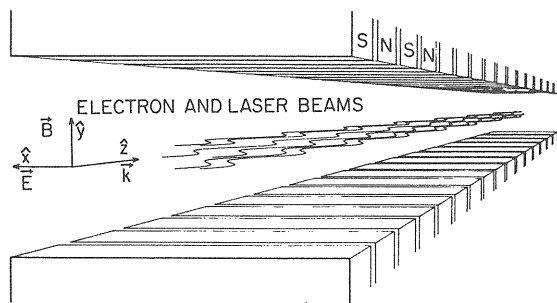


第1章 序論

自由電子レーザー (Free-Electron Laser; FEL) は第1-1図に示すように、電子ビームをウイグラー磁場即ち短い周期の交番磁場の中を通過させ、横方向に振動させることで電子ビームとともに横波で伝搬している電磁波と相互作用させ、電磁波を増幅するものである。1950年代に R.M.Phillips により波長 5mm のマイクロ波を増幅するマイクロ波増幅管として発明され、ユビトロン (Ubitron) と名付けられた。その後1975年にスタンフォード大学の J.Madey 達のグループによって波長 10.6 μm 及び 3.4 μm の赤外線を増幅と発振が行われ、自由電子レーザーなる呼称とともに世界中に衝撃を与えた。通常のレーザーと違って自由空間中で電子ビームと相互作用することで光を増幅するため、レーザー媒質から派生する制限を受けないのでその可能性が囑望され、世界中で精力的な研究が行われ現在に至っている。特に長い間実現が望まれてきたVUV領域からX線領域にかけての、短波長領域の高輝度コヒーレント光源としての可能性が期待されている。このような波長領域では反射率の高いミラーが実現できないので光共振器を使用することができず、これまで一般に行われてきたような共振器に閉じ込めた光をゲインの低いFELで徐々に増幅していく方式では不可能である。共振器を用いず電子ビームがウイグラーを1回通過するだけで、電子ビーム自身が発生する自発放射光を飽和レベルにまで一気に増幅する、SASE (self-amplified spontaneous emission) 方式のハイゲイン・シングルパスFELが最も有望であろう。実際ドイツのDESY研究所では 10nm 以下の波長のSASE/FELの準備が進められ、今年中に実証実験を始めることになった。また米国のSLAC研究所でも計画が具体化しつつある。日本におい



第1-1図 自由電子レーザーの概念図 (文献3より転載)。

てもにわかに軟X線領域のSASE/FELの開発気運が高まり、JAERI/KEKの共同研究が検討されている。このような状況のもとで、本稿はハイゲイン・シングルパス型FELの検討を念頭においてFELの基礎をできるだけ詳細に解説することを意図したものである。

ウイグラーに入射される電子ビームは横方向の交番磁場によって蛇行運動 (ウイグル運動) し、干渉性の自発放射光、いわゆるアンジュレーター光を発生する (ウイグラーはアンジュレーターとも呼ばれ、筆者は同義語として使っている)。電子が周期長 λ_w のヘリカル・ウイグラーを N_w 周期通過したときに発生する、電子1個当たりのアンジュレータ放射パワーはウイグラー軸方向に単位周波数、単位立体角当たり

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = 2 \frac{e^2 \gamma^2 N_w^2}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{a_w^2}{(1+a_w^2)^2} \times \left\{ \frac{\sin \pi N_w (\omega - \omega_R) / \omega_R}{\pi N_w (\omega - \omega_R) / \omega_R} \right\}^2 \quad (1-1)$$

である (SI単位系)。ここで ω_R はビームエネルギーとウイグラーで決まる共鳴周波数、 a_w はウイグラー磁場の規格化ベクトル・ポテンシャルである (挿入光源の分野では a_w は K と書かれ K -値と呼ばれるのが普通である)。ビーム電流 I_b なる電子ビームがスペクトル幅 $\Delta\omega/\omega$ 、立体角 $\Delta\Omega$ 内に放射する自発放射パワーは $P = (d^2W/d\omega d\Omega)(I_b/e)\Delta\omega\Delta\Omega$ であるから、 $a_w^2 \gg 1$ 、 $|(\omega - \omega_R)/\omega_R| \ll 1/N_w$ として、 $\Delta\Omega = \pi r_b^2 / N_w^2 \lambda_w^2$ とすると

$$P \approx \frac{e\pi r_b^2 I_b}{2\epsilon_0 \lambda_w^2} \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (1-2)$$

と近似される。ここで $I_b = 2\text{kA}$ 、 $r_b = 0.1\text{mm}$ 、 $\lambda_w = 3\text{cm}$ 、 $\lambda = 10\text{nm}$ 、 $\Delta\omega/\omega = 10^{-3}$ とすると $P \approx 200\text{W}$ となる。 I_b が十分大きくFELとしてのゲインが大きければ、このような自発放射光が入力光として働いて電子ビームを光の波長で密度変調するようになる。その後は第3章で述べるFEL動作によって放射光は指数関数的に増幅される。これがSASEである。上記のパワーはFELの入射光としては十分なレベルであり、SASEによるFEL動作を期待するに値するレベルである。このような自発放射からFELへの遷移過程については、

筆者の力量不足もあって本稿では触れないことにする。本稿では入射光の存在を仮定して、FEL動作そのものだけを解説する。

ウイグラーの軸方向を z 軸にとり、電子ビームは z 方向に速度 v_z で進行しているものとする。 y 方向に交番磁場を有する平面ウイグラー (planar wiggler) を考え、その周期長を $\lambda_w = 2\pi/k_w$ 、電磁波の波長を $\lambda = 2\pi/k$ とする。ウイグラー磁場により電子は横方向に $\mathbf{v}_\perp = v_\perp \cos(k_w z) \cdot \mathbf{e}_x$ なる速度で振動しながら進行するので、電磁波の電場を $\mathbf{E}_R = E_R \cos(kz - \omega t) \cdot \mathbf{e}_x$ とすると、電子と電磁波の相互作用 $-e\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_R$ は $v_z \equiv \omega/(k+k_w)$ のときに定常的となり電子ビームと電磁波の間で定常的なエネルギーの授受が行われる。 $-e$ は電子電荷である。これを FEL の共鳴条件と云う。 $-e\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_R < 0$ であれば電子のエネルギーは減少し、電磁波のエネルギーは増大する、即ち電磁波が増幅されることになる。この共鳴条件は、電子がウイグラー 1 周期間を進行する間に電磁波は $\Delta z = c\lambda_w/v_z = \lambda_w + \lambda$ だけ進行する、即ち 1 波長先に進むと云う条件になっている。電子ビームのエネルギーが十分大きい場合 ($\gamma \gg 1$) には、この共鳴条件は $\lambda = (\lambda_w/2\gamma^2)(1 + a_w^2/2)$ と近似される。ここで $a_w = eB_w/mc^2k_w$ は (mc^2/e) で規格化されたウイグラー磁場のベクトル・ポテンシャル、 B_w はウイグラー磁場強度、 $mc^2\gamma$ は電子のエネルギーである。 λ_w は cm のオーダーであるので、電子ビームのエネルギー γ を適当に選ぶことで、nm から cm に至る広い波長領域から望みの波長を選んで電磁波を増幅することができる。本稿では短波長の電磁波を念頭においているので、以後 FEL で増幅される電磁波をレーザーと呼ぶことにする。

以上のような干渉的相互作用を行うには、電子速度のバラツキが十分小さいことが要求される。電子のエネルギーに $\Delta\gamma/\gamma$ のバラツキがあると、レーザー場が z だけ進行する間に、電子の走行距離に $\Delta z = (z/\gamma^2)(\Delta\gamma/\gamma)$ だけのバラツキを生ずるので、干渉性を保つには $\Delta z < \lambda/2$ でなければならない。 $\lambda = 10\text{nm}$ 、 $z = 10\text{m}$ 、 $\gamma = 10^3$ (500MeV) としてみると $\Delta\gamma/\gamma < 0.05\%$ となり、放射場の波長が短い場合はエネルギー広がり小さい電子ビームが必要であることが分かる。なお次章で述べるように、ウイグラー中ではウイグル運動による横方向の速度成分のために実効的な γ が小さくなるので、上記の例より更に条件が厳しくなる。また、電子ビームのエミッタンスによる発散角の広

がりも v_z の広がりを生じ、干渉性を悪化させる (スモールゲイン FEL では以上の考え方でよいが、ハイゲイン FEL では $\Delta\gamma/\gamma$ に対する条件は上記と異なる)。

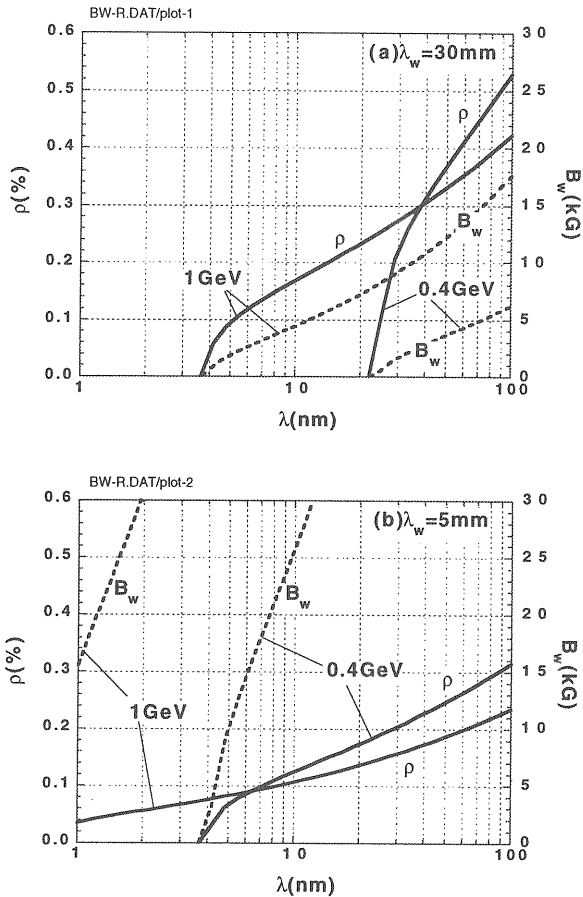
以上、平面ウイグラーと直線偏向電磁波の場合を例にとったが、螺旋状の回転磁場からなるヘリカル・ウイグラーと円偏光電磁波の場合にも同じことが成立し、共鳴条件は $\lambda \equiv (\lambda_w/2\gamma^2)(1 + a_w^2)$ となる。平面ウイグラーの場合は v_z が $\lambda_w/2$ 周期の振動成分を含むため、電磁波との平均的な相互作用の計算にベッセル関数が入ってくる等多少複雑であるので、本稿では v_z が一様とみなせるヘリカル・ウイグラーを用いた FEL に的を絞って解説する。平面ウイグラーの場合には a_w を $a_w/\sqrt{2}$ と置き換え、 a_w と E_R の積即ち相互作用の項に $J_0(\xi) - J_1(\xi)$ を掛ければよい。ここで $\xi = ka_w^2/8k_w\gamma^2\beta_z^3$ である。

第 3 章で述べるように FEL の性能はゲイン即ち FEL ピアス・パラメータ ((3-3-11)式)

$$\rho = \frac{F^{1/3}}{\gamma_0} \left(\frac{\omega_b a_w}{4ck_w} \right)^{2/3} \quad (1-3)$$

で記述される。1次元モデルではハイゲイン FEL のレーザー場のパワー成長率は $2\Gamma = 2\sqrt{3}k_w\rho$ で与えられ、干渉性を保つために要求される電子ビームのエネルギー広がり $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}} \ll \rho$ である。ここで $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}}$ はビームのエミッタンスによる電子速度のウイグラー軸方向速度成分の広がりを含む実効的な広がりである ((2-2-16)式参照)。レーザーの波長 λ を指定すると必要な λ_w 及び B_w は共鳴条件から決まる。第 1-2 図は ρ 及び B_w を λ の関数としてプロットしたグラフである。共鳴条件を満たすためには $\gamma \geq \sqrt{\lambda_w/2\lambda}$ でなければならない、 λ が小さいほど高いエネルギーが必要となる。更に電子ビームの実効的エネルギー広がりに対するトレランスを確保するために ρ が小さすぎない動作条件を選ばなければならない。実現可能な最大磁場を考慮しながら適当な動作条件を見出すことはさほど簡単ではない。第 1-2 図 (a) は $\lambda_w = 3\text{cm}$ の場合の例である。 $\lambda = 10\text{nm}$ では $E_e = 1\text{GeV}$ で $B_w = 4.5\text{kG}$ 、 $\rho = 0.18\%$ であるので、電子ビームのエネルギー広がり $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}} \ll 0.18\%$ であることが要求される。また可能な波長領域は $\lambda > 3.5\text{nm}$ である。但し 5nm 以下では $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}}$ に関するトレランスが急激に減少するので動作点として好ましくない。より短

波長とするには電子ビームのエネルギーを上げる必要があり、同時に高い B_w が必要となる。図から分かるようにエネルギーを上げるとより短波長領域のFELが可能となるが、 ρ が更に減少するので電子ビームのエネルギー広がり及びエミッタンスに対するトレランスを十分検討することが必要である。



第 1 - 2 図 ウィグラー磁場 B_w とピアス・パラメータ ρ : $I_b = 1\text{kA}$ 、 $r_b = 0.1\text{mm}$;
(a) $\lambda_w = 3\text{cm}$ 、(b) $\lambda_w = 0.5\text{cm}$ 。

電子ビームのエネルギーを上げることなくFELの波長を短くする方法として、周期長の短いウィグラーいわゆるマイクロ・ウィグラーが提案されいくつか実用化されている。しかしながら一般に小さな λ_w では必要な B_w が大きくなり、また ρ も小さくなるため実用性がかなり制限されてしまうので注意しなければならない。マイクロ・ウィグラーの例として第 1 - 2 図 (b) に $\lambda_w = 0.5\text{cm}$ とした場合を示す。この場合 $E_e = 400\text{ MeV}$ で $\lambda = 10\text{nm}$ のFELが可能であるが、必要な B_w は 27kG に達し、またゲインは $\rho = 0.12\%$ に減少す

るのでエネルギー広がりに関するトレランスがより厳しくなってしまう。以上のように、 ρ が小さくなってしまいう短波長領域のFELでは、如何にして電子ビームの $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}}$ に対するトレランスを確保するかに正否がかかってくる。その観点からはマイクロ・ウィグラーは得策とは云えない。また平面ウィグラーでは高調波が発生するので、アンジュレータ放射では短波長光の発生に利用される。同じことがFELでも可能であるが、マイクロ・ウィグラーと同じ問題を抱えているので実用性については疑問でもあり、これらについては本稿では触れない。

レーザー・ビームは回折効果によりレーレー・レンジ (Rayleigh range) より長い距離では発散してしまう。ところがシングルパス型FELでは十分なゲインを得るために、レーレー・レンジよりずっと長いウィグラーを必要とする場合が多い。それにもかかわらずFEL増幅は可能である。FEL相互作用により、電子ビームは光に対して1より大きい屈折率 n を持つ媒質としてはたらくので、レーザーは電子ビームによって常に収束されている。従ってレーザー・ビームは、回折による発散と電子ビームによる収束がつりあって平面波 (TEMモード) として伝搬することになる。これをオプティカル・ガイディング (optical guiding) と云い、シングルパスFELでは決定的に重要な概念である。レーザー・ビームのプロファイルはオプティカル・ガイディングのつりあい条件によって自動的に決まり、電子ビームのプロファイルが軸対称一様分布で近似される場合には、いわゆるベッセル・ビームとなる (ベッセル・ビームはみかけ上自己発散しないことはよく知られている)。オプティカル・ガイディング効果を考慮に入れるためにはレーザー場を3次元的に取り扱う必要があり、1次元モデルでは不足である。なお $n-1$ は ρ に比例するので、通常の光共振器を用いるようなスモールゲインFELではオプティカル・ガイディングは期待できない。

またFELの電子ビームはレーザー場を増幅しながらレーザーの波長の周期で集群していき (これをバンチングと云う)、バンチのピーク電流は飽和直前では平均電流の10倍程度に達する。このような電流密度の増大のため、ウィグラー自身の持つ自己収束力より空間電荷効果による発散力の方がはるかに強くなる場合がある。シングル・パス型のハイゲインFELでは、十分な増幅度を確保するために、ビームサイズを可能な限り小さく保つ

てビームの電流密度をできるだけ大きくする必要があるので、横方向空間電荷効果も無視できない検討事項である。

FELの解析には分散関係式による解析的な方法とシミュレーションによる解析が必要であるが、基礎理論に対する理解を深めるため本稿は分散関係式に的を絞った。分散関係式は線形近似した理論であるので、非線形性から生ずる飽和の問題を扱うことはできない。その適用範囲は飽和領域を除いたスモールゲイン領域と指数関数的成長領域である。飽和レベルはピアス・パラメーターで簡単に予測できることが、シミュレーションで確認されているのでさほど問題ではないであろう。第2章でウィグラー磁場のもとでの電子の運動を概観し、実効的エネルギー広がり $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}}$ 及びウィグラーの自己収束を解説した後、第3章で1次元モデルにおけるFELの基本方程式であるKMR方程式を導き、それを線形化することでFEL分散関係式 (dispersion relation) を導出する。更にFELの飽和、空間電荷効果、エミッタンス条件、オプティカル・ガイディングに関する定性的な考察を加える。第4章は第5章の導入部であり正準変換により電子の1次元ハミルトニアンを導き、それを用いて線形化したVlasov方程式を解くことで1次元FEL分散関係式を再定式化する。第5章では、軸平行流近似 (paraxial approximation) のもとで電子ビームに対して第4章の結果を適用し、レーザー場については3次元Maxwell方程式を適用して回折効果及びFEL相互作用が持つ光に対する収束作用を考慮に入れた、1+3次元モデルによるFEL方程式を導く。ここで得られたレーザー場の振幅に対する微積分方程式より、オプティカル・ガイディングのもとで伝搬可能なレーザー場に対する分散関係式が導かれ、その定常解が求まる。第3章は参考文献1～8及び12を、第4章及び第5章は参考文献9及び10をもとに構成し、多少筆者なりの工夫を加えた。より理解を深めたい読者は、これらの文献巻末に多数の文献リストが載っているので、それらを参照されたい。なお、本稿では特に断わらない限りCGS-ガウス単位系を採用する。所々SI単位系を用いている部分もあって、多少読みづらいかもかもしれないがご容赦願いたい。

第2章 ウィグラー磁場中の電子の運動

3-8節で述べるようにFELの性能は、電子ビームのエネルギー広がり及びエミッタンスによって生ずる、ウィグラー軸方向の速度成分 v_z の広がりによって支配される。そこで本節では電子ビームのウィグラー軸方向の速度成分がどのように記述されるかを概観する。

2-1 ヘリカルウィグラー中の電子の運動

ウィグラー軸方向に z 軸をとり、ウィグラー入り口を $z=0$ とする。 z 方向に $\lambda_w = 2\pi/k_w$ の周期性を持ち、 $\text{div}\mathbf{B}_w = 0$ 及び $\text{rot}\mathbf{B}_w = 0$ を満たすヘリカルウィグラー (helical wiggler) 磁場のベクトルポテンシャル \mathbf{A}_w は

$$\mathbf{A}_w = -A_w \left\{ \cosh(k_w y) \cos(k_w z) \cdot \mathbf{e}_x - \cosh(k_w x) \sin(k_w z) \cdot \mathbf{e}_y \right\} \quad (2-1-1)$$

で与えられる。これは互いの位相を 90° ずらせ直交するように配置した2つの平面ウィグラー (planar wiggler) により構成されるヘリカルウィグラーを表している。これから導かれるウィグラー磁場 $\mathbf{B}_w = \text{rot}\mathbf{A}_w$ は

$$(\mathbf{B}_w)_x = -k_w A_w \cosh(k_w x) \cos(k_w z) \quad (2-1-2)$$

$$(\mathbf{B}_w)_y = k_w A_w \cosh(k_w y) \sin(k_w z) \quad (2-1-3)$$

$$(\mathbf{B}_w)_z = k_w A_w \left\{ \sinh(k_w x) \sin(k_w z) + \sinh(k_w y) \cos(k_w z) \right\} \quad (2-1-4)$$

となる。以下放射場との相互作用を無視し、ウィグラー磁場による電子軌道を考察する。

上記のヘリカル・ウィグラー磁場は軸上近似 ($x=y=0$) では

$$\mathbf{A}_w = -A_w \left\{ \cos(k_w z) \cdot \mathbf{e}_x - \sin(k_w z) \cdot \mathbf{e}_y \right\} \quad (2-1-5)$$

$$\mathbf{B}_w = -B_w \left\{ \cos(k_w z) \cdot \mathbf{e}_x - \sin(k_w z) \cdot \mathbf{e}_y \right\} \quad (2-1-6)$$

$$B_w = k_w A_w \quad (2-1-7)$$

となる。(2-1-6)式の \mathbf{B}_w のもとでの電子軌道は $m\gamma d\mathbf{v}/dt = -(e/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}_w$ 、即ち

$$\frac{dv_x}{dz} = \frac{ca_w}{\gamma} k_w \sin(k_w z) \quad (2-1-8)$$

$$\frac{dv_y}{dz} = \frac{ca_w}{\gamma} k_w \cos(k_w z) \quad (2-1-9)$$

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{ca_w}{\gamma v_z} k_w \{v_x \sin(k_w z) + v_y \cos(k_w z)\} \quad (2-1-10)$$

を解くことで簡単に求められ

$$v_x = -(ca_w / \gamma) \cos(k_w z) \quad (2-1-11)$$

$$v_y = (ca_w / \gamma) \sin(k_w z) \quad (2-1-12)$$

$$v_z^2 = c^2 \left\{ 1 - (1 + a_w^2) / \gamma^2 \right\} \quad (2-1-13)$$

となる。ここで a_w はウィグラー磁場の規格化ベクトルポテンシャル

$$a_w = eA_w / mc^2 = eB_w / mc^2 k_w \quad (2-1-14)$$

である。(2-1-11)、(2-1-12)式は半径

$$r_w = \frac{a_w}{\gamma \beta_z k_w} = \frac{a_w \lambda_w}{2\pi \gamma \beta_z} \quad (2-1-15)$$

の螺旋運動を表し、その変位は

$$x = -r_w \sin(k_w z) + x_\beta \quad (2-1-16)$$

$$y = -r_w \cos(k_w z) + y_\beta \quad (2-1-17)$$

である。ここで (x_β, y_β) は螺旋運動の中心である。 r_w の大きさは、 $a_w = 3$ 、 $\lambda_w = 6\text{cm}$ ($\lambda = 33.3\text{nm}$)、 $T = mc^2(\gamma - 1) = 1.5\text{GeV}$ ($\gamma = 3000$) とすると $r_w = 9.5\mu\text{m}$ となる。従って $\gamma \gg 1$ では一般に電子ビームのビームサイズ (半径) r_b に比べて十分小さい $r_w \ll r_b$ と考えて良い。

次に A_w が (2-1-1)式で表される場合の電子軌道を求める。ここで軸上近似の解 (2-1-16)、(2-1-17)式より $x_\beta(z)$ 、 $y_\beta(z)$ 、 $v_{z\beta}(z)$ が z とともにゆっくり変化するものとして

$$x = -r_w \sin(k_w z) + x_\beta(z) \quad (2-1-18)$$

$$y = -r_w \cos(k_w z) + y_\beta(z) \quad (2-1-19)$$

$$v_z = v_{z0} + v_{z\beta}(z) \quad (2-1-20)$$

$$v_{z0} = c \sqrt{1 - \frac{1 + a_w^2}{\gamma}} \quad (2-1-21)$$

なる形の解を探す。 $k_w x \ll 1$ 、 $k_w y \ll 1$ として x 、 y について 1 次近似すると、運動方程式 $dv/dz = -(e/mc\gamma v_z) \mathbf{v} \times \mathbf{B}_w$ は次のようになる。

$$\frac{dv_x}{dz} = \frac{eA_w k_w}{mc\gamma v_z} \left[v_z \sin(k_w z) - k_w v_y \{x \sin(k_w z) + y \cos(k_w z)\} \right] \quad (2-1-22)$$

$$\frac{dv_y}{dz} = \frac{eA_w k_w}{mc\gamma v_z} \left[v_z \cos(k_w z) + k_w v_x \{x \sin(k_w z) + y \cos(k_w z)\} \right] \quad (2-1-23)$$

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{eA_w k_w}{mc\gamma v_z} \{v_x \sin(k_w z) + v_y \cos(k_w z)\} \quad (2-1-24)$$

(2-1-18)、(2-1-19)式を代入し、 $z - \lambda_w/2 \sim z + \lambda_w/2$ 間で平均すると

$$\left\langle \frac{dv_x}{dz} \right\rangle_z = -\frac{1}{2} v_z r_w^2 k_w^4 \left(x_\beta - \frac{2}{k_w} \frac{dy_\beta}{dz} \right) \quad (2-1-25)$$

$$\left\langle \frac{dv_y}{dz} \right\rangle_z = -\frac{1}{2} v_z r_w^2 k_w^4 \left(y_\beta + \frac{2}{k_w} \frac{dx_\beta}{dz} \right) \quad (2-1-26)$$

$$\left\langle \frac{dv_z}{dz} \right\rangle_z = 0$$

ここで $(dx_\beta/dz, dy_\beta/dz) \ll (k_w x_\beta, k_w y_\beta)$ より右辺の $x'_\beta (= dx_\beta/dz)$ 、 $y'_\beta (= dy_\beta/dz)$ は無視することができる。また $\langle \dots \rangle_z$ は

$$\langle f(z) \rangle_z = \frac{1}{\lambda_w} \int_{z - \lambda_w/2}^{z + \lambda_w/2} f(z') dz' \quad (2-1-27)$$

を意味する。一方、(2-1-18)、(2-1-19)式の x 、 y より

$$\left\langle \frac{dv_x}{dz} \right\rangle_z = v_z x''_\beta \quad (2-1-28)$$

$$\left\langle \frac{dv_y}{dz} \right\rangle_z = v_z y''_\beta \quad (2-1-29)$$

$$\left\langle \frac{dv_z}{dz} \right\rangle_z = v'_{z\beta}$$

であるから、(2-1-25)式と(2-1-28)式、(2-1-26)式と(2-1-29)式がそれぞれ等しいと置いて

$$x''_\beta = -k_\beta^2 x_\beta \quad (2-1-30)$$

$$y''_\beta = -k_\beta^2 y_\beta \quad (2-1-31)$$

$$v'_{z\beta} = 0$$

$$k_\beta = k_{\beta 0} \equiv \frac{a_w k_w}{\sqrt{2} \gamma \beta_z} \quad (2-1-32)$$

を得る。この結果はバイファイラー巻ヘリカル・ウイグラーの場合にもそのまま成立する（文献 15 及び補足 A 参照）。即ちウイグラーは自己収束力を持っていて、ウイグラー中を z 方向に進む電子は、 (x_β, y_β) で決まるベータートロン運動をしながら、その回りを半径 r_w の螺旋運動（これをウイグル運動と呼ぶ）をする。ちなみに、 $a_w = 3$ 、 $\lambda_w = 6\text{cm}$ 、 $\gamma = 3000$ とすると、ベータートロン波長 $\lambda_{\beta 0} = 2\pi/k_{\beta 0}$ は 84.9m である。また、外部収束力及び空間電荷効果による発散力を考慮すると k_β^2 はそれらを加えたものになる。

2-2 電子の z 方向速度

本節では、外部収束力、空間電荷効果による発散力及び自己磁場による収束力を考慮に入れて、 v_z の広がり及びウイグラー中の平衡ビームサイズを考える。シングル・パス型のハイゲイン FEL では、横方向空間電荷効果による発散力の方がウイグラーの自己収束力よりはるかに強くなる場合がある。そこでウイグラー中でのベータートロン振動を考えるとときには、このような発散力も考慮に入れるておく必要がある。

電子の運動は (2-1-18)、(2-1-19) 式で近似できるように、ウイグル運動とベータートロン振動が重畳している。振幅を X、Y としてベータートロン振動による変位は (2-1-30)、(2-1-31) 式に空間電荷効果による発散力 $k_{sp}^2 x_\beta$ 及び付加的な外部収束力を加えて

$$x_\beta \equiv X \cos(k_\beta z + \phi_x) \quad (2-2-1)$$

$$y_\beta \equiv Y \cos(k_\beta z + \phi_y) \quad (2-2-2)$$

で与えられる。ここで k_β はベータートロン振動の波数

$$k_\beta = \sqrt{k_{\beta 0}^2 + k_e^2 - k_{sp}^2} \ll k_w \quad (2-2-3)$$

であり、 $k_{\beta 0}^2$ はウイグラーの自己収束力、 k_e^2 は付加的な外部収束力、 k_{sp}^2 は空間電荷及び自己磁場による発散力である。外部収束力の強さは x、y 方向とも同じとした。電子の z 方向の速度 $\beta_z = v_z/c$ は r_w^2/γ^2 、 X^2/γ^2 及び Y^2/γ^2 を無視して $\beta_z^2 = \beta^2 - (\beta_x^2 + \beta_y^2)$ より

$$\beta_z = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right\} \quad (2-2-4)$$

と近似できる。(2-1-18) 及び(2-1-19) 式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 &= r_w^2 k_w^2 \cos^2(k_w z) \\ &\quad - 2r_w k_w \cos(k_w z) x'_\beta + x_\beta'^2 \end{aligned} \quad (2-2-5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 &= r_w^2 k_w^2 \sin^2(k_w z) \\ &\quad + 2r_w k_w \sin(k_w z) y'_\beta + y_\beta'^2 \end{aligned} \quad (2-2-6)$$

x_β 、 y_β は z とともにゆっくりと変化するので、z についてウイグラー 1 周期の間 $\Delta z = 2\pi/k_w$ で平均すると

$$\left\langle \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right\rangle_z = \frac{r_w^2 k_w^2}{2} + x_\beta'^2 \quad (2-2-7)$$

$$\left\langle \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right\rangle_z = \frac{r_w^2 k_w^2}{2} + y_\beta'^2 \quad (2-2-8)$$

ここでベータートロン位相 ϕ_x 、 ϕ_y は一様に分布しているとして、右辺の $x_\beta'^2$ 、 $y_\beta'^2$ はそれぞれ $(k_\beta x_\beta)^2$ 、 $(k_\beta y_\beta)^2$ と置き換えて良いであろう。これらを (2-2-4) 式に代入し、 β_z の λ_w 間の平均を $\langle \beta_z \rangle_z = \hat{\beta}_z$ と書いて

$$\hat{\beta}_z = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} \left\{ k_w^2 r_w^2 + k_\beta^2 (x_\beta^2 + y_\beta^2) \right\} \quad (2-2-9)$$

となる。ここで x_β^2 、 y_β^2 のビーム平均を

$$\langle x_\beta^2 \rangle = \langle y_\beta^2 \rangle = r_b^2 \quad (2-2-10)$$

とし、また γ のビーム平均を γ_0 として

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma \quad (2-2-11)$$

と置くと、 $\hat{\beta}_z$ 及びそのビーム平均 $\hat{\beta}_{z0}$ は

$$\hat{\beta}_{z0} = 1 - \frac{1+a_w^2}{2\gamma_0^2} - k_\beta^2 r_b^2 \quad (2-2-12)$$

$$\hat{\beta}_z = \hat{\beta}_{z0} + \frac{1+a_w^2}{\gamma_0^2} \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} - \frac{k_\beta^2}{2} (x_\beta^2 + y_\beta^2 - 2r_b^2) \quad (2-2-13)$$

となる。即ち、有限エミッタンスの場合はビーム

の発散角により $\hat{\beta}_{z0}$ が減少し、実効的な γ が減少したことに等価になる。

ここで後のために $\hat{\beta}_z$ の広がりによって実効的なエネルギー広がり (effective energy-spread) を定義しておく。エミッタンスによる $\hat{\beta}_{z0}$ のシフトは

$$\delta\beta_z = -k_\beta^2 r_b^2 \quad (2-2-14)$$

であり、これは

$$\left(\frac{\delta\gamma}{\gamma_0}\right)_{\text{shift}} = -\frac{\gamma_0^2}{1+a_w^2} k_\beta^2 r_b^2 \quad (2-2-15)$$

なる γ_0 のシフトに等価である。また $\hat{\beta}_z$ の広がり (2-2-13) 式右辺の第2項、第3項で与えられる。そこで $\Delta\gamma$ を γ_0 の広がり幅 (rms) として実効的な γ の広がりを

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)_{\text{eff}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)^2 + \left(\gamma_{z0}^2 \frac{\varepsilon^2}{r_b^2}\right)^2} \quad (2-2-16)$$

で定義することができ、 $\hat{\beta}_z$ の広がり

$$(\Delta\beta_z)_{\text{rms}} \equiv \frac{1}{\gamma_{z0}^2} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)_{\text{eff}} \quad (2-2-17)$$

と書くことができる。ここで

$$\varepsilon = k_\beta r_b^2 \quad (2-2-18)$$

は電子ビームの rms エミッタンスであり

$$\begin{aligned} \gamma_{z0} &= 1/\sqrt{1-\beta_{z0}^2} \\ &= \gamma_0/\sqrt{1+a_w^2} \\ &\equiv \sqrt{k/2k_w} \end{aligned} \quad (2-2-19)$$

である。また $\langle x_\beta^2 + y_\beta^2 - 2r_b^2 \rangle_{\text{rms}} = 2r_b^2$ を用いた。

$r_b = \sqrt{\varepsilon/k_\beta}$ はエミッタンス ε を持つ電子ビームのウイグラー中での平衡ビーム半径である。従ってビームサイズを小さくするために強い外部収束力を加えてベータートロン波長 λ_β を短くすると、 $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}}$ が大きくなるので注意が必要である。

注：本稿ではエミッタンス ε を Courant-Snyder 不変量 W によって $\pi\varepsilon = W = x_\beta^2(z) + x_\beta'^2(z)/k_\beta^2$ で定義する。円形断面のビームを仮定し、振幅 x_β 及び y_β の rms 期待値を r_b と置くと、ビームの rms エミッタンスは

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = k_\beta r_b^2 \equiv \varepsilon$$

で与えられる (但し $\langle x_\beta^2 \rangle = \langle y_\beta^2 \rangle = r_b^2$ である)。

第3章 1次元FELモデル (KMR方程式)

本章では、Kroll-Morton-Rosenbluthによって定式化された1次元近似のもとでのFELの基本方程式、いわゆるKMR方程式を導き、FELの基本的な性質を考察する。KMR方程式はウィグラーの磁場 \mathbf{B}_w 、電子の運動量 $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ およびレーザー場の電磁場 \mathbf{E}_R 、 \mathbf{B}_R が (x,y) に依存せず、 (z,t) のみの関数であるとして導かれた電子の運動方程式と、Maxwell 方程式から導かれたレーザー場の振幅に関する方程式がセットになった、1次元FEL方程式である。1次元では強いてハミルトニアンを用いずとも、電子に関する運動方程式を作れるが、rf-バケツの概念を説明するため及び第3章以降のVlasov方程式による取扱いの予備知識として、ハミルトンの運動方程式から導くことにした。ハミルトンの運動方程式はローレンツ力のもとでの相対論的運動方程式 $d\mathbf{p}/dt = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ と同じものであり、それを解くことと全く同じことである。

3-1 KMR方程式の導出

1次元近似したウィグラー磁場 \mathbf{B}_w のベクトル・ポテンシャル \mathbf{A}_w は第2章の(3-1-5)式で与えられるものとする。レーザー場は平面波であると仮定し、そのベクトル・ポテンシャル \mathbf{A}_R は

$$\mathbf{A}_R(z,t) = A_R(z) \left[\cos\{k_w z - \omega t + \phi(z)\} \cdot \mathbf{e}_x - \sin\{k_w z - \omega t + \phi(z)\} \cdot \mathbf{e}_y \right] \quad (3-1-1)$$

で与えられるものとする。クーロン・ゲージを想定し、電子ビーム自身が発生する (x,y) 方向の電場（横方向空間電荷場）及び自己磁場を無視すると、電子の1粒子ハミルトニアン H 及び \mathbf{A}_R に対する Maxwell 方程式は次式で与えられる。

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + \{c\mathbf{P} + e(\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_R)\}^2} - e\Phi \\ = mc^2 \gamma - e\Phi \quad (3-1-2)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}_R = -\frac{4\pi}{c} (j_x \mathbf{e}_x + j_y \mathbf{e}_y) \quad (3-1-3)$$

\mathbf{P} は正準運動量 (canonical momentum) であり、力学的運動量は $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = \mathbf{P} + (e/c)(\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_R)$ である。クーロン・ゲージを仮定し $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi$ は電子ビームの空間電荷場であるとする。

注：KMR方程式は、(3-1-10)式で定義される ψ を用いて (ψ, γ) を正準変数 (canonical variable) に選び、(3-1-2)式のハミルトニアン $H(z, \mathbf{P}; t)$ から正準変換 (canonical transformation) して得られるハミルトニアン $K(\psi, \gamma; z)$ に対するハミルトンの運動方程式として導かれる (ψ, γ) の運動方程式であるが、本節では物理的イメージを明確にするため(3-1-2)式の H から直接KMR方程式を導出することにする。正準変換は第4章で行う。

空間電荷場に対して1次元モデル $\mathbf{E} = E_z(z,t)\mathbf{e}_z$ 、 $\Phi = \Phi(z,t)$ を仮定すると、ハミルトンの運動方程式

$$dP_x/dt = -\partial H/\partial x = 0 \quad (3-1-4)$$

$$dP_y/dt = -\partial H/\partial y = 0 \quad (3-1-5)$$

より正準運動量 P_x 、 P_y は運動の定数となるので $P_x = P_y = 0$ とする。従って

$$p_x = \frac{e}{c} (A_w + A_R)_x \quad (3-1-6)$$

$$p_y = \frac{e}{c} (A_w + A_R)_y \quad (3-1-7)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{e^2}{mc^2 \gamma} \frac{\partial (A_w + A_R)^2}{\partial z} + e \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3-1-8)$$

を得る。ここで

$$\Phi_p = -\frac{e}{mc^2 \gamma} A_w A_R \cos \psi \quad (3-1-9)$$

で Φ_p を定義する。 Φ_p はポンドロモティブ・ポテンシャル (ponderomotive potential) と呼ばれ、その位相 ψ は

$$\psi = (k_w + k)z - \omega t + \phi \quad (3-1-10)$$

である。 A_R^2 及び $A_R d\gamma/dt \sim O(A_R^2)$ を無視し、 A_R について1次近似の範囲で考えると

$$\frac{dp_z}{dt} \equiv \frac{\partial (e\Phi_p + e\Phi)}{\partial z} \quad (3-1-11)$$

と近似でき、ポテンシャル Φ_p 及び Φ によって電子の z 方向の運動が決まることが云える。

$|\Phi_p| \gg |\Phi|$ の場合は空間電荷ポテンシャル Φ が無視でき、電子とレーザー場 \mathbf{A}_R の相互作用はポンドロモーティブ・ポテンシャル Φ_p で決まる。この場合をコンプトン FEL と云う。一方 $|\Phi_p| < |\Phi|$ の場合をラマン FEL と云い空間電荷ポテンシャルが支配的となる。

次に独立変数を時間 t の代わりにウイグラー入口からの距離 z に変え、 dp_z/dt についての (3-1-8) 式を γ についての方程式に書き変える。

$m^2 c^2 (\gamma^2 - 1) = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ の両辺を z で微分して $dp_z/dz = v_z^{-1} dp_z/dt$ 、 $p_z = m\gamma v_z$ を用いると

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{2m^2 c^2 \gamma} \frac{d(p_x^2 + p_y^2)}{dz} + \frac{1}{mc^2} \frac{dp_z}{dt}$$

これに (2-1-6)、(2-1-7)、(2-1-8) 式を代入して

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{e^2}{2mc^4 p_z} \left\{ \frac{d(\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_R)^2}{dt} - v_z \frac{\partial(\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_R)^2}{\partial z} \right\} \quad (3-1-12)$$

を得る。 \mathbf{A}_w 、 \mathbf{A}_R が x 、 y に依存しないため

$$\frac{d(\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_R)^2}{dt} = \left(v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) (\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_R)^2$$

更に $\partial\psi/\partial t = -\omega$ より (3-1-12) 式は

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{ka_R a_w}{\gamma \hat{\beta}_z} \sin \psi + \frac{e}{mc^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3-1-13)$$

となる。ここで a_R はレーザー場の規格化ベクトル・ポテンシャル

$$a_R = eA_R / mc^2 \quad (3-1-14)$$

及び $\hat{\beta}_z = v_z / c$ である。

次に ψ についての方程式を考える。(2-1-10) 式右辺の t は z の関数 ($t = t_0 + \int_0^z dz' / v_z(z')$) であるので、 z についての微分方程式に書き変える。(3-1-10) 式の両辺を z で微分して

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w + k - \frac{k}{\hat{\beta}_z} + \frac{d\phi}{dz} \quad (3-1-15)$$

を得る。

(3-1-13) 式及び (3-1-15) 式が求めている KMR 方程式の内、電子に関する方程式である。電子の運動を数値的に追跡するシミュレーション計算には

このまま使えるが、 γ 及び $\hat{\beta}_z = p_z / mc\gamma$ が (3-1-6)、(3-1-7)、(3-1-8) 式を通して A_R の関数であるので、解析的計算には不便なので、 $a_R \ll a_w$ であることから a_R について 2 次以上の項を無視して近似を行う。

$$\hat{\beta}_z = \sqrt{1 - \frac{1 + a_w^2}{\gamma^2}} \quad (3-1-16)$$

で $\hat{\beta}_z$ を定義すると、 a_R について 1 次までの近似で

$$\beta_z^2 = \hat{\beta}_z^2 \left(1 - \frac{2a_R a_w}{\gamma^2 \hat{\beta}_z^2} \right) \quad (3-1-17)$$

となり

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{ka_R a_w}{\gamma \hat{\beta}_z} \sin \psi + \frac{e}{mc^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3-1-18)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w + k - \frac{k}{\hat{\beta}_z} - \frac{ka_R a_w}{\gamma^2 \hat{\beta}_z^3} \cos \psi + \frac{d\phi}{dz} \quad (3-1-19)$$

と近似される。ここで $k = \omega / c$ である。簡単のためウイグラー磁場を (2-1-5)、(2-1-6) 式で与えたが、上の方程式を導く過程で必要なことは、 $\mathbf{A}_w(z)$ 、 $\mathbf{A}_R(z, t)$ が z 成分を持たず、座標 (x, y) に依存しないと云う性質、即ち 1 次元モデルの仮定だけであった。従ってウイグラー磁場の振幅 $B_w(z)$ 及び周期 (の逆数 $k_w(z)$) が z とともに変化していても、即ち

$$\mathbf{A}_w = -A_w(z) \left\{ \cos \left(\int k_w(z) dz \right) \cdot \mathbf{e}_x + \sin \left(\int k_w(z) dz \right) \cdot \mathbf{e}_y \right\} \quad (3-1-20)$$

$$\mathbf{B}_w = B_w(z) \left[\cos \left\{ \int k_w(z) dz + b(z) \right\} \cdot \mathbf{e}_x + \sin \left\{ \int k_w(z) dz + b(z) \right\} \cdot \mathbf{e}_y \right] \quad (3-1-21)$$

であっても、上の KMR 方程式は成立する。但し

$$B_w(z) = \sqrt{\{k_w(z) A_w(z)\}^2 + \{dA_w(z)/dz\}^2} \quad (3-1-22)$$

$$b(z) = \tan^{-1} \left[\{dA_w(z)/dz\} / \{k_w(z) A_w(z)\} \right] \quad (3-1-23)$$

である。

次にレーザー場に対する方程式を求める。(3-1-1) 式の $\mathbf{A}_R(z, t)$ を Maxwell 方程式 (3-1-3) 式に代入し、振幅 $A_R(z)$ 、位相 $\phi(z)$ は z についてゆっくり変化するものとして、 $\mathbf{A}_R(z, t)$ の 1 周期の時間 $\Delta t = 2\pi / \omega$ で平均すると次式を得る。

$$\left\{ \frac{d^2 A_R}{dz^2} - A_R \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 - 2kA_R \frac{d\phi}{dz} \right\}$$

$$= -\frac{2\omega}{c} \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} \left\{ j_x \cos(kz - \omega t + \phi) - j_y \sin(kz - \omega t + \phi) \right\} dt \quad (3-1-24)$$

$$\left\{ 2 \frac{dA_R}{dz} \left(k + \frac{d\phi}{dz} \right) + A_R \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right\}$$

$$= \frac{2\omega}{c} \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} \left\{ j_x \sin(kz - \omega t + \phi) + j_y \cos(kz - \omega t + \phi) \right\} dt \quad (3-1-25)$$

ここで個々の電子の座標を (x_j, y_j, z_j) とし、電流密度 j の x, y 成分は

$$j_{x,y} = -e \sum_j \frac{p_{jx,y}}{m\gamma_j} \delta(x - x_j(t)) \delta(y - y_j(t)) \delta(z - z_j(t)) \quad (3-1-26)$$

で与えられる。添字の j は電子の番号である。これより (3-1-24) 式及び (3-1-25) 式の両辺を (x, y) で積分すると

$$\iint dx dy \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} j_{x,y} \left\{ \begin{array}{l} \cos(kz - \omega t + \phi) \\ \sin(kz - \omega t + \phi) \end{array} \right\} dt$$

$$= -e \sum_j \frac{p_{jx,y}}{P_{jz}} \left\{ \begin{array}{l} \cos(kz_j - \omega t(z_j) + \phi(z_j)) \\ \sin(kz_j - \omega t(z_j) + \phi(z_j)) \end{array} \right\}$$

$$= -\sigma_b \frac{2\pi}{\omega} j_0 \left\langle \frac{p_{x,y}}{p_z} \left\{ \begin{array}{l} \cos(kz - \omega t + \phi) \\ \sin(kz - \omega t + \phi) \end{array} \right\} \right\rangle$$

より

$$\left\{ \frac{d^2 A_R}{dz^2} - A_R \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 - 2kA_R \frac{d\phi}{dz} \right\}$$

$$= F \frac{4\pi}{c} j_0 \left\langle \frac{p_x}{p_z} \cos(kz - \omega t + \phi) - \frac{p_y}{p_z} \sin(kz - \omega t + \phi) \right\rangle \quad (3-1-27)$$

$$\left\{ 2 \frac{dA_R}{dz} \left(k + \frac{d\phi}{dz} \right) + A_R \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right\}$$

$$= -F \frac{4\pi}{c} j_0 \left\langle \frac{p_x}{p_z} \sin(kz - \omega t + \phi) - \frac{p_y}{p_z} \cos(kz - \omega t + \phi) \right\rangle \quad (3-1-28)$$

を得る。ここで $\langle \dots \rangle$ は A_R の一周期間内の電子に関するアンサンブル平均、 $j_0 = ecn\beta_{z0}$ はビーム電流密度、 $F = \sigma_b / \sigma_R$ はレーザー・ビームと電子ビームのオーバー・ラップファクター、 $\sigma_b = \pi r_b^2$ はビーム断面積、 $\sigma_R = \pi w_0^2 / 4$ はレーザー・ビーム A_R の断面積、 $c\beta_{z0}$ は z 方向速度のビーム平均、 n はビームの電子密度 (cm^{-3}) である。更に p_x, p_y に (3-1-6) 式及び (3-1-7) 式を代入して

$$\left\{ \frac{d^2 A_R}{dz^2} - A_R \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 - 2kA_R \frac{d\phi}{dz} \right\}$$

$$= -F \frac{4\pi e}{c^2} j_0 \left\{ A_w \left\langle \frac{\cos \psi}{p_z} \right\rangle - A_R \left\langle \frac{1}{p_z} \right\rangle \right\} \quad (3-1-29)$$

$$\left\{ 2 \frac{dA_R}{dz} \left(k + \frac{d\phi}{dz} \right) + A_R \frac{d^2 \phi}{dz^2} \right\}$$

$$= F \frac{4\pi e}{c^2} j_0 A_w \left\langle \frac{\sin \psi}{p_z} \right\rangle \quad (3-1-30)$$

となる。ここで $\langle \dots \rangle$ は ψ について 2π の区間内での位相空間平均に置き換えられる。上の2本の式が求める方程式であるが、更に A_R 及び ϕ はゆっくり変化するものとしていることから、 $d^2 A_R / dz^2$ 、 $d^2 \phi / dz^2$ 、 $(d\phi / dz)^2$ 、 $(dA_R / dz)(d\phi / dz)$ を無視すると次式となる。

$$a_R \frac{d\phi}{dz} = F \frac{2\pi e j_0}{mc^3 k} \left\{ a_w \left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma \beta_z} \right\rangle - a_R \left\langle \frac{1}{\gamma \beta_z} \right\rangle \right\} \quad (3-1-31)$$

$$\frac{da_R}{dz} = F \frac{2\pi e j_0}{mc^3 k} a_w \left\langle \frac{\sin \psi}{\gamma \beta_z} \right\rangle \quad (3-1-32)$$

以上の (3-1-13)、(3-1-15)、(3-1-31)、(3-1-32) 式が1次元モデルによるFELの基本方程式であり、このような1次元FEL方程式を総称して、最初に定式化した Kroll、Morton、Rosenbluth の3人の頭文字をとってKMR方程式と呼ぶ(文献1)。なお $a_R \ll a_w$ より (3-1-31) 式右辺第2項は無視してよい。また (3-1-16) 式において $\hat{\beta}_z \equiv 1 - (1 + a_w^2) / 2\gamma^2$ としたが、2-2節で述べたようにビーム・エミッタンスによる (x, y) 方向のベータートロン振動の速度成分 (β_x, β_y) を考慮に入れ

$$\hat{\beta}_z = 1 - \frac{1 + a_w^2}{2\gamma^2} - \frac{1}{2} (\beta_x^2 + \beta_y^2) \quad (3-1-33)$$

としなければならない。ここで2-2節より $\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta_z^2 k_\beta^2 (x_\beta^2 + y_\beta^2)$ である。次節で述べるように縦方向空間電荷効果が無視できる場合、FELの共鳴条件は $\hat{\beta}_z = k/(k_w + k)$ であり、 $\hat{\beta}_z$ の広がり共鳴条件をスミア・アウトするのでFELの性能を劣化させる。

注：オーバーラップ・ファクター $F = \sigma_b / \sigma_R$ について。本来1次元モデルは (x, y) 方向に一様に無限に広がっている状態を、 (x, y) 面内の適当な領域だけを切り出してながめているものである。従ってビームサイズと云う概念は存在せず、 $F=1$ である。一方、文献2では有限なサイズを想定して、(3-1-24)式及び(3-1-25)式の両辺を (x, y) で積分することで F を導入している。本稿でもそれにならな。電子は σ_R 内で平均されたレーザー場を感じて相互作用するので、 F は実効的なFEL相互作用の強さを決めることになる。波長が長くて回折効果が極めて大きく、導波管の境界条件で電磁波の (x, y) 分布が決まってしまうようなマイクロ波領域のFELや、レーザー場を光共振器に閉じこめ、共振器の境界条件でレーザー場の (x, y) 分布が決まってしまうスモール・ゲインFELでは F は有用な概念である。しかしながら、第5章で述べるような3次元的考察を行う場合には多少混乱のもとになり得るので注意が必要である。

3-2 1次元ハミルトニアン

ポンドロモーティブ・ポテンシャルによる電子ビームのバンチングをイメージするには、ハミルトニアンを用いて電子がポテンシャルの井戸の中で周期運動をすることを示した方が分かりやすい。また、第3章以降でVlasov方程式を用いた定式化を行うが、そこではハミルトニアンが決定的な役割を果たしているため、ハミルトンの方程式に慣れておいた方がよい。そこで本節ではFELで考えるハミルトニアンがどのようなものかを紹介する。正準変換によって (ψ, γ) に対するハミルトニアンを求めることは第4章で行うので、本節では結論だけを紹介する。

レーザー場の振幅 a_R について1次近似した、電子に対するKMR方程式 (3-1-19)式

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w + k - \frac{k}{\hat{\beta}_z} - \frac{ka_R a_w}{\gamma^2 \hat{\beta}_z^3} \cos \psi + \frac{d\phi}{dz}$$

を、 $\gamma^2 \gg a_R a_w$ より

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w + k - \frac{k}{\hat{\beta}_z} + \frac{d\phi}{dz} \quad (3-2-1)$$

と近似する。これと $d\gamma/dz$ の式 ((3-1-18)式)

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{ka_R a_w}{\gamma \hat{\beta}_z} \sin \psi + \frac{e}{mc^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

において $\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma$ ($\delta\gamma \ll \gamma_0$) と置き、 $\delta\gamma$ について1次近似する。

$$\hat{\beta}_{z0} = 1 - \frac{1 + a_w^2}{\gamma_0^2} \quad (3-2-2)$$

と置くと、 $\delta\gamma/\gamma_0$ について1次までの近似で

$$\frac{1}{\hat{\beta}_z} = \frac{1}{\hat{\beta}_{z0}} \left(1 - \frac{1 - \hat{\beta}_{z0}^2}{\hat{\beta}_{z0}^2} \frac{\delta\gamma}{\gamma_0} \right)$$

$$\frac{1}{\gamma \hat{\beta}_z} = \frac{1}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}} \left(1 - \frac{\delta\gamma}{\hat{\beta}_{z0}^2 \gamma_0} \right)$$

と近似できる。これよりKMR方程式はつぎのように書き直せる。

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w + k \left(1 - \frac{1}{\hat{\beta}_{z0}} \right) + \frac{d\phi}{dz} + \frac{k(1 - \hat{\beta}_{z0}^2)}{\hat{\beta}_{z0}^3} \frac{\delta\gamma}{\gamma_0} \quad (3-2-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\gamma}{dz} + \frac{d\gamma_0}{dz} = & -\frac{ka_R a_w}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}} \sin \psi - \frac{e}{mc^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ & + \frac{ka_R a_w}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}^3} \frac{\delta\gamma}{\gamma_0} \sin \psi \end{aligned} \quad (3-2-4)$$

$d\delta\gamma/dz$ の右辺の最後の項は第1項に比べて十分小さいので無視する。更に γ_0 は

$$\hat{\beta}_{z0} = \frac{k}{k_w + k + d\phi/dz} \quad (3-2-5)$$

を満たす γ とする。この γ_0 を共鳴エネルギーと云う (mc^2 を単位にしたエネルギー)。また γ_0 に対しては

$$\frac{d\gamma_0}{dz} = -\frac{ka_R a_w}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}^3} \sin \psi_0 + \frac{e}{mc^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (3-2-6)$$

を満たす ψ_0 が存在するものとする。このとき $d\delta\gamma/dz$ の式は次のようになる。

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{2(k_w + d\phi/dz)}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}^3} \delta\gamma \quad (3-2-7)$$

$$\frac{d\delta\gamma}{dz} = -\frac{ka_R a_w}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}^3} (\sin \psi - \sin \psi_0) \quad (3-2-8)$$

ここで $k \gg k_w$ 、 $k \gg |d\phi/dz|$ より

$$1 - \hat{\beta}_{z0}^2 \cong 2(k_w + d\phi/dz)/k$$

であることを用いた。この2式はシンクロトロンにおける、シンクロトロン振動を表す振り子方程式 (pendulum equation) と同じ形をしており、レーザー場 a_R とウィグラー場 a_w で作られるポテンシャル井戸 (rf-バケツ) の中で振動を表している。この運動は (ψ, γ) 位相空間内で (ψ_0, γ_0) を中心とした (非線形な) 回転である。上の2式は $(\psi, \delta\gamma)$ を共役な正準変数の組とする次のハミルトニアン

$$H(\psi, \delta\gamma; z) = \frac{k_w + d\phi/dz}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}^3} (\delta\gamma)^2 - \frac{ka_R a_w}{\gamma_0 \hat{\beta}_{z0}^3} (\cos \psi + \psi \sin \psi_0) \quad (3-2-9)$$

から、ハミルトンの運動方程式

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial H}{\partial(\delta\gamma)} \quad (3-2-10)$$

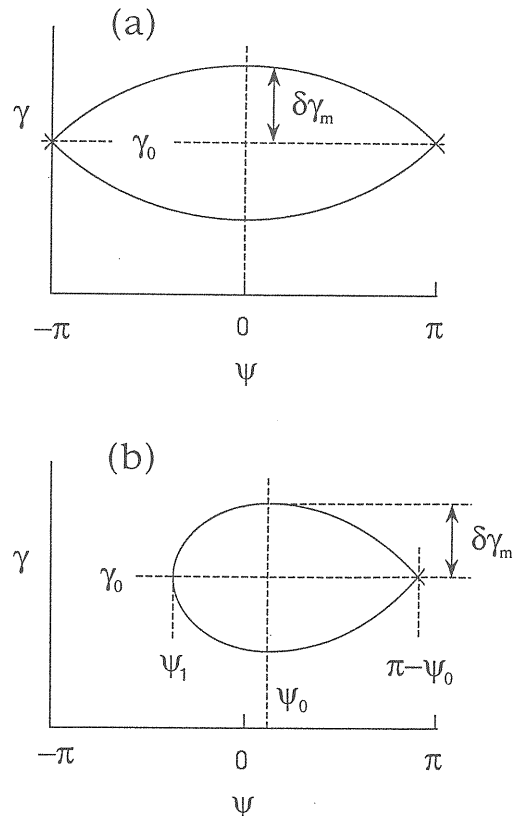
$$\frac{d\delta\gamma}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial\psi} \quad (3-2-11)$$

によって導かれることは簡単に分かるであろう。また、KMR方程式は a_w 、 k_w が z 依存性を持っていても成立していることは前に述べた。従って上の H においても a_w 、 k_w が z 依存性を持っていても良い。 z 依存性がゆっくりしている場合 (断熱変化) は、 $(\psi, \delta\gamma)$ 位相空間での電子の運動は $H(\psi, \delta\gamma; z) = \text{一定}$ となるような軌跡を描く。 $H(\psi, \delta\gamma; z)$ は $(\psi, \delta\gamma) = (\psi_0 + 2n\pi, 0)$ で極小値を持つポテンシャル井戸を形成しており、このポテン

シャル井戸は rf-バケツ (rf-bucket) またはポンドロモーティブ・ウェル (ponderomotive-well) と呼ばれ、シンクロトンでお馴染みのものである。 $H(\psi, \delta\gamma; z)$ は $dH(\psi, 0; z)/d\psi = 0$ となる $\psi = \pi - \psi_0$ で極大となるので、 $H(\psi, \delta\gamma; z) < H(\pi - \psi_0, 0; z)$ なる $(\psi, \delta\gamma)$ を持つ電子は $(\psi_0, 0)$ の回りに閉じた軌跡を描き、ポンドロモーティブ・ウェルの中に拘束されることになる。このような拘束運動の境界は $H(\psi, \delta\gamma; z) = H(\pi - \psi_0, 0; z)$ で決まる曲線、即ち

$$(\delta\gamma)^2 = \frac{ka_R a_w \hat{\beta}_{z0}^2}{k_w + d\phi/dz} \{ \cos \psi + \cos \psi_0 + (\psi + \psi_0 - \pi) \sin \psi_0 \} \quad (3-2-12)$$

で与えられ、この曲線をセパトリックス (separatrix) と呼ぶ。第3-1図にセパトリックスの概念図を示す。(a) はウィグラー・パラメーターが一定のコンスタント・ウィグラーの場合 ($\psi_0 = 0$)、(b) は a_w あるいは k_w が z とともに変化するテーパード・ウィグラーの場合 ($\psi_0 \neq 0$)



第3-1図 セパトリックスの概念図: (a) コンスタント・ウィグラー、(b) テーパード・ウィグラー。

である。またセパトリックス上の $\delta\gamma$ は $\psi = \psi_0$ において次式で決まる最大値 $\delta\gamma_m$

$$\delta\gamma_m = \sqrt{\frac{2ka_R a_w \hat{\beta}_{z0}^2}{k_w + d\phi/dz} \left\{ \cos \psi_0 + \left(\psi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \psi_0 \right\}} \quad (3-2-13)$$

となり、ポンデロモーティブ・ウェルに拘束された電子のエネルギー変化は

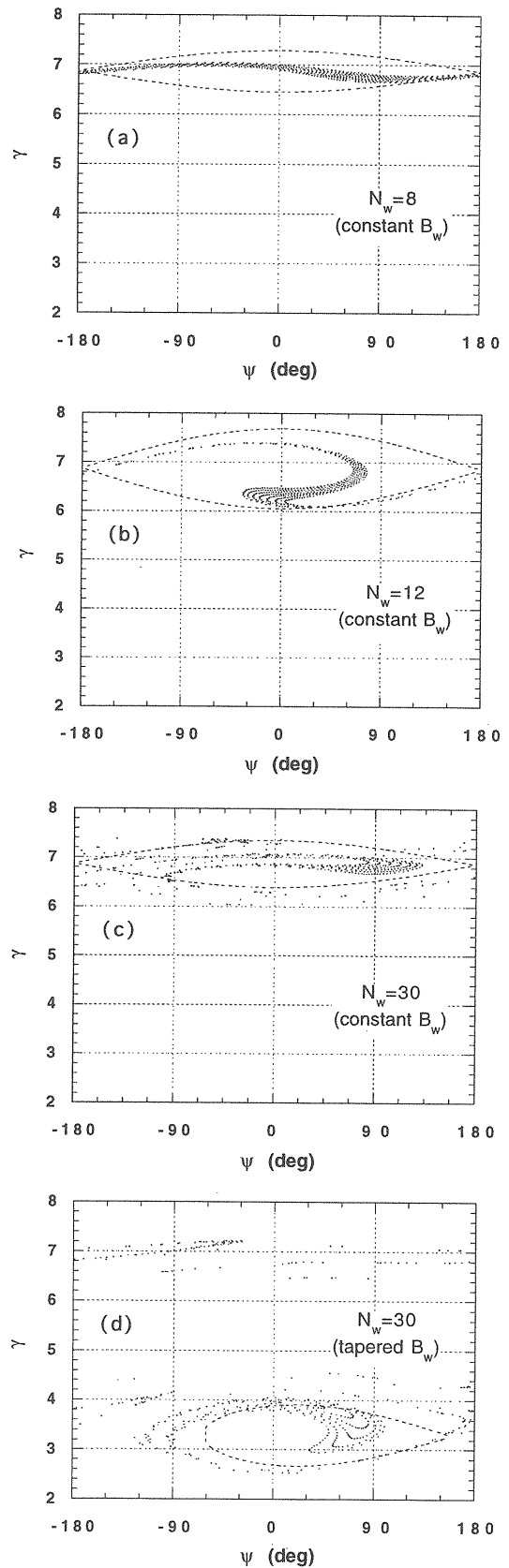
$$|\delta\gamma| \leq \delta\gamma_m \quad (3-2-14)$$

である。 $\delta\gamma_m$ は rf-バケツの高さ (bucket height) と呼ばれる。電子はこのような (擬) 周期的なポンデロモーティブ・ウェル $\psi_0 \neq 0$ に捕獲され、 ψ について 2π の周期で集群する。これをバンチング (bunching) と云う。

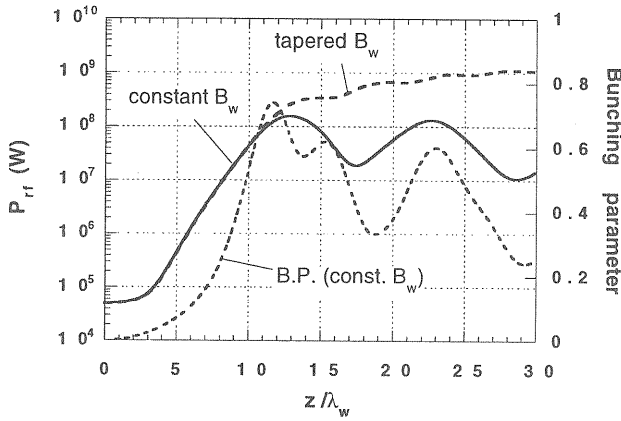
ここで FEL の動作を視覚的に理解するため、KMR 方程式によるシミュレーション計算の例を第 3-2 図及び第 3-3 図に示す。この計算例は 1980 年代の後半に米国のローレンス・リバモア研究所 (LLNL) が行った、3.5MeV のインダクション・リニアックで発生した 850A の電子ビームで駆動される、35GHz のマイクロ波を増幅するシングル・パス FEL (文献 7) のパラメータで 1 次元のシミュレーション計算を行ったものである。本稿が念頭においている波長とはかけはなれた波長であるが、FEL の動作としては全く同じである。第 3-2 図はウィグラー中を (a)、(b) と進行するに従って電子がポンデロモーティブ・ウェルにトラップされてバンチングしていく様子が見える。また第 3-3 図はウィグラー中での電磁波パワーの増加を示している。入力された電磁波パワーは一定のまま保持され、この間に電子ビームがエネルギー変調を受けコヒーレント成分が成長する。その後電磁波が指数関数的に急速に増幅されるとともにバンチングも成長する。電磁波があるレベルまで増幅されると、飽和が起こって電磁波パワーは頭打ちとなり、その後は減少、増加を振動的に繰り返すようになる。

次に共鳴について少し考えてみる。(3-2-5) 式を γ_0 について解くと、 $k \gg k_w$ より

$$\gamma_0^2 = \frac{k(1+a_w^2)}{2(k_w + d\phi/dz)} \quad (3-2-15)$$



第 3-2 図 (ψ, γ) 位相空間内での電子の運動 (35GHz マイクロ波 FEL): (a)~(c) コンスタント・ウィグラー、(d) テーパード・ウィグラー。



第3-3図 ウィグラー中での電磁波パワーの増加(35GHzマイクロ波FEL)。

これを(3-2-6)式に代入すると、 k_w を一定とし、空間電荷場 $\partial\Phi/\partial z$ が無視できるものとして

$$\sin \psi_0 = -\frac{da_w(z)/dz}{2a_R(k_w + d\phi/dz)} \quad (3-2-16)$$

なる ψ_0 を決定する式を得る。電子ビームは FEL 相互作用によって z とともにレーザー場を増幅しながらエネルギーが減少するが、上に述べたように電子は (ψ_0, γ_0) を中心としたポンドロモティブ・ウェルの中に拘束された運動をするので、 γ は最小値に達した後再び増加する。 γ が増加すると云うことは、電子は自分が増幅したレーザー場によって加速されることを意味している。即ち、レーザー場のエネルギーが電子の加速に費やされその強度が減少する。これが FEL の飽和である。従って FEL ではビーム中の電子が全体として (ψ, γ) 位相空間でほぼ π だけ回転すると、それ以上レーザー場を増幅することができず、そこでレーザー場の強度は最大となり飽和する。 a_w 及び k_w が一定のウィグラー即ちコンスタント・ウィグラーではこのような飽和が起こる。このようなウィグラーでは $da_w(z)/dz=0$ より $\psi_0=0$ であり、この場合の rf-バケツを定常バケツ (stationally bucket) と云う (第3-1図 (a) 参照)。ウィグラーの磁場強度 $a_w(z)$ を z とともに減少させると、共鳴エネルギー γ_0 は減少し、共鳴位相 ψ_0 は $\psi_0 > 0$ となる。これは電子ビームが全体として減速されることを表しており、このような rf-バケツを減速バケツと呼ぶ (第3-1図 (b) 参照)。

従って B_w あるいは k_w を z とともに変化させて、電子のエネルギー減少とともに共鳴エネルギー

を減少させ、 γ の減少を維持することができる。このようなウィグラーをテーパード・ウィグラーと云う。テーパをうまく設定すると、飽和を越えてレーザー場を増幅できる。LLNLのインダクション・リニアックを用いた 35GHz のマイクロ波 FEL では、飽和パワーは 180MW (効率 6%) であったがテーパード・ウィグラーとすることにより 1GW (効率 32%) 以上に増幅したことは有名である (文献 6、8)。第3-2図 (d) はテーパード・ウィグラーによって、飽和点を超えたところでも電子がポンドロモティブ・ウェルにトラップされ、ビームのエネルギーを大きく減少させることができることを示している。第3-3図の破線はこのときの電磁波パワーの増加を示す。

3-3 エネルギー保存と飽和

レーザー場は電子ビームのエネルギーをもらって増幅されるので、レーザー場のエネルギーと電子ビームのエネルギーの和は常に一定、即ちエネルギー保存則が成り立っていないなければならない。実際 KMR 方程式ではこのようなエネルギー保存則が成立している。レーザー場のパワー密度 (単位時間当たり単位面積を流れるエネルギー) はポインティング・ベクトル $\mathbf{S}=(c/4\pi)\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ で表される。 $\mathbf{E}=-c^{-1}\partial\mathbf{A}_R/\partial t$ 、 $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}_R$ より、レーザー場のパワー $P_R=\sigma_R|\mathbf{S}|$ は

$$P_R(z)=\omega k_a^2(z)m^2c^4\sigma_R/4\pi e^2 \quad (3-3-1)$$

で与えられる。一方、電子ビームのパワーは

$$P_b(z)=\sigma_b j_0 \left\langle \frac{mc^2}{e} (\gamma(z)-1) \right\rangle \quad (3-3-2)$$

である。ここで簡単のために空間電荷効果は無視できるものとして $\Phi=0$ とすると、KMR 方程式 (3-1-13)、(3-1-32) 式より

$$\left\langle \frac{d\gamma}{dz} \right\rangle = -\frac{\omega k m c^2 a_R}{2\pi F e j_0} \frac{da_R}{dz} \quad (3-3-4)$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(P_b + P_R) &= \sigma_b j_0 \frac{mc^2}{e} \left(\left\langle \frac{d\gamma}{dz} \right\rangle + \frac{\omega k m c^2}{4\pi F e j_0} \frac{da_R^2}{dz} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-3-5)$$

であり、 $P_b + P_R$ は常に一定であることが保証されている。

前節で述べたように電子は $(\psi, \delta\gamma)$ 位相空間で、rf-バケツにトラップされた運動をしている。(3-2-13)式よりコンスタント・ウィグラー($\psi_0 = 0$)では、バケツの高さは

$$\delta\gamma_m = 2\sqrt{a_R a_w} \gamma_{z0} \hat{\beta}_{z0} \quad (3-3-6)$$

であり、始めに $\gamma = \gamma_0$ のエネルギーを持っていた電子のエネルギー変化は最大でも $\delta\gamma_m$ 以下である。従ってFELではウィグラー中で増幅されるレーザー場のパワーはある z で最大となり飽和が起こる。電子はシンクロトロン振動をするので、飽和点以上の z ではレーザー場のパワーはシンクロトロン振動周期で振動する。飽和点近傍での電子ビームのエネルギーの減少分は

$$\langle \delta\gamma \rangle < \delta\gamma_m \quad (3-3-7)$$

と考えられる。飽和点近傍ではレーザー場は十分成長しているものとして $a_R^2(0) \ll a_R^2(z)$ と考えて良いので、エネルギー保存則より

$$\langle \delta\gamma \rangle = \frac{\omega k m c^2}{4\pi F e j_0} a_R^2(z) \quad (3-3-8)$$

従って

$$a_R^{3/2}(z) < \frac{8\pi F e j_0}{\omega k m c^2} \gamma_{z0} \hat{\beta}_{z0} a_w^{1/2} \quad (3-3-9)$$

即ち

$$P_R(z) < 4\rho \hat{\beta}_{z0} P_b(0) \quad (3-3-10)$$

となる。ここで $P_b(0)$ はウィグラーに入射される電子ビームのパワーであり

$$\rho = \frac{F^{1/3}}{\gamma_0} \left(\frac{\omega_b a_w}{4ck_w \hat{\beta}_{z0}} \right)^{2/3}$$

はFEL ピアス・パラメータ (FEL Pierce parameter) または FEL ゲイン・パラメータ (FEL gain parameter) と呼ばれ、FELの性能を決定する基本的な量である。この意味は次節の分散関係式で明確になる。本稿では $\gamma_{z0} \gg 1$ なる場合を扱っているので $\hat{\beta}_{z0} = 1$ と近似し、以降ではピアス・パラメータの表式として

$$\rho = \frac{F^{1/3}}{\gamma_0} \left(\frac{\omega_b a_w}{4ck_w} \right)^{2/3} \quad (3-3-11)$$

を採用する。また

$$\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n / m} \quad (3-3-12)$$

は電子ビームのプラズマ周波数、 n は電子密度である。 ρ はまた、ビーム電流 I_b 、Alfvén 電流 $I_A = mc^3/e$ ($\cong 17.03\text{kA}$) を用いて

$$\rho = \frac{F^{1/3}}{\gamma_0} \left(\frac{a_w}{2r_b k_w} \right)^{2/3} \left(\frac{I_b}{I_A} \right)^{1/3} \quad (3-3-11')$$

とも書ける。なお、(3-3-10)式は飽和を直観的にイメージするためのものであって極めて粗い評価式であり、粒子トラッキングによるシミュレーション計算に基づいた詳細な解析からは飽和点においては $\langle \delta\gamma \rangle_{\max} \cong \delta\gamma_m / 2.9$ 即ち

$$P_R(z)_{\max} \cong P_{\text{sat}} \cong 1.37\rho P_b(0) \quad (3-3-13)$$

となることが示されている (文献 3、4、9)。即ち ρ はほぼFELの飽和効率 (コンスタント・ウィグラーでの最大効率) を表す。従って ρ が分かれば必要なビーム・パワーが予測できることになる。

3-4 1次元分散関係式

本節では3-1節で導いたKMR方程式から、電子ビームのエネルギー広がり及びエミッタンスの効果を取り込んだ、1次元FEL分散関係式 (dispersion relation) を導く。なお、第4章においては Vlasov 方程式から導かれる微積分方程式をラプラス変換で解くという、より一般的な解法を紹介するが、本章ではよく知られているKMR方程式に対する理解を深めるために、分散関係式を導きハイゲイン・シングルパス型FELの1次元解析を行うことにする。対象としては、主に1 GeVの電子ビームで駆動する DESY/TTF-FEL 計画を例にとる予定である。

ヘリカル・ウィグラーを仮定し、ウィグラー磁場は第2章(2-1-5)式で与えられる軸上近似の磁場とする。レーザー場は円偏光平面波とし、ベクトル・ポテンシャルは(3-1-1)式で与えられるものとする。3-5節で述べるように、電子のエネルギー

— γ が大きく、レーザーの波長 λ が小さいときは、軸方向空間電荷効果は小さいので空間電荷ポテンシャル Φ は無視する。 $\gamma \gg 1$ とするとKMR方程式 (3-1-13)、(3-1-15)、(3-1-31)、(3-1-32)式は次のように簡略化される。

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{ka_w a_w}{\gamma} \sin \psi \quad (3-4-1)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = k_w + k \left(1 - \frac{1}{\beta_z}\right) + \frac{d\phi}{dz} \quad (3-4-2)$$

$$\frac{da_R}{dz} = F \frac{\omega_b^2}{2\omega^2} ka_w \left\langle \frac{\sin \psi}{\gamma} \right\rangle \quad (3-4-3)$$

$$a_R \frac{d\phi}{dz} = F \frac{\omega_b^2}{2\omega^2} ka_w \left\langle \frac{\cos \psi}{\gamma} \right\rangle \quad (3-4-4)$$

ここで

$$\beta_z = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2} \left\{1 + (a_w + a_R)^2\right\} - (\beta_x^2 + \beta_y^2)} \quad (3-4-5)$$

は電子のウィグラー軸方向速度成分、 $\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}$ はベータートロン振動による横方向速度成分である。

レーザー場のベクトル・ポテンシャルの複素振幅 \tilde{a}_R を

$$\tilde{a}_R(z) = a_R(z) e^{i\phi(z)} \quad (3-4-6)$$

で定義すると (3-4-1)~(3-4-4)式は次のように書き換えられる。

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{ka_w}{\gamma} \text{Im} \left\{ \tilde{a}_R e^{i\theta} \right\} \quad (3-4-7)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = k_w + k \left(1 - \frac{1}{\beta_z}\right) \quad (3-4-8)$$

$$\frac{d\tilde{a}_R}{dz} = iF \frac{\omega_b^2}{2\omega^2} ka_w \left\langle \frac{e^{-i\theta}}{\gamma} \right\rangle \quad (3-4-9)$$

ここで

$$\theta \equiv \psi - \phi = (k_w + k)z - \omega t \quad (3-4-10)$$

である。

次に、 $A_R = 0$ としてレーザー場との相互作用をカットオフしたときの個々の電子の γ 及び θ

を、それぞれ γ_i 及び θ_0 と置き、 A_R との相互作用による変化分を $\delta\gamma$ 及び $\delta\theta$ とする。

$$\gamma = \gamma_i + \delta\gamma \quad (3-4-11)$$

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta \quad (3-4-12)$$

更にデチューニング・パラメータ Δk を

$$\Delta k = k_w + k \left(1 - \frac{1}{\hat{\beta}_z}\right) \quad (3-4-13)$$

で定義する。 $\hat{\beta}_z$ は $\gamma = \gamma_i$ のときの軸方向速度成分

$$\hat{\beta}_z = \sqrt{1 - \frac{1 + a_w^2}{\gamma_i^2} - (\beta_x^2 + \beta_y^2)} \quad (3-4-14)$$

である。 $\gamma_i \gg 1$ では

$$\Delta k = k_w - \frac{k(1 + a_w^2)}{2\gamma_i^2} - \frac{1}{2}(\beta_x^2 + \beta_y^2) \quad (3-4-15)$$

となる。 θ_0 については

$$\frac{d\theta_0}{dz} = \Delta k \quad (3-4-16)$$

となるので

$$\theta_0 = \theta_i + \Delta k \cdot z \quad (3-4-17)$$

である。ここで θ の初期値 θ_i の分布は一様であるとして

$$\left\langle \frac{\exp(-i\theta_0)}{\gamma_0} \right\rangle_{\theta_i} = 0 \quad (3-4-18)$$

とする。(3-4-7)~(3-4-9)式を $\delta\gamma$ 及び $\delta\theta$ について1次近似すると、(3-4-18)式の仮定のもとで次式を得る。

$$\frac{d\delta\gamma}{dz} = -\frac{ka_w}{\gamma_i} \text{Im} \left(\tilde{a}_R e^{i\theta_0} \right) \quad (3-4-19)$$

$$\frac{d\delta\theta}{dz} = \frac{k(1 + a_w^2)}{\gamma_i^2} \frac{\delta\gamma}{\gamma_i} \quad (3-4-20)$$

$$\frac{d\tilde{a}_R}{dz} = -iF \frac{\omega_b^2}{2\omega^2} ka_w \left[\left\langle \frac{e^{-i\theta_0}}{\gamma_i} \frac{\delta\gamma}{\gamma_i} \right\rangle + i \left\langle \frac{e^{-i\theta_0}}{\gamma_i} \delta\theta \right\rangle \right] \quad (3-4-21)$$

ここで粒子平均 $\langle \dots \rangle$ は $\hat{\beta}_z$ と θ_i に関する平均

$\langle \dots \rangle = \left\langle \left\langle \dots \right\rangle_{\theta_i} \right\rangle_{\hat{\beta}_z}$ と考える。次に x 、 y を

$$x = \left\langle \frac{\delta\gamma}{\gamma_i} e^{-i\theta_0} \right\rangle_{\theta_i} \quad (3-4-22)$$

$$y = \left\langle \delta\theta e^{-i\theta_0} \right\rangle_{\theta_i} \quad (3-4-23)$$

と定義すると、(3-4-19)~(3-4-21)式は次のように書き換えられる。

$$\frac{dx}{dz} + i\Delta k \cdot x = i \frac{ka_w}{2\gamma_i^2} \tilde{a}_R \quad (3-4-24)$$

$$\frac{dy}{dz} + i\Delta k \cdot y = \frac{k(1+a_w^2)}{\gamma_i^2} x \quad (3-4-25)$$

$$\frac{d\tilde{a}_R}{dz} = -iF \frac{\omega_b^2 ka_w}{2\omega^2 \gamma_0^2} \langle x + iy \rangle_{\hat{\beta}_z} \quad (3-4-26)$$

ここで

$$\left\langle \frac{x + iy}{\gamma_i} \right\rangle_{\hat{\beta}_z} \equiv \frac{1}{\gamma_0} \langle x + iy \rangle_{\hat{\beta}_z} \quad (3-4-27)$$

とした。 γ_0 は γ_i のビーム平均

$$\gamma_0 = \langle \gamma_i \rangle \quad (3-4-28)$$

である。線形化したKMR方程式 (3-4-24)~(3-4-26)の解として

$$\tilde{a}_R(z) \propto \exp(iKz) \quad (3-4-29)$$

なる形の解を探すことにする。(3-4-24)、(3-4-25)式より x 、 y についても $x \propto \exp(iKz)$ 、 $y \propto \exp(iKz)$ として良いと考えられるので、これらを(3-4-24)、(3-4-25)式に代入して

$$(K + \Delta k)x = \frac{ka_w}{2\gamma_i^2} \tilde{a}_R \quad (3-4-30)$$

$$(K + \Delta k)y = -i \frac{k(1+a_w^2)}{\gamma_i^2} x \quad (3-4-31)$$

となる。ここで問題を簡単化するため、ウィグラーの周期長 $\lambda_w = 2\pi/k_w$ 程度ではレーザー場の振幅の成長は十分ゆっくりであると仮定する (slow growth)。即ち

$$|K + \Delta k| \ll k_w \quad (3-4-32)$$

を仮定すると、FELが共鳴の近傍にあるとして $k_w \equiv k(1+a_w^2)/2\gamma_i^2$ より

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{\gamma_i^2 (K + \Delta k)}{k(1+a_w^2)} \right| \equiv \left| \frac{K + \Delta k}{2k_w} \right| \ll 1 \quad (3-4-33)$$

となる。従って(3-4-26)式は

$$\frac{d\tilde{a}_R}{dz} = F \frac{\omega_b^2 ka_w}{2\omega^2 \gamma_0^2} \langle y \rangle_{\hat{\beta}_z} \quad (3-4-34)$$

と近似できる。(3-4-30)及び(3-4-31)式より x を消去して、 y を(3-4-34)式に代入すると次の K についての分散関係式を得る。

$$K = -F \frac{a_w^2 k_w \omega_b^2}{2c^2 \gamma_0^3} \left\langle \frac{1}{(K + \Delta k)^2} \right\rangle_{\hat{\beta}_z} \quad (3-4-35)$$

ここで $\hat{\beta}_z$ についての平均は Δk についての平均に置き換えることができ、 $f(\Delta k)$ を Δk の分布関数 ($\int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta k) d\Delta k = 1$) として

$$\left\langle \frac{1}{(K + \Delta k)^2} \right\rangle_{\hat{\beta}_z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\Delta k)}{(K + \Delta k)^2} d\Delta k \quad (3-4-36)$$

である。第1章で述べたように $\hat{\beta}_z$ の広がり、即ちデチューニング・パラメータ Δk の広がり、即ち電子ビームのエネルギー γ_0 の広がり $\Delta\gamma$ 及び有限エミッタンス ε による発散角の広がりによって生ずる。これで $\Delta\gamma$ 及び ε の効果を取り込んだ分散関係式が得られたことになる。

ガウス分布等のような分布関数では(3-4-36)式の平均を解析的に書くことが困難なので、 Δk の分布について簡単な有限幅の1様分布を仮定して、分散関係式を書き下してみる。この場合分散関係

式は3次式になる。 Δk の分布を中心値が K_0 で、 $\pm \kappa/2$ の幅に広がった一様分布とすると

$$f(\Delta k) = \begin{cases} 1/\kappa \cdots (K_0 - \kappa/2 \leq \Delta k \leq K_0 + \kappa/2) \\ 0 \cdots \cdots (\text{otherwise}) \end{cases}$$

従って

$$\left\langle \frac{1}{(K + \Delta k)^2} \right\rangle_{\hat{\beta}_z} = \frac{1}{(K + K_0)^2 - \kappa^2/4} \quad (3-4-37)$$

となる。これより分散関係式 (3-4-35) は

$$K \left\{ (K + K_0)^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right\} = -(2k_w \rho)^3 \quad (3-4-38)$$

となる。ここで ρ は (3-3-11) 式で与えられる FEL ピアス・パラメータである。 K のべきで整理すると

$$K^3 + 2K_0 K^2 + \left(K_0^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right) K + (2k_w \rho)^3 = 0 \quad (3-4-39)$$

である。 $\kappa=0$ (コールド・ビームの極限) では良く知られた次の形となる。

$$K(K + K_0)^2 = -(2k_w \rho)^3 \quad (3-4-40)$$

以上が FEL の基本的な3次の分散関係式である。分散関係式は基になる微分方程式の特性方程式そのものであるので、分散関係式の K の3根を (K_1, K_2, K_3) とすると、 $\tilde{a}_R(z)$ の解は

$$\tilde{a}_R(z) = a_1 e^{iK_1 z} + a_2 e^{iK_2 z} + a_3 e^{iK_3 z} \quad (3-4-41)$$

と書けるであろう。係数 (a_1, a_2, a_3) は初期条件から決定される。初期条件はすでに x, y についての (3-4-24)~(3-4-26) 式を得る過程で (3-4-22) 及び (3-4-23) 式にて仮定されている、即ち

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3-4-42)$$

が初期条件である。これは、ウィグラーに入射される電子ビームはエネルギー変調及び位相変調 (即ち密度変調) されておらず、 θ について一様分布していることを表す。これを (3-4-24)~(3-4-26) 式に代入することで \tilde{a}_R に関する次の初期

条件を得る。

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{a}_R(0)/dz &= 0 \\ d^2\tilde{a}_R(0)/dz^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-4-43)$$

これらを (3-4-41) 式に用いることで (a_1, a_2, a_3) についての方程式

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= \tilde{a}_R(0) \\ K_1 a_1 + K_2 a_2 + K_3 a_3 &= 0 \\ K_1^2 a_1 + K_2^2 a_2 + K_3^2 a_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-4-44)$$

が得られる。これを解くことで $\tilde{a}_R(z)$ が次のように求まる。

$$\begin{aligned} \tilde{a}_R(z) = \tilde{a}_R(0) & \left[\frac{K_2 K_3 e^{iK_1 z}}{(K_1 - K_2)(K_1 - K_3)} \right. \\ & \left. + \frac{K_3 K_1 e^{iK_2 z}}{(K_2 - K_3)(K_2 - K_1)} + \frac{K_1 K_2 e^{iK_3 z}}{(K_3 - K_1)(K_3 - K_2)} \right] \end{aligned} \quad (3-4-45)$$

十分大きな z では $\exp(iK_n z)$ の中で、 $-\text{Im}(K_n)$ が最大の項が支配的になり、指数関数的成長を示すことになる。これをハイゲイン FEL と云う。

ここで第2章の結果を用いて K_0 及び κ を評価しておこう。(3-4-14) 式の $\hat{\beta}_z$ の平均値は (2-2-12) 式

$$\hat{\beta}_{z0} = 1 - \frac{1 + a_w^2}{2\gamma_0^2} - k_{\beta}^2 \tau_b^2 \quad (2-2-12)$$

で与えられ、広がりが (rms) は (2-2-17) 式

$$\Delta \hat{\beta}_z = \frac{1 + a_w^2}{\gamma_0^2} \left(\frac{\Delta \gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{eff}} \quad (2-2-17)$$

で与えられる。従ってデチューニング・パラメータ Δk の中心値 K_0 は

$$\begin{aligned} K_0 &= \Delta k_0 + \frac{k(1 + a_w^2)}{\gamma_0^2} \left(\frac{\delta \gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{shift}} \\ &\equiv \Delta k_0 + 2k_w \left(\frac{\delta \gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{shift}} \end{aligned} \quad (3-4-46)$$

となり、 $\kappa/2$ を Δk の rms-広がりで置き換えて

$$\frac{\kappa}{2} = \frac{k(1+a_w^2)}{\gamma_0^2 \beta_{z0}^2} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{eff}} \equiv 2k_w \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{eff}} \quad (3-4-47)$$

として良いであろう。ここで

$$\Delta k_0 = k_w - \frac{k(1+a_w^2)}{2\gamma_0^2} \quad (3-4-48)$$

はコールド・ビーム極限 ($(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} = 0$) のデチューニング・パラメータである。

3-5 レーザー場に対する微積分方程式

上記の初期値問題に関する解法は文献3に依ったものであるが、数学的に少し釈然としないものが残る。(3-4-24)~(3-4-26)式から導かれる $\tilde{a}_R(z)$ についての方程式は(3-4-26)式が積分を含むため単純な微分方程式ではなく、一般には微積分方程式となる。従って解が(3-4-41)式で尽くされているか否かは自明ではないように思える。そこで $f(\Delta k)$ が簡単な分布関数の場合には、 $\tilde{a}_R(z)$ に対する微積分方程式は定係数同次線形微分方程式に書き直すことができ、解は(3-4-41)式で尽くされることを示してみよう。また、ここで得られる微積分方程式は、第4章で述べる Vlasov 方程式を用いた定式化で得られる微積分方程式と同じものである。

(3-4-25)式に $(d/dz + i\Delta k)$ を作用させ、(3-4-24)式を用いると

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + 2i\Delta k \frac{dy}{dz} - (\Delta k)^2 y = i\tilde{a}_R(z) \frac{kk_w a_w}{\gamma_0^2} \quad (3-5-1)$$

を得る。ここで $k \equiv 2\gamma_{z0}^2 k_w$ を用いた。これを解いて $x(z)$ 及び $y(z)$ の形式解が次のように求まる。

$$y(z) = (C_1 + C_2 z) e^{-i\Delta k z} + i \frac{kk_w a_w}{\gamma_0^2} \int_0^z \tilde{a}_R(\xi) (z-\xi) e^{-i\Delta k(z-\xi)} d\xi \quad (3-5-2)$$

$$x(z) = \frac{C_2}{2k_w} e^{-i\Delta k z} + i \frac{ka_w}{2\gamma_0^2} \int_0^z \tilde{a}_R(\xi) e^{-i\Delta k(z-\xi)} d\xi \quad (3-5-3)$$

ここで C_1 、 C_2 は積分定数である。初期値を $x(0) = 0$ 及び $y(0) = 0$ とすると、 $C_1 = 0$ 、 $C_2 = 0$ である。従って

$$y(z) = i \frac{kk_w a_w}{\gamma_0^2} \int_0^z \tilde{a}_R(\xi) (z-\xi) e^{-i\Delta k(z-\xi)} d\xi \quad (3-5-4)$$

$$x(z) = i \frac{ka_w}{2\gamma_0^2} \int_0^z \tilde{a}_R(\xi) e^{-i\Delta k(z-\xi)} d\xi \quad (3-5-5)$$

これを(3-4-26)式に代入して $\tilde{a}_R(z)$ に対する次の微積分方程式を得る。

$$\frac{d\tilde{a}_R(z)}{dz} = (2k_w \rho)^3 \int_0^z d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta k \frac{df(\Delta k)}{d\Delta k} \tilde{a}_R(\xi) e^{-i\Delta k(z-\xi)} \quad (3-5-6)$$

ここで ρ は(3-3-11)式で与えられる FEL ピアス・パラメータである。一般の分布関数 $f(\Delta k)$ について上式を微分方程式に直すことはできないが、分布関数 $f(\Delta k)$ が δ -関数で与えられるコールド・ビームの場合や、有限幅の一様分布のような簡単な分布関数の場合には微分方程式に書き直すことができる。

$$a. \quad f(\Delta k) = \delta(\Delta k - K_0)$$

の場合(3-5-6)式は

$$\frac{d\tilde{a}_R(z)}{dz} = i(2k_w \rho)^3 \int_0^z \tilde{a}_R(\xi) (z-\xi) e^{-iK_0(z-\xi)} d\xi \quad (3-5-7)$$

となり、この $\tilde{a}_R(z)$ は次の同次3階微分方程式を満たすことが証明できる。

$$\frac{d^3 \tilde{a}_R}{dz^3} + 2iK_0 \frac{d^2 \tilde{a}_R}{dz^2} - K_0^2 \frac{d\tilde{a}_R}{dz} - i(2k_w \rho)^3 \tilde{a}_R = 0 \quad (3-5-8)$$

従って特性方程式

$$\lambda^3 + 2K_0 \lambda^2 + K_0^2 \lambda + (2k_w \rho)^3 = 0 \quad (3-5-9)$$

の3根を $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ として、 $\tilde{a}_R(z)$ の一般解は

$$\tilde{a}_R(z) = a_1 e^{i\lambda_1 z} + a_2 e^{i\lambda_2 z} + a_3 e^{i\lambda_3 z} \quad (3-5-10)$$

で与えられる。即ち、解は(3-4-41)式で尽くされていることになる。

$$b. \quad f(\Delta k) = \begin{cases} 1/\kappa \cdots (K_0 - \kappa/2 \leq \Delta k \leq K_0 + \kappa/2) \\ 0 \cdots \cdots \text{(otherwise)} \end{cases}$$

の場合は

$$\frac{df(\Delta k)}{d\Delta k} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \delta(\Delta k - K_0 + \kappa/2) - \delta(\Delta k - K_0 - \kappa/2) \right\} \quad (3-5-11)$$

より $\tilde{a}_R(z)$ に対する微積分方程式は

$$\frac{d\tilde{a}_R(z)}{dz} = i(2k_w\rho)^3 \frac{2}{\kappa} \int_0^z \tilde{a}_R(\xi) \sin \frac{\kappa(z-\xi)}{2} e^{-iK_0(z-\xi)} d\xi \quad (3-5-12)$$

となる。この $\tilde{a}_R(z)$ は次の同次 3 階微分方程式

$$\frac{d^3\tilde{a}_R}{dz^3} + 2iK_0 \frac{d^2\tilde{a}_R}{dz^2} - \left(K_0^2 - \frac{\kappa}{4} \right) \frac{d\tilde{a}_R}{dz} - i(2k_w\rho)^3 \tilde{a}_R = 0 \quad (3-5-13)$$

を満たすことが証明でき、解は (3-4-41) で尽くされていることになる。

3-6 スモールゲインFELのゲイン公式

本稿ではハイゲインFELを念頭においているのでスモールゲインFELにはほとんど言及しない。現在ストレージ・リング等を用いて実施されているFELは一般にスモールゲインFELであるが、上で得られた解はスモールゲインFELにもそのまま適用できる。参考のためにスモールゲインFELのゲイン公式を導いてみよう。

$|\tilde{a}_R(z) - \tilde{a}_R(0)| \ll |\tilde{a}_R(0)|$ として (3-5-12) 式の右辺の積分の中にある $\tilde{a}_R(\xi)$ を $\tilde{a}_R(0)$ で近似して、両辺を 0 から z まで積分すると

$$\tilde{a}_R(z) = (1+Z)\tilde{a}_R(0) \quad (3-6-1)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} Z &= i \frac{2(2k_w\rho)^3}{\kappa} \int_0^z dz' \int_0^{z'} d\xi \sin \frac{\kappa(z-\xi)}{2} e^{-iK_0 z} \\ &= - \frac{(2k_w\rho)^3}{(K_0^2 - \kappa^2/4)^2} \left[\frac{e^{-iK_0 z}}{\kappa} \left\{ \left(K_0 + \frac{\kappa}{2} \right)^2 e^{i\kappa z} - \left(K_0 - \frac{\kappa}{2} \right)^2 e^{-i\kappa z} \right\} + i \left(K_0^2 - \frac{\kappa^2}{4} \right) z - 2K_0 \right] \end{aligned}$$

(3-6-2)

である。FELのパワーゲインは

$$\begin{aligned} G &= \frac{|\tilde{a}_R(z)|^2 - |\tilde{a}_R(0)|^2}{|\tilde{a}_R(0)|^2} \\ &= 2 \operatorname{Re}(Z) \end{aligned} \quad (3-6-3)$$

で定義される。ここで $|Z| \ll 1$ を用いた。従って (3-6-2) 式より

$$\begin{aligned} G &= \frac{2(2k_w\rho)^3}{\kappa(K_0^2 - \kappa^2/4)^2} \left[\left(K_0 - \frac{\kappa}{2} \right)^2 \cos \left\{ \left(K_0 + \frac{\kappa}{2} \right) z \right\} - \left(K_0 + \frac{\kappa}{2} \right)^2 \cos \left\{ \left(K_0 - \frac{\kappa}{2} \right) z \right\} \right] \\ &= - \frac{32\pi^3 \rho^3}{\theta_+ - \theta_-} \left(\frac{z}{\lambda_w} \right)^3 \left\{ \left(\frac{\sin \theta_+}{\theta_+} \right)^2 - \left(\frac{\sin \theta_-}{\theta_-} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-6-4)$$

となる。ここで $\theta_{\pm} = (K_0 \pm \kappa)z/2$ であり、 z/λ_w は電子ビームが通過したウィグラーの周期数である。この G はデチューニング・パラメータ Δk の広がり $\pm \kappa/2$ を考慮したときのスモールゲイン領域のFELゲインである。 $\kappa=0$ (コールド・ビーム) では上の G は良く知られている次のゲイン公式

$$G = -32\pi^3 \rho^3 \left(\frac{z}{\lambda_w} \right)^3 \frac{d}{d\theta_0} \left(\frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right)^2 \quad (3-6-5)$$

を与える。ここで $\theta_0 = K_0 z/2$ である。 $(\sin \theta_0 / \theta_0)^2$ はウィグラー中を通過する電子による自発放射 (spontaneous emission) いわゆるアンジュレーター光のパワースペクトルを与える関数であり ((1-1)式参照)、スモールゲイン領域のFELゲインは自発放射パワー・スペクトルの微分で与えられると云う、よく知られている Madey の定理を表している。

以上のように (3-5-6) 式即ち (3-4-24) ~ (3-4-26) 式で与えられる線形化したKMR方程式は、飽和領域を除いてスモールゲイン領域からハイゲイン領域 (指数関数的成長領域) に渡る全領域におけるFELの動作を記述しており、その特性方程式である分散関係式及び一般解である (3-4-45) 式は同じく飽和領域を除いた全領域において成立していると云える。

注：文献3及び4ではスモールゲイン領域において分散関係式(3-4-40)の近似的な根を求め、それを用いて(3-4-45)式が上記のスモールゲイン公式と一致することを証明しているが、筆者はその方法による証明にはまだ成功していない。

3-7 コールド・ビームFEL

3-4節で得た解をコールド・ビームの場合に適用してみる。エネルギー広がりがなく、エミッタンスもゼロであるような電子ビーム ($(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} = 0$) で駆動されるFELの分散関係式は(3-4-40)式で与えられる。デチューニング・パラメータがゼロ ($K_0 = 0$)、即ちFELの共鳴点では(3-4-40)式は

$$K^3 = -(2k_w\rho)^3 \dots (K_0 = 0) \quad (3-7-1)$$

となり、その3根は

$$K_1 = -2k_w\rho \quad (3-7-2)$$

$$K_2 = (1+i\sqrt{3})k_w\rho \quad (3-7-3)$$

$$K_3 = (1-i\sqrt{3})k_w\rho \quad (3-7-4)$$

である。これより(3-4-45)式で与えられるレーザー場の成長は

$$\tilde{a}_R(z) = \frac{1}{3}\tilde{a}_R(0)e^{-2ik_w\rho z} \left\{ 1 + 2e^{3ik_w\rho z} \cosh(\sqrt{3}k_w\rho z) \right\} \quad (3-7-5)$$

となり、パワーの成長は

$$|\tilde{a}_R(z)|^2 = \frac{1}{9}|\tilde{a}_R(0)|^2 \left\{ 3 + 4\cos(3k_w\rho z)\cosh(\sqrt{3}k_w\rho z) + 2\cosh(2\sqrt{3}k_w\rho z) \right\} \quad (3-7-6)$$

と書ける。 $\sqrt{3}k_w\rho z < 1$ はスモールゲイン領域であり、今は $K_0 = 0$ としているためそこでのゲインはゼロである。

$\sqrt{3}k_w\rho z > 1$ では指数関数的成長を示し、 $-\text{Im}(K)$ が最大の根 K_3 が成長率を与える。

$$\tilde{a}_R(z) \equiv \frac{1}{3}\tilde{a}_R(0)e^{ik_w\rho z} e^{\sqrt{3}k_w\rho z} \quad (3-7-7)$$

即ち単位距離当たりの振幅成長率は

$$\Gamma = -\text{Im}(K_3) = \sqrt{3}k_w\rho \quad (3-7-8)$$

である。なおこの領域では、スモールゲイン領域とは反対に共鳴点 $K_0 = 0$ で最大成長率となる。またレーザー場の位相変化は $\phi(z) - \phi(0) = k_w\rho z$ で与えられ、これは波数 k が

$$\delta k = \text{Re}(K_3) = k_w\rho \quad (3-7-9)$$

だけ大きくなることを表す。即ち、位相速度(波面速度) $c\beta_{\text{ph}}$ はFEL相互作用によって遅くなり、その変化分は

$$\Delta\beta_{\text{ph}} = -\lambda k_w\rho / 2\pi \quad (3-7-10)$$

である。従って、レーザー場の伝搬に対して電子ビームは $n > 1$ なる屈折率を持つ媒質として働き、レーザー・ビームは電子ビームによって常に収束されながらガイドされることになる。これをオプティカル・ガイディングと云う。以上の指数関数的成長は $P_R(z) \equiv \rho P_b$ で飽和する。ここで $P_R(z)$ は(3-3-1)式で与えられるレーザーのパワーであり、 $P_b = I_b(mc^2/e)(\gamma_0 - 1)$ は電子ビームのパワーである(3-3-2)式参照)。

3-8 レーザー場の成長

$K_0 \neq 0$ 及び $\kappa \neq 0$ の場合は $\tilde{a}_R(z)$ を解析的に書くことができないので、分散関係式(3-4-39)を数値的に解き(3-4-45)式を用いて計算する。まず実効的エネルギー広がり $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ が(3-4-38)式から求まる成長率 $\Gamma = \{-\text{Im}(K_1)\}_{\text{max}}$ にどのように影響するかを調べる。第3-4図は Γ の $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ に対する依存性である。仮定したFELのパラメータは $\lambda = 40\text{nm}$ 、 $T_b = 1.5\text{GeV}$ 、 $B_w = 5.78\text{kG}$ 、 $\lambda_w = 6\text{cm}$ である。曲線(a)は $J_b = 1.27\text{kA/mm}^2$ として $\rho = 0.13\%$ の場合、(b)は $J_b = 31.8\text{kA/mm}^2$ として $\rho = 0.38\%$ にした場合である。縦軸をコールド・ビームの成長率で規格化した成長率、横軸をピアスパラメータ ρ で規格化した実効的エネルギー広がり $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}/\rho$ に選んでプロットすると、両者は完全に一致する。即ち $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}/\rho$ はユニバーサルなパラメータとなっているので、どんなFELでも ρ が分かれば簡単なスケールリングで $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ に対する依存性を判定することができる。これは分散関係式

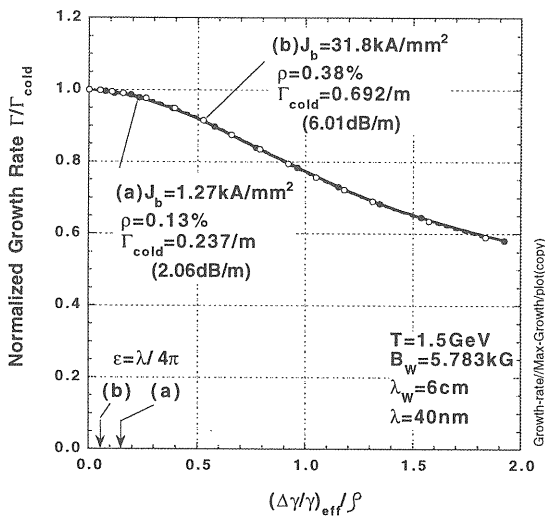
(3-4-38)を $(2k_w\rho)^3$ で規格化すると右辺が定数になり、見かけ上 $k_w\rho$ を含まなくなるからである (3-4-47式参照)。即ち成長率等を $(2/\sqrt{3})\Gamma_{\text{cold}}$ で規格化することで、全てのパラメータに対する依存性を統一して表わすことができ、スケーリングが成立している。ここで Γ_{cold} は (3-7-8)式で与えられるコールドビームのときの振幅成長率である。本章では物理的イメージがあいまいになることを嫌って規格化は行わなかったが、第4章以降では規格化した物理量で議論する。さて、第3-4図より成長率 Γ が Γ_{cold} に比べて大きく減少しないためには $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} \ll \rho$ であることが要求される。

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)_{\text{eff}} \ll \rho \quad (3-8-1)$$

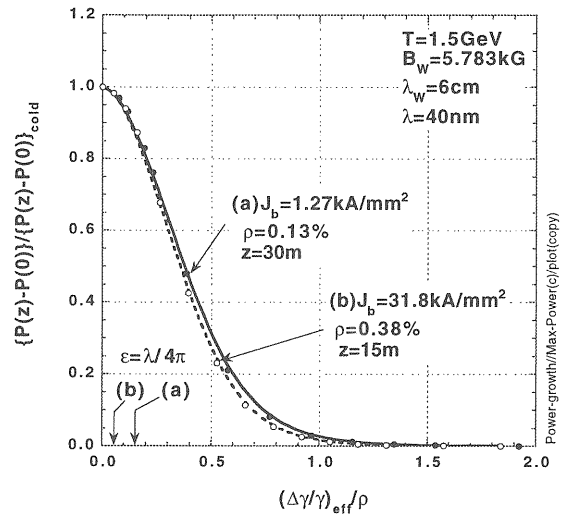
また

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0}\right)_{\text{eff}} < 0.6\rho \quad (3-8-2)$$

であれば成長率の減少は10%以下であることが分かる。 ρ がある程度大きいときには、(3-8-1)式の条件は図中に矢印で記したスモールゲインFELの考察から導いた条件 $\varepsilon < \lambda/4\pi$ よりずっとゆるい条件になる。即ちハイゲインFELではポンデロモータティブ・ポテンシャルが急速に成長することで、電子がそれにトラップされて電子ビームがコヒーレントになるため(コレクティブになると云う方が良いのかもしれない)、 $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ に対するト



第3-4図 レーザー場の成長率の $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}/\rho$ に対する依存性。



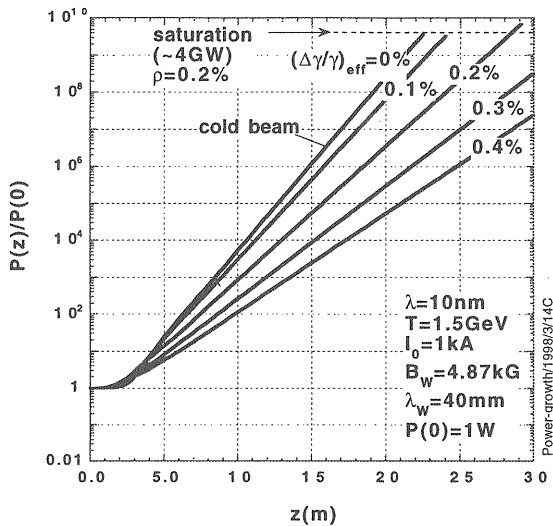
第3-5図 指数関数的成長領域におけるレーザー・パワーの $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}/\rho$ に対する依存性。

レランスが大きくなるのであろう。

従って、もともと厳しい電子ビームのエネルギー広がり及びエミッタンスに対するトレランスを確保するため、FELのゲインはできるだけ大きく設計されることが必要である。なお第5章で述べる3次元解析からは(3-8-2)式の条件よりファクター2程度厳しい条件が導かれる。第3-5図は第3-4図と同じ条件で、指数関数的成長領域で見た(3-4-45)式から計算されるレーザーパワーの $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}/\rho$ に対する依存性である(本来実線と破線は一致するはずであるが、何らかの計算誤差のためにわずかに差が生じてしまった)。

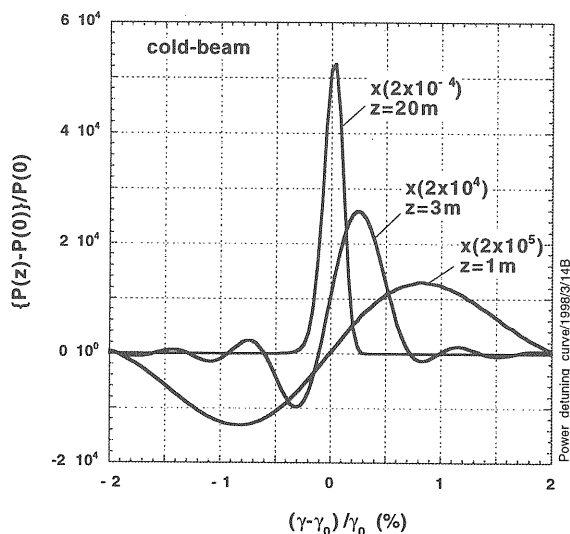
次に第3-6図に(3-4-45)式から計算されるレーザーパワーの成長を、種々の $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ の場合について求めたものである。仮定したFELパラメータは $\lambda = 10\text{nm}$ 、 $I_b = 1\text{kA}$ 、 $T_b = 1.5\text{GeV}$ 、 $B_w = 4.87\text{kG}$ 、 $\lambda_w = 4\text{cm}$ であり、ピアスパラメータは $\rho = 0.2\%$ である。図に見るように $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ が大きくなるとともにレーザーパワーの成長が遅くなる。シミュレーションから飽和パワーは $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} \sim \rho$ であれば $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ とともにゆっくり変化することが云え、図の範囲では飽和レベルはあまり変わらない。従って $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ とともに飽和長即ち必要なウイグラー長が伸びることになる。但し $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} > \rho$ では成長率、飽和レベルともに急速に悪化するので注意が必要である。

第3-6図のコールドビーム極限 $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} = 0$ での、(3-4-45)式から計算されるウイグラー中の各点におけるレーザーパワーのビーム・エネルギー



第3-6図 ウィグラー中のレーザー・パワーの成長。

一依存性、いわゆるデチューニング・カーブを第3-7図に示す。 γ_0 は $\lambda = (\lambda_w / 2\gamma_0)(1 + a_w^2)$ を満たすFEL共鳴エネルギーである。スモールゲイン領域である $z=1\text{m}$ では、よく知られたスモールゲインFELのゲインカーブになっていることが分かる。指数関数的成長が始まる $z=3\text{m}$ ではデチューニング・カーブは非対称となりピーク位置は共鳴点からずれている。飽和直前の $z=20\text{m}$ では共鳴点にピークを持つ鋭いカーブになる。その幅はほぼ $\sim \rho$ であり、これがほぼSASEのスペクトル幅になる。



第3-7図 パワー・デチューニング・カーブ

コンプトンFELではハイゲイン領域の成長率はデチューニングが $K_0=0$ のときに最大となる。飽和レベル P_{sat} については線形近似理論である分散関係式からは何も云えないが、3-3節で触れたようにシミュレーション計算より $P_{\text{sat}}/P_b \cong 1.37\rho$ であることが確認されており、また $K_0 \neq 0$ では K_0 とともに P_{sat} はゆっくり増加することが示されている。第5章で述べる3次元的モデルにおいても同様な P_{sat} の K_0 依存性がある。文献10ではこのような P_{sat} の増加は相互作用長が伸びるためであると説明されているが、筆者はまだ明確には理解していない。

なお、(3-4-45)式から分かるようにレーザー・パワーの成長カーブの形は入力光の強度に依存しない。入力光の強度が変わっても第3-6図のような対数グラフ上では成長カーブが上下に平行移動するだけである。また飽和レベルも入力光の強度に関係しない。以上で分かるようにFELの設計は基本的にはコールド・ビーム極限で行われ、コールド・ビーム近似からの劣化ができるだけ小さくなるように、現実性を加味しながらビーム・パラメータを設定することになる。エネルギー広がりやエミッタンスの影響はスケールリングを用いて後から適当に考えられる。

次にDESY/TTF-FEL計画での1GeV電子ビームを用いた波長6.4nmのシングルパスFELを例にとって、1次元分散関係式による性能評価を行ってみる。第1表にTTF-FELのデザイン・パラメータを示す。TTF-FELでは平面ウィグラーを採用しているが、ここではヘリカル・ウィグラーを仮定し、 $T_b = 1\text{GeV}$ 、 $\lambda = 6.4\text{nm}$ 、 $\lambda_w = 2.73\text{cm}$ とする。このとき必要なウィグラー磁場は $B_w = 3.5\text{kG}$ となり、ピアスパラメータ ρ 及びコールド・ビーム近似の成長率 Γ 等は第2表のようになる。ここで P_{sat} は飽和パワー、 $L_{\text{sat}} = (1/2\Gamma)\ln(9P_{\text{sat}}/P_R(0))$ は入力パワーを $P_R(0) = 1\text{W}$ と仮定したときの飽和に到るウィグラー長、 $L_0 = (\sqrt{3}k_w\rho)^{-1}$ はスモールゲイン領域の長さ、 ζ_{min} は平均電流 I_b における空間電効果による発散力とウィグラーの自己収束力の比、 $\varepsilon = k_{\beta 0}r_b^2$ は収束力をウィグラーの自己収束力のみとしたときに電子ビームの平衡半径を r_b とするに必要なエミッタンス、 ε_{max} は $\Delta\gamma/\gamma = 0$ としたときに実効的エネルギー広がり $(\Delta\gamma/\gamma)_{\text{eff}} = \rho/2$ となるエミッタンスである。

表1のパラメータでは、コールド・ビームの極限ならば十分なゲイン $\rho = 0.2 \sim 0.3\%$ が期待でき、

第1表 DASY/TTFにおけるSASE/FEL計画のパラメータ (文献14より転載)。

<u>Properties of TESLA Test Facility (TTF):</u>	
Active length	66.5 m
Field gradient	15 MV/m
<u>Electron beam properties at the beginning of the undulator:</u>	
Energy	1 GeV
normalized emittance	2π mm mrad
Emittance	1.02π nm rad
External focusing β function	3 m/rad
Bunch width (1σ)	55 μ m
Divergence (1σ)	26 μ rad
Bunch length (1σ)	160 fsec
Number of bunches per bunch train	7200
Bunch separation	111 nsec
Repetition rate of bunch trains	10 Hz
relative energy spread (1σ)	0.1%
Bunch charge	1 nC
Electrons per bunch	6.24×10^9
Average power	72 kW
Peak power	2.5 TW
Average current	72 μ A
Peak current	2500 A
<u>Properties of the FEL undulator:</u>	
Period length	2.73 cm
Undulator k value	1.27
Peak field	0.497 T
Magnetic gap	12 mm
<u>Photon beam properties at the end of the undulator:</u>	
Energy	193 eV
Wavelength	6.42 nm
Divergence (1σ)	28 μ rad
Spectral bandwidth at saturation (FWHM)	1 %
Saturation length	19 m
Average power	70 W
Peak power	3 GW
Photons per bunch	4×10^{13}
Average flux	3×10^{18} photons/sec
Peak flux	1×10^{26} photons/sec
Average brilliance	6×10^{21} photons/sec/ mm ² /mrad ² /0.1%
Peak brilliance	2×10^{29} photons/sec/ mm ² /mrad ² /0.1%

第2表 1次元モデルによる短波長シングルパスFELのパラメータ。

(コールドビーム近似: $\lambda = 6.4$ nm, $T_b = 1$ GeV, $\lambda_w = 2.73$ cm, $B_w = 3.5$ kG, $F = 1$)

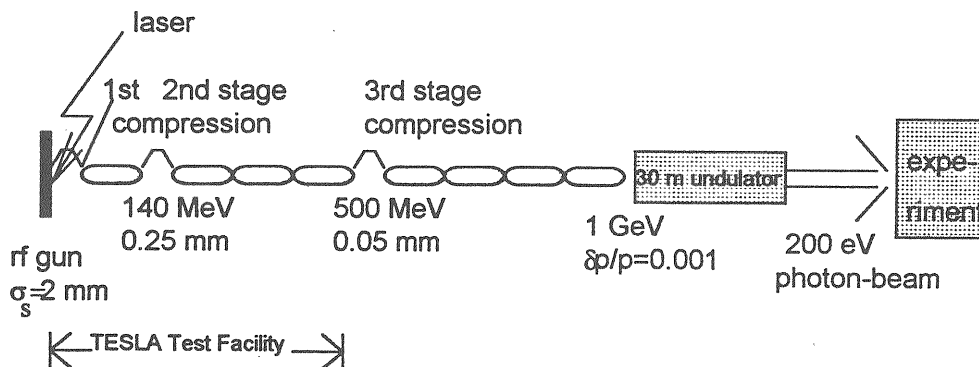
I_b	r_b	ρ	Γ	P_{sat}	L_{sat}	L_R	L_0	$\Delta\beta_{diff}$	$n-1$	ζ_{min}	ϵ	ϵ_{max}
kA	μ m	%	m ⁻¹ (dB/m)	GW	m	m	m	$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-10}$		nm	nm
2.5	50	0.31	1.23(10.7)	10.5	10.3	4.9	0.81	2.1	7.2	2.5	0.58	16
1.0	50	0.23	0.91 (7.9)	3.2	13.2	4.9	1.1	2.1	5.3	1.0	0.58	12
2.5	80	0.23	0.90 (7.8)	7.7	13.9	12.5	1.1	0.8	5.3	1.0	1.5	11

更に $L_{\text{sat}} \sim L_R$ であること及び $n-1 > \Delta\beta_{\text{diff}}$ より
 オプティカル・ガイディングが期待できるのでレー
 ザーの発散も問題ないように見える（3-1 1
 節参照）。 L_R はレーレー・レンジである。また
 TTF-FELでは電子ビームの品質に関して $I_b \approx$
 2.5kA にて、エネルギー広がり $\Delta\gamma/\gamma_0 = 0.1\%(1\sigma)$ 、
 エミッタンス $\varepsilon \approx 1\text{nm}$ を想定している。このエミッ
 タンスは $\lambda/4\pi$ の約2倍である。第2表に見ら
 れるように、ヘリカル・ウイグラーの場合の1次
 元モデルでのコールド・ビーム極限では 10m 程
 度のウイグラー長で飽和すると予想されるが、第
 5章で述べる3次元的效果による成長率の減少、
 更に電子ビームの I_b 、 $\Delta\gamma/\gamma$ 及び ε の不定性に対
 するトレランス等を考慮してのことと思われるが、
 ウイグラー長は 30m を予定している。これはレ
 ーレー・レンジ（ $\sim 5\text{m}$ ）よりはるかに長い
 が、3-1 1節で述べるオプティカル・ガイディング
 が期待できるので問題はなさそうである。これは
 第5章の3次元解析からも保証され、更に
 TTF-FELは1次元近似がよく成立しているよう
 に見える（5-2節参照）。このような短波長の
 FELの実現性は何をおいても電子ビームの強度と
 品質にかかっている。そこでDESYではリニアコ
 ライダー計画TESLAの開発施設TTF（TESLA Test
 Facility）のLバンド超伝導リニアックを利用して、
 第3-8図に示すような加速器/FELシステムの建
 設を進めている。レーザーRFガンによってエミッ
 タンスの小さい電子ビームを発生しバンチ・コン
 プレッサーでバンチ長を圧縮して、ピーク電流を
 増大するとともに後段のリニアックで発生するエ
 ネルギー広がりを小さく抑える。その後超伝導リ
 ニアックで加速しながら140MeV、500MeVの時
 点で2段階目、3段階目のバンチ圧縮を行い 1GeV
 まで加速する。このような構成で、エネルギー

1GeV、バンチ長 $\sigma_z = 48\mu\text{m}$ ($\sigma_t = 160\text{fs}$)、バンチ
 ピーク電流 $\approx 2.5\text{kA}$ 、エネルギー広がり $0.1\%(1\sigma)$ 、
 エミッタンス $\approx 1\text{nm}$ の電子ビームが得られると
 している。このビームを長さ 30m の平面ウイグ
 ラーに通すことで、波長 6.4nm のSASE/FELを実現
 しようとするものである。なおウイグラーは 5m
 程度ずつに分割されていると云うことであり、ま
 た第2章で述べたように平面ウイグラーは水平方
 向の収束力がないので、適当な収束力を持たせる
 ための4極磁場が組み込まれている。またビーム
 加速中に発生するエネルギー広がりを小さく抑え
 るためには、リニアックの加速勾配が高いことが
 本質的に重要である。このように短波長の
 SASE/FELは大がかりなシステムになるので、
 DESYやSLACでは長い時間をかけて慎重に計画
 が進められている。

3-9 縦方向空間電荷効果

本稿は GeV 領域の電子ビームで駆動する VUV
 \sim X 線領域の短波長シングルパス型FELの議論を
 念頭においているので、一般に空間電荷効果は十
 分小さくそれには触れなてこなかったが、本節で
 縦方向空間電荷効果が無視できる条件を簡単に議
 論しておく。空間電荷には縦方向空間電荷効果と
 横方向空間電荷効果がある。横方向空間電荷効果
 は発散力のためビームの収束力を弱め、極端な場
 合にはビームを発散させてしまうが、FELの干渉
 メカニズム即ちポンデロモティブ・ウェルによる
 電子のトラップ問題には直接影響はしないので、
 次節で電子ビームの収束問題として簡単に考察す
 る。一方、縦方向空間電荷効果はビーム軸方向の
 発散力となるので、ポンデロモティブ・ウェル
 による電子ビームのバンチングを妨げ干渉性を劣



第3-8図 DESY/TTF-FEL 計画の概念図（文献14より転載）。

化させるので、FELの性能を劣化させてしまう。

電子は、 ψ について 2π の周期的構造を持つポンドロモーティブ・ポテンシャル Φ_p にトラップされるため、電子ビーム密度は z について $2\pi/(k_w + k) \equiv \lambda$ の周期で変調される。これをバンチングと云う。従って縦方向空間電荷ポテンシャル Φ の基本周期は ψ について 2π と考えられ、本節では基本周期成分のみを考える。指数関数的成長領域ではバンチングも指数関数的に成長し、それに伴って縦方向空間電荷ポテンシャル Φ も同様に成長する。 $\Phi \ll \Phi_p$ の場合は Φ_p によって電子の運動が決定されるので Φ は無視できる。これをコンプトンFELと呼ぶ。一方、 $\Phi > \Phi_p$ なる場合はラマンFELと呼ばれ、FEL相互作用はレーザー場と電子ビームの空間電荷波との相互作用となる。空間電荷波には速い波（正エネルギー波）と遅い波（負エネルギー波）があり、レーザー場との結合で遅い波を成長させてレーザー場を増幅することができる。ラマンFELでは遅い空間電荷波の速度を共鳴条件に合わせるため、共鳴条件はエネルギーの高い側にシフトする。

FEL相互作用で生ずる電子ビーム電流密度の軸方向成分の摂動成分を j_z とする。定常電流成分は縦方向空間電荷効果には影響ないので考えない。周期性より基本周期成分のみを考えて

$$j_z(z, t) = \tilde{j}_z(z) e^{i\psi(z, t)} + \tilde{j}_z^*(z) e^{-i\psi(z, t)} \quad (3-9-1)$$

$$\Phi(z, t) = \tilde{\Phi}(z) e^{i\psi(z, t)} + \tilde{\Phi}^*(z) e^{-i\psi(z, t)} \quad (3-9-2)$$

とする。ここで $\tilde{j}_z(z)$ 及び $\tilde{\Phi}(z)$ はビームのバンチ構造の成長、即ちレーザー場の成長につれて成長する振幅である。また、 $J_z(z, t)$ を電流密度の z 方向成分として

$$\tilde{j}_z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J(z, t, \psi) e^{-i\psi} d\psi \quad (3-9-3)$$

である。 ψ の積分は位相空間内の平均で表され

$$\tilde{j}_z(z) = -ecn\beta_{z0} \langle e^{-i\psi} \rangle \quad (3-9-4)$$

と書ける。空間電荷ポテンシャル Φ はビームのバンチ構造の成長とともに成長するので、その成長率はレーザー場の成長率 Γ と同じ程度である。またクーロン・ゲージを想定して、連続の式 $\partial\rho/\partial t + \text{div}\mathbf{j} = 0$ は1次元では

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial z} = 4\pi j_z \quad (3-9-5)$$

と書ける。これに (3-9-1)、(3-9-2) 式を代入すると、 $\tilde{\Phi}(z)$ の変化はゆっくりなので $d\tilde{\Phi}/dz$ を無視して

$$\tilde{\Phi} = \frac{4\pi}{\omega(k_w + k)} \tilde{j}_z \quad (3-9-6)$$

を得る。今コンプトン条件が成立しているものとして指数関数的成長領域を考えると (3-4-23) 式より

$$\langle e^{-i\psi} \rangle = -ie^{-i\phi} \langle y^* \rangle_{\beta_z} \quad (3-9-7)$$

従って

$$\tilde{j}_z = ie^2 cn\beta_{z0} e^{-i\phi} \langle y^* \rangle_{\beta_z} \quad (3-9-8)$$

ここで、分散関係式の根のうち $-\text{Im}(K)$ が最大のものを K として $d\tilde{\alpha}_R/dz = iK\tilde{\alpha}_R$ と近似できるので、(3-4-34) 式より

$$\langle y^* \rangle_{\beta_z} = i \frac{2\omega^2 \gamma_0}{F\omega_b^2 k a_w} K \tilde{\alpha}_R \quad (3-9-9)$$

となる。これを (3-9-8) 式に代入し (3-9-6) 式に用いると

$$\tilde{\Phi} = \frac{2mc^2 \gamma_0 \beta_{z0}}{Fe(k_w + k)a_w} K \tilde{\alpha}_R^* e^{-i\phi} \quad (3-9-10)$$

を得る。一方、(3-1-9) 式よりポンドロモーティブ・ポテンシャル Φ_p は

$$\Phi_p(z, t) = \tilde{\Phi}_p(z) e^{i\psi(z, t)} + \tilde{\Phi}_p^*(z) e^{-i\psi(z, t)} \quad (3-9-11)$$

$$\tilde{\Phi}_p(z) = -\frac{mc^2 a_w}{2e\gamma_0} \tilde{\alpha}_R(z) e^{i\phi} \quad (3-9-12)$$

と書けるので、空間電荷効果が無視できる条件、

即ちコンプトンFELの条件は $|\tilde{\Phi}| \ll |\tilde{\Phi}_p|$ と書ける。従ってコールド・ビームで近似すると、 $|K| = 2k_w \rho$ よりコンプトンFEL条件を満たすには

$$\rho \ll \frac{Fka_w^2}{8k_w \gamma_0^2} \quad (3-9-13)$$

であれば良いことが分かる。ここで $\beta_{z0} \equiv 1$ とし

た。これが文献2で与えられているコンプトンFEL条件である。ここで共鳴条件 $k \cong 2\gamma_0^2 k_w / (1 + a_w^2)$ を用いると、この条件は

$$\rho \ll \frac{Fa_w^2}{4(1+a_w^2)} \quad (3-9-14)$$

と書け、 $a_w^2 > 1$ とすると $\rho \ll F/4$ となる。 $F = 1/2 \sim 1$ とすると $\rho \ll 0.12 \sim 0.25$ となり、 ρ が 1% 以下のFELでは空間電荷効果を無視して良いことが分かる。なお、(3-9-13)式をビーム電流 I_b で書き直すと

$$I_b \ll \frac{F^2 \pi^2 a_w^4 r_b^2 \lambda_w}{32 \gamma_0^3 \lambda^3} I_A \quad (3-9-15)$$

となる。ここで $I_A = mc^3/e$ ($= 17.03\text{kA}$) はAlfven電流である。ちなみに $\lambda = 10\text{nm}$ 、 $\lambda_w = 3\text{cm}$ 、 $\gamma_0 = 2000$ (1GeV)、 $r_b = 100\mu\text{m}$ 、 $F = 1$ とすると $a_w = 1.29$ であり、上の条件は $I_b \ll 5.5 \times 10^8 \text{A}$ となる。従って $I_b \sim 10^3 \text{A}$ 程度の電子ビームで駆動する短波長FELはほとんどの場合縦方向空間電荷効果は無視できるため、本章では空間電荷ポテンシャルを無視した。

注：以上の1次元考察ではビームが有限サイズであることによる空間電荷緩和効果が考慮されていないため、実際よりも大きめの空間電荷効果を与えることになる。また波長を決めるとビームエネルギーに依存しないと云う不自然なことになる。そこでLLNLのScharlemann達は平面ウィグラー(planar wiggler)の場合についてであるが、電子ビームのウィグル運動を考慮して、空間電荷場に対する以下の空間電荷緩和ファクター f_{2D} を与えている(文献11)。

$$f_{2D} = 1 - \frac{k_w + k}{\gamma_0} r_b K_1 \left(\frac{k_w + k}{\gamma_0} r_b \right)$$

ここで $K_1(x)$ は変形ベッセル関数である。ちなみに軸平行流近似では上式の γ_0 を $\gamma_z = (1 - \beta_z^2)^{-1/2}$ に置き換えた表式となり、 f_{2D} は波長だけで決まると云う、やはり不自然な結果になる。一方、Hiramatsuはウィグル運動によるビーム軌道の曲率を考慮に入れることで(文献12)

$$f_{2D} = \frac{\gamma_z^2 \beta_z}{\gamma_0^2 \beta_0} \left\{ 1 - \frac{k_w + k}{\gamma_z} r_b K_1 \left(\frac{k_w + k}{\gamma_z} r_b \right) \right\}$$

を得た。Scharlemann達の f_{2D} は、波長に較べてビームサイズが十分大きい領域 $r_b > \gamma_0 \lambda$ では ≈ 1 となるが、Hiramatsuのそれは $\gamma_z^2 / \gamma_0^2 = 1 / (1 + a_w^2) < 1$ となりウィグル運動の影響が残る。いずれの描像が正しいか現在のところ不明である。いずれにしても $\gamma_z \cong \gamma_0$ ($a_w^2 \ll 1$) の場合には同じ結果を与え、またよほど空間電荷効果が大きい場合を除いてたいして深刻な問題ではない。

3-10 横方向空間電荷効果

横方向空間電荷効果はFEL相互作用に直接関係しないが、ビームに対する収束力を弱めるのでビームサイズを増大させ、そのため電流密度の減少によるFELゲインの低下を招く。3-2節で述べたようにFEL相互作用のため電子ビームがウィグラー中を進行するとともにポンドロモーティブ・ウェルにトラップされてバンチングが成長し、バンチのピーク電流が増大していくため横方向空間電荷効果による発散力が強くなっていく。この発散力は飽和点で最大となり、シングルパスFELでは多くの場合ウィグラーの自己収束力より発散力の方が強くなってしまふので、付加的な外部収束が必要となる。第3-9図は文献17から引用した電子ビームのバンチングの計算例である。ここで想定しているFELは9.5MeV、4kAの電子ビームで駆動する30GHzのマイクロ波を増幅する $\rho = 0.13$ のシングルパスFELである。飽和直前 ($z = 2.63\text{m}$) よりバンチングが急速に成長し、飽和点 ($z = 2.97\text{m}$) でバンチのピーク電流は平均電流の約10倍に増加している。

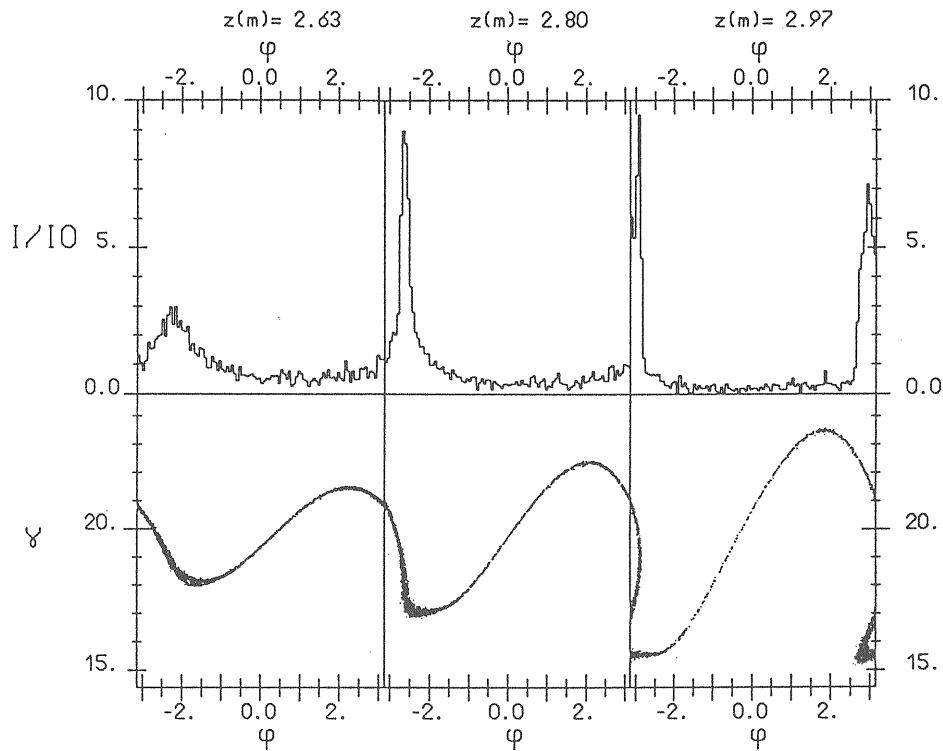
x 、 y 方向の分布がガウス分布の円形断面の電子ビームを仮定し、rms半径を r_b とする。ビーム自身が発生する電場と磁場を考慮したときの電子のベータートロン振動に対する運動方程式は、 $r^2 = x^2 + y^2 < r_b^2$ では

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = -k_\beta^2 x \quad (3-10-1)$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -k_\beta^2 y \quad (3-10-2)$$

と近似される。ここで

$$k_\beta^2 = k_{\beta 0}^2 (1 - \zeta) + k_\epsilon^2 \quad (3-10-3)$$



第3-9 図 電子ビームのバンチングの成長 (上) と (ψ, γ) 位相空間内分布 (下) (文献 17 より転載)。

$$k_{\beta 0} = \frac{a_w k_w}{\sqrt{2} \gamma_0 \beta_{z0}} \quad (3-10-4)$$

$$\zeta = \frac{2(1 + a_w^2) I_b / I_A}{(a_w k_w r_b)^2 \gamma_0 \beta_{z0}} \quad (3-10-5)$$

であり、 $k_{\beta 0}^2$ はウィグラーの自己収束力、 $k_{sp}^2 = \zeta k_{\beta 0}^2$ はビームの空間電荷電場と自己磁場による発散力、 k_e^2 は付加的な外部収束力、 I_b はビーム電流、 I_A は Alfvén 電流である。 $\zeta > 1$ ではウィグラーの自己収束力が打ち消されてしまうので、外部収束力が必要となる。ちなみに $\lambda = 10\text{nm}$ 、 $\lambda_w = 3\text{cm}$ 、 $\gamma_0 = 2000$ (1GeV)、 $r_b = 100\mu\text{m}$ 、 $I_b = 3\text{kA}$ とすると $a_w = 1.29$ 、 $\zeta = 0.64$ となりウィグラーの自己収束力は 60% 以上打ち消されてしまう。また、第3-9 図に見られるように飽和点近傍では I_b のピークは平均の10倍程度に達する可能性があり、そこでは $\zeta \approx 6$ に達し $k_{\beta 0}^2(1 - \zeta)$ は発散力になってしまうので $k_{\beta 0}^2$ の5倍以上の外部収束力 k_e^2 が必要になる。外部収束がない場合は横方向空間電荷効果によってビーム電流が制限されるので、大きなゲインを必要とするシングルパスFELでは十分な注意が必要である。

更に、ウィグラー中の電子ビームのサイズを一定に保つには飽和点に向かって徐々に外部収束力を大きくし、バンチングによる横方向空間電荷効果の発散力の増大を打ち消すことが望ましい。

ここで簡単な収束問題を考えてみよう。上記の例ではウィグラーの自己収束によるベータートロン波長は $\lambda_{\beta 0} = 2\pi / k_{\beta 0} = 65.7\text{m}$ であるが、発散力による発散長 $\lambda_{\beta 0} / \sqrt{\zeta}$ は 82.1m から 26m 程度まで変化する。この発散力を打ち消すような外部収束を4極磁場のFDFD...配列で行うものとする。各々のユニットの長さをLとすると、薄いレンズの近似では 2L間のベータートロン振動の位相進み μ は

$$\cos \mu = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e}{p} B' L^2 \right)^2 \quad (3-10-6)$$

で与えられる (SI 単位系)。空間電荷による発散力だけを打ち消すには $\mu = 0.31 \sim 0.97$ であれば良い。従って $L = 2\text{m}$ とすると必要な磁場勾配 B' は 0.25 ~ 0.78 T/m となる。ヘリカル・ウィグラーの外部からこのような4極磁場を加えるような構造は、超電導を用いるのが良さそうである。ウィグラーは超電導線のバイファイラー巻コイルとし、

外側に2m長の空心超電導4極コイルをDFD...の配列で配置していくような構造が考えられる。

3-1-1 オプティカル・ガイディング

レーザー・ビームは回折効果のためにレーレー・レンジ (Rayleigh range) L_R より長い距離では発散するので、長いウイグラーの中を電子ビームのサイズに合わせて収束したまま伝搬することができない。そのため、光共振器を用いたスモール・ゲインFELではウイグラー長を $2L_R$ 程度に制限して設計される。 L_R はビームのスポット・サイズと波長で決まるため、電子ビームをレーザー・ビームにフィットさせるにはエミッタンス ε に制限を課すことになる。エミッタンスに対する条件は通常のスモール・ゲインFELではほぼ $\varepsilon < \lambda/4\pi$ となる。即ち $\lambda = 10\text{nm}$ では $\varepsilon < 1\text{nm}\cdot\text{r}$ となり、電子ビームに対して厳しい条件を要求することになる。3-4節で述べたエネルギー広がりとともにエミッタンスに対する厳しい条件が、VUVより短波長のFELの実現を困難なものにしている。また、光共振器を用いないシングル・パスFELでは十分な増幅度を得るために、 L_R よりはるかに長いウイグラーを必要とする場合がほとんどであり、レーザー・ビームの発散に対して十分な考察がなされなければならない。3-7節で触れたようにハイゲインFELではレーザー場に対して電子ビームが増幅率 (成長率) に比例する収束作用を持っているので、十分大きなゲインに設定することで電子ビームによるオプティカル・ガイディングが期待でき、 L_R よりはるかに長いウイグラー中でレーザー場が発散しないようにすることが可能である。オプティカル・ガイディングはシングル・パスFELにとって決定的に重要な概念であり、それを取り込んだ解析のために電子ビーム及びレーザー・ビームを3次的に計算する3次元FELシミュレーション・コードが種々開発されている。

本節では回折効果とFEL相互作用の収束作用について定性的に解説する。電子ビームの中心部と外縁部におけるレーザー場の位相速度の比較から、1次元FELモデルで想定するFELのパラメータがレーザー場の発散を抑えるに適當か否かを定性的に判断することができる。定常状態ではレーザー・ビームは回折効果による発散と電子ビームによる収束とがつり合って、平面波 (TEMモード) として伝搬すると考えられる。そこで、第5章ではレーザー場を3次的に扱い、オプティカル・ガイディ

ングのもとで伝搬可能なTEMモードに対する分散関係式を求める。

3-1-1-1 回折効果

レーザー・ビームをガウス・ビームと仮定し、ビーム・ウエストのスポット半径を w_0 とする。 w_0 はガウス分布関数の 2σ 幅で定義された半径である。ウエスト位置を原点としてビーム軸方向に z 軸をとると、 z におけるビーム半径 $w(z)$ 及び波面の曲率半径 $R(z)$ は

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2 / L_R^2} \quad (3-11-1)$$

$$R(z) = z \left(1 + L_R^2 / z^2 \right) \quad (3-11-2)$$

で与えられる (文献13)。ここで

$$L_R = \pi w_0^2 / \lambda \quad (3-11-3)$$

はレーレー・レンジ (Rayleigh range) と呼ばれ、 $z > L_R$ では球面波となる。従ってビーム軸上 ($r = 0$) の波面に対するビーム外縁部 ($r = w(z)$) の波面の遅れ Δz は

$$\Delta z \equiv \frac{w^2(z)}{2R(z)} = \frac{w_0^2}{2L_R^2} z \quad (3-11-4)$$

となり、外縁部での z 方向の波面速度の遅れ $c\beta_{\text{diff}} = d\Delta z / dt$ は

$$\Delta\beta_{\text{diff}} = \frac{w_0^2}{2L_R^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\pi w_0} \right)^2 \quad (3-11-5)$$

となる。

3-1-1-2 エミッタンス条件

FELで必要とする電子ビームのエミッタンスはレーザーの波長程度以下でなければならないと云われている。この要請はオプティカル・ガイディング効果が期待できないスモールゲインFELにおける考察から来るものである。この条件式の導き方としては、C.W.Roberson and P.Sprangle 達 (文献2) による電子ビームとレーザー・ビームのプロファイル・マッチングから導く考え方と、D.A.G.Deacon and J.M.Ortega 達 (文献5) による縦方向干渉性から導く考え方の2通りあるようで

ある。

まずプロファイル・マッチングから電子ビームの必要エミッタンスを見積もる方法を紹介する。電子ビームのエミッタンスを $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ とする。収束力を無視すると $z=0$ でウェスト半径 $r_b(0)$ を持つ電子ビームの z における半径は

$$r_b(z) = r_b(0) \sqrt{1 + \varepsilon^2 z^2 / r_b^4(0)} \quad (3-11-6)$$

で与えられる。一方、ガウスビームを仮定し 2σ で定義されるレーザービームの半径は (3-11-1)式で与えられている。電子ビームがレーザービームと完全に相互作用するためには $r_b(z)$ を rms 半径として $r_b(z) \leq w(z)/2$ であれば良い。即ち電子ビームとレーザービームのプロファイル・マッチング

$$w_0 \approx 2r_b(0) \quad (3-11-7)$$

$$\varepsilon \leq \lambda/4\pi \quad (3-11-8)$$

が必要である。これがよく知られている、電子ビームのエミッタンスはレーザーの波長以下であることが必要であると云う条件である。

一方、電子ビームの干渉性に対する要請からも同じ条件を導くことができる。スモールゲイン FEL を前提として、電子の運動とレーザー場の伝搬に対する FEL 相互作用の影響を無視する。ウィグラー全長 L_w 間でのポンドロモータイブ位相 ψ の変化は $L_w \Delta k$ であるので、 ψ の広がり $\Delta\psi$ は

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= L_w \kappa / 2 \\ &= \frac{2k_w L_w}{\hat{\beta}_{z0}} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (3-11-9)$$

であり、干渉性を保つには $\Delta\psi < \pi/2$ であることが望まれる。(3-11-9)式で ε による寄与のみを考慮すると $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} = \gamma_{z0}^2 \varepsilon^2 / r_b^2$ であるので、 $k \equiv 2\gamma_{z0}^2 k_w$ 及び $\hat{\beta}_{z0} \equiv 1$ を用いて $\Delta\psi$ に対する条件は

$$\varepsilon < \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{4\pi^2 r_b^2}{\lambda L_w}} \quad (3-11-10)$$

と書ける。ここで $r_b < w_0/2$ とすると ε に対する条件は

$$\varepsilon < \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi L_R}{L_w}} \quad (3-11-11)$$

となる。更に回折効果によるレーザービームの発散があまり大きくならないように

$$L_w \approx \pi L_R \quad (3-11-12)$$

とすると (3-11-8)式と同じく $\varepsilon < \lambda/4\pi$ となる。以上のように電子のエネルギー変化及びレーザー場の位相速度の変化が無視できるスモールゲイン FEL では、プロファイル・マッチングに対する要請と縦方向干渉性に対する要請から、エミッタンスに対して同じ条件が導かれる。

しかしながらハイゲイン FEL では 3-8 節で述べたように $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} \ll \rho$ (3-8-1)式が干渉性を確保するための条件になっており、 ε の許容範囲は FEL のゲインに依存する。これから導かれる ε の許容範囲はハイゲイン FEL では一般に $\varepsilon < \lambda/4\pi$ より大きく、スモールゲイン FEL の場合とは異なる。そこで上の条件式の導出をもう一度ふりかえてみる。(3-11-11)式はオプティカル・ガイディングが期待できないスモールゲイン領域で要請される条件である。そこでスモールゲイン領域の長さは $L_0 \approx 1/\sqrt{3}k_w \rho$ であるので、(3-11-12)式の代わりに $L_w \approx L_0$ と置くと (3-11-11)式は $\varepsilon^2 < (\sqrt{3}\pi w_0^2 / 16\gamma_z^2) \rho$ となる。これはまた ε の寄与のみを考慮した $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ によって $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} < \{\sqrt{3}\pi(w_0/2)^2 / 4r_b^2\} \rho$ と書かれる。従って、 $L_0 < L_R$ を仮定して $r_b \approx w_0/2$ とすれば $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} < (\sqrt{3}\pi/4) \rho \approx \rho$ となり、ハイゲイン領域における条件と同等になる。従ってハイゲイン領域での条件 $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} \ll \rho$ が満たされていれば、スモールゲイン領域では (3-11-11)式が自動的に満たされることになる。

レーザービームのプロファイルは回折と FEL 相互作用による収束とが釣り合って自動的に決まるので、オプティカル・ガイディング効果が顕著なハイゲイン FEL では 3 次元的な考察が必要である。この問題に関してはオプティカル・ガイディング効果を取り入れたいくつかの解析があるが、それらはハイゲイン FEL においても (3-11-8)式の条件が満たされていることが望ましいと云うことを示唆している。またこの要請は厳しすぎると云っている論文も存在する。 ε 依存性の問題は筆者もまだ詳細をよく理解していないこともあって本稿で

はこれ以上追求しない。本稿では1次元モデルのもとでは(3-8-2)式の条件を要請することにする。なお、第5章の3次元的考察からは(3-8-2)式よりファクター2程度厳しい条件が導かれる。そこで実際の設計に当たっては $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} < 0.3\rho$ (5-1-67)式参照) の条件のもとで予備設計を行い、詳細は3次元コードによるシミュレーションを行って ε の許容範囲を決めることになろう。実際、DESY/TTF-FELのデザインにおいても(3-11-8)式の制限より2倍程度大きい ε が想定されているようである。

3-11-3 オプティカル・ガイディング

レーザー場の位相速度を $c\beta_{\text{ph}}$ とすると媒質の屈折率と位相速度の関係は $n-1=1-\beta_{\text{ph}}$ で与えられる。電子ビームとFEL相互作用しているレーザー場の位相速度は分散関係式から与えられ、電子ビームの実効的な屈折率 n を考えることができる。指数関数的成長領域を考えると(3-4-45)式より、分散関係式の根の内 $-\text{Im}(K)$ が最大のものを K としてレーザー場の複素振幅は $\tilde{a}_R(z) = a_R(z)\exp(i\phi) \sim \exp(iKz)$ であるので、 $d\phi/dz$ 即ち $\text{Re}(K)$ はレーザー場の波数の変化 δk を表す。コールドビーム近似では

$$\delta k = k_w \rho \quad (3-11-13)$$

である。 $1-\beta_{\text{ph}} = \delta k/k > 0$ 即ちレーザー場の位相速度は真空中の光速 c より遅く、レーザー場に対して電子ビームは $n > 1$ なる屈折率を持ちレーザー場を収束する作用を持つことが分かる。従ってレーザー場は回折による発散と電子ビームによる収束が釣り合ってガイドされる。これをオプティカル・ガイディング効果と云う。

FEL相互作用によるビーム中心部におけるレーザーの位相速度の遅れ $n-1=1-\beta_{\text{ph}}$ が、回折効果によるビーム外縁部における位相速度の z 方向成分の遅れ $\Delta\beta_{\text{diff}}$ と同じ程度の大きさであればレーザー場の発散を抑えることができる。従ってオプティカル・ガイディングが有効であるためには、 $2\delta k/k > (\lambda/\pi w_0)^2$ となる程度にピアス・パラメータ ρ が大きくなければならない。この要請は

$$4\pi r_0^2 k_w \rho / F > \lambda \quad (3-11-14)$$

と書ける。 F は電子ビームとレーザー・ビームのオーバーラップ・ファクター $F = (2r_b/w_0)^2$ である。左辺は $F^{2/3}$ に比例するので、 ρ が大きい場合には F も大きく即ち小さなレーザービーム径で釣り合い、 ρ が小さい場合には大きなレーザービーム径で釣り合うことになる。このような釣合状態が存在すればレーザービームは電子ビームにガイドされて平面波 (TEMモード) として伝搬することになる。3-8節の第2表には $\Delta\beta_{\text{diff}}$ 及び $n-1$ も示してある。表に示す例ではオプティカル・ガイディングが期待できると考えられDESY/TTF-FELではレーザーの発散も問題ないものと思われる。なおスモールゲインFELではこのような釣合状態では $F \ll 1$ となってしまう、オプティカル・ガイディングは期待できない。1次元モデルではこれ以上の解析は困難であるので、定量的考察は第5章にゆずることとする。第5章ではレーザー場を3次元的に扱うことで、伝搬可能なTEMモードに対する分散関係式を導き、レーザービームのプロファイルを求める。

第4章 Vlasov 方程式による定式化 (1次元モデル)

第3章3-2節にハミルトニアン例を挙げたが、本章では(3-1-2)式で与えられる電子のハミルトニアンに正準変換を施し、 (ψ, δ) を力学変数とするハミルトニアン $K''(\psi, \delta; z)$ を導く。 $\delta = mc^2 \delta\gamma$ である。これを用いて線形化した Vlasov 方程式を解き、そこから導かれる電子ビームの電流密度を Maxwell 方程式に適用することで、レーザー場の電場振幅に対する微積分方程式を導く。それをラプラス変換を用いた手法で解くことで、第3章に述べたものと等価な1次元FEL分散関係式を得る。なお本章は第5章の準備でもあり、次章では電子のウィグル運動の振幅を無視した軸平行流近似 (paraxial approximation) を用い、本章で得た電流密度を3次元の Maxwell 方程式に適用することで、レーザー場の回折効果を考慮に入れた分散関係式を導く。

4-1 電子のハミルトニアン (正準変換)

本節では次節の準備として1次元FELモデルを仮定し、 $(x, y, z, P_x, P_y, P_z; t)$ を正準変数とするハミルトニアン $H(x, P; t)$ から $(\psi, \delta; z)$ を正準変数とするハミルトニアン $K''(\psi, \delta; z)$ を求める。このような変換はストレーレジ・リングのような加速器のビーム・ダイナミクスの取扱においてもよく使われるので、正準変換に習熟するためにできるだけ丁寧に変換のプロセスを解説する。なお正準変換の基本的事項は補足Cにまとめておいた。正準変換に習熟している読者は本節を省略して次節に進んだ方がよい。

(2-1-5)および(2-1-6)式で与えられる1次元近似のウィグラー磁場 $B_w(z)$ を仮定する。

$$B_w = -B_w \left\{ \cos(k_w z) \cdot e_x - \sin(k_w z) \cdot e_y \right\} \quad (2-1-6)$$

また、レーザー場のベクトルポテンシャル $A_R(z, t)$ は(3-1-1)式で与えられる1次元近似の円偏光平面波を仮定する。

$$A_R = A_R(z) \left\{ \cos(kz - \omega t + \phi) \cdot e_x + \sin(kz - \omega t + \phi) \cdot e_y \right\} \quad (3-1-1)$$

更に、 $A_R(z, t)$ の複素振幅 $\tilde{A}_R(z)$ を

$$(A_R)_x + i(A_R)_y = \tilde{A}_R(z) e^{i(kz - \omega t)} \quad (4-1-1)$$

で定義する。即ち、 $\tilde{A}_R(z) = A_R(z) \exp\{i\phi(z)\}$ である。このときレーザー場の電場 $E_R = -c^{-1} \partial A_R / \partial t$ は

$$(E_R)_x + i(E_R)_y = \tilde{E}_R(z) e^{i(kz - \omega t)} \quad (4-1-2)$$

$$\tilde{E}_R(z) = ik \tilde{A}_R(z) \quad (4-1-3)$$

となる。1次元モデルでは空間電荷場は z 成分しか持たないので、ベクトル・ポテンシャルを $A_z(z, t) \cdot e_z$ として

$$A(z, t) = A_R(z, t) + A_z(z, t) \cdot e_z \quad (4-1-4)$$

と置くと、電子の1粒子ハミルトニアンは座標 x に共役な正準運動量 (canonical momentum) を P として

$$H(z, P; t) = \sqrt{m^2 c^4 + \{cP + eA(z, t) + eA_w(z)\}^2} - e\Phi(z, t) \quad (4-1-5)$$

と書ける。 $H(z, P; t)$ は (x, y) を陽に含まないで、 P の (x, y) 成分は運動の恒量である ((2-1-4)、(2-1-5)式)。従って $P_x = P_y = 0$ としてハミルトニアンは

$$H(z, p_z; t) = \sqrt{m^2 c^4 + (cP_z + eA_z)^2 + e^2 (A_R + A_w)^2} - e\Phi \quad (4-1-6)$$

となる。電磁場中の荷電粒子の運動を論じる場合は、時間 t の代わりに座標 z を用いた方が分かりやすい。そこで、 z を新しい時間変数と考え直すことにする。

ハミルトンの変分原理を

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(P_z \frac{dz}{dt} - H \right) dt = \delta \int_{z_1}^{z_2} \left\{ (-H) \frac{dt}{dz} - (-P_z) \right\} dz = 0 \quad (4-1-7)$$

と書き変えると、 z を新しい時間変数、 $(t, -H)$ を新しい正準共役な座標及び運動量、 $-P_z$ を新しいハミルトニアン $H'(t, -H; z)$ と考えることができる。

$$\begin{aligned}
& H'(t, -H; z) \\
& = -P_z(t, -H; z) \\
& = c^{-1} \sqrt{(H + e\Phi)^2 - e^2(\mathbf{A}_R + \mathbf{A}_w)^2 - m^2 c^4} + \frac{e}{c} A_z
\end{aligned} \tag{4-1-8}$$

次に

$$\psi = (k_w + k)z - \omega t \tag{4-1-9}$$

として、 ψ が新しい正準座標となるような正準変換を行う（この ψ は 3 - 4 節で導入した θ と同じものである）。即ち ψ に正準共役な運動量を P として $(t, -H)$ を (ψ, P) に変換する。この変換は母関数 $F_3(-H, \psi; z)$ を用いて

$$t = -\frac{\partial F_3(-H, \psi; z)}{\partial(-H)} \tag{4-1-10}$$

$$P = -\frac{\partial F_3(-H, \psi; z)}{\partial \psi} \tag{4-1-11}$$

$$\begin{aligned}
K(\psi, P; z) &= H'(t(\psi, P), -H(\psi, P); z) \\
&\quad + \frac{\partial F_3(-H, \psi; z)}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4-1-12}$$

で与えられる。

$$\frac{\partial F_3}{\partial(-H)} = \frac{\psi}{\omega} - \frac{k_w + k}{\omega} z \tag{4-1-13}$$

より F_3 は

$$F_3 = -H \left(\frac{\psi}{\omega} - \frac{k_w + k}{\omega} z \right) \tag{4-1-14}$$

であれば良い。このとき P は

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial \psi} = \frac{H}{\omega} \tag{4-1-15}$$

となり、変換された新しいハミルトニアン $K(\psi, P; z)$ は

$$\begin{aligned}
& K(\psi, P; z) \\
& = H'(t(\psi, P; z), -H(\psi, P; z)) + \frac{k_w + k}{\omega} H(\psi, P; z) \\
& = (k_w + k)P + \frac{e}{c} A_z \\
& \quad - \frac{1}{c} \sqrt{(\omega P + e\Phi)^2 - e^2(\mathbf{A}_R + \mathbf{A}_w)^2 - m^2 c^4}
\end{aligned} \tag{4-1-16}$$

で与えられ、 (ψ, P) に対するハミルトンの運動方程式は

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial K}{\partial P} \tag{4-1-17}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\partial K}{\partial \psi} \tag{4-1-18}$$

である。従って電子のエネルギー $E_e = \omega P$ ($=H$) についてハミルトンの運動方程式

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial(\omega K)}{\partial E_e} \tag{4-1-19}$$

$$\frac{dE_e}{dz} = -\frac{\partial(\omega K)}{\partial \psi} \tag{4-1-20}$$

が成立し、正準共役量 (ψ, E_e) に対するハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
& K'(\psi, E_e; z) \\
& = \omega K(\psi, E_e / \omega; z) \\
& = (k_w + k)E_e + \frac{e\omega}{c} A_z \\
& \quad - \frac{\omega}{c} \sqrt{(E_e + e\Phi)^2 - e^2(\mathbf{A}_R + \mathbf{A}_w)^2 - m^2 c^4}
\end{aligned} \tag{4-1-21}$$

で与えられる（スケール変換；補足 C 参照）。次に E_e の基準を E_0 として、

$$\delta = E_e - E_0 \tag{4-1-22}$$

が正準運動量になるような変換を行う。この変換は

$$\psi = \frac{\partial F_2(\psi, \delta; z)}{\partial \delta} \tag{4-1-23}$$

$$E_e = \frac{\partial F_2(\psi, \delta; z)}{\partial \psi} \tag{4-1-24}$$

を満たす母関数 $F_2(\psi, \delta; z)$ で与えられる。 $E_e = \delta + E_0$ より F_2 は

$$F_2(\psi, \delta; z) = (\delta + E_0)\psi \tag{4-1-25}$$

であれば良いことが分かる。また $\partial F_2 / \partial z = \psi dE_0 / dz$ より新しいハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
K''(\psi, \delta; z) &= K'(\psi, \delta + E_0; z) + \psi \frac{dE_0}{dz} \\
&= (k_w + k)(\delta + E_0) \\
&\quad - k \sqrt{(\delta + E_0 + e\Phi)^2 - e^2(\mathbf{A}_R + \mathbf{A}_w)^2 - m^2 c^4}
\end{aligned} \tag{4-1-26}$$

となる。ここで電磁場のゲージとして $\Phi = 0$ なるゲージを選ぶと

$$\begin{aligned}
E_z &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z(z, t(\psi, z))}{\partial t} \\
&= \frac{\omega}{c} \frac{\partial A_z(\psi, z)}{\partial \psi}
\end{aligned} \tag{4-1-27}$$

であるので $A_z(\psi, z)$ は

$$A_z(\psi, z) = \frac{c}{\omega} \int E_z(\psi, z) d\psi \tag{4-1-28}$$

で与えられる (補足D参照)。更に $dE_0/dz = 0$ とすると $K''(\psi, \delta; z)$ は

$$\begin{aligned}
K''(\psi, \delta; z) &= (k_w + k)(\delta + E_0) + e \int E_z(\psi, z) d\psi \\
&\quad - k \sqrt{(\delta + E_0)^2 - e^2(\mathbf{A}_R + \mathbf{A}_w)^2 - m^2 c^4}
\end{aligned} \tag{4-1-29}$$

となる。ここで、 $dE_0/dz = 0$ はコンスタント・ウィグラーを表わす (3-2節参照)。また、 (ψ, δ) に対する運動方程式は

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial K''}{\partial \delta} \tag{4-1-30}$$

$$\frac{d\delta}{dz} = -\frac{\partial K''}{\partial \psi} \tag{4-1-31}$$

である。 $|\mathbf{A}_R| \ll |\mathbf{A}_w|$ として $K''(\psi, \delta; z)$ を \mathbf{A}_R について1次までで近似し

$$\begin{aligned}
K''(\psi, \delta; z) &= (k_w + k)(\delta + E_0) + e \int E_z(\psi, z) d\psi \\
&\quad - k \sqrt{(\delta + E_0)^2 - e^2 \mathbf{A}_w^2 - m^2 c^4} \\
&\quad + \frac{ke^2 \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{A}_w}{\sqrt{(\delta + E_0)^2 - e^2 \mathbf{A}_w^2 - m^2 c^4}}
\end{aligned} \tag{4-1-32}$$

更に δ について2次までで近似すると次の近似形

を得る ($\Phi \neq 0$ なるゲージの場合は補足E参照)。

$$\begin{aligned}
K''(\psi, \delta; z) &= \left(k_w + \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) E_0 + \left(k_w - \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) \delta \\
&\quad + \frac{k}{2\gamma_z^2 E_0} \delta^2 + \frac{ke^2}{mc^2 \gamma_0} \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{A}_w \left(1 - \frac{\delta}{E_0} \right) \\
&\quad + e \int E_z(\psi, z) d\psi
\end{aligned} \tag{4-1-33}$$

ここで

$$\gamma_0 = \frac{E_0}{mc^2} \tag{4-1-34}$$

$$\gamma_z^2 = \frac{\gamma_0^2}{1 + e^2 \mathbf{A}_w^2 / m^2 c^4} \tag{4-1-35}$$

であり、 $\gamma_z \gg 1$ より

$$\begin{aligned}
\sqrt{E_0^2 - e^2 \mathbf{A}_w^2 - m^2 c^4} &= E_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_z^2}} \\
&\cong E_0
\end{aligned} \tag{4-1-36}$$

と近似した。 $c\beta_z = c\sqrt{1 - 1/\gamma_z^2}$ は電子の z 方向速度である。更に \mathbf{A}_R 及び \mathbf{A}_w の表式より

$$\frac{ke^2}{mc^2 \gamma_0} \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{A}_w = -\left(U e^{i\psi} + U^* e^{-i\psi} \right) \tag{4-1-37}$$

ここで

$$U(z) = -i \frac{e \mathbf{a}_w}{2\gamma_0} \tilde{\mathbf{E}}(z) \tag{4-1-38}$$

である。これよりハミルトニアン $K''(\psi, \delta; z)$ は

$$\begin{aligned}
K''(\psi, \delta; z) &= \left(k_w + \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) E_0 + \delta \Delta k + \frac{k}{2\gamma_z^2 E_0} \delta^2 \\
&\quad - \left(U e^{i\psi} + U^* e^{-i\psi} \right) \left(1 - \frac{\delta}{E_0} \right) + e \int E_z(\psi, z) d\psi
\end{aligned} \tag{4-1-39}$$

と書ける。右辺第1項は定数項であるので、省いても差し支えない。ここで

$$\Delta k = k_w - \frac{k}{2\gamma_z^2} \quad (4-1-40)$$

はデチューニングパラメータである ((3-4-13)式参照)。また、 $\Delta k = 0$ 即ち $\gamma_z^2 = k/2k_w$ となるエネルギーをエネルギー E_c の基準 E_0 とすると、 $K''(\psi, \delta; z)$ は3-2節のハミルトニアン (3-2-9)式と基本的に同じものである。 $U(z)$ は z についてゆっくりと変化する関数であるとしているので、空間電荷場 $E_z(\psi, z)$ を無視すると $K''(\psi, \delta; z)$ は ψ について (擬) 周期的であることが分かる。即ち

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dz} &= \frac{\partial K''}{\partial \delta} \\ &= \Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta + \frac{1}{E_0} (U e^{i\psi} + U^* e^{-i\psi}) \end{aligned} \quad (4-1-41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dz} &= -\frac{\partial K''}{\partial \psi} \\ &= i(U e^{i\psi} - U^* e^{-i\psi}) \left(1 - \frac{\delta}{E_0}\right) - e E_z \end{aligned} \quad (4-1-42)$$

で決まる電子の z 方向運動は ψ について (擬) 周期的となる。また E_z は、電子の z 方向運動によるビームの z 方向密度変調で生ずるので、結果として $K''(\psi, \delta; z)$ は ψ について (擬) 周期的となる。なお $K''(\psi, \delta; z)$ から導かれる (4-1-41)、(4-1-42)式が (3-1-13) 及び (3-1-15) 式の KMR 方程式である。

4-2 1次元FEL分散関係式

(ψ, δ) -位相空間での電子の密度分布関数を $f(\psi, \delta; z)$ とすると、今考えているようなハミルトンの運動方程式で記述される系 (ハミルトン系) では

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{d\psi}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{d\delta}{dz} \right) &= \frac{\partial^2 K''}{\partial \psi \partial \delta} - \frac{\partial^2 K''}{\partial \delta \partial \psi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4-2-1)$$

であることより、位相空間の面積 $\Delta\psi\Delta\delta$ が保存されることが云え、密度が保存される ($df/dz=0$) ことが示される。 df/dz は

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{d\psi}{dz} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{d\delta}{dz} \frac{\partial f}{\partial \delta} \quad (4-2-2)$$

と書けるので、ハミルトンの運動方程式より $df/dz=0$ は

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial K''}{\partial \delta} \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial K''}{\partial \psi} \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \quad (4-2-3)$$

と書くことができ、これは Vlasov 方程式として良く知られている。 (ψ, δ) の発展はハミルトニアン $K''(\psi, \delta; z)$ によって決定されるので、初期分布を与えることで $f(\psi, \delta; z)$ の発展を知ることができる。Vlasov 方程式に $\partial K''/\partial \delta, \partial K''/\partial \psi$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} + \left\{ \Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta + \frac{1}{E_0} (U e^{i\psi} + U^* e^{-i\psi}) \right\} \frac{\partial f}{\partial \psi} \\ + \left\{ i(U e^{i\psi} - U^* e^{-i\psi}) \left(1 - \frac{\delta}{E_0}\right) - e E_z \right\} \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \end{aligned} \quad (4-2-4)$$

となる。

まず電磁場 U 及び E_z が無い場合の定常分布 $f = f_0$ ($\partial f_0/\partial z = 0$) を考える。 $U=0, E_z=0$ の場合の非摂動ハミルトニアン

$$\begin{aligned} K_0''(\delta; z) &= [K_0''(\psi, \delta; z)]_{U=0, E_z=0} \\ &= \left(k_w + \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) E_0 + \delta \Delta k + \frac{k}{2\gamma_z^2 E_0} \delta^2 \end{aligned} \quad (4-2-5)$$

は ψ 及び z を含まないので、定常解 f_0 は

$$\frac{\partial K_0''(\delta; z)}{\partial \delta} \frac{\partial f_0}{\partial \psi} = 0$$

即ち $\partial f_0/\partial \psi = 0$ を満たし、 δ の任意関数で与えられる $f_0 = f_0(\delta)$ 。この定常分布に対して U 及び E_z による摂動が加わったときに、系がどのように発展するかを考える。

電磁場 U 及び E_z によって分布 f が摂動を受け

$$f(\psi, \delta; z) = f_0(\delta) + f_1(\psi, \delta; z) \quad (4-2-6)$$

となるものとする。但しここでは K'' で決まる (ψ, δ) を用いることに注意。摂動 U, E_z, f_1 は小さいものとして Vlasov 方程式において U 及び E_z と f_1 の積及び U と δ の積を無視すると、 $\partial f_0/\partial z = 0, \partial f_0/\partial \psi = 0$ より

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} + \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) \frac{\partial f_1}{\partial \delta} + \left\{ i(U e^{i\psi} - U^* e^{-i\psi}) - e E_z \right\} \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \quad (4-2-7)$$

と近似できる。これは摂動の1次近似であり、Vlasov方程式の線形化と云われる。ハミルトニアンの周期性より、最低次の周期性を持つ解が存在するものとして

$$f_1(\psi, \delta; z) = \tilde{f}_1(\delta, z) e^{i\psi} + \tilde{f}_1^*(\delta, z) e^{-i\psi} \quad (4-2-8)$$

の形の解を探すことにする。また、 E_z はビームの密度変調（分布関数の摂動成分）によって発生する z 方向の電場であるので

$$E_z(\psi, z) = \tilde{E}_z(z) e^{i\psi} + \tilde{E}_z^*(z) e^{-i\psi} \quad (4-2-9)$$

なる形を仮定して良いであろう。これらを線形化した Vlasov 方程式に代入して

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} + i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) \tilde{f}_1 + (iU - e\tilde{E}_z) \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \delta} = 0 \quad (4-2-10)$$

を得る。これより $z=0$ で $f_1=0$ として次の形式解を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\delta, z) = & - \int_0^z dz' \left[\left\{ iU(z') - e\tilde{E}_z(z') \right\} \frac{df_0(\delta)}{d\delta} \right. \\ & \times \exp \left\{ i \int_0^{z'} dz'' \left(\Delta k(z'') + \frac{k}{\gamma_z^2(z'') E_0(z'')} \delta \right) \right\} \\ & \times \exp \left\{ -i \int_0^z dz'' \left(\Delta k(z'') + \frac{k}{\gamma_z^2(z'') E_0(z'')} \delta \right) \right\} \end{aligned} \quad (4-2-11)$$

ここで Δk 及び γ_z が z に依らず一定（即ち k_w 及び B_w が z に依存しない定数）とすると

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\delta, z) = & - \int_0^z dz' \left[\left\{ iU(z') - e\tilde{E}_z(z') \right\} \frac{df_0}{d\delta} \right. \\ & \times \exp \left\{ i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) (z' - z) \right\} \end{aligned} \quad (4-2-12)$$

となる。

電子の速度を \mathbf{v} として、電流密度 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j}(z, t) = -e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(\delta, z) \{ f_0(\delta) + f_1(\delta, z) \} d\delta \quad (4-2-13)$$

である。横方向速度を \mathbf{v}_\perp として、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + v_z \mathbf{e}_z$ と書くと

$$\mathbf{v}_\perp / c = e(\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_R) / mc^2 \gamma \equiv e\mathbf{A}_w / mc^2 \gamma_0 \quad (4-2-14)$$

$$v_z^2 / c = 1 - v_\perp^2 / c^2 \equiv 1 - (1 + a_w^2) / \gamma_0^2 \quad (4-2-15)$$

より、 \mathbf{v} を $\delta=0$ における値で近似して積分の外へ出し

$$\mathbf{j}(z, t) = \frac{\mathbf{v}(z)}{c} \left\{ -j_0 + \tilde{j}_1(z) e^{i\psi(z, t)} + \tilde{j}_1^*(z) e^{-i\psi(z, t)} \right\} \quad (4-2-16)$$

と書ける。 $-(\mathbf{v}/c)j_0$ は定常電流であり

$$\mathbf{j}_1 = \frac{\mathbf{v}}{c} \left(\tilde{j}_1(z) e^{i\psi(z, t)} + \tilde{j}_1^*(z) e^{-i\psi(z, t)} \right) \quad (4-2-17)$$

はFEL相互作用による摂動成分である。ここで n_0 をビームの平均電子密度として

$$j_0 = ec \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\delta) d\delta = ec n_0 \quad (4-2-18)$$

$$\tilde{j}_1(z) = -ec \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(\delta, z) d\delta \quad (4-2-19)$$

である。また

$$f_0(\delta) = n_0 F(\delta) \quad (4-2-20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\delta) d\delta = 1 \quad (4-2-21)$$

によって $\delta = E_e - E_0$ の分布関数 $F(\delta)$ を定義する。また、電磁場 \mathbf{E} 及び \mathbf{B} が (x, y) に依存しない1次元モデルでは $(\text{rot} \mathbf{B})_z = 0$ であることから

$$\frac{\partial E_z(\psi(z, t), t)}{\partial t} = -4\pi(\mathbf{j}_1)_z \quad (4-2-22)$$

である。従って

$$\tilde{E}_z(z) = -i \frac{4\pi}{\omega} \tilde{j}_1(z) \quad (4-2-23)$$

である。ここで $\beta_z = 1$ と近似した。これを

(4-2-12)式に代入し、両辺に $-ec$ をかけて δ で積分すると

$$\tilde{j}_1(z) = ij_0 \int_0^z dz' \left\{ U + \frac{4\pi e}{\omega} \tilde{j}_1(z') \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{dF(\delta)}{d\delta} \exp \left\{ i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) (z' - z) \right\} \quad (4-2-24)$$

を得る。

定常電流はレーザー場との結合に寄与しないので、横方向摂動電流成分

$$\mathbf{j}_1(z, t) = -ev_{\perp}(z) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_1(\delta, z) e^{i\psi} + f_1^*(\delta, z) e^{-i\psi} \right\} d\delta \quad (4-2-25)$$

のみを考慮して、レーザー場 $\mathbf{A}_R(z, t)$ に対する Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_R}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_R}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \left\{ (\mathbf{j}_1)_x \mathbf{e}_x + (\mathbf{j}_1)_y \mathbf{e}_y \right\} \quad (4-2-26)$$

与えられる。

注：C.W.Roberson and P.Sprangle の論文 (文献2) では FEL 相互作用による電子速度 \mathbf{v} の変化 $\delta\mathbf{v}$ も考慮して摂動電流は $\mathbf{j}_1 = -e\mathbf{v} \int f_1 d\delta - e\delta\mathbf{v} \int f_0 d\delta$ であるとしているが、本稿では E.L.Saldin et al (文献9) に従って $\delta\mathbf{v}$ の項を無視する。この違いがどの程度かはまだ評価していないのでよく分からない。おそらく第1項に比べて $1/\gamma$ 程度であろうと推測している。

次に $\omega = ck$ として

$$(\mathbf{A}_R)_x + i(\mathbf{A}_R)_y = \tilde{A}_R(z) e^{i(kz - \omega t)} \quad (4-2-27)$$

なる形の Maxwell 方程式の解を求めることにする。電流項については (4-2-14) 及び (4-2-17) 式より $v_x + iv_y = -(a_w c / \gamma_0) \exp(-ik_w z)$ であるので

$$(\mathbf{j}_1)_x + i(\mathbf{j}_1)_y = -\frac{a_w}{\gamma_0} e^{-ik_w z} \left(\tilde{j}_1 e^{i\psi} + \tilde{j}_1^* e^{-i\psi} \right) \quad (4-2-28)$$

と書ける。(4-2-27)式及び (4-2-28)式を (4-2-26)式に代入して

$$\frac{d^2 \tilde{A}_R}{dz^2} + 2ik \frac{d\tilde{A}_R}{dz} = \frac{4\pi a_w}{c\gamma_0} \left(\tilde{j}_1 + \tilde{j}_1^* e^{-2i\{(k_w + k)z - \omega t\}} \right) \quad (4-2-29)$$

を得る。ここで $\tilde{A}_R(z)$ は z についてゆっくり変化するものとしているので、 $d^2 \tilde{A}_R / dz^2$ 及び速く振動する右辺第2項は無視することができる (slowly varying approximation)。更に $\tilde{A}_R(z) = -i\tilde{E}_R(z)/k$ より $\tilde{A}_R(z)$ を $\tilde{E}_R(z)$ で書き直して次式を得る。

$$\frac{d\tilde{E}_R}{dz} = \frac{2\pi a_w}{c\gamma_0} \tilde{j}_1 \quad (4-2-30)$$

注：3-1節では有限なビームサイズを考慮して (x, y) について積分することで、右辺にオーバーラップ・ファクター $F = \sigma_b / \sigma_R$ を導入しているが、本章では次章との関連もありこのような現象論的なパラメータの導入は行わない。

(4-2-24)式の \tilde{j}_1 を $d\tilde{E}_R / dz$ で書き換え、 U を $U = -i(ea_w / 2\gamma_0)\tilde{E}_R$ と書き直すことで次式を得る。

$$\frac{d\tilde{E}_R(z)}{dz} = j_0 \frac{\pi e a_w^2}{c\gamma_0^2} \int_0^z dz' \left\{ \tilde{E}_R(z') + i \frac{4\gamma_0^2}{ka_w^2} \frac{d\tilde{E}_R(z')}{dz'} \right\} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{dF(\delta)}{d\delta} \exp \left\{ i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) (z' - z) \right\} \quad (4-2-31)$$

ここで $\int dz' [\{\cdot\}]$ 中の $\tilde{E}_R(z')$ の項はウイグル運動とレーザー場の相互作用 ($\mathbf{A}_R \cdot \mathbf{A}_w$) による項、 $d\tilde{E}_R(z')/dz'$ の項は空間電荷場 E_z による項である。更にゲインパラメータ Γ_{ID} 及び空間電荷パラメータ Λ_p を

$$\Gamma_{ID} = \left(\frac{\pi k a_w^2 j_0}{\gamma_z^2 \gamma_0^3 I_A} \right)^{1/3} = 2k_w \rho \quad (4-2-32)$$

$$\Lambda_p = \left(\frac{4\pi j_0}{\gamma_z^2 \gamma_0 I_A} \right)^{1/2} = \frac{\omega_b}{c\gamma_z \gamma_0^{1/2}} \quad (4-2-33)$$

と定義し

$$\hat{z} = \Gamma_{ID} z \quad (4-2-34)$$

$$\Delta \hat{k} = \frac{\Delta k}{\Gamma_{ID}} \quad (4-2-35)$$

$$\hat{\delta} = \frac{k}{\gamma_z^2 E_0 \Gamma_{1D}} \delta \quad (4-2-36)$$

$$\hat{\Lambda}_p = \frac{\Lambda_p}{\Gamma_{1D}} \quad (4-2-37)$$

$$\hat{F}(\hat{\delta}) = \frac{\pi e a_w^2 j_0}{c \gamma_0^2 \Gamma_{1D}^2} F(\delta) \quad (4-2-38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\hat{\delta}) d\hat{\delta} = 1 \quad (4-2-39)$$

と規格化することで

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{E}_R(\hat{z})}{d\hat{z}} &= \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left[\tilde{E}_R(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}_R(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right] \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\delta} \frac{d\hat{F}(\hat{\delta})}{d\hat{\delta}} \exp\left\{ i(\Delta\hat{k} + \hat{\delta})(\hat{z}' - \hat{z}) \right\} \end{aligned} \quad (4-2-40)$$

を得る。これがレーザー場の振幅 $\tilde{E}_R(z)$ を自己無矛盾 (self-consistent) に決定する微積分方程式である。 ρ は (3-3-11) 式で定義される FEL ピアス・パラメータである。但しオーバーラップ・ファクターは $F=1$ とする。

$$\rho = \left(\frac{\omega_b a_w}{4ck_w \gamma_0^{3/2}} \right)^{2/3} \quad (3-3-11'')$$

本章及び次章ではピアス・パラメータの表式として (3-3-11'') 式を用いる。(4-2-40) 式において右辺の $\Lambda_p^2 d\tilde{E}_R(\hat{z}')/d\hat{z}'$ の項は空間電荷項であり、この項を除くと (4-2-40) 式は 3-5 節で求めた (3-5-6) 式と同じものである。3-5 節では空間電荷効果を考慮していないので $\hat{\Lambda}_p^2$ の項を含まない。(4-2-40) 式で空間電荷効果を見捨てる条件は $\hat{\Lambda}_p^2 \ll 1$ であり、これは $F=1$ 、 $\beta_z=1$ としたときの (3-9-13) 式の条件 $\rho \ll ka_w^2 / 8k_w \gamma_0^2$ と同じものである。

(4-2-40) 式を解くため $\tilde{E}_R(\hat{z})$ のラプラス変換

$$Y(s) = L[\tilde{E}_R(\hat{z})] \equiv \int_0^{\infty} \tilde{E}_R(\hat{z}) e^{-s\hat{z}} d\hat{z} \quad (4-2-41)$$

が存在するものとして、(4-2-40) 式の両辺をラプラス変換する。よく知られているように

$d\tilde{E}_R(\hat{z})/d\hat{z}$ のラプラス変換は $\tilde{E}_R(\hat{z})$ のラプラス変換 $Y(s)$ が与えられれば

$$L\left[\frac{d\tilde{E}_R(\hat{z})}{d\hat{z}} \right] = sY(s) - \tilde{E}_R(0) \quad (4-2-42)$$

となるので、左辺は簡単である。一方右辺のラプラス変換は畳み込みの公式

$$L\left[\int_{-\infty}^{\hat{z}} f_1(\hat{z}') f_2(\hat{z} - \hat{z}') d\hat{z}' \right] = L[f_1(\hat{z})] L[f_2(\hat{z})] \quad (4-2-43)$$

及び

$$L[e^{-a\hat{z}}] = \frac{1}{s+a} \quad (4-2-44)$$

を用いて

$$\begin{aligned} &L\left[\int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\delta} \int_0^{\hat{z}} d\hat{z}' \left\{ \tilde{E}_R(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}_R(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right\} e^{-i(\Delta\hat{k} + \hat{\delta})(\hat{z} - \hat{z}')} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\delta} \frac{d\hat{F}(\hat{\delta})}{d\hat{\delta}} L\left[\tilde{E}_R(\hat{z}') + i\hat{\Lambda}_p^2 \frac{d\tilde{E}_R(\hat{z}')}{d\hat{z}'} \right] L\left[e^{-i(\Delta\hat{k} + \hat{\delta})\hat{z}} \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\delta} \frac{d\hat{F}(\hat{\delta})}{d\hat{\delta}} \left[Y(s) + i\hat{\Lambda}_p^2 \{sY(s) - \tilde{E}(0)\} \right] \frac{1}{s + i(\Delta\hat{k} + \hat{\delta})} \end{aligned} \quad (4-2-45)$$

となるので、(4-2-42) 式と (4-2-45) 式が等しいとおいて $Y(s)$ が次のように求まる。

$$Y(s) = \frac{i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}(s) - 1}{(1 + i\hat{\Lambda}_p^2 s) \hat{D}(s) - s} \tilde{E}(0) \quad (4-2-46)$$

ここで

$$\hat{D}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{F}(\hat{\delta})/d\hat{\delta}}{s + i(\Delta\hat{k} + \hat{\delta})} d\hat{\delta} \quad (4-2-47)$$

である。分布関数 $F(\delta)$ が一様分布やローレンツ型関数のような簡単な場合には、 $\hat{D}(s)$ は一意に決まるが、ガウス分布の場合には解析接続が必要である。

例として、 $F(\delta)$ が簡単な分布関数で与えられる場合について $\tilde{E}_R(z)$ を求める。

a. $\hat{F}(\hat{\delta}) = \delta(\hat{\delta})$ (cold beam) の場合 ($\delta(\hat{\delta})$ は δ -関数)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{F}(\hat{\delta})/d\hat{\delta}}{s+i(\Delta\hat{k}+\hat{\delta})} d\hat{\delta} = \frac{i}{(s+i\Delta\hat{k})^2} \quad (4-2-48)$$

より

$$Y(s) = \frac{\hat{\Lambda}_p^2 + (s+i\Delta\hat{k})^2}{s(s+i\Delta\hat{k})^2 + \hat{\Lambda}_p^2 s - i} \tilde{E}_R(0) \quad (4-2-49)$$

となる。このようにラプラス変換した量が有理式で表されたとき、分母=0とおいた方程式

$$s(s+i\Delta\hat{k})^2 + \hat{\Lambda}_p^2 s - i = 0 \quad (4-2-50)$$

を特性方程式と呼び、これがいわゆる分散関係式 (dispersion relation) である (注: 分散関係式が有理式とならない場合は解析接続が必要となる)。(4-2-50)式は $s=i\hat{\lambda}$ とおくと、よく知られた次の分散関係式となる。

$$\hat{\lambda} \left\{ (\hat{\lambda} + \Delta\hat{k})^2 - \hat{\Lambda}_p^2 \right\} = -1 \quad (4-2-51)$$

$$b. \hat{F}(\hat{\delta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta\hat{\delta}} \dots (-\Delta\hat{\delta} \leq \hat{\delta} \leq \Delta\hat{\delta}) \\ 0 \dots \dots \dots (\text{otherwise}) \end{cases}$$

の場合 (warm beam)。但し

$$\Delta\hat{\delta} = \Delta\delta / \Gamma_{ID} \quad (4-2-52)$$

とする。 $\Delta\delta$ は $\delta = (E_e - E_0)$ の広がりである。

$$\frac{d\hat{F}(\hat{\delta})}{d\hat{\delta}} = \frac{1}{2\Delta\hat{\delta}} \left\{ \delta(\hat{\delta} + \Delta\hat{\delta}) - \delta(\hat{\delta} - \Delta\hat{\delta}) \right\} \quad (4-2-53)$$

であるから

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\hat{F}(\hat{\delta})/d\hat{\delta}}{s+i(\Delta\hat{k}+\hat{\delta})} d\hat{\delta} \\ &= \frac{1}{2\Delta\hat{\delta}} \left(\frac{1}{s+i\Delta\hat{k}-i\Delta\hat{\delta}} - \frac{1}{s+i\Delta\hat{k}+i\Delta\hat{\delta}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{i}{(s+i\Delta\hat{k})^2 + (\Delta\hat{\delta})^2} \quad (4-2-54)$$

従って

$$Y(s) = \frac{(s+i\Delta\hat{k})^2 + (\Delta\hat{\delta})^2 + \hat{\Lambda}_p^2}{s \left\{ (s+i\Delta\hat{k})^2 + (\Delta\hat{\delta})^2 + \hat{\Lambda}_p^2 \right\} - i} \tilde{E}_R(0) \quad (4-2-55)$$

となる。この特性方程式

$$s \left\{ (s+i\Delta\hat{k})^2 + (\Delta\hat{\delta})^2 + \hat{\Lambda}_p^2 \right\} - i = 0 \quad (4-2-56)$$

は $\hat{\Lambda}_p^2$ の項 (空間電荷項) を除いて、第3章 (3-4-39)式の分散関係式と同じものである。また、 $\Delta\delta=0$ では (4-2-49)式の $Y(s)$ に一致する。

$\tilde{E}_R(\hat{z})$ を求めるには $Y(s)$ をラプラス逆変換すればよい。

$$\tilde{E}_R(\hat{z}) = L^{-1}[Y(s)] \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s) e^{s\hat{z}} ds \quad (4-2-57)$$

逆変換のための複素積分は、 $Y(s)$ の極、即ち特性方程式の根を s_k ($k=1, \dots, n$) とし、全ての s_k に対して $\text{Re}(s_k) \leq c$ となるように c を選んで積分することで $Y(s) \exp(s\hat{z})$ の留数の和で表される。 s_k が全て1次の極の場合は

$$L^{-1}[Y(s)] = \sum_{k=1}^n \left[(s-s_k) Y(s) \right]_{s=s_k} e^{s_k \hat{z}} \quad (4-2-58)$$

である。同じことであるが、ここでは自動制御論や電気回路論でよく用いられる、部分分数分解を行って簡単な逆変換公式を適用する方法で $\tilde{E}_R(\hat{z})$ を求めてみる。特性方程式 ((4-2-56)式) は重根を持たないとして、その3根を (s_1, s_2, s_3) とすると

$$\begin{aligned} & \left[s \left\{ (s+i\Delta\hat{k})^2 + (\Delta\hat{\delta})^2 + \hat{\Lambda}_p^2 \right\} - i \right]^{-1} \\ &= \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{s-s_3} \end{aligned} \quad (4-2-59)$$

$$A = \frac{1}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)} \quad (4-2-60)$$

$$B = \frac{1}{(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)} \quad (4-2-61)$$

$$C = \frac{1}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} \quad (4-2-62)$$

と部分分数に分解できる。従って

$$Y(s) = \frac{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) + i}{s(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} \tilde{E}_R(0) \\ = \left[\frac{1}{s} + i \left\{ \frac{A}{s(s-s_1)} + \frac{B}{s(s-s_2)} + \frac{C}{s(s-s_3)} \right\} \right] \tilde{E}_R(0) \quad (4-2-63)$$

ここで、自動制御論や電気回路論の入門書等にある簡単な逆変換公式

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = 1 \cdots (z \geq 0) \quad (4-2-64)$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s(s-s_k)} \right] = \frac{1}{s_k} (e^{s_k z} - 1) \quad (4-2-65)$$

を用いて

$$L^{-1}[Y(s)] = \tilde{E}_R(0) \left\{ 1 - i \left(\frac{A}{s_1} + \frac{B}{s_2} + \frac{C}{s_3} \right) \right. \\ \left. + i \left(\frac{A}{s_1} e^{s_1 \hat{z}} + \frac{B}{s_2} e^{s_2 \hat{z}} + \frac{C}{s_3} e^{s_3 \hat{z}} \right) \right\} \quad (4-2-66)$$

となる。A、B、Cに(4-2-60)~(4-2-62)式を代入し、 $s_1 s_2 s_3 = i$ であることを用いて $\tilde{E}_R(\hat{z})$ が次のように求まる。

$$\tilde{E}_R(\hat{z}) = \tilde{E}_R(0) \left\{ \frac{s_2 s_3 e^{s_1 \hat{z}}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} + \frac{s_3 s_1 e^{s_2 \hat{z}}}{(s_2 - s_3)(s_2 - s_1)} \right. \\ \left. + \frac{s_1 s_2 e^{s_3 \hat{z}}}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} \right\} \quad (4-2-67)$$

これは第3章の結果(3-4-45)式に一致している。1次元モデルはここまでとし、次章でレーザー場を3次元に拡張することで回折効果を考慮に入れた分散関係式を導くことにする。

第5章 1 + 3次元FELモデル（回折効果を取り入れたFEL分散関係式）

第3章及び第4章の1次元の定式化においては、電子ビームの有限サイズによるレーザー場の回折効果の影響が考慮されていない。そこで本章では電子ビームの運動は前章と同じく1次元的に扱い、レーザー場のみ3次元的に扱うことで回折効果を考慮に入れたFEL分散関係式を導きレーザー場の定常解を求める。但し、本章で得る分散関係式はハイゲイン領域だけで成立するもので、第3章の1次元モデルの分散関係式とは違って、スモールゲイン領域は含まない。

5-1 1 + 3次元FEL分散関係式

レーザー・ビームは回折効果による広がり、3-1-1節で述べたFEL相互作用に基づく電子ビームの実効誘電率による収束作用とがつり合って、ある平衡サイズを保って伝搬するものとする。このようなイメージを想定していることは、レーザーが平面波で伝搬していることを想定していることに他ならない。そこで定常状態としてレーザー場はTEM波で伝搬するものと仮定し、その電場 E_R は

$$E_R(x, y, z, t) = E_{Rx} e_x + E_{Ry} e_y \quad (5-1-1)$$

$$E_{Rx} + iE_{Ry} = \tilde{E}_R(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)} \quad (5-1-2)$$

で与えられ、複素振幅 $\tilde{E}_R(x, y, z)$ は z についてゆっくり変化するものとする。レーザーのビームサイズによって電場の強さが変わり、FEL相互作用の強さ即ち増幅率が変わるため、回折効果はFELの動作に大きく影響する。

電子ビームに関しては、ウィグル運動の振幅 $a_w / k_w \gamma \beta_z$ は電子ビーム半径 r_b に比べて十分小さく、ウィグル運動による横方向運動は無視できるものとして、第4章で述べた1次元の取扱いが近似的に成立するものと仮定する。即ち、電子のハミルトニアンは

$$K''(\psi, \delta; z) = \left(k_w + \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) E_0 + \delta \Delta k + \frac{k}{2\gamma_z^2 E_0} \delta^2 \\ - \left\{ U(x, y, z) e^{i\psi} + U^*(x, y, z) e^{-i\psi} \right\} \left(1 - \frac{\delta}{E_0} \right) \\ + e \int E_z(x, y, z, \psi) d\psi \quad (5-1-3)$$

与えられるものとする。ここでレーザー場の電場振幅 \tilde{E}_R は (x,y) に依存していると考えているので (4-1-38) 式の

$$U(x,y,z) = -i \frac{ea_w}{2\gamma_0} \tilde{E}_R(x,y,z)$$

は (x,y,z) に依存するが、 (x,y) はパラメータと考えて正準変数ではないとする。即ち、 (ψ, δ) を正準変数とすることで、ウィグル運動による電子の横方向速度

$$v_{\perp} = -\frac{ca_w}{\gamma_0} \left\{ \cos(k_w z) \cdot e_x - \sin(k_w z) \cdot e_y \right\} \quad (5-1-4)$$

の効果はすでに $K''(\psi, \delta; z)$ に取り込まれているが、 (x,y) を正準変数ではないとすることで電子軌道は (x,y) 方向の変位を持たないと近似している (paraxial approximation)。また空間電荷電場 (longitudinal space-charge field) E_z も (x,y) に依存している。(5-1-3) 式の E_z は 1 次元取扱い、即ち暗黙の内に $\partial E_z / \partial z = -4\pi en/c$ が成立していることを前提としているが、これが成立するための条件は後で述べる。また、3 次元取扱いでは横方向空間電荷効果が存在するが、3-10 節で述べたように横方向空間電荷場はビームの収束力に影響するが FEL 相互作用には直接影響しないので考えない。

(x,y) は K'' の正準変数ではなく単なるパラメータであるとしているので、電子の密度分布関数 f に対する Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial K''}{\partial \delta} \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{\partial K''}{\partial \psi} \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \quad (5-1-5)$$

と近似される。 K'' が (x,y) をパラメータとして含むため、 f も (x,y) を含むことになる。変数は (ψ, δ, z) だけであるので分布関数の摂動部 f_1 に対して第 4 章の 1 次元モデルと全く同じ解法が成立し

$$f(x,y,z,\psi,\delta) = f_0(x,y,\delta) + f_1(x,y,z,\psi,\delta) \quad (5-1-6)$$

$$f_1(x,y,z,\psi,\delta) = \tilde{f}_1(x,y,z,\psi,\delta) e^{i\psi(t,z)} + \tilde{f}_1^*(x,y,z,\psi,\delta) e^{-i\psi(t,z)} \quad (5-1-7)$$

と置いて、 $\tilde{f}_1(x,y,z,\psi,\delta)$ の形式解が次のように書ける。

$$\tilde{f}_1(x,y,z,\psi,\delta) = -\int_0^z dz' \left\{ iU(x,y,z') - e\tilde{E}_z(x,y,z') \right\} \times \frac{\partial f_0}{\partial \delta} \exp \left\{ i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) (z' - z) \right\} \quad (5-1-8)$$

これを電流密度 \mathbf{j} の複素振幅に書き直すため、空間電荷場 E_z をもう一度考察する。摂動電流 $\mathbf{j}_1 = -e \mathbf{v} f_1 d\delta$ に対しては、電子の速度はウィグル運動による速度 \mathbf{v} のみを考えればよい。また \mathbf{v} のエネルギー依存性は大きくない ($\sim 1/\gamma$) ので $\gamma = \gamma_0$ における速度 $\mathbf{v}(z)$ で近似して良い。

$$\mathbf{j}_1(x,y,z,t) = -e \mathbf{v}(z) \int f_1(x,y,z,\psi(t,z),\delta) d\delta = -\frac{\mathbf{v}(z)}{c} \left\{ \tilde{\mathbf{j}}_1(x,y,z) e^{i\psi(t,z)} + \tilde{\mathbf{j}}_1^*(x,y,z) e^{-i\psi(t,z)} \right\} \quad (5-1-9)$$

ここで複素振幅 $\tilde{\mathbf{j}}_1$ は次式で与えられる。

$$\tilde{\mathbf{j}}_1(x,y,z) = -ec \int \tilde{f}_1(x,y,z,\delta) d\delta \quad (5-1-10)$$

次に空間電荷場 E_z を考える。 E_z は電子ビーム分布の摂動により発生するものと考えられるので次の Maxwell 方程式を満たさなくてはならない。

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 4\pi \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_{1z}}{\partial t} \quad (5-1-11)$$

ここで ρ_1 は摂動成分 f_1 による電荷密度分布の変化分である。

$$\rho_1(x,y,z,t) = -e \int f_1(x,y,\psi(t,z),\delta,z) d\delta \quad (5-1-12)$$

ρ_1 及び j_{1z} は $e^{i\psi}$ なる周期性を持つので、最低次の周期性として E_z も同じ周期構造を持つものとして

$$E_z(x,y,z,t) = \tilde{E}_z(x,y,z) e^{i\psi(t,z)} + \tilde{E}_z^*(x,y,z) e^{-i\psi(t,z)} \quad (5-1-13)$$

なる形の解を探すことにする。 \tilde{E}_z は z に関してゆっくり変化する複素振幅であるとする。これを上記の Maxwell 方程式に代入すると

$$(k_w + k) - k\beta_z = k_w + k/2\gamma_z^2 \equiv 2k_w \quad (5-1-14)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \tilde{E}_z + \frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial z^2} + 2i(k_w + k) \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial z} - (2k + k_w) k_w \tilde{E}_z \\ \equiv i \frac{8\pi k_w}{c} \tilde{j}_1 \end{aligned} \quad (5-1-15)$$

を得る。ここで $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ である。ウィグラー1周期間での \tilde{E}_z の変化は無視出来るほど小さく、またレーザー場の (x, y) 方向のビームサイズ r_R は電子から見たレーザー場の波長より十分大きい、即ち

$$|\partial \tilde{E}_z / \partial z| \ll k_w |\tilde{E}_z| \quad (5-1-16)$$

$$\gamma_z / k \ll r_R \quad (5-1-17)$$

なる条件が成立しているものとする。なお、 r_R は電子ビームのサイズ r_b と同じオーダーであるので (5-1-17) 式の条件は

$$\gamma_z / k \ll r_b \quad (5-1-18)$$

として良い。この条件はレーザー場 \mathbf{E}_R に対する方程式を近似する際にも必要となる。このとき $1/r_R^2 \ll k k_w$ より $\nabla_{\perp}^2 \tilde{E}_z$ (E_z の回折効果) を無視することができ、更に (5-1-16) 式より $\partial^2 \tilde{E}_z / \partial z^2$ を無視することで (5-1-15) 式は

$$\tilde{E}_z \equiv -i \frac{4\pi}{\omega} \tilde{j}_1 \quad (5-1-19)$$

となる。この関係式は1次元モデルの場合と同じである。1次元モデルと同じハミルトニアン $K''(\psi, \delta; z)$ (但し (x, y) をパラメーターとして含む) の導出の際に $\text{div} \mathbf{E}_R$ を1次元近似して暗黙のうちに $\partial E_z / \partial z = -4\pi en / c$ なる近似を仮定していることと矛盾しないためにも (5-1-16) 及び (5-1-18) の条件は必要である。(5-1-19) 式を (5-1-8) 式に代入し両辺を δ で積分することで次式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{j}_1(x, y, z) = ij_0(x, y) \int_0^z dz' \left\{ U(x, y, z') + \frac{4\pi c}{\omega} \tilde{j}_1(x, y, z') \right\} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{dF(\delta)}{d\delta} \exp \left\{ i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) (z' - z) \right\} \end{aligned} \quad (5-1-20)$$

ここで \mathbf{U} は \mathbf{j} が発生する電場であるので、 \mathbf{U} を \tilde{j}_1 で表すことを考えなくてはならない。レーザー場は平面波と仮定しているので電場 \mathbf{E}_R は z 成分を持たない。定常分布 $\rho_0(x, y)$ 及び定常電流 $j_0(x, y)$ はレーザー場の発生には寄与しないので、 \mathbf{E}_R に対する Maxwell 方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{E}_R - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_R}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ c^2 (\mathbf{grad} \rho_1)_{\perp} + \frac{\partial \mathbf{j}_{1\perp}}{\partial t} \right\} \quad (5-1-21)$$

である。ここで問題を簡単にするため $(\mathbf{grad} \rho_1)_{\perp}$ と $\partial \mathbf{j}_{1\perp} / \partial t$ の大小関係を調べてみる。

$$\rho_1(x, y, z, t) = \tilde{\rho}_1(x, y, z) e^{i\psi(t, z)} + \tilde{\rho}_1^*(x, y, z) e^{-i\psi(t, z)} \quad (5-1-22)$$

$$\tilde{\rho}_1(x, y, z) = -e \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(x, y, z, \delta) d\delta \quad (5-1-23)$$

とし、更に $\rho_1(x, y, z, t)$ の x, y 方向の分布がガウシアン $\sim \exp\{-(x^2 + y^2) / 2r_b^2\}$ で近似できるとすると、 $\partial \rho_1 / \partial x \equiv -(x / r_b^2) \rho_1$ 、 $\partial \rho_1 / \partial y \equiv -(y / r_b^2) \rho_1$ より

$$(\mathbf{grad} \rho_1)_{\perp}^2 \equiv \frac{x^2 + y^2}{r_b^4} |\tilde{\rho}_1|^2 \cos^2(\psi + \alpha) \quad (5-1-24)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{j}_{1\perp}}{\partial t} \right)^2 \equiv \frac{a_w^2 c^2}{\gamma_0^2} \omega^2 |\tilde{\rho}_1|^2 \sin^2(\psi + \alpha) \quad (5-1-25)$$

ここで $\rho_1 = |\rho_1| e^{i\alpha}$ とした。これより $x^2 + y^2$ が r_b^2 よりあまり大きくないような領域を考えている限りでは

$$r_b^2 \gg \frac{\gamma_0^2}{a_w^2 k^2} \quad (5-1-26)$$

であれば

$$|c^2 (\mathbf{grad} \rho_1)_{\perp}| \ll |\partial \mathbf{j}_{1\perp} / \partial t| \quad (5-1-27)$$

となり (5-1-21) 式の右辺第1項は無視できる。上の条件は $a_w > 1$ では $\gamma_z^2 \sim \gamma_0^2 / a_w^2$ であることから $r_b \gg \gamma_0 \lambda / 2\pi \sim \gamma_z \lambda / 2\pi$ として良いであろう。これは (5-1-17) 式の条件と同じものである。電子の z 方向速度が止まって見える座標系から見たレーザー場の波長は $\sim 2\gamma_z \lambda$ であり、電子ビームの

サイズが電子からみたレーザー場の波長より十分大きいと云う条件になっていると考えて良い。即ち、電子ビームから見たときに放射場の回折効果が小さいことを意味している。 $4\pi\text{gradp}_1 = \text{grad}(\text{div}\mathbf{E}_R)$ であるので、この項は回折効果による (x,y,z) 成分の混じりあいをもたらす。条件 $r_b \gg \gamma_z \lambda / 2\pi$ はこのような成分間の混じりあいが無視できるほど回折効果が小さいことを要請している。以下ではこの条件が満たされているものとして、レーザー場に対する Maxwell 方程式を

$$\nabla^2 \mathbf{E}_R - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_R}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_{1\perp}}{\partial t} \quad (5-1-28)$$

と近似する。

ウイグル運動による横方向電流の摂動成分 $\mathbf{j}_{1\perp} = -e\mathbf{v}_\perp \int f_1 d\delta$ を

$$\mathbf{j}_{1x} + i\mathbf{j}_{1y} = -\frac{a_w}{\gamma_0} e^{-ik_w z} \left\{ \tilde{j}_1(x,y,z) e^{i\psi} + \tilde{j}_1^*(x,y,z) e^{-i\psi} \right\} \quad (5-1-29)$$

と書いて、(5-1-2)式とともに Maxwell 方程式 (5-1-28)式に代入することで

$$\begin{aligned} \nabla_\perp^2 \tilde{\mathbf{E}}_R + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{E}}_R}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_R}{\partial z} \\ = i \frac{4\pi k a_w}{c\gamma_0} \left\{ \tilde{j}_1(x,y,z) - \tilde{j}_1^*(x,y,z) e^{-2i\psi} \right\} \end{aligned} \quad (5-1-30)$$

を得る。ここで $\tilde{\mathbf{E}}_R$ は z に関してゆっくり変化する振幅であるので $\nabla_\perp^2 \tilde{\mathbf{E}}_R / \partial z^2$ を無視し、右辺第 2 項は速く振動する項であるのでこれも無視することができ

$$\nabla_\perp^2 \tilde{\mathbf{E}}_R + 2ik \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_R}{\partial z} = i \frac{4\pi k a_w}{c\gamma_0} \tilde{j}_1(x,y,z) \quad (5-1-31)$$

となる。(5-1-31)式を (5-1-20)式に代入して $\tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z)$ に対する次の微積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \nabla_\perp^2 \tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z) + 2ik \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z)}{\partial z} \\ = i \frac{2\pi e k a_w^2}{c\gamma_0^2} j_0(x,y) \int_0^z dz' \left\{ \tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z') \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{2\gamma_0^2}{k^2 a_w^2} \left(\nabla_\perp^2 \tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z') + 2ik \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z')}{\partial z'} \right) \Bigg\} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{dF(\delta)}{d\delta} \exp \left\{ i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) (z' - z) \right\} \end{aligned} \quad (5-1-32)$$

これが平面波として定常的に伝搬できるレーザー場の電場 \mathbf{E}_R の振幅を決定する方程式である。1次元モデルと違うところは $\nabla_\perp^2 \tilde{\mathbf{E}}_R$ の存在であり、この項によって回折効果が取り込まれることになる。 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ として、ハイゲイン領域で

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z) = \Phi_n(r) e^{\Lambda z} \cos(n\varphi) \quad (5-1-33)$$

となる解を求める ($|\exp(\Lambda z)| \gg 1$)。 Λ が求めようとしている振幅成長率であり、 $\Phi_n(r)$ がレーザー場のプロファイルを与える。 $\nabla_\perp^2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + r^{-2} \partial^2 / \partial \varphi^2$ であることを用い、更に $|\exp(\Lambda z)| \gg 1$ を用いて z' についての積分が

$$\begin{aligned} \int_0^z dz' \tilde{\mathbf{E}}_R(x,y,z') \exp \left\{ i \left(\Delta k + \frac{k}{\gamma_z^2 E_0} \delta \right) (z' - z) \right\} \\ = \frac{\Phi_n(r) e^{\Lambda z} \cos(n\varphi)}{\Lambda + i \left(\Delta k + k\delta / \gamma_z^2 E_0 \right)} \end{aligned} \quad (5-1-34)$$

と近似できることを用いて (5-1-32)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi_n''(r) + \frac{1}{r} \Phi_n'(r) + \left(2ik\Lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n(r) \\ = i \frac{4\pi e}{ck} j_0(r) \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{dF(\delta) / d\delta}{\Lambda + i \left(\Delta k + k\delta / \gamma_z^2 E_0 \right)} \\ \times \left\{ \Phi_n''(r) + \frac{1}{r} \Phi_n'(r) + \left(2ik\Lambda + \frac{k^2 a_w^2}{2\gamma_0^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n(r) \right\} \end{aligned} \quad (5-1-35)$$

例として半径 r_b の一様分布ビームを考えると

$$j_0(r) = \begin{cases} j_0 \cdots \cdots (r \leq r_b) \\ 0 \cdots \cdots (r > r_b) \end{cases}$$

より、(5-1-35)式はベッセル型の微分方程式とな

る。

$$\Phi_n''(r) + \frac{1}{r} \Phi_n'(r) + \left(2ik\Lambda - \frac{2iD}{1 - i\Lambda_p^2 D} - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n(r) = 0 \quad \dots (r \leq r_b) \quad (5-1-36)$$

$$\Phi_n''(r) + \frac{1}{r} \Phi_n'(r) + \left(2ik\Lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) \Phi_n(r) = 0 \quad \dots (r > r_b) \quad (5-1-37)$$

ここで

$$D(\Lambda) = \frac{\pi e k a_w^2}{c \gamma_0^2} j_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\delta \frac{dF(\delta)/d\delta}{\Lambda + i(\Delta k + k\delta/\gamma_z^2 E_0)} \quad (5-1-38)$$

$$\Lambda_p = \frac{2\gamma_0}{ka_w} \quad (5-1-39)$$

である。次にゲインパラメータ Γ_{3D} を

$$\Gamma_{3D} = \left(\frac{\pi r_b^2 j_0 k^2 a_w^2}{I_A \gamma_0^3 \gamma_z^2} \right)^{1/2} \quad (5-1-40)$$

と定義して

$$\hat{r} = r/r_b \quad (5-1-41)$$

$$\hat{\Lambda} = \Lambda/\Gamma_{3D} \quad (5-1-42)$$

$$\hat{\Delta k} = \Delta k/\Gamma_{3D} \quad (5-1-43)$$

$$\hat{\delta} = k\delta/\gamma_z^2 E_0 \Gamma_{3D} \quad (5-1-44)$$

$$\hat{F}(\hat{\delta}) = \Gamma_{3D} \frac{\gamma_z^2 E_0}{k} F(\delta) \quad (5-1-45)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\hat{\delta}) d\hat{\delta} = 1 \quad (5-1-46)$$

$$\hat{D}(\hat{\Lambda}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\delta} \frac{d\hat{F}(\hat{\delta})/d\hat{\delta}}{\hat{\Lambda} + i(\hat{\Delta k} + \hat{\delta})} = r_b^2 D(\Lambda) \quad (5-1-47)$$

$$\hat{\Lambda}_p = \Lambda_p/r_b = 2\gamma_0/r_b ka_w \quad (5-1-48)$$

なる規格化をすると (5-1-36) 及び (5-1-37) 式は次のように書き直せる。

$$\Phi_n''(\hat{r}) + \frac{1}{\hat{r}} \Phi_n'(\hat{r}) + \left(\mu^2 - \frac{n^2}{\hat{r}^2} \right) \Phi_n(\hat{r}) = 0 \quad \dots (\hat{r} \leq 1) \quad (5-1-49)$$

$$\Phi_n''(\hat{r}) + \frac{1}{\hat{r}} \Phi_n'(\hat{r}) - \left(g^2 + \frac{n^2}{\hat{r}^2} \right) \Phi_n(\hat{r}) = 0 \quad \dots (\hat{r} > 1) \quad (5-1-50)$$

ここで

$$g^2 = -2iB\hat{\Lambda} \quad (5-1-51)$$

$$\mu^2 = -\frac{2i\hat{D}}{1 - i\hat{\Lambda}_p^2 \hat{D}} + 2iB\hat{\Lambda} \quad (5-1-52)$$

$$B = \Gamma_{3D} k r_b^2 \quad (5-1-53)$$

である。B は回折定数 (diffraction parameter) と呼ばれる。また Γ_{3D} と Γ_{1D} の間には

$$\Gamma_{1D} = B^{-1/3} \Gamma_{3D} \quad (5-1-54)$$

なる関係がある。(4-2-48) 及び (4-2-54) 式より、 $\hat{D}(\hat{\Lambda})$ は

a. $\hat{F}(\hat{\delta}) = \delta(\hat{\delta})$ の場合は

$$\hat{D}(\hat{\Lambda}) = \frac{i}{(\hat{\Lambda} + i\hat{\Delta k})^2} \quad (5-1-55)$$

b. $\hat{F}(\hat{\delta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta\hat{\delta}} \dots (-\Delta\hat{\delta} \leq \hat{\delta} \leq \Delta\hat{\delta}) \\ 0 \dots \dots \dots (\text{otherwise}) \end{cases}$ の場合は

$$\hat{D}(\hat{\Lambda}) = \frac{i}{(\hat{\Lambda} + i\hat{\Delta k})^2 + (\Delta\hat{\delta})^2} \quad (5-1-56)$$

となる。更に、空間電荷効果を見捨てる時は (5-1-20) 式右辺の積分の中にある $\tilde{j}_1(x, y, z')$ の項を見捨てるので、 $\hat{\Lambda}_p^2 = 0$ として良く、(5-1-52) 式は

$$\mu^2 = -2i\hat{D} + 2iB\hat{\Lambda} \quad (5-1-52')$$

となる。

(5-1-49)、(5-1-50) 式の解はベッセル関数及び変形ベッセル関数で与えられる。

$$\Phi_n(\hat{r}) = \begin{cases} C_1 J_n(\mu\hat{r}) \dots \dots (\hat{r} \leq 1) \\ C_2 K_n(g\hat{r}) \dots \dots (\hat{r} > 1) \end{cases} \quad (5-1-57)$$

$\hat{r} \leq 1$ の解と $\hat{r} > 1$ の解は $\hat{r} = 1$ (ビームの境界) で連続でなければならず、またそれらの微分係数も連続であると要請すると

$$C_1 J_n(\mu) = C_2 K_n(g) \quad (5-1-58)$$

$$\mu C_1 J'_n(\mu) = g C_2 K'_n(g) \quad (5-1-59)$$

より C_1 、 C_2 が決まり、 μ 及び g は

$$\mu J_{n+1}(\mu) K_n(g) = g J_n(\mu) K_{n+1}(g) \quad (5-1-60)$$

なる関係式を満たさなければならないことになる。これが求めている分散関係式である。これを解くことでハイゲイン領域における放射場振幅の成長率（即ち増幅率） $\hat{\Lambda}$ が求まる。また、そのときの解は次のようになる。

$$\Phi_n(\hat{r}) = \begin{cases} J_n(\mu \hat{r}) \cdots \cdots \cdots (\hat{r} \leq 1) \\ J_n(\mu) K_n(g \hat{r}) / K_n(g) \cdots \cdots (\hat{r} > 1) \end{cases} \quad (5-1-61)$$

1次元モデルとの対応

ここで1次元モデルとの対応を調べてみることにする。1次元近似が成立するためには回折効果が無視できる必要がある。これは r_b / λ が十分大きくて $B \gg 1$ 従って $|g| = |-2iB\hat{\Lambda}| \gg 1$ であることに相当する。 $|g| \rightarrow \infty$ では $K_n(g) \approx K_{n+1}(g)$ ($\approx \sqrt{\pi/2g} \exp(-g)$) と近似でき、分散関係式(5-1-60)は $J_n(\mu) \approx (\mu/g) J_{n+1} \approx 0$ と近似される。従って v_{ni} を $J_n(z)$ の i -番目の根として、 $\mu^2 \approx v_{ni}^2 \ll |g^2|$ となる。従って $\Delta\hat{\delta} = 0$ として、 $B \rightarrow \infty$ の極限では(5-1-52)、(5-1-55)式より

$$\hat{\Lambda} \{ (\hat{\Lambda} + i\hat{\Delta}k)^2 + \hat{\Lambda}_p^2 \} \approx i/B \quad (5-1-62)$$

を得る。(5-1-54)式より、(5-1-62)式は1次元近似の分散関係式(4-2-50)に一致していることが分かる ($\hat{\Lambda} B^{1/3} = \Lambda / \Gamma_{1D}$ が s に対応する)。

注：規格化について。文献9では(5-1-40)式でゲインパラメータ Γ_{3D} を定義しており本稿もそれに倣ったが、筆者には物理的なイメージが今だに不明である。個人的には1次元モデルとの対応から Γ_{1D} で規格化する方が自然な気がするのだが…

実効的エネルギー広がり

次にエネルギー広がり $\Delta\gamma/\gamma_0$ 及びエミッタンス ε のトレランスについて簡単に触れておく。3-8節で述べたように、(2-2-16)式で定義される実効的エネルギー広がり $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}} \ll \rho$ であることが必要である。 ρ はピアス・パラメータである。一方、エネルギー広がり $\Delta\hat{\delta}$ は(5-1-44)式及び $k \approx 2k_w \gamma_z^2$ を用いて $\Delta\hat{\delta} = (2k_w / \Gamma_{3D})(\Delta\gamma/\gamma_0)$ と書けるので、2-2節及び3-4節の議論からエミッタンスの効果を繰り込んで

$$\Delta\hat{\delta} = \frac{2k_w}{\Gamma_{3D}} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{eff}} \quad (5-1-63)$$

と考え直すことができる（厳密には(4-1-6)式のハミルトニアンにおいて (P_x, P_y) をパラメータとして残しておくことで、分布関数 F を $(\Delta\gamma/\gamma_0)_{\text{eff}}$ で表すことができる）。従って上の条件は

$$(\Delta\hat{\delta})^2 B^{2/3} \ll 1 \quad (5-1-64)$$

と書くことができる（これは文献10で述べている条件式 $\hat{\Lambda}_T^2 B^{2/3} \ll 1$ と同一のものである）。分散関係式(5-1-60)を解くことで成長率 Λ の $\Delta\hat{\delta}$ に対する依存性を調べることができ、文献10によれば、コールド・ビーム ($\Delta\hat{\delta} = 0$) に対して成長率 $\text{Re}(\Lambda)$ の減少が10%以下であるためには $(\Delta\hat{\delta})^2 B^{2/3} < 0.1$ 即ち

$$\frac{B^{2/3}}{\rho_{3D}^2} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)^2 + \frac{1}{B^{4/3}} \left(\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda} \right)^4 < 0.1 \quad (5-1-65)$$

であればよい。ここで $\rho_{3D} = \Gamma_{3D} / 2k_w$ である。1次元モデルとの対応のため、この条件をピアス・パラメータ $\rho = \Gamma_{1D} / 2k_w$ で書き直すと

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)^2 + \left(\gamma_z^2 \frac{\varepsilon^2}{r_b^2} \right)^2 < 0.1 \rho^2 \quad (5-1-66)$$

即ち

$$\rho^{-1} \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} \right)_{\text{eff}} < 0.32 \quad (5-1-67)$$

となる。これは3-8節で述べた1次元モデルに

おけるトレランス条件よりファクター2程度厳しくなっている(第3-4図参照)。それでもスモールゲインFELにおける条件($\varepsilon < \lambda/4\pi$)よりファクター2~6緩和されている。即ちハイゲインFELではrf-バケツが急激に成長するため電子ビームの干渉性が良くなり、エネルギー広がり及びエミッタンスに対するトレランスが緩和されることは注目してよい特徴であろう。

5-2 分散関係式の解

簡単のためコールド・ビーム($\hat{F}(\hat{\delta}) = \delta(\hat{\delta})$)の場合について、分散関係式(5-1-60)の解を求めてみることにする。 $\hat{D}(\hat{\Lambda})$ は(5-1-55)式で与えられ μ^2 は

$$\mu^2 = \frac{2}{(\hat{\Lambda} + i\Delta\hat{k})^2 + \hat{\Lambda}_p^2} + 2iB\hat{\Lambda} \quad (5-2-1)$$

となる。また、 $\hat{\Lambda}_p \ll |\hat{\Lambda}|$ であって空間電荷効果が無視できるとすると

$$\mu^2 = \frac{2}{(\hat{\Lambda} + i\Delta\hat{k})^2} + 2iB\hat{\Lambda} \quad (5-2-1')$$

である。また g^2 は(5-1-51)式で与えられている。

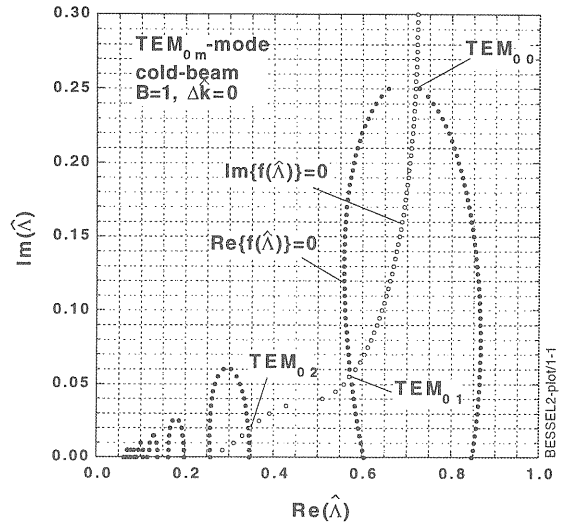
$$g^2 = -2iB\hat{\Lambda} \quad (5-1-51)$$

次に

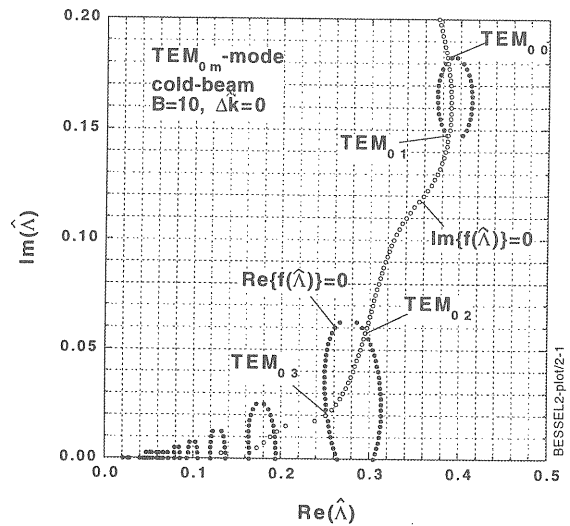
$$f(\hat{\Lambda}) = \mu J_{n+1}(\mu)/J_n(\mu) - g K_{n+1}(g)/K_n(g) \quad (5-2-2)$$

とにおいて、複素 $\hat{\Lambda}$ 平面上で $\text{Re}\{f(\hat{\Lambda})\} = 0$ 及び $\text{Im}\{f(\hat{\Lambda})\} = 0$ の軌跡をプロットすると、それぞれ第5-1図~第5-2図の黒丸及び白丸で示した軌跡となる。これら2種類の軌跡が互いに交差する点が $f(\hat{\Lambda}) = 0$ 即ち分散関係式の解を与える。

$f(\hat{\Lambda}) = 0$ の解を、絶対値 $|\hat{\Lambda}|$ の大きいものから順に0,1,2,...と番号をつけ、図中に対応するモード名 TEM_{n0} , TEM_{n1} , TEM_{n2} , ...を記してある。第5-1図は $\Delta\hat{k} = 0$, $B = 1.0$ の場合、第5-2図は $\Delta\hat{k} = 0$, $B = 10$ のときの分散関係式の解の例である。これらの解を(5-1-61)式に用いることでレーザー場のプロファイル $|\Phi_n(\hat{r})|$ が求まる。第5

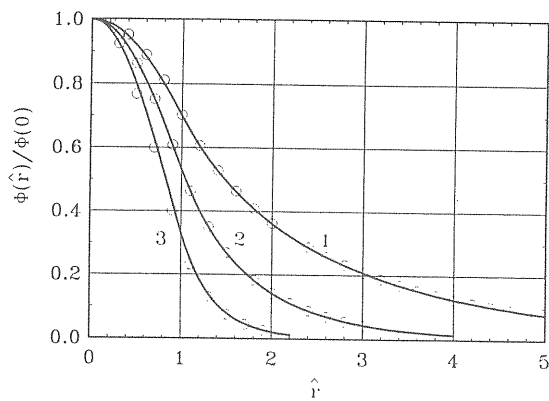


第5-1図 分散関係式の解($\Delta\hat{k} = 0$, $B = 1.0$)。

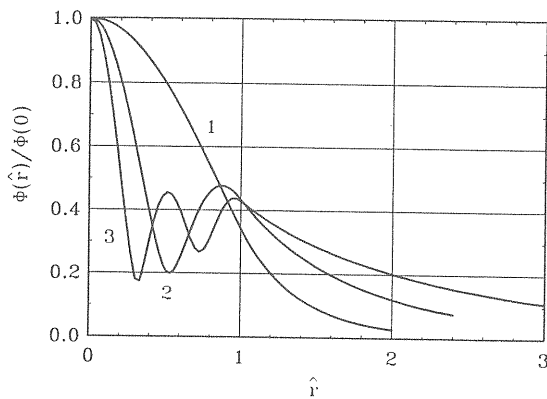


第5-2図 分散関係式の解($\Delta\hat{k} = 0$, $B = 10$)。

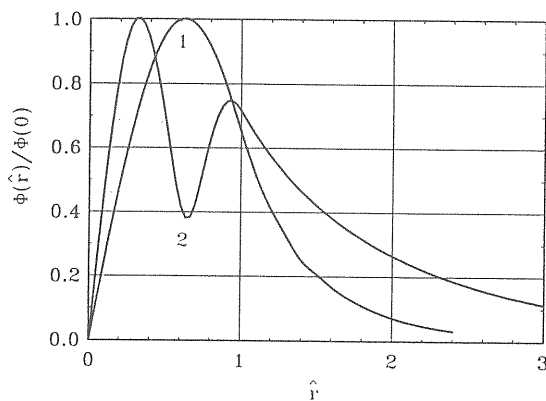
3図~第5-5図は文献9から引用したレーザー・プロファイルの例である。第5-3図は $\Delta\hat{k} = 0$ のときの TEM_{00} モードのプロファイルである。曲線(1)は $B = 0.1$, (2)は $B = 1$, (3)は $B = 10$ の場合のプロファイルを表わす。これより B が小さいときは回折効果が大きく、レーザー場は電子ビームの外部に広がっている、即ち1次元モデルで云うオーバーラップ・ファクターが小さくなるのが分かる。第5-4図は $B = 10$ の場合の(1) TEM_{00} モード($\Delta\hat{k} = 0.1$)、(2) TEM_{01} モード($\Delta\hat{k} = 0.7$)、(3) TEM_{02} モード($\Delta\hat{k} = 2$)のプロファイルを示す。また第5-5図は TEM_{1m} モードのプロファイルの例を示す。曲線(1)は TEM_{10} モ



第5-3図 レーザーのプロファイル; TEM₀₀モード。1: B=0.1、2: B=1、3: B=10; (文献9より転載)。



第5-4図 レーザーのプロファイル; TEM_{0m}モード。1: TEM₀₀($\Delta\hat{k}=0.1$)、2: TEM₀₁($\Delta\hat{k}=0.7$)、3: TEM₀₂($\Delta\hat{k}=2.0$); (文献9より転載)。



第5-5図 レーザーのプロファイル; TEM_{1m}モード。1: TEM₁₀($\Delta\hat{k}=0.2$)、2: TEM₁₁($\Delta\hat{k}=1.1$); (文献9より転載)。

ード ($\Delta\hat{k}=0.2$)、(2)は TEM₁₁ モード ($\Delta\hat{k}=1.1$) のプロファイルである。

また、オーバーラップ・ファクター F を F=1 とおいた 1次元モデルの成長率 $\Lambda_{1D} \equiv \sqrt{3}k_w\rho = (\sqrt{3}/2)\Gamma_{1D}$ (3-7-8式参照) で規格化した振幅成長率 $\text{Re}(\Lambda)/\Lambda_{1D}$ を次表に示す。ここで $\Lambda/\Lambda_{1D} = (2/\sqrt{3})B^{1/3}\hat{\Lambda}$ を用いた。

	Re(Λ)/ Λ_{1D}	
	(B=1)	(B=10)
TEM ₀₀	0.836	0.958
TEM ₀₁	0.658	0.958
TEM ₀₂	0.398	0.734
TEM ₁₀	0.602	0.883
TEM ₁₁	0.426	0.828

これより、B が小さい場合は TEM₀₀ モードがメインとなることが分かる。また TEM_{0m} モードと TEM_{1m} モードの成長率の比が大きくなり、軸対称モードがメインとなる。B が大きい場合には TEM₀₀ モードと TEM₀₁ モードの成長率はほぼ 1次元モデルの成長率 Λ_{1D} に等しくなる (第3章及び第4章で解説した 1次元モデルは TEM_{0m} モードに対応していることに注意)。なお文献 10 によればシミュレーション計算より TEM₀₀ モードの飽和パワーは B=1 では $P_{\text{sat}}/P_b \approx 0.56\rho$ 、B=10 では $P_{\text{sat}}/P_b \approx 0.64\rho$ となることが示されている。これは 1次元モデル ($P_{\text{sat}}/P_b \approx 1.37\rho$) の 40~47% である。なお、文献 9 及び 10 では種々のパラメータ依存性が詳しく調べられている。

具体例として $\lambda=6.4\text{nm}$ 、 $\gamma_0=2000$ 、 $\lambda_w=3\text{cm}$ 、 $I_b=2.5\text{kA}$ 、 $r_b=100\mu\text{m}$ の場合を考えてみよう。この場合は $a_w=0.841$ 、 $\gamma_z=1.53 \times 10^3$ より $\rho=1.95 \times 10^{-3}$ 、 $\Gamma_{1D}=8.16 \times 10^{-3}\text{cm}^{-1}$ 、 $\Gamma_{3D}=2.31 \times 10^{-2}\text{cm}^{-1}$ 、 $B=22.7$ 、 $\hat{\Lambda}_p=4.85 \times 10^{-2}$ となる。最も成長率の大きいモードを考えると $|\hat{\Lambda}| \approx 0.3 \gg \hat{\Lambda}_p$ となり、空間電荷効果は無視してよいであろう。この場合分散関係式 (5-1-61) の解は次表のようになる。

	Re($\hat{\Lambda}$)	Im($\hat{\Lambda}$)	Re(Λ)/ Λ_{1D}	Re(Λ)(m^{-1})
TEM ₀₀	0.299	0.151	0.977	0.69
TEM ₀₁	0.302	0.137	0.987	0.70
TEM ₁₀	0.286	0.116	0.935	0.66
TEM ₁₁	0.283	0.088	0.925	0.65

回折定数 B が大きいので成長率は 1 次元モデルの成長率に極めて近く、 TEM_{00} モードと TEM_{01} モードが縮退しており、この 2 つのモードがメインとなる。また各モードの飽和パワーは 1 次元モデルの 40% 強と期待されるので、この 2 つのモードを合わせた飽和パワーは 1 次元モデルの 80 ~ 90% と考えられる。また TEM_{10} 、 TEM_{11} モードも上の 2 つのモードに近い成長率を示しており伝搬モードは大分複雑である。なお上記の 4 つのモード以外は成長率が小さいので無視しても大きな影響はないであろう。この例では TEM_{0m} モードに関するグローバルな性質はほぼ 1 次元モデルで近似できると考えられる。

おわりに

拙稿をまとめるにあたって、高エネルギー加速器研究機構、物質構造科学研究所の山本樹氏には原稿に目を通していただき、また貴重な助言を頂いた。この場を借りて感謝申し上げたい。また拙稿をまとめる過程で、これまで抱いていたいくつかの疑問が氷解するとともに、筆者が FEL 研究から遠ざかっていたここ数年の FEL の進歩には目を見張る思いである。このような機会を与えていただいた物質構造科学研究所の木村嘉孝所長、加速器研究施設の鎌田進氏に感謝したい。日常業務との兼ね合いを考慮して、ずいぶん早くから執筆を始めたつもりであったが、やはり締切に追われることになってしまった。そのため数式の符号の統一が多少不完全になってしまい、まだ符号ミスが散見されるようである。誤りを見つけるのも勉強のうちと思ってご容赦願いたい。また第 5 章はもう少し具体的な例を盛り込みたいと思ったが、時間切れのためもあって E.L.Saldin et al の論文の解説に終わってしまった感があり心残りである。それでも拙稿で FEL 分散関係式について一応統一的な解説を試みたつもりである。FEL を勉強される読者に拙稿が少しでもお役に立てれば望外の喜びである。なお本稿ではシミュレーションには触れなかったが、TDA、GINGER、WIGGLIN、FRED 等有名な 3 次元シミュレーション・コードがいくつか存在し、また自発放射から SASE に至る過程もプログラムに組み込まれる等シミュレーション・コードも発達している。拙稿で解析的手法を理解された読者には、更に本格的なシミュレーションに挑戦されることを期待して筆を置くことにする。

参考文献

自由電子レーザー関連の文献はあまりにも多いので、本稿を執筆する上で主に参考としたものだけを挙げる。本文中では主なものを除いて個々の事項について特に文献の参照番号はつけなかった。第 1 章～第 3 章は主に文献 1～8 及び 12 を、第 4 章～第 5 章は文献 9 及び 10 を参考にして構成した。また本稿では触れていないが、低エネルギーでよく用いられるソレノイド収束ウィグラーに関しては文献 16 に詳しい。文献 2、3、9、16 の巻末に多くの文献リストが載っているので興味のある読者はそれらを参照されたい。

1. N.M.Kroll, P.L.Morton and M.N.Rosenbluth, IEEE J. Quantum Electronics, QE-17(1981)1436.
2. C.W.Roberson and P.Sprangle, Phys. Fluids B 1 (1989)3.
3. J.B.Murphy and C.Pellegrini, Laser Handbook, vol.6, Free Electron Lasers (edited by W.B.Colson et al. North-Holland, Amsterdam, 1990), p.9.
4. R.Bonifacio, C.Pellegrini and L.M.Narducci, Opt. Commun. 50(1984)373.
5. D.A.G.Deacon and J.M.Ortega, Laser Handbook, vol.6, Free Electron Lasers (edited by W.B.Colson et al. North-Holland, Amsterdam, 1990), p.345.
6. T.J.Orzechowski et al. Phys. Rev. A 35(1987) 2184.
7. T.J.Orzechowski et al. IEEE J. Quantum Electr. QE-21(1985)831.
8. T.J.Orzechowski et al. Phys. Rev. Lett. 57(1986) 2127.
9. E.L.Saldin, E.A.Schneidmiller and M.V.Yurkov, Phys. Rep. 260(1995)187.
10. J.Rossbach, E.L.Saldin, E.A.Schneidmiller and M.V.Yurkov, Nucl. Instrum. Meth. in Phys. Research A 374(1996)401.
11. E.T.Scharlemann et al. Nucl. Instrum. Meth. in Phys. Research A 250(1986)150.
12. S.Hiramatsu, Proc. Joint US-CERN-Japan Int. School, Frontiers of Accelerator Technology, Maui, Hawaii, 1994 (edited by S.I.Kurokawa et al. World-Scientific, 1996), p.616.
13. 新版レーザー入門、稲葉文男監修、電子情報学会、第 5 版、昭和 62 年、262 頁。

14. A VUV Free Electron Laser at the TESLA Test Facility at DESY, Conceptual Design Report, TESLA-FEL Report 95-03, 1995, DESY.
15. T.C.Marshall, Free-Electron Lasers, Macmillan, New York, 1985.
16. H.P.Freund and T.M.Antonsen, Jr, Principles of Free-electron Lasers, Chapman & Hall, London, 1992.
17. W.A.Barletta et al. Nucl. Instrum. Meth. in Phys. Research A 329(1993)348.

補足 A : バイファイラー巻ヘリカル ウィグラー (bifailer helical winding wiggler)

第 2 章では 2 つの平面ウィグラーを組み合わせて作られるヘリカル・ウィグラーについて述べたが、バイファイラー巻ヘリカル・ウィグラーの場合にも同じベータートロン振動となることを示す。バイファイラー巻ヘリカル・ウィグラーの磁場は (r, θ, z) 表示で次のように与えられる (参考文献 15)。

$$B_{wr} = 2B_w I_1'(k_w r) \sin(\theta - k_w z) \quad (A-1)$$

$$B_{w\theta} = 2B_w \frac{I_1(k_w r)}{k_w r} \cos(\theta - k_w z) \quad (A-2)$$

$$B_{wz} = 2B_w I_1(k_w r) \cos(\theta - k_w z) \quad (A-3)$$

$k_w r \ll 1$ として (x, y, z) 表示すると

$$\begin{aligned} B_{wx} &= B_w \left[\frac{k_w^2}{4} xy \cos(k_w z) \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + \frac{k_w^2}{8} (3x^2 + y^2) \right\} \sin(k_w z) \right] \\ &\equiv -B_w \sin(k_w z) \end{aligned} \quad (A-4)$$

$$\begin{aligned} B_{wy} &= B_w \left[\left\{ 1 + \frac{k_w^2}{8} (x^2 + 3y^2) \right\} \cos(k_w z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_w^2}{4} xy \sin(k_w z) \right] \\ &\equiv B_w \cos(k_w z) \end{aligned} \quad (A-5)$$

$$\begin{aligned} B_{wz} &= -B_w k_w \left(1 + \frac{k_w^2 r^2}{8} \right) \{ x \cos(k_w z) + y \sin(k_w z) \} \\ &\equiv -B_w k_w \{ x \cos(k_w z) + y \sin(k_w z) \} \end{aligned} \quad (A-6)$$

となる。これより運動方程式 $d\mathbf{v}/dz = -(e/m\gamma c v_z) \mathbf{v} \times \mathbf{B}_w$ を (x, y) について 1 次近似すると

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dz} &= \frac{eB_w}{mc\gamma} \left[\frac{v_y}{v_z} k_w \{ x \cos(k_w z) + y \sin(k_w z) \} \right. \\ &\quad \left. + \cos(k_w z) \right] \end{aligned} \quad (A-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dz} &= \frac{eB_w}{mc\gamma} \left[\frac{v_x}{v_z} k_w \{ x \cos(k_w z) + y \sin(k_w z) \} \right. \\ &\quad \left. + \sin(k_w z) \right] \end{aligned} \quad (A-8)$$

$$\frac{dv_z}{dz} = -\frac{eB_w}{mc\gamma} \left\{ \frac{v_x}{v_z} \cos(k_w z) + \frac{v_y}{v_z} \sin(k_w z) \right\} \quad (\text{A-9})$$

を得る。(v_x, v_y) のゆっくり変化する成分を (v_{xβ}, v_{yβ}) として

$$v_x = \frac{eB_w}{mc\gamma k_w} \sin(k_w z) + v_{x\beta} \quad (\text{A-10})$$

$$v_y = -\frac{eB_w}{mc\gamma k_w} \cos(k_w z) + v_{y\beta} \quad (\text{A-11})$$

とおき、z について λ_w = 2π/k_w の間で平均すると dv_z/dz ≃ 0 であるので、v_z = cβ_{z0} において (x, y) のゆっくりした変化成分に対して次の方程式を得る。

$$\frac{dx}{dz} = -k_{\beta 0}^2 x \quad (\text{A-12})$$

$$\frac{dy}{dz} = -k_{\beta 0}^2 y \quad (\text{A-13})$$

$$k_{\beta 0} = \frac{a_w k_w}{\sqrt{2}\gamma\beta_{z0}} \quad (\text{A-14})$$

ここで a_w = eB_w/mc²k_w = eA_w/mc² である。即ちバイファイラー巻ヘリカル・ウィグラー中のベータートロン振動は第2章2-1節で述べた平面ウィグラーの組み合わせで構成したヘリカル・ウィグラー中のそれと同じである ((2-1-30)、(2-1-31)、(2-1-32)式参照)。

補足B：平面ウィグラー (planar wiggler)

参考に平面ウィグラー中の電子運動を考察しておく。rotB_w = 0 を満たす平面ウィグラーの磁場のベクトル・ポテンシャル A_w は

$$\mathbf{A}_w = A_w \cosh(k_w y) \sin(k_w z) \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{B-1})$$

で与えられ、磁場 B_w は

$$\mathbf{B}_w = k_w A_w \left\{ \cosh(k_w y) \cos(k_w z) \cdot \mathbf{e}_y - \sinh(k_w y) \sin(k_w z) \cdot \mathbf{e}_z \right\} \quad (\text{B-2})$$

となる。軸上近似 (x, y) = (0, 0) では

$$\mathbf{B}_w = B_w \cos(k_w z) \cdot \mathbf{e}_y \quad (\text{B-3})$$

$$B_w = k_w A_w \quad (\text{B-4})$$

である。(B-2)式のもとでの電子のx方向の速度成分は

$$v_x = \frac{eA_w}{mc\gamma} \cosh(k_w y) \sin(k_w z) + v_x(0) \quad (\text{B-5})$$

である。ここで v_x(0) は x 方向のドリフト速度である。また y 成分 v_y については

$$\frac{dv_y}{dz} = -\frac{e}{mc\gamma} \frac{v_x}{v_z} \sinh(k_w y) \sin(k_w z) \quad (\text{B-6})$$

となる。v_y は sin²(k_wz) の項からもたらされる λ_w/2 周期の振動成分を持つ。これがいわゆる「8の字」運動である。v_z ≃ cβ_{z0} として、(B-6)式を z について λ_w の間で平均すると dv_y/dz = -k_{β0}²y 即ち

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -k_{\beta 0}^2 y \quad (\text{B-7})$$

を得る。ここで

$$k_{\beta 0} = \frac{a_w k_w}{\sqrt{2}\gamma\beta_{z0}} \quad (\text{B-8})$$

である。即ち x 方向は単なるウィグル運動

$$x = -\frac{a_w}{k_w \gamma \beta_{z0}} \cos(k_w z) \quad (\text{B-9})$$

だけであり、y 方向はウィグラーの自己収束力によるベータートロン振動

$$y = Y \cos(k_{\beta 0} z + \phi_{\beta}) \quad (\text{B-10})$$

をする。従って平面ウィグラーは x 方向に収束力を持たないので、長いウィグラーでは外部から収束力を加える必要がある。

補足 C : 正準変換

(canonical transformation)

4-1節で述べた正準変換について Goldstein のテキスト「古典力学」から抜粋して挙げておく。ハミルトンの運動方程式が不変であるような変換を正準変換 (canonical transformation) と云う。

$(q_i, p_i) (i=1, \dots, n)$ をハミルトンの運動方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q, p; t)}{\partial p_i} \quad (C-1)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(q, p; t)}{\partial q_i} \quad (C-2)$$

に従う正準変数 (canonical variable) とする。ハミルトンの運動方程式はハミルトンの変分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p; t) \right) dt = 0 \quad (C-3)$$

から導かれるので、変換された新しい正準変数

$$Q_i = Q_i(q, p; t) \quad (C-4)$$

$$P_i = P_i(q, p; t) \quad (A-5)$$

も同じ変分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P; t) \right) dt = 0 \quad (C-6)$$

を満たさなければならない。ここで (t_1, t_2) は変分の固定点、 $K(Q, P; t)$ は変換された新しいハミルトニアンである。(C-3) と (C-6) が同時に成立するためには

$$\lambda \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p; t) \right\} = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P; t) + \frac{dF}{dt} \quad (C-7)$$

であることが必要である。ここで λ は任意定数、 F は任意関数である。即ち正準変換は λ 及び F を与えれば決定されることになるので、 F を変換の母関数と云う。また $\lambda \neq 1$ 、 $F=0$ の場合をスケール変換と云う。母関数 F は新しい変数およびもとの変数の関数でなければならず、次のいずれかの形に書くことができ

$$F_1(q, Q; t), F_2(q, P; t), F_3(p, Q; t), F_4(p, P; t)$$

問題に応じていずれかを選択することになる。

C-1 : スケール変換

$$Q_i = a q_i \quad (C-8)$$

$$P_i = b p_i \quad (C-9)$$

なる場合を考える。

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{dt} &= \frac{\partial K(Q, P; t)}{\partial P_i} \\ &= ab \frac{\partial H(Q/a, P/b; t)}{\partial P_i} \end{aligned} \quad (C-10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial K(Q, P; t)}{\partial Q_i} \\ &= -ab \frac{\partial H(Q/a, P/b; t)}{\partial Q_i} \end{aligned} \quad (C-11)$$

より、新しいハミルトニアンは

$$K(Q, P; t) = abH(Q/a, P/b; t) \quad (C-12)$$

で与えられる。即ち変換 (C-8)、(C-9) は $\lambda=ab$ なるスケール変換である。

次に $\lambda=1$ なる場合に限って、正準変換

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i - K(Q, P; t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p; t) - \frac{dF}{dt} \quad (C-13)$$

が母関数 F によってどのように規定されるかを以下に列挙する。

C-2 : $F_1(q, Q; t)$

$$F = F_1(q, Q; t) \quad (C-14)$$

とする。

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1(q, Q; t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1(q, Q; t)}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1(q, Q; t)}{\partial t} \quad (C-15)$$

より

$$\begin{aligned} K(Q, P; t) - H(q, p; t) - \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ + \sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = 0 \end{aligned} \quad (C-16)$$

従って $F = F_1(q, Q; t)$ の場合の正準変換は次のように与えられる。

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q; t)}{\partial q_i} \quad (\text{C-17})$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q; t)}{\partial Q_i} \quad (\text{C-18})$$

$$K(Q, P; t) = H(q(Q, P), p(Q, P); t) + \frac{\partial F_1(q(Q, P), Q; t)}{\partial t} \quad (\text{C-19})$$

C - 3 : $F_2(q, P; t)$

$$F = F_2(q, P; t) - \sum_i P_i Q_i(q, P) \quad (\text{C-20})$$

と置くと

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_2(q, P; t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_2(q, P; t)}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2(q, P; t)}{\partial t} - \sum_i \dot{P}_i Q_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i \quad (\text{C-21})$$

より

$$K(Q, P; t) - H(q, p; t) - \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left(Q_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i = 0 \quad (\text{C-22})$$

従って

$$p_i = \frac{\partial F_2(q, P; t)}{\partial q_i} \quad (\text{C-23})$$

$$Q_i = -\frac{\partial F_2(q, P; t)}{\partial P_i} \quad (\text{A-24})$$

$$K(Q, P; t) = H(q(Q, P), p(Q, P); t) + \frac{\partial F_2(q(Q, P), P; t)}{\partial t} \quad (\text{C-25})$$

C - 4 : $F_3(p, Q; t)$

$$F(p, Q; t) = F_3(p, Q; t) + \sum_i q_i p_i \quad (\text{C-26})$$

と置くと

$$\frac{dF(p, Q; t)}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_3(p, Q; t)}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F_3(p, Q; t)}{\partial Q_i} \dot{Q}_i$$

$$+ \frac{\partial F_3(p, Q; t)}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i p_i + \sum_i q_i \dot{p}_i \quad (\text{C-27})$$

より

$$K(Q, P; t) - H(q, p; t) - \frac{\partial F_3}{\partial t} - \sum_i \left(q_i + \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \right) \dot{p}_i - \sum_i \left(P_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i = 0 \quad (\text{C-28})$$

従って

$$q_i = -\frac{\partial F_3(p, Q; t)}{\partial p_i} \quad (\text{C-29})$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3(p, Q; t)}{\partial Q_i} \quad (\text{C-30})$$

$$K(Q, P; t) = H(q(Q, P), p(Q, P); t) + \frac{\partial F_3(p(Q, P), Q; t)}{\partial t} \quad (\text{C-31})$$

C - 5 : $F_4(p, P; t)$

$$F = F_4(p, P; t) + \sum_i q_i p_i - \sum_i Q_i P_i \quad (\text{C-32})$$

と置くと

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_4(p, P; t)}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_i \frac{\partial F_4(p, P; t)}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_4(p, P; t)}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i p_i + \sum_i q_i \dot{p}_i - \sum_i \dot{Q}_i P_i - \sum_i Q_i \dot{P}_i \quad (\text{C-33})$$

より

$$K(Q, P; t) - H(q, p; t) - \frac{\partial F_4}{\partial t} - \sum_i \left(q_i + \frac{\partial F_4}{\partial p_i} \right) \dot{p}_i + \sum_i \left(Q_i - \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i = 0 \quad (\text{C-34})$$

従って

$$q_i = -\frac{\partial F_4(p, P; t)}{\partial p_i} \quad (\text{C-35})$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4(p, P; t)}{\partial P_i} \quad (\text{C-36})$$

$$K(Q, P; t) = H(q(Q, P), p(Q, P); t) + \frac{\partial F_4(p(Q, P), P; t)}{\partial t} \quad (\text{C-37})$$

補足 D : ゲージ変換

(gauge transformation)

第4章で述べた1次元FELモデルにおける電子のハミルトニアンを導出する際に、E.L.Saldin達に従って $\Phi=0$ となるゲージを仮定したが、これがどのようなゲージかを考察してみる。ここではSI単位系を用いる。ベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ 及び静電ポテンシャル $\Phi(\mathbf{x},t)$ で書いたMaxwell方程式は

$$\mathbf{grad}\left(\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{i} \quad (\text{D-1})$$

$$\text{div}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) + \nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{D-2})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}\Phi \quad (\text{D-3})$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (\text{D-4})$$

で与えられ、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} はゲージ変換

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\chi \quad (\text{D-5})$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (\text{D-6})$$

のもとで不変である。ここで $\chi(\mathbf{x},t)$ は微分可能な任意関数である。

χ の任意性を制限したものがローレンツゲージやクーロンゲージ等の特定のゲージである。例えばローレンツゲージでは \mathbf{A} 、 Φ は次の関係をみたさなければならない(ローレンツ条件)。

$$\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{D-7})$$

このとき $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ 、 $\Phi(\mathbf{x},t)$ は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{i} \quad (\text{D-8})$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{D-9})$$

を満たし、この方程式はローレンツ条件を満たすゲージ変換で不変である。 \mathbf{A}' 、 Φ' に対するMaxwell方程式は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{A}' = \mu_0\mathbf{i} + \mathbf{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\chi \quad (\text{D-10})$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Phi' = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\chi \quad (\text{D-11})$$

となるので、 χ としては

$$\mathbf{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\chi = 0 \quad (\text{D-12})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\chi = 0 \quad (\text{D-13})$$

を満たすものならば何でも良い。このうち最も簡単なものは

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\chi = 0 \quad (\text{D-14})$$

を満たす χ である(制限されたローレンツゲージ変換)。

さて、 $\Phi'=0$ となる χ が存在するものとする、この Φ' は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Phi' = 0 \quad (\text{D-15})$$

であるので、 $\rho \neq 0$ の場合はローレンツゲージのもとでの \mathbf{A} 、 Φ に対するMaxwell方程式を満たしていない。従ってローレンツゲージでは $\Phi'=0$ とするゲージ変換は存在しない。またクーロンゲージ($\text{div}\mathbf{A}=0$)では $\nabla^2\Phi = -\rho/\epsilon_0$ であるので、 $\rho \neq 0$ で $\Phi'=0$ なるゲージはクーロンゲージでもない。特殊なゲージの場合は \mathbf{A} 、 Φ と \mathbf{E} 、 \mathbf{B} の対応が複雑になる場合があるが、1次元のポテンシャルを仮定した場合には混乱はないようである。

$\Phi'=0$ なるゲージ変換は $\chi = \int \Phi dt$ で与えられる。

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\left(\int \Phi dt\right) \quad (\text{D-16})$$

$$\Phi' = 0 \quad (\text{D-17})$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} - \mathbf{grad}\Phi = -\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} \quad (\text{D-18})$$

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}' \quad (\text{D-19})$$

\mathbf{A}' に対するMaxwell方程式は

$$\mathbf{grad}(\text{div}\mathbf{A}') + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{A}' = \mu_0\mathbf{i} \quad (\text{D-20})$$

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{D-21})$$

である。

変数が1次元の場合を考えてみる。 $\mathbf{i} = \mathbf{i}(z, t)$ 、 $\rho = \rho(z, t)$ 、 $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(z, t)$ の場合は、電荷の保存式 $\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div} \mathbf{i} = -\partial i_z / \partial z$ を用いて、(B-20)式の z 成分と (B-21)式は同じものであることが云え、方程式は (x, y) 成分と z 成分に分離される。

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\mathbf{A}'_x \mathbf{e}_x + \mathbf{A}'_y \mathbf{e}_y) = \mu_0 (i_x \mathbf{e}_x + i_y \mathbf{e}_y) \quad (\text{D-22})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}'_z}{\partial z \partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (\text{D-23})$$

即ち、1次元変数の場合にはこのゲージでは \mathbf{A}'_z がクーロンゲージでの Φ の役割をしている。 \mathbf{A}'_z 及び E_z は ρ (空間電荷密度) のみによって決まるので、 E_z を空間電荷電場と考えて良いことが分かる。

補足 E : 一般のゲージによるハミルトニアン の導出

ハミルトニアン $K''(\psi, \delta; z)$ の近似形を求めるのに、あまりなじみのない $\Phi = 0$ なるゲージを用いたので、このようなゲージを用いないで $K''(\psi, \delta; z)$ の近似形を求めてみる。

$$\gamma_z^2 = \gamma_0^2 / (1 + e^2 \mathbf{A}_w^2 / m^2 c^4) \quad (\text{E-1})$$

$$\beta_z^2 = 1 - 1/\gamma_z^2 \quad (\text{E-2})$$

$$\sqrt{E_0^2 - e^2 \mathbf{A}_w^2 - m^2 c^4} = E_0 \sqrt{1 - 1/\gamma_z^2} = E_0 \beta_z \quad (\text{E-3})$$

$$\sqrt{(\delta + E_0)^2 - e^2 \mathbf{A}_w^2 - m^2 c^4} \equiv E_0 \beta_z + \delta / \beta_z - \delta^2 / 2E_0 \beta_z^3 \gamma_z^2 \quad (\text{E-4})$$

$$1/\sqrt{(\delta + E_0)^2 - e^2 \mathbf{A}_w^2 - m^2 c^4} \equiv 1/E_0 \beta_z - \delta/E_0^2 \beta_z^3 + (3 - \beta_z) \delta^2 / 2E_0^3 \beta_z^4 \quad (\text{E-5})$$

を用いて

$$K''(\psi, \delta; z) = (k_w + k)(\delta + E_0) - k \sqrt{(\delta + E_0 + e\Phi)^2 - e^2 (\mathbf{A} + \mathbf{A}_w)^2 - m^2 c^4} + \frac{e\omega}{c} A_z + \psi \frac{dE_0}{dz} \quad (\text{E-6})$$

を \mathbf{A} 及び Φ について1次近似し、更に δ について2次まで近似すると

$$K''(\psi, \delta; z) = \left(k_w + \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) E_0 + \left(k_w - \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) \delta + \frac{k}{2\gamma_z^2 \beta_z^2 E_0} \delta^2 + \frac{ke^2}{E_0 \beta_z} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_w \left(1 - \frac{\delta}{E_0 \beta_z^2} + \frac{\delta^2}{E_0^2 \beta_z^3} \right) + ke \left(A_z - \frac{\Phi}{\beta'_z} \right) + \psi \frac{dE_0}{dz} \quad (\text{E-7})$$

となる。ここで

$$\beta'_z = 1 - \frac{1 + e^2 \mathbf{A}_w^2 / m^2 c^4}{(E_0 + \delta) / mc^2} \quad (\text{E-8})$$

はエネルギーが $E_e = E_0 + \delta$ の電子の z 方向速度である。また、 $\partial \Phi / \partial z$ において

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = (k_w + k) \frac{\partial \Phi(\psi, z)}{\partial \psi} + \frac{\partial \Phi(\psi, z)}{\partial z} \equiv (k_w + k) \frac{\partial \Phi(\psi, z)}{\partial \psi} \quad (\text{E-9})$$

と近似できるものとする (これは $\tilde{\Phi}(z)$ を z とともにゆっくり変化する関数として、 $\Phi(\psi, z) = \tilde{\Phi}(z) \exp(i\psi) + \text{c.c.}$ と書けるであろうと云うことを暗黙の内に想定している)。

$$E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \equiv k \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - (k_w + k) \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \quad (\text{E-10})$$

より

$$A_z - \frac{k_w + k}{k} \Phi \equiv \frac{1}{k} \int E_z(\psi, z) d\psi \quad (\text{E-11})$$

従って、 $\beta'_z \equiv k / (k_w + k)$ とすると

$$A_z - \frac{\Phi}{\beta'_z} \equiv \frac{1}{k} \int E_z(\psi, z) d\psi \quad (\text{E-12})$$

となる。そこで (C-7)式において高次項 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_w \delta^2$ を無視すると

$$K''(\psi, \delta; z) = \left(k_w + \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) E_0 + \left(k_w - \frac{k}{2\gamma_z^2} \right) \delta + \frac{k}{2\gamma_z^2 \beta_z^2 E_0} \delta^2 + \frac{ke^2}{E_0 \beta_z} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_w \left(1 - \frac{\delta}{E_0 \beta_z^2} \right)$$

$$+e\int E_z(\psi, z)d\psi + \psi \frac{dE_0}{dz} \quad (\text{E-13})$$

となり、(4-1-33)式に一致する。ここではKMR方程式の考察から $\beta'_z \cong k/(k_w + k)$ と仮定したが、この仮定の代わりに $\beta'_z \cong 1$ を仮定して $A_z - \Phi/\beta'_z \cong A_z - \Phi$ とし、 $k \gg k_w$ より $k_w + k \cong k$ と近似しても良い。