はじめに

本稿は OHO セミナーの講義録が Web 上で公開されるのに伴い、1997 年 8 月のテキスト「高周波加速」を書き改めたものである。しかし修正点はいくつかの明らかな誤りにとどめ、できる限り元の内容、体裁を残すように心がけたつもりである。

シンクロトロン一般に使われる高周波加速系、特に加速空洞の基礎について概説する。電子（陽電子）リングの場合を中心にするが、これは加速周波数が一定であるため、系の高周波特性の記述が単純になるからである。また一般に数百 MHz 帯（波長が数十 cm）という高い周波数の電波が使われるので、加速装置の考察にあたっては、先ず波動としての電磁場から始めなければならない。このような観点は、より高エネルギーを目指す加速器ではますます重要になる。なぜなら、高加速電界と電力効率の点では、より高い加速周波数（より短い波長）が有利であるからである。

この講義の目的は、空洞単体のみならず、クライストロンのような外部高周波電力源および加速されるビームと電磁気的に結合している空洞について、先ず固有モード展開をもちいた電磁場による記述を試み、その後、それにもとづく等価回路表現を導くことである。

なお、陽子シンクロトロンの加速空洞系はここでは論じない。この系の特長は周波数が数 MHz（波長数十 m）と低く、また可変というところにある。波長が空洞寸法にくらべ十分に長いので、空洞内の場は波動性を考慮しなくても良い集中定数回路の近似で扱える。これは電子（陽電子）リングの高周波系とは本質的に異なるように見えるが、長波長の極限と考えれば基本的な点は容易に理解できるであろう。

最後に、空洞、導波管等での電磁場の性質の基本定理については、Slater[1] や Collin[2] その他の教科書を参照されることを前提とし、本稿ではそれらの証明を原則として省略する。

第 1 章

高周波加速系の概要

高周波加速系の典型的な具体例としてトリスタン AR [3] で使われた高周波系を図 1.1 に示す。地下のトンネルには 508.6 MHz ($\lambda = 58.9$ cm) で働く加速空洞が 4 台設置されている。それぞれは半波長分の加速セル 9 個からなる全長約 2.7 μm の APS (Alternating Periodic Structure) と呼ばれる多セル構造の加速管である。1 台につき約 150 kW の高周波入力で 1.1 MV/m の加速電界 (1 台当たりの加速電圧 3 MV) を発生する。

高周波電力は地上にあるクライストロンから導波管で伝えられる。その途中にはサーキュレーターと呼ばれる装置がある。それは空洞からの反射電力を水負荷へ廻し、クライストロンをその直撃から保護する役目をする。サーキュレーターを出たあと、高周波電力は 2 度にわたって、2 分岐され 4 台の空洞に入る。導波管は横幅 15 インチ (38.1 cm)、高さ 7.5 インチの寸法をもつ矩形断面 (WR1500 規格と呼ばれる) のアルミニュームパイプである。導波管の波は遮断周波数 f_c が最も低い TE_{10} モードで伝搬する。遮断波長は横幅の 2 倍であるからここでは $f_c = 393$ MHz である。

空洞への入力は 9 個うちの中央にあるセルで行われる。導波管は空洞の直前で入力結合器と呼ばれる円筒同軸構造に変換される。同軸構造の先端はループ状になっており、それが作る磁場が空洞を励振する。入力結合器は空洞との高周波結合以外に空洞の真空をと外部と仕切る役割も果たし、そのためのセラミック隔壁が組み込まれている。

クライストロンは直進型速度変調管とも呼ばれる増幅用電子管であって、電子銃で発生する 90 kV、20 A の直流ビーム電力を約 1.2 MW の高周波電力に変換する (効率は約 65%)。管内の第 1 空洞に入るわずか数 W の高周波電力でビームは速度変調を受けるが、約 1 m のパイプを走るうちに十分に密度変調したビームに変わる。それが出力空洞を通過する際に高周波電力を放出し、自身の直進運動エネルギーを減らす。変換しきれなかったビームエネルギーは電子銃とは反対の端にあるコレクターと呼ばれる部分で止まる。その熱は水で取り去るが、トリスタンのクライストロンでは沸騰蒸発熱を利用する。なお、トリスタンのクライストロンの電子銃は単純な 2 極管ではなく、第 3 の変調用アノードと呼ばれる電極も持っている。直流全電圧は一定でも変調用アノードに与える電圧でビーム電流が制御できる。

クライストロンへ供給する直流高電圧は商用交流電力を整流して作る。電圧変動はクライストロン出力高周波の位相変動を起こすので、この電源では多相整流と大容量コンデンサーを併用して出来るだけ滑らかにする。なお、クライストロン管内で放電が起きる場合、このコンデンサーに貯まっているエネルギーが流入してクライストロンを破壊する恐れがある。そこで電源とクライストロンの間にクローバーと呼ばれる回路を入れる。ここでの主要部品はサイラトロンというスイッチ管であって、異常信号によるトリガーで高圧をショートし、クライストロンを保護する。

基準高周波は周波数、位相の安定度が極めて高いものでなければならない。それはシンセサイザーと呼ばれる、水晶発振器、周波数逓倍回路、位相ロック回路から構成される装置で発生される。クライストロン出力はつねにこの基準高周波と比較され、ずれがあればフィードバック回路で修正される。

空洞内加速電磁場の振幅の制御はクライストロン出力を調整して行われる。ゆっくりではあるが、大きな出力変更は直流全電圧あるいは変調アノード電圧を動かし、ビーム電力を変えて行う。一方、速い微調整は入力高周波の変調による。空洞電磁場の位相を加速されるビームに対して最適の値に固定することは、ビームの安定な加

速、貯蔵にとって極めて重要である。空洞は主に熱膨張により、その共振周波数が加速周波数に対してずれ、結果として位相変動が生じる。そのため加速空洞はチューナーと呼ばれる空洞体積を調整する装置をもち、共振周波数のずれを補正する。

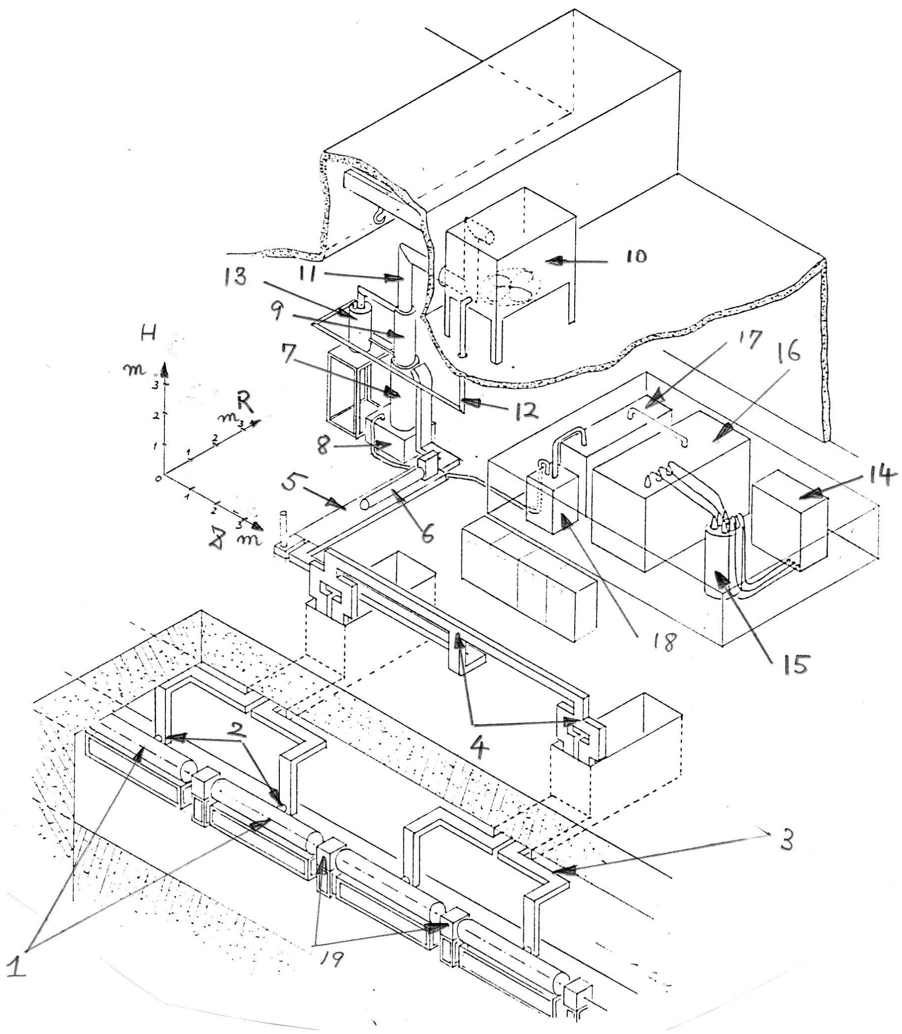

図 1.1　トリスタン AR の高周波系　　1 : APS 空洞、2 : 入力結合器、3 : 導波管、4 : 電力分岐用導波管、5: サーキュレーター、6 : 水負荷、7 : クライストロン、8 : 電子銃ソケット油タンク、9 : コレクター、10 : 水蒸気冷却塔、11 : 蒸気排出管、12 : 冷却水戻り管、13 : 水タンク、14 : 6.6 kV 交流受電盤、15 : 誘導電圧調整器、16 : 高電圧整流器、17 : クローバー回路、18 : カソード、アノード用電源、19 : Q 磁石

第 2 章

空洞の基本

加速器、特にシンクロトロンの加速空洞の基本は単セル空洞であって、最低の共振周波数を持つモードを加速に使う。空洞には加速モードから上に様々なモードが無限に存在するが、それらの共振周波数が貯蔵ビームのリング周回周波数の整数倍に合致すると、ビームに強く励振されうる。そうして発生したモードはビームの運動に影響を与え、その不安定性をもたらす要因となる。空洞の共振モードの数は、その内部で電磁気的に結合しているセルの数に比例するので、共振モードの分布が最もまばらで、それらの特性がよく把握できる単セル加速空洞が最も使いやすい。実際多くのリングで、独立な単セル加速空洞を複数台配置する高周波加速系を採用している。しかし出来るだけ高い加速電圧が必要であり、従って出来るだけ多くの加速セルを用いたい高エネルギー加速器では、空間を節約するために電磁的に結合した複数のセルからなる一体構造の空洞が採用される。その場合には有害なモードに対する対策が重要な課題となる。

単セル加速空洞の基本形は、図 2.1 のように円筒の両端を平面で塞いだ直角円筒空洞で、ピルボックス空洞と呼ばれる。そこで先ずこの基本形の性質を調べ、その結果をもとに実際の空洞へと議論を進めよう。

§ 2 - 1　ピルボックス空洞

以下では円筒の軸方向を z、動径方向を r、軸のまわりの回転角を θ とする円筒座標系を採用し、また円筒の半径を b、長さを d としよう。ピルボックス空洞は、両端がショート面である断面一定の円筒導波管の一部と考えられる。従って、空洞のモードは円筒導波のものから組み立てられる。

管導波管モードは軸方向の磁場が無く、軸方向電場 E_z から残りの場の成分が導かれる Transverse Magnetic Mode (TM モードまたは E モードという) と、軸方向の電場が無く、軸方向磁場 H_z から残りの場の成分が導かれる Transverse Electric Mode (TE モードまたは H モードという) に分類される。

しかし加速に使われるものは、TM_{010} モードという最低次のもので円筒対称な場を有する。それは電場 E_z と回転方向磁場 H_θ の 2 成分だけからなり、いずれも円筒軸（z）方向には一定である。なお TM_{010} の 1 番目の添字は E_z が円筒対称であること、すなわち θ にかんする 1 回転で変化のないこと、2 番目の添字は E_z が r 方向に 1 個節があること、3 番目の添字は E_z が z 方向に変化しないことを示す。

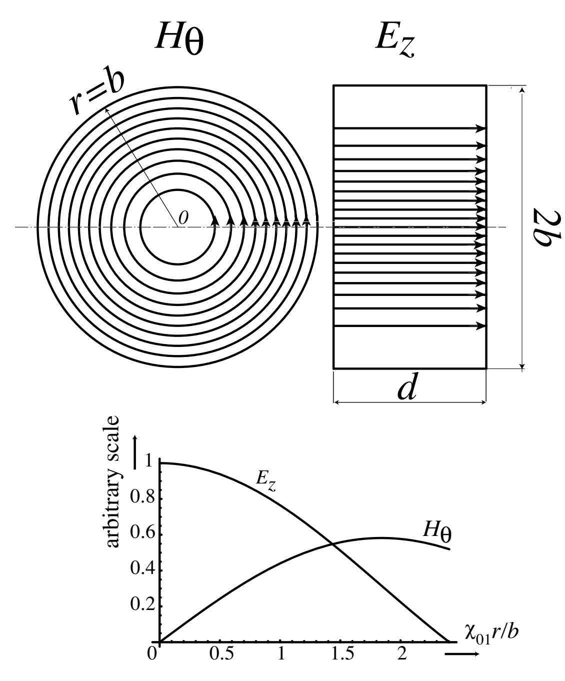

図 2.1　ピルボックス空洞および E_z、H_ϕ の動径 (r) 依存性

これらの振幅 $\hat{E}_z$、$\hat{H}_\theta$ をやはり図 2.1 に示すが、電場は中心軸上で最も大きく、動径が増大するにつれ減少

し、円筒面で 0 になる。磁場は中心軸上では 0 であるが、動径が増大するにつれ増大し、円筒面ではやや減少する。特に断らないかぎり、加速される粒子は電場が最大である中心軸上 ($r = 0$) を走行するとものする。マクスウェル方程式を円筒座標系で解けば、電場 0 次の、磁場は 1 次のベッセル関数 J_0、J_1 で次のように表される。

$$\begin{aligned} E_z &= \hat{E}_z \cos(\omega_{010} t) \\ H_\theta &= \hat{H}_\theta \cos(\omega_{010} t + \pi) \\ E_r &= E_\theta = H_z = H_r = 0 \end{aligned} \tag{2 -1}$$

ただし

$$\begin{aligned} \hat{E}_z &= E_0 J_0(\chi_{01} r/b) \\ \hat{H}_\theta &= H_0 J_1(\chi_{01} r/b)/\zeta_0 \end{aligned} \tag{2 -2}$$

である。ここで共振角周波数は

$$\omega_{010} = \chi_{01} c/b \tag{2 -3}$$

であって、空洞長さ d に依らない。なおここで χ_{01}（J_0 の第 1 番目の根)、$\zeta_0 = 376.73\,\Omega$（真空の固有インピーダンス)、 c は真空中の光速度としている。式 (2 -2) から、電場は中心で最大であるが、磁場は $r/b = 0.765$ でそうなることが分かる。共振周波数が 500 MHz（角共振周波数はこの 2π 倍）の場合を例に取ると、半径 b は 22.95 cm になる。

次に Q 値という空洞にとり大変重要な量を考える。Q 値は共振時の電磁場エネルギー W と角周波数 ω の積を電力損失 P で割った量 $\omega W/P$ に等しい。とくに損失として空洞壁損 P_{wall} だけを考えたときのものを内部 Q 値といい、Q_0 で表す。電磁場エネルギーは場の振幅の絶対値の 2 乗を空洞体積で積分して

$$W = \frac{\mu_0}{2}\int_V \left|\hat{\mathbf{H}}\right|^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left|\hat{\mathbf{E}}\right|^2 dv \tag{2 -4}$$

と表される。また P_{wall} の一般式は

$$P_{wall} = \frac{\zeta_m}{2}\int_S \left|\hat{\mathbf{H}}\right|^2 dS \tag{2 -5}$$

という空洞表面での面積分で与えられる。ただし ζ_m は、金属の電気伝導度 σ、誘磁率 μ を使って

$$\zeta_m = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \tag{2 -6}$$

と表される高周波表皮抵抗である。銅では、その物性値として $\sigma = 5.88 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1}\,\Omega^{-1}$ および $\mu = \mu_0$（真空の透磁率）を採用すれば、周波数 500 MHz で $\zeta_m = 5.79 \times 10^{-3}\,\Omega$ となる。

これらの関係から TM_{010} モードの内部 Q 値は

$$Q_0 = \frac{\zeta_0}{2\zeta_m} \cdot \frac{\chi_{01} d}{d + b} \tag{2 -7}$$

で与えられる。式 (2 -7) の形は、d が小さいと端板での壁損が相対的に大きくなって Q 値が低下し、d が大きいと円筒単位長さ当りの壁損で決まる一定の Q 値に近づくことを示している。

空洞のある共振点のまわりの特性は、等価回路で置き換えて考えられることが多いが、加速空洞の場合、シャント・インピーダンスの定義については注意が必要である。標準的な回路論での電圧は r.m.s. 値を考えるが、加速器ではピーク値に意味があり、それによってシャント・インピーダンスに 2 倍の違いが生じるからである。

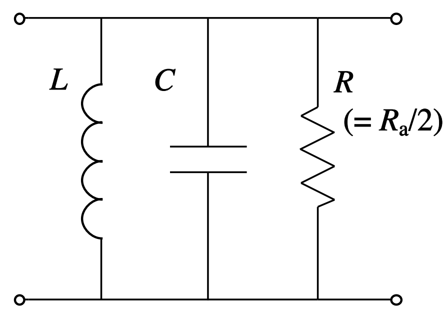

図 2.2　空洞共振の並列共振回路による表現

先ず、TM_{010} 共振を図 2.2 のような L、C、R からなる並列共振回路を考えよう。共振周波数および Q 値についての 2 つの関係式

$$\omega_{010} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2 -8}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R}{\omega_{010} L}} \tag{2 -9}$$

だけでは L、C、R は決まらない。そこで、もう一つの関係式として、空洞加速電圧を定義しよう。幸いに式 (2 -1)、(2 -2) のように電場は z 成分のみであり、ビームが走る中心軸（$r = 0$）にそって電場を積分した瞬時全電圧を先ず考えるのが妥当である。すなわち

$$V_0 = \hat{V}_0 \cos(\omega_{010} t) = E_0 d \cos(\omega_{010} t) \tag{2 -10}$$

しかし実際には粒子は時間的に正弦変化している電場を感じながら空洞を通過する。粒子の受ける加速電圧を V_a とすれば、それは式 (eq:2-10) で与えられたものより小さくなる。正弦変化する電場は粒子が空洞中央 ($z=0$) にあるとき最大値を取るとして積分すると、速度 v の粒子に対する加速電圧は、次のような走行時間係数

$$T = \sin(\frac{\omega_{010}d}{2v})/(\frac{\omega_{010}d}{2v}) \qquad (2\text{-}11)$$

で補正し

$$V_a = \hat{V}_0 T \cos(\omega_{010}t) \qquad (2\text{-}12)$$

となることが、簡単な計算で示される。

式 (2 -1)、(2 -2) で表される電磁場による空洞壁損の時間平均値 P_{wall} は

$$P_{wall} = \frac{\zeta_m E_0^2}{\zeta_0^2} \cdot \pi b(b+d) J_1^2(\chi_{01}) \qquad (2\text{-}13)$$

である。従って交流回路論的なシャント・インピーダンスは、式 (eq:2-12) 、式 (eq:2-13) より

$$R = \frac{(\hat{V}_0 T^2)}{2P_{wall}} = \frac{\zeta_0^2}{\zeta_m} \cdot \frac{d^2}{\pi J_1^2(\chi_{01}) b(b+d)} \cdot T \qquad (2\text{-}14)$$

となる。

しかし加速器の分野では、上式中辺で時間平均を意味する分母の 2 を除き、電圧ピーク値で定義する加速シャント・インピーダンス R_a というものが主に用いられるので、注意が必要である。すなわち

$$R_a = 2R \qquad (2\text{-}15)$$

である。これは、加速器のビームはバンチが間隔を置いてつながったものが通例であり、第 5 章で示すように、加速周波数におけるそのフーリエ成分は平均電流 I_0 の２倍になることと関係している。加速電圧としては単に $R_a I_0$ と書けるからである。

さてシャント・インピーダンスはある消費電力にたいする加速電圧の大きさの目安となる量である。加速周波数一定のもとで、それを極大にする d が式 2 -12 から簡単に求められる。特に粒子速度が光速に等しい場合は

$$d = 0.44\,\lambda \qquad (2\text{-}16)$$

で極大になる。[*1]一般には d の増加に伴う Q 値の上昇と T の低下が折り合うかたちで R_a は極大値を取る。図 (2.3) にその様子を示す。

表 2 - 1 には 500MHz で動作する最適なピルボックス空洞の諸数値をまとめておく。またそれぞれの量について周波数依存性も付けておいたので異なる動作周波数でも容易に数値が求まるであろう。

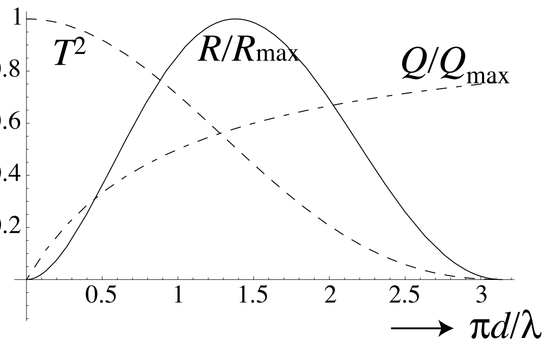

図 2.3　シャント・インピーダンスのピルボックス空洞長依存性

§2 - 2　実用空洞へ発展させる

ピルボックス空洞についての上の結果を実用空洞の設計へ発展させるために、共振周波数を一定に保ちながら直円筒形状を変形してゆき、シャント・インピーダンスをさらに向上させる。また両側面の中心にはある半径を持つビームパイプを取付なければならないが、それによる開口が加速電場分布に及ぼす影響も調べなければならない。そこで、

1. 直角円筒断面に丸みをつけて表面積、従って壁損を減らす、
2. 中心軸付近に突起（ノーズコーン）をつけ、電場を集中させる、
3. ビームパイプによる開口と、その電磁場への影響を知る、

などについて考えてゆこう。

[*1] リニアックのように加速管が長く連なる場合には、単位長さ当たりの加速シャント・インピーダンス r_a が使われることもある。ピルボックス空洞が多数ならぶ加速管の性能を表わすとき、個々の空洞の長さにくらべ十分大きい長さスケールについてはビーム方向に一様連続体として扱える。r_a はこの観点から定義されるもので、$r_a \equiv R_a/d = (E_0 T)^2/(P_{wall}/d)$ と表わされる。波長 λ にたいして d を変えたとき、$d/\lambda \approx 0.29$ で r_a が極大値を取る。リニアック加速管で常用される $d/\lambda = 1/3$ の $2\pi/3$ モード構造はこれに由来する。[4] [5]

表 2 - 1　$f_{010} = \omega_{010/2\pi} = 500$ MHz における銅製最適化ピルボックス空洞の諸数値：ここで銅の導電率は $\sigma = 5.88 \times 10^7 \mathrm{m}^{-1}\ \Omega^{-1}$、粒子速度は光速 c、軸上電場は $E_0(\mathrm{V/m})$ としている。また他の周波数へのスケーリングでは E_0 は一定としている

項目		単位	周波数依存性
半径 (b)	0.230	m	ω^{-1}
長さ (d)	0.263	m	ω^{-1}
貯蔵エネルギー (U)	$5.92 \times 10^{-14} E_0^2$	J	ω^{-3}
壁損 (P_{wall})	$3.91 \times 10^{-9} E_0^2$	W	$\omega^{-3/2}$
無負荷 Q 値 (Q_0)	4.18×10^4		$\omega^{-1/2}$
シャント・インピーダンス (R_a)	8.98×10^6	Ω	$\omega^{1/2}$

§ 2 - 2 - 1　断面に丸みをつける

よく知られているように空洞形状の微小変形に伴う共振周波数の変化は断熱定理を使って求められる。一般の振動系において、あるパラメーターのゆっくりした変化に伴う n 番目のモード固有振動数 ω_n の変化率は、そのモードの振動エネルギー W_n の変化率に等しい、すなわち

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{\delta W_n}{W_n} \tag{2 -17}$$

という関係で表される。[6] n 番目のモードのエネルギー変化 δW_n は壁面での電磁場の圧力に変形量を乗じたものである。時間平均を取った圧力は次のようなマクスウェルのストレステンソル $\overline{\mathbf{F}_n}$ で表わされる。[7]

$$\overline{\mathbf{F}}_n = \frac{1}{4}\left(\mu_0 \left|\hat{\mathbf{H}}_n\right|^2 - \varepsilon_0 \left|\hat{\mathbf{E}}_n\right|^2\right)\mathbf{n} \tag{2 -18}$$

ここで電場、磁場は壁面での値であり、$\mathbf{n}$ は壁面での外向きの法線ベクトルである。これを用いてエネルギーの増分 δW_n は

$$\delta W_n = \int_{\delta V} \overline{\mathbf{F}}_n \cdot \mathbf{n}\, dV \tag{2 -19}$$

これらの式から変形 δV に伴う周波数変化は

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{\int_{\delta V} \frac{1}{4}\left(\mu_0 \left|\hat{\mathbf{H}}_n\right|^2 - \varepsilon_0 \left|\hat{\mathbf{E}}_n\right|^2\right) dV}{\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\hat{\mathbf{E}}_n\right|^2 dV} \tag{2 -20}$$

となる。すなわち変形により生ずる電場エネルギー $W_{E,\,n}$ および磁場エネルギー $W_{H,\,n}$ の変化分と

$$\delta\omega_n \propto \delta W_{E,\,n} - \delta W_{H,\,n} \tag{2 -21}$$

の関係にある。ところで、第 2 章 1 節で調べた結果によれば、ピルボックス空洞の外周に近い領域では磁場エネルギーが大勢を占めると考えてよい。さらに磁場の強さもおおよそ一定と考えれば、その部分の体積を一定に保つ変形で $\delta\omega \approx 0$ とすることができる。そうすると図 2.4 のように、ピルボックス空洞のコの字状断面形から同面積の円に移ることにより表面積にほぼ比例する壁損を極小にすることが出来るであろう。

§ 2 - 2 - 2　ノーズコーン

電場について、ビームが通る中心軸付近により集中させられないかを考えよう。ピルボックス空洞の中心付近は電場エネルギーが大勢を占めると考えてよい。式 (eq:2-1) 、式 (eq:2-2) で与えられる電場の持つエネルギーはその 75% が円筒半径の 56% までに集中している。これはすなわち、間隔 d、半径 $0.56b$ の平行円板コンデンサーと近似的に考えられる。その容量を C、貯まる電荷を Q、電圧を V とすれば電場エネルギーは $W_E \approx Q^2/2C = CV^2/2$ である。ここで上述の空洞断面に丸みをつける操作ではインダクタンス L はほぼ変わらないと考えてよいので、C へ流入する電荷 Q も変わらないとしてよいであろう。そうすると C が変わらない形状であるかぎり $\delta W_E \approx 0$ であって、共振周波数ならびに電圧 V は不変とみしてよい。従って図 2.4 のように、ピルボックス空洞にくらべて、等価的なコンデンサー半径を縮めながら対向面を接近させると、走行時間係数 T が上昇し、それに伴ってシャント・インピーダンスの向上が期待される。このような突起はノーズコーン（nose cone）と呼ばれ、多くの空洞に採用されている。

§ 2 - 2 - 3　ビームパイプとつながった加速間隙

500 MHz で動作する PF リングの空洞の例をとれば、ビームパイプを取り付けた最終的な形状は図 2.5 のよう

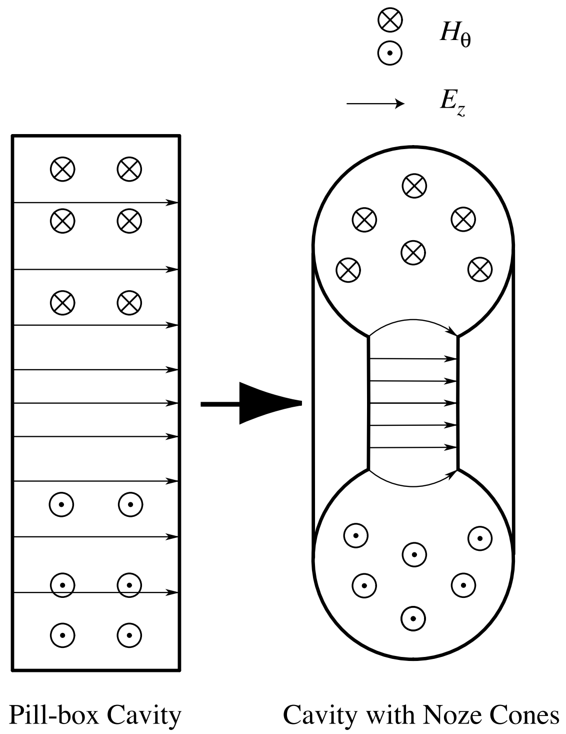

図 2.4　ピルボックス空洞からの変形。外周部の断面を丸くし、中央部にはノーズコーンという突起を設け、共振周波数を固定しながらシャント・インピーダンスを向上させる。

になる。これは SUPERFISH プログラムで丹念に計算したうえで決定したもので、加速器シャント・インピーダンスとして $R_a = 9.9$ MΩ、また Q_0 値として 44,000 が得られている。[8]　表 2 - 1 の R_a に比べれば約 1 割程度しか大きくなっていないが、これはビームパイプ開口部による走行時間係数 T の低下によるものであろう。

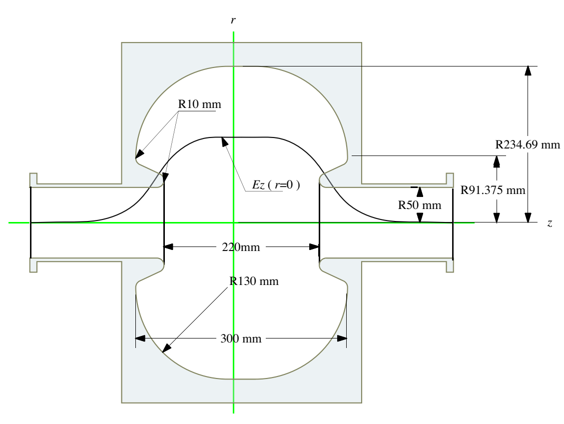

図 2.5　PF リング 500 MHz 加速空洞とその軸上電場分布

そこでビームパイプ開口部の付近の電磁場を解析してみよう。パイプの半径を a とする。興味があるのはビームが通過する $r \leq a$ の領域の電磁場である。任意の空洞形状については計算コードを使用しなければならないが、もし $r = a$ 線上で加速間隙の電場の z 方向成分 E_z が与えられれば、$r \leq a$ の領域の電磁場の関数形を得ることができる。

まず、波数を β_g として、z 方向に $e^{-\beta_g z}$ のように変化する円筒対称な TM モード (TM_0 族) の電磁場成分のうち、0 でない成分の一般形を求めておく。$\tilde{A}(\beta_g)$ を波数 β_g の波のフーリエ成分の振幅とすれば

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_z(r,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\beta_g)}{2\pi} J_0\left(\sqrt{\beta^2-\beta_g^2}\, r\right) e^{-j\beta_g z} d\beta_g \\
\tilde{E}_r(r,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\beta_g)}{2\pi} \times \\
&\qquad \frac{j\beta_g}{\sqrt{\beta^2-\beta_g^2}} J_1\left(\sqrt{\beta^2-\beta_g^2}\, r\right) e^{-j\beta_g z} d\beta_g \\
\tilde{H}_\theta(r,z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\beta_g)}{2\pi} \times \\
&\qquad \frac{j\varepsilon_0\omega}{\sqrt{\beta^2-\beta_g^2}} J_1\left(\sqrt{\beta^2-\beta_g^2}\, r\right) e^{-j\beta_g z} d\beta_g
\end{aligned} \tag{2 -22}$$

となる。ただし〜印を使ってフェーザー表示を採用している。*2 $r = a$ での $E_z(z)$ は金属ビームパイプ部では恒等的に 0 になり、間隙部での関数形が問題となる。正確な形は数値計算で求めなければならないが、ここでは z 位置によらず一定という最も簡単な形を仮定して、$r < a$ の電場を求めよう。

$$\tilde{E}_z(a,z) = \begin{cases} E_0 = V_0/d & : \ |z| \leq d/2 \\ 0 & : \ |z| > d/2 \end{cases} \tag{2 -23}$$

これをフーリエ積分すれば $\tilde{A}(\beta_g)$ が求まり、

$$\tilde{A}(\beta_g) = \frac{V_0}{\beta_g d/2} \frac{\sin(\beta_g d/2)}{J_0\left(\sqrt{\beta^2-\beta_g^2}\, a\right)} \tag{2 -24}$$

となる。この式を利用して、中心軸と平行に（$r =$ 一定）速度 v で走る粒子が受ける加速電圧を求めてみる。$z = 0$ での位相を ϕ とすれば、電場の時間項は

$$e^{j\left(\frac{\omega z}{v}+\phi\right)} \tag{2 -25}$$

*2 A を正の実数として $A\cos(\omega t + \theta)$ で表わされる単振動場を $A\,e^{j(\omega t+\theta)}$ のように複素数表示したとき、時間項以外の部分 $A\,e^{j\theta}$ を複素数平面上のベクトルと見做すことをフェーザー（phasor）表示という。

である。これを使って電圧は

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(\beta_g)J_0\left(\sqrt{\beta^2-\beta_g^2}\,r\right)\times e^{j(\frac{\omega}{v}-\beta_g)z+j\phi}\,d\beta_g dz$$

$$= \tilde{A}\left(\frac{\omega}{v}\right)J_0\left(\sqrt{\beta^2-(\frac{\omega}{v})^2}\,r\right)e^{j\phi}$$

$$= \tilde{A}\left(\frac{\omega}{v}\right)I_0\left(\frac{\omega r}{v}\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}\right)e^{j\phi} \qquad (2\text{-}26)$$

となる。ここで粒子速度は光速度 c を越えないので変形ベッセル関数 I_0 を使った。

さて最大加速電圧は $\phi = 0$ のときに得られ、それを V_a 表せば、$v = c$ の場合

$$V_a = V_0\frac{\sin(\beta d/2)}{\beta d/2} \qquad (2\text{-}27)$$

という式が求まる。これは偶然にもピルボックス空洞で求めた走行時間係数 T の式と一致している。また r に無関係であるが、それは $v = c$ でベッセル関数の変数が常に 0 になるからである。

さて式 (2 -23) の近似によるフーリエ成分 (2 -24) の場合、(2 -22) の積分が実行でき、電磁場が具体的に求まる。[9] そのため、変数 β_g についての積分路を複素平面に拡張するわけであるが、特異点が

$$\beta_g = \pm\Gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2\text{-}28)$$

に存在する。ただしベッセル関数 J_0 の n 番目の根を ξ_{0n}、自由空間の波数を $\beta = 2\pi/\lambda$ として

$$\Gamma_n \equiv \sqrt{\left(\frac{\chi_{0n}}{a}\right)^2 - \beta^2} \qquad (2\text{-}29)$$

である。積分は、$z < -d/2$ では複素 β_g 平面の上半無限円、$z > d/2$ では下半無限円を実数軸に接続した閉曲線路でおこなう。また $|z| \le d/2$ では $\sin(\beta_g d/2)$ を $e^{j\beta_g/2}$ と $e^{-j\beta_g/2}$ に分解し、前者には上半無限円、後者には下半無限円の積分路を取る。留数は簡単に求まり、積分の結果は

$$\frac{E_z(r,z)}{E_0} = \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} - 2\sum_{n=1}\frac{\chi_{0n}\cosh(\Gamma_n z)\,e^{-\Gamma_n d/2}}{\Gamma_n^2 a^2}\cdot\frac{J_1(\chi_{0n} r/a)}{J_1(\chi_{0n})} \qquad (2\text{-}30)$$

となり、パイプ内の任意の点での電磁場が決定される。

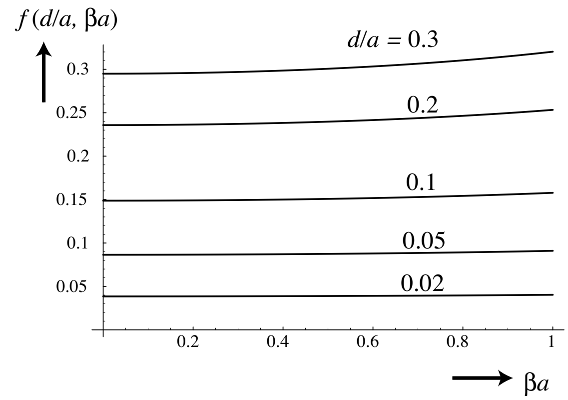

図 2.6　パイプ間容量公式における $f(x, y)$ 項の計算例

この結果を使って、まず対向するパイプ間の容量を求めてみよう。パイプ先端を通ってその内面と外面を往復する電流の大きさは

$$I = \pi a H_\theta(a, -d/2) \qquad (2\text{-}31)$$

であるが、この式の磁場は、式 (eq:2-30) をマクスウェル公式に代入して求まる。電圧 $V_0 = E_0 d$ と容量 C は

$$C = \frac{I}{j\omega V_0} \qquad (2\text{-}32)$$

の関係にあるので、磁場の具体形を入れ式 (eq:2-31) を式 (eq:2-32) に代入すれば

$$C = C_0 f(d/a, \beta a) \qquad (2\text{-}33)$$

のように容量が表される。ここで C_0 は半径 a、間隙 d の平行円板間の静電容量

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} \qquad (2\text{-}34)$$

であり、残りの項の関数形は

$$f(x,y) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-e^{-x\sqrt{\chi_{0n}^2-y^2}}}{\chi_{0n}^2-y^2} = \frac{J_1(y)}{yJ_0(y)} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-x\sqrt{\chi_{0n}^2-y^2}}}{\chi_{0n}^2-y^2} \qquad (2\text{-}35)$$

となる。図 2.6 に式 (2 -35) のグラフを示す。

第 3 章

多セル空洞

前章では電磁場の単純、明解な単セル加速空洞について考察したが、高い加速電圧が必要な高エネルギー電子、陽電子リングでは出来るだけ数多くの空洞を配置しなければならない。単セル加速空洞では両側に突き出たビームパイプのための空間がもったいないし、なによりも高価かつ壊れやすい入力結合器（カプラー、coupler）の数が増えることが問題である。そこで、セル間は電磁気的に結合し、ある程度の数のセルをまとめて、一つの入力結合器から高周波電力を供給する多セル空洞が採用される。

多セル空洞では、まずそれを進行波モードあるいは定在波モードのどちらで動作させるかを決めなければならない。リングを周回する粒子が電子または陽電子のいずれか一方のみであれば、進行波モードの動作が可能である。しかし進行波モード動作では、あるセルの電磁場がそれより上流にある全てのセルの壁損や寸法誤差影響される。したがって下流のセルに行くにつれ共振特性の制御が加速度的に困難になる。従ってビームと高調波モードとの相互作用を避けたいリングの空洞には不適当であろう。

定在波モード動作の場合、セル間の位相差 ϕ を基本ブリリアン帯（$0 \leq \phi \leq \pi$）のどこに取るかを考えなければならない。定在波は対向する進行波の重ね合わせである。通常、ビームはその一方に同期し加速される。しかし他方は壁損を伴うものの、同期条件を満たさず加速電圧に寄与しないので、シャント・インピーダンスは半減する。しかし π モード（$\pi = \pi$）は例外である。対向する二つの進行波の間の位相差がこの場合 2π に等しいので、ビームとは両者とも等しく同期しているからである。こうして、高エネルギーリングでは π モード定在波加速空洞が専ら採用される。

ただし π モードについては分散特性のうえで注意が必要である。結合セル構造の分散特性は以下で議論するように、連成振動子モデルで記述される。その場合、$\phi = 0$ または π では分散曲線の勾配（群速度に比例する）が 0 になる、すなわち、$\partial\omega/\partial\varphi = 0$ であることはよく知られている。そうすると加速モードに隣接するモードも周波数差がないので、容易に励振される不都合がある。この問題を避けるために、セル数を少なくするか、π モードでも $\partial\omega/\partial\varphi \neq 0$ となる陪周期構造（bi-periodic structure）を採用する。

§ 3 - 1　２セル結合空洞

まず、最も単純な２セル結合空洞について、基本的な性質を紹介する。図 3・1 のように、２つのピルボックス空洞が中心軸に開いた円孔でつながっているとする。

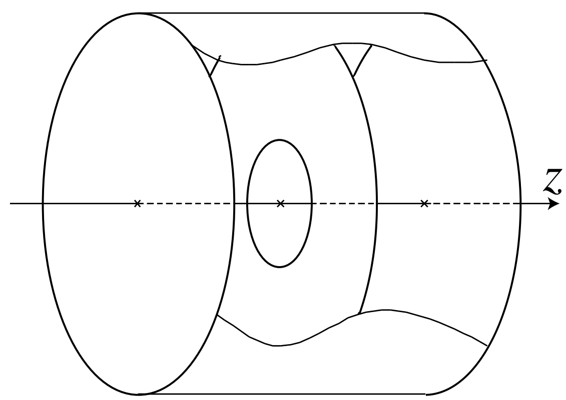

図 3.1　円孔で結合した 2 セルピルボックス空洞

連成振動子の理論では、それぞれのセルでの振動が同位相（位相差 = 0）のものと、逆位相（位相差 = π）のものの２つの共振モードが存在する。前章で議論した TM_{010} モードを例に取れば、図 3.2 のようになる。円孔が開くことにより、逆位相振動モードの電気力線が弾きあうが、これは図 2.2 の容量 C が減少することを意味

し、結合により新たに相互容量 C' が直列に入ったことで表せる。したがって図 2.2 の等価回路は図 3.3 のようになる。（簡単のために壁損は 0、言い換えればシャント・インピーダンスは無限大としている。）

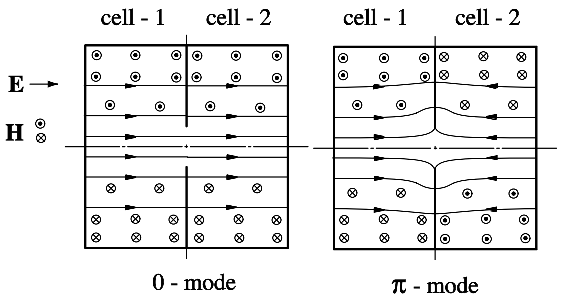

図 3.2　セル結合空洞の 0 および π モード

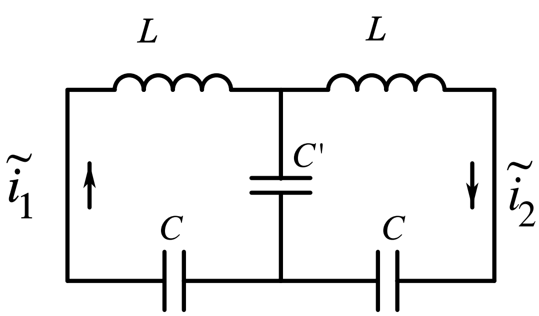

図 3.3　2 セル結合空洞の等価回路

さて、以下では結合度（孔径）は十分に小さいとして、すなわち

$$C' \gg C \tag{3 -1}$$

の条件で議論を展開する。セル 1 、2 において右回りに流れる電流をそれぞれ $\tilde{i}_1$、$\tilde{i}_2$ とすれば、図 3.3 の回路で

$$\begin{aligned} \tilde{i}_1\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)+\left(\tilde{i}_1-\tilde{i}_2\right)\frac{1}{j\omega C'}&=0 \\ \tilde{i}_2\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)+\left(\tilde{i}_2-\tilde{i}_1\right)\frac{1}{j\omega C'}&=0 \end{aligned} \tag{3 -2}$$

が成立する。この方程式の解はよく知られているように次のような $\tilde{i}_1$ と $\tilde{i}_2$ が同相（位相差 0）および逆相（位相差 π）の２つのモードからなる。

$$\begin{aligned} &0\ \text{モード}：\tilde{i}_1=\tilde{i}_2 \\ &\qquad \omega=\omega_0\equiv 1/\sqrt{LC} \qquad (3\ \text{-}3) \\ &\pi\ \text{モード}：\tilde{i}_1=-\tilde{i}_2 \\ &\qquad \omega=\omega_\pi\equiv \omega_0 1\sqrt{1+2C/C'} \\ &\qquad\quad \approx \omega_0\left(1+C/C'\right)>\omega_0 \qquad (3\ \text{-}4) \end{aligned}$$

が得られる。電気力線が弾きあうと、電場エネルギーが減少したことに相当し、前節で触れたように共振周波数の上昇をもたらす、すなわち $\omega_\pi>\omega_0$ となる。なお、中心軸から外れたところに穴を開ける結合方式もある。この場合、磁場による結合であり、等価回路上では相互容量 C' を相互誘導 L' で置き換えればよい。π モードでは、今度は磁場エネルギーが減少したように見えるので、$\omega_\pi<\omega_0$ である。

さて以上のような回路論的な考察を一歩踏み出して、電磁場を用いて結合の様子を調べてみよう。結合孔が小さいときには、上のような相互容量という集中定数による表現が妥当であることが証明される。多セル構造の電磁場は、結合孔における境界条件をショート面もしくはオープン面という両極端の場合に分けると、理解しやすい。ショート面とは金属表面と同じ境界条件を要求するもので

$$\mathbf{E}_\parallel=0 \qquad \mathbf{H}_\perp=0 \tag{3 -5}$$

でなければならない。一方、オープン面とは磁気的なショート面であって、その面上で

$$\mathbf{E}_\perp=0 \qquad \mathbf{H}_\parallel=0 \tag{3 -6}$$

でなければならない。図 3.2 では、0 モードがショート面、π モードがオープン面の境界条件を満たしている。

図 3.2 の左側のセルの電磁場を、結合孔での境界条件を考慮しながら解析しよう。まずショート面の場合の規格化された固有関数について考える。その電場 $\mathbf{e}$、磁場 $\mathbf{h}$ を

$$\int_{cell}\mathbf{e}^2dV=\int_{cell}\mathbf{h}^2dV=1$$

とすれば、マクスウェル方程式により

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{e}&=\frac{\omega\left(0\right)}{c}\,\mathbf{h} \\ \nabla\times\mathbf{h}&=\frac{\omega\left(0\right)}{c}\,\mathbf{e} \end{aligned} \tag{3 -7}$$

という関係が成り立つ。ただし結合孔面上で

$$\mathbf{e}_{\parallel} = 0 \qquad \mathbf{h}_{\perp} = 0 \tag{3 -8}$$

である。同様にオープン面の場合の固有関数についても、その電場 $\mathbf{e}'$、磁場 $\mathbf{h}'$ を

$$\int_{cell} \mathbf{e}'^2 dV = \int_{cell} \mathbf{h}'^2 dV = 1$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e}' &= \frac{\omega(\pi)}{c}\,\mathbf{h}' \\ \nabla \times \mathbf{h}' &= \frac{\omega(\pi)}{c}\,\mathbf{e}' \end{aligned} \tag{3 -9}$$

という関係が成り立つ。ただし結合孔面上で

$$\mathbf{e}'_{\perp} = 0 \qquad \mathbf{h}'_{\parallel} = 0 \tag{3 -10}$$

である。となる。

ここで、この二つのモードの固有関数とそれぞれの共振周波数 $\omega(0)$、$\omega(\pi)$ の間にはどのような関係があるかを調べよう。それには次のようなベクトル恒等式

$$\begin{aligned} &\int_V (\mathbf{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{A})\,dV \\ &= \int_S (\mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{n}\,dS \end{aligned} \tag{3 -11}$$

で $\mathbf{A}$ に $\mathbf{e}$、$\mathbf{B}$ に $\mathbf{e}'$ を代入する。ここで V は図 3.2 の左セル体積を意味し、$\mathbf{n}$ はそのセルの表面 S における外向きの単位法線ベクトルである。表面 S においては

$$(\mathbf{e}\times\nabla\times\mathbf{e}')\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{3 -12}$$

が常に成り立つことに注意し、また式 (3 -7) を考慮すれば

$$\left\{\left[\frac{\omega(\pi)}{c}\right]^2 - \left[\frac{\omega(0)}{c}\right]^2\right\} v_{0\pi} = \frac{\omega(0)}{c}\int_{iris} (\mathbf{e}'\times\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{3 -13}$$

という式が得られる。[*1] ただし iris は結合孔を意味し、また $v_{0\pi}$ は

$$v_{0\pi} = \int_{cell} \mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\,dV \tag{3 -14}$$

を表す。式 (3 -13) の右辺は結合の強さを表している。(形の上ではエネルギー流を表すポインティング・ベクトルに比例している。) そこで結合定数として無次元の数

$$k \equiv \frac{c}{\omega(0)}\int_{cell} (\mathbf{e}'\times\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{3 -15}$$

を導入すれば、式 (3 -13) は

$$\left\{\left[\frac{\omega(\pi)}{\omega(0)}\right]^2 - 1\right\} = \frac{k}{v_{0\pi}} \tag{3 -16}$$

と書き直せる。なお固有関数展開の性質から $v_{0\pi}$ は 1 を越えないが、結合孔が十分に小さいときは、セル体積の大部分において $\mathbf{e}$ と $\mathbf{e}'$ は一致するので

$$v_{0\pi} \approx 1 \tag{3 -17}$$

とみなせる。

次に TM_{010} モードの場合の結合定数を電磁場から具体的に計算しよう。結合孔の半径 a は自由空間波長 λ にくらべて十分に小さいものとしよう。そうすると図 3.2 に示したオープンモードの円孔近くでの電場は静的ポテンシャルから導いたもので近似できる。この場合は隔壁の左右で向きが反転する z 方向に一様な場の作るポテンシャルを使えばよい。隔壁は $z = 0$ にあるとし、$z \to \pm\infty$ で $E_z \to \pm e_0$ (一定)、$E_r \to 0$ となるような軸対称一様場を表わすポテンシャルは、変数変換

$$\begin{aligned} z &= a\xi\eta \\ r &= a\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)} \end{aligned} \tag{3 -18}$$

を使って

$$\Phi = \frac{2a}{\pi} e_0 \left(\xi\tan^{-1}\xi + 1\right) \tag{3 -19}$$

と表される。[10] 結合孔面上でのオープンモードの電場固有関数 $\mathbf{e}'$ は r 成分だけであるが、それは上のポテンシャルから次のように計算できる。

$$e'_r(iris) = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{z=0} = \frac{2e_0}{\pi}\cdot\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} \tag{3 -20}$$

次にショートモードの磁場固有関数 $\mathbf{h}$ を求めなければならない。ショートモードの電場固有関数 $\mathbf{e}$ は z 成分しかなく、中心軸近くでは $e_z \approx e_0$ としてよい。すると式 (3 -7) から $\mathbf{h}$ は θ 成分しかなく、それは

$$h_\theta(iris) \approx \frac{\omega(0)\,e_0}{2c}\,r \tag{3 -21}$$

[*1] TM_{010} 以外の、任意の次数の固有関数についても同様な議論が可能である。

となることが分かる。式 (3 -20)、式 (3 -21) を式 (3 -15) に代入すれば、結合定数は結局

$$k=\frac{4}{3}a^3e_0^2 \tag{3 -22}$$

となる。ピルボックス空洞各セルの半径を b、長さを d とし、式 (3 -15) の規格化を適用すれば

$$\begin{aligned} &e_z=e_0J_0\left(\chi_{01}r/b\right)\\ &\text{ただし }e_0=\frac{1}{\sqrt{\pi d}bJ_1\left(\chi_{01}\right)} \end{aligned} \tag{3 -23}$$

であるので

$$k=\frac{4a^3}{3\pi b^2dJ_1^2\left(\chi_{01}\right)}\approx 1.57\frac{a^3}{b^2d} \tag{3 -24}$$

という具体形が求まる。

§ 3 - 2　無限に長い周期構造の理論

前節の結果を進めて、ここでは同等なセルが無限につながっている、いわゆる無限周期構造についてその基本的な性質をまとめておく。まず、等価回路モデルから始めるが、回路としては図 3.3 を発展させた図 3.4 のような容量性結合の場合を考える。ここでも電流は右回りを基準にとり、また結合は十分に弱い、すなわち

$$C'\gg C \tag{3 -25}$$

とする。

この回路で n 番目のセルの電流を $\tilde{i_n}$ とすれば

$$\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)\tilde{i}_n+\frac{2\tilde{i}_n-\tilde{i}_{n+1}-\tilde{i}_{n-1}}{j\omega C'}=0 \tag{3 -26}$$

という固有方程式が得られる。隣り合うセルでの電流の位相差は ϕ である、すなわち

$$\frac{\tilde{i}_{n+1}}{\tilde{i}_n}=e^{-j\phi} \tag{3 -27}$$

と置いてみる。すると

$$\begin{aligned} \omega&=\omega_0\left[1+k\left(1-\cos\varphi\right)\right]^{1/2}\\ &\approx\omega_0\left[1+\frac{k}{2}\left(1-\cos\varphi\right)\right] \end{aligned} \tag{3 -28}$$

という解が得られる。ただし

$$\omega_0\equiv\frac{1}{\sqrt{LC}},\qquad k\equiv\frac{2C}{C'}\ \ (\ll 1) \tag{3 -29}$$

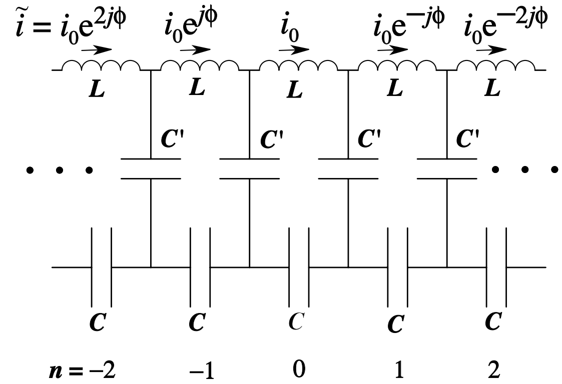

図 3.4　無限周期構造の等価回路

である。

この関係を $|\varphi|\leqslant\pi$ の基本ブリリアン帯について描くと図 3.5 のようになる。この曲線を分散曲線（dispersion curve）といい、ω_0 と $\omega_0\left(1+k\right)$ の間の周波数を通過帯域（passband）という。通過帯域内の任意の周波数 ω にはセル間の位相差が $\pm|\varphi|$ の２つの波が存在する。

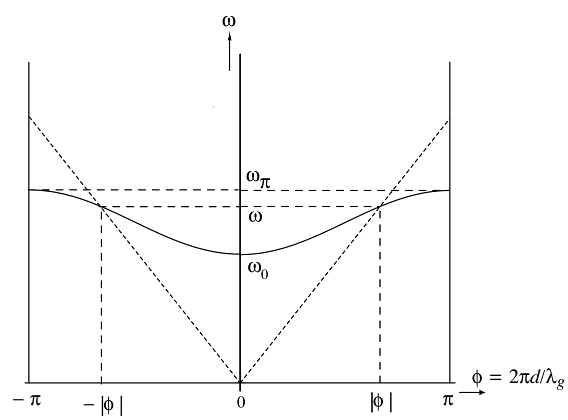

図 3.5　無限周期構造の分散曲線 (基本ブリリアン帯)

それらの振幅を $\tilde{A}_\pm$ とすれば、各セルの電流は

$$\tilde{i}_n=\tilde{A}_+e^{jn|\varphi|}+\tilde{A}_-e^{-jn|\varphi|} \tag{3 -30}$$

という形の一般式で表される。フェーザーから実数による表式に戻れば、これは

$$\begin{aligned} i_n=&A_+\cos\left(\omega t+n\left|\varphi\right|+\phi_+\right)+\\ &A_-\cos\left(\omega t-n\left|\varphi\right|+\phi_-\right) \end{aligned} \tag{3 -31}$$

と書き直される。ここで $A_\pm$（$\geq$ とする)、$\phi_\pm$ は実数の定数である。この式で $+$ の添字のく波は図 3.53 で左向

き（n が減少する向き）、$-$ のものはその反対方向に進む波を表わす。特に $\varphi=0$ および $\varphi=\pi$ の場合は両方の波が縮退し、同一の定在波を表わす。なお一般の φ については、A_+ と A_- のどちらも 0 でなければ、定在波となるが、とくに両者の絶対値が等しいときは完全な定在波となる。

セルの幾何学的な長さを d と、波の管内波長 λ_g、波数 β_g には

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g} = \frac{2\pi d}{|\varphi|} \qquad (3\text{-}32)$$

の関係がある。また進行波の位相速度 v_p は

$$v_p = \pm\frac{\omega}{\beta_g} = \pm\frac{\omega d}{|\varphi|} \qquad (3\text{-}33)$$

であり、図 3.5 で原点 (0, 0) と点 $(\pm|\varphi|, \omega)$ を結ぶ直線の勾配は v_p/d に等しい。

次に、もう少し現実に近づいたモデルとして、各セルでの壁損を考慮する。それは図 3.6 のように小さい直列抵抗 r を追加することである。ここで小さいとは

$$\omega L \gg r \qquad (3\text{-}34)$$

を仮定することである。直列抵抗 r の追加は式 (3-26) で $j\omega L \to j\omega L + r$ という置換をすることである。すなわち

$$\left(j\omega L + r + \frac{1}{j\omega C}\right)\tilde{i}_n + \frac{2\tilde{i}_n - \tilde{i}_{n+1} - \tilde{i}_{n-1}}{j\omega C'} = 0 \qquad (3\text{-}35)$$

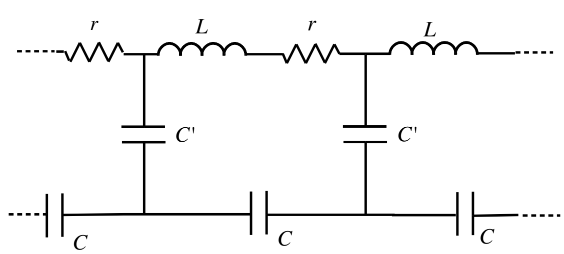

図 3.6　壁損を考慮した等価回路

この式については２つの場合を区別する必要がある。ひとつは、全てのセルの電流がが同振幅、同位相で振動する（完全な）定在波の場合である。その場合、ω は複素数となり、時間的に減衰する振動を表わす。減衰の様子は、よく知られているように共振回路の Q 値を使って $\exp(-\omega t/Q)$ で表わされる。Q 値は図 3.6 のような直列抵抗 r あるいは図 2.2 のような並列抵抗 R を使えば

$$Q = \frac{\omega L}{r} = \frac{1}{\omega C r}$$

あるいは

$$Q = \frac{R}{\omega L} = \omega R C \qquad (3\text{-}36)$$

となる。

もうひとつの場合は、ω が実数解をもつ進行波の場合であって、振幅がセルごとに、すなわち空間的に減衰していく。この場合式 (3-27) は

$$\frac{\tilde{i}_{n+1}}{\tilde{i}_n} = e^{-j\varphi-\alpha} \qquad (3\text{-}37)$$

という形になる。ここで α はセルごとの減衰を表わす正の実数である。これを式 (3-35) に代入し、式 (3-34) の仮定を考慮すれば、減衰定数 α がセルごとの位相差 φ の関数として得られる。まず $\varphi=0$ および $\varphi=\pi$ の近くを除けば、次式がえられる。

$$\alpha \approx \frac{\omega r C}{k\sin\varphi} = \frac{1}{kQ\sin\varphi} \qquad (3\text{-}38)$$

一方 $\varphi=0$ の近くについては

$$\omega \approx \frac{\varphi}{rC}, \quad \alpha \approx -2\ln(2/k) \qquad (3\text{-}39)$$

であり、$\varphi=\pi$ の近くについては

$$\omega \approx \frac{r}{L(\pi-\varphi)}, \quad \alpha \approx -2\ln(\pi-\varphi) \qquad (3\text{-}40)$$

となる。これらの関係から、定在波に縮退する特別の位相の近くでは、損失のない構造のもつ理想的な分散曲線からのずれが大変大きくなることが分かる。図 3.7 にはその様子を模式的に示しておく。

このように無限につづく周期構造についても前節と同様に電磁場方程式を使って分散式を導いてみよう。なお簡単のために単位セルの形状はその中央面に関して、左右対称であるとしておく。このような周期構造の電磁場は、セル毎に位相が $e^{-j\varphi}$ ずつ進むとして、Floquet の定理を援用しつつ議論を進めることができる。[2] セルの長さを d として、これを式に表わすと

$$\mathbf{E}(x,y,z+d) = e^{-j\varphi}\mathbf{E}(x,y,z)$$
$$\mathbf{H}(x,y,z+d) = e^{-j\varphi}\mathbf{H}(x,y,z) \qquad (3\text{-}41)$$

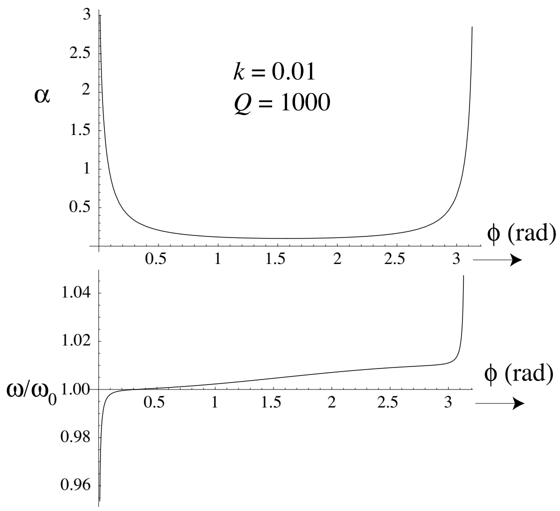

図 3.7　壁損がある無限周期構造の分散曲線

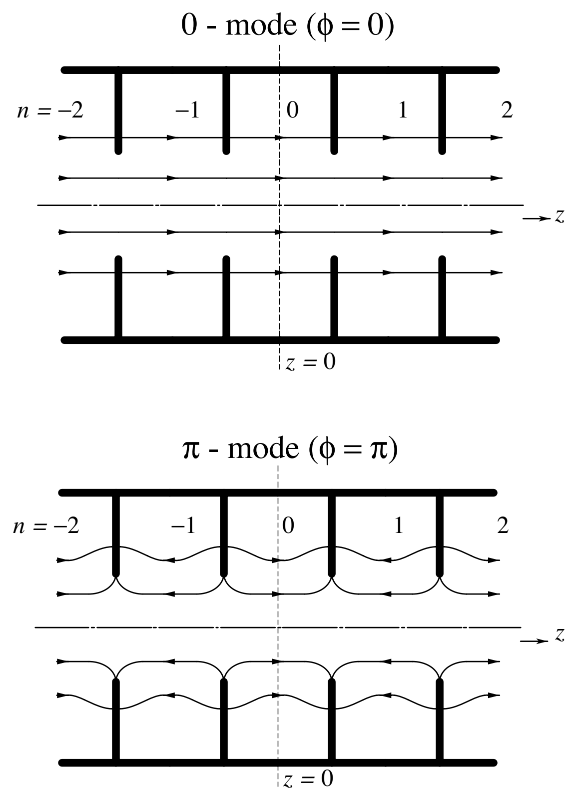

図 3.8　無限周期構造の 0 および π モード

である 。2 セルの場合 $\varphi = 0$ または π のみであったが、今度はその間の任意の φ について考えなければならない。その理論は R. M. Bevensee によって作られており、ここではそれに沿って話を進める。[11] 具体的には、ピルボックス空洞の TM_{010} モードで議論するが、図 3.8 のように、ショートモード（$\varphi = 0$）およびオープンモード（$\varphi = \pi$）が基本となる。以下の議論において、$z = 0$ にあるセル番号 0 の空洞（以下ではセル（0）と表示）を中心にし、かつそこでの電場の向きを両モードとも同じに取るが、無限数セル構造であるから一般性は失われない。

さて任意の φ について、セル（0）の電磁場 $\tilde{\mathbf{E}}$、$\tilde{\mathbf{H}}$ を考えるとき、セル内の電磁場は全体として同一位相で振動している、すなわち、定在波であると近似してみる。結合孔は十分に小さいので、この近似はセル内の殆どの領域で妥当であろう。さらに、結合孔上のの電場として、両側セルにまたがるこの階段的飛躍の平均を取るという近似を更におこなう。

このように各セルの内部では定在波で近似できる、いいかえれば電磁場はセル内の至る所で同位相であるとすれば、セル (0) の $\tilde{\mathbf{E}}$ を実数場 $\mathbf{E}$ として一般性を失わない。こうした上で式 (3 -11) において $\mathbf{A} \to \mathbf{e}$、$\mathbf{B} \to \mathbf{E}$ とし、セル (0) の体積について積分を実行すると、式 (3 -13) を発展させた

$$\left\{ \left[\frac{\omega(\varphi)}{\omega(0)} \right]^2 - 1 \right\} = \frac{c}{\omega(0)\, A(\varphi)} \left[\int_{right\, iris} + \int_{left\, iris} \right] (\mathbf{E} \times \mathbf{h}) \cdot n dS \tag{3 -42}$$

が得られる。ただし $A(\varphi)$ は

$$A(\varphi) \equiv \int_{cell\,(0)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}\, dV \tag{3 -43}$$

である。しかし以下では簡単のために結合孔は小さいとする。この場合、$A(\varphi)$ は (φ) によって殆ど変化しないと考えてよい。また $\mathbf{e}'$ で展開しても振幅はほぼ等しい、すなわち

$$A'(\varphi) \equiv \int_{cell(0)} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}' dV \approx A(\varphi) \tag{3 -44}$$

としてよいであろう。ここで式 (3 -42) 右辺の表面積分を評価するさい、$\mathbf{E}$ はオープンモード $\mathbf{e}'$ で展開しなければならない。ショートモード $\mathbf{e}$ では恒等的に 0 になる

からである。さらに結合孔での $\mathbf{E}$ については上に述べた平均値近似を施す。すると右の結合孔については

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(cell\ (0), right\ iris\right) \\
&\quad = \frac{A'}{2}\,\mathbf{e}'\left(cell\ (0), right\ iris\right) \\
&\qquad + \frac{A'}{2}\,e^{-j\varphi}\,\mathbf{e}'\left(cell\ (1), left\ iris\right) \\
&\quad = \frac{A'}{2}\left(1 - e^{-j\varphi}\right)\mathbf{e}'\left(cell(0), right\ iris\right) \qquad (3\ \text{-}45)
\end{aligned}
$$

であり、左については

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(cell\ (0), left\ iris\right) \\
&\quad = \frac{A'}{2}\,\mathbf{e}'\left(cell\ (0), left\ iris\right) \\
&\qquad + \frac{A'}{2}\,e^{-j\varphi}\,\mathbf{e}'\left(cell\ (-1), right\ iris\right) \\
&\quad = \frac{A'}{2}\left(1 - e^{j\varphi}\right)\mathbf{e}'\left(cell(0), left\ iris\right) \qquad (3\ \text{-}46)
\end{aligned}
$$

となる。ここで式 (3 -46) の最後の関係は、図 3.8 から分かるように $\mathbf{e}'$ が左右の結合面では互いに反転していることを利用している。さて法線ベクトル $\mathbf{n}$ も左右で反転することを考慮すれば、結局式 3 -42 は式 3 -43、式 3 -44 を使って

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left[\frac{\omega\left(\varphi\right)}{\omega\left(0\right)}\right]^2 - 1\right\} \\
&\quad \approx \frac{c\left(1-\cos\varphi\right)}{\omega\left(0\right)}\cdot\frac{A'}{A}\cdot\int_{right\ iris}\left(\mathbf{e}'\times\mathbf{h}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS \\
&\quad = k\frac{A'}{A}\left(1-\cos\varphi\right) \qquad (3\ \text{-}47)
\end{aligned}
$$

ここで k は式 (3 -15) で定義されたものである。結合孔が小さい極限では当然

$$A' \rightarrow A \qquad (3\ \text{-}48)$$

であり、式 (3 -47) は等価回路による式 (3 -28) と一致する。すなわち、結合孔が小さい場合、周期構造の分散特性は等価回路理論で十分記述されることが分かる。

§ 3 - 3　π モード定在波加速管

この章の始めに述べたように、定在波で働かせるためにはセル間の位相差が π でなければならい。まず始めにその意味をもうすこし詳しく調べてみる。

定在波は互いに逆行する進行波の重ね合わせである。いままでは簡単のために基本ブリリアン帯だけで考察してきた。しかしここでは進行波を、全ての空間高調波成分からなる完全な表現を使って議論を進める。空間高調波はセル間の隔壁で電磁場が境界条件を満たすために現れる。しかしセル毎の位相差が φ である波は式 (3 -41) を満たさなければならない。

空間高調波成分も含めなた分散曲線を図 3.9 に示す。定在波の加速電場は２つの進行波の和として

$$
\begin{aligned}
E_z &= E_z^+ + E_z^- \quad \text{ただし} \\
E_z^+ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos\left[\omega t - \left(\beta_g + \frac{2\pi n}{d}\right)z - \phi_n\right] \\
E_z^- &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos\left[\omega t + \left(\beta_g + \frac{2\pi n}{d}\right)z + \phi_n\right]
\end{aligned}
\qquad (3\ \text{-}49)
$$

のような一般形で表わされる。ここで E_z への添字 $\pm$ は $\pm z$ 方向への進行波を示す。a_n は空間高調波成分の振幅であり、ϕ_n はその位相である。

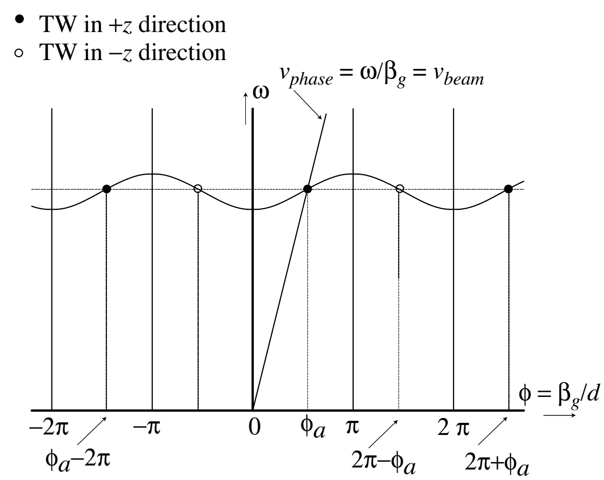

図 3.9　空間高調波成分も含めた分散曲線

さてセル間の位相差を φ_a と表わし、これに相当する角周波数を ω_a としよう。ここで波の位相速度 $v_p = \omega_a d/\varphi_a$ と粒子速度 v_b が一致するとする。そうすると

$$t = \frac{z + z_0}{v_b} \quad \text{および} \quad \beta_g = \frac{\varphi_a}{d} = \frac{\omega_a}{v_b} \qquad (3\ \text{-}50)$$

の関係が成立する。ここで z_0 は $t = 0$ での粒子の位置

である。式 (3 -50) を式 (3 -49) に代入すれば

$$E_z^+ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos\left[-\frac{2\pi n}{d}z - \phi_n + \frac{\varphi_a}{d}z_0\right]$$
$$E_z^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos\left[\frac{\varphi_a + \pi n}{d}z + \phi_n + \frac{\varphi_a}{d}z_0\right] \quad (3\text{ -}51)$$

となる。この電場を z について十分に長い距離にわたり積分すれば、$\varphi_a + \pi n$ が 0 となる特別な場合を除き、E_z^+ の a_0 成分以外の寄与がなくなる。すなわち定在波にする意味がないわけである。この様子は図 3.9 から理解される。その図で E_z^+ の各成分は黒丸、E_z^- のそれらは白丸で示してあるが、ビームと同期するのは黒丸の a_0 成分だけであるからである。

ところが $\varphi_a \to \pi$ となる π モードでは黒丸と白丸が重なり合い、図 3.10 のようになる。これは E_z^+ の a_0 成分以外に E_z^- の a_{-1} 成分も上の積分に寄与することを意味する。ところで π モードにおける E_z^+ を単独で考えた時、それは $+z$ 方向への進行波とも、$-z$ 方向への進行波とも云え、区別がつかない。すなわち縮退を起こしている。したがって a_0 成分と a_{-1} 成分は全く等しい。このようにして π モードでは E_z^+ と E_z^- が同等に寄与することになり、加速効率、いいかえるとシャント・インピーダンスが高くなる。この事情は $n\pi$ モードでも同じであるが、次数 n が高くなるにつれ成分の大きさが相対的に減少するので、加速には有効ではない。しかし粒子速度が遅く、基本波（$n = 1$）では d が小さくなりすぎる場合には使われる。

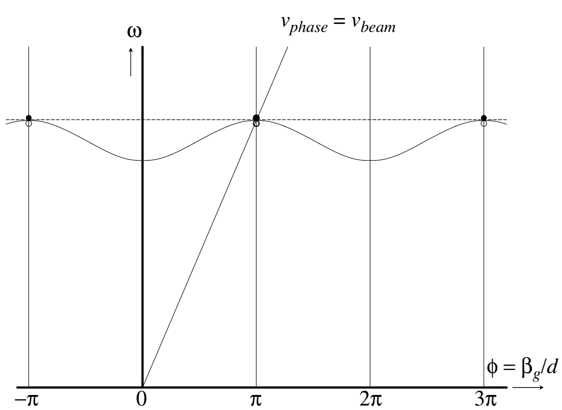

図 3.10　$\varphi_a \to \pi$ の場合の全空間高調波成分を含めた分散曲線

ところで π モードでは $\partial\omega/\partial\varphi = 0$、すなわち、群速度が 0 となってエネルギーが伝わらない。従って、空洞内の壁損やビームローディングによる電力損失がある場合、π モード以外のモードも励振される。その結果、外部電力入力窓から遠ざかるにつれて電磁場の振幅減少と位相変化がもたらされる。その状況は式 (3 -40) で示されている。従って定在波空洞はいくらでも長くとはゆかず、PEP や PETRA 使われたものはセル数で 5 程度である。

§ 3 - 4　有限セル数構造の理論

有限個のセルからなる現実の加速管は両端で周期性が崩れており、準周期構造である。その基本的な性質を図 3.4 の等価回路を図 3.11 のように書き直して調べてみよう。セル数は N とする。さしあたり壁損による抵抗成分のない理想的な場合を考える。ここで注意が必要なのは両端のセルである。それは片隣りとのみ結合しているので、その固有周波数は一般のセルと違える必要がある。また両端の境界条件から 0 モードが存在しないであろう。この辺の事情を Rees の論文 [12] を参考に、調べてみよう。

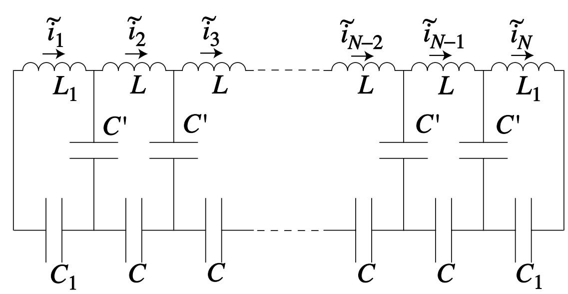

図 3.11　N セル構造の等価回路

まず、一般セルの回路は L、C からなり、隣との結合は C' で行われるとし、固有共振周波数および結合定数を

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad k \equiv \frac{2C}{C'} \quad (3\text{ -}52)$$

とする。一方、端部セルのそれらは L_1、C_1、C' として、上と同様に

$$\omega_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad k_1 \equiv \frac{2C_1}{C'} \quad (3\text{ -}53)$$

とする。ここで $L \approx L_1$ および $C \approx C_1$、また結合定数は十分に小さい、すなわち $k \approx k_1 \ll 1$ と仮定すれば、

一次近似で

$$\left(1+\frac{k}{2}\right)\omega_1^2\tilde{i}_1-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_2=\omega^2\tilde{i}_1$$
$$-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_1+(1+k)\,\omega_0^2\tilde{i}_2-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_3=\omega^2\tilde{i}_2$$
$$\vdots$$
$$-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_{N-2}+(1+k)\,\omega_0^2\tilde{i}_{N-1}-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_N=\omega^2\tilde{i}_{N-1}$$
$$\left(1+\frac{k}{2}\right)\omega_1^2\tilde{i}_N-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_{N-1}=\omega^2\tilde{i}_N \qquad (3\ \text{-}54)$$

いう関係が成り立つ。

ここで π モードであり、かつ、どのセルの振幅も等しいという加速器で要求される条件を課してみる。すなわち

$$\tilde{i}_1=-\tilde{i}_2=\tilde{i}_3=\cdots=(-1)^{N-1}\,\tilde{i}_N \qquad (3\ \text{-}55)$$

として式 (eq:3-54) を解けば、一次近似で

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}=1+k \qquad (3\ \text{-}56)$$

となって、端部セルの固有周波数が決まる。また π モードの周波数 ω_π は

$$\frac{\omega_\pi^2}{\omega_0^2}=1+2k \qquad (3\ \text{-}57)$$

で与えられる。

この構造は N 個の固有モードをもち、それらは行列式

$$\mathbf{H}\,\tilde{\mathbf{i}}=(\omega/\omega_\pi)^2\,\tilde{\mathbf{i}} \qquad (3\ \text{-}58)$$

の解である。ただし

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}1-\frac{k}{2} & -\frac{k}{2} & 0 & \cdots\cdots\cdots & & & 0\\ -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2} & 0 & \cdots\cdots & & 0\\ 0 & -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2} & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2} & 0\\ 0 & \cdots\cdots & 0 & & -\frac{k}{2} & 1-k & -\frac{k}{2}\\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & & -\frac{k}{2} & 1-\frac{k}{2}\end{pmatrix}$$

および

$$\tilde{\mathbf{i}}=\begin{pmatrix}\tilde{i}_1\\ \tilde{i}_2\\ \vdots\\ \tilde{i}_{N-1}\\ \tilde{i}_N\end{pmatrix} \qquad (3\ \text{-}59)$$

である。この方程式の n 番目の固有値を $(\omega_n/\omega_\pi)^2$ で表わせば

$$\frac{\omega_n}{\omega_\pi}=\sqrt{1-2k\cos^2\frac{n\pi}{2N}}\approx 1-k\cos^2\frac{n\pi}{2N}$$
$$(n=1,2,\ldots,N) \qquad (3\ \text{-}60)$$

である。またそれに対応する固有ベクトル

$$\tilde{\mathbf{i}}_n=\left\{\tilde{i}_n^{(p)}\right\} \qquad (p=1,2,\ldots,N)$$

は $\tilde{\mathbf{i}}_n^2=1$ と規格化して

$$\tilde{i}_n^{(p)}=\sqrt{\frac{2}{(1+\delta_{nN})}}\,\sin\left[\frac{n\pi}{2N}\,(2p-1)\right] \qquad (3\ \text{-}61)$$

で与えられる。ここで δ_{nN} はクロネッカーのデルタ記号である。この式から $n=0$ での解は恒等的に 0 であり、$n=N$ では π モード解が得られることがわかる。$N=5$ という典型的な場合について、式 (3 -60)、式 (3 -61) で計算した個有値および固有ベクトルを図 3.12 に示す。ここで結合定数には $k=0.05$ という標準的な値を選んでいる。

次に、空洞に小さな抵抗成分 r がある場合を考えよう。そのため図 3.11 の等価回路を図 3.13 のように書き

直す。その場合、式 (3 -54) 式は

$$\left(1+\frac{k}{2}+j\omega C_1 r\right)\omega_1^2\tilde{i}_1-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_2=\omega^2\tilde{i}_1$$
$$-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_1+(1+k+j\omega Cr)\,\omega_0^2\tilde{i}_2-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_3=\omega^2\tilde{i}_2$$
$$\vdots$$
$$-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_{N-2}+(1+k+j\omega Cr)\,\omega_0^2\tilde{i}_{N-1}-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_N=\omega^2\tilde{i}_{N-1}$$
$$\left(1+\frac{k}{2}+j\omega C_1 r\right)\omega_1^2\tilde{i}_N-\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_{N-1}=\omega^2\tilde{i}_N \quad (3\text{ -}62)$$

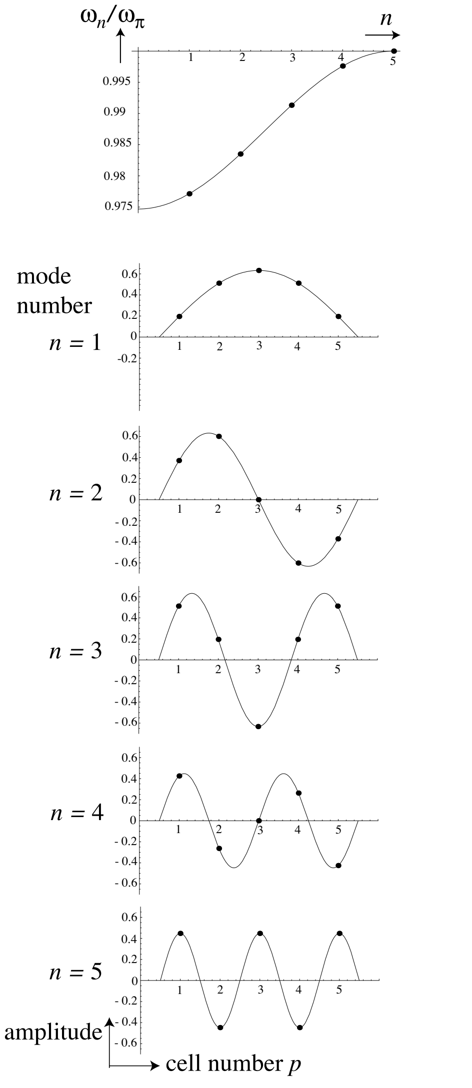

図 3.12　$N = 5$ の場合の個有値および固有ベクトル。ここで n はモード番号、p はセル番号である。

のように変形される。ここで $C_1 \approx C$、結合定数 $k \ll 1$

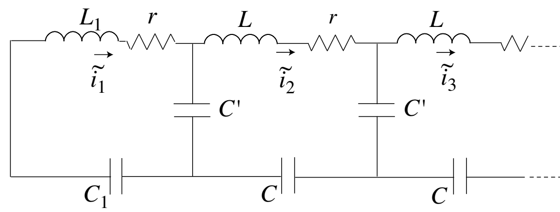

図 3.13　壁損を表す抵抗 r を図 3.11 に追加した回路図

を仮定すれば、式 (3 -36) を使って

$$j\omega C_1 r \approx j\omega Cr \approx j/Q \quad (3\text{ -}63)$$

と近似できる。そうすると式 (3 -58) が

$$(\mathbf{H}+\mathbf{H}_1)\,\tilde{\mathbf{i}}=(\omega/\omega_\pi)^2\,\tilde{\mathbf{i}}^2 \quad (3\text{ -}64)$$

のように $\mathbf{H}_1$ という摂動項が追加された形になる。$\mathbf{H}_1$ は N 行 N 列の単位行列 $\mathbf{E}$ で

$$\mathbf{H}_1=\frac{j}{Q}\mathbf{E} \quad (3\text{ -}65)$$

と書ける。

摂動項 $\mathbf{H}_1$ の 1 次近似での個有値および固有ベクトルは式 (3 -60) 、(3 -61) で与えた 0 次近似のものを使って

$$\frac{\omega^2}{\omega_\pi^2}=\frac{\omega_n^2}{\omega_\pi^2}+{}^t\tilde{\mathbf{i}}_n\mathbf{H}_1\tilde{\mathbf{i}}_n \quad (3\text{ -}66)$$

$$\tilde{\mathbf{i}}\;=\;\tilde{\mathbf{i}}_n+\sum_{\substack{m=1\\ \neq n}}^{N}\frac{\left({}^t\tilde{\mathbf{i}}_m\mathbf{H}_1\tilde{\mathbf{i}}_n\right)\tilde{\mathbf{i}}_m}{(\omega_m^2/\omega_\pi^2)-(\omega_n^2/\omega_\pi^2)} \quad (3\text{ -}67)$$

となる。ここで肩字 t は転置行列を表わす。式 (3 -65) を式 (3 -66) に代入すれば n 番目の個有値は

$$\frac{\omega_n^{wall\,loss}}{\omega_\pi}\approx\frac{\omega_n}{\omega_\pi}\left(1+\frac{j}{2Q}\right) \quad (3\text{ -}68)$$

という、減衰項がついた、既知の結果が得られる。一方、固有ベクトルについては、式 (3 -65) は対角行列であるので式 (3 -67) の右辺第 2 項は恒等的に 0 となって第 0 近似と変わらない 。

上のような 1 次摂動計算は応用範囲が広い。たとえば、p 番目のセルの固有共振周波数が

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0+\Delta\omega_0 \quad (3\text{ -}69)$$

のように微小量誤差 $\Delta\omega_0$ を持っているとしよう。その場合、式 (3 -65) の行列の p 番目の対角項は近似的に

$$\frac{j}{Q} \to \frac{j}{Q} + \frac{2\Delta\omega_0}{\omega_0} \tag{3 -70}$$

となる（証明は略す）。このように変更された摂動行列では式 (3 -67) 右辺第 2 項が 0 ではなくなる。とくに π モードでは $n \neq N$ モード成分も混じるので、もはや平坦場ではない。なかでも式 (3 -67) 右辺第 2 項の分母

$$\left(\omega_m^2/\omega_\pi^2\right) - \left(\omega_n^2/\omega_\pi^2\right)$$

が最小となる $n = N - 1$ モードの混合や、その分子について、p 番目のセルに大きい振幅を持つモードとの混合とが問題になる。しかし一般には、前者の場合に注意しなければならない。なおこの解析を、個々のセルが固有共振周波数に様々な誤差を持つ場合に拡張することは容易であろう。

最後に、図 3.14 のように p 番目のセルで外部から励振されている場合の方程式を求めておこう。励振電圧を $\tilde{V}e^{j\omega t}$ ととして各モードの振幅を求める。この場合、式 (3 -62) で p 番目セルについての表現は

$$\begin{aligned} -\frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_{p-1} + (1 + k + j\omega Cr)\,\omega_0^2\tilde{i}_p - \frac{k\omega_0^2}{2}\tilde{i}_{p+1} \\ = \omega^2\tilde{i}_p - j\omega\omega_0^2 C\tilde{V} \end{aligned} \tag{3 -71}$$

のように、励振項が追加された形になる。マトリックスで書けば

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}_1)\,\tilde{\mathbf{i}} = (\omega/\omega_\pi)^2\,\tilde{\mathbf{i}} + \tilde{\mathbf{i}}_{ext}$$

ただし

$$\tilde{\mathbf{i}}_{ext} = \tilde{I}\begin{pmatrix} \delta_{1\ p} \\ \vdots \\ \delta_{p-1\ p} \\ \delta_{p\ p} \\ \delta_{p+1\ p} \\ \vdots \\ \delta_{N\ p} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{I} \equiv -j\omega C\tilde{V} \tag{3 -72}$$

となる。

上のような解析を、有限な Q 値をもつ π モード定在波型加速管に応用してみよう。簡単のために、励振は最左端のセル（$p = 1$）で行われ、励振周波数は $\omega = \omega_\pi$ と

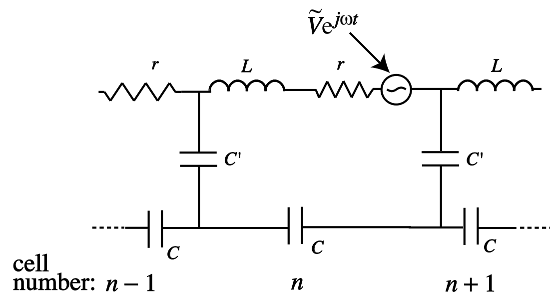

図 3.14　励振源がある場合の等価回路

する。すると式 (3 -72) は単位行列 $\mathbf{E}$ をもちいて

$$(\mathbf{H} + \mathbf{H}_1 - \mathbf{E})\,\tilde{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \tilde{I} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3 -73}$$

と書き直される。この式を解くために、ふたたび式 (3 -60) と (3 -61) で与えた第 0 次近似の個有値および固有ベクトルを使う。そうすると $\tilde{\mathbf{i}}$ は

$$\tilde{\mathbf{i}} = \sum\nolimits_1^N a_n\tilde{\mathbf{i}}_n \tag{3 -74}$$

と展開される。また π モードからの固有周波数の差を

$$\delta^{(n)} \equiv (\omega_n/\omega_\pi)^2 - 1 \tag{3 -75}$$

と置く。この 2 つの式を式 (3 -73) (3-73) に代入し、式 (3 -61) を使えば

$$\begin{aligned} a_N &= -j\frac{Q}{\sqrt{N}}\tilde{I} \\ a_{n\neq N} &= -j\frac{Q}{\sqrt{N/2}}\frac{\sin(n\pi/2N)}{1 - jQ\delta^{(n)}} \end{aligned} \tag{3 -76}$$

という解が得られる。これから Q が十分に大きいときには $a_{n\neq N}$ は無視してよい、すなわち π モードに極めて近い形で励振されているとみなすことができる。しかしセル数 N が大きくなると、注意ぶかい解析が必要である。上式では、分母中の $Q\delta^{(n)}$ が最も小さい値を取る隣接モード ($n = N - 1$) の振幅が最も大きくなる。そこで簡単に π モードにこの $N - 1$ モードのみが混ざるとしてみる。そして、その混合の様子を両端のセル（$p = 1$ および $p = N$）の振幅 $\tilde{i_1}$、$\tilde{i_N}$ の比で調べてみる。式 (3

-61) を用いれば

$$\frac{\tilde{i}_1}{\tilde{I}} \approx -j\frac{Q}{\sqrt{N}}\left[1+\frac{\sqrt{2}\sin\frac{(N-1)\pi}{2N}}{1-jQ\delta^{(N-1)}}\right]$$
$$\frac{\tilde{i}_N}{\tilde{I}} \approx -j\frac{Q}{\sqrt{N}}\left[(-1)^{N-1}+\frac{\sqrt{2}\sin\frac{(N-1)(2N-1)\pi}{2N}}{1-jQ\delta^{(N-1)}}\right] \quad (3\text{ -77})$$

となり、問題にしている比が求まる。ここではセルごとの損失の効果を際だたせるために、Q値として 1,000 という比較的小さい値を選んで計算してみよう（なお、500 MHz の空洞を例にとれば $30,000 \sim 40,000$ が普通である)。まず振幅の絶対値の比 $\left|\tilde{i}_1/\tilde{i}_N\right|$ は図 3.15 のようになる。位相差については $\arg\left[(-1)^{N-1}\,\tilde{i}_1/\tilde{i}_N\right]$ を計算する。それは理想的な $Q=\infty$ の場合の値 $(N-1)\pi$ からの、有限なQ値によるずれである。結果は図 3.16 のようになる。これらの計算からセル数が増加するとともに振幅、位相のずれが大変目立ってくることがわかる。これは N が大きくなると、$\delta^{(N-1)}$ が

$$\delta^{(N-1)} \approx -\frac{k\pi^2}{2N^2} \quad (3\text{ -78})$$

のように減少し、式 (3 -77) の括弧内第 2 項が無視できなくなるからである。このように π モード加速管ではセル数の増加につれて加速効率が急に劣化する。

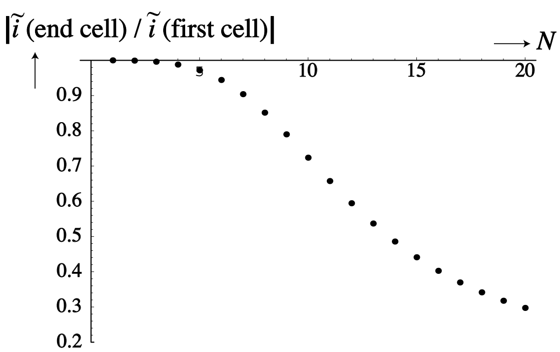

図 3.15　有限な Q 値の構造において、励振源から遠ざかるに従い π モード振幅が低下する様子

§ 3 - 5　陪周期構造（APS 加速管）

$\varphi=\pi$ で働く定在波加速管はシャント・インピーダンスが高いものの、抵抗損失分によって加速電場の一様性が失われ、セル数をむやみに増やせないことを前節で

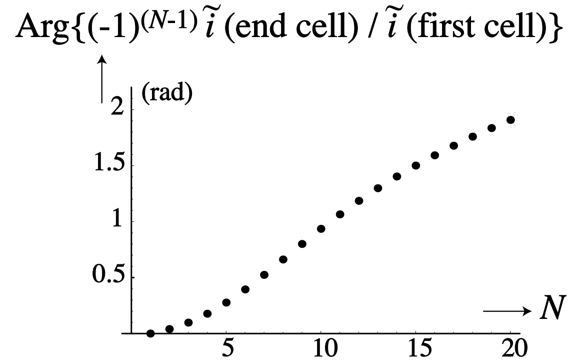

図 3.16　有限な Q 値の構造において、励振源から遠ざかるに従い π モード位相のずれが生じる様子

調べた。これは分散曲線の勾配が 0、従って群速度も 0 となる位相で動作することの当然の帰結である。ところで $\pi/2$ は群速度が最も大きくなる位相であるから、上のような欠点は大幅に除かれるであろう。しかし定在波にしたとき、一つおきに電磁場の励振されないセルが現われ、シャント・インピーダンスが半減する。そこで考えられたのが図 3.17 のような APS（alternating peiodic structure）[13] という構造で、電磁場のないセルの長さを短くした分、加速セルを長くするというものである。

しかしこれでは長短一対のセルが周期単位となり、π モードに戻ることになる。従って群速度もまた 0 となるのではないかと考えられる。このような構造の分散曲線は、以下で議論するように長短それぞれのセルに伴う 2 本の組からなるが、確かに通常のままでは $\varphi=\pi$ で勾配が 0 となる。ところが長短セルそれぞれの固有周波数をうまく選ぶと 2 本の分散曲線が $\varphi=\pi$ で合流し、勾配も 0 ではない値となることが分かる。このように 0 ではない群速度を持ちながら、なお通常の π モード加速管に近いシャント・インピーダンスを持つ定在波加速管を、一般に陪周期構造（biperiodic structure）という。π モードの定在波が立っている通常の周期構造と同じく、π モード陪周期構造でも、励振されないセルは加速セル間の電磁エネルギー交換を円滑にする役割を担っている。そこでこのセルを加速セルとは区別して結合セル（coupling cell）または結合空洞と呼ぶ。

陪周期構造には APS 以外にも何種類か開発され、実用化もはかられている。代表的なものとして側結合構造（SCS、side coupled structure）[14] [15]、環状結合構造

（ACS、 annular coupled structure）[14] [15] [16]、ディスク・アンド・ワッシャー（DAW、disk-and-washer）構造 [17] [18] などがあり、図 3.18 に列挙する。

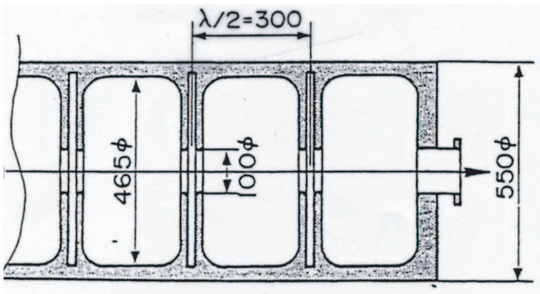

図 3.17　APS 構造

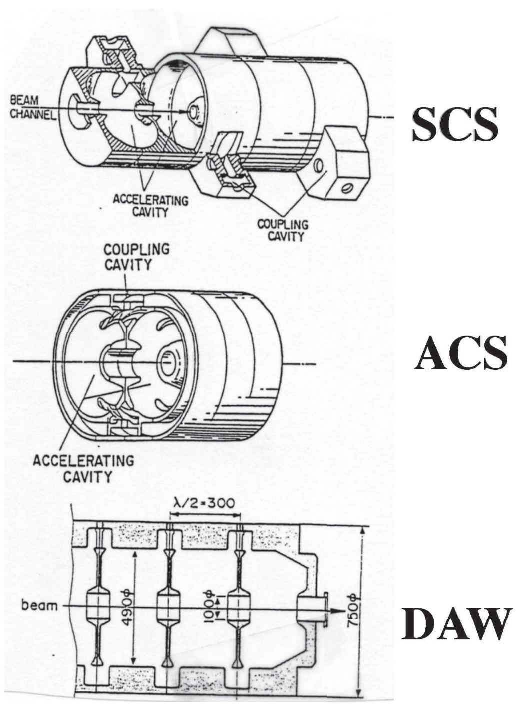

図 3.18　APS 以外の代表的な陪周期構造

さて、損失のない無限長の理想的な陪周期構造の等価回路は図 3.19 のようになる。長短それぞれのセルについての誘導 L、容量 C、電流 $\tilde{i}$ 等を区別するために添字 l、s を用いる。すると単位周期（長短セル一対）につい

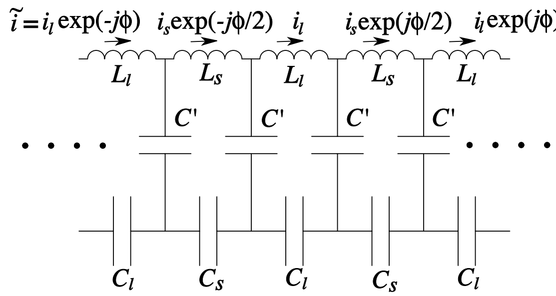

図 3.19　陪周期構造の等価回路

ての位相の進みを φ としたときの方程式は

$$\begin{aligned}&\left(j\omega L_l + \frac{1}{j\omega C_l} - \frac{2}{j\omega C'}\right)\tilde{i}_l \\ &\qquad - \frac{e^{j\omega\varphi/2} + e^{-j\omega\varphi/2}}{j\omega C'}\tilde{i}_s = 0 \\ &\left(j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s} - \frac{2}{j\omega C'}\right)\tilde{i}_s \\ &\qquad - \frac{e^{j\omega\varphi/2} + e^{-j\omega\varphi/2}}{j\omega C'}\tilde{i}_l = 0 \end{aligned} \tag{3 -79}$$

となる。ここで 2 つの結合定数

$$k_l \equiv \frac{2C_l}{C'} \quad \text{および} \quad k_s \equiv \frac{2C_s}{C'} \tag{3 -80}$$

を定義すればこの式は

$$\frac{\tilde{i}_l}{\tilde{i}_s} = \frac{k_l\omega_l^2\cos(\varphi/2)}{(1+k_l)\,\omega_l^2 - \omega^2} = \frac{(1+k_s)\,\omega_s^2 - \omega^2}{k_s\omega_s^2\cos(\varphi/2)} \tag{3 -81}$$

と変形される。さらに次のようなパラメーター

$$\begin{aligned} W_l &\equiv \omega_l\sqrt{1+k_l} \\ W_s &\equiv \omega_s\sqrt{1+k_s} \\ K &\equiv \omega_l\omega_s\sqrt{k_l k_s} \end{aligned} \tag{3 -82}$$

を定義すれば式 (3 -81) は分散式

$$\left(\omega^2 - W_l^2\right)\left(\omega^2 - W_s^2\right) = K^2\cos(\varphi/2) \tag{3 -83}$$

の形に書き直せる。これは ω についての 4 次式であるので、分散曲線は上述のように 2 本の曲線の組合わせとなる。特に位相 $\varphi = 0$ および π での ω の解は

$$\begin{aligned} \varphi = \pi : \omega = W_l \ &\text{および}\ W_s \\ \varphi = 0 : \omega = W_1 \ &\text{および}\ W_2 \end{aligned} \tag{3 -84}$$

ただし

$$W_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{W_l^2 + W_s^2}{2} \mp \sqrt{K^2 + \left(\frac{W_l^2 - W_s^2}{2}\right)^2}} \tag{3 -85}$$

である。ところで興味があるのは $\varphi = \pi$ における分散曲線の勾配である。それは式 (3 -83) より

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{K^2 \sin\varphi}{4\omega\,(2\omega^2 - W_l^2 - W_s^2)} \tag{3 -86}$$

で与えられるが、$W_l \neq W_s$ では、$\varphi \to \pi$ で $\dfrac{d\omega}{d\varphi} \to 0$ である。しかし $W_l = W_s \equiv W$ とすれば

$$\left.\frac{d\omega}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pi} = \pm\frac{K}{4W} \tag{3 -87}$$

というように 0 ではない値をとる。陪周期構造におけるこの特別な関係を合流（confluence）条件といい、実用的に重要な性質である。

ここで合流条件を満たすかそれに近いところでの分散曲線の様子を調べよう。結合定数は式 (3 -80) のように C に比例するが、図 3.16 のような円筒空洞の TM_{010} モードを使う APS 構造では C はほぼセル長に反比例すると考えられる。そうすると k_s は k_l より通常数倍大きい。そこで結合定数として $k_s = 0.09$、$k_l = 0.03$ という現実的な値を選び、W_l/W_s =1.0、1.01、1.05 の値ににについて計算したのが図 3.20 である。なお分散公式から l と s を入れ替えても曲線の形は変わらない。この図から分かるように各 W_l/W_s の値について、$\omega/\sqrt{W_l W_s} = 1$ に関しほぼ対称な上下 2 本の曲線対が作られる。また $\varphi = \pi$ での勾配は、$W_l/W_s \neq 1$ で 0 であるが、合流条件が満たされると確かに 0 でない有限の大きさをもつことが示されている。

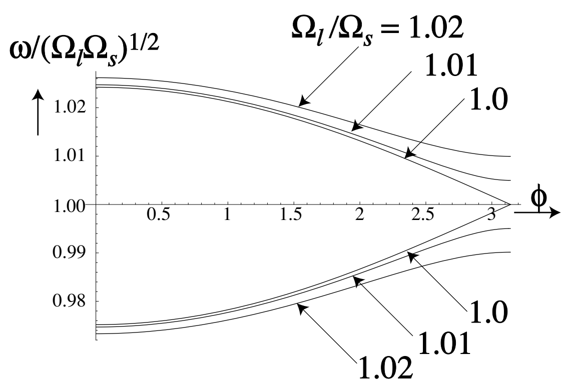

図 3.20　合流条件付近での陪周期構造の分散曲線

TM_{010} モードで動作する円筒空洞型 APS の性質をもう少し詳しく調べてみる。まず $\varphi = \pi$ の 2 つのモードは図 3.21 のようになる。どちらのモードも、励振されているセルの中央面に関し対称な電場を持つ。従ってそれぞれのモードについて、励振セルの中央面にショート面を置くか、励振されていないセルの中央面にオープン面を置いて有限セル数の構造でモードの様子を調べることができる。

つぎに $\varphi = 0$ の 2 つのモードは図 3.22 のようである。電気力線は周波数が低い W_1 のモードでは同じ向きであるが、高い W_2 のモードでは長短セルで逆転する。これは式 (3 -81) で 2 つの電流の比が負になるに相当している。通常の周期構造は長短セルの長さが等しいとした極限である。その π モードは W_2 にあるモードに相当すし、この逆転現象を伴う。

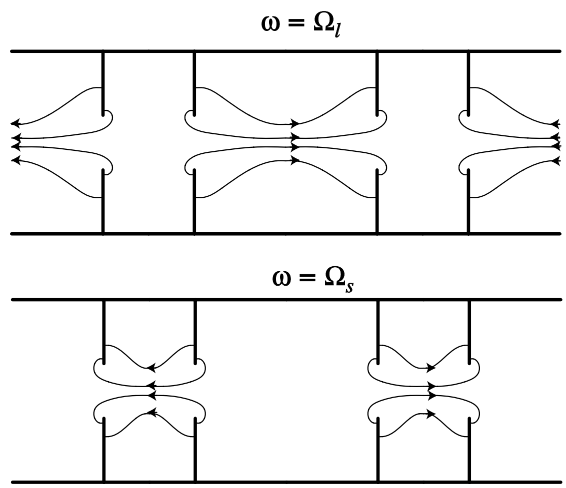

図 3.21　$\varphi = \pi$ における APS の 2 つのモード

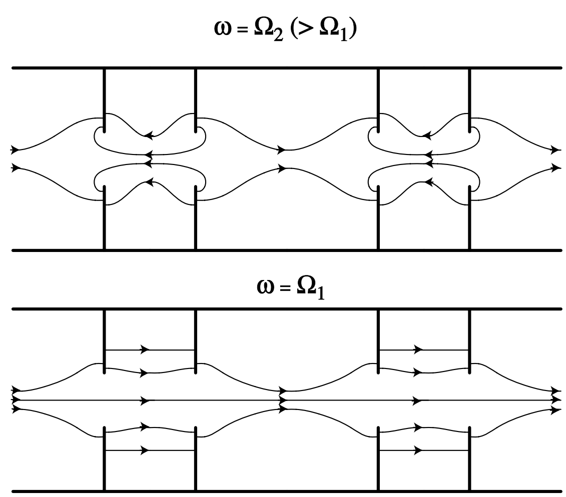

図 3.22　$\varphi = 0$ における APS の 2 つのモード

次に上下の曲線のバンド幅について考察してみる。なお l と s の入れ替えに対して曲線の形は変わらないので、以下では $W_l \geq W_s$ として議論する。分散式から

$$W_2^2 - W_l^2 = W_1^2 - W_s^2 = \sqrt{K^2 + \left(\frac{W_l^2 - W_s^2}{2}\right)^2} - \frac{W_l^2 - W_s^2}{2} \tag{3 -88}$$

という関係が得られる。合流条件がほぼ満たされる場合、この式から個々の曲線の幅は

$$\frac{|W_2 - W_l|}{W_l} \approx \frac{|W_s - W_1|}{W_s} \approx \frac{\sqrt{k_l k_s}}{2} \tag{3 -89}$$

で与えられ、バンド幅は上下でほぼ等しいことがわかる。

合流条件が満たされているとき、短セルは長セルより若干直径が大きくなる。それは上で議論したように k_s が k_l より大きいからで、式 (3 -82) と式 (3 -83) で得られる関係

$$\frac{\omega_l^2}{\omega_s^2} = \frac{1 + k_s}{1 + k_l} > 1 \tag{3 -90}$$

によって理解される。既に議論したように、中心軸上の結合孔による電気結合は固有共振周波数を高めるように作用する。しかも同じ径の結合孔は短セルのほうへより強く作用する。従って、同じ動作周波数を実現するには短セルの径をより大きくし、その固有共振周波数を下げておかなければならない訳である。

なお $\varphi = 0$ では図 3.22 で示したように、短セルのほうが電気力線密度が高くなる。合流条件が満たされているときに式 (3 -79) を用いて電流を計算すると

$$\left(\frac{\tilde{i}_s}{\tilde{i}_l}\right)^2 = \frac{k_s(1 + k_l)}{k_l(1 + k_s)} \approx \frac{k_s}{k_l} \tag{3 -91}$$

であるが、上で議論したように

$$\frac{k_s}{k_l} \approx \frac{C_s}{C_l} \tag{3 -92}$$

であるから

$$\frac{\tilde{i}_s^2}{C_s} \approx \frac{\tilde{i}_l^2}{C_l} \tag{3 -93}$$

となって、ひとつのセルに蓄えられているエネルギーが等しい。従って短セルの電磁場密度が高くなる訳である。

第 4 章

導波管との結合

これまでは単独の空洞の性質を研究してきた。これからは外部回路と結合した空洞の解析を進める。外部との高周波電力のやりとりはクライストロンなどの高周波電力源とつながった導波管および空洞を通過ビームによって行われる。そのうち、この節では前者の考察をおこなう。

導波管との結合を記述するには、入力波の空洞による反射が指標となる。具体的には導波管途中の点で観測されるインピーダンスまたは反射率を使う。空洞と導波管は小孔（aperture）あるいはループ（loop）で結合している。この結合器が小さすぎると疎結合（undercoupling)、大きすぎると密結合（overcoupling）となり、いずれでも入力波の一部は反射される。結合度が丁度よく、反射が起きない場合を整合（matched coupling）が取れているという。

この節の目的は結合部における導波管モードと空洞モードとの関係からインピーダンスを計算することである。その際、空洞からの反射波は導波管の途中に挿入されたサーキュレーター等の非可逆素子により吸収され、再び空洞には戻らないものとする。[*1] なおこの場合に注意しておくことは、インピーダンスや反射率は、空洞が接続されている導波管端からの距離に応じてそれらの複素位相が変わることである。

インピーダンスを求めるに当たっては、図 4.1 のように、実際に小孔やループなどの結合器が存在する空洞壁から導波管に沿って適当に離れたところに、解析用の結合孔 S_a を考える。小孔やループ付近では正規の導波管形状から外れているため、その境界条件を満足するように様々な導波管高調波モードが立っている。しかし、通常の設計では基本モードだけが伝搬するように導波管寸法を選択するので、それらの高調波は遮断周波数以下の空間的減衰波であって、電磁場エネルギーの伝送に寄与しない。従って、それらが十分に減衰し基本波モードしか存在しない場所に結合孔 S_a を考えることが、空洞への入力および、そこからの反射の計算がはるかに簡単になる訳である。

空洞表面 S のうち、結合孔 S_a 以外の大部分である金属壁を図 4.1 のように S_m で表わす。ここで結合孔 S_a は十分に小く

$$S_a \ll S_m \approx S \tag{4 -1}$$

と仮定出来るものとする。なおここでは導波管を伝わる波が主役であるので、図 4.1 のように導波管軸に沿って空洞へ向かう方向（図 4.1 では右方向）を z 軸に選ぶ（前節までは円筒空洞の軸方向を z としていたことに注意)。z 方向の単位ベクトルは $\mathbf{k}$ で表す。空洞とは反対側で導波管は整合されており、z 軸に沿って左に進む波は再び戻ってこないものとする。空洞表面での外向きの法線ベクトル $\mathbf{n}$ は、開口部 S_a では z 方向の単位ベクトル $\mathbf{k}$ と大きさが等しく、向きが逆になる。

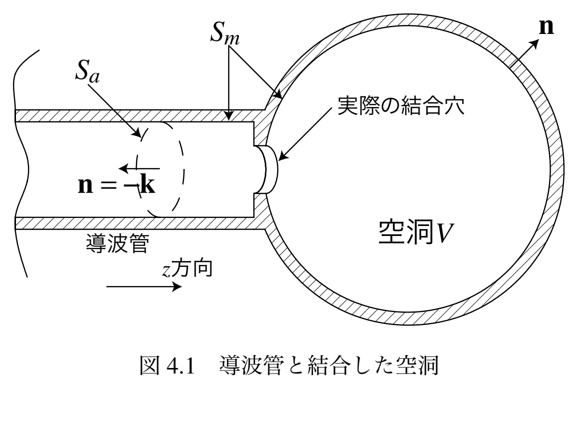

図 4.1　導波管と結合した空洞

高周波源は $z = -\infty$ にあって、角周波数 ω の単色高周波が空洞に向かって送られて来るとする。空洞内に励起されるモードは、金属面とは異なる境界条件を要求す

[*1] いわゆる well-padded RF generator

る結合孔 S_a の存在により、前節までで考えてきたような、完全に閉じた壁面で考えた固有モード $(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{h}_n)$ とは若干異なる。しかし式 (4 -1) のように結合孔が十分に小さいと仮定すれば、固有モード $(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{h}_n)$ がやはりよい近似であるので、直交関数系であるそれらで結合孔のある場合の関数を展開する。

この節の前半では電磁場を用いた結合を表す方程式を導き、後半ではその結果を等価回路による表現に発展させる。

§ 4 - 1　結合の電磁場理論

固有モード関数 $(\mathbf{e}_n,\ \mathbf{h}_n)$ は空洞 V 内部の位置の関数として次のように定義する。まず電場 $\mathbf{E}$ を展開する関数として $\mathbf{e}_n(\mathbf{r})$ を以下のように定義する。

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_n^2}{c^2}\right)\mathbf{e}_n(\mathbf{r}) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4 -2}$$

ただし、境界条件は

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{e}_n &= 0 \qquad (\text{in } V) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{e}_n &= 0 \qquad (\text{on } S) \end{aligned} \tag{4 -3}$$

であり、直交規格化関係はクロネッカーのデルタ記号を使って

$$\int_V \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_{n'}\, dV = \delta_{nn'} \tag{4 -4}$$

となるものとする。同様に磁場 $\mathbf{H}$ を展開する固有関数 $\mathbf{h}_n(\mathbf{r})$ を定義する。固有方程式、境界条件、規格化条件は次のようになる。

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega_n^2}{c^2}\right)\mathbf{h}_n(\mathbf{r}) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4 -5}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{h}_n &= 0 \qquad (\text{in } V) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_n &= 0 \qquad (\text{on } S) \end{aligned} \tag{4 -6}$$

$$\int_V \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_{n'}\, dV = \delta_{nn'} \tag{4 -7}$$

これらの固有関数はともに長さの-3/2 乗の次元 $(\mathrm{m}^{-3/2})$ をもち、また

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) &= \frac{c}{\omega_n}\nabla \times \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) \\ \mathbf{h}_n(\mathbf{r}) &= \frac{c}{\omega_n}\nabla \times \mathbf{e}_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{4 -8}$$

という対称な関係にある。これらの固有関数を用いて電場 $\mathbf{E}$、磁場 $\mathbf{H}$ を展開する。その場合、マクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{4 -9}$$

において $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$ ではなく $\nabla \times \mathbf{E}$、$\nabla \times \mathbf{H}$ を展開する。これは S_a でのオープン境界条件や有限な電気伝導度壁面の S_m で、境界面に平行な電場成分が現れることを反映させるためである。ベクトル関係式

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \tag{4 -10}$$

およびグリーンのベクトル定理

$$\begin{aligned} &\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\, dV = \\ &\quad \int_V \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}\, dV + \oint_S [\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n}\, dS \end{aligned} \tag{4 -11}$$

を援用する。そうすると

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\omega_n c}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_n^2\right)\int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n\, dV = \\ &\qquad \int_{S_m} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{h}_n\, dS + \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{h}_n\, dS \\ &-\mu_0\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_n^2\right)\int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{h}_n\, dV = \\ &\qquad \int_{S_m} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{h}_n\, dS + \int_{S_a} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{h}_n\, dS \end{aligned} \tag{4 -12}$$

という方程式が得られる。これによって結合孔 S_a や、S_m での表皮効果による $(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \neq 0$ 成分の効果を取り込むことが出来る。[19]

空洞 Q 値の逆数 $1/Q$ の 1 次近似の範囲でさらに計算を進る。ただし以下では $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}$ および $\mathbf{H}(\mathbf{r},\ t) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})e^{j\omega t}$ とし、$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$、$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r})$ について関係式を導く。

$$\begin{aligned} &\int_V \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{h}_n dV \approx \\ &\qquad \frac{j\omega}{\mu_0\left(\omega^2 - \frac{j\omega\omega'_n}{Q_n} - {\omega'}_n^2\right)}\int_{S_a}\left(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{E}}\right) \cdot \mathbf{h}_n dS \end{aligned} \tag{4 -13}$$

これで空洞内の電磁場が結合孔 S_a での入力信号の強さで表わされるようになった。ただし ω'_n は有限な Q値に

よる共振周波数のずれ

$$\omega'_n \equiv \omega_n \left(1 - \frac{1}{2Q_n}\right) \tag{4-14}$$

を表す。また Q 値は表皮厚さ

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \tag{4-15}$$

を使って

$$Q_n = \frac{2}{\delta \int_S \mathbf{h}_n^2 dS} \tag{4-16}$$

で与えられる。

さて今迄使ってきた固有モード（$\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$）は始めに定義したように $\nabla\times$ を施しても 0 にならない、すなわち循環的（rotational）なベクトル場である。空洞壁面全体が金属であればこれ以外のモードはない。しかし結合孔のような金属面でない部分があるときは非循環場（irrotational）の混入も考慮しなければならない。[20] 以下ではこれについて簡単な紹介をしておく。まず磁場に取り込む非循環モードを $\mathbf{g}_m(\mathbf{r})$ と表し、その影響を調べる。$\mathbf{g}_m(\mathbf{r})$ というベクトル場は空洞 V において

$$\begin{gathered}\nabla\times\mathbf{g}_m(\mathbf{r}) = 0\\ \left(\nabla^2 + \frac{\omega_m^2}{c^2}\right)\mathbf{g}_m(\mathbf{r}) = 0\end{gathered} \tag{4-17}$$

表面 S で

$$\mathbf{g}_m(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{4-18}$$

を満たす関数である（なおこのようなベクトル関数はあるスカラー関数の勾配となっている）。このモードにより、$\nabla\times\tilde{\mathbf{E}}$ の展開で次のような項

$$\sum_m \mathbf{g}_m \int_{S_a} \left(\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{E}}\right)\cdot\mathbf{g}_m dS \tag{4-19}$$

が出現する。これは式 (4-12) において、固有周波数 $\omega_n = 0$ とした項を追加することに相当する。結局、展開式 (4-13) は

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{H}} \approx &\sum_n \frac{j\omega\int_{S_a}\left(\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{E}}\right)\cdot\mathbf{h}_n dS}{\mu_0\left(\omega^2 - \frac{j\omega\omega'_n}{Q_n} - {\omega'}_n^2\right)}\mathbf{h}_n\\ &+ \sum_m \frac{j\int_{S_a}\left(\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{E}}\right)\cdot\mathbf{g}_m dS}{\mu_0\omega}\mathbf{g}_m\end{aligned} \tag{4-20}$$

のように改まる。

§4-2　導波管側から見た空洞の入力インピーダンス

前節の結果を敷衍し、導波管側から見た空洞の入力インピーダンスを求めよう。上に述べたように、入力波は z の正方向（単位ベクトル $\mathbf{k}$ 方向）へ向かうものとする。また、空洞の物理的な境界である小孔で発生した空間高調波が十分減衰している場所であれば、空洞結合孔 S_a の位置はさしあたりどこでも良いとしておく。そして反射波は無限遠点で整合され、再び戻ってこないものとする。

さて空洞結合孔 S_a 面上での電磁場は空洞の固有モードのものとみなすことも出来れば、導波管伝播モードのものと考えることも許される。式 (4-20) では空洞固有モードで展開した。$\mathbf{h}_n$ は定義により S_a 面に平行であり、$\tilde{\mathbf{E}}$ も同式では平行成分のみ考えればよい。そこで導波管モードで展開しても平行な、いいかえれば、$\mathbf{k}$ 方向に垂直な成分（横成分）のみを考える。

さて、結合孔における電磁場を導波管モードで記述するまえに、導波管を伝搬する波の性質の要点を、ひとまず、まとめておく。導波管を $+z$ 方向に伝わる波は横成分と縦成分に分け、さらに $(x,\ y)$ と z を変数分離し

$$\tilde{\mathbf{A}}(x,y,z) = \tilde{\mathbf{A}}_t(x,y)\,e^{-j\beta_g z} + \tilde{\mathbf{A}}_t(x,y,z)\,e^{j\beta_g z} \tag{4-21}$$

という形に書く。ここで $\tilde{\mathbf{A}}$ は電場または磁場を表し、添字 t は横成分を示す。また β_g は管内波数*2 である。導波管の電磁場理論によれば n 番目の伝搬モードの横成分について

$$Z_n\tilde{\mathbf{H}}_{t,n}(x,y) = \pm\mathbf{k}\times\tilde{\mathbf{E}}_{t,n}(x,y) \tag{4-22}$$

が成立つ。[21] この式で + 符号は $e^{-j\beta_g z}$ の形で $+z$ 方向へ伝わる波について、− 符号は $e^{j\beta_g z}$ の形で $-z$ 方向へ伝わる波に対応する。また Z_n は断面上の位置によらない定数であり、n 番目の伝搬モードの波動インピーダンス（wave impedance）を示す。具体的には真空の固有インピーダンス $\zeta_0\,(=376.73\,\Omega)$ と波数 β で、TM、TE モードそれぞれについて

$$Z = \begin{cases}\zeta_0\beta_g/\beta & (\text{TM モード})\\ \zeta_0\beta/\beta_g & (\text{TE モード})\end{cases} \tag{4-23}$$

*2 自由空間の波数 β、導波管中の該当モードの遮断波数 β_c について $\beta_g = \sqrt{\beta^2 - \beta_c^2}$

と表される。なお Z は常に正の実数である。

ここで式 (4 -22) の横成分電場、磁場を表わすための規格化関数 $\mathbf{e}_g$、$\mathbf{h}_g$ を導入しよう。なおモード番号の添字 n を以下では単に g で置き換える。これは導波管モードを空洞モードと区別して表示するためである。

$$\tilde{\mathbf{E}}_{g,t}(x,y) = \tilde{V}(z)\,\mathbf{e}_g(x,y)$$
$$\tilde{\mathbf{H}}_{g,t}(x,y) = \tilde{I}(z)\,\mathbf{h}_g(x,y) \qquad (4\text{ -24})$$

ただし、導波管断面（S_a）で

$$\int_{S_a} \mathbf{e}_g^2 dS = \int_{S_a} \mathbf{h}_g^2 dS = 1 \qquad (4\text{ -25})$$

であり、式 (4 -22) と式 (4 -25) により

$$|\mathbf{e}_g(x,y)| = |\mathbf{h}_g(x,y)| \qquad (4\text{ -26})$$

が自動的に満たされる。

式 (4 -24) で表される進行波の電圧、電流は式 (4 -23) のインピーダンスを用いて簡単な式にまとめられる。ただし以下では簡単に、導波管を伝搬するモードは一つしかないと仮定し（実際にも殆どの場合、このような状況で使われる）、その固有インピーダンスを Z_g と添字 g を付けて表す。なおアドミッタンス

$$Y_g = 1/Z_g \qquad (4\text{ -27})$$

も必要に応じて使う。そうすると $+z$ 方向および $-z$ 方向へそれぞれ伝搬する波の方程式は式 (4 -22) をもちいて

$$\tilde{V}_+(z) = Z_g \tilde{I}_+(z) \propto e^{-j\beta_g z}$$
$$\tilde{V}_-(z) = -Z_g \tilde{I}_-(z) \propto e^{j\beta_g z} \qquad (4\text{ -28})$$

と表わされる（符号にに注意）。$z=-\infty$ に信号源を持つ、無限に長い導波管、あるいは、整合された負荷で終端された導波管では、$+z$ 方向へ伝わる波だけが存在する。しかし、他方の端 (ここでは $z=0$ としよう) が必ずしも整合されているとは限らない負荷 $\tilde{Z}$ で終端されているときは、$-z$ 方向へ伝わる反射波が現れる。任意の点 z (<0) での全電圧、全電流を

$$\tilde{V}(z) = \tilde{V}_+(z) + \tilde{V}_-(z) \qquad (4\text{ -29})$$

$$\tilde{I}(z) = \tilde{I}_+(z) + \tilde{I}_-(z) \qquad (4\text{ -30})$$

とすれば

$$\tilde{V}(0) = \tilde{Z}/\tilde{I}(0) \qquad (4\text{ -31})$$

により反射波の大きさが求まる。進行波、反射波は式 (4 -28) に従ってそれぞれ進相する。従って任意の点 z (<0) でのインピーダンス（アドミッタンス）は

$$\tilde{Z}(z) = \tilde{V}(z)/\tilde{I}(z) = 1/\tilde{Y}(z) \qquad (4\text{ -32})$$

のように z の関数である。

このような準備のうえで、空洞結合孔 S_a での電磁場を次のように導波管モードで表わそう。

$$\tilde{\mathbf{E}}_t(aperture) = \tilde{V}_g \mathbf{e}_g$$
$$\tilde{\mathbf{H}}_t(aperture) = \tilde{I}_g \mathbf{h}_g \qquad (4\text{ -33})$$

ここで結合孔のある Z 位置での電圧、電流を単に $\tilde{V}_g$、$\tilde{I}_g$ と表記したが、以降でも同様とする。

さて式 (4 -32) を式 (4 -20) に代入すれば

$$\tilde{I}_g \mathbf{h}_g \approx \sum_n \frac{j\omega \tilde{V}_g \int_{S_a} (\mathbf{n}\times\mathbf{e}_g)\cdot\mathbf{h}_n dS}{\mu_0\left(\omega^2 - \frac{j\omega\omega'_n}{Q_n} - {\omega'}_n^2\right)}\mathbf{h}_n + \sum_m \frac{j\tilde{V}_g \int_{S_a}(\mathbf{n}\times\mathbf{e}_g)\cdot\mathbf{g}_m dS}{\mu_0\omega}\mathbf{g}_m \qquad (4\text{ -34})$$

のようになって、結合孔における導波管電流が、右辺で表されている同じ位置での各種空洞モードの電磁場と関係づけうる。この両辺について $\mathbf{e}_g$ とのベクトル積をつくり、それに $\mathbf{e}_g$ と $\mathbf{h}_g$ の間に成り立つ関係

$$\int_{S_a} (\mathbf{e}_g\times\mathbf{h}_g)\cdot\mathbf{k}dS = -\int_{S_a}(\mathbf{e}_g\times\mathbf{h}_g)\cdot\mathbf{n}dS = -1 \qquad (4\text{ -35})$$

および一般的なベクトル関係

$$(\mathbf{n}\times\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \qquad (4\text{ -36})$$

を適用すれば

$$\tilde{I}_g \approx -\sum_n \frac{j\omega\tilde{V}_g\left[\int_{S_a}(\mathbf{e}_g\times\mathbf{h}_n)\cdot\mathbf{n}dS\right]^2}{\mu_0\left(\omega^2 - \frac{j\omega{\omega'}_n}{Q_n} - {\omega'}_n^2\right)} - \sum_m \frac{j\tilde{V}_g\left[\int_{S_a}(\mathbf{e}_g\times\mathbf{g}_m)\cdot\mathbf{n}dS\right]^2}{\mu_0\omega}\mathbf{g}_m \qquad (4\text{ -37})$$

という結果がえられる。この式で [] 内のベクトル積の面積積分が導波管と空洞の結合強度を表わすことが以下の議論で明らかにされる。なおこのベクトル積は形式

的にはポインティング・ベクトルと同形であることが分かる。

次に式 (4 -37) が実は等価回路による表現そのものであり、従って導波管と結合した空洞の特性の解釈が大変見通し良くなることを示す。そのために、入力高周波の周波数が n 番目のモードの共振周波数に等しい場合を考えてみる。すなわち式 (4 -37) で $\omega = \omega'_n$ と置いてみる。さらに他のモードからのインピーダンスへの寄与は小さく無視出来るとする。そうすると

$$\frac{\tilde{V}_g}{\tilde{I}_g} \approx \frac{\mu_0\omega'}{Q_n}\left[\int_{S_a}(\mathbf{e}_g \times \mathbf{h}_n)\cdot \mathbf{n}dS\right]^{-2} \equiv r_n \qquad (4\text{-}38)$$

という式が得られ、空洞は共振点で純抵抗 r_n に見えることが分かった。

ここでこの抵抗 r_n を使って

$$C_n \equiv \frac{1}{\omega'_n Q_n r_n} \qquad (4\text{-}39)$$

$$L_n \equiv \frac{Q_n r_n}{\omega'_n} \qquad (4\text{-}40)$$

とする。また非循環モードについては

$$L_0 \equiv \mu_0 \Bigg/ \left\{\sum_m \left[\int_{S_a}(\mathbf{e}_g \times \mathbf{g}_m)\cdot \mathbf{n}dS\right]^2\right\} \qquad (4\text{-}41)$$

と置いてみる（C、L、r はそれぞれ容量（Farad)、誘導（Henry)、抵抗（Ohm）の次元を持つことを確かめよ)。そうすると結合孔 S_a での（導波管基本波モードについての）入力アドミッタンス $\tilde{Y}_{in}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{in} &= \frac{\tilde{I}_g}{\tilde{V}_g}\\ &= \frac{1}{j\omega L_0} + \sum_n \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_n} + r_n + j\omega L_n}\end{aligned} \qquad (4\text{-}42)$$

と表わされることが分かる。これを等価回路で表わすと図 4.2 のようになる。

この式からいくつかの実用的な結論が敷衍できる。

(1) $\omega \to 0$ では式 (4 -41) の $\sum\limits_n$ の項は ω によって殆ど変化せず一定値と見なしてよい。そこでそれを $\tilde{Y}'$ と表わせば

$$\tilde{Y}_{in} \approx \frac{1}{j\omega L_0} + \tilde{Y}' \qquad (4\text{-}43)$$

という形になる。この式は $\omega \to 0$ の極限では非循環モードによるサセプタンスが主要項であることを示している。従って最低次共振周波数のモードの Q 値が小さく、そのサセプタンス曲線の裾が $\omega \to 0$ まで延びていれば、非循環モードも無視出来なくなる。

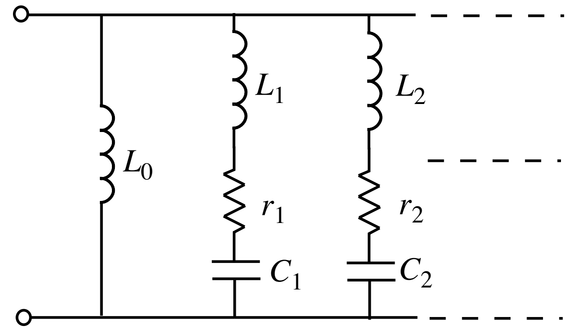

図 4.2　空洞入力アドミッタンス

(2) ある特定のモードの共振周波数近く $(\omega \approx \omega_n)$ では、そのモードにもとずいて周波数とともに急激に変化する共振項と、周波数に殆ど依らずほゞ一定の項 $\tilde{Y}'(\omega_n)$ の和で近似できる。すなわち

$$\tilde{Y}_{in} \approx \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_n} + r_n + j\omega L_n} + \tilde{Y}'(\omega_n) \qquad (4\text{-}44)$$

(3) 導波管伝播モードの固有アドミッタンス $Y_0(=1/Z_0)$、式 (4 -37) で与えられる内部 Q 値、および次式で定義される外部 Q 値

$$Q_{ext,n} \equiv Y_0\sqrt{L_n/C_n} = r_n Q_n / Z_0 \qquad (4\text{-}45)$$

を使うとを使うと式 (4 -43) は

$$\tilde{Y}_{in} \approx \frac{\frac{1}{Q_{ext,n}}}{j\left(\frac{\omega}{\omega'_n} - \frac{\omega'_n}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_n}} + \tilde{Y}'(\omega_n) \qquad (4\text{-}46)$$

という、整合された導波管という外部負荷が並列に接続された共振回路の式に帰着する。

(4) 結合孔 S_a から導波管を 1/4 波長 $(\Delta z = \pm\frac{\pi}{\beta_g})$ 前後した点で見た入力アドミッタンス $\tilde{Y}_{in}(\Delta z)$ あるいは入力インピーダンス $\tilde{Z}_{in}(\Delta z)$ は、S_a における $\tilde{Y}_{in}$、$\tilde{Z}_{in}$ と

$$\tilde{Y}_{in}(\Delta z) = \frac{1}{\tilde{Z}_{in}(\Delta z)} = \frac{Y_0^2}{\tilde{Y}_{in}} = \frac{\tilde{Z}_{in}}{Z_0^2} \qquad (4\text{-}47)$$

の関係にあることが式 (4 -31) と (4 -32) を使って示される。そうすると式 (4 -46) より

$$\tilde{Z}_{in}\left(\Delta z\right) = \frac{Z_0^2}{j\omega L_0} + \sum_n \frac{Z_0^2}{\frac{1}{j\omega C_n} + r_n + j\omega L_n} \tag{4 -48}$$

という式が得られる。ここで

$$\begin{aligned} C_0' &\equiv L_0 Y_0^2 \\ C_n' &\equiv L_n Y_0^2 \\ L_n' &\equiv C_n Y_0^{-2} \\ R_n' &\equiv r_n^{-1} Y_0^{-2} \end{aligned} \tag{4 -49}$$

という回路定数を使って式 (4 -48) に対応する回路図を描いたのが図 4.3 である。

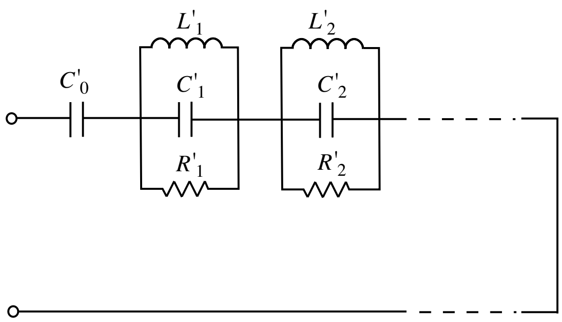

図 4.3　結合孔 S_a (図 4.1、図 4.2) から ±1/4 管内波長だけ移動した点でみた空洞等価回路

(5) 式 (4 -38) 、式 (4 -41) における $[]^2$ の項の意味を考えてみる。これが理想トランスの 1 次、2 次間巻線比に対応していること、以下で明らかにしよう。図 4.4 のようなトランスの入出力を関係づけるマトリックス $\mathbf{F}$ は

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{4 -50}$$

として

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{L_1}{M} & \frac{j\omega\left(L_1 L_2 - M^2\right)}{M} \\ \frac{1}{j\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{pmatrix} \tag{4 -51}$$

で表される。ただし L_1、L_2 はそれぞれ 1 次、2 次側のインダクタンス、M は結合インダクタンスである。巻線比 m および結合比 k はそれぞれ

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{L_1/L_2} \\ k &= M/\sqrt{L_1 L_2} \end{aligned} \tag{4 -52}$$

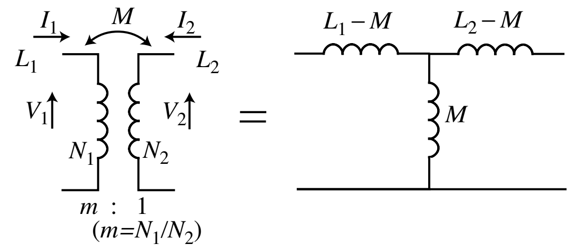

図 4.4　損失のないトランスの等価回路

で与えられるが、$k = 1$ のまま $M \to \infty$ としたのが理想トランスであり、そのマトリックスは

$$\mathbf{F}_{ideal} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1/m \end{pmatrix} \tag{4 -53}$$

と書ける。図 4.5 のように、このような理想トランスの 2 次側にインピーダンス Z_2 をつないだとき、1 次側から見たインピーダンスは $Z_1 = m^2 Z_2$ になる。すなわち

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{m^2 V_2}{I_2} = m^2 Z_2 \tag{4 -54}$$

ここで問題の $[]^2$ を調べてみよう。まず $\mathbf{e}_g$ は z

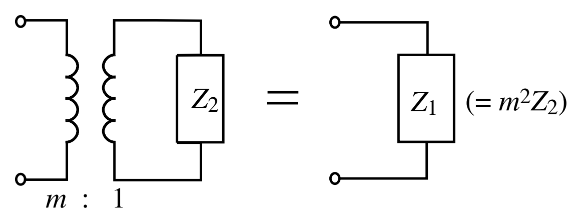

図 4.5　理想トランスにおけるインピーダンス値の変換

に依存しない、導波管断面についての規格化固有関数であり、また空洞形状とは無関係である。一方、$\mathbf{h}_n$ はで空洞体積について規格化されている関数であり、空洞と導波管との境界にある実際の小孔の大きさや形に依存している。したがって、問題の面積積分は結合孔 S_a 上における空洞磁場固有関数 $\mathbf{h}_n$ を、導波管の電場固有関数 $\mathbf{e}_g$ を物差しとして測ったものと考えられる。これがトランスの 1 次、2 次間の巻線比に相当するわけである。実際、「巻線比」を

$$\begin{aligned} m_n &= c_n \int_{S_a} \left(\mathbf{e}_g \times \mathbf{h}_n\right) \cdot \mathbf{n} dS \\ m_0 &= c_0 \sum_m \int_{S_a} \left(\mathbf{e}_g \times \mathbf{g}_m\right) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \tag{4 -55}$$

と選んでみる。ただし c_0、c_m は $[長さ]^{-1/2}$ の次元をもち、結合孔 S_a の寸法によらない適当な比例定数と仮定する。すると式 (4 -38) 〜 式 (4 -41) は

$$\begin{aligned} C'_n &= m_n^2 C_n \\ L'_n &= m_n^{-2} L_n \\ r'_n &= m_n^{-2} r_n \\ L'_0 &= m_0^{-2} L_0 \end{aligned} \tag{4 -56}$$

のように新しい回路定数 C'_n、L'_n、r'_n、L'_0 を導入して書き直すことができる。こうすると導波管への結合度が無次元数 m_n^2 と m_0^2 に繰り込まれ、空洞の回路定数がそれとは独立に与えられる。この結果、図 4.2 の回路が理想トランスを使った図 4.6 の回路に書き直せることになる。このように空洞の結合孔の働きは、結合の大きさはともかくとして理想トランスで表現できるわけである。なお m_n^{-2} は $Q_{ext,n}$ に比例することが式 (4 -45) から分かる。最後に、結合の大きさが未定のまま残っていることについて補足しておく。あるモードの回路による表現では式 (4 -56) のように 4 つの定数が必要である。ところが観測量は例えば ω'_n、Q_n、$Q_{ext,n}$ の 3 つである。従ってどれかひとつの量が不定のまま残る訳である。しかしここの議論は理想トランス回路で表わせることにあったので、これ以上踏み込まない。

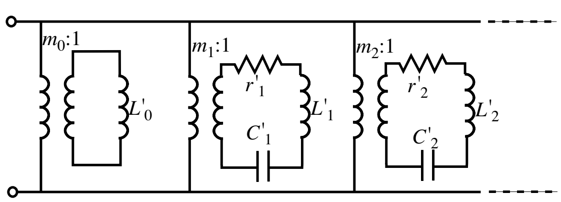

図 4.6　結合の大きさを理想トランスの巻線比で表したときの空洞の等価回路

第 5 章

ビーム・ローディング

空洞で加速あるいは減速されることによって電磁場エネルギーをやりとりするビームも空洞と結合するもう一つの外部回路とみなすことができる。無限に長い、断面一定のビームパイプを走る一個の荷電粒子が、途中で空洞を通過したとする。空洞には初め電磁場が存在しなかった場合、粒子は自身の運動エネルギーを消費することによってそこに電磁場を励起し、走り去る。この電磁場をウェーク場といい、空洞の固有モードで展開すると無数の成分を持っている。ウェーク場は、中心軸上においてその方向に電場をもつ縦ウェーク場と、直角方向の偏向力をつくる横ウェーク場の二つに大別される。前者では電磁場エネルギーとビームの運動エネルギーのやりとりが問題となるが、後者ではビームの中心軸からの偏向が問題となる。

ここでは縦ウェーク場、なかでも空洞の基底モードである加速モードの励振に限定して考察する。そのために、ビーム電流を時間的にフーリエ分解したとき、加速モードの固有周波数にほゞ一致する成分のみに注目し、高調波電流成分は空洞励振に寄与せず無視できると簡単化する。またビームは超相対論的、いいかえれば光速で走っており、空洞電磁場の影響で電流値が変わらないとする。そうするとビームが励起する電磁場は外部高周波源が作る電磁場とは独立に求められる。そして空洞内の電磁場は両者のフェーザーベクトルの和として線型的に取り扱える。ただしビームへのエネルギー移送はこのベクトル和のビームへの射影成分の大きさで決まるのであって、各ベクトル成分が独立に働くのではないことに注意しなければならない。

このような超相対論的ビーム近似は大抵の電子加速器では十分に成り立っている。しかしクライストロンの空洞のように数百 kV のビームとの相互作用が問題となる場合は、この限りではなく、複雑な数値シミュレーションが必要となる。

加速モードが外部電力源により励起されている空洞を上のように密度変調されたビームが通過しているとき、モードとビームの位相関係が適当であればモードの電磁場エネルギーがビーム加速に消費され、場の振幅が減少する。この減少をビーム・ローディング (beam loading) という。なお一般的にはビームによって任意のモードが、そのエネルギーを増減させる現象を総じてビーム・ローディングという。

この節でまず明らかにすべきことは、ビームが作る電磁場の振幅が前節までで考えてきた空洞のシャント・インピーダンスとどういう関係にあるかと云うことである。それによってビームも含めた空洞の等価回路表現が導かれる。その後、ビーム・ローディングがあるときの空洞が、導波管で接続された外部高周波源からどのように見えるかを議論しよう。

前節までは空洞の電磁場はビームのない場合のマクスウェル方程式で記述してきた。しかしビームが存在すれば、その第 2 式

$$\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

は、電流密度 $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ を右辺に置いて

$$\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \qquad (5\ \text{-}1)$$

としなければならない。ビームがあるときに式 (5 -1) のように右辺が 0 になる解を仮定すると、その振幅が無限大に発散する。これは壁損の極めて小さい超伝導空洞の場合を近似的に表現している。通常の空洞ではビームの供給する電力が、空洞壁損や導波管に流出する電力とつりあう振幅で電磁場が維持されることが以下の議論で明らかになる。なおこの状況を一般的に記述するのが次の

エネルギー保存則

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V U\,dV = \int_{S_m+S_a}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{n}\,dS+\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dV \qquad (5\text{-}2)$$

である。ここで U は電磁場エネルギーであり、$\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ はポインティング・ベクトルと呼ばれ、電磁場エネルギー流の密度を表わす。

さて電流がある場合のマクスウェル方程式

$$\nabla\times\mathbf{E}+\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0$$
$$\nabla\times\mathbf{H}-\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mathbf{J} \qquad (5\text{-}3)$$

について、式 (4 -9) 以下で行ったように、$\nabla\times\mathbf{E}$、$\nabla\times\mathbf{H}$ を直接、固有関数で展開する。すなわち式 (5 -3) を式 (4 -12) の形に変形する訳である。しかし簡単のために差当り外部結合は無いとして話を進める、すなわち、式 (4 -12) の左辺のる S_a についての面積分を省略する。式 (4 -8) の固有関数を使って変形するわけであるが、その途中で、電流に関する $\int_V \mathbf{h}_n\cdot\left(\nabla\times\tilde{\mathbf{J}}\right)dV$ という項が現れるが、それをベクトル公式

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

を使って次のように変形する。

$$\begin{aligned}&\int_V \mathbf{h}_n\cdot\left(\nabla\times\tilde{\mathbf{J}}\right)dV\\ &=\int_V \tilde{\mathbf{J}}\cdot(\nabla\times\mathbf{h}_n)\,dV+\int_V\nabla\cdot\left(\tilde{\mathbf{J}}\times\mathbf{h}_n\right)dV\\ &=\int_V \tilde{\mathbf{J}}\cdot(\nabla\times\mathbf{h}_n)\,dV+\int_S\left(\tilde{\mathbf{J}}\times\mathbf{h}_n\right)\cdot\mathbf{n}\,dS \qquad (5\text{-}4)\end{aligned}$$

ここで式の最後の表面積分であるが、空洞本体から十分離れたビームパイプ中で評価すると $\mathbf{h}_n$ は消えるので 0 と置ける。従って、これと式 (4 -8) より

$$\begin{aligned}&\int_V \mathbf{h}_n\cdot\left(\nabla\times\tilde{\mathbf{J}}\right)dV\\ &=\int_V \tilde{\mathbf{J}}\cdot(\nabla\times\mathbf{h}_n)\,dV=\frac{\omega_n}{c}\int_V\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{e}_n dV \qquad (5\text{-}5)\end{aligned}$$

と変形できる。これらの結果を使えば、電場、磁場の方程式がそれぞれ

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_n^2\right)\int_V\tilde{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{e}_n dV\\ &=-\omega_n c\int_S\left(\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{E}}\right)\cdot\mathbf{h}_n dS-\frac{\partial}{\varepsilon_0\partial t}\int_V\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{e}_n dV \qquad (5\text{-}6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_n^2\right)\int_V\tilde{\mathbf{H}}\cdot\mathbf{h}_n dV\\ &=-\frac{\partial}{\mu_0\partial t}\int_S\left(\mathbf{n}\times\tilde{\mathbf{E}}\right)\cdot\mathbf{h}_n dS+\omega_n c\int_V\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{e}_n dV \qquad (5\text{-}7)\end{aligned}$$

のように書ける。ここでビームと電場の相互作用を示す

$$\int_V\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{e}_n dV \qquad (5\text{-}8)$$

という項が新たに追加された。

さて式 (5 -6) を式 (4 -12) 直後に述べた方法で変形する。式 (4 -13) と同様に $1/Q_n$ の 1 次近似まで考えれば

$$\int_V\tilde{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{e}_n dV=\frac{j\frac{\omega}{\varepsilon_0}\int_V\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{e}_n dV}{\omega^2-\frac{j\omega_n'\omega}{Q_n}-\omega_n^2} \qquad (5\text{-}9)$$

が得られる。これからビームが励起する電場は

$$\tilde{\mathbf{E}}=\sum_n\frac{j\frac{\omega}{\varepsilon_0}\int_V\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{e}_n dV}{\omega^2-\frac{j\omega_n'\omega}{Q_n}-\omega_n^2}\mathbf{e}_n \qquad (5\text{-}10)$$

と表される。

次にビーム関数 $\tilde{\mathbf{J}}$ を具体的に与えて議論を進めるために、電子貯蔵リングのビームを単純化したモデルを使う。すなわち、加速高周波の波長 λ ごとにバンチしている貯蔵電流を、点電荷 q の粒子の列とみなす。それは空洞中心軸 $x=y=0$ に沿って光速 c で $+z$ 方向に進み、各粒子は時間間隔 $T=2\pi/\omega=\lambda/c$ で空洞を通過する。簡単のために、$t=0$ においてある点電荷が空洞中心 $z=0$ にあるとする。このとき、ビームは次のようなフーリエ級数で表される。

$$\begin{aligned}&\mathbf{J}(x,y,z,t)\\ &=\mathbf{k}I_0\delta(x)\,\delta(y)\left[1+2\sum_{m=1}^{\infty}\cos k\omega\,(t-z/c)\right] \qquad (5\text{-}11)\end{aligned}$$

ただし k は整数、$\mathbf{k}$ は z 方向の単位ベクトルとする。また直流電流 I_0 は

$$I_0=\frac{q}{T} \qquad (5\text{-}12)$$

である。なお $\delta(x)$ は距離 x で積分したときに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \qquad (5\text{-}13)$$

となるデルタ関数であるが、その次元は (長さ)$^{-1}$ である。

ここで何よりも先ず考えなければならないのは式 (5 -9) のようなビームの基本成分 $k=1$ が空洞の基本モード（$n=1$ としよう）を励振する場合である。従って以下では $\omega \approx \omega_1$ とし、また電流を単に

$$\mathbf{J}(x,y,z,t) = 2\mathbf{k}I_0\delta(x)\delta(y)\cos\omega(t-z/c) \quad (5\text{ -14})$$

として解析を進める。ここで注意しなければならないのは、電流の高周波成分は直流（平均）電流 I_0 の 2 倍であることである。[*1]

この電流のフェーザー表示は

$$\tilde{\mathbf{J}}(x,y,z) = 2\mathbf{k}I_0\delta(x)\delta(y)e^{-j\omega z/c} \quad (5\text{ -15})$$

となる。これを先ず $\omega=\omega_1$ として式 (5 -10) に代入しよう。そうすれば

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbf{E}}(x,y,z)\\
&\approx -\mathbf{e}_1(x,y,z)\frac{2I_0Q_1}{\varepsilon_0\omega_1}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_1(0,0,z)e^{-j\omega_1 z/c}dz\\
&= -\mathbf{e}_1(x,y,z)\frac{2I_0Q_1}{\varepsilon_0\omega_1}\int_{-\infty}^{\infty}e_{1,z}(z)e^{-j\omega_1 z/c}dz
\end{aligned} \quad (5\text{ -16})$$

という式が得られる。ただし軸上での $\mathbf{e}_1$ の z 成分を単に $e_{1,z}$ と表す。

ここで軸上電場を、その実数成分が最大になる位相で次のように z 方向に積分し、電圧 V_z を定義しよう。

$$\begin{aligned}
V_z &\equiv \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(0,0,z)\cdot\mathbf{k}\cos\left(\frac{\omega_1 z}{c}\right)dz\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}E_z(z)\cos\left(\frac{\omega_1 z}{c}\right)dz
\end{aligned} \quad (5\text{ -17})$$

ただし軸上電場を単 $E_z(z)$ と表記した。これに式 (5 -15) を代入すれば

$$V_z = -\frac{2I_0Q_1}{\varepsilon_0\omega_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e_{1,z}(z)\cos\left(\frac{\omega_1 z}{c}\right)dz\right]^2 \quad (5\text{ -18})$$

という、粒子が最大減速位相にあるビーム・ローディング電圧の表示が得られる。

[*1] ここではバンチは進行方向 z に長さを持たない点電荷を仮定しているが、実際の電子リングでは $q(z)=\dfrac{q_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\exp -\dfrac{z^2}{2\sigma_z^2}$ ようなガウス分布を持つ。ただし q_0 は全電荷、σ_z は rms バンチ長である。この場合、高周波電流成分は $2I_0\exp -\dfrac{z^2}{2\sigma_z^2}$ であって、I_0 より小さい

この式の右辺で平均貯蔵電流 I_0 以外の、抵抗の次元を持つ項について、もう少し調べてみる。先ず $\int_V \mathbf{e}_1^2 dV = 1$ という規格化により、$[\,]^2$ はつぎの様に変形される。

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{-\infty}^{\infty}e_{1,z}(z)\cos\left(\frac{\omega_1 z}{c}\right)dz\right]^2\\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty}E_z(z)\cos\left(\frac{\omega_1 z}{c}\right)dz\right]^2 \Bigg/ \int_V \mathbf{E}^2 dV
\end{aligned} \quad (5\text{ -19})$$

また Q 値の定義から

$$\frac{Q_1}{\omega_1} = \frac{\varepsilon_0\int_V \mathbf{E}^2 dV}{2P_{wall}} \quad (5\text{ -20})$$

式 (5 -19)、式 (5 -20) を式 (5 -18) に代入すれば

$$-\frac{V_z}{I_0} = \frac{V_z^2}{P_{wall}} \quad (5\text{ -21})$$

となるが、この右辺は最初に導入した加速器シャント・インピーダンス R_a にほかならない。結局、ビーム・ローディングによる電圧は

$$V(beam\ loading) = -R_a I_0 \quad (5\text{ -22})$$

となることが示された。なお式 (5 -17) の電圧の定義は式 (2 -11) で与えた走行時間係数も含んだものに相当するものである。

ここで次の誘導および容量を導入する。

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{R_a}{\omega_1 Q_1}\\
C_1 &= \frac{Q_1}{\omega_1 R_a}
\end{aligned} \quad (5\text{ -23})$$

式 (5 -10) を式 (5 -17) のように積分し、1 番目のモード（加速モード）以外の寄与を無視すれば、これらの回路定数を用いて

$$V = -I_0 \Bigg/ \left(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{R_a}\right) \quad (5\text{ -24})$$

という回路方程式が得られる。これは図 5.1 の回路に相当する。なお他のモードの寄与もいれれば式 (5 -10) は図 5.2 のように表わされる。

最後に、外部結合回路とビームが共存する加速空洞の等価回路について述べておく。図 4.3 に示した外部結合回路のある空洞の等価回路は、図 5.2 で与えた、ビームによる励振を表す回路と本質的に同じである。それは加速モードだけに注目しても変わらない。ただし結合のための電圧を考える場所が空洞内の壁にある結合孔か中心

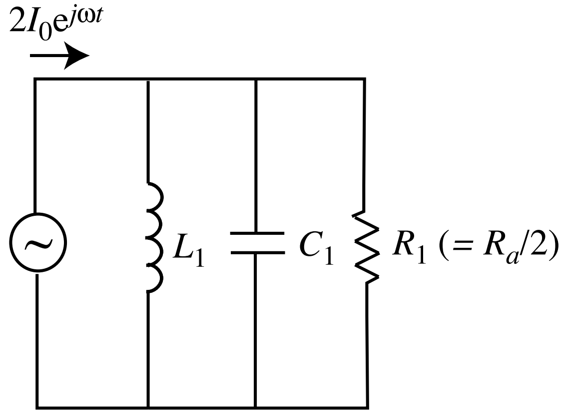

図 5.1　外部ビームで基本加速モードが励振される空洞の等価回路

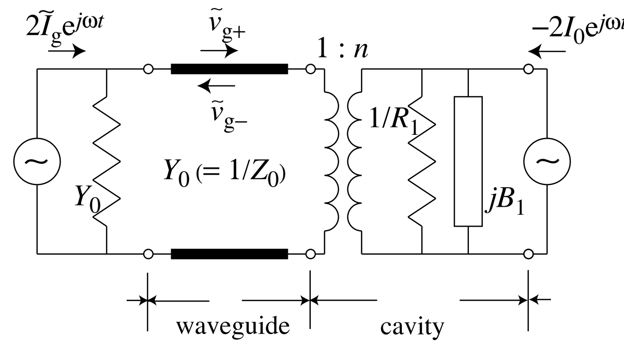

図 5.3　外部ビームおよび外部電源で基本加速モードが励振される空洞の等価回路。電流、電圧の時間変化は $e^{j\omega t}$ に従う。

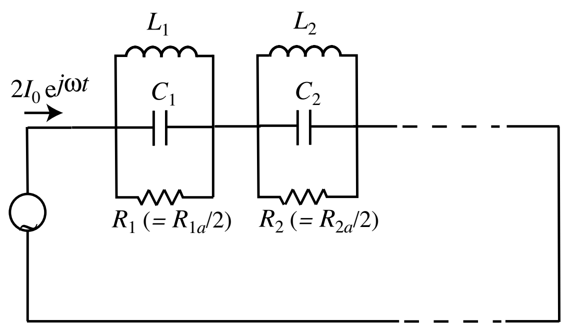

図 5.2　外部ビームですべてのモードが励振されている空洞の等価回路

軸上かの違いがあるだけである。この電圧の違いは理想トランスで置き換えられるので、実質的に加速モードだけが励振されているときの総合的な等価回路は図 5.3 ようになる。この図では、空洞のアドミッタンスを表示するのに回路論インピーダンス $R = R_a/2$ を使い、また残りのサセプタンスを

$$jB \equiv j\frac{Q_0}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega}\right) \qquad (5\text{ -}25)$$

と表している。また、導波管については、その固有アドミッタンスを _0$(=1/Z_0)$、$\pm z$ 方向への進行波の電圧を $\tilde{v}_{g\pm}$ と表す。高周波源であるクライストロンは図のように $2\tilde{i}_g$ の定電流源が固有アドミッタンスでシャントされた回路として表す。結合トランスの昇圧比（巻線比）は n である。

ここで、回路計算に便利なように、図 5.3 のトランス昇圧比を導波管側へ繰り込み、図 5.4 のように空洞のアドミッタンスを基準とした回路に変換する。新しい回路では電圧は $1/n$、アドミッタンスは n^2 倍になる。以下では導波管の固有アドミッタンスを β/R と表す、すなわち

$$\beta/R \equiv n^2 Y_0 \qquad (5\text{ -}26)$$

である。

ここで、電圧、電流を空洞と導波管の境界面 S_a で考えることにする。その点での導波管進行波の電圧を $\tilde{V}_{g\pm}(\equiv \tilde{v}_{g\pm}/n)$ とすれば、入力波電圧は定電流源の出力電流の 1/2 である $\tilde{i}_g$ と固有インピーダンスを用いて

$$\tilde{V}_{g+} = \frac{R}{\beta}\tilde{I}_g \qquad (5\text{ -}27)$$

となる。また反射波については

$$\tilde{V}_{g-} = -\frac{R}{\beta}\tilde{I}_{g-} \qquad (5\text{ -}28)$$

であり、全電圧、全電流は

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t &= \tilde{V}_{g+} + \tilde{V}_{g-}\\ \tilde{I}_t &= \tilde{I}_g \ + \ \tilde{I}_{g-}\end{aligned} \qquad (5\text{ -}29)$$

となる。

ここで反射波の電圧、電流にはビームによる寄与があり、境界点での電圧、電流を一度に解こうとすると見通しが悪い。電圧、電流はともに線型重ね合わせができるので、導波管入力のみがあるときと、ビーム励振のみがあるときの２つの場合を別々に考察し、結果を最後に合成しよう。

(1) ビーム電流 $I_0 = 0$ の場合：
式 (5 -29) で与えた電流、電圧の比は空洞アドミッ

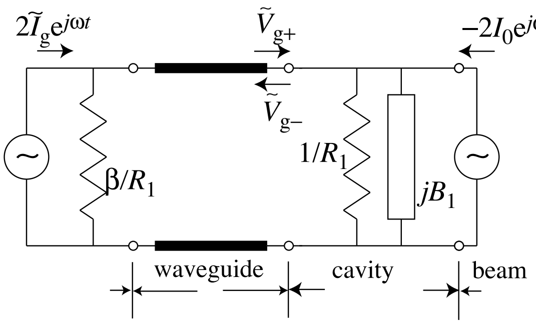

図 5.4　図 5.3 でトランス昇圧比を導波管固有アドミッタンスへ繰り込んだ場合。

タンス $jB+1/R$ に等しく、式 (5 -27) 、式 (5 -27) も使うと

$$\tilde{V}_g = \frac{2R}{1+\beta+jBR}\tilde{I}_g \qquad (5\text{ -}30)$$

が得られる。ただし全電圧 $\tilde{V}_t$ はこの場合、電力源のみによるものであるので $\tilde{V}_g$ と表した。これはさらに

$$\tilde{V}_g = V_{gr}\cos\psi\, e^{j(\psi+\theta)} \qquad (5\text{ -}31)$$

と変形できる。ここで ψ は同調角（tuning angle）と呼ばれるもので

$$\psi \equiv -\tan^{-1}\xi \qquad (5\text{ -}32)$$

ただし

$$\begin{aligned}\xi &\equiv BR/(1+\beta)\\ &= \frac{Q_1}{1+\beta}\left(\frac{\omega}{\omega_1}-\frac{\omega_1}{\omega}\right)\\ &= Q_{1L}\left(\frac{\omega}{\omega_1}-\frac{\omega_1}{\omega}\right)\end{aligned} \qquad (5\text{ -}33)$$

で定義される。ここで Q_1 の添字 L は外部負荷込みの空洞 Q 値を示すためのものである。さらに式 (5 -31) における θ は入力波の位相であるが、以下では位相標準はビームのそれと 180 度ずれたところにとる。振幅 V_{gr} は空洞がチューンしたとき ($\psi=0$) に高周波源が作る電圧であり

$$\begin{aligned}V_{gr} &= \frac{2R\left|\tilde{I}_g\right|}{1+\beta}\\ &= \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\sqrt{2RP_g}\\ &= \frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta}\sqrt{R_aP_g}\end{aligned} \qquad (5\text{ -}34)$$

となる。ここで P_g は電力源から負荷に流入する最大電力であって

$$P_g = \frac{1}{2}\frac{R}{\beta}\left|\tilde{I}_g\right|^2 \qquad (5\text{ -}35)$$

で与えられる。ここまでの関係は図 5.5 のようなフェーザーベクトル図にまとめられる。空洞電圧は原点を通る直径 V_{gr} の円上を、外部励振周波数の増加とともに反時計方向にまわる原点からのベクトルで表される。

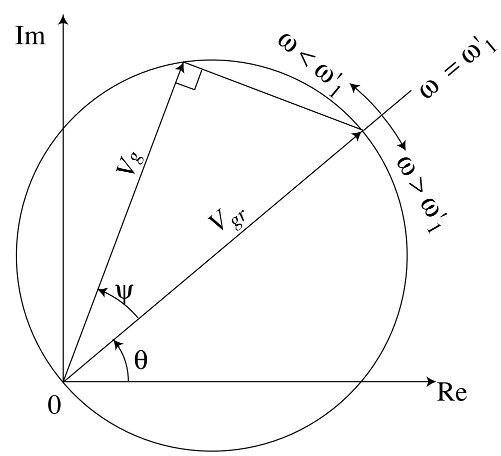

図 5.5　外部電力源がつくる空洞電圧 $\tilde{V}_g$ のベクトル図。ψ は空洞の同調角。θ は入力波の空洞入口における位相。ω は入力波の角周波数。

(2) 外部励振電力 $P_g=0$ の場合：
上と同様な手続きで、ビームが誘起する電圧 $\tilde{V}_b$ は

$$\begin{aligned}\tilde{V}_b &= -\frac{2I_0R}{1+\beta}\cos\psi e^{j\psi}\\ &= V_{br}\cos\psi e^{j\psi+j\pi}\end{aligned} \qquad (5\text{ -}36)$$

と表される。ただし

$$V_{br} = \frac{2RI_0}{1+\beta} = \frac{R_aI_0}{1+\beta} \qquad (5\text{ -}37)$$

である。

これらの結果を総合して、空洞電圧 $\tilde{V}_c$ は次のように合成される。

$$\tilde{V}_c = \tilde{V}_g + \tilde{V}_b \tag{5 -38}$$

この関係をフェーザーにまとめると図 5.6 のようなウィルソン図 [22] が出来上がる。この図で $\tilde{V}_c$ のフェーザー角を ϕ とすれば、ビームが受ける加速電圧 V_a は

$$V_a = V_c \cos\phi \tag{5 -39}$$

となり、ビームが持ち去る高周波電力 P_b は

$$P_b = I_0 V_a \tag{5 -40}$$

である。

なお β は空洞の導波管に対する結合度の目安となる量であるが、ある空洞電圧をつくるための最小の外部電力は、上の諸関係から

$$\beta = 1 + \frac{P_b}{P_c} \tag{5 -41}$$

の結合度のときであることが分かる。[22] [23] ただし

$$P_c = \frac{V_c^2}{2R} = \frac{V_c^2}{R_a} \tag{5 -42}$$

である。

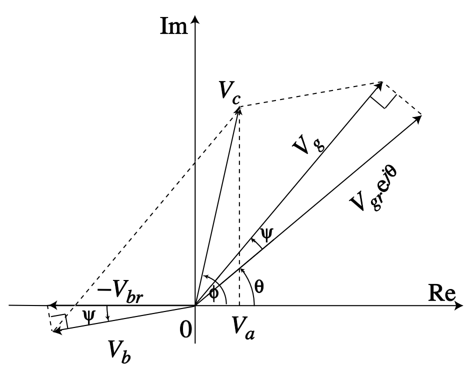

図 5.6　合成空洞電圧のフェーザー図。V_c は電圧振幅。V_a はビーム加速電圧。

参考文献

[1] J. C. Slater, *Microwave Electronics* (D. Van Nostrand, 1950).

[2] R. E. Collin, *Foundations for Microwave Engineering, 2nd. ed.* (MacGrow-Hill, 1992).

[3] TRISTAN PROJECT GROUP, *TRISTAN ELECTRON-POSITRON COLLINDING BEAM PROJECT*, KEK Report 1986-14, March 1987.

[4] E. L. Ginzton *et al* : Rev. Sci. Instrum. **19**, 89 (1948).

[5] M. Chodorow *et al* : Rev. Sci. Instrum. **26**, 134 (1955).

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, in *Mechanics, 3rd. ed.* (Pergamon Press, 1976), pp.154ff.

[7] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, in *Classical Electricity and Magnetism, 2nd. ed.* (Addison-Wesley, 1962), p.191.

[8] Y. Yamazaki *et al*, KEK Report 1980-8, 1980.

[9] 藤沢和男, 電気通信学会誌 **36-11**, 613 (1953).

[10] G. Wendt, in *Handbuch der Physik*, ed. S. Flügge, Vol. 16 (Springer, Berlin, 1958), p.140.

[11] R. M. Bevensee, *Electromagnetic Slow Wave Systems* (John Wiley and Sons, 1964).

[12] J. R. Rees, SLAC Publication, PEP Notes 255, 1976.

[13] T. Nishikawa *et al*, Rev. Sci. Instrum. **37**, 652 (1966).

[14] E. A. Knapp, in *Proc. 1965 Particle Accelerator Conference*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **12** (1965), p.118.

[15] E. A. Knapp *et al*, in *Proc. 1965 Particle Accelerator Conference*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **12** (1965), p.159.

[16] T. Kageyama *et al*, in *Proc. 1994 International Linear Accelerator Conference* (1994), p.248.

[17] V. G. Andreev, Sov. Phys. JETP **13**, 1070 (1969).

[18] S. Inagaki *et al*, in *Proc. Particle Accelerator Conference, 1983*, IEEE Trans. Nucl. Sci. **30** (1983), p.3572.

[19] J. C. Slater, in *ibid.*, p.69.

[20] F. E. Borgnis and C. H. Papas, in *Handbuch der Physik*, ed. S. Flügge, Vol.16 (Springer, Berlin, 1958), p.415.

[21] J. D. Jackson, in *Classical Electrodynamics, 3rd. ed.* (John Wiley and Sons, 1999), p.359.

[22] P. Wilson, in *Proceedings of the 9th International Conference on High Energy Accelerators, 1974* (1974), p.57.

[23] P. Wilson, *KEK Lectures on Beam Loading and Impedance Problems in* e^+e^- *Storage Rings*, KEK Internal Report KEK-ACCELERATOR-79-1, March 1980.