

自由電子レーザー光の特性と評価

はじめに

自由電子レーザー (Free-Electron Laser, 以下略して FEL と記す) は電子源 (陽電子源), アンジュレータ, 光共振器を含む光学系, 利用実験装置等から成るシステムである。本稿では FEL で得られる光の特性とその評価に関して述べるが, 議論の都合上, 最初に FEL の基本的な事柄を簡単に示し, 通常のレーザーとの比較, 内外の状況を述べる。次に, 光共振器を含む光学系でのレーザー光の伝搬についての初歩的な事項をまとめ, FEL の基本パラメータである増幅率の測定法について述べる。

1. FEL の概要

FEL は, 真空中をほぼ光速で蛇行する電子 (陽電子) が電磁場と相互作用し, 吸収を上回る誘導放出を得て電磁波の増幅・発振を行う装置である。現在, マイクロ波から紫外線の領域で発振可能なことが報告されている。また, 将来的には軟 X 線 ~ X 線領域での増幅・発振が期待されている。

歴史的には, 1970 年に Stanford 大学の Madey により原理が提案され, 1975 年, 彼のグループが $10.6\mu\text{m}$ での増幅実験を行い, 1977 年に $3.4\mu\text{m}$ での発振に成功し, その基礎が確立された。

FEL の特徴は, 1) 波長連続可変 (増幅率は波長の $3/2$ 乗に比例し, 短波長の発振は難しい), 2) 赤外より長波長で数 MW 以上のピーク出力, 3) 軟 X 線 ~ X 線領域での増幅・発振の期待 (衝突実験用線型加速器の利用), 等であろう。

1. 1 FEL の構成

(1) 相対論的電子の利用

可視領域より短波長での発振を考える場合, 電子エネルギーは数十 MeV 以上となり, 電子はほぼ光速で運動する。また, 電子ビームはここではバンチングしているとする。この電子バンチの空間分布は 3 次元のガウス分布をしている。

(2) 装置

図 1 に示すように, 電子源 (蓄積リング, 線型加速器等), 電子の蛇行装置 (ここではアンジュレー

タとする), 光共振器, 等から成る。

発振は, ショット雑音を種として電子バンチの増幅作用により光パルスが成長し, 共振器により特定のモードが選択されて起こる。このとき, 光が共振器を 1 往復する周期と, 電子バンチの周期が一致することが必要である。

電子バンチは増幅作用の結果, エネルギー幅が広がりエネルギーもシフトして増幅作用を失う。増幅率が共振器損失と釣り合った時平衡に達する。

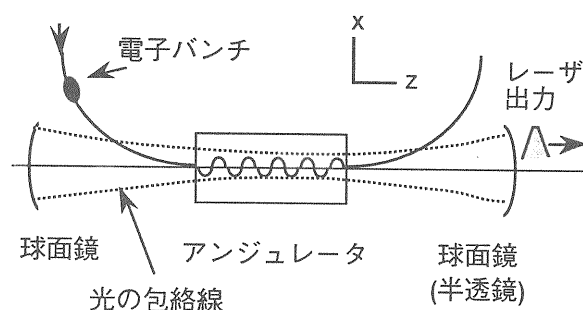


図 1 自由電子レーザーの構成 (発振システム)

1. 2 基本事項

(1) 自然放出

図 1 に示すアンジュレータを電子バンチが通過すると, アンジュレータ放射光が放射される。この時, 個々の電子は近似的には進行方向に直角な向きに振動する電気双極子である。電子間の位相はランダムゆえ, 放射される電磁波の位相もランダムであり, 自然放出が起こっていると言える。放射の強度は電子数に比例する。

図 1 で電子は z 軸に沿って進み xz 面内で N 回蛇行するとする。アンジュレータ放射光 (自然放出光) の波長 λ_k は,

$$\lambda_k = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2 k} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right) \quad (1)$$

但し,

$$\gamma = E/mc^2 = E(\text{MeV})/0.511(\text{MeV}) \quad (2)$$

$$K = \frac{eB_0\lambda_0}{2\pi mc} = 93.372B_0(\text{T})\lambda_0(\text{m}) \quad (3)$$

λ_0 はアンジュレータの磁場周期長, K はアンジュレータの偏向定数, γ はローレンツ因子, θ は光の観測方向と z 軸のはさむ角度, k は高次光の次数, E は電子のエネルギー, m は電子の静止質量, c は光速, e は素電荷, B_0 はアンジュレータのピーク磁束密度を表す。通常 $K=1-3$ に選び, λ_0 は数cm以上である。 $K=1$ ($B_0=0.214\text{T}$), $\lambda_0=5\text{cm}$, $E=2.5\text{GeV}$ ($\gamma=4892$)とし, z 軸上 ($\theta=0$; このとき k は奇数のみ) で基本波 ($k=1$) の波長を測定すると, $\lambda_1=1.57\text{nm}$ を得る。

波長 λ_k の光のスペクトル幅は, 磁場周期数を N として (ω は角周波数),

$$\frac{\Delta\lambda_k}{\lambda_k} = \frac{\Delta\omega_k}{\omega_k} = \frac{1}{Nk} \quad (4)$$

即ち, N が大きいほどスペクトル幅は狭く出来る。一般に, N は数十~100のオーダーである。このスペクトル幅からフーリエ変換により光の時間幅を概算できて, λ_k の光の波連の長さ l_{sp} は,

$$l_{sp} \approx Nk \cdot \lambda_k = Nk \frac{\lambda_1}{k} = N\lambda_1 \quad (5)$$

となる。上式は z 軸上を蛇行する1電子の同位相点からの周期的発光に着目すれば, 基本波では N 回繰り返すことから理解できる。

FELでは自然放光は増幅が始まるための種となるが, 式(5)に示した特徴を持ち次に示すレーザー光とは大きく異なっている。

(2) 増幅と発振

1) 誘導放出と吸収

FELの基本は, 光がアンジュレータ中で蛇行電子の運動エネルギーの一部を得て増幅されることにある。誘導放出と(誘導)吸収は同時に起こっているが, ある電子エネルギーに対して誘導放出と吸収を起こす光子エネルギーがわずかに異なるため(あるいは, 着目する波長に対して誘導放出と吸収を起こす電子エネルギーがわずかに異なるため), 吸収を上回る誘導放出を得ることが可能となり増幅作用が起こる。この様子は図2に示すように増幅率で表すことが出来る。

2) 共鳴条件

FEL光の特徴を理解するために, 増幅作用の古典

的な描像を以下に示す。エネルギー E , 速度 v の蛇行電子が直線偏光した光(波長 λ)と同軸上を進むとし, 蛇行面と電場ベクトル E の振動面が一致しているとす。図3に示すように, 1電子がA点からB点へ磁場周期長 λ_0 を進む間に電磁波が1波長だけ追い抜く条件を共鳴条件と言う。このとき, A点に対して電磁波の位相を適当に選ぶと, 1電子が磁場周期長 λ_0 を進む間, $dE/dt = -eE v$ の値は常に負あるいは正とすることが出来る。図3の場合は電子がエネルギーを失い増幅が起こる。

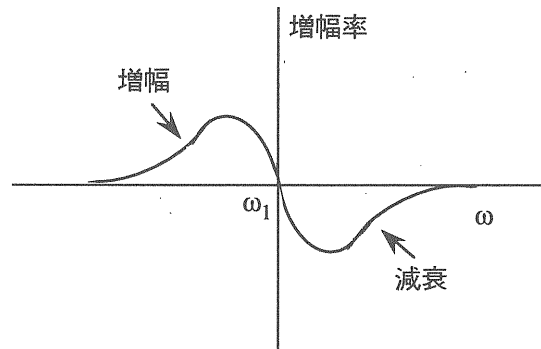


図2 増幅率の ω 依存性(誘導放出から吸収の確率を引いた結果)

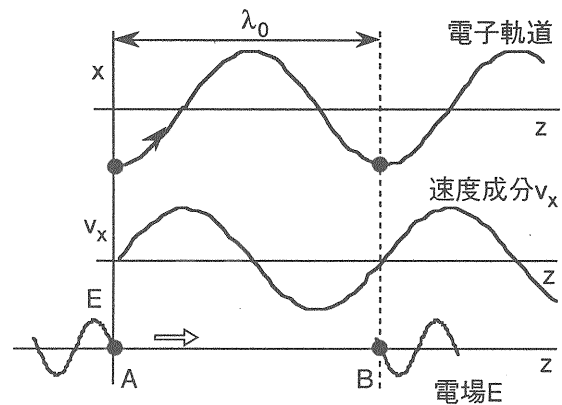


図3 共鳴条件

この現象は電子がアンジュレータを1回通り抜ける間に N 回繰り返される。 $dE/dt < 0$ の時, 光の増幅が起こり, $dE/dt > 0$ の時電子が加速される。共鳴条件が成り立つ時, 電子速度の z 成分の平均を $\langle v_z \rangle$ とすると

$$\frac{\lambda_0}{\langle v_z \rangle} = \frac{\lambda_0 + \lambda}{c} \quad (6)$$

これから

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right) \quad (7)$$

を得る。電子エネルギーを固定した時、共鳴条件を満たす光の波長は式(1)から自然放出光の基本波の波長に等しいことが分かる。波長を固定した時は、共鳴条件を満たす電子エネルギーは自然放出光の基本波を与える電子エネルギーに等しく、これを共鳴エネルギーとよび γ_r と書く。以下、波長を固定しよう。

現実には、電子バンチ中の個々の電子が共鳴条件を満たす場合を考える。この時、電磁波に対する各々の電子の位相関係はランダムであろう。従って、全電子のエネルギー変化の位相平均はゼロであり、正味のエネルギーの増減は生じない（増幅も減衰も起こらない）。しかし、増幅作用を得るために必要なマイクロバンチングが起こる。これは位相の揃った電気双極子からの自然放出（超放射）を得るための基本ともなる。

3) マイクロバンチング

マイクロバンチングとは、電子バンチ中の電子が z 軸に沿ってほぼ光の波長 λ の間隔で集群する現象である。そのメカニズムは次のように説明出来る。電子1~5が図4に示すように z 軸上に1次元にならんとするとする。位相のそろった光に対して各々の電子は順次共鳴条件を満たしつつ蛇行運動する。図4で、電子(1~5)は1が減速、3が加速、2、4が加減速なし、5は1と同位相である。この結果、運動の初期には電子1と3は2に近づく。4は不安定位置にあり、3または5に近づく。

マイクロバンチの間隔 l_μ は電子1と同位相の電子5の間隔に等しい。 l_μ を求める。電磁波が図4のA点を1波長通過する間に、A点で電子が1から5まで移動するから、

$$\frac{l_\mu}{\langle v_z \rangle} = \frac{\lambda}{c} \quad (8)$$

これと式(6)より

$$l_\mu = \frac{\lambda \lambda_0}{(\lambda + \lambda_0)} \approx \lambda \quad (\because \lambda \ll \lambda_0) \quad (9)$$

すなわち、電子バンチは z 方向に速度 $\langle v_z \rangle$ で進む周期 l_μ のポテンシャル中を運動していると言える。

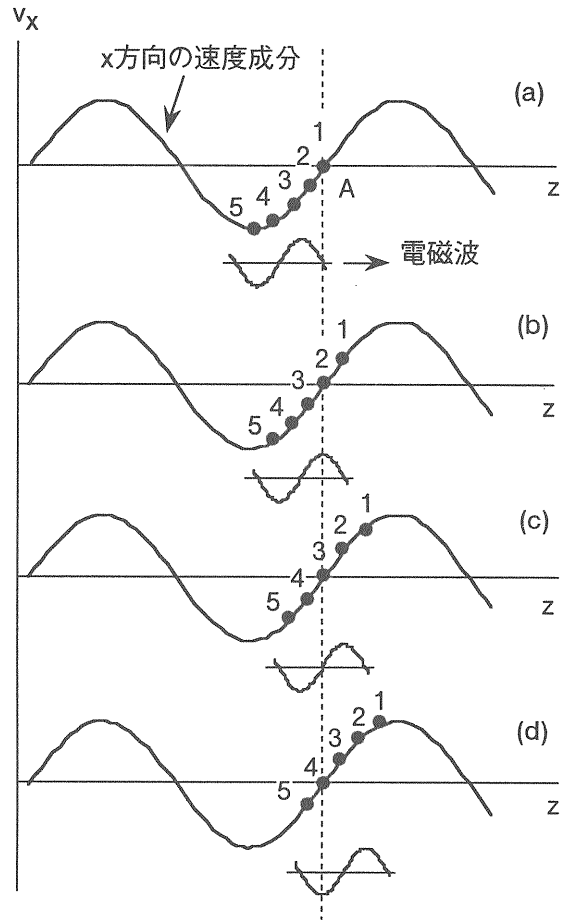


図4 電子の軌道上での加速と減速

4) 増幅の条件

増幅は、共鳴条件を満たす時の電子バンチの速度成分 $\langle v_z \rangle = \langle v_z \rangle$ より $\langle v_z \rangle$ が僅かに速い場合に起こる。このとき電子密度の大きい部分がポテンシャルにより減速され、電磁波は増幅される。

5) 増幅率

電子と電磁波が相互作用している間、電場 E の変化が小さいと仮定する。次の1電子運動方程式から増幅率 G がもとまる。

$$\frac{dE}{dt} = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (10)$$

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \quad (11)$$

増幅率 G の計算結果のみ示す。

$$G = 2\sqrt{2}\pi^2\lambda_0^{1/2}\lambda^{3/2}N^3 \cdot \frac{K^2}{\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^{3/2}} \frac{I}{I_A \langle \Sigma_{la} \rangle} F(K)C(x) \quad (12)$$

ここで、 I は電子バンチのピーク電流値、 I_A はAlfen current,

$$I_A = 4\pi\epsilon_0 mc^3/e = 1.7 \times 10^4 \text{ [Amp]} \quad (13)$$

である。 $\langle \Sigma_{la} \rangle$ は光の平均断面積であり、常に電子バンチの平均断面積 $\langle \Sigma_e \rangle (=2\pi\sigma_x\sigma_y)$ の方が小さいと仮定した。また γ を入射電子エネルギー、 γ_r を共鳴エネルギーとして、

$$F(K) = \left[J_0 \left(\frac{K^2}{4(1+K^2/2)} \right) - J_1 \left(\frac{K^2}{4(1+K^2/2)} \right) \right] \quad (14)$$

$$C(x) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \quad (15)$$

$$x = 2N\pi \frac{(\gamma - \gamma_r)}{\gamma_r} \quad (16)$$

さらに、ピーク電流値 I は、 $\langle I \rangle$ を(蓄積リングなどの)平均電流値、 σ_z を電子バンチ長(標準偏差を長さで表したもの)、 ω_R を電子バンチの繰り返し角周波数とすると、

$$I = \langle I \rangle \frac{c\sqrt{2\pi}}{\sigma_z \omega_R} \quad (17)$$

G の電子エネルギー依存性は $C(x)$ で表される(図5)。 $C(x)$ は $x=5/4$ のとき最大値0.54をとる。

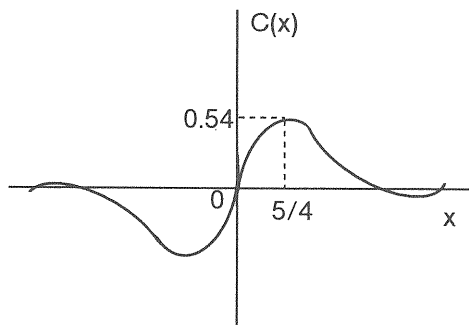


図5 $C(x)$ のグラフ

増幅率 G の式(12)において、光の平均断面積 $\langle \Sigma_{la} \rangle$ は後に説明する光共振器中での光強度の分布を考慮して次式で近似出来る(式(46)を使いアンジュレータ中での平均断面積を求め、それを最小にするビームウエストでの w_0 を決めれば良い)。

$$\langle \Sigma_{la} \rangle = \frac{N\lambda_0\lambda}{\sqrt{3}} \quad (18)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{N\lambda_0\lambda}{2\pi\sqrt{3}}}$$

G の値を見積もっておこう。 $\lambda=1\mu\text{m}$, $\lambda_0=5\text{cm}$, $K=1$ ($E=114\text{MeV}$), $C(x)=0.54$, $N=50$, $\langle \Sigma_{la} \rangle=1.4\text{mm}^2$ ($w_0=0.48\text{mm}$)のとき、 $G=2.9 \times 10^3 I$ である。共振器の損失が3%の時、発振するために必要なピーク電流値 I は10.3A以上となる。

6) スペクトル幅

誘導放出により増幅される光は、種光の位相、スペクトル幅、偏光特性、等を保つ。しかし、電子バンチはパルスであるため、その部分でのみ増幅が起こる。発振の場合も、電子バンチの周期と光共振器中で光が1往復する時間が一致する時のみ発振する。この場合の光はパルス光である。このパルス光のスペクトル幅は、概ね、電子バンチに形成されるマイクロバンチの数で決まる。即ち、

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \quad (19)$$

σ_z を10cmとすると、スペクトル幅は、 4.0×10^6 と見積もることが出来る。実際には、電子と光の相互作用によりバンチ長が変化する等の現象がありその影響を受けることになる。

1. 3 内外の状況

最近では、Duke大学のグループが蓄積リングを使ったFELで発振実験に成功している。波長は380nmを中心として345-413nmの範囲、パワーは0.15Wである。また、最短波長のFELはNovosibirsk, Okazakiでの240nmである。

ここでは、増幅率が小さい場合を扱ったが、増幅率が大きいばあい(ピーク電流値が大きい場合)には光の増幅過程は非線型的なふるまいを示す。例えばLawrence Livermore National Lab.では、誘導型の線型加速器(3.5MeV, 850A, パルス幅~10ns)で波

長8.7mm, 50kWのマイクロ波を増幅し, 1回通過で1GWを得ている。

この方式では, 種光が無くても, ショット雑音から増幅光を得ることが可能であり, 最近急速な進歩が得られている。SASE (Self-amplified spontaneous emission) と呼ばれるものであり, LUREで5-10 μ m, Brookhaven Nat'l Lab.で1.064 μ m, UCLAで16 μ mの波長においてSASEが得られている。

SASEは共振器を必要としないので, 現在, 軟X線~X線領域の高輝度, 短パルス光を得るプロジェクト (ドイツのTESLA, 米国のSLAC-LCLS) が進められている。講義ではSASEで得られる光の性質についても説明する予定である。

1. 4 通常のレーザとの比較

(1) 長波長域 (>10 μ m)

自由電子レーザは高出力であり, かつ広い波長域をカバー出来る。

(2) 赤外~紫外領域 (10 μ m~100nm)

一般に通常のレーザが高出力であり波長も連続可変に出来る。一例として, 高次の非線形分極による高調波 ($\omega \rightarrow 2\omega, 3\omega$), 和周波 ($\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_1 + \omega_2$), 和周波の逆過程である光パラメトリック発振 ($\omega = \omega_1 + \omega_2 \rightarrow \omega_1, \omega_2$) 等を利用し, 広い波長範囲を連続的にカバー出来るものが市販されている。このようなレーザでは固体レーザ媒質として幅広い発光スペクトルを示すTi:Al₂O₃ (Ti:サファイア) や, Cr:BeAl₂O₄ (アレキサンドライト) などを用いる。例えばTi:サファイアレーザでは, 発光スペクトル領域690~1050nmでの発振, その2倍高調波350~500nm, 3倍高調波240~320nm, および, KTPを用いた光パラメトリック過程による1040~1350nm, その2倍高調波520~675nm, アイドラー波2400~3100nm, さらに, CTAを用いた光パラメトリック過程による1350~1600nm, そのアイドラー波1600~2000nmでレーザ光が得られる。結局, 240~3100nmの波長域をほぼ連続的にカバー出来ることになる。また, レーザ媒質の発光スペクトル領域が広いために, フェムト秒オーダーの極短パルスを発生させることも出来る。他にAr₂ (126nm), ArF (193nm), KrF (248nm) 等のエキシマレーザが開発されている。

(3) 短波長域 (<100nm)

KrFレーザの7次 (35nm), 17次 (14.5nm), 25次 (10nm) の各高調波が得られている。また高温高

密度プラズマによる軟X線レーザも試みられており, 将来, 進展が得られる可能性は大きい。一方, 自由電子レーザの可能性もこの波長域にあるものと考えられる。特に, 実用上, 軟X線~X線領域でレーザ光が得られることのインパクトは大きく, 自由電子をレーザ媒質とする種々の増幅, 発振方式が検討されている。

2. レーザ光と光学系

2. 1 レーザ光の特徴

レーザ光は単色光であるため時間に関するフーリエ変換の結果古典的には波連の長い波動が得られる。即ち, 時間コヒーレンスが良い。また, 指向性が良いため空間に関するフーリエ変換の結果単一に近い波数ベクトルの波動が得られる。即ち, 空間コヒーレンスが良い。レーザ光は空間・時間コヒーレンスの極限にある光と言える。以下では, はじめに幾何光学を取り上げ, 次に光を波動的に扱い, 実際のレーザ光の伝搬について調べる。

2. 2 幾何光学

自由電子レーザ光の伝搬を考える。ここでは幾何光学の範囲で扱う。つまりレンズ系の有限開口のために生じる回折現象が無視できるとする。

(1) 近軸光線

物体の一点から出た光のすべてが像の1点に集まる場合, 収差なしで結像出来る。物体から出る光線は, 図6に示すように, レンズ系の入射面で光軸 (z軸) に垂直な面との交点の座標 (x, y) と, その点でのx, y軸に対する方向余弦 (ξ, η) で指定できる。レンズ系を通過した光線は, 出射面において座標 (x', y') と方向余弦 (ξ', η') で表わされる。x, y, $\xi, \eta, x', y', \xi', \eta'$ はすべてが独立ではなく, 光学系 (レンズ系) が決まればその特性関数を用いてx, y, ξ, η からx', y', ξ', η' を計算することが出来る。

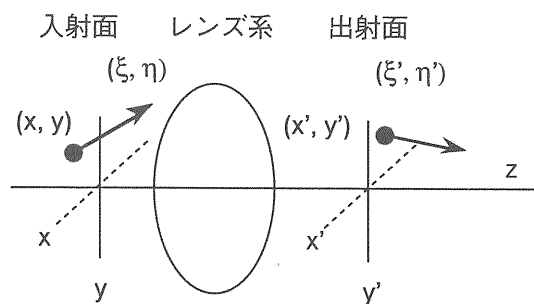


図6 光学系

次に、光学系の開口が充分小さい場合、あるいは光線が光軸近傍でのみ伝搬する近軸光線 (paraxial ray) の場合には、 $x, y, \xi, \eta, x', y', \xi', \eta'$ に関する一次の項のみを考えれば良い。この結像に関する第一次近似を近軸光学 (ガウス光学) と呼ぶ。

(2) 光線行列

近軸光学が成り立つとし、光学系は z 軸に関して軸対称であるとする。 z 軸からの距離を r とし、光線の傾きを $r' = dr/dz$ とする。薄肉レンズを考えると、図7に示すように、入射光線の (r_s, r'_s) と出射光線の (r_{s+1}, r'_{s+1}) は

$$r_{s+1} = r_s \quad (20)$$

$$r'_{s+1} = r'_s - (r_s/f) \quad (21)$$

任意の位置での光線を次の列ベクトルで表わすと

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(20), (21)は行列形式で表わされる。すなわち、

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \quad (23)$$

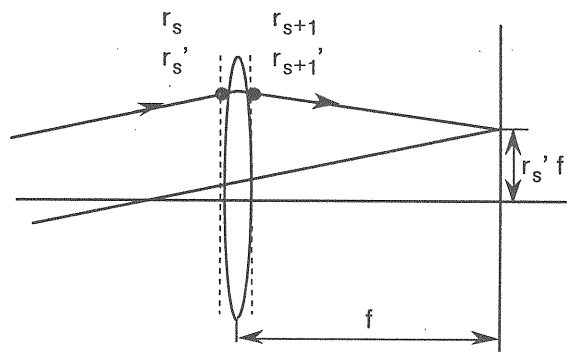


図7 薄肉レンズ

曲率半径 R の球面鏡での反射は

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \quad (24)$$

となる。これは、反射鏡が $f = R/2$ の薄肉レンズと等価であることを示している

また、厚さ d 、屈折率 n の平行平板を通過する光線

については図8から

$$r_{s+1} = r_s + r'_s d/n \quad (25)$$

$$r'_{s+1} = r'_s$$

が成り立つから

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \quad (26)$$

を得る。

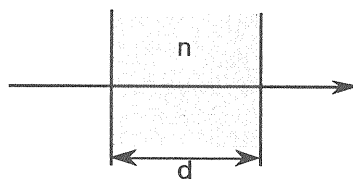


図8 一様媒質

これらの行列はRay Transfer Matrix (光線行列) とよばれる。一般に近軸光学では出射光線と入射光線は光線行列を用いて

$$\begin{bmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s \\ r'_s \end{bmatrix} \quad (27)$$

の関係で表わすことができる。光線行列の行列式は一般に1に等しい。

$$AD - BC = 1 \quad (28)$$

光学系が幾つかの光学要素 (レンズ、反射鏡等) を含む場合は、通常行列の積の法則に従って計算すればよい。

さらに、図9に示すような2枚のレンズと距離 d を組み合わせた系の光線行列の成分は式(23), (26)を用いて計算出来る。すなわち、

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{d}{f_1} \\ B &= 2d - \frac{d^2}{f_1} \\ C &= -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} \end{aligned} \quad (29)$$

$$D = 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{2}{f_2} + \frac{d^2}{f_1 f_2}$$

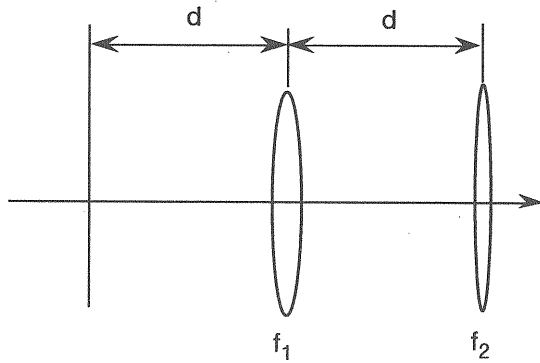


図9 2枚のレンズの組み合わせ

(3) 光共振器中の光の伝搬

図10に示すような曲率半径 R_1 と R_2 の凹面鏡を距離 d 隔てて配置した光共振器中の光線は繰り返し反射を受ける。このタイプの共振器をファブリーペロ型共振器とよんでいる。光線が安定に閉じこめられる条件を求める。図9および図11に示すように、

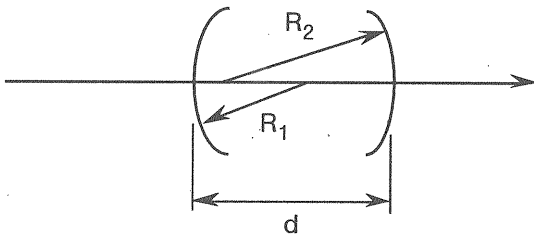


図10 光共振器の構成

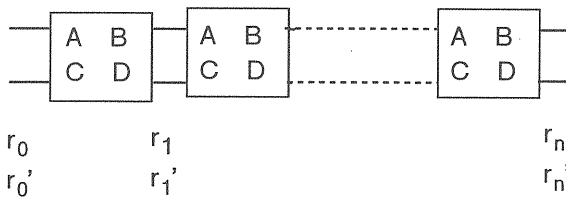


図11 繰り返し反射と等価な光線行列

繰り返し反射は、 $f_1 = R_1/2$ と $f_2 = R_2/2$ の2枚のレンズを距離 d 隔てて交互に n 回配置した光学系と等価である。この光線行列は式(29)を用いて計算出来る。光線行列を n 乗するとSylvesterの定理から

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^n = \frac{1}{\sin n\Theta} \begin{bmatrix} A \sin n\Theta - \sin(n-1)\Theta & B \sin n\Theta \\ C \sin n\Theta & D \sin n\Theta - \sin(n-1)\Theta \end{bmatrix} \quad (30)$$

但し、

$$\cos \Theta = \frac{1}{2}(A + D) \quad (31)$$

である。このような光学系は、次の条件を満たす時に安定 (stable) である。

$$-1 < \cos \Theta = \frac{1}{2}(A + D) < 1 \quad (32)$$

式(29)を使って次の関係を得る。

$$0 < \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1 \quad (33)$$

図12に上式の関係を満たす安定な領域を白抜きで示した。共振器ミラーの間隔 d と球面鏡の半径 R_1 、 R_2 の選択により安定な共振器構造を知ることが出来る。

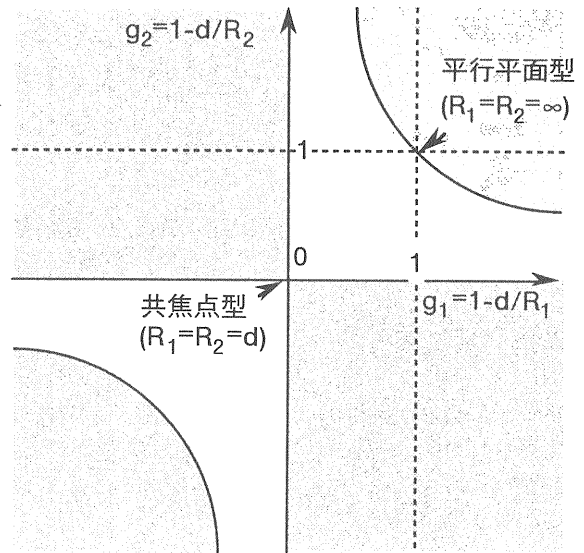


図12 光共振器の安定領域を示すダイアグラム

2. 3 光の伝搬の波動的扱い

ここまでは、光の伝搬を幾何光学の範囲で扱ってきた。しかし、光は理想的には固有のエミッタンスを満たしつつ、ビームとしてある空間分布を持って

伝搬する。この分布は実際のレーザ光においてそのまま実現されるものであり、以下に示すように光の波動方程式から求めることが出来る。但し、ここでは、有限の絞り（あるいは反射ミラーのサイズ等）による回折の影響は無視できると仮定して話しを進める。

(1) 波動方程式とガウシアンビーム

光の電界ベクトルは1つの横成分Eのみであるとす。この時、波動方程式は波数をkとして、

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad (34)$$

$$k = 2\pi/\lambda \quad (35)$$

z軸（光軸）方向に伝搬する波を次のように書く。

$$E = E_0 \psi(x, y, z) \exp(-ikz) \quad (36)$$

ここで ψ はz方向に進む平面波とここで扱うレーザ光の違いを表わす関数である。式(36)を式(34)に代入し、 ψ に関して次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (37)$$

但し、 ψ はzについて緩やかに変化すると仮定し、zについての2次偏微分をゼロとした。また軸対称性を仮定すると、 ψ は光軸からの距離rの関数となる。すなわち、 ψ を次の形に書く。

$$\psi = \exp\left\{-i\left(P(z) + \frac{k}{2q(z)} r^2\right)\right\} \quad (38)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$P(z)$ は光の伝搬方向に関する平面波からの位相のズレ、 $q(z)$ はr方向のビーム強度変化と等位相面の曲率に関するパラメータである。式(38)を式(37)に入れてrのべきの係数をゼロとおくと、

$$\frac{dq}{dz} = 1 \quad (39)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{i}{q} \quad (40)$$

を得る。上式を解くと、

$$q = q_0 + z \quad (41)$$

$$P = -i \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) \quad (42)$$

以上から ψ は

$$\psi = \exp\left[-i\left\{-i \ln\left(1 + \frac{z}{q_0}\right) + \frac{k}{2(q_0 + z)} r^2\right\}\right] \quad (43)$$

q_0 を次式で表わす。

$$q_0 = i \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (44)$$

このとき、 $z=0$ ではビームが光軸にピークを持つガウス分布をしていることがわかる。以上から、電界Eの表式を得る。

$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w} \cdot \exp\left\{-i(kz - \Phi) - r^2\left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R}\right)\right\} \quad (45)$$

但し、次のパラメータを定義した。

$$w^2(z) = w_0^2 \left\{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right\} \quad (46)$$

$$R(z) = z \left\{1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right\} \quad (47)$$

$$\Phi = \arctan(\lambda z / \pi w_0^2) \quad (48)$$

式(45)は、図13に示す様に光軸に垂直な面内でガウス分布をしている。このビームはガウシアンビーム (Gaussian Beam) とよばれ、基本モード

(TEM₀₀) に対応する。Rは光軸を切る波面の曲率半径に等しい。wはスポットサイズとよばれ、振幅が1/eとなる距離であり、光軸に沿って変化する。2wはビーム直径とよばれる。z=0では式(46)から判るようにwは最小値w₀を取る。ここをビームウエストと言い、Rの表式から判るように波面は平面になっている。

図14にこれらの様子を示す。wの軌跡、すなわ

ちビームの包絡線は双曲線であり、その漸近線が光

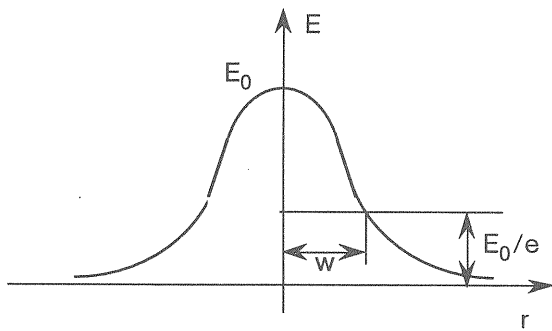


図13 TEM₀₀モードでの光のガウス分布

軸となす角度 θ は

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (49)$$

であり、基本モードにおける遠距離場での回折角になっている。これは、半径 $\sim w_0$ の絞りによる回折角に相当している。

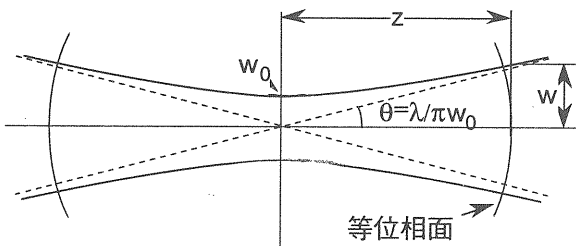


図14 ガウシアンビームの空間分布

図14において w_0 と z は w と R を用いて次式で表現でき、共振器のパラメータを見積もる場合に有用である。すなわち、

$$w_0^2 = w^2 / \left\{ 1 + \left(\frac{\pi w^2}{\lambda R} \right)^2 \right\} \quad (50)$$

$$z = R / \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda R}{\pi w^2} \right)^2 \right\} \quad (51)$$

(2) レンズによるガウシアンビームの伝搬

薄肉レンズを使ってガウシアンビームのサイズ $w(z)$ や波面の曲率 $R(z)$ を操作することができる。この

操作は、自由電子レーザーの増幅率を求める実験において、共振器中の光のサイズや曲率と同じものをレンズを用いて作る場合に用いられる。

図15に示すように焦点距離 f の凸レンズは左から入射する曲率半径 R_1 の球面波を曲率半径 R_2 の球面波として出射する働きをもつ。曲率半径の符号を q

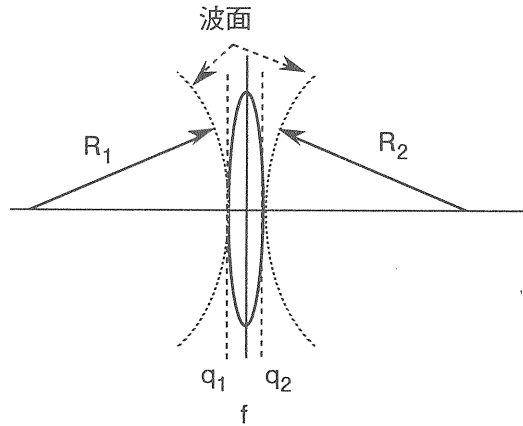


図15 凸レンズの波面

∞ から見て波面が凸の場合を正とすると次式が成り立つ。

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f} \quad (52)$$

一方、式(41), (46), (47)より

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi w^2} \quad (53)$$

が成り立ち、 q は曲率半径 R とスポットサイズ w と関係付けることが出来る。レンズの位置では入射光と反射光の w が等しいから、

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f} \quad (54)$$

q_1 と q_2 を図16に示すようにそれぞれレンズから d_1 と d_2 はなれた位置での値とすると式(54)を用いて次式を得る。

$$q_2 = \frac{(1 - d_2/f)q_1 + (d_1 + d_2 - d_1 d_2/f)}{-q_1/f + (1 - d_1/f)} \quad (55)$$

より一般的な光学系では上記の計算を繰り返せば良い。既に述べた光線行列が既知であれば、上式から

類推出来るように

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (56)$$

を得、これをABCD則と称する。光学系の光学要素が複数個ある場合、光学系の入射面と出射面での q を q_1 と q_2 すればやはり式(56)は成り立ち A, B, C, D の値は各光学要素の光線行列の積で作られる行列の成分になっている。式(53)から、入射面での曲率半径 R とスポットサイズ w が与えられれば、出射面での曲率半径 R とスポットサイズ w を求めることが出来る。

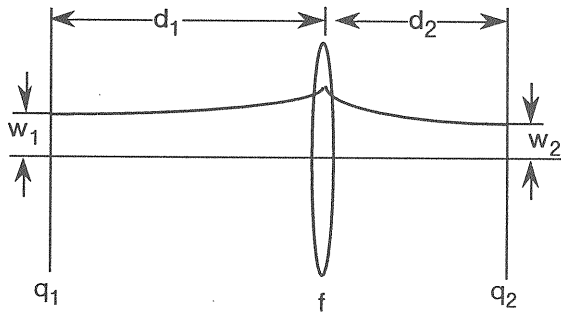


図16 レンズ系が作るスポットサイズ

(3) 光共振器

1対の球面鏡からなる光共振器を考える。図14に示したようにガウシアンビームの波面はほとんど球面であるから、図14に示すような光ビームが与えられた時、原点を挟んだ光軸上の2点で波面の曲率半径に等しい球面鏡を置けば光共振器を作ることが出来る。各々の鏡による反射光はもと来た方向に完全に戻る。従って、鏡の間隔が 2π の位相差を生じれば自己無撞着で安定な電磁界分布が形成されることが判る。このことを、図10に示す光共振器(但し、 $R_1=R_2=R$, 鏡間隔 d)の場合についてABCD則を用いて示そう。このような光共振器は図17に示すレンズ列と等価であるから、式(54)を使って

$$\frac{1}{q_1 + d} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f} \quad (57)$$

自己無撞着の条件 $q_1=q_2=q$ から

$$\frac{1}{q} = -\frac{1}{2f} - i\sqrt{\frac{1}{fd} - \frac{1}{4f^2}} \quad (58)$$

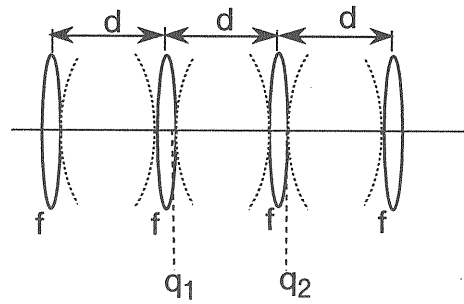


図17 等価なレンズ列

結局

$$R = 2f \quad (59)$$

$$w^2 = \left(\frac{\lambda R}{\pi}\right)^2 / \sqrt{2\frac{R}{d} - 1} \quad (60)$$

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{d(2R - d)} \quad (61)$$

を得る。即ち、 R は球面鏡の曲率半径に等しく、 w は式(46)において $z=d/2$ とした値に等しい。 R と d はすべてのモードについて成り立つ。

自由電子レーザー等の光共振器では、機器の配置上ビームウエストの位置が光共振器の中心からずれるばあいが多い。このような場合を図18に示す。但し、 R_1, R_2, t_1, t_2 は正の値を取るとする。光共振器の設計のために与えられるパラメータは $w_0, t_1, t_2, (t_1 + t_2 = d)$ であり、 R_1 と R_2 を求めるとする。式(47)から、

$$R_1 = t_1 + \frac{(\pi w_0^2 / \lambda)^2}{t_1} \quad (62)$$

$$R_2 = t_2 + \frac{(\pi w_0^2 / \lambda)^2}{t_2} \quad (63)$$

を得る。

光共振器の安定性の条件を求めよう。図9および図11に示すようなレンズ列(共振器と等価)でのガウシアンビームの安定な伝搬条件は、

$$-1 < \cos \Theta = \frac{1}{2}(A + D) < 1 \quad (64)$$

従って,

$$0 < \left(1 - \frac{d}{R_1}\right) \left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1 \quad (65)$$

故に近軸光線の場合と同じ条件式を得た。

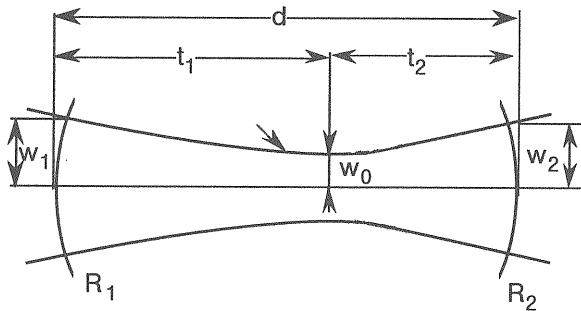


図18 非対称な光分布を持つ場合

(4) 自由電子レーザーの光共振器

ところで自由電子レーザーの光共振器を設計するにあたり、光共振器中でレーザービームに対して電子ビームが完全に含まれることが望ましい。何故ならその時最大の増幅作用が得られるからである。電子ビームもガウシアンビームであり、その包絡線は光のガウシアンビームと同様に双曲線となる。そこで光共振器は光ビームが電子ビームを完全に含むように設計出来る。但し、その条件が成り立つためには、電子ビームのエミッタンスが光ビームのエミッタンスと同程度であることが必要である。可視光領域では上記1)の条件は容易に満たすことが出来る(エミッタンスは5000Åの時40nmradである)。電子ビームのエミッタンスが大きい場合は共振器の端でレーザービームからはみ出すために増幅作用を最大限利用出来ないことになる。実際の光共振器の設計や、増幅率測定のための光学系は(3)で求めた関係式を使って行うことが出来る。

3. 増幅率測定法

FELが吸収(と共振器損失の和)に打ち勝つ誘導放出を得ることが出来れば、増幅が起こる。増幅過程はショット雑音の増幅から始まり、光の性質も増幅のしきい値を境として大きく変化する。

ここでは、増幅率を測定するために、外部から種

光としてのレーザー光をFELに入れてやり、電子に誘導放出を起こさせることを考える。この場合、誘導放出の原理から、種光の位相、スペクトル幅、偏光特性、等が保存された増幅光が得られる。

3.1 測定原理

蓄積リングを周回する早い繰り返し周期の電子バンチが、それより遅い周期で変調されたレーザー光(変調を受ける前は連続光とする)をアンジュレータ中で増幅すると、増幅された成分は周波数空間において電子バンチの周波数の回りに側帯波成分として現れる。これを検出すれば、増幅率が求まる。

図19に測定システムを示す。連続発振(CW)レーザーの光軸とアンジュレータ中での電子ビーム軌道を重ね合わせる。この時、レーザー光は水平偏光(ここでは電場ベクトルが水平面内にある場合と定義する)しており、かつ電子軌道は水平面内で正弦関数的に振動しているものとする。レーザー光は、アンジュレータに入る前にチョップにより1kHz程度の周波数で変調(ON-OFF)しておくものとする。

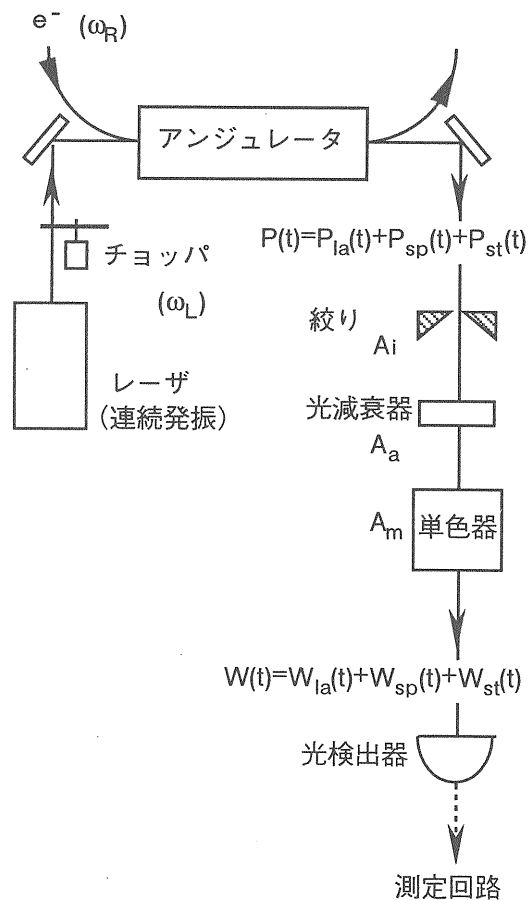


図19 増幅率の測定法

アンジュレータ直後の位置での光出力 $P(t)$ は、レーザ光成分 $P_{la}(t)$ 、アンジュレータ放射光（自然放出光）成分 $P_{sp}(t)$ 、および、アンジュレータ中で電子バンチがレーザ光を増幅した増幅光成分 $P_{st}(t)$ の和となる。

$$P(t) = P_{la}(t) + P_{sp}(t) + P_{st}(t) \quad (66)$$

次に、光検出器（フォトダイオード等）に入射する光入力を考える。光強度を調節するための光減衰器（neutral density attenuator）を置き、これによる透過率を A_a とする。また、S/N比を向上させるためには自然放出光成分を可能な限り除くことが有効である。このために、絞りを光減衰器の前に入れる。自然放出光とレーザ光に対する絞りの透過率を A_i （sp）と $A_i(la)$ とする。さらに自然放出光を選択的に除くために単色器を使う。通常、自然放出光のスペクトル幅の方がレーザ光のそれより桁違いに広いので、単色器の透過エネルギー幅を適当に調節して自然放出光成分のみを除くことが出来る。この時の透過率を A_m とする。

以上から光検出器への光入力 $W(t)$ は

$$W(t) = W_{la}(t) + W_{sp}(t) + W_{st}(t) \quad (67)$$

但し、

$$\begin{aligned} W_{la}(t) &= A_a \cdot A_i(la) \cdot P_{la}(t) \\ W_{sp}(t) &= A_a \cdot A_m \cdot A_i(sp) \cdot P_{sp}(t) \\ W_{st}(t) &= A_a \cdot A_i(la) \cdot P_{st}(t) \end{aligned} \quad (68)$$

で与えられる。 $W_{la}(t)$ 、 $W_{sp}(t)$ 、および $W_{st}(t)$ の時間変化を図20に示す。 $W_{la}(t)$ はチョッパにより角周波

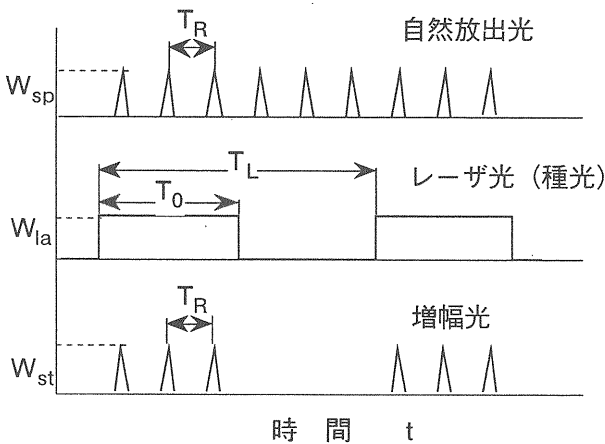


図20 $W_{la}(t)$ 、 $W_{sp}(t)$ 、および $W_{st}(t)$ の時間変化

数 ω_L （周期 T_L ）で変調されている。また、 $W_{sp}(t)$ は電子バンチと同じ標準偏差 σ_τ のガウス波形を持ち、電子バンチと同じ角周波数 ω_R （周期 T_R ）のパルス列と仮定する。 $W_{st}(t)$ は $W_{sp}(t)$ と同じ角周波数 ω_R のパルス列であるが、角周波数 ω_L で変調されている。

3. 2 周波数スペクトル

$W_{la}(t)$ 、 $W_{sp}(t)$ 、および $W_{st}(t)$ の周波数スペクトルを求める。まず $W_{la}(t)$ と $W_{sp}(t)$ を以下に示すようにフーリエ級数に展開する。

$$W_{la}(t) = W_{la} \left\{ C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_L t + \phi_k) \right\} \quad (69)$$

$$W_{sp}(t) = W_{sp} \left\{ D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_R t + \psi_n) \right\} \quad (70)$$

但し、

$$\omega_L = 2\pi/T_L, \quad \omega_R = 2\pi/T_R \quad (71)$$

$$C_0 = T_0/T_L \quad (72)$$

$$C_k = 2(T_0/T_L) \cdot \frac{\sin(k\pi T_0/T_L)}{k\pi T_0/T_L} \quad (73)$$

$$D_0 = \sigma_\tau \sqrt{2\pi}/T_R \quad (74)$$

$$D_n = 2(\sigma_\tau \sqrt{2\pi}/T_R) \exp\left\{-\frac{1}{2}(n\omega_R \sigma_\tau)^2\right\} \quad (75)$$

増幅光成分 $W_{st}(t)$ は次式で与えられる。

$$W_{st}(t) = W_{st} \cdot \frac{W_{la}(t)}{W_{la}} \cdot \frac{W_{sp}(t)}{W_{sp}} \quad (76)$$

これに $W_{la}(t)$ と $W_{sp}(t)$ を代入すると

$$\begin{aligned} W_{st}(t) &= W_{st} \left[C_0 D_0 + C_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_R t + \psi_n) \right] \\ &+ C_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_R t + \psi_n) \\ &+ D_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_L t + \phi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} D_n C_k \cos\{(n\omega_R + k\omega_L)t + (\psi_n + \varphi_k)\} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} D_n C_k \cos\{(n\omega_R - k\omega_L)t + (\psi_n - \varphi_k)\}
\end{aligned} \quad (77)$$

上式で表した $W_{st}(t)$ の角周波数スペクトルは角周波数 $n\omega_R$ の両側において $\pm k\omega_L$ ($k=1, 2, \dots$) 離れた位置に信号成分のみが現われ側波帯 (side band) を作ることを示している。特に, $C_0 = T_0/T_c = 1/2$ の場合は k の偶数次の成分を消すことが出来る。図 2 1 は, $n=1, k=1$ の場合について $\omega_R \pm \omega_L$ の角周波数成分から増幅光成分のみの情報を引き出せることを示している。

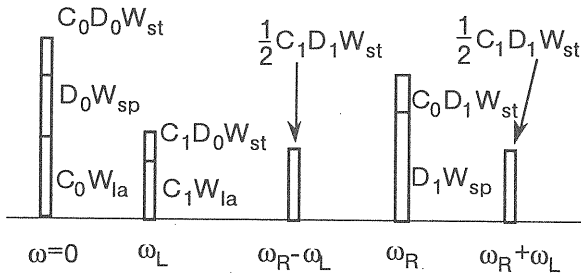


図 2 1 $W(t)$ の角周波数スペクトル

求めたいピーク増幅率 G は, アンジュレータ直後での各光出力 $P_{la}(t), P_{sp}(t), P_{st}(t)$ を

$$\begin{aligned}
P_{la}(t) &= P_{la} \cdot \frac{W_{la}(t)}{W_{la}}, \\
P_{sp}(t) &= P_{sp} \cdot \frac{W_{sp}(t)}{W_{sp}}, \\
P_{st}(t) &= P_{st} \cdot \frac{W_{st}(t)}{W_{st}}
\end{aligned} \quad (78)$$

と表わした時,

$$G = \frac{P_{st}}{P_{la}}$$

で与えられる。但し, 式(68)から

$$\begin{aligned}
W_{la} &= A_a \cdot A_l(la) \cdot P_{la} \\
W_{sp} &= A_a \cdot A_m \cdot A_l(sp) \cdot P_{sp} \\
W_{st} &= A_a \cdot A_l(la) \cdot P_{st}
\end{aligned} \quad (80)$$

従って G は

$$G = \frac{P_{st}}{P_{la}} = \frac{W_{st}}{W_{la}} \quad (81)$$

で与えられる。一方, 平均増幅率 $\langle G \rangle$ は図 2 1 を参照して

$$\langle G \rangle = \frac{\langle P_{st} \rangle}{\langle P_{la} \rangle} = \frac{\langle W_{st} \rangle}{\langle W_{la} \rangle} = \frac{C_0 D_0 W_{st}}{C_0 W_{la}} = D_0 G \quad (82)$$

次に, W_{st} と W_{la} を実験的に求める方法を示す。

3. 3 信号測定

図 2 2 に図 1 9 で示した光検出器以降の信号測定回路の概要を示す。光検出器からの信号は ω_R を中心周波数とし側波帯 (side band) を通すバンドパスフィルタに導く。この出力を, 角周波数 ω_R の RF 信号で復調し, 得られる $k\omega_L, 2\omega_R$ の角周波数成分をローパスフィルタに導いて $k\omega_L$ 成分のみを取り出す。最後に, 角周波数 ω_L のチョップ信号を参照波としてロックインアンプに入れ, ω_L 成分, 即ち増幅光成分 W_{st} を信号 S_a として得ることが出来る。即ち,

$$S_a = \alpha C_1 D_1 W_{st} \quad (83)$$

一方, 図 1 9 において光検出器の信号を直接ロックインアンプに導き, チョップ信号を参照波として ω_L 成分のみを信号 S_b として得ることが出来る。即ち,

$$S_b = \beta (C_1 W_{la} + C_1 D_0 W_{st}) \sim \beta C_1 W_{la} \quad (84)$$

但し, α と β は各測定回路に固有の定数とする。増幅率を得るには α か β の一方を消去する必要があるため以下に述べるキャリブレーションを行う。

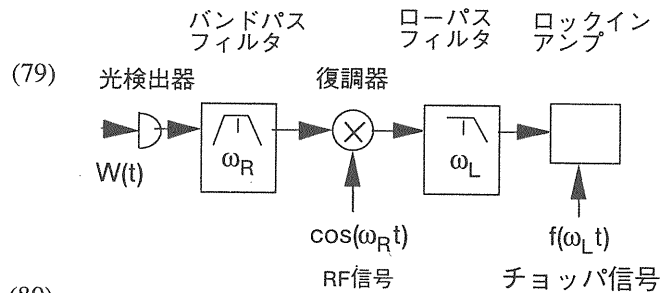


図 2 2 信号測定回路

3. 4 キャリブレーション

図19に示す配置においてレーザ光を止め、かつチョッパをアンジュレータと絞りの間に挿入し、自然放出光を角周波数 ω_L (周期 T_L) で変調する。時間変化を図23に示す。

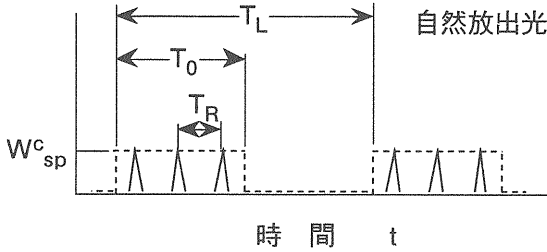


図23 自然放出光の時間変化

光検出器への光入力を $W_{sp}^c(t)$ とすると

$$W_{sp}^c(t) = W_{sp}^c \cdot \frac{W_{st}(t)}{W_{st}} \quad (85)$$

で与えられる。この場合の角周波数スペクトルを図24に示す。

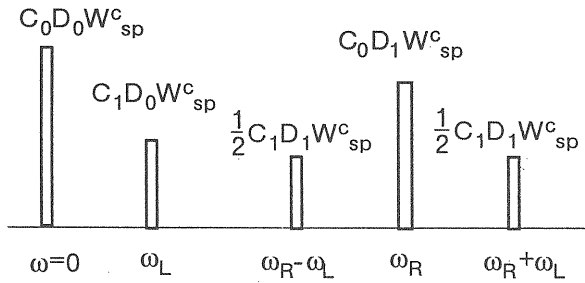


図24 $W_{sp}^c(t)$ の角周波数スペクトル

さて、図22の測定回路で求めた図24の $\omega_R \pm \omega_L$ と ω_L の各信号成分は

$$S_a^c = \alpha C_1 D_1 W_{sp}^c \quad (86)$$

$$S_b^c = \beta C_1 D_0 W_{sp}^c \quad (87)$$

である。従ってピーク増幅率 G は、

$$G = \frac{W_{st}}{W_{la}} = \frac{S_a^c / \alpha D_1}{S_b^c / \beta} = \left(\frac{S_a}{S_b} \right) \left(\frac{S_b^c D_1}{S_a^c D_0} \right)$$

$$= \left(\frac{S_a S_b^c}{S_b S_a^c} \right) / D_0 \quad (88)$$

となり測定値から求まる。但し、 $D_0 = \sigma_\tau \sqrt{2\pi} / T_R$ である。 $\langle G \rangle$ は

$$\langle G \rangle = \left(\frac{S_a S_b^c}{S_b S_a^c} \right) \quad (89)$$

で与えられる。

3. 5 測定に関するパラメータの表式

(1) 自然放出光のパワー

自然放出光のピークパワー P_{sp} は単位角周波数、単位立体角あたり

$$\frac{d^2 P_{sp}}{d\omega d\Omega} = \frac{e\gamma^2 N^2 I}{\pi\epsilon_0 c} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (X_k^2 + Z_k^2) f(\xi_k)^2 \quad (90)$$

$$X_k = \left\{ S_1 \alpha \cos \phi - \left(S_1 + \frac{2}{k} S_2 \right) \frac{A}{2\alpha \cos \phi} \right\} / A \quad (91)$$

$$Z_k = S_1 \alpha \sin \phi / A \quad (92)$$

$$A = 1 + \frac{k^2}{2} + \alpha^2 \quad (93)$$

$$\alpha = \gamma \theta \quad (94)$$

$$S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \left(k \frac{K^2}{4A} \right) \cdot J_{2n+k} \left(k \frac{2K\alpha \cos \phi}{A} \right) \quad (95)$$

$$S_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n \left(k \frac{K^2}{4A} \right) \cdot J_{2n+k} \left(k \frac{2K\alpha \cos \phi}{A} \right) \quad (96)$$

$$f(\xi_k) = \frac{\sin \xi_k}{\xi_k} \quad (97)$$

$$\xi_k = \pi N \left(\frac{\omega}{\omega_1} - k \right) \quad (98)$$

$$\omega_1 = \frac{2\gamma^2 \omega_0}{A} \quad (99)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \quad (100)$$

で与えられる。但し、 Ω は放射の立体角、 e は素電荷、 γ は電子のローレンツ因子、 N はアンジュレータ磁場の周期数、 I はピーク電流値、 ϵ_0 は真空誘電率、 c は光速、 J_1 と J_0 は1次と0次のベッセル函数である。 K はアンジュレータの偏向定数である。

アンジュレータ直後のトータルパワーは

$$\begin{aligned}
P_{sp} &= \int d\Omega \int d\omega \frac{d^2 P_{sp}}{d\Omega d\omega} \\
&= \frac{e\gamma^2 N^2 I}{\pi\epsilon_0 c} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left[\left\{ \int (X_k^2 + Z_k^2) d\Omega \right\} \right. \\
&\quad \left. \bullet \left\{ \int f(\xi_k)^2 d\omega \right\} \right] \quad (101)
\end{aligned}$$

上式の右辺の ω に関する積分は

$$\int f(\xi_k)^2 d\omega = \frac{\omega_1}{N} \quad (102)$$

また、 Ω に関する積分は、角度分布が軸対称（方位角 ϕ ）と仮定し、中心軸に関する極角 θ のみの関数とする。ガウス分布を仮定する。軸上では奇数次の項のみ有限の値をもつから、

$$\begin{aligned}
(X_k^2 + Z_k^2) \Big|_{\theta=0}^{k=odd} &= \frac{K^2}{4 \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \\
&\bullet \left\{ \frac{J_{k-1}(\eta_k) - J_{k+1}(\eta_k)}{2} \right\}^2 \quad (103)
\end{aligned}$$

$$\eta_k = k \frac{K^2}{4 \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)} \quad (104)$$

以上から

$$(X_k^2 + Z_k^2) = (X_k^2 + Z_k^2) \Big|_{\theta=0}^{k=odd} \cdot \exp(-\theta^2/2\sigma_{sp}^2) \quad (105)$$

従って、積分は

$$\begin{aligned}
\int (X_k^2 + Z_k^2) d\Omega &= (X_k^2 + Z_k^2) \Big|_{\theta=0}^{k=odd} \\
&\bullet \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \sin\theta \exp(-\theta^2/2\sigma_{sp}^2) d\theta \\
&= 2\pi\sigma_{sp}^2 \frac{K^2}{4 \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \left\{ \frac{J_{k-1}(\eta_k) - J_{k+1}(\eta_k)}{2} \right\}^2 \quad (106)
\end{aligned}$$

但し、角度幅に関する標準偏差は

$$\sigma_{sp} = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{1}{N \ln 2} \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)} \quad (107)$$

P_{sp} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
P_{sp} &= \frac{e\gamma^2 N^2 I}{\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\omega_1}{N}\right) \sum_{k=odd}^{\infty} k^2 \\
&\bullet \left[2\pi\sigma_{sp}^2 \frac{K^2}{4 \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \left\{ \frac{J_{k-1}(\eta_k) - J_{k+1}(\eta_k)}{2} \right\}^2 \right] \quad (108)
\end{aligned}$$

以上で P_{sp} の値を評価出来るが、増幅率の測定では単色器で基本波を選択するので、基本波成分（ $k=1$ ）のみを考えれば良い。従って、最終的に

$$\begin{aligned}
P_{sp} &= \frac{e\gamma^2 N^2 I}{\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\omega_1}{N}\right) 2\pi\sigma_{sp}^2 \frac{K^2}{4 \left(1 + \frac{K^2}{2}\right)^2} \\
&\bullet \left\{ J_0(\eta_1) - J_1(\eta_1) \right\}^2 \quad (109)
\end{aligned}$$

を得る。

(2) レーザ光と増幅光のパワー

連続発振レーザとして、例えばAr⁺イオンレーザを考えると、最も強い発振線の波長は5145 Åであり、パワー P_0 は

$$P_0 \sim 5 \text{ W}$$

程度である。ピーク増幅率 G を、例えば1%程度とすると

$$P_{st} \sim 1\% P_0 = 50 \text{ mW}$$

となる。

(3) 絞りの透過率

絞りにより、レーザ光と増幅光に比べて自然放出光を効率的に落とすことが出来る。レーザ光は、図14に示すように光軸に沿って最小スポットサイズ w_0 を持ち、充分遠方では角度 θ_0 で発散している。即ち、

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (110)$$

w (w_0) は電界振幅が軸上の値の $1/e$ になる距離であるから z 軸から距離 r での強度分布 I_{la} は軸上の強度を I_{la}^0 として

$$\begin{aligned} I_{la} &= I_{la}^0 \exp\left\{-2\left(\frac{r}{w}\right)^2\right\} \\ &= I_{la}^0 \exp\left\{-2\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right\} \\ &= I_{la}^0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\sigma_{la}}\right)^2\right\} \end{aligned} \quad (111)$$

但し、

$$\sigma_{la} = \frac{\lambda}{2\pi w_0} \quad (112)$$

一方、既に仮定したように自然放出光もガウス分布で近似できる。すなわち、発光点から充分遠方では σ_{sp} を使って

$$I_{sp} = I_{sp}^0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\sigma_{sp}}\right)^2\right\} \quad (113)$$

従って、絞りの開き角 (半開角) を θ_i とすると、絞りによる自然放出光とレーザー光 (増幅光) の透過率 $A_i(sp)$ と $A_i(la)$ は各々次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A_i(sp) &= \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_i} \theta \exp(-\theta^2/2\sigma_{sp}^2)}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \theta \exp(-\theta^2/2\sigma_{sp}^2)} \\ &= \left\{1 - \exp(-\theta_i^2/2\sigma_{sp}^2)\right\} \end{aligned} \quad (114)$$

$$\begin{aligned} A_i(la) &= \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_i} \theta \exp(-\theta^2/2\sigma_{la}^2)}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \theta \exp(-\theta^2/2\sigma_{la}^2)} \\ &= \left\{1 - \exp(-\theta_i^2/2\sigma_{la}^2)\right\} \end{aligned} \quad (115)$$

一般に $\sigma_{sp} > \sigma_{la}$ と出来るので、自然放出光の絞りに対する透過率を相対的に小さくすることが可能である。

(4) 単色器の透過率

波長 λ における分光器の分解能を $(\Delta\lambda/\lambda)_m$ (可視光領域での標準的な回折格子分光器の分解能は $\sim 10^3$) とすると、自然放出光の波長幅 $\sim 1/N$ (N を 50 程度とすると波長幅 $\Delta\lambda/\lambda$ は $\sim 2 \times 10^{-2}$) は、通常、分光器の分解能より大きい。従って、自然放出光の分光器透過率 A_m は、回折格子の効率を 1 と仮定すると

$$A_m = \frac{(\Delta\lambda/\lambda)_m}{N} \quad (116)$$

一方、レーザー光 (増幅光) の透過率は、通常レーザー光の波長幅 ($\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-5}$) の方が分光器の分解能より狭いのでほとんど 1 とみなせる。

(5) 光減衰器の透過率

光減衰器は、通常、光検出器への光入力パワーが定格入力 (入出力の線形性が保証され、かつ過大な負荷とならない入力) の範囲に収まるように減衰率 A_a を決める必要がある。

講義では、以上の増幅率測定に関する実際のパラメータを使った計算例を示す予定である。

参考文献

1. 近藤 淳：ウイグラーおよび自由電子レーザ，電子技術総合研究所調査報告，第200号，1979年。
2. シンクロトロン放射利用技術：高良和武監修，サイエンスフォーラム，1989年12月。
3. シンクロトロン放射光の基礎：大柳宏之編，丸善，1996年3月。
4. 亀井，木原：加速器科学（パリティ物理学コース），丸善，1995年9月。
5. 花村栄一：量子光学（現代の物理学8），岩波，1996年5月。
6. J. D. Jackson : Classical Electrodynamics, Wiley, New York, 1962.
7. A. Yariv : Quantum Electronics, Wiley, New York, 1975.
8. R. Loudon : The Quantum Theory of Light, Oxford, 1973.
9. M. Born and E. Wolf : Principles of Optics, Pergamon, 1975.
10. J. M. J. Madey, J : Appl. Phys. 42 (1971) 1906.
11. W. B. Colson : Phys. Lett. 64A (1977) 190.
12. R. Barbini, et al. : In Physics of Quantum Electronics, Vol .8 (S. F. Jacobs, et al., ed.), Addison-Wesley (1981) 235.
13. R. Barbini, et al. : J. Phys. (Paris), C1-1 (1983) 44.
14. C. Pellegrini : IEEE Tran. Nucl. Sci. NS-26 (1979) 3791.
15. T. L. Orzechowski, et al. : Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 2172.
16. 最近のFELの進歩については，Nucl. Instr. and Meth. A407 (1998) に詳しい。