、

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = \int_0^y \mu I dy + \frac{\partial A}{\partial y} + \text{積分定数} \quad (48)$$

しかしx軸に関して対称であれば、 $\partial A / \partial y = B_x$ で積分定数はゼロである。したがって、

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} = B_x + \int_0^y \mu I dy \quad (49)$$

ψは電流のない領域ではスカラーポテンシャルのようであるが、電流のある領域では所定の点において取り囲まれた全電流に関係する。

ψのラプラシアンは次式で与えられる。

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \mu I dy \quad (50)$$

電流のない領域ばかりでなく、垂直な境界を除きコイル領域においても、ψのラプラシアンはゼロである。

問題によっては、ラプラシアンが次式で与えられる別のポテンシャルψ'を利用することも可能である。

$$-\frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \mu I dx$$

(49)から、関数ψは鉄-空気境界で固定値をもつことも分かる。コイルを取り囲む領域では $\int_0^y \mu I dy$ が変化すれば、関数ψはxと共に変化する。コイル

間の領域では、取り囲まれた全アンペアターンに比例する値をもつ。

図4はKEK-PSの4極電磁石磁極まわりの1つの象限を示し、等磁気スカラーポテンシャルと磁力線(等ベクトルポテンシャル線)を示したものである。磁力線の間隔は磁場の強さの尺度を与える。この方法で磁極形状を約0.05mm以下の精度で決めることができる。

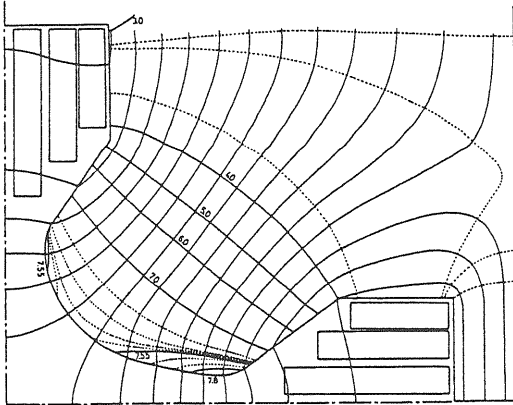


図4 KEK-PSの4極電磁石磁極まわりの等磁気スカラーポテンシャルと磁力線

第8章 磁場測定の方法

磁場測定データは加速器計画の設計、建設、設置、運転の各段階において必要になる。設計段階では設計に基づくモデルが製作され、加速器に要求される磁場性能が得られているかどうかの確認と、もし得られていなければ電磁石の設計変更が行われる。この段階で電磁石の大量生産、大量磁場測定の方法も検討される。

建設段階では電磁石が大量生産され、磁場性能とともに磁場分布からアライメントのためのフィジューシャル点 (fiducial point) が決められる。磁場測定により電磁石個々のバラツキ (個体差) が分かり、加速器に組込むときに、リング全体として個体差が薄められるように電磁石の位置をシャッフリングするためのデータが得られる。

また、運転段階では、ビームコミッショニングのときに励磁パターンや軌道補正の運転パラメータを決めたり、軌道シミュレーションに必要である。

(1) 磁場測定の目的

電磁石は確立した品質管理の基で製作されるが、加速器に組込む前に最終的な磁場性能の測定が行われる。この測定により、製造段階における品質管理の基準を再確認することの他に、加速器に要求される性能が得られるか否かの最終判断が行われる。電磁石の製作に使用された鋼板などの材料の特性のばらつき、製作工程における機械的誤差のばらつき、等から電磁石の磁場特性にも変化が現れる。大量の電磁石を使用する加速器では、この変化は統計的な偏差として評価される。

特に大型シンクロトロンのように短期間に多数の電磁石を製作する場合は、品質管理を厳重に行い、問題が発生しないように注意しなければならない。電磁石の磁場測定は迅速に行い、問題の発見が遅きに失しないよう心掛けることは大切である。

測定される電磁石のパラメータは、各電流レベルにおいて、

- 1) 各電磁石の実効長とその分布
- 2) 磁場、磁場勾配の絶対値
- 3) 磁場安定度
- 4) 電磁石の多極成分

などである。

偏向電磁石の実効長に関して各励磁電流レベルで個体差が大きければ、加速時の閉軌道歪み (COD) が時間的に変化し、ダイナミックな軌道補正が必要

になる。4極電磁石の実効長の個体差はベータトロン振動の共鳴幅を増加させる。また、磁場の絶対値の正確さは偏向電磁石の場合、ビームエネルギーの精度に関係し、4極電磁石の場合はチューンの精度に関係する。磁場の安定度は使用する鉄の磁気特性に関係し、磁気余効 (magnetic aftereffect) は電流の変化に対して磁場の変化に時間遅れができるため、望ましくない。この他、磁場測定段階で発見される電磁石の振れ、寸法誤差などの機械的誤差や、冷却水の温度上昇によるコイルへの影響など多くの情報が得られる。4極電磁石の振れはスキュー4極成分をもたらし、水平、垂直運動のカップリングの原因になる。

(2) 磁場測定の原理

加速器における磁場測定は多くの場合、市販の磁場検出器では加速器に要求される精度を得ることができないため、それぞれの研究機関で開発されている。加速で要求される磁場測定精度は 10^{-4} 以下であるため、測定の原理的な精度ばかりでなく工作上的精度、励磁電流の安定度、測定環境 (周辺温度、冷却水温度など) の安定度なども精度に影響する。

磁場測定に利用できる磁場依存性のある現象として次のようなものがある。

- 1) 磁場中で電流の流れる導体受ける力
- 2) 時間的に変化する磁束と交差する導体ループに誘導される電圧
- 3) 磁場中で歳差運動をする核磁気モーメントの共鳴周波数
- 4) B_s のように磁場に強く依存する電気抵抗
- 5) ホール効果
- 6) 非常に低い磁場で飽和するパーマロイのような物質の透磁率変化

これらの現象を応用すれば精度は異なるが磁場の情報が得られる。中でも、導体のループ (サーチコイル) に誘導される電圧の測定は便利で、線形性および精度に関して優れている。加速器、特にシンクロトロン磁場測定においては、この現象を利用する多数の測定装置が開発されている。

核磁気共鳴を利用すれば非常に高い精度が得られるが、信号が弱いいため、電気ノイズの影響を受けやすい。パーマロイストリップの飽和は100ガウス領域の磁場で精度のよい測定ができる。

高エネルギー加速器でよく使用される測定法で達成できる精度を磁場の関数として図1に示す。

磁場測定は3つのカテゴリーに分類できる：直流磁場測定、パルス磁場測定、大きな磁場勾配の測定

である。原理的に多くの方法がこれらのカテゴリーを α とすれば、で利用される。

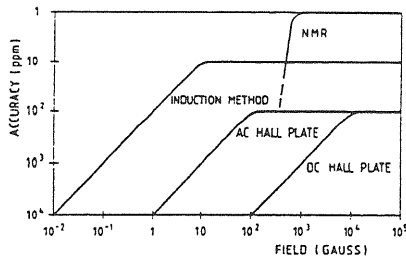


図1 磁場測定の方法と適用範囲

(3) 直流磁場の磁場測定

[3-1] フローティングワイヤー法

(Floating wire method)

電流の流れる導体に働く力を利用する方法で、磁場が正確に ($\pm 0.02\%$) 測定できる。今ではあまり利用されていない方法であるが、過去には一般的であった。現在はコンピュータによる数値計算に置き替ってしまっている。磁場中で張力をかけた導体に電流を流せば、導体の張力と電流に相当する運動量をもつ荷電粒子の軌道に沿って湾曲する (図2)。磁場強度は次のベクトル積の関係によって、電流の流れるワイヤーに働く力で定義される。

$$\frac{d}{dt}(mv) = ev \times B \quad (1)$$

力はワイヤーが磁場に垂直のとき最大であり、力の方向はワイヤーと磁場で作られる面に直角である。この力の最大値は次式で与えられる。

$$F_m = i\ell B \quad (2)$$

ここで ℓ はワイヤーの長さである。mks単位システムでは電流を [A]、長さを [m]、磁場を [Wb/m²] で表せば、力はニュートン [N] である。剛性と重力の影響を減らすため、ワイヤーには可撓性のある焼鈍されたアルミ線が使用される。ワイヤーに働く張力は

$$F = 2T \sin(\alpha/2) \quad (3)$$

$v \perp B$ であるから、ワイヤーの曲率半径を ρ 、角度

$$F_m = i\ell B = ip\alpha B \quad (4)$$

$\alpha \ll 1$ ならば、

$$F = T\alpha \quad (5)$$

したがって、

$$T = ipB = i \frac{pc}{e} \quad (6)$$

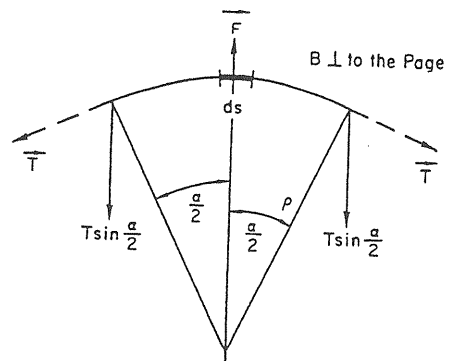


図2 Floating wireに働く力の釣合

[3-2] 誘導コイルによる測定

磁場のもっとも有用な測定法は閉じた回路と交差する磁束の変化によって回路に誘導される起電力 (EMF, ElectroMotive Force) を測定する方法である。この方法は磁場と電場とのMaxwellの基本的な関係

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7)$$

を利用する。磁場 B の中にある面積 a 、ターン数 N のコイルを考える。もしコイルと交差する磁束密度が dB/dt で変化すれば、瞬時の誘導電圧 V は

$$V = N \frac{d\Phi}{dt} = Na \frac{dB}{dt} \quad (8)$$

である。ここで Φ はコイルと交差する全磁束である。誘導電流は $i = V/R$ 、ここで R はコイルと回路の抵抗である。時間 Δt の間に有限の変化 ΔB があれば、蓄積される電荷 Q は、

$$Q = \int_t^{t+\Delta t} i dt = \frac{Na}{R} \Delta B \quad (9)$$

である。この電荷をコンデンサー C に蓄えたときの電圧は $V = Q/C$ で与えられるので、

$$\Delta B = \frac{CR}{Na} V \quad (10)$$

一様磁場においてこのような磁束変化を与えるため、コイルを磁場中の静止位置から磁場のない場所へ動かす。この場合の磁束変化 ΔB は磁場強度 B に等しい。測定精度が磁場の変化率（コイルの移動速度）に依存しないようにするため、積分回路の時定数 CR を積分時間 Δt に比べて長くする。測定精度はコイル寸法とコイル定数および電圧計（マルチメータ）の較正に依存する。コイル Na の較正は寸法の正確に分かった Helmholtz コイルの標準磁場または磁場が正確に分かっている標準電磁石で行うことができる。

磁場分布の詳細を調べるためには、ターン数の多い小型のサーチコイルが使用される。この場合、コイルは標準磁場で較正する。

フリップコイル (flip coil) と呼ばれるプローブは、サーチコイルをパルスモータまたはサーボモータにより 180 度だけ回転 (フリップ) させるもので、その間にコイルに誘導される電圧を積分する。フリップ前のコイルの初期位置は磁場に正確に垂直でフリップ角度は正確に 180 度でなければならない。しかし正確な角度合わせを省略するため、積分回路で誘導電圧の片極だけの積分を行えば $180 + \alpha$ 度のオーバーフリップで、初期角と最終角の間で積分範囲を確保するだけでよい。180 度のフリップでコイルを通る磁束の方向は逆転し、上述の簡単なサーチコイルに比べると、流れる電荷は 2 倍になる。この方法で 0.01% 以下の精度が得られる。

サーチコイルを静磁場の中で一定速度で回転させる回転コイル (rotating coil) 法はこの測定法の 1 変形である。コイルが回転するため、その交流出力を交流増幅器に伝達する回転ブラシが必要である。回転ブラシの接触不良によるノイズが問題であるが、最近ではノイズの心配のない水銀接触器が利用できる。市販装置 (Rawson-Lush rotating coil Gaussmeter) で得られる精度は約 0.01% である。このような装置は磁場の相対値を求める測定に適している。

図 3 に示すような電磁石のボアーに収まる軸周り

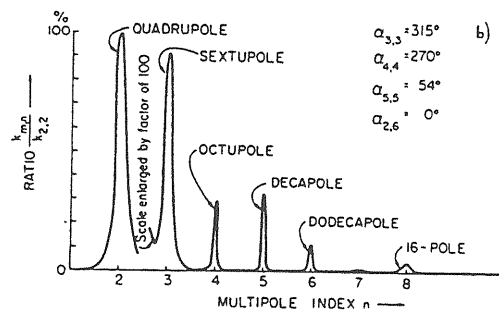
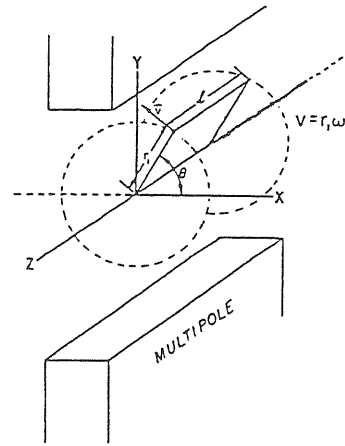


図 3 ハーモニックコイルによる磁場測定と周波数分析装置からの出力信号

の回転コイルはハーモニックコイルとして、多極磁場成分の測定に利用される。VFC を利用する誘導電圧のデジタル積分器とハーモニックコイルの回転角を測定する角度エンコーダを採用するこの方法は加速器の磁場測定法として最も優れていると考えられている。誘導電圧を周波数分析すれば図 3 のような磁場成分に分解されたスペクトルが得られる。コイル長が電磁石より十分長ければ軸方向の磁場積分値としての多極磁場成分が得られるので、大量生産される電磁石の磁場測定に適している。この場合回転速度が一定であれば、

$$E = \mu_0 \omega N \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^n \sin(n\theta + \alpha_n) \right] \quad (11)$$

ここで N はコイルの巻数、 ω は回転角速度、 n は多極成分の次数 (1=2 極、2=4 極、3=6 極成分など)、 a_n は n 次成分の大きさ、 α_n は n 次成分の位相である。誘導電圧をそのまま周波数分析装置に入力すれば各成分の大きさが得られる。しかし、一般に回転速度は一定ではないので、誘導電圧を積分することにより、

$$\int Edt = -\mu_0 N \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n) \quad (12)$$

が得られるので、やはり周波数分析装置に入力して分析できる。(12)の a_n と α_n が磁場測定で求めたい磁場成分と位相である。(11)との違いに注意が必要である。また、磁場積分器は高精度の基準電圧発生器と精密な内蔵クロックを使用して較正される。回転軸のベアリングは滑らかな回転を保証しなければならない(例えばエアベアリングの使用)。積分器のドリフトやノイズなどにも注意を払えば、この方法で 3.5×10^{-5} のrms精度が得られる。

別の誘導電圧測定として、磁場中にWまたはCuBeのワイヤーを張り、これを動かすことによりワイヤーが磁束と交差することにより誘導される電圧を積分するストレッチドワイヤー法(stretched wire method)がある。測定精度はワイヤーの位置精度で決まる。感度が低い、アパーチャの小さな強い磁場の測定に適している。

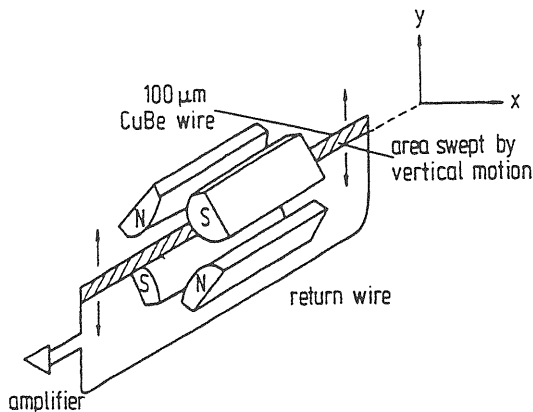


図4 ストレッチドワイヤー法

[3-3] 核磁気共鳴による測定

(NMR, Nuclear Magnetic Resonance)

最も正確な磁場測定の方法は陽子、重陽子の異常磁気モーメントを利用することである。磁気モーメントは外部磁場の周りを磁場強度に比例するLarmor周波数で歳差運動する。核共鳴吸収による信号からこの共鳴周波数を観測し、磁場を測定する。磁場の測定精度はppmレベルである。陽子または重陽子の磁気モーメントの大きさだけに依存する測定法であり、磁場の一次基準としての絶対値が得られるため磁場測定に欠かすことはできない。

磁気モーメント μ をもつ原子核は静的外部磁場 B_0 の中で $(2I+1)$ 個のエネルギー状態に分かれる

(I はスピン量子数)。これらの状態間のエネルギー差は

$$\Delta E = \mu B_0 / I \quad (13)$$

である。この外部静的磁場に垂直に共鳴周波数

$$f = \Delta E / h = \Gamma B_0 \quad (14)$$

に等しい交流磁場を加えればレベル間の遷移が起こる(ただし、 $\Gamma = \mu / hI$)。この遷移が引き続き起こってもスピン格子緩和時間で決まる熱的平衡状態が維持されるため、陽子(重陽子)は絶えず交流磁場からエネルギーを吸収する。陽子と重陽子について Γ の値は詳細に測定されていて、

$$\Gamma_{p,H_2O} = 4257.608(12)[Hz/G] \quad (15)$$

$$\Gamma_{p,D_2O} = 653.569(2)[Hz/G] \quad (16)$$

である。この方法によりCERNのミュオン蓄積リングの磁場分布を1ppmの精度で測定している。

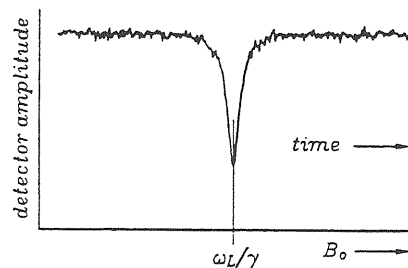
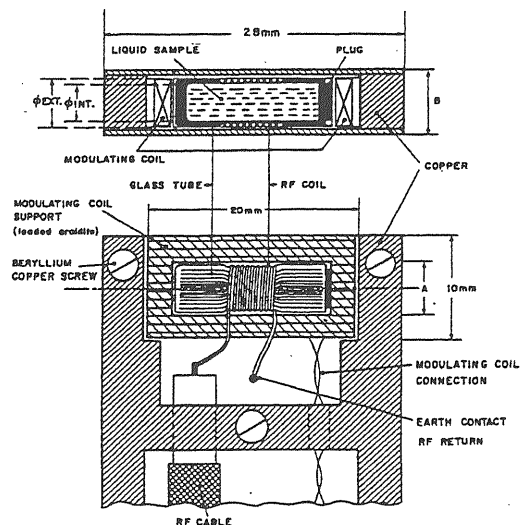


図5 NMR磁場測定器の測定ヘッドと吸収信号

図5に示すように液体サンプルに巻かれたコイルがインダクタンスとしてLC回路を構成し、陽子（重陽子）に共鳴周波数を供給する。さらに、外部磁場に平行に振幅で B_0 の数100 ppm程度、周波数30 Hzの三角波の変調磁場 B_{mod} をかける。 B_{mod} がゼロになる瞬間に共鳴が起こるように共鳴周波数を調整すれば、この周波数が B_0 を与える。信号の感度を上げるために H_2O には $NiSO_4$ 、 D_2O には $GdCl_3$ の常磁性塩が0.1モル添加される。

NMRの吸収信号はLC回路のRF電圧の振幅の変化として現れるが、信号レベルが非常に小さくRF電圧の0.1%程度である。このためRF電圧は極めてクリーンでなければならない。

4種類の陽子 (H_2O) プローブを使用して0.45~21 kG、2種類の重陽子 (D_2O) プローブで20~68 kGの範囲の磁場測定が可能である。しかし、NMRには

- ・試料の大きさの範囲で磁場が一様でなければならない
 - ・磁場の時間変化が速くはいけない
 - ・一度に一カ所しか磁場測定ができない
- などの短所がある。

[3-4] ビスマス螺旋 (Bismuth spiral)

ビスマス線の抵抗は20kG程度の磁場中で50%も増加する。低磁場では抵抗-磁場特性は非線形であるが、約3~25kGの範囲で特性はほぼ線形になる。一般にこれらの抵抗は鋳物として螺旋状に作られる。ビスマスの抵抗には強い温度依存性がある上に、機械的変形に敏感である。機械的な保護と温度制御をすれば、ビスマス抵抗は磁場サーバイに非常に便利である。

[3-5] ホール素子 (Hall generator)

外部磁場中で金属板に電流を流したとき、電流に直角な方向にほぼ磁場に比例する電位差が現れる(図6)。この現象はホール効果 (Hall effect) と呼ばれる。この電位差は比較的小さく、精度1%程度の磁場測定に簡単に利用できる。高い精度を得るためには、ホール電圧の温度変化による影響を除かなければならない。このために、ホール素子を恒温槽に入れるか、あるいは温度を考慮して較正する。温度依存性の少ないホール素子も利用できるが、感度は低い。ホール素子に垂直な弱い磁場成分を測定する場合、平行に強い磁場が存在すればplanar Hall効果が現れ、測定が困難になる。ホール素子は極低

温でも使用できるが、de Haas-Schubnikov効果のためホール係数に振動的な磁場依存性が現れ、較正が複雑になる。

使用されるホール素子はInAsの板で、Siemens社から販売されている。この素子は0.2Aの電流で約20mV/1000Gの出力が得られる。ホール素子は簡単な回路で磁場の点測定ができるが、短所として、

- ・ゼロ点のオフセットがあり、出力が非線形であるため、NMRによる較正が必要である。
- ・温度に敏感で、 ± 1 °Cの温度制御が必要である。
- ・磁場が非線形になれば、補正が必要である。
- ・プローブのアライメントを正確に行う必要がある。
- ・磁気抵抗と熱起電力の影響を受ける。
- ・使用している間にエージングが起こり、しばしば較正しなければならない。温度制御を十分に行えば、 2×10^{-4} の測定精度が得られる。

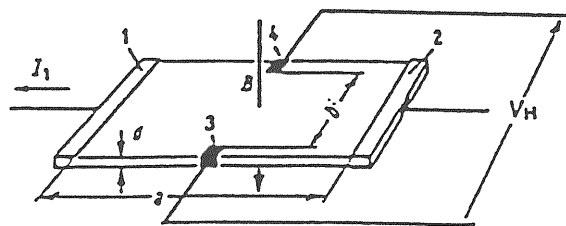


図6 ホール素子、1-2は電流端子、3-4はホール電極

(4) 時間的に変動する磁場の測定

交流またはパルス磁場の測定は静磁場に使用される方法とは異なる。変動磁場は静止コイルに電圧を誘導する固有の性質があるため、磁束の変化率の測定に利用できる。ゼロ磁場からサイクル内のある磁場までの磁場変化率を積分することにより磁場の強さが測定できる。磁場の瞬時の強さを測定するための積分装置のタイミングが最も重要である。測定サイクルの開始時刻から測った時間の関数として磁場が測定される。

[4-1] 積分型磁束計 (integrating fluxmeter)

積分型磁束計は、すでに直流磁場の測定で述べたように、パルス磁場の測定にも適用できる。原理は同じであるが、変化する磁場の中にサーチコイルを固定して置けばサーチコイルを通る磁束が変化する。精密な測定では信号増幅器のゼロ点のドリフトが問題になり、その補正が必要である。

積分型磁束計はサーチコイルを通る磁束の全変化だけが測定されるので、この方法では残留磁場は測定できない。時間の関数として全磁場を測定するためには、直流磁場測定による残留磁場の測定（ピーキングストリップ法またはホールプローブ）が必要である。

ある時刻の磁場を測定するために積分器に積分の開始トリガーと終了トリガーを与える信号が必要である。これらの信号は通常電磁石を励磁する電源の制御回路から供給される。

磁場の一様性を測定するため基準電磁石と比較する精密な測定方法も採用されている。図7のように基準電磁石のギャップに1つのコイル S_r を固定し、測定する電磁石のギャップ内には位置の移動ができるコイル S を置き、両者の誘導電圧の差として基準電圧からの磁場の誤差を測定する。この方法で電磁石の基準電磁石の中心磁場からの誤差の分布が測定できる。

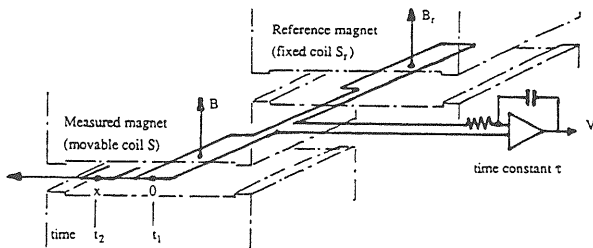


図7 磁場の精密測定のためのコイルの配置

[4-2] ピーキングストリップ (peaking strip)

低磁場において精密に磁場を測定する装置は磁気的なピーキングストリップである。磁化方向が逆転するとき、磁性体のストリップを取り囲むピックアップコイルに誘導される電圧パルスに基づく方法である。誘導電圧パルスを最大にするため、磁性体サンプルは可能な限り高い透磁率と角形のB-Hヒステリシスをもつものが適している。サンプル内に誘導される磁極に関して減磁係数を最小にするため、サンプルの長さ/直径の比を大きくする。

典型的なピーキングストリップとしてMoパーマロイのワイヤが使用される。代表的なサンプルの寸法は直径0.02 mm、長さ50 mmのものでボア径の小さな石英管に密封し、注意深く焼鈍したものである。細いワイヤの小さなピックアップコイルをストリップの中央部に巻き付け、バイアス磁場をストリップに与えるため、ソレノイド型のバイアスコイル中に

入れる。図8(a)はバイアスコイル内に入れたピーキングストリップの概略図である。サンプルへの印加磁場は50 Hzの微小振幅でバイアスコイルを励磁してヒステリシスループを描くようにする。サンプルがゼロ励磁される度にピックアップコイルに電圧パルスが誘導される。サンプルがヒステリシスループを描くと逆極性の2つのパルスが誘導される。図8(b)にヒステリシスループとピックアップコイル現れる誘導電圧を示す。

定常磁場の測定にはバイアスコイルにバイアス電流を流す。この電流により測定される磁場と同じ方向または逆方向にサンプルに磁場がかかり、正味の磁場はゼロである。微小振幅の50 Hz励磁により2重の信号(図8(b))が現れ、パターンを安定させるための位相付き50 Hzの掃引回路でオシロスコープに表示する。出力信号の2つのピークが等しくなるようにバランスさせる。このときのバイアス電流が直流磁場に相当する。

ピーキングストリップは交流磁場またはパルス磁場の測定にも応用できる。観測すべき磁場は必ず dB/dt をもつので、50Hzの振動磁場成分は必要ではないが、測定すべき直流バイアス磁場が必要である。パルス電磁石で、1つの出力ピークはバイアスコイルでかけられた磁場を通過するとき観測される；他の出力ピークは電磁石サイクルの磁場が下がる側の同じ磁束密度で現れる。励磁パルスに比べて出力のピークは非常に狭く、バイアスコイルで設定された値を励磁パルスが通過する瞬間を示す時間信号を与える。磁極面を横切る半径方向の磁束分布のような

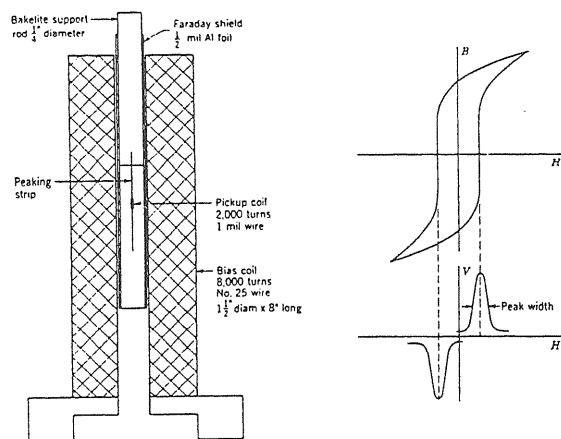


図8 (a) ピーキングストリップとバイアスコイル、(b) ヒステリシスループとピックアップコイルの誘導電圧パルス

比較測定では、時間信号を与える1つのピーキングストリップを固定位置に置き、他のピーキングスト

リップを磁場の中で動かす。2つの信号を同じオシロスコープ上に表示させ、時間が一致していれば2カ所の磁場は一致する。もし異れば一方のバイアスを調整して一致させ、バイアス電流の差が2カ所の磁場の差である。このようなピーキングストリップからのパルスは、パルス加速器に設置されたビーム入射装置やパルス運転される装置などの他の装置の運転に必要な正確な時間信号を得るために使用できる。ピーキングストリップの感度は磁場の変化率 (dB/dt) とピーキングストリップワイヤの長さにわたる磁場の一様性が出力ピークの幅に影響する。磁場の変化率が分かれば、オシロスコープで観測されたピークの時間幅はガウス幅に変換できる。例えば 10^4 gauss/sec の磁場変化率では0.2ガウス程度の半値幅をもつ出力ピークが観測される。

ワイヤサンプルの長さ全体の磁場が一様でなければ、出力ピーク幅は広がる。ワイヤに沿って0.4 gauss/cmの磁場変化があれば、出力ピーク幅に好ましくない影響を与える。このことは比較的一様な磁場で長いピーキングストリップを使用する場合に制限があることを意味する。短いストリップは有限の磁場勾配の測定に使用されるが、誘導される磁極による減磁効果のため実効透磁率が減少する。このため出力ピークの振幅が減少し、ピークが広がる。

測定器の使用上の重要な制限はバイアスコイルの物理的長さにより、磁極間隔の広い電磁石において有効である。使用範囲はバイアスコイルが発生できる磁場、数100ガウスに制限される。バイアスコイルを大きくすれば高磁場の発生ができるが、強いバイアス磁場により磁極面における磁束分布が影響を受ける。

[4-3] 核磁気共鳴

(Nuclear Magnetic Resonance)

前に扱った陽子磁気モーメントの歳差運動の共鳴周波数を利用する磁束計はパルスまたは交流磁場の測定にも利用できる。変動磁場への応用では、サンプルを取り囲むコイルに前もって設定した周波数をかけておけば、磁場がこの周波数で共鳴する値を通過するときコイルのRF信号のレベルが低下するので、この信号を検出する。

(5) 磁場勾配の測定

シンクロトロンにおいて強収束 (AG収束) の条件がパルス電磁石の加速サイクル全体で維持されなければならないので、偏向磁場に対する磁場勾配の

比 $l_{Q,eff}(dB/dr)/(l_{B,eff}B)$ ($l_{Q,eff}$ と $l_{B,eff}$ はそれぞれ4極電磁石と偏向電磁石の実効長さ) は磁場の強さには無関係な量である。機能分離型の強収束シンクロトロンでは $l_{Q,eff}/l_{B,eff}$ の値は小さく、4極電磁石のポア径によって発生できる磁場勾配が決まり、加速器のチューンに合わせて $l_{Q,eff}(dB/dr)$ が決められる。一般的に4極電磁石の最大磁場勾配は15~20 T/mである。これは磁極の半径方向に1 cm当たり0.15~0.2 Tの磁束変化に相当する。非常に小さなサーチコイルでもその断面の中で磁場は大きく変化する。実用的な4極電磁石では有効アパーチャ内で磁場勾配はほぼ一定であるので、適当な形状のサーチコイルを使用することによって誤差は補償され、磁場勾配の測定誤差は小さくなる。しかし、磁場勾配が急激に変化する領域 (アパーチャの端) の測定に比較的大きなコイルを使用すれば誤差は大きくなる。これらの誤差もコイルの形状比 (高さ/径) を適当に選ぶことによって必要なオーダーにまで下げることができる。適当な形状比のサーチコイルを使えば、磁場の高次の項をキャンセルできて、サーチコイルに誘導される電圧はコイル中心における真の磁場を与えるようにすることができる。

[5-1] 磁場勾配コイル (gradient coil, twin coil)

パルス運転される電磁石の励磁サイクルのピークまたはその近傍の大きな磁束密度における磁場勾配の測定は前節の積分回路を用いる静止コイルで測定できる。ゼロ磁場から希望する磁場まで積分するため、積分時間を決めるトリガーパルスが必要である。これには測定対象の4極電磁石に直列に接続された偏向電磁石のギャップ内のある点の磁場を検出して、低磁場ではピーキングストリップ (または励磁電源の通電開始信号)、高磁場では核磁気共鳴磁束計 (または電源) からのトリガー信号が使用できる。

積分型磁束計を使用する代表的な磁場勾配コイルは半径方向に短い距離 Δr だけ離れた同じ形状で同じサイズの一組のコイルから構成される (図9)。磁場勾配の測定点は2つのコイルの幾何学的中心である。コイルを較正してバランスをとれば、2つのコイルの出力差 ΔB から磁場勾配 $\Delta B/\Delta r$ が得られる。このようなコイルは磁極間の軸方向および半径方向の磁場勾配の分布測定に使用される。電磁石端部におけるフリッジング磁場の測定にはもっと小さなコイルを使用する。また電磁石両端の磁場も含む平均勾配を測定するために電磁石全長にわたる長いツイーンコイルも使用される。

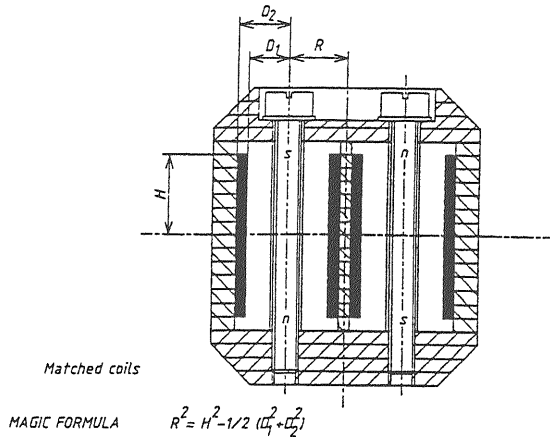


図9 磁場勾配測定コイル (gradient coil)

[5-2] 振動コイル (vibrating coil) 法

振動コイルは磁場勾配を直接測定するために開発された測定装置である。一様でない磁場中で小型コイルを一定の周波数と振幅で振動させる。このときの電圧出力は振動振幅の両端の磁場の差 ΔB に比例する。コイルの出力電圧は正弦波で、最大振幅は次式で与えられる。

$$V_m = 2\pi f \Delta x N a \frac{\Delta B}{\Delta x} \quad (17)$$

ここで、 f = 振動周波数

Δx = 振幅

Na = コイル定数 (ターン数と面積の積)

$\frac{\Delta B}{\Delta x}$ = 磁場勾配

装置は磁場勾配が既知の磁場中で較正する。上に述べた装置は数100ターンの非常に小さな軽いコイルを図10に示すようにオーディオスピーカークのダイヤフラムに取り付けたストローにマウントしたもので、スピーカークはオーディオアンプにより200Hz以下の周波数で約0.5 mmの振幅で振動する。

(6) 残留磁場の測定

大部分のシンクロトロン電磁石はパルスによって一方向に励磁される。磁場はゼロ (またはゼロに近いところ) から最大値迄変化し、ゼロまで周期的に戻る。残留磁場の大きさは磁場がゼロまで戻るまでの間の励磁サイクルに強く影響される。残留磁場による磁極間隙の磁場分布と磁場勾配は励磁電流による磁場とは異なる。低磁場 (入射磁場) では残留磁場は励磁磁場に加算されて磁極間の全磁場になる。そ

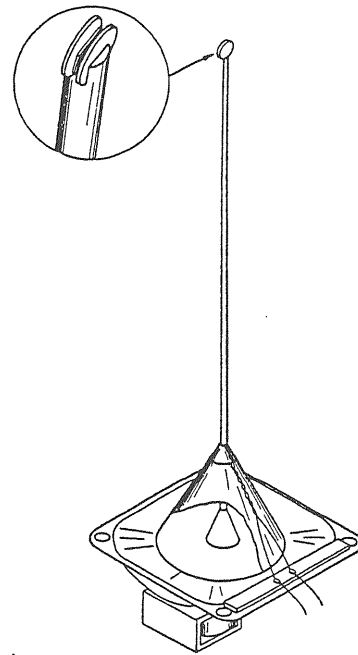


図10 振動コイル法

の結果、勾配は高い励磁の場合とは様子が異なる。励磁による部分だけではなく、全磁場を測る測定法が必要である。コイルの誘導電流による出力は変化率 dB/dt による成分だけを測定する。この問題は励磁サイクルの低磁場領域で最も深刻で、サイクル後半の高磁場の影響を受けずにサイクル初期の弱い磁場だけを必要な精度で測定する装置が必要である。

良い方法はピーキングストリップを利用する方法である。勾配のある磁場中で2つの読みが得られるように、2つのピーキングストリップを短い距離離して軸を平行にして使用する。各ピーキングストリップをバイアスコイル中に入れ、ストリップを通る正味の磁場がゼロになるとき信号のピークが得られるピックアップコイルを付ける。2つの出力信号をオシロスコープ上に表示する。同じバイアス磁場を2つのストリップにかけると、2つの信号ピークは勾配磁場の中で時間的にずれる。バイアス電流を調整して2つのパルスを時間的に一致させれば、2カ所の磁場の差がバイアス電流によって直接測定できる。間隔が正確にわかれば、磁場勾配が決定できる。精度は25Gに磁場における勾配で約0.5%である。この方法により残留磁場と渦電流による磁場の和が測定できる。

(7) ハーモニックコイルによる多極磁場成分の測定 (harmonic coil)

[7-1] ハーモニック磁場測定法

周波数分析装置 (frequency analyzer) を用いて、図11に示すようなハーモニックコイルに誘導され誘導電圧から磁場成分の周波数成分と位相を分析することができる。この装置により直ちに基本成分に対する比を求めることができる。円柱座標で表した磁場の r, θ 方向の成分はそれぞれ次式で与えられる。

$$B_r(r, \theta) = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} \sin(n\theta + \alpha_n) \quad (18)$$

$$B_\theta(r, \theta) = -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} \cos(n\theta + \alpha_n) \quad (19)$$

ここで、 $n=1$ (dipole)、 $n=2$ (quadrupole)、 $n=3$ (sextupole)、 $n=4$ (octupole)、 $n=5$ (decapole)、 $n=6$ (dodecapole) などである。

角速度 ω の一定速度で回転する半径 r の N ターンコイルの単位長さ当たりには誘導される電圧は、成分だけを考慮して、

$$E = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d}{dt} \int_0^r dr \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} \cos(n\theta + \alpha_n) \right] \\ = \mu_0 \omega N \left[\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^n \sin(n\theta + \alpha_n) \right] \quad (20)$$

である。ここで、 Φ は単位長さのコイルが取り囲む磁束である。

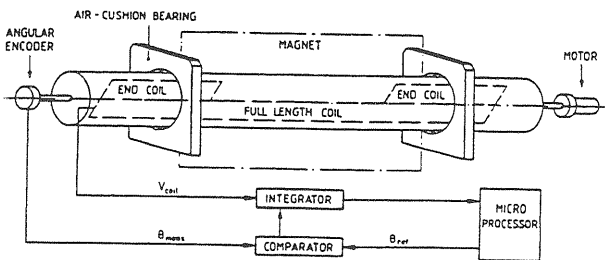


図11 一組の長、短ハーモニックコイルが電磁石より長い円筒枠に取付けられ、角度エンコーダからの信号で積分器をトリガーする。

高次の多極成分の感度を上げるため、基本磁場成分を打ち消すために bucking coil (図12) を使用する方法もある。図11のコイルで

$$N_1(r_2^n - r_1^n) = N_2(r_4^n - r_3^n) \quad (21)$$

の関係が成立てば、 n 次のハーモニックが打ち消される。ここで、半径 r_1 と r_2 は1つのコイルで巻数は N_1 、半径 r_3 と r_4 は別のコイルで巻数は N_2 である。すなわち、2つのコイルが電磁石の中心軸を通る同一平面上にそれぞれの半径で配置され、その差信号をとれば n 次成分がキャンセルし、誤差成分しか現れない。半径の大きい方がメインコイルである。

[7-2] 電磁石端部の影響

電磁石の端部では2次元的な電磁石の設計からは予測できない磁場成分が発生する。電磁石の性能はこの端部も含めて、1台ごとの性能チェックが必要である。このため電磁石全長についての磁場の積分値による評価が行われる。電磁石の長さが長く2次元の磁場範囲が広い場合には、端部の全体に対する割合は少ない。しかし、長さの短い場合には端部の占める割合が大きくなり、高い性能が要求される電磁石では端部シムで補正する必要がある。端部の測定に使用される測定システムを図13に示す。

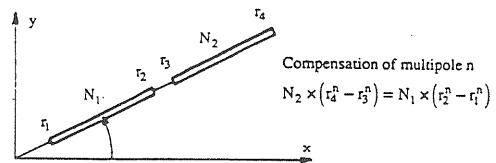


図12 高次の多極成分を測定するハーモニックコイル

4極電磁石に対して端部が直角である場合、端部 (fringing) で12極、20極成分が発生する。図14に示すように端部を切り取り、同相と異相の12極成分によるビームへの寄与を等しくすれば、この成分によるビームへの影響を避けることができる。端部コーナーを切り取る寸法を調節することで、12極および20極成分の影響を押さえることができる上に、端部がカットされるため磁束の端部への集中が減少するので、鉄の飽和に強くなる。

端部磁場を修正するため、磁極端部を取りはづしできる構造にして、整形加工する方法もある。PEPでは衝突点4極電磁石のポアー半径における4極磁場に対する全ての多極成分の影響を 10^{-4} 以下にするため、各磁極の端部は取り外しのできる構造にして、端部の再加工により目標を達成している。

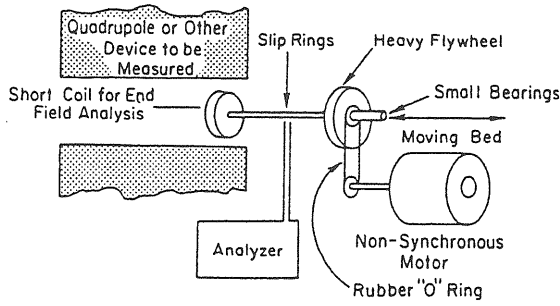


図 1 3 端部磁場の測定システム

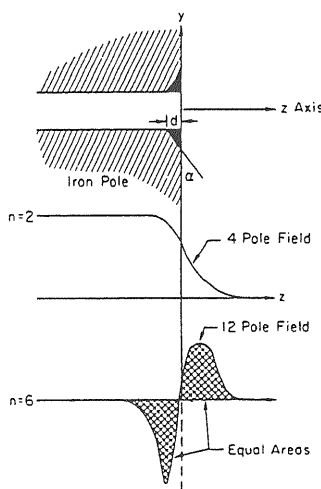


図 1 4 磁極短部の補正方法

(8) 多極磁場成分によるハーモニックコイルの誘導電圧

ここでは多極電磁石の磁極間隙（ボアー）に発生するハーモニック磁場成分を測定するための磁場プローブとしてのハーモニックコイルの誘導電圧について詳細に検討する。

[8-1] コイルに誘導される電圧

時間的に変化する磁場中におかれたサーチコイル (search coil) に誘導される電圧の一般式を求める。コイルに誘導される電圧は磁束の時間的変化として

$$E(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (22)$$

で与えられる。ここで Φ はコイルの囲む面積と交差する全磁束である。

$$\Phi = \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (23)$$

交差全磁束を時間微分することによりコイルの誘導電圧は

$$E(t) = -\int_S \left\{ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + [\text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) - \vec{v} \text{div} \vec{B}] \right\} \cdot d\vec{S} \quad (24)$$

で与えられる。Bの時間的変化はなく、 $\text{div} \vec{B} = 0$ 、および Stokes の定理を適用すれば、

$$E(t) = -\int_{\Gamma} (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{s} \quad (25)$$

磁場はコイル Γ に沿う線積分で与えられる。ここで、 $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ および速度 \vec{v} を円柱座標で表現する。

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} \quad (26)$$

$$\vec{B} = B_r\hat{r} + B_\theta\hat{\theta} + B_z\hat{z} \quad (27)$$

$$d\vec{s} = \hat{r}dr + \hat{\theta}rd\theta + \hat{z}dz \quad (28)$$

ここで角度座標だけが時間の関数であるので、

$$(\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{s} = r\dot{\theta}B_r dz - r\dot{\theta}B_z dr \quad (29)$$

となり、(25)の被積分項が得られる。

[8-2] ハーモニックコイルによる磁場測定

CobbとColeによる回転ハーモニックコイルによる磁場測定は、磁場をハーモニック展開で表す画期的な方法である。コイルの一辺を電磁石の中心軸に合わせ、他辺が磁場の中を一定速度で回転する。コイルに誘導される電圧はコイルが横切る磁束の変化率に比例する。

電磁石は一定電流で励磁され、磁場が空間的に変化していれば、磁場を横切るコイルが磁束の変化を捉え、コイルに電圧が誘導される。コイルは図15のように四角形をなし、1つの辺は回転軸に一致する。

- 1) コイルが十分短くて、電磁石中に位置し、2次元磁場だけを感じる場合には、 $B_z = 0$
- 2) コイルが十分長くて、コイル両端が電磁石の十分外側にある場合には、コイル両端で $\vec{B} = 0$

どちらの場合も、積分への寄与は B_r 成分のみである。

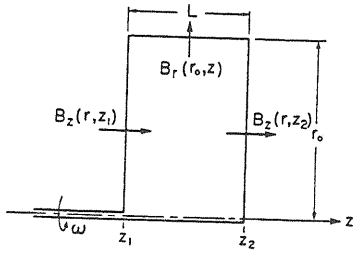


図 15 回転コイルで検出される磁場成分

$$E(r, \theta) = -r \dot{\theta} N \int_{z_1}^{z_2} B_r(r, \theta, z) dz \quad (30)$$

測定領域には電流が存在しないので、スカラーポテンシャル ϕ から $\vec{B} = -\mu_0 \text{grad} \phi$ によって磁場が与えられる。これより Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ が得られる。電磁石の十分奥では 2 次元場となるので、これを 2 次元の円柱座標で表わす。

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (31)$$

この解を変数分離法により求めるため

$$\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (32)$$

を代入すれば、

$$\frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \pm n^2 \quad (33)$$

すなわち、

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \pm n^2 \Theta = 0, \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \mp n^2 R = 0 \quad (34)$$

1) $n=0$ のときは

$$\Theta = E + F\theta, \quad R = G + H \ln r \quad (35)$$

$n \neq 0$ のときは

$$2) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0, \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0$$

$$\Theta = A \sin n\theta + B \cos n\theta, \quad R = Cr^n + Dr^{-n} \quad (36)$$

$$3) \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - n^2 \Theta = 0, \quad r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + n^2 R = 0$$

$$\Theta = A' \cosh n\theta + B' \sinh n\theta \quad (37)$$

3) の場合の解は $\phi(r, \theta) = \phi(r, \theta + 2\pi)$ の条件は n は整数のとき満足するが、 $\phi(r, \theta) = -\phi(r, -\theta)$ の条件は $A' = B' = 0$ である必要がある。したがって、3) の場合は考えなくともよい。

1) と 2) を一緒にして、一般解は、

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A \sin n\theta + B \cos n\theta)(Cr^n + Dr^{-n}) + (E + F\theta)(G + H \ln r) \quad (38)$$

磁気ポテンシャルの対称性により、ノーマル成分の場合は

<1> $\phi(r, \theta) = \phi(r, \theta + 2\pi)$ より、 $F=0$ 、 n =整数

<2> $\phi(0, \theta) = \text{finite}$ より、 $H=0$ 、 $D=0$

<3> m 極電磁石において、($m=2$ は 2 極、 $m=4$ は 4 極、.....)

$\phi(r, \theta) = -\phi(r, -\theta)$ より、 $EG=0$ 、 $B=0$

$\phi(r, \theta) = \phi(r, \frac{2\pi}{m} - \theta)$ より、

$$n = (2N-1) \frac{m}{2}, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

以上から、

$$\phi(r, \theta) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{A_{(2N-1)m}}{2} \left(\sin \frac{(2N-1)m}{2} \theta \right) r^{\frac{(2N-1)m}{2}} \quad (39)$$

このポテンシャルは <3> の条件を入れたため、ノーマル成分しか考慮されていない。スキュー成分に対する条件は、<3> の代わりに、

<3'> m 極電磁石において、($m=2$ は 2 極、 $m=4$ は 4 極、.....)

$\phi(r, \theta) = \phi(r, -\theta)$ より、 $A=0$

$\phi(r, \theta) = -\phi(r, \theta - \frac{2\pi}{m})$ より、

$EG=0$ および

$$n = (2N-1) \frac{m}{2}, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

以上から、

$$\phi(r, \theta) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{B_{(2N-1)m}}{2} \left(\cos \frac{(2N-1)m}{2} \theta \right) r^{\frac{(2N-1)m}{2}} \quad (40)$$

(39)(40)をまとめて、

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = & \sum_{N=1}^{\infty} \left[A_{\frac{(2N-1)m}{2}} \left(\sin \frac{(2N-1)m}{2} \theta \right) \right. \\ & \left. + B_{\frac{(2N-1)m}{2}} \left(\cos \frac{(2N-1)m}{2} \theta \right) \right] r^{\frac{(2N-1)m}{2}} \end{aligned} \quad (41)$$

これがノーマルおよびスキュー成分がある場合のポテンシャルの一般式である。

$(2N-1)m/2 = 1, 2, 3, \dots$ であるので、これを新しく n とおき、 $A_n \rightarrow a_n$ 、 $B_n \rightarrow b_n$ とすれば

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\sin n\theta) + b_n(\cos n\theta)] r^n \quad (42)$$

これより磁場成分を求めれば、

$$\begin{aligned} H_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} [a_n(\sin n\theta) + b_n(\cos n\theta)] \\ H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= -\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} [a_n(\cos n\theta) - b_n(\sin n\theta)] \end{aligned} \quad (43) (44)$$

磁極対称性から現れる磁場成分は

$m=2$ (2極電磁石) の場合 $n=1, 3, 5, \dots$ 次成分
 $m=4$ (4極電磁石) の場合 $n=2, 6, 10, \dots$ 次成分
 $m=6$ (6極電磁石) の場合 $n=3, 9, 15, \dots$ 次成分である。

(44)から第4章の(15)で定義した係数との関係は、磁場測定 \leftrightarrow 第4章(15)式係数の対応は

$$-\mu_0 a_n \leftrightarrow \frac{1}{n!} b_n$$

コイル長を ℓ として、2次元場における N ターンコイルによる誘導電圧は

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= -r\omega N \int_{z_1(r)}^{z_2(r)} B_r(r, \theta, z) dz \\ &= -r\omega N B_r \\ &= \mu_0 \omega \ell N \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \{a_n(\sin n\theta) + b_n(\cos n\theta)\} \end{aligned} \quad (45)$$

または

$$E(r, \theta) = \mu_0 \omega \ell N \sum_{n=1}^{\infty} n r^n c_n \sin(n\theta + \chi_n) \quad (46)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \chi_n = \tan^{-1} \frac{b_n}{a_n} \quad (48)$$

これを $B_z \neq 0$ の場合に拡張するとき、なめらかに接続できるためには、係数 a_n, b_n が z の関数になる。

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n(z) \sin n\theta + b_n(z) \cos n\theta] \quad (49)$$

これより

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta, z) &= \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \mu_0 n r^{n-1} (a_n(z) \sin n\theta + b_n(z) \cos n\theta) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta, z) &= \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \mu_0 n r^{n-1} (a_n(z) \cos n\theta - b_n(z) \sin n\theta) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= r\dot{\theta} N \sum_{n=0}^{\infty} \mu_0 n r^{n-1} \\ &\cdot \int_{z_1(r)}^{z_2(r)} (a_n(z) \sin n\theta + b_n(z) \cos n\theta) dz \end{aligned} \quad (52)$$

ここで、 $\ell \bar{a}_n = \int a_n(z) dz$, $\ell \bar{b}_n = \int b_n(z) dz$ とおき (ℓ はコイル長)、

$$\bar{c}_n = \sqrt{\bar{a}_n^2 + \bar{b}_n^2}, \quad \alpha_n = \tan^{-1} \frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}, \quad \omega = \dot{\theta} \quad (53)$$

とすれば、

$$E(r, \theta) = \mu_0 \omega \ell N \sum_{n=1}^{\infty} n r^n \bar{c}_n \sin(n\theta + \alpha_n) \quad (54)$$

を得る。 n 次ハーモニックスの振幅は、

$$\bar{B}_n = \mu_0 n r^{n-1} \bar{c}_n \quad (55)$$

コイルに誘導される電圧の振幅は

$$E_n = r\omega \ell N \bar{B}_n \quad (56)$$

ここではMKS単位系により \bar{B}_n [T]、 ω [rad/sec]、 r [m]、 ℓ [m]である。

[8-3] 電磁石端部の局所ハーモニク成分

電磁石の端部では2次元電磁石の設計からは予測できない磁場成分が発生する。電磁石端部における B_z 成分からの寄与を考慮して、

$$\begin{aligned} E(r, \theta) &= \\ &= -\mu_0 \omega N \int_{r=0}^{r_0} [B_z(r, \theta, z_1 + \ell) - B_z(r, \theta, z_1)] r dr \\ &\quad - \mu_0 \omega r_0 N \int_{z_1}^{z_2} B_r(r_0, \theta, z) dz \end{aligned} \quad (57)$$

適当なTaylor級数を用いて

$$E(r, \theta) =$$

$$= -\mu_0 \omega N \int_{r=0}^r \left[\ell \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\ell^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \frac{\ell^3}{6} \frac{\partial^3 B_z}{\partial z^3} \right]_{r, \theta, z} r dr$$

$$- \mu_0 \omega r_0 N \int_{z_1}^z \left[B_r + z \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^3 B_r}{\partial z^3} \right]_{r, \theta, z} dz$$

(58)

磁性体や電流の存在しない領域では、3次元のLaplace方程式が成立する。

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, z) = 0 \quad (59)$$

ここで

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r, z) \sin(n\theta + \chi_n) \quad (60)$$

$$F_n(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(z) r^m \quad (61)$$

なる形の電磁石の軸方向にも依存する解を求める。ここで、 $n=n$ 極電磁石の指標、 m =ポテンシャルの持つ対称性から現れる多極成分の指標である。

n 極電磁石では

$$1) m < n \text{ の場合、 } a_{nm} = 0$$

$$2) m > n \text{ の場合、 } a_{nm}(z) = -\frac{1}{m^2 - n^2} \frac{d^2 a_{nm-2}(z)}{dz^2}$$

これより、繰り返し公式

$$a_{nn+2m}(z) = \frac{(-1)^m n!}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m} a_{nn}(z)}{dz^{2m}} \quad (62)$$

が導かれる。したがって、

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta + \chi_n) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m} a_{nn}(z)}{dz^{2m}} \quad (63)$$

このポテンシャルから磁場成分を求めれば、

$$B_r(r, \theta, z) = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \sin(n\theta + \chi_n) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n-1)!(n+2m) r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m} a_{nn}(z)}{dz^{2m}} \quad (64)$$

$$B_\theta(r, \theta, z) = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \cos(n\theta + \chi_n) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m} a_{nn}(z)}{dz^{2m}} \quad (65)$$

$$B_z(r, \theta, z) = \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\theta + \chi_n) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m+1} a_{nn}(z)}{dz^{2m+1}} \quad (66)$$

z に関する変化がなければ、 $m=0$ とにおいて[8-2]の2次元の場合に一致する磁場が得られる。上の B_r, B_z をTaylor展開した誘導電圧の式に代入して、 $2n$ 次の

ハーモニクスだけに注目して、

$$E_n(r, \theta) = -\mu_0 \omega N \sin(n\theta + \chi_n) \cdot \left\{ r_0^n \left[n L a_{nn}(z) + \frac{n L^2}{2} \dot{a}_{nn}(z) + \frac{n L^3}{6} \ddot{a}_{nn}(z) + \frac{n L^4}{24} \overset{\cdot\cdot\cdot}{a}_{nn}(z) \right] - r_0^{n+2} \left[\frac{n^2 L}{4(n+2)(n+1)} \ddot{a}_{nn}(z) + \frac{n^2 L^2}{8(n+2)(n+1)} \overset{\cdot\cdot\cdot}{a}_{nn}(z) + \frac{n^2 L^3}{24(n+2)(n+1)} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{a}_{nn}(z) \right] + r_0^{n+4} \frac{n^2 L}{32(n+4)(n+2)(n+1)} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{a}_{nn}(z) \right\} \quad (67)$$

1) $n=2$ の場合

$$E_2(r, \theta) = -\mu_0 \omega N \sin(2\theta + \chi_2) \cdot \left\{ r_0^2 \left[2 L a_{22}(z) + L^2 \dot{a}_{22}(z) + \frac{L^3}{3} \ddot{a}_{22}(z) + \frac{L^4}{12} \overset{\cdot\cdot\cdot}{a}_{22}(z) \right] - r_0^4 \left[\frac{L}{12} \ddot{a}_{22}(z) + \frac{L^2}{24} \overset{\cdot\cdot\cdot}{a}_{22}(z) + \frac{L^3}{72} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{a}_{22}(z) \right] + r_0^6 \frac{L}{576} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{a}_{22}(z) \right\} \quad (68)$$

2次元場では、

$$E_2(r, \theta) = -\mu_0 \omega N \sin(2\theta + \chi_2) r_0^2 \{ 2 L a_{22}(z) \} \quad (69)$$

2) $n=3$ の場合

$$E_3(r, \theta) = -\mu_0 \omega N \sin(3\theta + \chi_3) \cdot \left\{ r_0^3 \left[3 L a_{33}(z) + \frac{3 L^2}{2} \dot{a}_{33}(z) + \frac{L^3}{2} \ddot{a}_{33}(z) + \frac{L^4}{8} \overset{\cdot\cdot\cdot}{a}_{33}(z) \right] - r_0^5 \left[\frac{9 L}{80} \ddot{a}_{33}(z) + \frac{9 L^2}{160} \overset{\cdot\cdot\cdot}{a}_{33}(z) + \frac{3 L^3}{160} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{a}_{33}(z) \right] + r_0^7 \frac{3 L}{1120} \overset{\cdot\cdot\cdot\cdot}{a}_{33}(z) \right\} \quad (70)$$

2次元場では、

$$E_3(r, \theta) = -\mu_0 \omega N \sin(3\theta + \chi_3) [r_0^3 \{ 3 L a_{33}(z) \}] \quad (71)$$

[8-4] フリッジング磁場

電磁石端部において、すべての磁場成分は単調に減少する。この領域では、実験データにフィットする解析的な式を求めることができる。 z 方向の距離をプローブ半径 r_0 で規格化して、フリッジング磁場が実験に合うように3つの領域に分割する。4極電磁石の場合

$$0 \leq z/r_0 \leq 0.69 \quad \text{5次多項式}$$

$0.69 \leq z/r_0 \leq 1.10$ 別の5次多項式
 $z/r_0 \geq 0.83$ 指数関数
 の関数で近似し、5次多項式を次のように仮定する。

$$a_{nn}(z) = \sum_{k=0}^5 b_k z^k \quad (72)$$

$$E_n(r, \theta) \equiv -\mu_0 \omega N \sin(n\theta + \chi_n) e_n(z) \quad (73)$$

$$e_n(z) = n \sum_{p=0}^5 d_p z^p \quad (74)$$

途中の計算を省略して、この仮定に基づいて得られた結果だけを図16に示す。

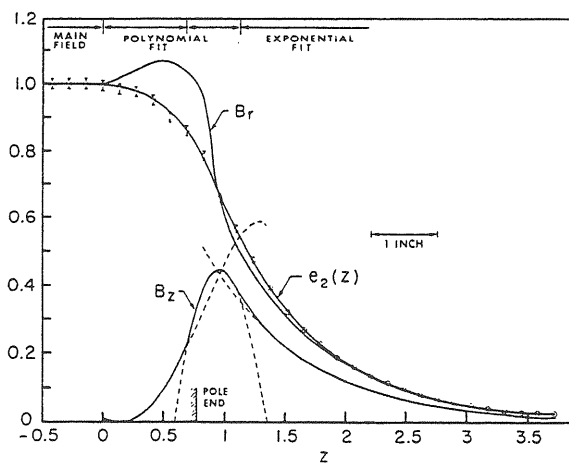


図16 4極電磁石の端部磁場の関数近似から求めたサーチコイルの半径における B_r 、 B_z 成分、点線は各関数の適用領域を越えて関数をプロットしたものである。横軸は4極電磁石の軸方向でサーチコイルの半径を1として規格化、縦軸は $z < 0$ で規格化。

[8-5] ハーモニックコイルの基本形

ハーモニックの測定に使用されるコイルには図17に示すradial field coilとazimuthal field coilの2種類の基本形が考えられる。これらのコイルはしばしばMorgan coilとも呼ばれる。azimuthal field coilは B_θ 成分を測定し、radial field coilは B_r 成分を測定する。

[8-5-1] Radial field coilの誘導電圧

図18に示す半径 r 、長さ l 、ターン数 N のコイルに誘導される電圧は(46)から

$$E = 2\mu_0 \omega \ell N \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cos\left(\frac{n(\theta_2 + \theta_1)}{2} + \chi_n\right) \cdot \sin\left(\frac{n(\theta_2 - \theta_1)}{2}\right) r^n \quad (75)$$

コイルとリンクする磁束は、

$$\Phi = \mu_0 \ell N \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \sin\left(\frac{n(\theta_2 + \theta_1)}{2} + \chi_n\right) \cdot \sin\left(\frac{n(\theta_2 - \theta_1)}{2}\right) r^n \quad (76)$$

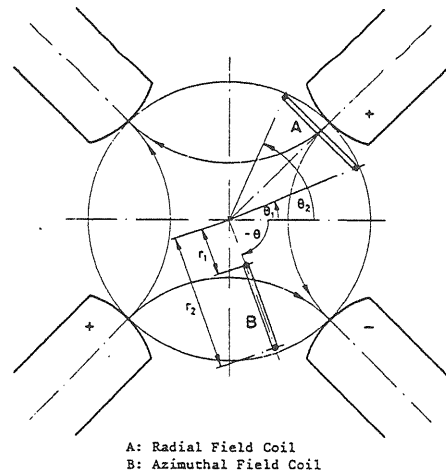


図17 Radial field coilとAzimuthal field coil

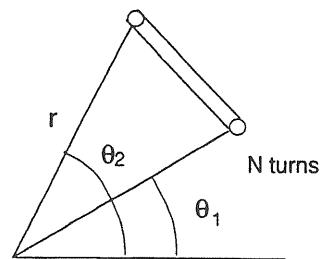


図18 Radial field coilの形状

[8-5-2] Azimuthal field coilの誘導電圧

図19に示す半径 $a \sim b$ 、長さ l 、ターン数 N のコイルに誘導される電圧は(46)から

$$E = \mu_0 \omega \ell N \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin(n\theta + \chi_n) \cdot (b^n - a^n) \quad (77)$$

リンクする磁束は、

$$\Phi = -\mu_0 \ell N \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\theta + \chi_n) \cdot (b^n - a^n) \quad (78)$$

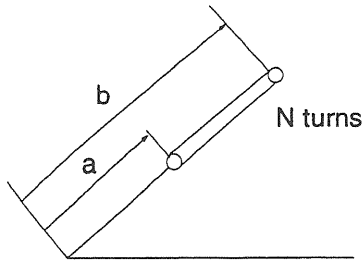


図19 Azimuthal field coilの形状

Radial field coilは $\sin[n(\theta_2 - \theta_1)/2]$ の項のため、あらゆるハーモニクスに対して良い感度を得ることは困難である。この点、Azimuthal field coilの方が優れている。Azimuthal field coilにおけるコイルの応答は

$$\begin{aligned} B_r &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{a_n (\sin n\theta) + b_n (\cos n\theta)\} \\ B_\theta &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{a_n (\cos n\theta) - b_n (\sin n\theta)\} \end{aligned} \quad (79) \quad (80)$$

図20のような θ の角度にある厚みのあるAzimuthal field coilにリンクする磁束を求める。コイルの r 方向厚みを $2B$ 、 θ 方向厚みを $2A$ とする。巻き面密度を λ [本/m²] とする。コイル面に直交する磁場成分は、

$$\begin{aligned} \mu_0 H_\perp &= B_r \sin \varepsilon + B_\theta \cos \varepsilon \\ &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{ [a_n \sin n(\theta + \varepsilon) + b_n \cos n(\theta + \varepsilon)] \sin \varepsilon \\ &\quad + [a_n \cos n(\theta + \varepsilon) - b_n \sin n(\theta + \varepsilon)] \cos \varepsilon \} \\ &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \{ (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta) \cos(n-1)\varepsilon \\ &\quad - (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) \sin(n-1)\varepsilon \} \end{aligned} \quad (81)$$

コイルとリンクする全磁束は、 $\sin(n-1)\varepsilon$ の対称性を考慮して、

$$\begin{aligned} \Phi &= \mu_0 \lambda \ell \int_{-B-A}^B \int_{-A}^A \int_{R_1+b}^{R_2-b} H_\perp db da dx \\ &= -\mu_0 \lambda \ell \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n \cos n\theta - b_n \sin n\theta) \\ &\quad \cdot \int_{-B-A}^B \int_{-A}^A \int_{R_1+b}^{R_2-b} \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \cos[(n-1)\varepsilon] db da dx \end{aligned} \quad (82)$$

ここで

$$\tan \varepsilon = \frac{a}{x} \quad (83)$$

である。3重積分は数値的に計算する。

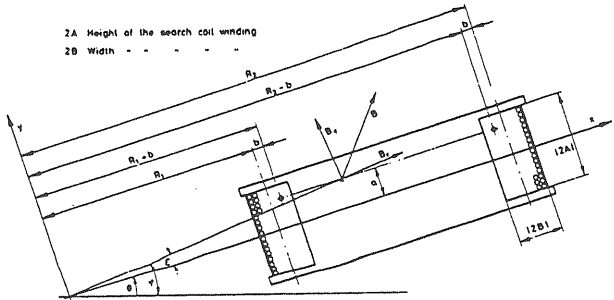


図20 厚みのあるAzimuthal field coil

[8-6] バッキングコイル付きハーモニクコイル
磁場の基本成分による誘導電圧が大きくて、高次のハーモニク成分の感度が上げられない場合、バッキングコイル(bucking coil)を同じプローブに巻き込んで、ハーモニクコイルの誘導電圧に含まれる基本成分だけを打ち消すことができる。

[8-6-1] Azimuthal field coil + Radial bucking coil

図21に示すように、Azimuthal field coilの r 方向のワイヤーの線密度を λ [本/m] とすれば、半径 $r=a$ から $r=b$ の間の1層コイルによる誘導電圧は、

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \lambda \int_a^b E(r, \theta) dr \\ &= \mu_0 \omega \ell \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (\sin(n\theta + \chi_n)) \int_a^b r^n dr \end{aligned} \quad (84)$$

または

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \\ &= \mu_0 \omega \ell \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n (\sin(n\theta + \chi_n)) \{b^{n+1} - a^{n+1}\} \end{aligned} \quad (85)$$

Radial bucking coilの返し巻きの位置を、

角度 $\theta + \alpha$ において、 $r = a' \rightarrow b'$ の間と
角度 $\theta - \alpha$ において、 $r = a' \rightarrow b'$ の間

とすれば、このコイルによる誘導電圧は、

$$E(\theta + \alpha) = \mu_0 \omega \ell \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n \cdot \sin(n\theta + n\alpha + \chi_n) \{b'^{n+1} - a'^{n+1}\} \quad (86)$$

$$E(\theta - \alpha) = \mu_0 \omega \ell \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n \cdot \sin(n\theta - n\alpha + \chi_n) \{b'^{n+1} - a'^{n+1}\} \quad (87)$$

上の3つを合わせた総合誘導電圧は

$$E = \mu_0 \omega \ell \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n [\sin(n\theta + \chi_n)(b^{n+1} - a^{n+1}) - [(\sin(n\theta - n\alpha + \chi_n) + (\sin(n\theta + n\alpha + \chi_n))\{b'^{n+1} - a'^{n+1}\})] \quad (88)$$

整理して、

$$E = \mu_0 \omega \ell \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n \sin(n\theta + \chi_n) \cdot \{(b^{n+1} - a^{n+1}) - 2 \cos n\alpha (b'^{n+1} - a'^{n+1})\} \quad (89)$$

n の最初の項の寄与が最も大きいので、これを消去するように $\{ \quad \}$ 内がゼロになる設計を行う。

$$(b^{n+1} - a^{n+1}) - 2 \cos n\alpha (b'^{n+1} - a'^{n+1}) = 0 \quad (90)$$

また、コイルの巻き数の間の関係は(91)で $n=0$ の条件を追加して

$$b - a = 2(b' - a') \quad (91)$$

(90)と(91)を満たすように a, a', b, b', α を決める。

[8-6-2] Radial field coil + Radial bucking coil

このプローブは磁場の角度方向成分を測定するものである。図22に示すようにコイルのワイヤーは角度 θ_1 と θ_2 にあり、軸方向のコイル長を ℓ とすれば、1ターンのコイルに誘導される電圧は、内と外のコイルについて各々のワイヤー線密度を λ_1, λ_2 [本/m]として、

$$E_1 = \mu_0 \omega \ell \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \{(\sin(n\theta_2 + \chi_n) - \sin(n\theta_1 + \chi_n))\} \int_{r_1}^{r_2} r^n dr \quad (92)$$

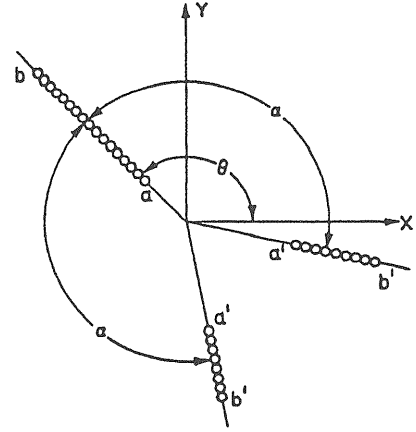


図21 Azimuthal field coil + Radial bucking coil

$$E_2 = \mu_0 \omega \ell \lambda_2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \{(\sin(n\theta_2 + \chi_n) - \sin(n\theta_1 + \chi_n))\} \int_{r_3}^{r_4} r^n dr \quad (93)$$

である。これらの差または和をもって2つのコイルによる全誘導電圧が与えられる。

$$E = E_2 \pm E_1 = \mu_0 \omega \ell \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \{(\sin(n\theta_2 + \chi_n) - \sin(n\theta_1 + \chi_n))\} \left\{ \lambda_2 \int_{r_3}^{r_4} r^n dr \pm \lambda_1 \int_{r_1}^{r_2} r^n dr \right\} \quad (94)$$

整理して、

$$E = 2\mu_0 \omega \ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} c_n \cos\left(\frac{n(\theta_2 + \theta_1)}{2} + \chi_n\right) \cdot \sin\left(\frac{n(\theta_2 - \theta_1)}{2}\right) \left\{ \lambda_2 (r_4^{n+1} - r_3^{n+1}) \pm \lambda_1 (r_2^{n+1} - r_1^{n+1}) \right\} \quad (95)$$

$(\theta_2 + \theta_1)/2 = \theta$ とにおいて、 θ について積分すれば、一定の角度ステップ毎の積分器の出力は、

$$\Phi = \int E dt = 2\mu_0 \ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n \cdot \left\{ \lambda_2 (r_4^{n+1} - r_3^{n+1}) \pm \lambda_1 (r_2^{n+1} - r_1^{n+1}) \right\} \cdot \sin(n\theta + \chi_n) \sin \frac{n(\theta_2 - \theta_1)}{2} \quad (96)$$

で与えられる。これより $\{ \quad \}$ 内を N の最小値についてゼロになるように設計すれば、高次の項について感度を上げることができる。

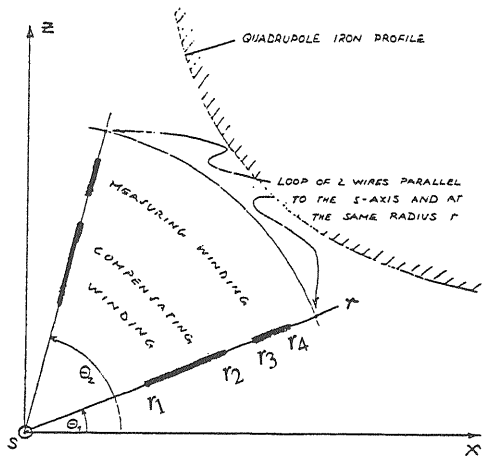


図 2 2 Radial field coil + Radial bucking coil

[8-6-3] Azimuthal field coil + Azimuthal bucking coil

図23のように同じ半径方向半径 $a \sim b$ と $c \sim d$ に2つのradial coilを並べ、それぞれのターン数を N_1 、 N_2 とすれば、誘導電圧はそれぞれ、

$$E_1 = \mu_0 \omega \ell \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin(n\theta + \chi_n) \cdot N_1 (b^n - a^n) \quad (97)$$

$$E_2 = \mu_0 \omega \ell \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin(n\theta + \chi_n) \cdot N_2 (d^n - c^n) \quad (98)$$

両者の差をとれば、

$$E_1 - E_2 = \mu_0 \omega \ell \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin(n\theta + \chi_n) \{N_1 (b^n - a^n) - N_2 (d^n - c^n)\} \quad (99)$$

これより、{ }内をゼロにすれば、 n 次の磁場成分をキャンセルできる。

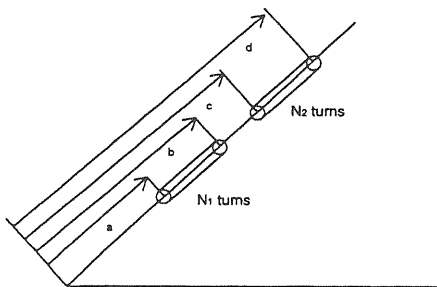


図 2 3 Azimuthal field coil + Azimuthal bucking coil

(9) 磁場中心軸からのコイル中心のズレによる系統的誤差

理想的な偏向電磁石ではこのような誤差は発生しないが、4極以上の多極磁場ではコイルの軸ズレによる影響が出る。例えば4極電磁石で水平方向にズレると偽のノーマル2極、垂直方向にズレると偽のスキュー2極成分を感じる。磁場を級数展開して、

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n e^{i\chi_n} z^{n-1}, \quad z = x + iy = r e^{i\theta} \quad (100)$$

回転軸のずれ $\rho r_0 e^{i\phi}$ を図24のように定義する。軸ずれ量はプローブ回転半径 (r_0) の ρ 倍、 O は磁場中心、 O' はプローブ回転中心とする。

$$z = r_0 e^{i\theta'} + \rho r_0 e^{i\phi} \quad (0 \leq \theta' < 2\pi) \quad (101)$$

これより

$$z^{n-1} = r_0^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_m \rho^m e^{i[(n-1-m)\theta' + m\phi]} \quad (102)$$

が得られる。したがって、

$$B_{\theta'} + iB_{r'} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n r_0^{n-1} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} C_m \rho^m e^{i[(n-m)\theta' + m\phi + \chi_n]} \quad (103)$$

ここで

$$B_{\theta'} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_0^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} (n-m)_n C_m \rho^m \cdot \cos[(n-m)\theta' + m\phi + \chi_n] \quad (104)$$

$$B_{r'} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_0^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} (n-m)_n C_m \rho^m \cdot \sin[(n-m)\theta' + m\phi + \chi_n] \quad (105)$$

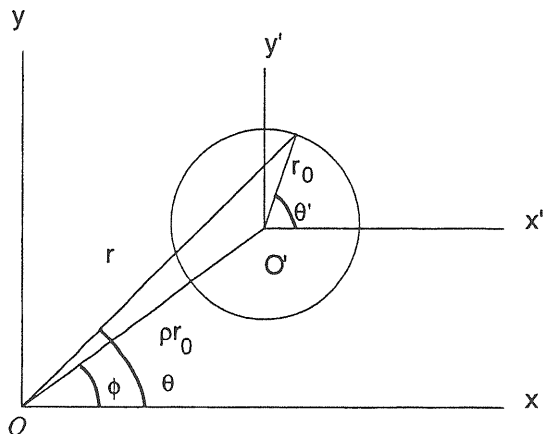


図 2 4 磁場中心軸からズレたコイル中心

回転軸ずれのある場合における1ターンコイルの誘導電圧は

$$\begin{aligned}
 E(\theta) &= -\omega r_0 \int_0^\ell B_r(r_0, \theta, z) dz \\
 &= \omega \ell \sum_{n=1}^{\infty} c_n r_0^n \sum_{m=0}^{n-1} (n-m)_n C_m \rho^m \sin[(n-m)\theta + m\phi + \chi_n] \quad (106)
 \end{aligned}$$

(1) 4極磁場 (n=2) に適用すれば、

$$\begin{aligned}
 E_2(\theta) &= 2\omega \ell c_2 r_0^2 \sin(2\theta + \chi_2) \\
 &\quad + 2\omega \ell c_2 r_0^2 \rho \sin(\theta + \phi + \chi_3) \quad (107)
 \end{aligned}$$

4極電磁石の場合は軸ずれにより、第2項の2極成分が現れる。4極成分に比べてその大きさは1:ρである。

(2) 6極磁場 (n=3) に適用すれば、

$$\begin{aligned}
 E_3(\theta) &= 3\omega \ell c_3 r_0^3 \sin(3\theta + \chi_3) \\
 &\quad + 6\omega \ell c_3 r_0^3 \rho \sin(2\theta + \phi + \chi_3) \quad (108) \\
 &\quad + 3\omega \ell c_3 r_0^3 \rho^2 \sin(\theta + 2\phi + \chi_3)
 \end{aligned}$$

6極電磁石の場合は、軸ずれにより、第2項の4極成分と第3項の2極成分が現れる。各成分の大きさの比は、

$$\text{Sext : Quad : Dipole} = 1 : 2\rho : \rho^2$$

ρ ≈ 0.002なので、6極電磁石の場合には4極成分を減らすように軸出しをすればよい。測定された8極磁場成分以上からの6極成分への寄与は極めて小さい(10⁻³程度)ので、補正量としては10⁻⁶程度になり無視できる。

第9章 超伝導電磁石

1960年代にイギリスのRutherford研究所における実用的な超伝導体の安定化に必要な基本原理の理解が進み、1970年代に急速な技術的進歩を遂げた。1980年代初期にはFNALのTevatron計画が現れた。幾多の技術的課題を乗り越えて、Tevatronは大規模な極低温の超伝導電磁石システムをシンクロトロン加速器の分野で実用化した。この計画に次ぐ大規模な加速器はDESYのHERA計画である。これらの加速器はすでに稼働していて、BNLのRHIC計画が建設中である。さらにCERNのLHCも目前の計画になっている。現在、超伝導電磁石は一応確立された段階に達したものと判断される。

超伝導電磁石の発生磁場は最も経験の深い合金のNbTi超伝導線材により10 Tに達し、金属間化合物のNb₃Snでは20T以上の磁場の発生が可能である。従来のCuによる電磁石の発生磁場が2 T程度であることを考えれば、同じ規模のリングで少なく見ても5倍のビームエネルギーが得られることを意味する。図1にNbTi超伝導加速器に使用される所謂Rutherford cableと呼ばれる超伝導線の構造を示し、図2にNbTiの特性を示す。また、加速器に使用される超伝導線材の特性を表1に示す。

表1 超伝導線材の特性

		臨界温度(K)	臨界磁場(T)
		@4.2 K	
NbTi	合金	9 - 9.3	11.5 - 12.2
Nb ₃ Sn	金属間化合物	18.3	26

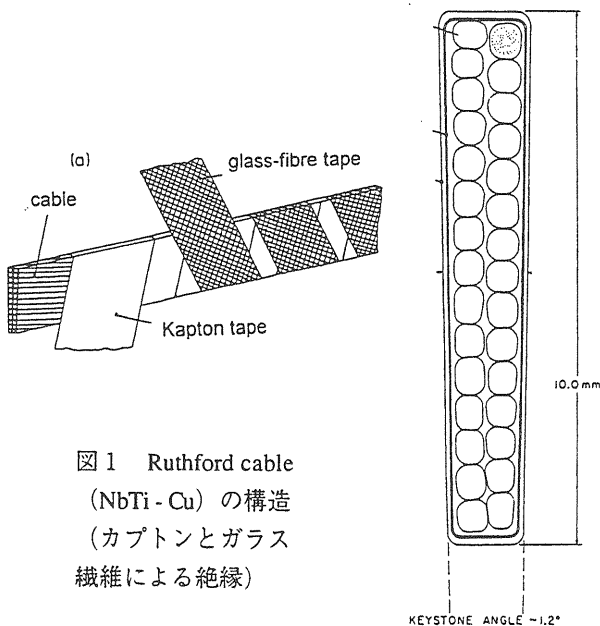


図1 Rutherford cable (NbTi - Cu) の構造 (カプトンとガラス繊維による絶縁)

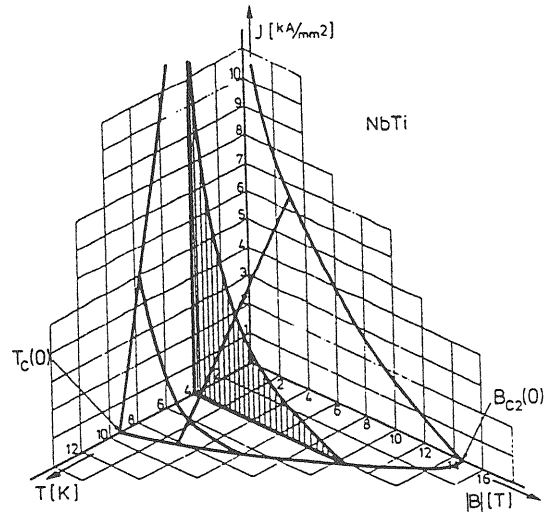


図2 NbTiの特性図

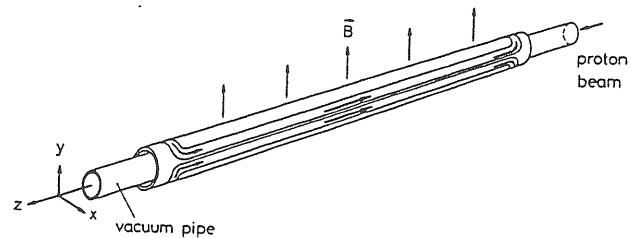


図3 超伝導2極電磁石の概略図

HERA建設に伴う研究から超伝導電磁石の学問的成果の多くはDESYから生まれている。ここでは、主にDESYで行われた研究を中心に紹介する。

(1) 超伝導電磁石における磁場の記述

[1-1] 単一電流導体の多極磁場成分展開

図3のようなアパーチャに比べて長さの長い超伝導2極電磁石を考える。電流導体はビームに平行であるとすれば、磁場を2次的に扱うことができる。まず、線電流(導体が1本)の場合の非常に簡単な場合について、図4に示す座標系で考える。導体はz軸に平行で、無限に長いものとする。z軸上を+方向に流れる電流IによるP点の磁場はθ方向成分しか持たないので、

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (1)$$

で与えられる。これによるベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (2)$$

ここで a は対数項を無次元化するために長さの次元をもつ任意定数である。

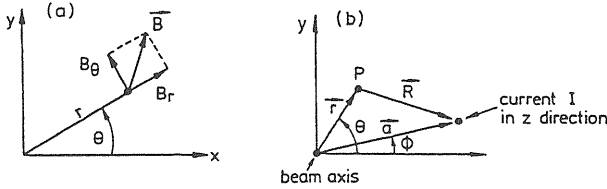


図4 線電流による磁場計算の座標 (P点は磁場の観測点)

同じように (a, ϕ) の位置にある z 軸に平行な電流 I によるP点におけるベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{a}\right) \quad (3)$$

ここで、

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)} \quad (4)$$

1) $r < a$ の場合、

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2 + r^2 - ar[e^{i(\theta-\phi)} + e^{-i(\theta-\phi)}] \\ &= a^2 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)e^{i(\theta-\phi)}\right] \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)e^{-i(\theta-\phi)}\right] \end{aligned} \quad (5)$$

より、

$$\ln\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{1}{2} \left(\ln\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)e^{i(\theta-\phi)}\right] + \ln\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)e^{-i(\theta-\phi)}\right] \right) \quad (6)$$

これをTaylor展開して整理すれば、

$$\begin{aligned} A_z(r, \theta) &= \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \ln\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)e^{i(\theta-\phi)}\right] + \ln\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)e^{-i(\theta-\phi)}\right] \right\} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \left(-\frac{r}{a}\right)e^{i(\theta-\phi)} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{i2(\theta-\phi)} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3 e^{i3(\theta-\phi)} - \dots \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{r}{a}\right)e^{-i(\theta-\phi)} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-i2(\theta-\phi)} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3 e^{-i3(\theta-\phi)} - \dots \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\theta - \phi)] \end{aligned} \quad (7)$$

磁場成分は

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \cos[n(\theta - \phi)] \quad (8)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin[n(\theta - \phi)] \quad (9)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (10)$$

である。

2) $r > a$ の場合も同様に、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos[n(\theta - \phi)] \quad (11)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos[n(\theta - \phi)] \quad (12)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sin[n(\theta - \phi)] \quad (13)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (14)$$

である。

[1-2] 純粋な多極磁場の発生 (ノーマル電磁石)

上に求めたベクトルポテンシャルにおいて、電流分布として、

$$I(\phi) = I_0 \cos(m\phi) \quad (15)$$

を仮定すれば、

$$\begin{aligned} A_z(r, \theta) &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \cos[n(\theta - \phi)] d\phi \\ &= \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos(m\theta) & ; m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

すなわち、 $m = n$ のとき、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^m \cos(m\theta) \quad (17)$$

このときの磁場は

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \cos(m\theta) \quad (18)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \sin(m\theta) \quad (19)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (20)$$

である。上の電流分布を仮定すれば、 m 次の多極磁

場だけが発生する。m=1,2,3,...に対して2極、4極、6極磁場、・・・になる。図5にこれらの電流分布のに対応する電磁石の断面を示す。

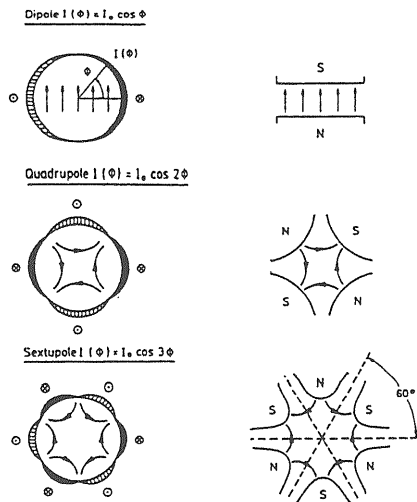


図5 空間電流分布による純粋な2極、4極、6極電磁石と対応する通常の電磁石断面

[1-3] 回転磁場成分 (スキュー電磁石)

ノーマル磁場の電流分布に $-\pi/2m$ の回転を与えた場合、空間電流分布は

$$I(\phi) = I_0 \cos[m(\phi - \pi/2m)] \\ = I_0 \cos(m\phi - \pi/2) = I_0 \sin(m\phi) \quad (21)$$

で与えられる。この分布によるベクトルポテンシャルは、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} \sin(m\phi) \cos[n(\theta - \phi)] d\phi \\ = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^m \sin m\theta & \text{for } n = m \end{cases} \quad (22)$$

これより磁場成分は、

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \sin m\theta \quad (23)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \cos m\theta \quad (24)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (25)$$

である。ノーマル磁場と比べて磁場が角度 $-\pi/2m$

だけ回転している。m=1の場合は、スキュー2極磁場 $B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \sin \theta$ 、 $B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2a} \cos \theta$ になる。

[1-4] 電流分布の近似

上の計算のように三角関数で与えた電流分布を実現するために電流シェルまたは電流ブロックの配置で近似する。このような近似を評価するため、次の一般化した多極展開を利用する。

$$B_\theta(r, \theta) = B_{ref} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} [b_n \cos(n\theta) + a_n \sin(n\theta)] \quad (26)$$

$$B_r(r, \theta) = B_{ref} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} [-a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \quad (27)$$

ここで B_{ref} は基準半径 r_0 における磁場の強さである。 r_0 としてコイル内径の2/3程度に選択する。 b_n はノーマル成分、 a_n はスキュー成分の係数である。

図3における理想的な電流分布の空間対称性から、

1) ノーマル2極の場合

$$I(\phi) = I(-\phi) = -I(\pi - \phi) = -I(\pi + \phi) \quad (28)$$

からベクトルポテンシャルに寄与する項は $n=1, 3, 5, \dots$ の奇数項である。

$$A_z(r, \theta) = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \cos(n\phi) \quad (29)$$

すなわち、2極の対称性のある電流分布からは n が奇数のノーマル成分しか現れない。

2) ノーマル4極の場合

$$I(\phi) = I(-\phi) = I(\pi - \phi) = I(\pi + \phi) \\ = -I(\pi/2 - \phi) = -I(\pi/2 + \phi) \\ = -I(-\pi/2 - \phi) = -I(-\pi/2 + \phi) \quad (30)$$

から、現れる成分は2の奇数倍のノーマル成分 $n=2, 6, 10, 14, \dots$ だけである。すなわち、

$$A_z(r, \theta) = \frac{4\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \cos(n\phi) \quad (31)$$

3) ノーマル6極の場合

$$\begin{aligned}
I(\phi) &= I(-\phi) = I(2\pi/3 - \phi) \\
&= I(2\pi/3 + \phi) = I(-2\pi/3 - \phi) = I(-2\pi/3 + \phi) \\
&= -I(\pi/3 - \phi) = -I(\pi/3 + \phi) = -I(\pi - \phi) \\
&= -I(\pi + \phi) = -I(-\pi/3 - \phi) = -I(-\pi/3 + \phi)
\end{aligned} \tag{32}$$

から、現れる成分は3の奇数倍のノーマル成分 $n=3, 9, 15, 21, \dots$ だけである。すなわち、

$$A_z(r, \theta) = \frac{6\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \cos(n\phi) \tag{33}$$

である。

(2) 超伝導電磁石の断面構造

[2-1] 2極超伝導電磁石

図6のように電流シエルの存在する半径を a_1 、 a_2 、シエルの角度の半分を ϕ_ℓ 、一様な電流密度を J とすれば、2極電磁石の場合

$$\begin{aligned}
A_z(r, \theta) &= \frac{2\mu_0 J}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{r}{a}\right)^n da \\
&\quad \cdot \int_0^{\phi_\ell} \cos(n\phi) d\phi \cos(n\theta) \\
&= \frac{2\mu_0 J}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{r^n}{n^2(n-2)} \\
&\quad \cdot (a_1^{2-n} - a_2^{2-n}) \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta)
\end{aligned} \tag{34}$$

$\Delta a = a_2 - a_1 \ll a = (a_2 + a_1)/2$ の場合

$$\begin{aligned}
A_z(r, \theta) &= \frac{2\mu_0 J}{\pi} a \Delta a \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \\
B_\theta(r, \theta) &= -\frac{2\mu_0 J}{\pi} \Delta a \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \\
B_r(r, \theta) &= -\frac{2\mu_0 J}{\pi} \Delta a \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin(n\phi_\ell) \sin(n\theta)
\end{aligned} \tag{35}, (36), (37)$$

以上から n 次の磁場の絶対値は

$$B_n(r, \theta) = \frac{2\mu_0 J}{\pi} \frac{\Delta a}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} |\sin(n\phi_\ell)| \tag{38}$$

2極磁場を電流シエルで近似した場合、含まれる $n=3$ の成分(6極成分)を消すためには

$$3\phi_\ell = \pi, \text{ すなわち } \phi_\ell = 60 \text{ 度} \tag{39}$$

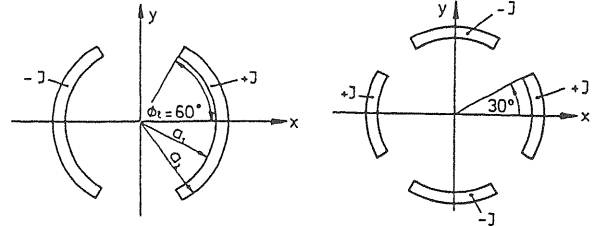


図6 2極、4極電磁石の電流シエル

にすればよいことが分かる。次に現れる成分として $n=5$ を考えると

$$\frac{B_5}{B_1} = \frac{1}{5} \left(\frac{r}{a}\right)^4 \frac{|\sin(5\pi/3)|}{\sin(\pi/3)} = \frac{1}{5} \left(\frac{r}{a}\right)^4 = 0.04 \quad @ \quad \frac{r}{a} = \frac{2}{3} \tag{40}$$

となり、主成分に比べて約4%である。これは加速器で許される値より2桁大きい。 $n=3, 5$ の成分を同時に消すためには、電流シエルを2重にしてそれぞれを最適化(内側シエルを72度、外側シエルを36度)すればよい。このようにして設計された2極電磁石でも更に高次の項($n=7, 9, \dots$)が 10^{-3} 程度残る。残ったこれらの高次の項は図5に示すウエッジを入れることで 10^{-4} 程度に減少する。シエルの多重化、ウエッジなどの構造はパラメータの自由度を上げる役目を果たしている。

[2-2] 4極超伝導電磁石

電流シエルの存在する半径を a_1 、 a_2 、シエルの角度の半分を ϕ_ℓ 、一様な電流密度を J とすれば、4極電磁石の場合

$$\begin{aligned}
A_z(r, \theta) &= \frac{4\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{r}{a}\right)^n da \\
&\quad \cdot \int_0^{\phi_\ell} \cos(n\theta) d\phi \cos(n\phi) \\
&= \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\frac{r^2}{4} \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_\ell) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=6,10,\dots} \frac{r^n}{n^2(n-2)} (a_1^{2-n} - a_2^{2-n}) \right. \\
&\quad \left. \cdot \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \right]
\end{aligned} \tag{41}$$

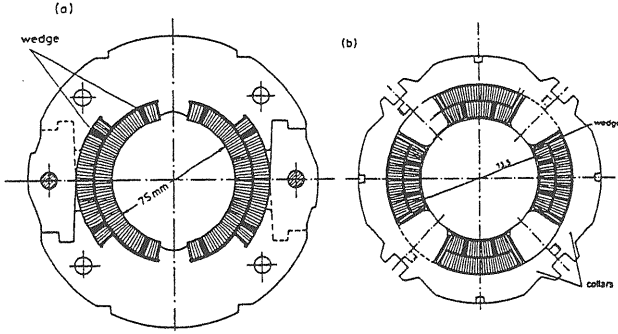


図7 2重シェルの(a)超伝導2極電磁石と(b)超伝導4極電磁石の断面、磁場一様性を上げるため電磁石の軸に平行にウエッジが入れている。超伝導コイルは固定のため非磁性カラーに閉じ込められている。(a)はHERA, LHC, SSCに採用されているタイプ、(b)はHERAの4極コイル。

$\Delta a = a_2 - a_1 \ll a = (a_2 + a_1)/2$ であれば、

$$A_z(r, \theta) = \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\frac{r^2}{4} \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_\ell) + a\Delta a \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \right] \quad (42)$$

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\frac{r}{2} \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_\ell) + \Delta a \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \right] \quad (43)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\frac{r}{2} \ln \frac{a_2}{a_1} \sin(2\theta) \sin(2\phi_\ell) + \Delta a \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin(n\phi_\ell) \sin(n\theta) \right] \quad (44)$$

n次の多極磁場の絶対値は

$$B_n(r, \theta) = \frac{4\mu_0 J}{\pi} \Delta a \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} |\sin(n\phi_\ell)| \quad (45)$$

n=6の成分を消すためには $\phi_\ell = \pi/6 = 30$ 度を選べばよいことが分かる。このときn=10の4極磁場に対する割合は

$$\frac{B_{10}}{B_2} = \frac{1}{5} \frac{\Delta a}{a \ln(a_2/a_1)} \left(\frac{r}{a}\right)^8 \left| \frac{\sin(5\pi/3)}{\sin(\pi/3)} \right| = 0.0078 \quad (46)$$

電流シェルの2重にした場合は、内側と外側のシェルの角度を ϕ_1, ϕ_2 、コイルの半径を $a_1 \sim a_2, a_3 \sim a_4$ として、

$$\begin{aligned} A_z(r, \theta) &= \\ &= \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{r}{a}\right)^n da \int_0^{\phi_1} \cos(n\theta) d\phi \cos(n\phi) \right. \\ &+ \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \int_{a_3}^{a_4} \left(\frac{r}{a}\right)^n da \int_0^{\phi_2} \cos(n\theta) d\phi \cos(n\phi) \left. \right] \\ &\xrightarrow{\frac{\Delta \bar{a}_1 \ll \bar{a}_1}{\Delta \bar{a}_2 \ll \bar{a}_2}} \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\frac{1}{4} r^2 \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_1) \right. \\ &+ \frac{1}{4} r^2 \ln \frac{a_4}{a_3} \cos(2\theta) \sin(2\phi_1) \\ &+ \bar{a}_1 \Delta \bar{a}_1 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r}{\bar{a}_1}\right)^n \sin(n\phi_1) \cos(n\theta) \\ &+ \bar{a}_2 \Delta \bar{a}_2 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r}{\bar{a}_2}\right)^n \sin(n\phi_2) \cos(n\theta) \left. \right] \quad (47) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta \bar{a}_1 &= a_2 - a_1 \ll \bar{a}_1 = (a_2 + a_1)/2 \\ \Delta \bar{a}_2 &= a_4 - a_3 \ll \bar{a}_2 = (a_4 + a_3)/2 \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta) &= -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\frac{1}{2} r \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_1) \right. \\ &+ \frac{1}{2} r \ln \frac{a_4}{a_3} \cos(2\theta) \sin(2\phi_1) \\ &+ \Delta \bar{a}_1 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\bar{a}_1}\right)^{n-1} \sin(n\phi_1) \cos(n\theta) \\ &+ \Delta \bar{a}_2 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\bar{a}_2}\right)^{n-1} \sin(n\phi_2) \cos(n\theta) \left. \right] \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta) &= -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[\frac{1}{2} r \ln \frac{a_2}{a_1} \sin(2\theta) \sin(2\phi_1) \right. \\ &+ \frac{1}{2} r \ln \frac{a_4}{a_3} \sin(2\theta) \sin(2\phi_1) \\ &+ \Delta \bar{a}_1 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\bar{a}_1}\right)^{n-1} \sin(n\phi_1) \sin(n\theta) \\ &+ \Delta \bar{a}_2 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\bar{a}_2}\right)^{n-1} \sin(n\phi_2) \sin(n\theta) \left. \right] \quad (49) \end{aligned}$$

$\Delta \bar{a}_1 = \Delta \bar{a}_2 = \Delta a$ と仮定して、 $n > 2$ に対して、

$$B_n(r, \theta) = \frac{4\mu_0 J \Delta a}{\pi n} \left[\left(\frac{r}{a_1} \right)^{n-1} \sin(n\phi_1) + \left(\frac{r}{a_2} \right)^{n-1} \sin(n\phi_2) \right] \quad (50)$$

[]内がゼロになる条件から高次の項を消すことができる。すなわち、

$$\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{n-1} \sin(n\phi_1) + \sin(n\phi_2) = 0 \quad (51)$$

これより、 $n=6, 10$ についてこの条件を満たす ϕ_1 、 ϕ_2 から同時に高次の成分をキャンセルさせることができる。コイルのシェル数を増やすことによって条件を増やし、設計の自由度を上げることもできる。

[2-3] 6極超伝導磁石

$\Delta a = a_2 - a_1 \ll a = (a_2 + a_1)/2$ として、

$$A_z(r, \theta) = \frac{6\mu_0 J}{\pi} a \Delta a \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cdot \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \quad (52)$$

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{6\mu_0 J}{\pi} \Delta a \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} \cdot \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \quad (53)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{6\mu_0 J}{\pi} \Delta a \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} \cdot \sin(n\phi_\ell) \sin(n\theta) \quad (54)$$

$$B_n(r, \theta) = \frac{6\mu_0 J}{\pi} \Delta a \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} |\sin(n\phi_\ell)| \quad (55)$$

$n=9$ を消すためには、 $\phi_\ell = \pi/9 = 20$ 度である。この場合、 $n=15$ の成分の相対的大きさは

$$\frac{B_{15}}{B_3} = \frac{3}{15} \left(\frac{r}{a} \right)^{12} \left| \frac{\sin(5\pi/3)}{\sin(\pi/3)} \right| = 0.0015 \quad @ \frac{r}{a} = \frac{2}{3} \quad (56)$$

である。

(3) 鉄ヨークの影響

超伝導磁石は磁場を閉じ込めるため、コイルの外側は鉄のヨークで取り囲まれる。透磁率が一定で、

鉄は飽和しないと仮定して、イメージ電流法で解析することができる。コイルを収めるヨークの内面半径 R_y の内側、半径 a のところに電流 I が流れているとすれば、内部磁場に及ぼす鉄の影響は半径 $a' = R_y^2/a$ のところに流れてるイメージ電流 J' に等価である。

$$J' = \frac{\mu-1}{\mu+1} I, \quad a' = \frac{R_y^2}{a} \quad (57)$$

イメージ電流は実電流 I と平行に流れ、内部磁場を増加させる。図8(a)に線電流とそのイメージ電流の様子を示す。また、図8(b)は電流シェルのイメージである。

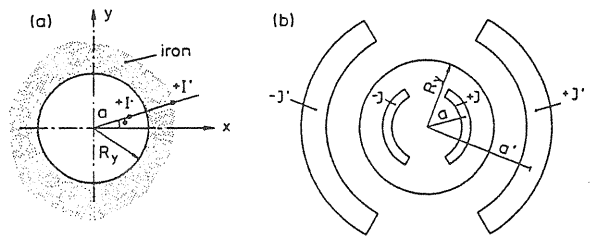


図8 (a)線電流とそのイメージ電流、(b)電流シェルとそのイメージ電流。

電流シェルのイメージ電流密度は

$$J' = \frac{\mu-1}{\mu+1} J \left(\frac{a}{R_y} \right)^4, \quad a = \sqrt{a_1 a_2} \quad (58)$$

である。

[3-1] 鉄ヨークをもつ2極超伝導磁石

同軸の鉄ヨークをもつ単層電流シェルの n 次の多極磁場は

$$B_n(r, \theta) = \frac{2\mu_0}{\pi} \sin(n\phi_\ell) \cdot \frac{1}{n} \left[J \Delta a \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} + J' \Delta a' \left(\frac{r}{a'} \right)^{n-1} \right] \\ = \frac{2\mu_0}{\pi} \sin(n\phi_\ell) \frac{1}{n} \left[J \Delta a \left(\frac{r}{a} \right)^{n-1} + \frac{\mu-1}{\mu+1} J \Delta a \left(\frac{a}{R_y} \right)^2 \left(\frac{r}{a'} \right)^{n-1} \right] \quad (59)$$

である。第1項が実電流に寄与 B_{coil} 、第2項がイメージ電流の寄与 B_{iron} である。 $n=1$ 、 $\mu \gg 1$ として両者の比

$$B_{iron} / B_{coil} = (a / R_y)^2 \quad (60)$$

からヨークの寄与が計算できる。2極超伝導電磁石ではヨークの寄与は数10%程度である。 n 次の多極電磁石では

$$B_{iron} / B_{coil} = (a / R_y)^{2n} \quad (61)$$

となるため、鉄の寄与は低下する。式から分かるように、鉄の飽和がなければ新しい多極磁場は発生しない。

[3-2] 鉄の飽和がある場合

鉄の飽和が起これば透磁率が場所の関数になるためイメージ電流の方法は採用できない。この場合は飽和の影響が考慮できる数値計算プログラムを利用しなければならない。ヨークの磁場への寄与の程度により、超伝導電磁石の構造には図9に示すような種類がある。

1) "warm iron" 2極電磁石：

ヨークはクライオスタットの外側にあるため、鉄とコイルの間に距離ができ、飽和は無視できる。鉄の寄与は10%程度であり、磁場は電流に比例する。

2) "cold iron" 2極電磁石：

BNLのRHICダイポールでは軟鉄がコイルに接近して取り囲み、ヨークの寄与は約35%である。初期の設計では鉄の飽和による6極、10極成分が観測されたが、コイル・ヨーク間の距離を増やしたり、ヨーク形状の最適化によって改善された。

3) "HERA型" ダイポール：

warm iron の設計に採用された非磁性カラーの外側を鉄ヨークで取り囲む構造で、コイルとヨークが十分離れているため鉄の飽和が起らない。

(4) 端部磁場

コイル端部の設計は複雑で、定式化はなされてい

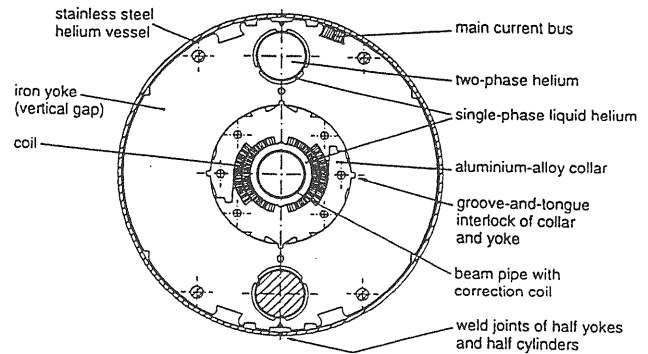
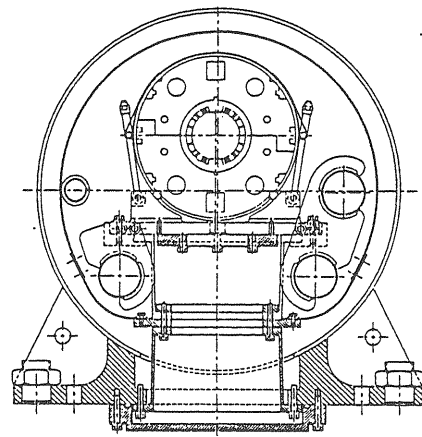
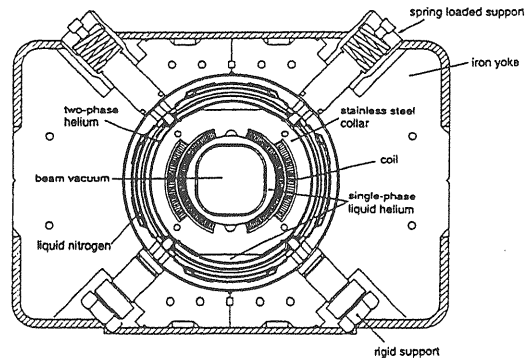


図9 3種類のダイポール、(a)FNALのTevatron (warm-iron)、(b)BNLのRHIC (cold-iron)、(c)DESYのHERA (非磁性カラー cold-iron)

ない。図10 (a) に示す簡単なコイル端部では負の6極成分が発生する。このような6極成分は一般に補正用の6極電磁石で補正される。また、中心磁場より約10%強い磁場がこのコイル端部に現れ、Lorenz

力によるコイルの動きによるクエンチ (quench) が起きやすい。このため、最近の設計では図10 (b) に示すようにコイル端部にエポキシガラスのスペーサーを挟み、コイルエンドを広げる (spread-out)。スペーサーの調節により端部磁場は正と負の6極成分が現れ、平均的にゼロにすることができる。これはコイル直線部分において30度以下の角度で巻かれたコイルからは正の6極成分が発生し、30度以上の角度で巻かれたコイルからは負の6極成分が発生することから理解できる。この2組のコイルを端部で離せば、正負の6極成分が分離されて現れる。この他の長所として、コイル端部のスプレッドアウトにより局所磁場の集中が避けられ、最大磁場は直線部側に移る。コイル直線部ではコイル導体をしっかり固定することができるので、巻線の動きによるクエンチは起こりにくい。

コイル端部の設計ではBiot-Savartの法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (62)$$

を直接使用すること考える。ここで \mathbf{r} は磁場 \mathbf{B} の観測点から電流 I が流れる導体要素 $d\mathbf{l}$ までの位置ベクトルである。導体は z 軸に平行に負側に無限に長いものとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (1 + \cos\theta_0) \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \end{aligned} \quad (63)$$

ここで θ_0 は観測点 P の位置ベクトル \mathbf{R} が z 軸となす角度、 $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ 、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は単位ベクトルである。

コイル端部が空間的に半円を形成するように半径 a の円筒に取り付ける。このときの半円の中心を $z = z_0$ として、 k 番目の導体の座標を z 座標に依存する角度 $\phi_k(z)$ で表す。

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &= \\ &= \begin{cases} \phi_k(0) & \text{for } z \leq z_0 \\ \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left\{ \frac{\pi}{2} - \phi_k(0) \right\}^2 - \left(\frac{z - z_0}{a} \right)^2} & \text{for } z_0 \leq z \leq z_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (64)$$

ここで $z_{\max} = z_0 + (\pi/2 - \phi_k(0))a$ である。電流の角度成分は z 方向の積分において打ち消し合う(B_x, B_y)成分しか与えないので、次の z 方向の電流

成分だけを考慮する。

$$I_z(k, z) = \begin{cases} I & \text{for } z \leq z_0 \\ I \cdot \frac{\phi_k(z) - \pi/2}{\phi_k(0) - \pi/2} & \text{for } z_0 \leq z \leq z_{\max} \end{cases} \quad (65)$$

コイルの上下左右の対称性が保たれているものと仮定して、許される多極成分は $n=1, 3, 5, \dots$ である。

$$B_n(z) = \frac{2\mu_0}{\pi a} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^N I_z(k, z) \cos[n\phi_k(z)] \quad (66)$$

偏向磁場の実効長は

$$\ell_{\text{Beff}} = \frac{1}{B_0} \int_{-\infty}^{+\infty} B_1(z) dz \quad (67)$$

で与えられる。ここで B_0 はコイルの中心磁場である。

このような近似的な計算でもかなり良い結果が得られるが、鉄の飽和を含む取り扱いには3次元計算コード (OPERA, TOSCA, ANSYSなど) に頼らなければならない。

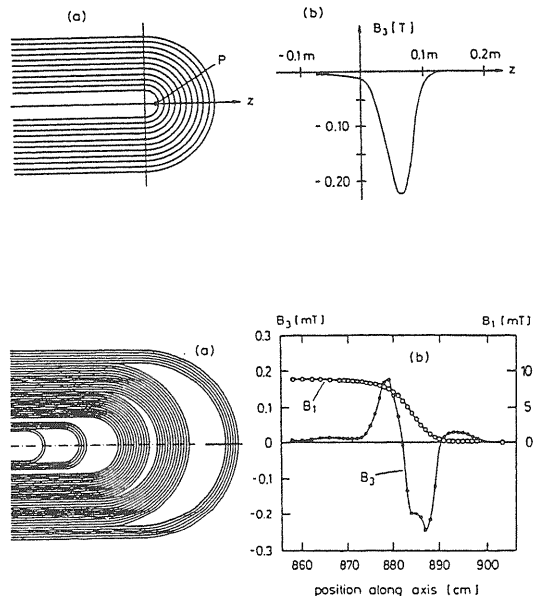


図10 (a)簡単なコイル端部と端部磁場、(b)コイル端部のスプレッドアウトと端部磁場

(5) 持続電流

超伝導体の中を流れる持続性の磁化電流は低磁場領域で磁場に影響を与える。これらの電流はコイルの対称性から許される多極成分（2極電磁石では $n=1, 3, 5, \dots$ 、4極電磁石では $n=2, 6, 10, \dots$ ）を発生する。これらの多極磁場は磁場の上昇時と下降時で逆極性を示し、ヒステリシスがある。コイルを横切る磁場が変化すれば、超伝導体の中に誘導電流が流れる。コイルに誘導される電流には、渦電流、結合電流、磁化電流がある。

渦電流は超伝導ケーブルの異なるストランド間に流れる電流、結合電流はストランド内の異なるフィラメント間に流れる電流、磁化電流は個々のフィラメント内を流れる電流である。

超伝導フィラメントを外部磁場 B_{ext} の中に置き、外部磁場を上げ下げする。 B_{ext} を増加させるとき、フィラメント内に $\cos\phi$ で分布する電流が現れ、フィラメントの電流が流れない領域の外部磁場を打ち消すように遮蔽磁場 B_{screen} を発生する。電流のない領域を図11 (a) に示すように楕円（長半軸 $a=r_f$ 、短半軸 b 、 $\varepsilon=\sqrt{1-(b/a)^2}$ ）で近似する。フィラメントに流れる電流は臨界電流密度 $J_c(B, T)$ である。この遮蔽電流による磁場は

$$B_{screen} = -\frac{\mu_0 J_c}{\pi} \int_{-a}^a dy \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{x}{x^2 + y^2} dx \quad (68)$$

である。ここで

$$u(y) = b\sqrt{1-(y/a)^2}, \quad v(y) = \sqrt{a^2 - y^2} \quad (69)$$

はx方向の積分範囲を与える楕円と円の境界である。積分を実行すれば、

$$B_{screen} = -\frac{\mu_0 J_c r_f}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin^{-1} \varepsilon}{\varepsilon} \right) \quad (70)$$

が得られる。遮蔽できる最高磁場は侵入磁場 B_p (penetrating field) と呼ばれ、

$$B_p = \frac{\mu_0 J_c r_f}{\pi} \quad (71)$$

である。これは図11 (b)の楕円領域が完全に無くなった状況 ($b=0$) に相当する。この状態から外部磁場を下げれば、逆極性の電流が重畳され、複雑な電流パターンが現れる (図11 (c))。

フィラメントを流れる遮蔽電流による磁気モーメントを計算すれば、磁化の大きさが分かる。図11 (a)の状態において座標 $(+x, y)$ と $(-x, y)$ の面積要素を流れる電流による磁気モーメントは

$$dm_f = -J_c dx dy \cdot 2x \cdot \ell_f \quad (72)$$

ここで ℓ_f はフィラメントの長さである。

$$m_f = -2J_c \ell_f \int_{-a}^a dy \int_{u(y)}^{v(y)} x dx = -\frac{4}{3} J_c \ell_f \varepsilon^2 f_f^3 \quad (73)$$

したがって、磁化 M (単位体積あたりの磁気モーメント) は

$$M = -\frac{4}{3\pi} J_c f_f \varepsilon^2 \quad (74)$$

磁場が完全に侵入した状態 (図11 (b)) で磁化はピークに達する。

$$M_p = |M|_{\max} = \frac{4}{3\pi} J_c f_f \quad (75)$$

外部磁場が増加すれば臨界電流密度は下がるので、磁化も減少する。

伝導電流 I_t (transport current) が流れる場合は、フィラメント中心の楕円領域 (図11 (d)) を流れる。平均の伝導電流密度を J_t とすれば

$$I_t = J_t \pi a^2 = J_c \pi a b \quad (76)$$

の関係から

$$b/a = J_t / J_c \quad (77)$$

すなわち、 $\varepsilon^2 = 1 - (J_t / J_c)^2$ となるため、伝導電流が増加すれば磁化が減少する。入射磁場付近では $J_t \ll J_c$ であるため伝導電流の影響が無視できるが、高磁場では磁化はかなり減少する。

(70)と(75)から外部磁場の関数として磁化の様子が分かり、図12のように図示することができる。

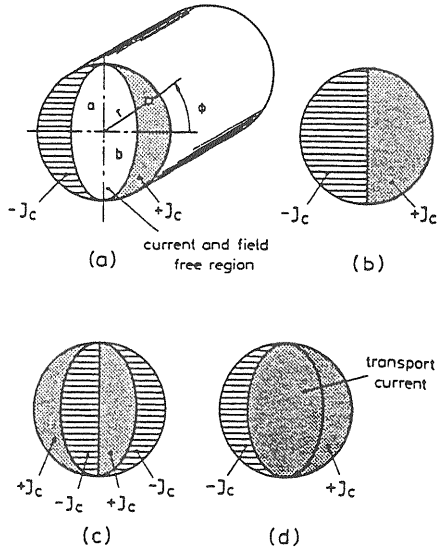


図1 外部磁場による超伝導フィラメントに誘導される持続電流モデル、(a)外部磁場がゼロから侵入磁場より低い磁場まで増加 ($B_{ext} < B_p$)、(b)完全に侵入した状態 ($B_{ext} > B_p$)、(c)外部磁場を B_p 以上上げてから減少させた状態、(d)伝導電流のある(b)の場合。

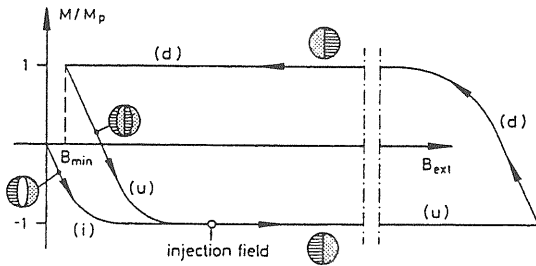


図1 2 外部磁場の関数として表したNbTiフィラメントの磁化の様子。(i)初期状態、(u)ランプアップ、(d)ランプダウン。

(6) 持続電流による多極磁場

HERAの超伝導電磁石に対してDESYで行われた持続電流による多極成分のモデルについて紹介する。コイルのあらゆる部分に対して局所磁場を計算し、その時間変化から磁化電流を計算する。磁化電流のパターンによる磁場を計算するものである。2極電磁石の場合について図13 (a)に示す対称に配置された4本のフィラメントに誘導される電流を考える。フィラメント内の電流分布を積分した線電流 $\pm I$ で

置き換え、各フィラメント内の正負の電流間隔を d とする。この間隔はフィラメントの磁化計算から与えられるが、外部磁場が完全に侵入した状態では $I = J_c \pi r_f^2 / 2$ 、 $d = 8r_f / 3\pi$ である。 $d \ll R$ を考慮して、4個の電流ペアによるベクトルポテンシャルは

$$A^{pair} = \frac{\partial A}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial A}{\partial \phi} \Delta \phi \quad (78)$$

ここで $\Delta R = d \cos \alpha$ 、 $\Delta \phi = -d \sin \alpha / R$ の関係を電流によるベクトルポテンシャルの式に代入すれば、

$$A^{pair}(r, \theta) = -\frac{2\mu_0 I d}{\pi R} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \cos(n\phi + \alpha) \cos(n\theta) \quad (79)$$

鉄ヨークの影響も考えて、イメージ電流によるベクトルポテンシャルを A_{Fe}^{pair} とする。半径 R における電流ペアのイメージは $R' = R^2 / R$ 、 $\phi' = \phi$ である。イメージ電流の間隔は $d' = d \cdot R' / R$ 、 $\alpha' = \pi - \alpha$ であるので、

$$A_{Fe}^{pair}(r, \theta) = \frac{2\mu_0 I d}{\pi R} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \cos(n\phi - \alpha) \cos(n\theta) \quad (80)$$

以上から、

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} (A^{pair} + A_{Fe}^{pair}) = \frac{2\mu_0 I d}{\pi R^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} n \cos(n\theta) \left[\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \cos(n\phi + \alpha) - \frac{R}{R'} \left(\frac{r}{R'}\right)^{n-1} \cos(n\phi - \alpha) \right] \quad (81)$$

この磁場を2極電磁石の1象限のフィラメントについて和を求め、2極成分で割れば多極成分の係数が得られる。この式から持続電流による多極磁場は伝導電流に許されるものだけであることが結論できる。4極超伝導電磁石に対しても同様のことが言える(持続電流による多極磁場は $n=2, 6, 10, 14, \dots$)。許されない多極成分が現れる場合はフィラメントの局所的な特性の変化、例えば臨界電流密度の非一様性、による。また、フィラメント径が小さくなれば、電流ペアの間隔 d も減少するので、持続電流の影響を減らす効果がある。HERAでは $14 \sim 16 \mu\text{m}$ が採用

されたが、現在では超伝導線の技術が進歩し $5\mu\text{m}$ 程度のものが入手可能である。

計算による多極成分と実測値との比較を図14に示す。6極成分はHERAダイポールについての平均、12極成分はHERAクォッドラポールについての平均である。持続電流の影響は主成分にも現れ、図15に示すように低磁場で~1%程度の大きな影響を与え、補正が必要である。

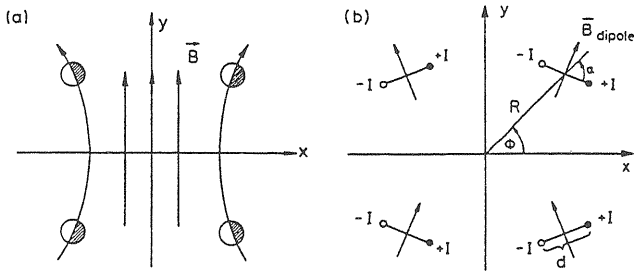


図13 時間的に変化する磁場により、ダイポール内の対称に配置した4本のフィラメントに誘導される持続電流、(a)磁化電流、(b)等価な線電流。

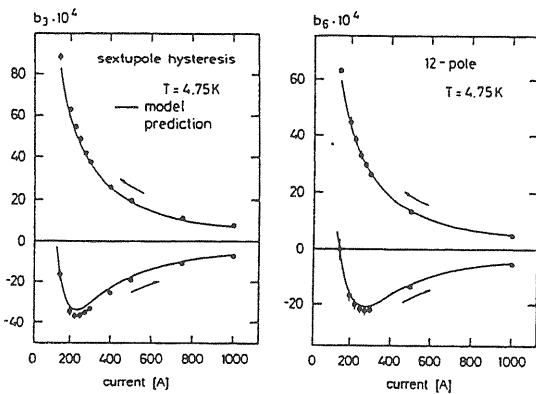


図14 持続電流による(a)HERAダイポールの平均6極成分と、(b)HERAクォッドラポールの平均12極成分。各成分の値は主成分に対する比である。矢印は電流ランプの方向を示す。

持続電流による6極磁場成分は、もし補正しなければHERAの場合、自然クロマティシティの5倍も大きなクロマティシティになる。6極成分は局所的に設置した6極補正コイルで補正される。HERAの超伝導陽子リングの最初のビームテストの段階でまだ40 GeV陽子が利用できなかった頃、7 GeV陽電子

を入射して行われた。このため入射磁場は低く40 mT (電流は42.5 A) で行われた。しかし、標準の磁場サイクルの運転が行われていたので、持続電流による6極磁場は2桁も強くて、この磁化を消すために20 Kまで昇温しなければならなかった。この後0-->112 A-->42.5 Aのサイクルで6極成分をほぼゼロにして陽電子の入射が行われた(図16)。勿論、消磁のためにリング全体を昇温するようなことはできないことである。

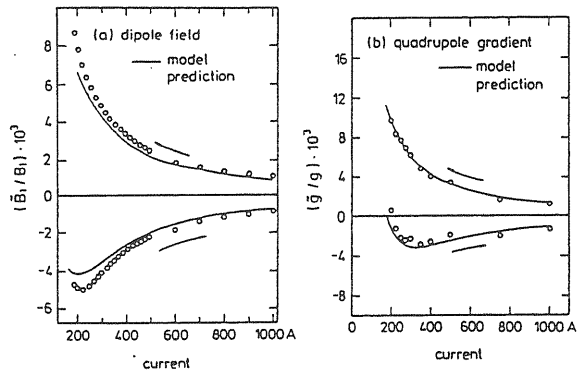


図15 主成分への相対的な影響。(a)HERAダイポール (\bar{B}_2/B_1)、(b)HERAクォッドラポールの (\bar{g}/g)

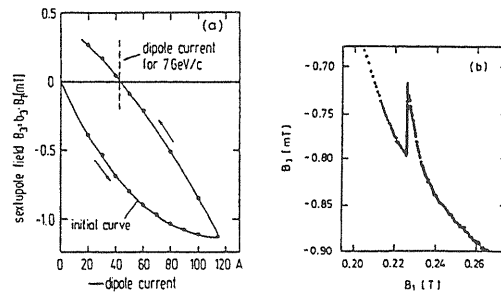


図16 陽電子によるHERA超伝導リングのビームテストのために、20 Kまで温度を上げて超伝導の磁化を消してから4.4 Kに冷却し、磁化による6極成分をほぼゼロにする電流サイクル。

ビーム入射にはかなりの時間がかかるので、その間に6極成分がドリフトし、クロマティシティを一定に保つため6極コイルによる補正が必要である。この状態から加速が始まれば、新しい磁化電流が誘導され元の強さの6極成分が現れる。この変化に追

従できる速い立ち上がりの6極磁場補正が必要である。フィードバック制御のためにリングのダイポールに直列に接続された基準超伝導ダイポールで6極磁場測定が行われる。

超伝導電磁石と常伝導電磁石が混在するリングでは、超伝導電磁石の時定数が圧倒的に長く(数100 sec)、常伝導電磁石の時定数は1 sec以下であるので、トラッキングのために基準超伝導ダイポールのdB/dtに合わせて残りの電磁石が制御される。

(7) 持続電流の時間変化

持続電流の時間変化が、Tevatron陽子・反陽子衝突リングへの反陽子入射時に観測された。反陽子の入射が1時間も続いたため、この間に持続電流による6極成分が時間的に変化し、クロマチシティが変わったためビーム損失が起こったものである。同じ現象はHERAでも観測されている。この様子を図17に示す。2極成分と6極成分の減衰率の間に相関があることから、両者に共通する原因があり、物理的メカニズムとして熱的に活性化された磁束のクリープ現象が考えられている。しかし、

- 1) 電磁石で観測された減衰率はケーブル試料のものとは異なる。
- 2) 減衰率は電磁石間で異なり、超伝導線の製造元によっても異なる。
- 3) 減衰率は低磁場で大きく、直前の励磁サイクルの最大磁場の影響を強く受ける。
- 4) 減衰率は時間的に2つのフェーズに分れ、初めは小さく、時間が経てば大きくなる。

これらの観測は磁束のクリープ現象だけでは持続電流の時間変化が説明できないことを示唆している。

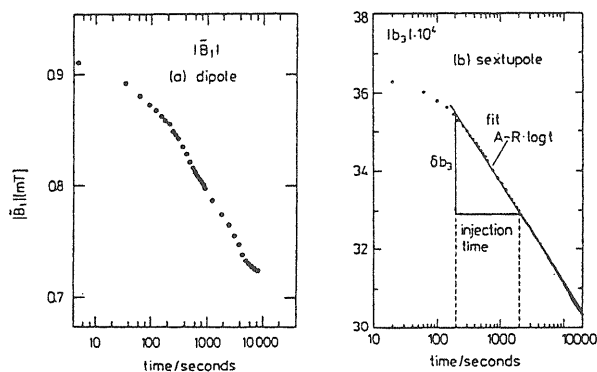


図17 HERA超伝導電磁石における持続電流の時間変化。(a)ダイポール磁場絶対値の時間変化、(b)6極成分の時間変化。

(8) 持続電流の空間的周期性

HERAダイポールによる測定から、6極成分が電磁石の軸に沿って正弦波のように周期的に変化する現象が発見された(図19)。この図は通常の加速サイクルの励磁の後、持続電流を十分減衰させてから測定されたものであるが、比較的大きな6極成分が周期的に現れる。この周期はRutherfordケーブルのトランスポーズのピッチ(95±2 mm)と同じで、超伝導線のストランド間の電流アンバランスを仮定して定性的に説明できる。図19(a)のように電流の異なる2本のストランドを考えれば、結果として(b)の交互に電流の向きが異なる電流ループが現れる。

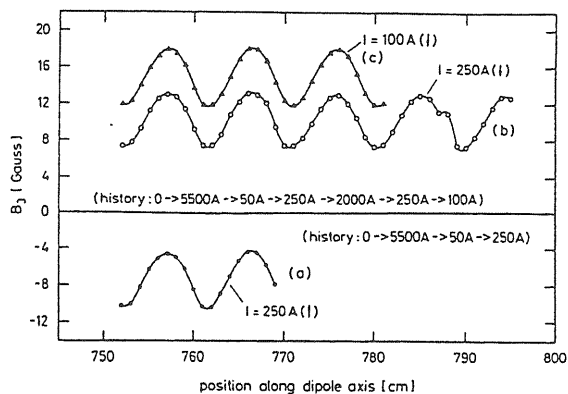


図18 HERAダイポールの軸に沿う6極成分の周期性磁場パターン

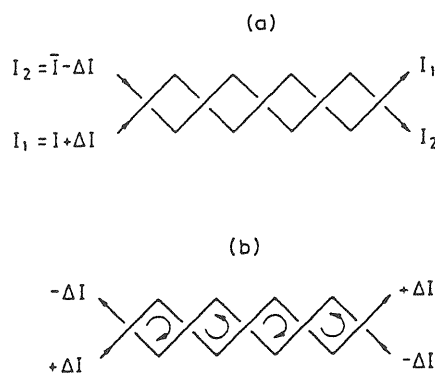


図19 周期性磁場パターンを説明するモデル。(a)電流の異なるRutherfordケーブルの2本のストランド、(b)伝導電流を差し引いた後の電流パターン。

(9) 超伝導電磁石の渦電流

加速器用の超伝導電磁石はRutherfordケーブルから作られる。ケーブルは直径0.7~1.3 mmのストランド (strand) を20~40本より合わせて (transpose)、2レイヤーの平らなケーブルに成形される (図1)。台形状の断面をもち厚さはストランド直径の2倍以下に圧縮される。交叉点でストランドは凹み、かなり大きな接触面積をもつ。この交差点の接触抵抗は数 $m\Omega$ 程度で、渦電流 (eddy current) のループを形成する。異なるストランド間を流れる渦電流をケーブル渦電流と呼び、ストランド内の異なるフィラメント間を流れる渦電流を結合電流 (coupling current) と呼ぶ。

[9-1] ストランド内の結合電流

ストランド内のフィラメントは銅マトリックスによって強く結合している。この結合を減らすために、ワイヤーに捻り (twist) を与えている。捻られたことによりフィラメントはピッチの短いループを形成する。これは超伝導 (フィラメント) と常伝導 (銅) を結ぶループで、隣合うループではお互いに逆向きの渦電流が流れる。外部磁場 B_e のランプは一定として、フィラメントを流れる遮蔽電流は $\cos\phi$ 分布をもち、遮蔽磁場を B_s とする。フィラメント内の内部磁場を $B_i (= B_e - B_s)$ とすれば、渦電流によるストランドの磁化は

$$M_s = 2\dot{B}_i\tau / \mu_0 \quad (82)$$

ここで τ はストランドの捻りピッチ ℓ_{twist} とNbTi-Cu複合物の実効横方向抵抗 ρ_t (effective transverse resistivity) に関する時定数である。

$$\tau = \frac{\mu_0}{2\rho_t} \left(\frac{\ell_{twist}}{2\pi} \right)^2 \quad (83)$$

一般的に $\ell_{twist} \approx 25\text{mm}$ である。単位体積当たり消費されるエネルギー P は

$$P dt = M_s dB_i = \frac{2\dot{B}_i\tau dB_i}{\mu_0} = \frac{2\dot{B}_i^2\tau}{\mu_0} dt \quad (84)$$

より、

$$P = \frac{2\dot{B}_i^2\tau}{\mu_0} \quad (85)$$

である。時定数は超伝導ケーブルによって異なるが、5~20 ms程度であり、ストランド内の渦電流による磁化は短寿命で、これによる加速器の磁場歪みは持続電流に比べて無視できる。

ゼロ磁場から最大磁場 B_m まで時間 T_{ramp} でランプするとき、 $\dot{B}_i = \dot{B}_e = B_m / T_{ramp}$ である。ランプサイクル当たりのストランド内の渦電流損失は

$$Q_s = 2 \int_0^{T_{ramp}} \frac{2\dot{B}_i^2\tau}{\mu_0} dt = \frac{4B_m^2\tau}{\mu_0 T_{ramp}} \quad (86)$$

となり、電磁石の交流損失の一部をなす。

[9-2] ケーブル渦電流 (1次元モデル)

Rutherfordケーブルを2層のワイヤー網で置き換え、クロスオーバー点に微小抵抗を考える。ストランドの総数を N 本 (図20では6本) とすれば、 $N-1$ 個の異なるループが構成される。ループ n ($1 \leq n \leq N-1$) を通過する磁束を Φ_n とする。 n 番目のトランジションにおける抵抗を R_n 、電流を i_n とすれば、

$$\frac{d\Phi_n}{dt} = 2R_n i_n - R_{n-1} i_{n-1} - R_{n+1} i_{n+1} \quad (87)$$

両端のストランドでは

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 2R_1 i_1 - R_2 i_2 \quad (88)$$

$$\frac{d\Phi_{N-1}}{dt} = 2R_{N-1} i_{N-1} - R_{N-2} i_{N-2} \quad (89)$$

の関係が成り立つ。 I_n はクロスオーバー点 $n-1$ と n の間の誘導電流である。Kirchhoffの法則から

$$I_n = I_{n+1} + i_n \quad (90)$$

また、誘導電流の総和はゼロであるので、

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0 \quad (91)$$

以上の方程式を解くことにより、

$$i_1 = \frac{1}{NR_1} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{k=1}^m \frac{d\Phi_k}{dt} \quad (92)$$

$$i_n = \frac{1}{R_n} \left[nR_1 i_1 - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \frac{d\Phi_k}{dt} \right] \quad (2 \leq n \leq N-1) \quad (93)$$

$R_n = R_c = \text{const}$ 、 $d\Phi_n/dt = d\Phi/dt = \text{const}$ を仮定すれば、

$$i_n = \frac{n}{2R_c} (N-n) \frac{d\Phi}{dt} \quad (94)$$

$$I_n = \frac{1}{24R_c} [(N-1)N(N+1) - 2(n-1)n(3N-2n+1)] \frac{d\Phi}{dt} \quad (95)$$

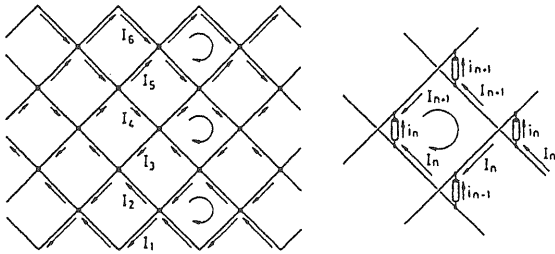


図20 Rutherfordケーブルの等価抵抗回路網、(a)ストランド6本の場合の渦電流、接触抵抗と磁束変化は一樣であると仮定、(b)1つのループにおけるクロスオーバー電流 i_n, i_{n-1}, i_{n+1} 。

これは図17のように誘導電流が超伝導ケーブルのストランドをジグザグに流れる状態に相当する。この誘導電流は磁場の多極成分を発生する。また、トランスポーズのピッチを ℓ_p とするとき接触抵抗のOhmic損失によるケーブル1m当たりの発熱は、

$$G = \sum_{n=1}^{N-1} R_c i_n^2 N / \ell_p = \frac{N}{4R_c \ell_p} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2 \frac{(N^4 - 1)N}{30} \quad (96)$$

である。これは変化磁場中における超伝導ケーブルの交流損失である。磁束の時間変化はケーブルの幅を w として、

$$\frac{d\Phi}{dt} \approx \frac{w \ell_p}{N^2} \frac{dB}{dt} \quad (97)$$

$N \gg 1$ の場合、

$$G \approx \frac{w^2 \ell_p N^2}{120 R_c} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \quad (98)$$

以上の解析は1次元モデルであるが、電磁石の軸方向に分流電流が変化してもよい場合に拡張すれば、分流電流にストランドのトランスポーズの周期性 ℓ_p が現れる。

(10) 磁場特性に及ぼす渦電流の影響

ストランドのクロスオーバー抵抗は一樣でないため、ケーブル渦電流はコイル巻線の対称性に従わない。このため、磁場のランプに伴いコイル対称性から許される成分は勿論、許されない磁場多極成分も現れる。SSCダイポールの測定からランプの速さに依存する4極、6極成分が観測されている(図21)。これ以外にもスキュー多極成分が観測されている。渦電流による6極成分は持続電流による磁化とは逆の極性をもつ。ノーマル4極磁場やスキュー多極磁場は本来は許されない成分であるが、これらは渦電流の非対称性に起因する。

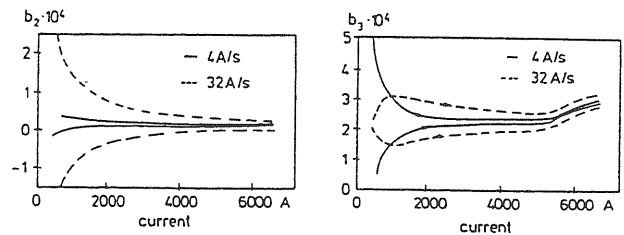


図21 4および32 A/secのランプ速さによるノーマル4極と6極成分のヒステリシス、(a)4極成分、(b)6極成分。矢印はランプの方向を示す。

(11) 補正電磁石

超伝導ハドロン加速器に必要な補正用電磁石は

- ・水平および垂直軌道補正用2極
- ・ベータトロンチューン補正用4極
- ・クロマティシティ補正用および持続電流による6極磁場成分補正用6極
- ・Landauダンピング用8極
- ・カップリング補正用スキュー4極
- ・10極、12極磁場の補正(入射磁場が低い場合)

などで、今までに設計された基本的な構造は図22に示すような

・糸巻き構造 (FNAL)

トレーニング現象やレイヤー間の相互の影響がある。ショートサンプル限界は達成できないが、安定に動作する。

・ビームパイプ構造 (BNL, HERA, RHIC)

スペース節約のため、メインコイルのビームパイプに取付ける構造。メインコイルのバックグラウンド磁場の影響を受ける。このため性能のよい超伝導ストランド線としっかりした固定が必要である。また、メインコイルの磁場により磁化電流が誘導される。逆の影響として、入射磁場のメインダイポールに対して補正4極コイルの漏れ磁場の影響により許されない $n=1, 3, 5$ などの多極成分を誘導する。メインダイポールを高磁場までサイクルさせれば補正コイルによる磁化の記憶が書き換えられる。

・スーパーフェリック構造 (HERA, RHIC)

常伝導電磁石にくらべてコイルがコンパクトになる。磁場性能に優れる。

・リボンケーブル構造 (FNAL, LHC)

メインコイルと同じフラットケーブルで作る。

などがある。これらの補正用電磁石 (コイル) はメインの2極や4極のクライオスタットに挿入される。超伝導補正コイルはメイン電磁石とは設計が異なる。補正コイルは独立に励磁されるので、ターン数を多くして電流を少なくする設計が普通である。メインコイルほどではなくても、コイルの機械的位置精度は必要でありエポキシ含浸を施し、コイルが動かないようにアルミの収縮リングによるプレストレスを与える。

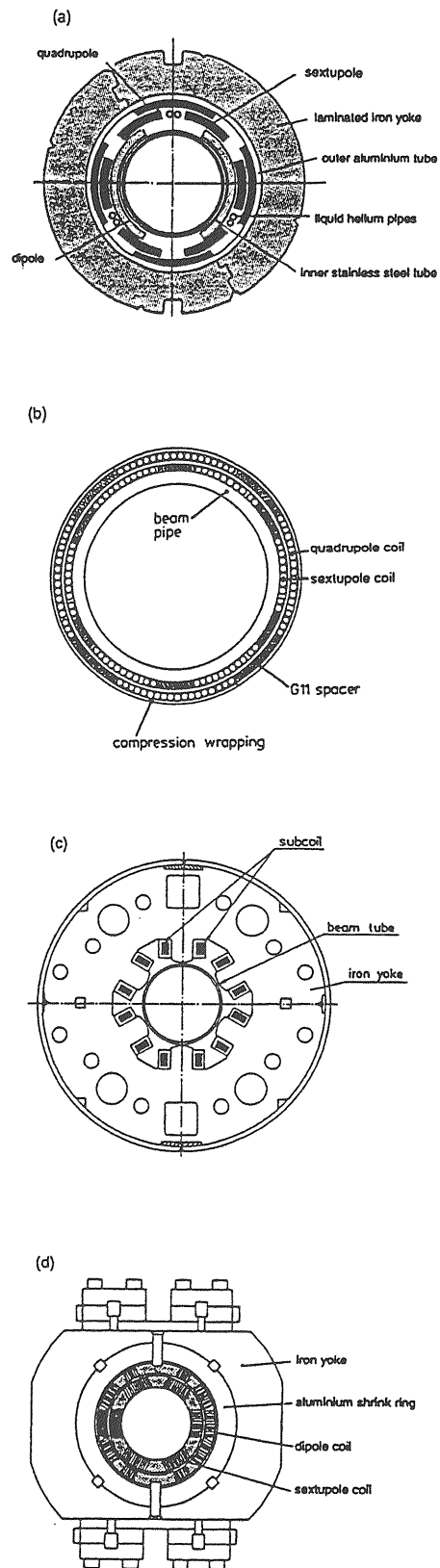


図22 各種の補正超伝導コイルの構造、(1)糸巻き構造、(2)ビームパイプ構造、(3)スーパーフェリック構造、(4)リボンケーブル構造。

第10章 精密アライメント

電磁石の磁場測定が終れば、加速器リング内への電磁石の搬入、据付、精密アライメントが順番に行われる。しかし、アライメントの方法については電磁石の製作と同時に検討を開始し、電磁石のハードウェアに測量に必要な視準点を予め持たせておかなければならない。この間にアライメントの数値的シミュレーションは勿論、加速器に要求される電磁石の位置精度を達成するための測量方法の確立が重要である。

加速器が大型になれば電磁石も数100~1,000台以上になり、これらの電磁石を予定軌道上に精度よく並べるための精密な測量技術と測量データの処理が必要である。近年、測量機器はコンピュータ化され、測量網の誤差解析、大量の測量データの取得から処理まで、一連の作業がコンピュータ上で行える環境にある。しかし、加速器に要求される精度はcivil engineeringの領域を遥かに凌駕し、加速器のタイプにより、ミクロンからサブミクロンの精度が要求される。また、僅かな局所的な測量誤差でも加速器リング全体に大きな影響を与えるため、測量とデータ解析には慎重に対処しなければならない。

(1) 電磁石のミスアライメントから発生する磁場成分

電磁石の理想的な位置からのズレにより磁場誤差が発生する。電磁石のアライメント誤差は

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta\varphi & \sin \delta\varphi \\ -\sin \delta\varphi & \cos \delta\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad (1)$$

で表される。ここで (x, y) は理想的な軌道に関する座標、 $(\delta x, \delta y)$ は電磁石の変位、 $\delta\varphi$ は電磁石の回転誤差である。 (\bar{x}, \bar{y}) は電磁石の軸に関する粒子の位置である。このような変換を磁気スカラーポテンシャルに与えれば、磁場誤差に直した擾乱が得られる。電磁石のミスアライメントによる磁場誤差を求めるため、(1)の変換を極座標で与える。電磁石の軸を中心をもつ極座標を (r_m, φ_m) とすれば、

$$r_m = r - \delta r \quad (2)$$

$$\varphi_m = \varphi - \delta\varphi \quad (3)$$

によって、ビームの座標 (r, φ) に関係付けられる。

したがって、ビーム中心に関するポテンシャルを求めることができる。

$$V_n(r, \varphi) = \frac{1}{n!} A_n (r - \delta r)^n e^{in(\varphi - \delta\varphi)} \quad (4)$$

回転誤差は非常に小さい ($\delta\varphi \ll 1$) と仮定できるので、

$$\begin{aligned} V_n(r, \varphi) &\approx \frac{1}{n!} A_n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} r^j \delta r^{n-j} e^{in\varphi} [1 - n\delta\varphi e^{i\pi/2}] \\ &= \frac{1}{n!} A_n [r^n e^{in\varphi} - in\delta\varphi r^n e^{in\varphi} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j \delta r^{n-j} e^{in\varphi}] \\ &\quad + O(2) \end{aligned} \quad (5)$$

角括弧の第1項がミスアライメントのないときのポテンシャル、第2項が回転誤差によるもので回転誤差に比例する大きさをもつ。第3項は平行移動によるミスアライメントもよるものである。 j の変化する範囲は $0 \leq j \leq n-1$ であるので、平行移動によるミスアライメントにより n 次のポテンシャルから $(n-1)$ 次以下の全ての次数の磁場誤差が現れる。換言すれば、 $2n$ 極電磁石の平行移動ミスアライメントにより、 $(2n-2)$ 極~ 2 極磁場成分が現れる。ここで2、3の場合について

(i) 2極電磁石の回転

$$\text{Im}[V_1(x, y, \varphi - \delta\varphi)] = b_1 [\cos(\delta\varphi)y - \sin(\delta\varphi)x]$$

$$B_x = b_1 \sin(\delta\varphi)$$

$$B_y = -b_1 \cos(\delta\varphi)y$$

(ii) 2極電磁石のx方向変位

$$\text{Im}[V_1(x - \delta x, y, \varphi)] = b_1 y$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = -b_1$$

(iii) 2極電磁石のy方向変位

$$\text{Im}[V_1(x, y - \delta y, \varphi)] = b_1 (y - \delta y)$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = -b_1$$

偏向電磁石は回転による影響が x, y の偏向磁場として現れる。平行移動に対する影響はない。

(i) 4極電磁石の回転

$$\text{Im}[V_2(x, y, \varphi - \delta\varphi)] =$$

$$= b_2 [\cos(2\delta\varphi)xy - \sin(2\delta\varphi)(x^2 - y^2)/2]$$

$$B_x = -b_2 [\cos(2\delta\varphi)y - \sin(2\delta\varphi)x]$$

$$B_y = -b_2 [\cos(2\delta\varphi)x + \sin(2\delta\varphi)y]$$

(ii) 4 極電磁石のx方向変位

$$\begin{aligned} \text{Im}[V_2(x-\delta x, y, \varphi)] &= b_2[xy - y\delta x] \\ B_x &= -b_2y \\ B_y &= -b_2[x - \delta x] \end{aligned}$$

(iii) 4 極電磁石のy方向変位

$$\begin{aligned} \text{Im}[V_2(x, y-\delta y, \varphi)] &= b_2[xy - x\delta y] \\ B_x &= -b_2[y - \delta y] \\ B_y &= -b_2x \end{aligned}$$

すなわち、4 極電磁石の回転ミスアライメントからスキュー 4 極磁場が発生し、x, y 両方向の運動に影響する。x 方向への変位は y 方向の偏向磁場 (x 方向の運動に影響する) に現れ、y 方向への変位は x 方向の偏向磁場 (y 方向の運動に影響する) に現れる。

(iv) 4 極電磁石の回転と x, y 方向の変位

$$\begin{aligned} \text{Im}[V_n(x-\delta x, y-\delta y, \varphi-\delta\varphi)] &= \\ &= \frac{1}{2}b_2[(2xy - 2y\delta x - 2x\delta y)\cos 2\delta\varphi \\ &\quad - (x^2 - y^2 - 2x\delta x + 2y\delta y)\sin 2\delta\varphi] \\ B_x &= -b_2[(y - \delta y)\cos 2\delta\varphi - (x - \delta x)\sin 2\delta\varphi] \\ B_y &= -b_2[(x - \delta x)\cos 2\delta\varphi + (y - \delta y)\sin 2\delta\varphi] \end{aligned}$$

角括弧の第 1 項がノーマル成分、第 2 項がノーマル磁場の回転から発生するスキュー成分である。

(i) 6 極電磁石の回転

$$\begin{aligned} \text{Im}[V_3(x, y, \varphi - \delta\varphi)] &= \\ &= \frac{1}{6}b_3[(3x^2y - y^3)\cos 3\delta\varphi - (x^3 - 3xy^2)\sin 3\delta\varphi] \\ B_x &= -b_3[xy\cos 3\delta\varphi - (x^2 - y^2)\sin 3\delta\varphi / 2] \\ B_y &= -b_3[(x^2 - y^2)\cos 3\delta\varphi / 2 + xy\sin 3\delta\varphi] \end{aligned}$$

(ii) 6 極電磁石のx方向変位

$$\begin{aligned} \text{Im}[V_3(x-\delta x, y, \varphi)] &= \\ &= \frac{1}{6}b_3[3x^2y - y^3 - 6xy\delta x + 3y\delta x^2] + O(3) \\ B_x &= -b_3[xy - y\delta x] \\ B_y &= -b_3[(x^2 - y^2)/2 - x\delta x + \delta x^2 / 2] \end{aligned}$$

(iii) 6 極電磁石のy方向変位

$$\begin{aligned} \text{Im}[V_3(x, y-\delta y, \varphi)] &= \\ &= \frac{1}{6}b_3[(3x^2y - y^3 - 3(x^2 - y^2)\delta y - 3y\delta y^2) \\ &\quad + O(3)] \\ B_x &= -b_3[xy - x\delta y] \\ B_y &= -b_3[(x^2 - y^2)/2 + y\delta y - \delta y^2 / 2] \end{aligned}$$

6 極電磁石の回転によりスキュー 6 極成分が現れ、x, y 方向の平行移動で磁場勾配 (ノーマル 2 極成分) が現れる。さらに、x, y 方向の変位で y 方向に偏向

磁場が現れる。(i)~(iii)がすべて重なった場合は、

(iv) 6 極電磁石の回転と x, y 方向の変位

$$\begin{aligned} \text{Im}[V_3(x-\delta x, y-\delta y, \varphi-\delta\varphi)] &= \\ &= \frac{1}{6}b_3[(3x^2y - y^3 - 3x^2\delta y + 3y^2\delta y \\ &\quad + 3y\delta x^2 - 3y\delta y^2 + 6x\delta x\delta y - 6xy\delta x) \cos 3\delta\varphi \\ &\quad - (x^3 - 3xy^2 - 3x^2\delta x + 3y^2\delta x + 6xy\delta y + 3x\delta x^2 \\ &\quad - 3x\delta y^2 - 6y\delta x\delta y) \sin 3\delta\varphi] + O(3) \\ B_x &= -b_3[(xy - y\delta x - x\delta y + \delta x\delta y) \cos 3\delta\varphi \\ &\quad - ((x^2 - y^2)/2 - x\delta x + y\delta y \\ &\quad + (\delta x^2 - \delta y^2)/2) \sin 3\delta\varphi] \\ B_y &= -b_3[((x^2 - y^2)/2 - x\delta x \\ &\quad + y\delta y + (\delta x^2 - \delta y^2)/2) \cos 3\delta\varphi \\ &\quad + (xy - y\delta x - x\delta y + \delta x\delta y) \sin 3\delta\varphi] \end{aligned}$$

角括弧の第 1 項がノーマル成分、第 2 項がノーマル磁場の回転から発生するスキュー成分である。

(2) 測地パラメータ

前節で見たように電磁石のミスアライメントにより、予期しない磁場成分が現れる。ミスアライメントは増幅されてビーム軌道の歪みとして現れる。ビームに与える影響を小さくするために、ビームオプティクスからアライメントに対する許容誤差が決められる。一般的な許容誤差は位置精度 0.1 mm(rms)、傾き精度 0.1 mrad であるが、最高水準の測量技術でようやく達成できる精度である。

直交座標系における電磁石の位置とアライメント参照点を定義すれば、当然、これらの点は地球球面上に存在するので、補正が必要である。考慮すべき測地学的要素として、

- ・各点の垂直方向 (重力方向) に垂直なジオイド (geoid, 表面をすべて平均海面と見なした地球の等ポテンシャル面で大陸の下に連続的に存在するものと仮定する) に関して、測量点は高さ H をもつ。
- ・ジオイドを最も良く近似する数学表面は回転楕円面である。長半軸を a 、短半軸を b とすれば、偏心率 e は $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$ である。数学表面は長半軸と偏心率によって定義できる。
- ・リング中心点においてジオイドに接する楕円面を選ぶ。この点においてジオイドの法線と楕円面の法線は同じとする。この点を基準点という。これ以外のすべての点は、この法線となす鉛直線偏差と呼ばれる角度をもつ。

・図1のように加速器のリングを表す直交座標系 (X^G, Y^G, Z^G) を定義する。

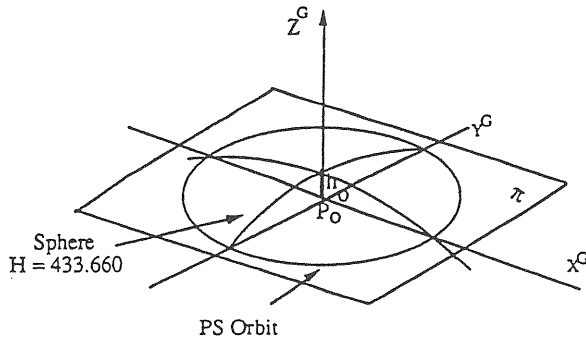


図1 測地座標系

直交座標系に現れる偏差を求めるために、これらの測地学的要素を評価する。これらの偏差はリングの大きさに従って考慮される。図1の座標系において、加速器のリング平面を π 、基準点を P_0 、ビーム軌道を含む球面（リング半径が小さい場合、回転楕円面を球面で近似する）を示す。リング直径を D 、球面の半径を R とすれば、平面 π と P_0 の間の距離は、 $H_{P_0} \ll R$ として

$$H_{P_0} = D^2 / 2R \quad (6)$$

軌道上のすべての点は π 面に関して同じ高さ H をもつ。軌道は $Z=0$ の XY 平面で計算されるが、 XY 平面を傾けて $X^G Y^G$ 平面へ投影される。 $X^G Y^G$ 面は π 面に一致し、投影後の直交座標系を (X^G, Y^G, Z^G) とする。電磁石の傾斜角は軌道上の垂線とリング中心点の垂線とのなす角である。

リング径がLEPのように大きくなれば球面近似では無視できない誤差が現れるので、楕円面モデルが必要である。さらに、山脈などの地質学的な影響による楕円面とジオイドの垂線の角度偏差についても補正が必要である。

(3) ビーム粒子の軌道

ビームを記述する局所座標 (x, y, s) を考え、軌道上のある点における接線方向を s 軸とする。各電磁石の基準ターゲットは電磁石の磁場の軸と中心面を表す直交座標系 (u, v, w) において定義される。4極電磁石の中心軸は磁場を持たない1組の点で与えられる。偏向電磁石は水平磁場成分を持たない面を中

心面とする。これらの軸や面は各電磁石の磁場測定、または機械的な測定から定義される。

電磁石の空間的な位置は電磁石の磁場内の粒子軌道から決められる。偏向電磁石の場合、粒子の軌道は2極磁場によって曲げられるので、磁場長と半径方向の軌道から決まるサジッタ (sagitta) と呼ばれるズレが現れる (図2)。偏向電磁石はその中心軸がサジッタを二等分するようにアライメントされる。また、磁場測定で求めた中心面の軸 (v 軸) 周りの傾斜角 τ の補正が必要である。

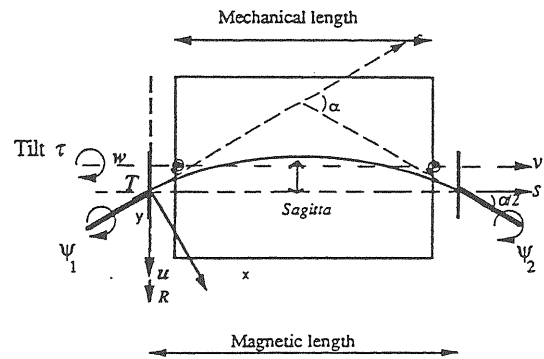


図2 電磁石の座標システム

(4) 磁場軸と基準ターゲット

磁場測定から求められた磁場の軸を、電磁石の基準ターゲットに正確に結び付けなければならない。電磁石はターゲットを基準にしてアライメントされるので、加速器の他の機器と干渉しない場所にターゲットを取付けなければならない。電磁石のアライメントのために、電磁石上部およびその周辺を恒常的に確保しなければならない (stay clear region)。ここは電磁石の位置を正確に決めるための測量機器による視準やレーザー視準、ターゲットの設置などに随時使用される。

電磁石のアライメントには3次元位置座標と3方向の回転の合計6個のパラメータが必要である。通常、電磁石には基準ターゲットと水平基準面がそれぞれ2カ所ずつ取付けられる。脱着式の基準ターゲットは嵌めあいの機械的公差による誤差があるため、できれば固定式のターゲットが望ましい。水平基準面では電磁石の軸まわりと軸方向の傾きの測定が行われ、2カ所のターゲットで水平面内での回転が得られる。

測量から得られた電磁石の位置誤差を調整するためには、3方向に自由度のある精密な位置調整機構が必要である。この機構には加速器に許容される精

度で、位置安定性と位置再現性が要求される。平面は3点で指定できるので、3次元の動きが可能な3個のジャッキが使用される。しかし、長尺の電磁石や変形しやすい構造では4点支持を行い、輸送による変形も矯正する。

常伝導電磁石の場合、電磁石のアライメントのために磁場成分の軸を機械的な軸に置き換える方法は、要求される磁場の精度に合わせて分類できる。non-criticalな電磁石では機械的な軸が磁場の軸に一致するものと仮定して十分である。磁場そのものを利用して磁場中心を求める floating wire法や磁性体微粒子を含むコロイド溶液を利用する方法もある。磁極の形状の精密測定により機械的に軸を求めることもできる。また、磁場測定のベンチ上で同じ座標系を用いて、磁場測定と基準ターゲットの位置出しを行う方法では、ベンチに残された磁場成分の情報を利用する。

超伝導電磁石の場合は、磁場の軸は主にコイルの位置と形状に依存するので、幾何学的には決定できない。このため基準ターゲットは調整できる構造にして、アライメントに必要な精度を出すことが肝心である。超伝導電磁石は極低温に保つためのクライオスタットに収められるので、その外から電磁石にアクセスすることはできない。ターゲットの種類として、2種類が考えられる。1つはねじ込み式ターゲット（受動型ターゲット）で、多くの場合クライオスタット表面に永久的に固定されるツーリングボール（tooling ball）である。FNALのTevatronはこの方式を採用している。もう1つは測量機器を支持できる構造の能動型ターゲットである。これはクライオスタットに固定された支持に取付け、サーボ機構によるターゲットの軸出しができるもので、HERAに採用されている。

超伝導電磁石の場合に注意しなければならないことは、ターゲットと磁場の間の関係が時間と共に変化することである。この理由は、超伝導電磁石は冷却時に強い熱収縮を受けて軸方向に動くことによるコイルのランダムな変位、クエンチに伴う動き、クライオスタットに組込まれた構造材の安定度、輸送中の振動などがある。このためにLHCではターゲットと磁場の関係をモニターする方法が検討されている。その方法としてクライオスタット内に取付けた容量検出器で内部の動きを監視することが考えられている。

(5) 星型測量 (astral survey)

電磁石の位置を求めるため電磁石に設けた基準ター

ゲットを測量する場合、星型測量と呼ばれる三角測量を行う。一般にシンクロトロンはリング状の地下トンネル内に設置され、リング全体として電磁石に要求される位置精度を達成するために連続する3台の電磁石の位置関係を三角形としてとらえる所謂三角測量法 (triangulation) を採用する。軌道に沿って並べられた電磁石列の相対的な位置関係を精密に測量して、電磁石の位置誤差を算出する。加速器が大型になれば一カ所で全体を見通すことは不可能である。そのため連続する3台の電磁石グループの相対的な位置関係を測量機器で測量し、各グループをオーバーラップさせながらリング一周の測量を行う (図3)。すなわち、電磁石を1台ずつずらしながら測量すれば、電磁石の作る三角形はオーバーラップするので、リング一周の位置関係を推定することが可能になる。

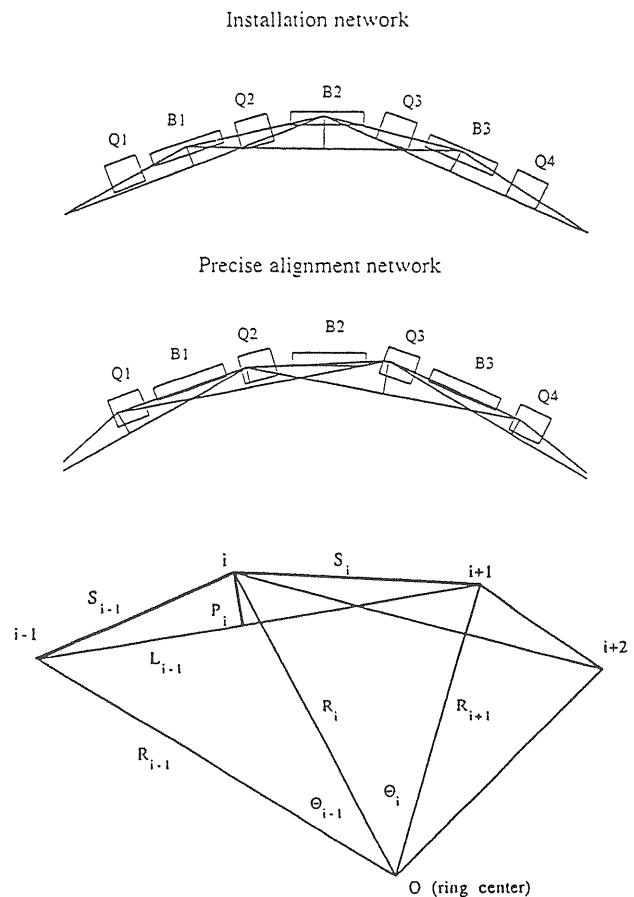


図3 三角測量における電磁石の位置関係、星型測量における測量変数 (垂線とショートコード)

測量対象となる変数は三角形の合同条件が成り立つもので、例えば、2辺挟角とか2角挟辺、3辺合同などがあるが、測量誤差の少ない方法が望ましい。

角度の測定精度は1秒程度で、10m先の位置誤差に直せば0.05mmになる。角度を測定する代りに3台の電磁石で作られる三角形の1つの頂点から向き合う辺に下ろした垂線を特殊な測定器（ナイロン線を用いるオフセット測定器、図4）で測定すれば得られる精度は0.01mm程度になる。測定の僅かの誤差でも電磁石の位置に変換すれば、位置の誤差は大きくなる。特に角度に関する測定データは電磁石の半径方向の位置に影響する。電磁石のビーム方向の位置は電磁石間距離（ショートコード長、short cord length）を測定することに相当する。垂線とショートコードを測定変数とすれば、図3に示すように1つの三角形について2辺と垂線で三角合同の条件が成り立つ。

測量は高さと水平面内における位置がある。高さの測量は比較的簡単で一等水準器（レベル）を使用する。電磁石に高さの差があれば水平面内の位置に誤差が入るので、先ず高さと同水平度が調節される。2台ずつ電磁石の高さを比較しながらリング一周の高さ測量を行い、閉合誤差がでないように高さを修正する。

水平面内の測量では、垂線は図4の装置を使用し、ショートコードの測量は図5のインバル線を利用する測長器を使用する。これらは共にレーザー干渉計で較正され、測定精度は±0.01 mmである。

最近ではレーザー干渉計を組込んで、レトロターゲットの移動をレーザー光が追跡するレーザートラッカー（図6）も使用される。トラッカーの基準点に置かれたレトロターゲットを電磁石の基準点まで人手で移動させる間、レーザー光がターゲットを追跡し、絶えずレーザー干渉計でターゲットまでの距離と角度を測定し、3次元座標に変換するものである。レーザートラッカーによる測量は、原理的に従来の方法と同じである。

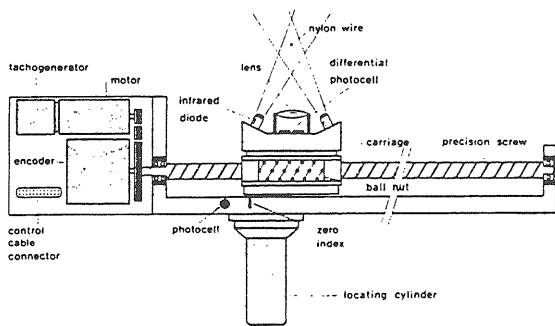


図4 ナイロン線を用いるオフセット測定器

測量すべき電磁石がN台であれば、測量変数は垂

線N個とショートコードN個の合計2N個になる。測量誤差がなければ、この2N個の測量で電磁石の正確な相対的な位置を決めることができる。相対的という意味は電磁石の位置関係を数学的に表現（等長写像）したもので、平行移動と回転については自由度が残っている。

P_{i+1}, P_i, P_{i-1} および測量データ(垂線 P_i 、ショートコード S_i)から決定する操作を繰返すことによりリングを構成することができる。最初の場所 P_0 および P_0 から P_1 の方向は任意に決め、 P_1 を正確に決めるために S_0 を正しく測る。 P_0 から始めてリングを一周して出発点の P_0 で閉じるまで繰返すことによりリングを構成できるが、この方法ではNが30以上になれば、測量誤差のためにリングは閉じない。

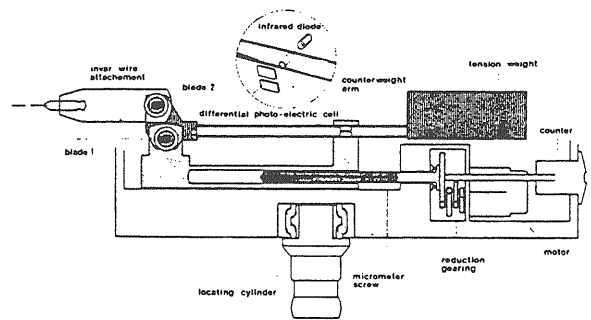


図5 インバル線を利用する測長器、デイスティンバル(CERN)

このような事態を避けるため、位置を順番に決めるのではなく、全ての電磁石について位置関係を表す連立方程式を同時に解く方法が採用される。この方法では設計値のまわりで測量から求まる電磁石の位置ズレ量を一次のオーダーまで展開して線形化することにより、数値的に扱うことができる。この方法では電磁石を最初に据付ける誤差（installation error）は線形近似が許される程度に小さくしなければならない。

(6) 電磁石位置偏差の計算方法

図3に示す連続する3点 ($i-1, i, i+1$) の幾何学的な関係は次の式で与えられる。

$$S_{i-1}^2 = R_{i-1}^2 + R_i^2 - 2R_{i-1}R_i \cos \Theta_{i-1} \quad (7)$$

$$S_i^2 = R_i^2 + R_{i+1}^2 - 2R_iR_{i+1} \cos \Theta_i \quad (8)$$

$$L_{i-1}^2 = R_{i-1}^2 + R_{i+1}^2 - 2R_{i-1}R_{i+1} \cos(\Theta_{i-1} + \Theta_i) \quad (9)$$

$$P_i L_{i-1} = 2\sqrt{t(t - S_{i-1})(t - S_i)(t - L_{i-1})} \quad (10)$$

$$t = \frac{1}{2}(S_{i-1} + S_i + L_{i-1}) \quad (11)$$

ここで S, P はそれぞれショートコード長と垂線の長さ、 R, Θ はリング中心からの距離 (半径) と角度、 t は三角形の周長の半分、 L はロングコード長である。これらの関係式から L を消去すれば、

$$\begin{aligned} P_i^2 \{R_{i-1}^2 + R_{i+1}^2 - 2R_{i-1}R_{i+1} \cos(\Theta_{i-1} + \Theta_i)\} \\ = \{R_{i-1}R_i \sin \Theta_{i-1} + R_iR_{i+1} \sin \Theta_i \\ - R_{i-1}R_i \sin(\Theta_{i-1} + \Theta_i)\} \end{aligned} \quad (12)$$

両辺を微分して、

$$\Delta P_i \rightarrow p_i, \quad \Delta R_i \rightarrow r_i, \quad \Delta \Theta_i \rightarrow \theta_{i+1} - \theta_i$$

と置き換えれば、

$$\begin{aligned} p_i = & \left\{ \frac{B}{A} [R_i \sin \Theta_{i-1} - R_{i+1} \sin(\Theta_{i-1} + \Theta_i)] \right. \\ & - \frac{P_i^2}{A} [R_{i-1} - R_{i+1} \cos(\Theta_{i-1} + \Theta_i)] r_{i-1} \\ & + \left\{ \frac{B}{A} [R_{i+1} \sin \Theta_i + R_{i-1} \sin \Theta_{i-1}] \right\} r_i \\ & + \left\{ \frac{B}{A} [R_i \sin \Theta_i - R_{i-1} \sin(\Theta_{i-1} + \Theta_i)] \right. \\ & - \frac{P_i^2}{A} [R_{i+1} - R_{i-1} \cos(\Theta_{i-1} + \Theta_i)] \left. \right\} r_{i+1} \\ & + \left\{ \frac{B}{A} [R_{i-1}R_i \cos \Theta_{i-1} - R_iR_{i+1} \cos \Theta_i] \right. \\ & + \frac{P_i^2}{A} R_{i-1}R_{i+1} \sin(\Theta_{i-1} + \Theta_i) \left. \right\} \theta_{i-1} \\ & + \left\{ \frac{B}{A} [R_{i-1}R_i \cos \Theta_{i-1} - R_iR_{i+1} \cos \Theta_i] \right\} \theta_i \\ & + \left\{ \frac{B}{A} [R_iR_{i+1} \cos \Theta_i - R_{i-1}R_{i+1} \cos(\Theta_{i-1} + \Theta_i)] \right. \\ & - \frac{P_i^2}{A} R_{i-1}R_{i+1} \sin(\Theta_{i-1} + \Theta_i) \left. \right\} \theta_{i+1} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、

$$A = P_i \{R_{i-1}^2 + R_{i+1}^2 - 2R_{i-1}R_{i+1} \cos(\Theta_{i-1} + \Theta_i)\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} B = & R_{i-1}R_i \sin \Theta_{i-1} + R_iR_{i+1} \sin \Theta_i \\ & - R_{i-1}R_{i+1} \sin(\Theta_{i-1} + \Theta_i) \end{aligned} \quad (15)$$

である。さらに(8)を微分して、 $\Delta S_i \rightarrow s_i$ および前と同じ変数の置き換えをすれば、

$$\begin{aligned} s_i = & \frac{1}{S_i} [R_i - R_{i+1} \cos \Theta_i] r_i + \frac{1}{S_i} [R_{i+1} - R_i \cos \Theta_i] r_{i+1} \\ & - \frac{1}{S_i} [R_i R_{i+1} \sin \Theta_i] \theta_i + \frac{1}{S_i} [R_i R_{i+1} \sin \Theta_i] \theta_{i+1} \end{aligned} \quad (16)$$

(13)(16)から、次のマトリックス方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} p_i \\ s_i \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

p_i と s_i は測量される量で、それぞれ垂線とショートコードの設計値からの誤差である。この方程式を r_i, θ_i について解けばアライメント誤差が得られる。 (M) は所謂 ill-conditioned と呼ばれるマトリックスであるため、方程式を解く場合にある仮定のもとにマトリックスのランク (rank) を下げる必要がある。

得られた解をハーモニクス展開すれば、一般的に低次のハーモニクスは大きな振幅をもつが、波長がベータトロン波長に比べて大きな低次の成分は閉軌道に影響しない。チューンに近い成分は影響が大きいので、このハーモニクスに注目して位置の修正を行えばよい。

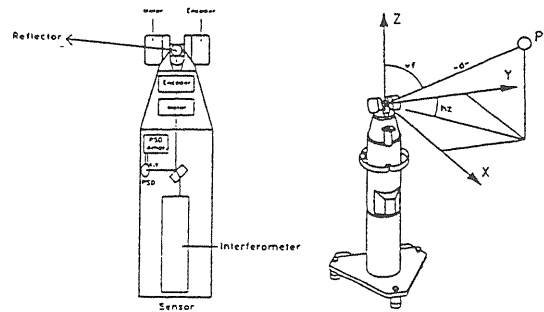


図6 レーザートラッカー

(7) 新しい測量方法

電磁石は精密にアライメントされた後、時間と共に位置が変動するのが常である。その理由は電磁石の置かれる床が安定していないことによる。建物はその地下の地質構造の影響を受ける。これを避けようとするれば、岩盤まで届くコンクリート杭の基礎を作らなければならないので、経済的ではない。地盤の変化は主に上下方向に起るが、地震の場合には横方向にも変動する。加速器を収める地下トンネルは熱膨張の吸収や施工上の構造的な接続のために、ジョ

イント部 (expansion joint) が多数あり、地震のような大きな衝撃に対してズレが発生する。

加速器のトンネルが作られた後も建物のコンクリートが安定するまで数年間は電磁石の位置変動が観測される。このような変動は長期的なもので、定期的に電磁石の測量が行われ、位置が修正される。このような測量、再アライメントには時間がかかり、加速器の稼働率を低下させる要因になる。加速器の利用度が高い場合は深刻で、もっと効率的な測量方法やアライメント方法が模索される。

このためにまず必要なことは、電磁石の架台を遠隔調整できるように電動式にすることと、電磁石の位置偏差を観測する迅速な方法である。このような方向で考えられる観測手段は2つあり、1つはESRFで開発された上下方向の変動を測定する水レベルシステム (HLS) である。もう1つは、加速器のビームを利用するbeam-based alignment (BBA)法である。

[7-1] HLS (Hydrostatic Levelling System)と WPS (Wire Positioning System)

図7に示すHLSは水面までの電気容量を測定するもので、 $\pm 1 \mu\text{m}$ 測定精度がある。ESRFではHLSを電磁石のガーダーの3カ所に取付け、3点の高さ測定と2方向の傾きが測定できる。リング全体に288個のHLSを設置し、コンピュータによる遠隔測定と制御により、リング全体の高さ調整に要する時間は僅か5分である。

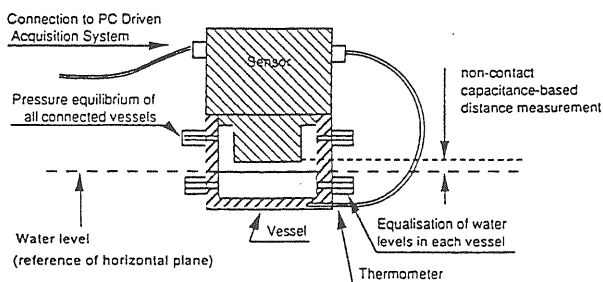


図7 HLS

水平方向の電磁石の動きを測定するWPSは、図8のように0.4 mm径のカーボンワイヤーを張り、セラミック電極との間の電気容量を測定する方式である。長いワイヤーは振動しやすいが、振幅2 mmの振動でも $\pm 1 \mu\text{m}$ の測定精度が得られている。ワイヤーの断面形状による誤差が大きく、 $10 \pm 2 \text{ kg}$ の

張力で誤差は $\pm 10 \mu\text{m}$ である。この測定システムはまだ開発段階であるが、リングに設置すれば垂直、水平方向のリング全体のアライメント時間は10分に短縮される。

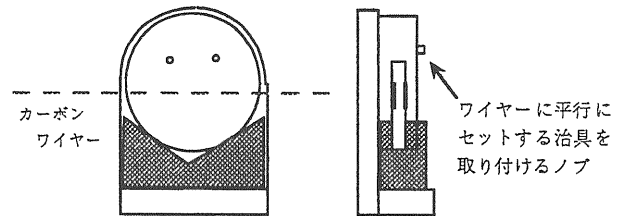


図8 WPSセンサの概略図 (ワイヤーとの平行度 20 mradで誤差は $0.3 \mu\text{m}$)

[7-2] ビームベースアライメント法 (Beam-Based Alignment, BBA)

BBA法は4極電磁石の電流の一部を強制的に外部回路 (電流シャント) にバイパスさせることによって励磁電流を変化させ、電磁石のミスアライメントを測定する方法である。電磁石におけるビーム軌道が中心からズレていれば、ビームは磁場の変化を感じ、ズレ量に比例するキックを受ける。その結果、閉軌道歪みが変化する。

電流変化を与える前の軌道を

$$y(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2 \sin \pi Q} \sum_j \theta_j \sqrt{\beta_j} \cos Q[\varphi(s) - \varphi_j + \pi] \quad (18)$$

ここで $\theta_j = \Delta B l_j / B \rho$ である。n番目の電磁石に電流変化を与えた後の軌道をプライム (') を付けて表せば、

$$y'(s) = \frac{\sqrt{\beta'(s)}}{2 \sin \pi Q} \sum_j \theta_j' \sqrt{\beta_j'} \cos Q'[\varphi'(s) - \varphi_j' + \pi] \quad (19)$$

である。ただし、

$$\theta_j = \begin{cases} \theta_j & ; j \neq n \\ \theta_n' & ; j = n \end{cases}$$

上の関係を第1近似でマトリックス表現すれば、

$$\{\Delta y\} = (C)\{\xi\} \quad (20)$$

ここで、 $\{\Delta y\}$ と $\{\xi\}$ はそれぞれ軌道の変化と電磁石の位置変位を与えるベクトルである。また、 (C) の要素は $j \neq n$ に対して、

$$C_{mj} = \frac{\sqrt{\beta_m \beta_j} G_j \ell_j}{2 \sin \pi Q} \left\{ \left[\frac{\Delta \beta_m}{2 \beta_m} + \frac{\Delta \beta_j}{2 \beta_j} - \frac{\pi \Delta Q}{\tan \pi Q} \right] \right. \quad (21)$$

$j = n$ に対して、

$$C_{mn} = \frac{\sqrt{\beta_m \beta_n} G_n \ell_n}{2 \sin \pi Q} \left\{ \left[\frac{\Delta \beta_m}{2 \beta_m} + \frac{\Delta \beta_n}{2 \beta_n} - \frac{\pi \Delta Q}{\tan \pi Q} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\kappa}{100} \right] \cos Q \Phi_{mn} - [\Phi_{mn} \Delta Q + Q \Delta \Phi_{mn}] \sin Q \Phi_{mn} \right\} \quad (22)$$

である。ここで、 G と ℓ は4極電磁石の磁場勾配と長さ、 κ は n 番目の電磁石の変化量(%)である。

$$\theta'_n - \theta_n = \xi_n \kappa G_n \ell_n / 100 B \rho \quad (23)$$

これらの関係は水平、垂直のどちらの方向でも成立する。 C_{mj} と C_{mn} は数値的に与えられるので、 n 番目の電磁石の位置変化が分かる。この方法では1度に1カ所の4極電磁石に電流変化を与え、ビーム軌道の変化は任意の場所のビームモニターで観測することができる。この方法で得られる精度はビームモニターの測定精度で決まり、 $5 \mu\text{m}$ のモニター精度があれば、 $20 \mu\text{m}$ のミスアライメントの測定が可能である。

(8) 地盤の運動 (Ground motion)

地盤の長期的な変動は加速器の設計段階で問題にされ、加速器建屋の基礎工事に絡めて議論されている。それは主に工事費との関連で、地質調査に時間をかけ、過去に行われたボーリング調査も参考に、地面にかかる荷重から加速器トンネル全体の不等沈下量が推定される。電磁石は少量ではあるが高さ補正機構を具えているので、その範囲以内の沈下量であれば、大掛かりな基礎を省略される。

しかし、このような問題の他に加速器技術に進展により、主としてリニアコライダーに関連して、短期的な地盤変動がビームの衝突に大きな影響を与える。その理由は、リニアコライダーの衝突点に

おけるビーム径は $1.5 \mu\text{m}$ 程度であるため、 $0.1 \mu\text{m}$ 程度の4極電磁石の位置変動によりビーム軌道がズレて衝突しなくなるためである。この程度の振動は日常的に常に存在し、その対策はリニアコライダーの設計に考慮されなければならない重要課題である。

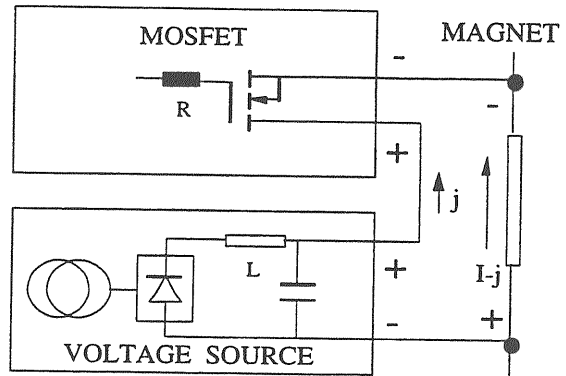


図9 4極電磁石の電気端子から強制的に電流を長すことによって電磁石の電流を j だけ変化させる。

地盤変動に関して、

- ・極めてゆっくりとした位置変動は軌道補正システムで考慮される。遠くの震源から伝わってくる数10秒以上の周期をもつ地盤振動波による誤差は、加速器全体をコヒーレントに動かすので害はない。
 - ・数Hz以上の周波数の変動は、人間の文化活動一すなわち局所的でインコヒーレントな変動一大部分は交通機関に関係があり、設置場所の選択または人間活動の制限により改善できる。
 - ・この周波数領域では、パワースペクトル密度は周波数の2乗に反比例して減少する(図10)。
 - ・大荒れの天候では、主に潮の作用で、「静かな」ときに比べて1~2桁雑音レベルが上昇する。潮の作用による陸地の動きは比較的離散的な周波数で起こる。太平洋沿岸(アメリカ西部)ではこの周波数は0.15Hz付近にある。バルト海沿岸では2 Hz付近にある。
 - ・地盤の微小振動は加速器トンネルのある地質構造による。
 - ・加速器の支持構造が共鳴すれば、地盤変動は増幅される。
 - ・地盤変動またはビームの軌道変化をフィードバックすれば、ビーム変動を抑えるのに有効である(ピエゾ素子を利用する振動のactive isolation)。
- などを考慮する必要がある。図10は静かな場合と

そうでない場合の長期の観測に基づく地盤振動の平均パワースペクトル密度の測定例である (Aki and Richards, 1980)。最大ピークは0.15 Hz付近にあり、約1 μm の振幅に相当する。

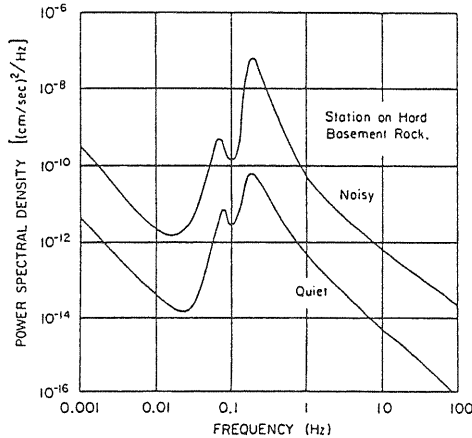


図10 パワースペクトル密度

垂直方向に振動する震源から地球を伝搬してくる波動は3種類に区別できる。

- 1) p-波 (球面圧縮波、縦波) : 伝搬速度は最も速く、 $v_p = \sqrt{C_{11}/\rho}$ (C_{11} 、 ρ は媒質の圧縮弾性定数と密度)である。マントルにおける速度は約8 km/secである。
- 2) s-波 (球面剪断波、横波) : 伝搬速度は遅く、 $v_s = \sqrt{C_{44}/\rho}$ (C_{44} 、 ρ は媒質の剪断弾性定数と密度)である。マントルにおける速度は約4.5 km/secである。
- 3) Raleigh表面波 : 縦波と横波成分をもち、s-波よりやや遅い v_R で伝搬する。 $v_R/v_s = 0.92$ 程度である。

これらの波は伝搬する過程で減衰し、地質構造による影響を受けてモードの変換が起こるので、地盤振動の伝搬は複雑である。

(9) 地盤運動のリング加速器への影響

地面の動きがビーム衝突に与える影響が問題にされるようになったのは、加速ビームサイズの小さな2リングコライダーによるビーム衝突が行われるようになってからのことである。ISRやDORISは2リング衝突であるが、ビームサイズが大きく多少のビームのズレは問題にならなかったし、1リング衝突の加速器では2つのビームは同じ閉軌道歪み(COD)をもつので問題にされなかった。

HERAは電子リングと超伝導陽子リングの交差点でビームサイズの小さい電子と陽子ビーム衝突させる高エネルギーの2リングコライダーであるため(衝突点における垂直ビームサイズは70 μm)、片方のリングが他方のリングと相対的に動けば、閉軌道歪みでビームがズレてルミノシティが下がるか、ひどい場合は衝突が起こらない可能性がある。このような事態は地面の時間的変動により4極電磁石が動くときに観測される。これは時間的に変動するミスアライメントに相当し、閉軌道歪みも時間的に変動する。リング全体がコヒーレントに動くような波長の長い(振動数の低い)地盤振動であれば、問題は起こらない。

[9-1] 垂直方向の地盤振動

問題を簡単化して非線形要素のないN個のFODOセルから構成されるリングを考え、FとD-4極電磁石の焦点距離を同じと仮定する。FODOセル当たりの位相の進みを $\Delta\phi$ とし、ベータatron振動数は $Q = N\Delta\phi/2\pi$ とする。4極電磁石はthin lensで近似する。観測点を $s=0$ のF-4極電磁石の中心に選ぶ。図10のようにリングは半径Rの円で表し、リング中心からみて地面の振動が伝わる方向は観測点と角度 θ_w をなすものとする。各4極電磁石までの角度を θ_n とすれば、n番目の4極電磁石までのベータatron位相は

$$\phi_n = n\Delta\phi/2 = Q_y\theta_n \quad (24)$$

である。地盤振動の振幅を \hat{y} 、リング中心に関する位相を φ_0 、伝搬速度を v とすれば、4極電磁石の垂直方向の動きは、

$$\Delta y_n(t) = \hat{y} \text{Re} \left[e^{i(\omega t + \frac{\omega R}{v} \cos(\theta_n - \theta_w) + \varphi_0)} \right] \quad (25)$$

である。ここで $\omega/2\pi$ は振動波の周波数である。この1台の4極電磁石の動きによる観測点 $s=\phi=0$ における軌道歪みは

$$y_c = \frac{\sqrt{\beta_0}}{2|\sin \pi Q_y|} \sqrt{\beta_n} \frac{g_n \ell \Delta z_n(t)}{B\rho} \cos(\phi_n - \pi Q_y) \quad (26)$$

ここで、 β_0 、 β_n はそれぞれ観測点におけるベータatron関数、 g_n と ℓ は磁場勾配と長さ、 $B\rho$ は磁気剛性である。全ての4極電磁石の動きの寄与を求めれば、

$$y_c = \text{Re} \left[\frac{\sqrt{\beta_0}}{2 |\sin \pi Q_y| B \rho} \ell \hat{y} e^{i(\omega t + \phi_0)} \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{2N} g_n \sqrt{\beta_n} e^{i \frac{C}{\lambda} \cos(\frac{\phi_n}{Q_y} - \theta_w)} \cos(\phi_n - \pi Q_y) \right] \quad (27)$$

ここで、 c はリングの周長、 λ は地盤振動の波長である。FODOセルのFとDで磁場勾配 g_n は符号を異にするので、和の中で考慮する。上の式に第1種のBessel関数 J_p を導入すれば、

$$y_c = \text{Re} \left[\frac{\ell \hat{z} \sqrt{\beta_0} e^{i(\omega t + \phi_0)}}{2 B \rho |\sin \pi Q_y|} \sum_{n=1}^{2N} g_n \sqrt{\beta_n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} i^p J_p \left(\frac{C}{\lambda} \right) \right] \quad (28)$$

ここで、 $A = g \ell \hat{y} \sqrt{\beta_0} e^{i(\omega t + \phi_0)} / (2 B \rho)$ 、FとD-4極電磁石におけるベータatron関数を β_F 、 β_D として、それぞれの強さを g 、 $-g$ とすれば、

$$y_c = \text{Re} \left[A \sum_{p=-\infty}^{+\infty} i^p J_p \left(\frac{C}{\lambda} \right) C_p \right] \quad (29)$$

ただし、

$$C_p = \frac{1}{|\sin \pi Q_y|} \left[\sqrt{\beta_F} \sum_{n=1}^N \cos \left[p \left(\frac{n \Delta \phi}{Q_y} - \theta_w \right) \right] \cos(n \Delta \phi - \pi Q_y) \right. \\ \left. - \sqrt{\beta_D} \sum_{n=1}^N \cos \left[p \left(\frac{n \Delta \phi - \Delta \phi / 2}{Q_y} - \theta_w \right) \right] \cos(n \Delta \phi - \pi Q_y - \Delta \phi / 2) \right] \quad (30)$$

である。途中の計算を省略して、結果だけを書けば、

$$C_p = \frac{(-1)^{p+1}}{\sin \left(\frac{\pi p}{N} - \frac{\Delta \phi}{2} \right)} \left\{ \sqrt{\beta_F} \cos \left[p \left(\pi \frac{N+1}{N} - \theta_w \right) - \frac{\Delta \phi}{2} \right] \right. \\ \left. - \sqrt{\beta_D} \cos p(\pi - \theta_w) \right\} \quad (31)$$

$$y_c = \frac{g \ell \hat{y} \sqrt{\beta_0}}{2 B \rho} \left[\cos(\omega t + \phi_0) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (J_{4p} C_{4p} - J_{4p-2} C_{4p-2}) \right. \\ \left. + \sin(\omega t + \phi_0) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (J_{4p-1} C_{4p-1} - J_{4p-3} C_{4p-3}) \right] \quad (32)$$

C_p の分母がゼロまたはゼロに近くなる共鳴条件

$$p_{res} = mN \pm [Q_y] \quad (p, m \text{は整数}) \quad (33)$$

のときに閉軌道歪みの振幅が最大になる。 Q の端数

を δQ とすれば、 $p = p_{res}$ において閉軌道歪みの振幅は

$$\frac{1}{\sin(\pi \delta Q_y / N)} \quad (34)$$

に比例する。このような条件は上の共鳴条件の全ての m の値に対して現れる。すなわち、 $C/\lambda \geq p_{res}$ となる地盤振動の振動数の条件が満たされるところで閉軌道歪みが大きくなる。地盤の垂直の動きに対する応答 $R_y = y_c / \hat{y}$ を計算すればその様子が分かる。

図11はESRF ($C=850\text{m}$, $Q_z=19.2$, $N=80$)に対するシミュレーション結果である。 C/λ が Q_z ずつ増加するたびに応答が大きくなる。上図は $\theta_w=0$ の場合で、 C/λ の関数として表した一方向からの平面波に対する応答とあらゆる方向からの平面波に対するrms応答である。下図は C/λ を固定して θ_w の関数として表した応答である。

振動波の伝搬速度を400m/sと仮定すると、大リングでは20Hz以上で、小リングでは10Hz以上で影響が現れる。リングを硬い地盤に移せば周波数は高い方へずれ地盤の振動振幅も小さくなる。しかし、高い周波数でも少しは平面波は存在する。また大部分の振動ノイズは局所的であり、もともとインコヒーレントである。LEPでは $C/\lambda \sim 400$ なので、1Hz近傍に共鳴がある。

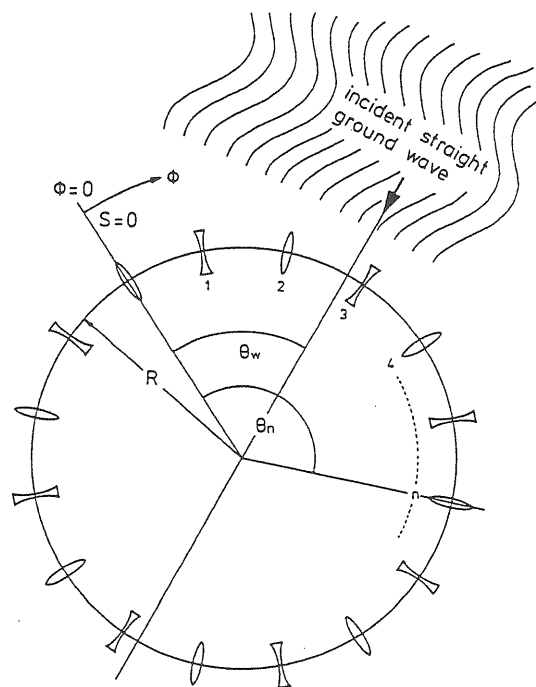


図10 地盤振動のモデル

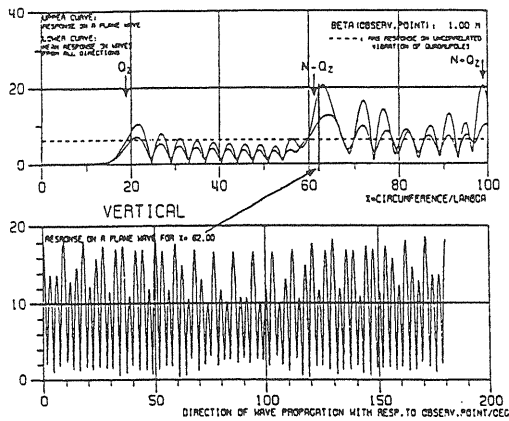


図 1 1 地盤の垂直の動きに対する応答
($C=850m$, $Q_x=22.19$, $N=80$)

[9-2] 水平方向の地盤振動

水平方向に圧縮波を受けた場合、4極電磁石は水平に動く。純粋に半径方向に動く電磁石は $\theta_n = \theta_w$ と $\theta_n = \theta_w + \pi$ の相当するものだけで、これ以外のものは $\cos(\theta - \theta_w)$ 倍された大きさが半径方向の動きになる。すなわち、電磁石の水平方向の動きは

$$\Delta x_n(t) = \hat{x} \cos(\theta - \theta_w) \operatorname{Re} \left[e^{i \left[\omega t + \frac{C}{\lambda} \cos(\theta - \theta_w) - \varphi_0 \right]} \right]$$

である。垂直振動の場合と扱いは同じで、

$$P_{res} = mN + [Q_x]$$

のときに応答 $R_x = x_c / \hat{x}$ が大きくなる。この様子を図12に示す。

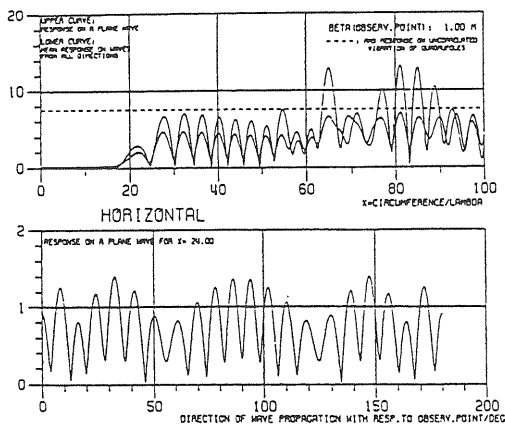


図 1 2 水平方向の磁場振動に対する応答、
図の見方は前図と同じ ($C=850m$, $Q_x=22.19$,
 $N=80$)

第11章 電磁石製作の実際

シンクロトロン電磁石製作に携わる技術者のために、以上に述べなかった内容で電磁石製作の実際面についてまとめる。

(1) 加速器の電磁石用鋼板

ラミネート鋼板による鉄心の製作では、鋼板を抜型(ダイ)で打抜き、積層する。電磁石には2種類のスチール、脱炭鋼板(低炭素鋼)とケイ素鋼板から選択できる。脱炭鋼板は加速器の電磁石のために開発された板厚は1.5mm程度の鋼板で、純鉄に近い磁気特性を示す。ケイ素鋼板は電気機械用に大量生産されている板厚0.5mm, 0.35mmの鋼板で、Siを数%含む。脱炭鋼板は高磁場側で磁気特性がよく、ケイ素鋼板は低磁場側で優れている。日本では脱炭鋼板に相当するものは、自動車や家庭製品に使用される深絞り用軟鉄と呼ばれる鋼板であるが、磁気特性の保証はない。これらの磁気特性の比較を図1に示す。

鋼板の仕様の1例として、

保持力は $B_{\max}=1.5\text{ T}$ において $H_c \leq 1.0[\text{Oe}]$

保持力のバラツキは10%以下

磁化力5,000 A/mにおいて、

磁束密度は1.66 T以上

バラツキは2.5%以下

占積率は98%以上

炭素含有量は0.003%以下

絶縁被膜は無機質

厚み偏差は $0.5\text{ mm} \pm 0.02\text{ mm}$

層間抵抗は $5\ \Omega\text{ cm}^2$ /枚以上

硬度は $H_v \geq 100$

その他、機械的強度、寸法などに関する仕様を定めることになる。これらの数値は電磁石の設計条件によって異なる。磁束密度の指定は満足されるが、保持力については納入前に選別されることになる。10%のバラツキは大きいので、積層前にシャフリングを行う必要がある。鋼板をシャフリングして平均化することにより鉄心間のバラツキを減らすことができる。また、電磁石用の鉄の炭素含有量は0.06% \pm 0.02%以下であれば、鉄の磁气的性質は炭素含有量によらなくなる。

鋼板の使用量が多くなれば、鋼板は複数のロットに分けて生産される。電磁石への使用にあたって重要なことは、ロット間に化学組成の変化がなく磁気特性にバラツキがないことである。

鋼板は冷間圧延後の焼鈍により硬度が低下するため、精度のよい打抜きが難しくなる。このため最後の焼き戻し処理の圧延で硬度が調整される。打抜き精度を確保するためには、ビッカース硬度100以上が適している。スチールは再びコイルに巻かれ、ミル工程で両端を切り取り所定の幅に切断される。コイルに巻取る過程での鋼板の機械的歪みを避けるために板状に切断するのが最良である。しかし、巻枠の直径をある値以上にすればこの歪みを最小限に留めることができることと経済的であることから、最近ではコイルを巻き戻しながら打抜きが行われる。

鋼板製造のあらゆる段階で磁気特性に何らかの影響が現れるが、厳格な品質管理と再現性が重要である。

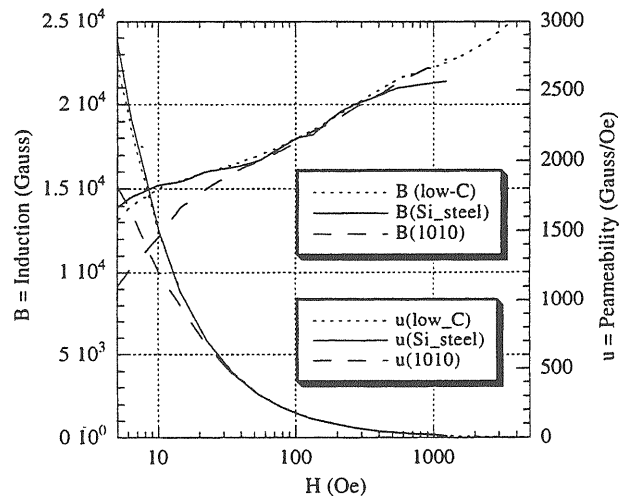


図1 電磁石用鋼板の磁気特性

(2) 鉄心の製作上の注意事項

[2-1] シャフリング (shuffling)

電磁石の性能の個体差をできるだけ小さくするために、鋼板のシャフリングが行われる。高磁場における透磁率はほぼ一様であるので、主に保持力の分布を基にして行われる。鋼板購入時に保持力と透磁率をある範囲に指定できれば問題ない。用途の広い鋼板であればこのような選択が可能である。保持力はほぼガウス分布するので、保持力の小さい部分と大きい部分を混ぜ合わせて、中心値になるように均等化する。保持力の統計分布を図2に示す。しかし、長期にわたる鋼板の大量の調達では、保持力も大きく変化することもある。このような場合は当然、電磁石の個体差も大きく、最後の手段として据え付け時に電磁石のシャフリングを行い、リング全体で電磁石の性能が平均化するようにする。

緻密にシャフリングを行おうとすれば、広い場所が必要になるので、現実的には保持力の分布を数ブロックに分けて混ぜ合わせる。

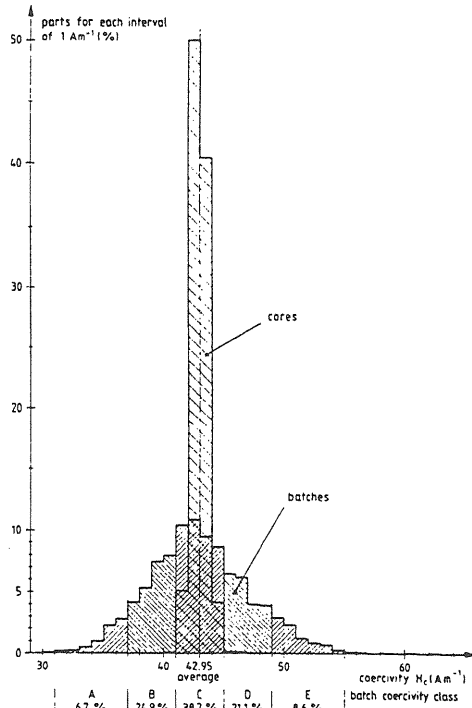


図2 保持力の統計分布、シャフリング前の分布とシャフリング後の平均化された鉄心の保持力 (CERN)

[2-2] 打抜き (stamping, punching)

鋼板の打抜きを精密に行うためには、粗打抜きと仕上げ打抜きの2回打抜き法が採用される。打抜きは周囲温度の影響により抜き型寸法が変化するため、温度制御された部屋で行われる。図3は打抜きを行う工場に様子を示す例である。この図では打抜きは鋼板に歪みを与えないようにシートで行われているが、現在はドラムに巻かれたロール状の鋼板を巻き戻しながら自動的に打抜く方法を採用している。

打抜き精度を上げるため、抜き型は調整ができるように分割されたブロックで構成され、打抜き鋼板の寸法測定からブロックを動かして抜き型の修正を行う。鋼板を多数打抜けば抜き型のエッジが摩耗するので、打抜いた鋼板の寸法を規定枚数ごとに測定し、打抜き精度が悪くなれば研磨を行う。抜き型の雄雌の片側クリアランスは10~20 μmである。

打抜かれた鋼板の切断部にはダレとカエリが現れる。カエリは鋼板を積層するとき、隣の鋼板を押えつけ、電気的に短絡すれば渦電流が流れる原因になるので、この部分を取り除くため片面だけバリ取りを行う。ダレが大きい場合は打抜き寸法精度が悪くなる。一般的に加速器の電磁石で達成されている基準はダレは板厚の10%以下、カエリは板厚の2%以下である。

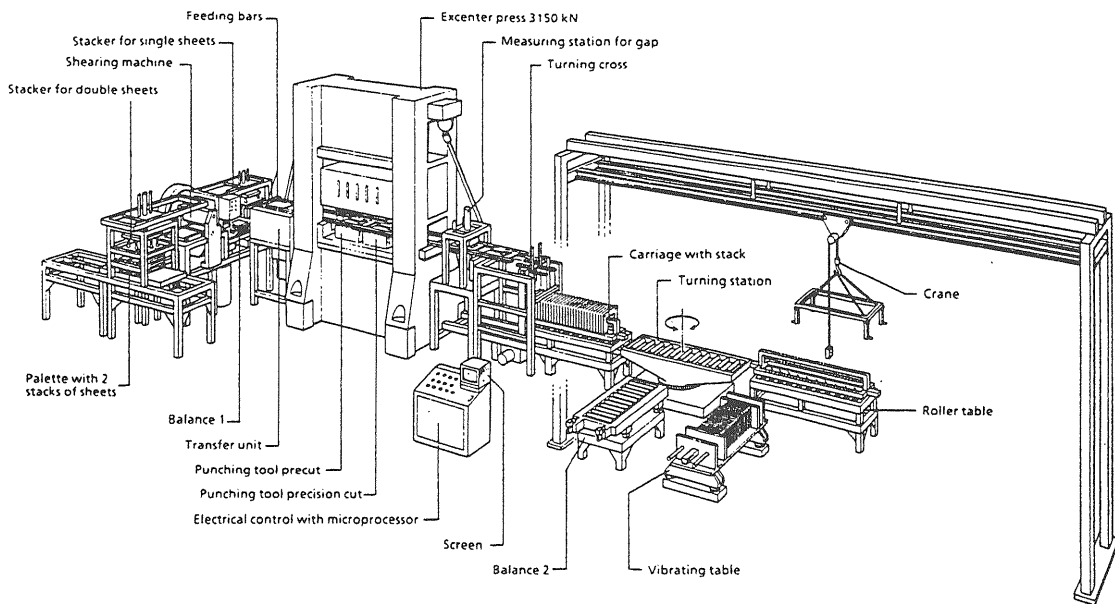


図3 鋼板の打抜きの工場内の様子 (CERN-LEP)

鋼板は厚み偏差をもっているため、積層時に偏差を修正できるように、打抜き方向を変えたものを用意する必要がある。

non-critical な補正電磁石の場合は、抜き型は一体構造とし、粗打抜きを省略して1回打抜きである。

[2-3] 積層、拘束

打抜いた鋼板は積層治具に上で積層する。積層は仮締め付けをしては積層厚み偏差を測定しながら行い、厚み偏差を修正する。規定長積層した後で、全体を長さ方向と横方向に加圧する。この加圧は溶接変形を抑えるため、加圧により積層治具が変形しない構造にしなければならない。溶接は加圧下で行うので、積層治具は溶接による変形応力に十分耐える強度を持たなければならない。端板の加圧面が平行になっていなければ、加圧により鉄心が傾くので、端板の平行度が出ていなければならない。

長さ方向は油圧シリンダーで最大 20 kg/cm^2 の締め付け圧が掛けられるように設計する。

電磁石の真直度を出すため、磁極部に積層の基準になる面（積層基準面）を持たせる磁極設計を行う必要がある。

溶接に入る前に、加圧状態下で溶接変形の原因になる積層治具と鉄心の間の隙間がないこと、積層治具の変形がないことを確認しなければならない。

[2-4] 溶接

鉄心の溶接はラミネーションを固定するために行われ、鉄心側面に付ける側板および両端の非磁性の端板でラミネーションを抑え込む。一般に側板は磁場には寄与しないので、構造用軟鉄が使用される。端板は鋼板を加圧状態で抑えるため変形しない程度の厚み、数cm程度、が必要である。磁場の実効的長さは機械的な長さより長く、端板を含めた長さがほぼ実効長に相当する。また、端板はリングに組込まれたとき、まわりの機器との取り合いのため、機器取付けの座に利用されたり、高次磁場成分補正のためのシムを取付ける必要がある。パルス電磁石の場合、この部分に渦電流が流れやすいため、磁場誤差が入る原因にもなる。このような理由から、端板は磁場に寄与しない非磁性で、しかも電気抵抗の大きなSUSが使用される。室温における比電気抵抗は純鉄で $9.8 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ 、SUS316Lは $74 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ である。約7倍大きい。SUSは非磁性（透磁率は1.02）であるが、若干の透磁率をもち、機械加工や溶接によって透磁率が増加する。過去にはSUS304やSUS316が使用されたが、機械加工や溶接による透

磁率の増加が大きいため現在ではSUS316Lが一般的である。機械加工後の透磁率は加工法にもよるが、1.05程度である。加工による透磁率は焼鈍により除くことができる。電磁石の製作仕様として端板の透磁率は1.05以下を推奨している。

高マンガン非磁性鋼（透磁率は1.02）も比電気抵抗はSUSと同程度であるが、被切削性が悪く工具の寿命が議論されたこともある。現在では快削高マンガン非磁性鋼が開発され、被切削性も向上している。

[2-5] 溶接法

溶接は鉄の合わせ部分を加熱して部分的に溶かして溶着させるもので、溶けた部分の温度が下がるとき鉄が収縮しながら固まるので、まわりの鉄を引き寄せながら固化する。電磁石の溶接部分は鉄心側面にあるため、ギャップが開くように変形する。変形量はギャップ寸法で許容公差 $\pm 0.05 \text{ mm}$ に対して、 $0.1 \sim 0.3 \text{ mm}$ にもなる。これは非常に大きな変形量で、このままでは磁場誤差や高次磁場成分のため加速器の電磁石には使用できない。昔から行われている方法は溶接部分を機械的に衝撃して、この部分に溜っている応力を開放する、所謂ピーニングが行われていた。すべての電磁石にピーニングを施すのは大変な作業である。

溶接変形のマカニズムは複雑であるが、大別すれば溶接の熱応力による変形と、ビードの収縮による変形がある。

最近の溶接技術では、溶接変形の発生メカニズムから、変形に弱い遊びの部分に鉄心の形状の中に盛り込み、この部分に変形を吸収させることが採用されている。鉄心外周部の溶接部位に近いところにこのような遊びの切れ込みを作る。このようにすれば溶接の歩留まりは格段に向上し、90%以上と言われている。

溶接変形を抑えるため昔から飛石溶接という方法が採用されていた。これは溶接による鉄心の熱を鉄心全体に分散させ、一カ所に過大な熱応力が発生しないようにするもので、複数の溶接作業員が鉄心のまわりを回転しながら溶接少しずつ行うもので、BNLのAGSやKEKの主リングの電磁石はこのようにして溶接された。このようにしても許容できない変形が生じ、ニューマチックハンマーで溶接部をたたき伸ばすピーニング（peening）が必要であった。飛石溶接は回転変形の防止に効果がある。

溶接法として、熱入力が少ない、溶着金属量が少ない、自動溶接に向く、ビード幅が狭い、などに優れた方法が電磁石の溶接に向いている。自動溶接は

電磁石の大量生産に向けて必要条件になり、熱入力
が少なく、溶接速度の速いものほど、熱変形が小さい
と思われる。この基準で溶接法を選択すれば、
MIG溶接かTIG溶接を採用することになる。
TRISTANではMIG溶接が採用され、作業性の向上
のため自動溶接が行われた。この2種類の溶接法の
相違を図4に示す。

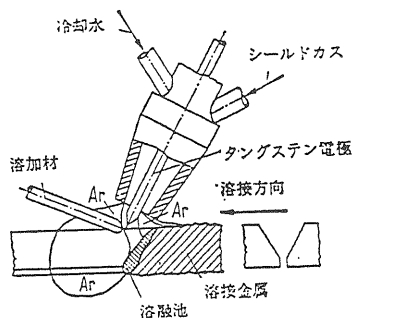
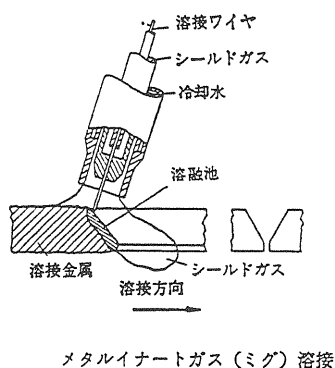


図4 溶接法 (MIG, TIG 溶接法)

自動溶接を採用すれば、飛び石溶接は不可能では
ないにしても、溶接ヘッドの移動が錯綜するため非常
に困難である。溶接順序で変形量に差があるかど
うかの検討が先ず必要である。図5に示す試験片に
よる応力分布の測定から溶接順序による応力分布の
違いがあり、飛石溶接は短い周期で応力が変化して
いるのに対し、一端から他端まで一気に溶接した場
合の溶接方向に直角な方向の応力は飛石溶接に比
べて低く、ギャップへの影響が小さいことが窺える。
幾何学的に対称な位置を同時に複数の溶接トーチで
溶接すれば、溶接方向の変形も小さく収まることが
考えられる。このような考察からTRISTANでは複
数のトーチによる連続自動溶接が採用された。

[2-6] 鉄心の寸法測定

溶接後、除圧し、鉄心の寸法測定を行う。重要な
寸法はギャップ間隔、鉄心長 (端板を除いた鋼板の

積層厚)、真直度、捩れなどである。鉄心長の偏差
は鋼板の厚みの半分程度である。

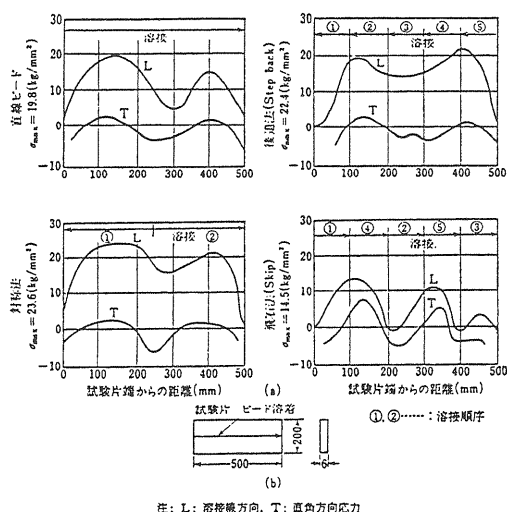


図5 溶接応力の実測例

(3) コイル

[3-1] コイル導体

コイル導体は冷却水チャンネルのある無酸素銅
(OFCホロー導体) かアルミである。アルミは比電
気抵抗が大きいので、抵抗値を下げるためにコイル
寸法は大きくなる。コイル製作コストはアルミの方
が安い。運転経費、耐久性、接続性、電気端子取り
合いの点では銅の方が優れている。

アルミの場合、コイルの接続には heliarc 溶接が必
要で、機械的接続にも十分注意しなければならない。
また、接続部の接触抵抗を避けるために特殊なペ
ースト (Alcoa No. 2EJC) が使用される。Alの表面絶
縁処理には陽極酸化法 (hard-anodized) が採用され
(絶縁破壊は750V)、耐放射線性がある。しかし、
この絶縁膜は機械的な衝撃に壊れやすく、緻密では
ないので、冷却水の漏れに対する対策が必要である。

国際的な電気品位に焼鈍銅 (99.91%純度) の20
℃における抵抗は

$$\rho = 1.724 \times 10^{-8} [1 + 0.00393(t - 20^\circ\text{C})] \quad [\Omega \cdot m]$$

また、Alの国際規格は20℃において、

$$\rho = 2.827 \times 10^{-8} [1 + 0.00403(t - 20^\circ\text{C})] \quad [\Omega \cdot m]$$

である。単位重量当たりの銅の価格はアルミの3倍
である。密度の比は3.27であるため、電力消費量を
同じとすればAlを使用した場合には鉄心とコイルが
大きくなるがそれでも十分安価である。

銅の場合、導体の長さに制限があり、1つのコイルは途中に多くの接続箇所をもち、接続部分は銀ロウ付けされる。コイル通電中は導体の冷却水チャンネルを水が1~2 m/sec程度の速度で流れる。もし、接続箇所が少しでもズレていれば、流路が狭まって流速が増し、段差のところで冷却水流による低圧部が発生し、銀ローが損傷（壊食）を受ける。この壊食は銀ローの弱いところを伝わって外部まで達し、水漏れが起こる。損傷のメカニズムの詳細は不明であるが、圧力が飽和蒸気圧まで低下すれば、そこで水が気化し、泡（蒸気泡）ができる。この泡は水圧の高い部分で潰れ、そのときに強い衝撃波を発生する。この衝撃波が冷却チャンネルの弱い面を壊食（erosion）する。このような現象は空洞現象（cavitation）と呼ばれる。

導体接続に銀ローを挟んで、直付けにする方法がFNALで採用され、KEKのPSやTRISTANでも採用されている。この方法では、このような事態が発生する危険があり、工程管理が重要である。上のような故障は今までに1件だけ発生し、コイルが通電中に層間短絡した。

[3-2] コイル絶縁材料

加速器の電磁石では、コイルは絶えず放射線に曝されるので、絶縁材料の耐放射線性が問題になる。コイルの絶縁層は4重に行われる。導体の素線絶縁と層間絶縁、層間絶縁された導体を束ねて絶縁する対地絶縁、さらのその外側に保護絶縁層である。以前はボロンを含まないガラステープまたはマイカテープで絶縁して全体を真空含浸させ、加熱硬化させた。樹脂含浸コイルの絶縁特性に関して、必要な性能と一様性を得るために特別な絶縁技術が要求される。樹脂で接合した材料の機械的性質と電気的性質は相互に関係があるため、最適の機械的強度をもつ樹脂を選び同時に信頼性のある電気絶縁を得ることは一般には不可能である。低電圧で使用する場合、エポキシ樹脂の絶縁破壊強度は16~22 kV/mmである。しかし、対地電圧が高い場合はマイカシートの絶縁を使用する必要がある。マイカの絶縁破壊強度は120~240 kV/mmである

樹脂接合のコイルの製作技術は、導体を望ましい形状に曲げて成形した後でポーラスなガラス繊維の絶縁テープで個々の導体をラップする。コイルを気密容器に入れて真空に引き、液体状の熱いエポキシ樹脂を容器に流し込みコイル全体に浸透するようにして、エポキシ樹脂でポーラスな絶縁を満たす。硬化した後でコイルは最終的なキュアのためオーブ

ンで加熱し、コイル全体を特別の高電圧絶縁層で包む。この技術は中空導体に使用でき、この場合水チャンネルの口出し部は電気端子と共に絶縁しない。図6はパルス励磁されるBNLのAGS電磁石のコイル断面で、大きな中空導体を使用されている。

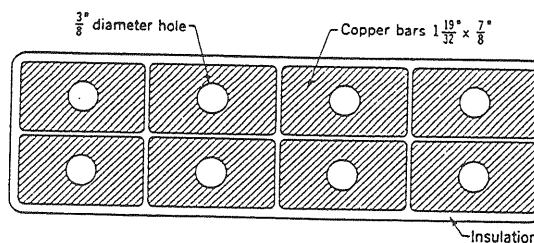


図6 中空導体コイルの断面形状 (AGS)

現在ではもっと効率的なコイル絶縁システムとしてガラス繊維にエポキシ樹脂を含浸させたセミキュア絶縁テープが開発され、これで素線絶縁と層間絶縁を行い、エポキシセミキュアガラス/マイカテープの対地絶縁を施した後、エポキシセミキュアガラステープで保護し、加熱硬化させる。コイル外周部に絶縁ワニス塗布してコイルが出来上がる。

新しい方式では、セミキュアのエポキシ樹脂が溶け出して層間の隙間を埋めるが、エポキシの量は隙間を埋め尽くすほど十分ではない。セミキュア絶縁は非常にポーラスで湿気があれば簡単に電氣的に短絡する。このためコイル内に湿気が入らないように、特にコイル口出し部から冷却水や湿気が浸透しないように対策しなければならない。この種の故障も今までに1件発生し、やはり電気短絡を起した。

KEKで経験した故障を2、3紹介したが、いずれも今後に生かすべき教訓である。

多くの熱硬化樹脂は 10^9 radまでの吸収線量に耐えるが、これ以上では有機物による絶縁は使用できない。図7にCERNのコイル絶縁用に使用されているエポキシ樹脂の耐放射線試験のデータを示す。

[3-3] コイルの試験

コイルは鉄心に装着する前に検査が行われる。これには加圧試験、誘導試験、対地絶縁試験などがある。試験電圧は定格電圧を E [V] とすれば

$$\text{試験電圧} = 2E + 1000 \text{ [V]} \text{ (最低でも } 1,500\text{V)}$$

に従う。コイルの最初の1ターン目に励磁電源電圧とその反射波が重なって約2倍の電圧がかかることが予想される。

加圧試験として、試験電圧を印加して異常の有無を検査する。誘導試験は、この試験電圧に等しい交

流電圧をコイルに印加して、層間およびターン間の試験を行う。絶縁の弱い個所が破壊される。対地絶縁試験はコイル表面を通過して鉄心に地絡しないことを確認するための試験である。

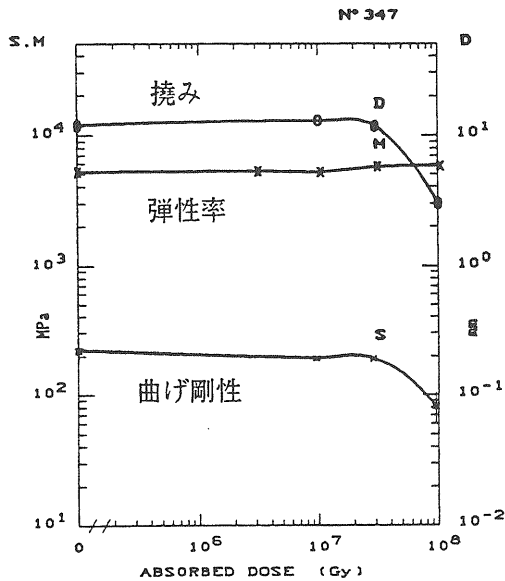


図7 コイル絶縁用エポキシ樹脂の耐放射線試験のデータ (CERN)

(4) 電磁石設計におけるモデルの使用

実物大モデルによる実験的測定が最も有用で正確な情報を与える。モデルは最後の製作詳細と磁極形状を決めるために使用される。小型モデルでは磁束密度を同じにするためには、電流密度を上げ、冷却能力も増やさなければならない。小型スケールモデルで最も重要な技術上の問題はコイル冷却である。必要電力が線形的にスケールしないからである。最終電磁石と同じ磁束密度をモデルで維持すれば、全アンペアターンはスケールファクターに比例するが、コイルの断面積はスケールファクターの2乗で減少する。したがって、コイルの電流密度はスケールファクターに逆比例する。コイルの単位体積当たりの電力損失は電流密度の2乗に比例し、スケールファクターの2乗に逆比例する。1/2スケールモデルではコイルの単位体積当たりの電力損失は4倍も増加する。また、磁場測定装置も同じように小形にしなければならない。しかし、機械的寸法精度はスケールさせて小さくできないため、製作詳細の確認にはならない。

以前は必ず実物大モデルを作って、磁場の詳細測定を行い、最終判断を行ったが、現在は磁場計算に

より詳細な磁極設計ができるようになり、特別な設計に基づく電磁石でないかぎり、必ずしも実物大モデルは必要でなくなった。しかし、この代りに大量生産を行うときの1号機と2号機について詳細な磁場測定を行い、ここで最終判断をする必要がある。

(5) コイル設計

励磁コイルは磁気回路方程式に使用した起磁力 (magnetomotive force) またはアンペアターン (Ni) を与える。直流電磁石では決めるべき最初のパラメータは励磁巻線の抵抗で消費する電力である。以下に示すように、電力は導体の体積に逆比例するため、第1次近似では随意に決められる。

導体1本の断面積を a 、コイルのターン数を N 、1ターンの平均長さを ℓ とする。導体の比抵抗を ρ (巻線内の平均温度における比抵抗) とすれば、コイルの全抵抗は

$$R = \frac{\rho N \ell}{a} \quad (1)$$

である。最大電流 i は選ばれたピーク励磁 Ni によって指定される。この電流における消費電力 U は

$$U = i^2 R = \frac{\rho (Ni)^2 \ell^2}{N a \ell} = \frac{\rho (Ni)^2 \ell^2}{\text{coil volume}} \quad (2)$$

である。この関係から電力が決まればコイルの導体体積が得られる。導体の体積はターンの平均長さにはよらないが、コイルの断面寸法は絶縁材の分布が関係する。パッキング比を $\lambda = (\text{導体断面積}) / (\text{コイル断面積})$ とすれば、 $\lambda > 0.5$ である。コイル断面積には導体、絶縁、冷却チャンネルの占める空間が含まれる。ターン当たりの平均長さ ℓ はコイルの外周と内周の約半分である。

導体サイズを決めるターン数 N は電源の電流-電圧の定格に合うように調節する。電圧 V 、電力 U 、アンペアターン Ni に対して、ターン数は次式で与えられる。

$$N = \frac{(Ni)V}{U} \quad (3)$$

2つの同じコイル (パンケーキ) を作るとすれば、ターン数は偶数である。さらに、ターン数はコイルのレイヤー数で割り切れなければならない。その他、レイヤー数の選択に影響するコイルのレイヤー相互

の接続の条件が入る。全てのレイヤーが同じターン数をもつ長方形の断面をもつ通常の設計とは別に、四角形とは異なる断面のコイル設計もある。単純な長方形断面形状は冷却システムの構造、機械的支持、コイル巻線プロセスが簡単になるから経済的である。上に述べたターン数の制約のため、偏向電磁石の場合は、8, 16, 24, 32 などの整数に制限され、電圧の選択もある1組の値に制限される。励磁の余裕を考慮して必要電圧 V は電源電圧より幾分低い電圧になるターン数 N が選ばれる。コイルの電圧は電流密度を $j (= i/a)$ とすれば、

$$V = Ri = \frac{U}{i} = \rho N j \ell \quad (4)$$

である。

コイルのインダクタンスも励磁に関して重要なパラメータである。コイルのターン数を N 、交差する磁束を Φ [Wb]、励磁電流を I [A] とすれば、

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad [H] \quad (5)$$

である。磁束は偏向電磁石の場合、漏れ磁場を考慮して、

$$\Phi = w \ell B \quad (6)$$

ここで、

$$w = \begin{cases} w_a + 2w_c / 3 & : \text{window frame magnet} \\ w_p + h / 2 & : \text{magnet with poles} \end{cases}$$

w_a = コイル内矩[m]
 w_c = コイル片幅[m]
 w_p = 磁極幅[m]
 h = ギャップ高[m]
 ℓ = 磁極の長さ[m]

である。偏向電磁石の磁場

$$B = \frac{\mu_0 N I}{h} \quad (7)$$

を考慮すれば

$$L_{\text{dipole}} = \frac{\mu_0 N^2 w \ell}{h} \quad [H] \quad (8)$$

4極電磁石の場合は、ボア半径を r とすれば、磁場勾配は

$$g = \frac{2\mu_0 N I}{r^2} \quad (9)$$

であるので、中心軸からコイルまでの距離を x_{max} [m] とすれば、1磁極当たりのコイルと交差する磁束は漏れを考慮して、

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\ell \int_0^{x_{\text{max}}} g x dx = \ell g x_{\text{max}} \left(x_{\text{max}} + \frac{2}{3} w_c \right) \\ &= \frac{2\mu_0 N I \ell}{r^2} x_{\text{max}} \left(x_{\text{max}} + \frac{2}{3} w_c \right) \end{aligned} \quad (10)$$

である。したがって、4磁極を考慮した4極電磁石のインダクタンスは

$$L_{\text{quad}} = \frac{8\mu_0 N^2 \ell}{r^2} x_{\text{max}} \left(x_{\text{max}} + \frac{2}{3} w_c \right) \quad (11)$$

である。

速いパルスまたは交流励磁のコイルでは、電圧は電流変化率に比例する。

$$V = Ri + L \frac{dI}{dt} \quad (12)$$

このため、コイルのインダクタンスを小さくすることが必要で、ターン数を少なくして、断面を大きくする。ソリッド導体では渦電流損失が大きくなる。熱線は磁気力に対する複雑なクランプと絶縁構造が必要で、冷却が困難である。60 Hzで励磁するCambridg電子加速器では、熱線を使用しresin-casting法が採用された。図8は導体に冷却のため薄肉のチューブを埋め固めた熱線コイルの断面である。

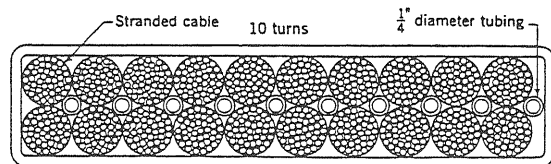


図8 内部に水冷却チューブをもつ樹脂接合による60cpsパルス励磁の熱線コイル (CEA)

[5-1] コイルの冷却

導体断面の形状は冷却法の影響を強く受ける。電磁石のコイルの冷却には、空気冷却と水冷却の2つの場合が考えられる。空冷はステアリング電磁石のように発熱が少ないものに適用される。空気ブラストのようなことは考えないで、静的に空冷される。

水冷の技術は加速器のために開発されたもので、1つの方法は間接的に冷却するもので、導体と金属水冷層を交互に重ねる設計である。薄い中間絶縁層を通して熱が伝わる。金属冷却層は冷却水を通す中空の角形チューブをスパイラル状に巻いた薄い板に成形される。この乾式巻線水冷コイルはコンパクトで取付けが簡単である。しかし、導体の温度が比較的高くなり、水漏れを起しやすい。この間接冷却法は発熱の比較的小さい補正電磁石に採用されることがある。

今日最も一般的な水冷法は中空導体（ホロー導体）の中に冷却水を流す直接冷却法である。これは比較的大きな断面をもつ導体で可能である。大型電磁石では導体断面は十分大きく中空導体が使用できる。長方形の外形をもち、その中心に水チャンネルのある押し銅（またはアルミ）の棒が使用される。この構造は冷却効率がよく、大きな電流密度（5~10A/mm²）に耐える。大型電磁石では、導体の途中に多数の溶接ジョイントが必要になり、水漏れの原因になることが欠点である。

[5-2] 中空導体の冷却水流量

所定の冷却水流量を得るために必要な水圧は、冷却チャンネルのサイズと形状に関係する。直接水冷コイルの設計において冷却チャンネルのサイズは最も重要な寸法である。コイルに発生した熱を取り去るために必要な流量はコイルの発熱（消費電力）と許される冷却水の温度上昇から決定される。許容温度上昇を ΔT [°C]、発熱を U [kW]とすれば、必要冷却水流量 q は次式で与えられる。

$$q = \frac{U}{4.2\Delta T} = 10^{-3} v \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad [\text{liter/sec}] \quad (13)$$

ここで、 v [m/sec]は冷却水の流速を、 d [mm]は冷却チャンネルの直径である。

冷却水の流速と冷却チャンネルの直径からレイノルズ数を計算すれば、流れが静流であるか乱流であるかが決まる。多くの場合、加速器の冷却システムは乱流領域にある。

流量 q [liter/sec]と冷却チャンネルの直径 d [mm]を使って、温度 T [°C]の水に対するレイノルズ数 Re は

$$Re = 10^{-3} \frac{vd}{\nu_T} = \frac{4q}{\pi d \nu_T} \quad (14)$$

である。ここで ν_T [m²/sec]は T [°C]における動粘度である。水の動粘度を表1に示す。 $Re > 2300$ であれば乱流である。

表1 水の動粘度（理科年表より）

温度 T [°C]	動粘度 ν_T [m ² /sec]
0	1.792 x 10 ⁻⁶
10	1.307
20	1.0038
30	0.801
40	0.658
50	0.554

必要な圧力損失 ΔP は次式から得られる。

$$\Delta P [\text{kg/cm}^2] = 0.18 L_d v^{1.75} / (F_S^{1.75} d^{1.25}) \quad (15)$$

ここで、
 v = 流速 [m/sec]
 d = チューブ直径 [mm]
 L_d = 冷却チャンネルの長さ [m]
 F_S = 形状因子、丸穴の場合は ($= \pi/4$)

冷却チャンネルが丸穴の場合は上の式は簡単になり、

$$\Delta P [\text{kg/cm}^2] = 5 \times 10^{-5} L_d v^{1.75} d^{-1.25} \quad (16)$$

ただし、
 v = 流速 [m/sec]
 d = チューブ直径 [m]
 L_d = 冷却チャンネルの長さ [m]

である。

流速はキャビテーションによる導体の侵食を防ぐため、~2.5 m/sec以下に選ばれる。

(6) 終わりに

この他に電磁石に関して述べなければならないことは沢山ある。例えば、特殊な電磁石として、セプタム電磁石 (septum magnet)、ウイグラー電磁石、ランバートソン電磁石、多重多極電磁石など、また、3次元磁場計算法、渦電流問題などがあるが、別の機会に譲りたい。

参考文献

第 1 章

- (1) L.U. Hibbard, "The Birmingham Proton Synchrotron," *Nucleonics*, 7(1950)30-43.
- (2) M.S. Livingston and J.P. Blewett, "Particle Accelerator," McGraw-Hill, 1962.
- (3) R. Kollath, "Particle Accelerators," Sir Isaac Pitman and Sons Ltd., 1967.

第 2 章

- (1) A.P. Banford, "The Transport of Charged Particle Beams," E. & F.N. Spon Ltd., 1966.
- (2) SLAC Linear Collider Conceptual Design Report, SLAC-229, 1980.
- (3) E. Regenstreif, "The CERN Proton Synchrotron," CERN-59-29, 1959.
- (4) G. Parzen, "Magnetic Fields for Transporting Charged Beams," BNL-50536/ISA 76-13, 1976.
- (5) E.A. Taylor, "Quadrupole Magnet Design," Proc. ICHEA, Moscow, 1964, 208-217.
- (6) R.A. Kilpatrick, "Collins Quadrupole Magnets and Sextupole Magnets for A 200-GeV Proton Synchrotron," Proc. ICHEA, Moscow, 1964, pp.262-267.
- (7) 1-2 GeV Synchrotron Radiation Source, LBL PUB-5172 Rev., 1986.
- (8) J.P. Gourber and L. Resegotti, "Implication of the Low Field Levels in the LEP Magnets," *IEEE Trans.*, NS-26 (1979) 3185-7.
- (9) J. Billan, J.P. Gourber, K.N. Henrichsen, H. Laeger and L. Resegotti, "Influence of Mortar-Induced Stresses on the Magnetic Characteristics of the LEP Dipole Cores," *IEEE Trans.*, MAG-24 (1988) 843-5.

第 3 章

- (1) K. Halbach, "Design of Permanent Multipole Magnets with Oriented Rare Earth Cobalt Material," *NIM*, 169(1980)1-10
- (2) K. Halbach, "Physical and Optical Properties of Rare Earth Cobalt Magnets," *NIM*, 187(1981)109-117
- (3) K. Halbach, "Perturbation Effects in Segmented Rare Earth Cobalt Multipole Magnets," *NIM*, 198(1982)213-215
- (4) G.B. Bowden, "Magnetic Forces inside Permanent Magnet Assemblies," SLAC ABC Technical note No. 067, 1992
- (5) R.P. Walker, "PMU3D - A Program for

Three-dimensional Field Calculations on Periodic Permanent Magnet Systems," Daresbury Laboratory, DL/SCI/TM54A, 1987.

- (6) M.W. Fan, M.W. Poole, R.P. Walker, "PMU3D - A Program for Three-dimensional Field Calculations on Periodic Permanent Magnet Systems," Daresbury Laboratory, DL/SCI/TM29A, 1981.

第 4 章

- (1) H. Wiedemann, "Particle Accelerator Physics," Springer-Verlag, 1993.

第 5 章

- (1) L.C. Teng, "Error and Tolerance Analysis for the Main Accelerator"
- (2) P.J. Bryant and K. Johnsen, "The Principle of Circular Accelerator and Storage Rings," Cambridge University Press, 1993.
- (3) H. Wiedemann, "Particle Accelerator Physics," Springer-Verlag, 1993.

第 6 章

- (1) J. Billan and Ph. Lebrun, "Use of Silicon Steel for Low-hysteresis D.C. Accelerator Electromagnets," CERN LEP-MA/87-45, 1987.
- (2) H. Brechna, "Materials in Electromagnets and their Properties," Proc. MT-2, Oxford, 1967, pp.305-329.
- (3) G.E. Fischer, "Iron Dominated Magnets," AIP Conf. Proc. 153, AIP, 1987, pp.1120-1227.
- (4) R.M. Bozorth, "Ferromagnetism," Von Nostrand Co., Inc., New York, 1964.
- (5) 近角聡信, "強磁性体の物理," 裳華房, 1966.
- (6) C. Kittel, "Physical Theory of Ferromagnetic Domains," *Rev. Mod. Phys.*, 21(1949)541-583.

第 7 章

- (1) Los Alamos Accelerator Code Group, "POISSON/SUPERFISH Reference manual," LANL, LA-UR-87-126, 1978.
- (2) A.M. Winslow, "Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh," *J. Comp. Phys.*, 2(1967)149-172.
- (3) 寺澤寛一, "数学概論," 岩波書店, 1959.

第 8 章

- (1) J. Cobb and R. Cole, "Spectroscopy of Quadrupole Magnets," MT-1, SLAC, 1965, p.431-446.
- (2) J.K. Cobb and J.J. Murry, "Magnetic Field Measurement and Spectroscopy in Multipole Fields,"

IEEE Trans., NS-(1965)395-400.

- (3) W.H. Lamb, Jr. and R.J. Lari, "Search Coil Measurements of the Harmonic Content of Beam Transport Magnets," MT-1, SLAC, 1965, pp.487-496.
- (4) R.D. Fyvie and D.E. Lobb, "An Analysis of Short Rotating Coil Measurements in the Fringe Field of a Quadrupole Magnet," NIM, 114(1974)609-614.
- (5) K.D. Lohmann and C. Islin, "Calculations for an Harmonic Coil with Compensation Winding," CERN, SI/Note MAE/69-18/Rev. 1, 1970.
- (6) R. Juhara and G. Michelassi, "A Rotating Coil Device for Harmonic Analysis of Magnetic Fields," FNAL, TM-455, 1973.
- (7) K. Borer and G. Fremont, "The Nuclear Magnetic Resonance Magnetometer Type 9298," CERN 77-19, 1977.
- (8) J.L. Symonds, "Methods of Measuring Strong Magnetic Fields," Repts. Progr. in Phys., 18 (1955) 83-126.
- (9) C. Wyss, "A Measuring System for Magnets with Cylindrical Symmetry," Proc. 5-th MT, Frascati, 1975, pp.231-236.
- (10) J.F. Frazer, J.A. Hofmann, M.S. Livingston and A.M. Vash, "Measurement of Magnetic Field Gradients," Rev. Sci. Inst., 26 (1955) 475-6.
- (11) CERN Acc. School, "Magnetic Measurement and Alignment," CERN 92-05, 1992.

第9章

- (1) E. Gregory, "Conventional Wire and Cable Technology," AIP Conf. Proc. 249, AIP, pp.1198-1229.
- (2) K.H. Mess, P. Schmueser and S. Wolff, "Superconducting Accelerator Magnets," World Science, 1996.
- (3) S. Wolff, "Superconducting Accelerator Magnet Design," AIP Conf. Proc. 249, AIP, pp.1159-1197.

第10章

- (1) CERN Acc. School, "Applied Geodesy for Particle Accelerators," CERN 87-01, 1987.
- (2) G.E. Fischer and M. Mayoud, "Some Thought on Linear Collider Alignment and Mechanical Stability," CLIC Note 61, 1988.
- (3) J. Rossbach, "Closed Orbit Distortions of Periodic FODO Lattices due to Plane Ground Waves," DESY M-87-09, 1987.
- (4) K.Y. Ng, "Ground-Motion Effects on the SSC," FN-511-Rev., 1989.
- (5) G.E. Fischer, "Ground Motion and its Effects in

Accelerator Design," AIP Conf. Proc., 153, AIP, New York, 1987.

第11章

- (1) S. Schwaigerer, 配管工学ハンドブック、川下研介、若林鐵生監訳、森北出版
- (2) 溶接便覧、改訂3版、溶接学会編、丸善。
- (3) 機械設計便覧、第3版、機械設計便覧編集委員会、丸善。
- (4) M.S. Livingston and J.P. Blewett, "Particle Accelerator," McGraw-Hill, 1962.
- (5) H. Laeger, F. Beco, S. Comel, J. Hostettler, R. Luethi and L. Vuffray, "Production of the Soft Magnetic Steel Laminations for the LEP Dipole Magnets," IEEE Trans., MAG-24 (1988) 835-7.
- (6) G. Liptak, R. Schuler, P. Maier, H. Schoenbacher, B. Haberthuer, H. Mueller and W. Zeier, "Radiation Tests on Selected Electrical Insulating Materials for High-Power and High Voltage Application," CERN 85-02, 1985.