

第 I 部

SADとは

1 SADとは

SAD (Strategic Accelerator Design) とは、加速器プロジェクトの設計段階、検討確認段階、ビーム運転段階の全段階を通じ首尾一貫して、プロジェクトの最終目標であるビーム性能発揮のために必要な計算をビーム物理に基づいて遂行する計算機コードである。

SADは、KEKにおいて生田勝宣氏を中心に、加速器理論グループやビーム開発・コミッショニンググループとの緊密な協力の基に、1986年より開発されてきた。TRISTAN、KEKB、FFTB、ATF、JLC、NLC、JHF等、KEKが関与する多くの加速器プロジェクトで使用されている。

1.1 特徴

今日のSADの使われ方は幅広く、SADの役割を「ビーム性能発揮のために必要な計算をビーム物理に基づいて遂行する計算機コード」と表現した。より具体的なSAD使用の情景としては、以下の例を挙げることが出来る。

- 必要なビーム性能を実現するための加速器オプティクスやビームトランスポートラインの設計
- 磁石や加速空洞など加速器構成要素に存在する誤差のビームへの影響評価
- 平衡軌道、オプティクス、色収差などの補正方式の比較検討及びビーム運転への適用
- 粒子トラッキングによるダイナミックアパーチャの評価や最適化
- 計算機上における最適ビーム運転条件の探索
- BBA (Beam Based Alignment、ビーム情報に依る磁石設置誤差の修正) やBBD (Beam Based Diagnostics、ビーム情報による加速器機器の状態診断) の為の解析ツール
- 加速器設計やビーム物理に関する新アイデアの体系的定量的思考実験による検証確認
- 加速器ビーム運転のためのGUI、コミッショニングツールの提供
- ユーザーによる加速器ビームシミュレータの構築

このような様々な情景での使用が可能となっている背景には、SADコードの持つ次の様な特徴を挙げることが出来る。

- Mathematicaに準拠した関数システムの導入により、新規モジュールの作製などユーザー毎に使用目的に合わせた利用が可能。

(例) 各種軌道補正

(例) 一連の作業のモジュール化による自動化された最適条件探索

- 基本的に同一コード中であり、体系的データ構造の採用にも助けられ、一連の作業の自動化が容易に行える。

(例) ラティス設計+想定誤差導入+軌道補正+色収差補正+オプティクス評価+ビーム特性評価+ダイナミックアパーチャ評価

- 加速器・オペレータ間インターフェイスの完備

(例) KECBコントロールパネル

- ビーム物理の理論的研究と加速器現場の実験的研究との距離を縮める。理論研究結果の素早い確認と研究成果の現実ビームへの早期還元役に役立つ。

(例) スピン偏極度

(例) デファレンシャルアルジェブラとデコヒーレンス

(例) 水平垂直カップリングのパーフェクトマッチングに拠る補正

(例) アンジュレータ誤差磁場とシンクロトロン放射光特性の関係

- コード開発過程においてKEK内の幅広いプロジェクト現場と直結してきた。役に立つコードに徹している。

1.2 使用形態

SADの主な使用形態は、KEKに在るSAD専用計算機システムへのアクセスを通じて行われている。現時点において(1999年7月)この計算機システムにアカウントを有するユーザー数は300人程度であり、KEK及び国内、国外の関連する研究者や学生が登録利用している。

ソースコードを外部計算機に移植して行う使用形態も少数ながらあるが、この場合SADプログラム自身が頻りに改良を施されている状況への配慮が必要である。

SADの使用方法を知りたいときには、Web上下記のURLにあるSADホームページから情報を得ることが出来る。

<http://www-acc-theory.kek.jp/SAD/sad.html>

これがSADを使う際に最も重要で唯一の一般的情報源であり、これ以外に印刷されたSADマニュアルと言うものは存在しない。

基本的にSADを使うユーザーは加速器のビーム物理を熟知し、何をしたいかが分かっていると想定されている。計算結果は研究者としてのユーザーの自己責任において利用されている。当然、KEK及びSAD関係者(SADdists)はSADの使用に拘わるいかなる損害の発生にも責任は取らない。

2 SADの過去、現在、将来

SADの時間的发展をホームページに見られる記述と共に概観してみよう。

2.1 コード開発の発端

1986: A project was started by K. Hirata, S. Kamada, K. Oide, N. Yamamoto, and K. Yokoya to develop a new code for accelerator design.

KEKにおける、加速器設計研究、ビーム物理実験の解析、加速器理論研究等に関する知識や手法を蓄積し、統合的に利用出来る環境を求めて、加速器汎用計算コードの開発に着手。

この1986年時点のKEKの実情として、TRISTAN電子陽電子コライダプロジェクトにおける加速器設計、設計や補正法の評価およびビーム運転のための計算作業環境は次のようなものであった。

- 加速器設計：SYNCH (A.Garren/LBL)、TRANSPORT (K.Brown/SLAC)、MAGIC (M.-J.Lee/SLAC、主に横谷によるKEKバージョンを使用)。
- 設計補正評価：PATRICIA (H.Wiedemann/DESY,SLAC)によるダイナミックアパチャの評価、PETROS (/DESY)に依る磁石誤差や高周波空洞の軌道やオプティクスへの影響評価、HARNON (M.Donald/SLAC)に依る色収差補正方式の評価と6極磁石強度の最適化。
- ビーム運転：TRISTAN制御用計算機HIDIC上にオプティクスマッチングコードをNORDAL言語により作成(生出)。メインフレーム計算機HITAC上で動作するPETROK(鎌田によるPETROSのKEKバージョン)を使い、ファイル転送ネットワークを経由して軌道補正。

ここに生じていた問題点として、必要な計算作業環境が複数プログラムに渡るため、データの受け渡しが面倒、且つプログラム毎に加速器要素のデータ仕様が異なる事が本質的困難を招いていた。同じプロジェクトで働くKEK研究者が(多くは外来の)異なるプログラム(バージョンが異なる場合も)上で仕事をしていたため、協同作業が阻害される場面も多々生じた。

またこの時の世界的状況として、CERNにおいても加速器汎用計算コードMAD(Methodical Accelerator Design, E.Keil, Ch.Iselin etc.)の開発が進行中であった。

2.2 SADコードの発展

1987: The first version of the new code ran on HITAC, with Lie methods, 6D tracking, and emittance calculation with beam matrix, under MAIN level.

MAINレベルの下に、一応の機能を備えた個別モジュールができるが、マッチング機能は未完成であった。

1988: An optics matching code FFS was installed. Applied for NLC/FFTB final focus system at SLACVM. The naming SAD was established.

SLAC滞在中の生出氏がリニアコライダ最終収束系設計のためのマッチング機能を持ったFFSモジュール作成。このころ平田氏がMADとSDIを念頭に、SADというネーミングを提唱、関係者間で不評ではあったが、対案の無いままICFAワークショップで披露され固定化へ。

1989: FFS was modified to design a periodic optics. The initial version of KEKB ring was designed with SAD.

円形加速器のオプティクスマッチングが可能になる。

1990: FFS was extended to x-y coupled optics with solenoid. FFS/COR orbit correction system was developed.

KEKBラティスの初期設計開始に伴い、水平垂直運動が結合したラティスのオプティクスマッチングができるようになる。

翌91年、超伝導Q磁石を使ったミニベータオプティクスを導入した際、TRISTANのビーム運転に困難が生じた。⇒ SADにより初めて可能になった水平垂直パーフェクトマッチングとSADによるダイナミックアパーチャの改善予言に基づいて問題が劇的に解決された。ここで加速器ビーム運転におけるSADの有効性が実証され、その後のSAD専用計算機システム(Ahsad)の導入に繋がる。

1992: A spin calculation SODOM was first developed and linked with SAD.

TRISTANにおける電子ビーム偏極度測定実験。

MR放射光実験用低エミッタンスラティスの設計。

ATFラティス設計。

1993: Ahsad workstations started with four HP735/755s to separate SAD from HITAC.

この年、KEKBやMR放射光実験用ラティスで採用予定の6極磁石非入れ子型色収差補正方式の検証のためにダイナミックアパーチャビーム実験実施。⇒ π バン方式による6極磁石や4極磁石のBBA(Beam Based Alignment)を初めて実施。さらにBBA方式で測定した磁石誤差情報を使うことで、SADのダイナミックアパーチャの定量的予見能力を確認。

1994: Mathematica-style functions were introduced to FFS. TRISTAN started to use SAD for regular operation.

ユーザーが自分専用の関数を作れるようになる。

1995: Acsad server started with DEC8000(7 CPUs). Taylor map, beam-beam was linked to SAD.

KEKBのためのbeam-beam効果の検討。

MR放射光実験実施。⇒ アンジュレタ磁場誤差のシミュレーションのため、シンクロトロン放射電磁場を計算する機能が追加される。

1996: EPICS was first linked to SAD for KEKB control. Parallel processing was extensively used in tracking and optics matching.

1997: Python and Tkinter were embedded in SAD/FFS. A few GUI libraries was built with them. Acsad was upgraded to 10 CPUs.

ATFダンピングリング運転。

1998: SAD/KBFrame has been applied for commissioning of KEKB Linac.

KEKB入射リニアック試運転。⇒ 電子銃・バンチャー部の空間電荷効果シミュレータ稼働。

第1回SADワークショップ実施。

1999: SAD/KBFrame has been applied for commissioning of KEKB LER HER.

Class関数によるObject-Orientedプログラミングの整備。

2.3 現状のSAD

人、文献そして研究会情報から現状のSADを浮き彫りにしてみよう。

●The SADdists:

様々な立場からSADコード開発に関与している人々である。

- N. Akasaka: KBFram (Tkinter libraries), EPICS interface, etc.
- K. Hirata: Lie methods, emittance, beam-beam, etc.
- M. Kikuchi: orbit correction functions and commands in FFS, etc.
- S. Kuroda: x-y normal mode.
- T. Mimashi: workstation, control, etc.
- K. Ohmi: Taylor map, radiation integral, beam-beam, etc.
- K. Oide: FFS subsystem(matching, emittance, tracking), Mathematica-style functions, Tkinter, etc. The SADdest.
- N. Yamamoto: MAIN level, element and line definition, EPICS interface, workstation, etc.
- K. Yokoya: spin calculations(SODOM), Lie methods, etc.
- E. Forest, H. Fukuma, S. Kamada, H. Koiso, S. Matsunoto: advisors.
- H. Sugawara, Y. Kimura, M. Iwata, K. Takata, S.-I. Kurokawa: directors.

●References for SAD:

マニュアルの存在しないSADに関する文献である。SADの解説書という性格ではなく、SADの基礎となる物理やSADを用いて行われたビーム物理研究が記述されている。

1. K.Oide and H.Koiso, Anomalous equilibrium emittance due to chromaticity in electron storage rings, Phys.Rev.E49, 4474 (1994).
2. K.Ohmi, K.Hirata and K.Oide, From the beam-envelope matrix to synchrotron-radiation integrals, Phys.Rev.E49, 751 (1994).
3. K.Hirata, An introduction to SAD. Second Advanced ICFA Beam Dynamics Workshop, CERN 88-04 (1988).
4. K.Oide and H.Koiso, Dynamic aperture of electron storage rings with noninterleaved sextupoles, Phys.Rev.E47, 2010 (1993).
5. K.Oide, Synchrotron-Radiation Limit on the Focusing of Electron Beams, Phys.Rev. Lett.61, 1713 (1988).

6. 生出勝宣、ビーム力学入門、JLC-FFIR92研究会講義録・研究報告集、田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings 93-6 (1993).

●SADワークショップ:

1998年7月7日(火)から7月9日(木)にかけて、KEKに於いて初のSADワークショップが催された。ここではSADコードの基礎となる物理やSADを使ったビーム物理、加速器設計、またSADコードを巡るソフトウェア、ハードウェア環境について、報告や議論が行われた。またここではSADの将来への課題なども議論された。

このSADワークショップで使用されたトランスペアレンシーを集めた報告書が近々加速器研究施設から出版される予定である。下に掲げたワークショップの趣意書とプログラムから、今日のSADを巡る雰囲気と話題の広がりを推察していただきたい。

SADワークショップ開催の趣旨

SAD (Strategic Accelerator Design) はKEKにおいて1986年以来開発が進んできた加速器設計のための汎用計算プログラムです。TRISTAN、KEKB、FFTB、ATF、JLC、NLC等多くの加速器における設計、シミュレーション、コミッショニング、改良等の作業を通じて、SADプログラムの特色や備える機能の有用性、有効性が示されると同時に、プログラム自身も当初の姿から大きく成長してきました。多数のユーザーを有するようになった今日、関係者が一堂に会し、現在のSADプログラムの様々な利用実態を語り合いプログラムの全体像を認識すると共に、将来に向けたプログラム開発の方向性を探りたいと思います。また本ワークショップに於ける講演は英文のProceedingsとして出版し、SADプログラムに関する基礎的参照文献にする事を考えています。

Workshopプログラム

SADの物理

- "SAD" K.Oide
- "Taylor Map analysis in SAD" K.Ohmi
- "Orbit Correction" M.Kikuchi
- "Emittances in Electron Rings" K.Hirata
- "Comments" H.Koiso, K.Oide
- "Spin in SAD" K.Yokoya

SADの応用 (I)

- "Nonlinear Study" S.Kamada
- "Beam-Beam Interactions (Weak-strong model)" K.Ohmi
- "Simulation of Electron Beam with Space Charge Force" K.Oide
- "Emittance Growth Due to IntraBeam Scattering" K.Oide
- "Synchrotron Radiation" S.Kamada

SADの応用 (II)

(Design Studies)

- "KEKB Collider" H.Koiso
- "VSX: The Future Project of VUV and Soft X-Ray High Brilliant Light Source" H.Takaki
- "Hadron Accelerators" S.Machida
(Simulations)
- "Study of 3D Laser Cooling by SAD" T.Kihara
- "Wake Fields and CBI" H.Fukuma
- "Estimation of the Beam Loss in KEKB Transport Line" Y.Funakoshi
(Machine Studies)
- "SAD in ATF Operation and Study" K.Kubo
- "Detection and Correction of Machine Errors by pi-bump" S.Matsumoto
- "Mini-beta/xy coupling compensation" S.Kamada
- "Commisioning of KEKB J-Linac" H.Koiso

SADの応用 (III)

- "SAD/Tkinter; KB Frame" N.Akasaka
- "User Remote Environment" K.Furukawa
- "SAD comupter system" T.Mimashi
- "SAD in Python" N.Yamamoto
- "Object Oriented Programming in SAD Script"
N.Akasaka
- "SAD + C++ =SAD++?" K.Ohmi

SAD の問題点と発展の方向

- "SAD Update. V1.0.7.6.11b. AccelerateParticles"
K.Oide
- "Comments" Y.Kamiya
- "Summary Talk 1" N.Kumagai
- "Summary Talk 2" Y.Mori

2.4 将来への課題

SADの将来的発展や全面的改造案として、時折話題になる事を下に掲げた。ただし現状では着手することはマンパワー的に不可能で、将来に向け長い目で追求したい可能性の一例にすぎない。

- SAD-USERフォーラムの開設。バグ情報や、使い方情報の交換のためインターネット上の現ホームページを全面的に拡充しSADdistsやユーザー間の橋渡しを行う。
- SAD on Laptopを実現する。Linux OS上で動作するようにSADを改造し、ラップトップやデスクトップのパソコンでも使えるようにする。
- SADの商用利用を可能にする。放射光源や医療用加速器に見るように、企業が加速器に果たす役割が大きくなっている。SADの商用利用を可能とする方策を立て、研究成果の社会還元を図れるのではないか？
- 拡張性や移植性の抜本的向上を図る。例えば、C++などへの全面的な書き換えを行う。

第 II 部

SAD理解に有用なビーム物理の基礎

この第II部は、SADユーザーが理解しておくべき一般的なビーム物理の基礎として、ここに掲載する。SADコードに直結した内容ではなく、今回の講義の中でも特に取り上げる予定はない。この内容は、1997年の高エネルギー加速器セミナーにおける講義テキストの一部に若干筆を加えたものである。

1 ビームの概念と位相空間

一口にビームといってもその範囲は広く、このテキスト中で扱うビームの種類も常に一定のものではない。線形加速器のビーム、ビーム輸送路におけるビーム、円形加速器のビームそして電子ビーム、陽子ビーム、さらにはシンクロトロン放射光の様な光ビームなど様々なビームがある。

このような各種ビームには各々に特徴的な性格や取扱手法が存在する一方、ビーム一般として共通する性質や取扱手法も存在している。

特に位相空間を使ってビームを理解することの本質的重要性を理解して欲しい。

まず、次のようなビームの定義から出発しよう。

ビームとは、狭い空間領域に局在する非常に多数の同種粒子の集まりが、ほとんど同じ方向に向かって、ほとんど同じ速さで進行しているもの。

円形加速器の中から一例を挙げよう、電子陽電子衝突型加速器TRISTAN主リングの30GeVにおける電子ないし陽電子のビームの進行速度は光速の99.99999985%で、その空間的広がり、電子と陽電子ビームがぶつかる衝突点で、進行方向の長さ約2cm、水平幅約600 μm 、垂直高さ約16 μm であり、この内には約 2.5×10^{11} 個の電子または陽電子が集まっている。

ビームの進行速度、ビームサイズ、さらに含まれる粒子数は加速器の種類により、また同じ加速器でもビームエネルギーや運転条件によって異なる。またビームサイズについては加速器リング中の場所毎でも異なった値を持つものである。

1.1 ビームと位相空間

ビームを構成する個々の粒子の位置を横軸に、速度を縦軸にプロットしたものが位相空間を使ったビーム表現である。このように位相空間上の点集合としてビームを表す事利点は次のように明瞭である。

図1に示すのは実空間と位相空間におけるビーム表現の違いである。3次元の実空間上の表示では、空間内の同一点から出発した粒子が時間の経過とともに別々の場所に移動したり、逆に異なった場所にあった粒子が同一場所に集まったりする。このように粒子を表す初期の点集合からその後の運動を予測することができない。

一方、6次元位相空間では(図中では水平方向を表す x -方向のみ表示)、同一点から出発した粒子は時間の経過によっ

ても常に同一点にあり、また異なる点から出発した粒子が同一点に至ることがない。

粒子の従う運動方程式は2階微分方程式であり、初期値としての位置と速度が決まればその後の運動は一意的に決定される。そのため位相空間上の同一点は運動によっても同一の点に至り、また異なる点が同一点に至ることもない。即ち位相空間上にビームを表現すれば、それはビーム運動の初期値に関する全情報を示したことになり、以後のビーム運動を予測することが可能になる。

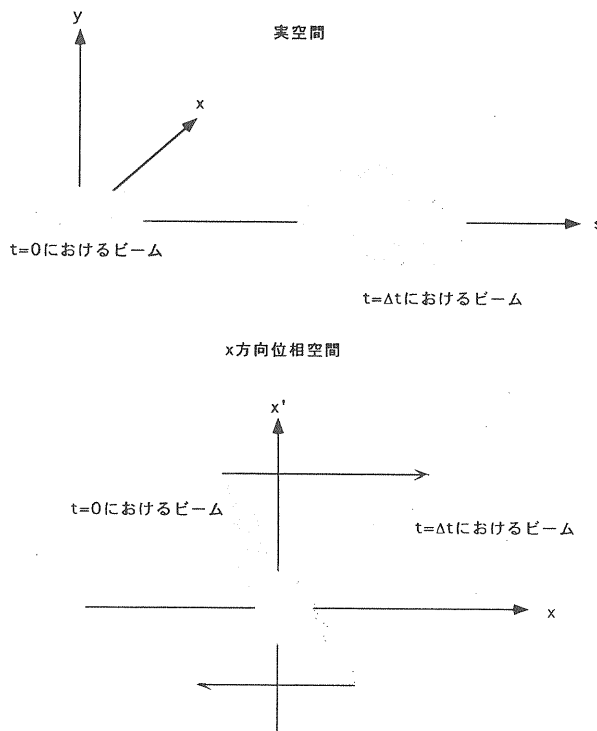


図 1: 実空間と位相空間におけるビーム表現の違い

1.2 ビームの正準運動

このようにビームを構成する個々の粒子が同一の運動方程式で記述されるとき、言葉を換えれば同一Hamiltonianに支配されるとき、ビーム運動は正準 (canonical) でありシンプレクティック (symplectic) 条件¹を満たしている。「ビームが位相空間上に占める面積は運動によって変わらない。」と言う、一般にLiouvilleの定理として知られる、加速器ビームの性質はこのシンプレクティック条件の一部であり²、この定理が成立する条件はビームが正準運動を行う条件と同一である。このテキストでは、正準運動の枠内でビーム運動を記述する。

しかしながら、実際のビームをとりまく環境は、より多彩な物理現象に満ちており正準運動として記述できない現象も起きる。それは例えば、ビーム内粒子間の相互散乱、残留ガスとの散乱、シンクロトロン放射による振動の減衰、

¹Hamilton形式にもとづいた正準変換やシンプレクティック条件は非常に重要なテーマである。生出勝彦氏による「ビーム力学入門」JLC-FFIR92研究会講義録・研究報告集、田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings 93-6 (1993) がこの分野への最良の入門書であろう。

²後に (141) 式でSymplectic条件の他の具体例が示される。

シンクロトロン放射による振動の量子励起などである。これらの現象ではビームを構成する個々の粒子が確率的に運動に異なった影響を受け、それを同一Hamiltonianで記述することはできない。このような場合をここでは取り扱わないが、非正準運動から生じる多くの重要な加速器ビーム特有の物理現象があることは知っておく必要がある。

1.2.1 正準変換とSymplectic条件

正準方程式で運動が記述される位相空間の点 η を考える。この運動方程式は次のような正準形式で書ける。

$$\dot{\eta} = S \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (1)$$

ここで正準形式に特有な行列 S はSymplectic行列と呼ばれ、その要素は位相空間ベクトル η 要素の並べ方に応じて次のように与えられる。

$$\eta = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix} \text{ の時、 } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \text{ の時、 } S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

さてこの η が次のような、正準変換に限らない、一般の変換を受けるとき、

$$\zeta = \zeta(\eta) \quad (4)$$

変換後の位相空間ベクトル ζ の従う運動方程式は変換のヤコビアン M を使って次のように表現できる。

$$\dot{\zeta} = M \dot{\eta} \quad (5)$$

変換のヤコビアン M の要素の具体的な形は以下である。

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \quad (6)$$

変換後の ζ の従う運動方程式 (5) に変換前の η の従う運動方程式 (1) を代入し、次の関係を適用することにより、

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \implies \frac{\partial H}{\partial \eta} = M^t \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (7)$$

ζ の運動方程式は次になる。

$$\dot{\zeta} = M S \frac{\partial H}{\partial \eta} = M S M^t \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (8)$$

この運動方程式は明らかに、正準方程式 (1) とは形が異なり、正準形式ではない。これは施した変換 (4) が、正準変換に限らない、一般の変換だからである。運動方程式

(8) が正準形式となるには、変換のヤコビアンが次の条件を満たせばよく、これがSymplectic条件と呼ばれるものである。

$$M S M^t = S \quad (9)$$

このSymplectic条件はSymplectic行列の性質 $S^2 = -I$ を使えば次の形と等価である。

$$M^t S M = S \quad (10)$$

1.2.2 Symplectic条件を満たす転送行列

2行2列の転送行列 M が (9) や (10) に得たSymplectic条件を満たす条件を具体的に見てみよう。

$$\begin{aligned} M^t S M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} = (\det M) S \end{aligned} \quad (11)$$

即ち転送行列の行列式が1であるときSymplectic条件が満たされる。この条件は正準変換に於ける位相空間面積の保存を表している。ビームを構成する多数粒子の位相空間に於ける分布領域の面積はエミッタンスと呼ばれるが、全粒子が同一転送行列 (より一般には同一ハミルトニアン) で記述される変換に際して、エミッタンスは保存される。このことをリウヴィルの定理と称している。

ここでは1自由度の場合を考えたため、Symplectic条件から得られた条件は1個であったが、当然2ないし3自由度の場合には得られる条件の数が増える。計算機による粒子トラッキングでは、これらのSymplectic条件が満足されていることを確認することにより、系統誤差の混入や非物理的な計算アルゴリズムの導入を避けることができる。

1.3 ビームの線形運動

位相空間の点集合として表現されたビームを追跡する最も簡便な方法が転送行列 (transfer matrix) の利用である。この方法が適用できる条件は運動方程式が線形であることないし線形近似が許されるときである。

そのため、粒子位置 $z \ll 1$ および粒子進行角度 $z' = p_z/p_s \ll 1$ を前提とした近似が可能のように、ビームの進行方向にできるだけ沿って座標系を選ぶ必要がある。この目的のために参照粒子の軌跡そのものを座標系として選ぶこともあるが、これ自身は必須条件ではない。

線形運動について学ぶことの重要性は、ビーム運動を考えるための枠組みを学ぶことに重なる。現実には存在しない理念型としての線形運動は、物理において質点や剛体という概念と同じ役割を有している。この基礎の上で、非線形運動について議論を展開することができる。非線形運動について定量的な議論をするには、SADを始めとする計算機コードで行う粒子トラッキングが不可欠である。

1.3.1 転送行列とビームの軌跡

線形の運動方程式に従う運動は一般に2つの線形独立解の重ね合わせで表わすことができる。

$$\begin{aligned} \text{コサイン型初期値} & \begin{cases} C(s_0, s_0) = 1 \\ C'(s_0, s_0) = 0 \end{cases} \\ \text{サイン型初期値} & \begin{cases} S(s_0, s_0) = 0 \\ S'(s_0, s_0) = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

特に線形独立解として (12) 式の初期条件により定義されたコサイン型軌跡 $C(s, s_0)$ とサイン型軌跡 $S(s, s_0)$ を使用すれば、任意の初期値から出発する軌跡を追跡する時、次式に示すように重ね合せの係数として軌跡の初期値自身 $z(s_0)$ および $z'(s_0)$ が使われる。

$$\begin{cases} z(s) = C(s, s_0) z(s_0) + S(s, s_0) z'(s_0) \\ z'(s) = C'(s, s_0) z(s_0) + S'(s, s_0) z'(s_0) \end{cases} \quad (13)$$

この様子を位相空間と実空間で図 2 に表した。

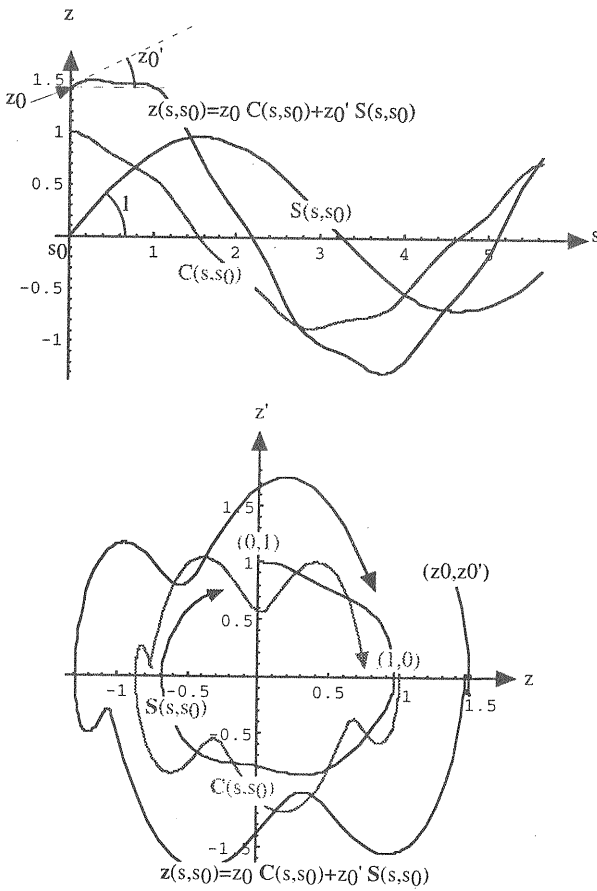


図 2: サイン型軌跡、コサイン型軌跡そして任意初期値の軌跡。上図は実空間、下図は位相空間に於ける記述。

(13) 式を行列表示で示す事で転送行列 $M(s, s_0)$ が定義される。

$$\mathbf{z}(s) \equiv \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = M(s, s_0) \mathbf{z}(s_0) \quad (14)$$

ここで見るように転送行列 $M(s, s_0)$ の行列要素を求めることはコサイン型とサイン型の初期値 (12) 式に対する運動方程式の解を求めることに帰着する。

$$M(s, s_0) = \begin{pmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) \end{pmatrix} \quad (15)$$

1.3.2 位相空間楕円の表示法

ここでビームの位相空間における分布としてしばしば登場する楕円の記述方法を導入しておく。

一般の楕円は面積 πW 、長短軸の長さ比率 a として回転角 Ω によって特徴づけられる。そしてこの楕円上の一点は媒介変数 θ を使い (16) 式で与えられる。ここで $\mathbf{x}(\theta)$ が位相空間上の位置を表すベクトルである。

$$\mathbf{x}(\theta) \equiv \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{W} & 0 \\ 0 & \sqrt{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (16)$$

(16) 式を逆に解き、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{W}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{W}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \\ &\equiv T \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

三角関数の関係式 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を使って (17) から媒介変数 θ を消去することにより、位相空間楕円を表現する方程式が次のように表される。

$$\begin{aligned} 1 &= (T\mathbf{x})^t T\mathbf{x} = \\ \mathbf{x}^t \frac{1}{W} &\begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \Omega}{a} + a \sin^2 \Omega & (\frac{1}{a} - a) \sin \Omega \cos \Omega \\ (\frac{1}{a} - a) \sin \Omega \cos \Omega & \frac{\sin^2 \Omega}{a} + a \cos^2 \Omega \end{pmatrix} \mathbf{x} \\ &\equiv \mathbf{x}^t \frac{1}{W} \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (18)$$

これをベクトル \mathbf{x} の成分を使って展開表現すれば、

$$W = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 \quad (19)$$

(18) で定義された係数 β, γ として α は長短軸比率 a と回転角 Ω により決められるもので、当然、3つの係数同士は独立ではなく相互間に (20) 式の関係が存在する。

$$\beta\gamma = 1 + \alpha^2 \quad (20)$$

ここで導入した楕円表示の係数 β, γ として α は周回運動における転送行列の行列要素およびベクトロン振動の擬調和振動子解と深い関係にあり Twiss パラメータと呼ばれる。また特に係数 β はベータ関数ないし振幅関数とも呼ばれている。そのような物理的側面については後に学ぶ。

図 3 に位相空間の楕円の例を示す。これは (16) 式で $a = 3, W = 1, \Omega = \frac{\pi}{6}$ とした場合のものである。

2 荷電粒子の運動

まず荷電粒子の従う運動方程式を近似の無い一般的な形で求める。次に加速器やビーム輸送路によく用いられる主要加速器要素中のビーム運動の方程式を具体的に求める。その上で、よく使われる線形近似を導入する。

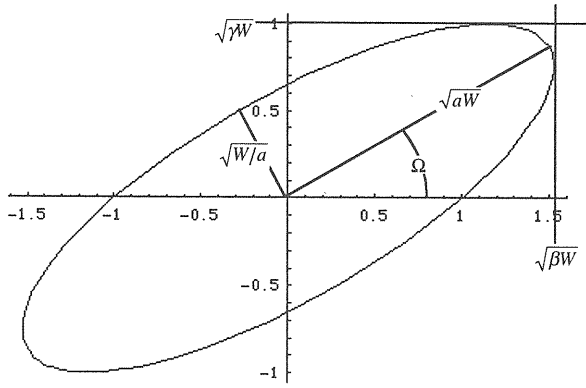


図 3: 位相空間の楕円。

その準備の上で、円形加速器を念頭に置いて周期的条件下におけるビーム運動の安定性について学ぶ。ここでは、いわゆるベータatron振動やシンクロtron振動について学ぶことになる。このテキストの特徴として、ベータatron振動とシンクロtron振動を、転送行列を用いた定式化により、出来るだけ同一手法で取り扱う。

この章の取り扱い範囲では電子ビームと陽子ビームの差異は、現実的な加速エネルギー領域に於けるトランジションエネルギーの有無である。これは静止質量の違いから生じるものである。シンクロtron放射の効果はここでは考慮されない。

2.1 運動方程式

ここでは荷電粒子の運動方程式を求める。便宜上、ここで求める運動方程式の独立変数は時間 t ではなくビームの運動方向に沿って設定される基準座標曲線上の弧長 s である。このために必要な変換はFrenet-Serretの公式を使って行われる。

2.1.1 座標系とFrenet-Serretの公式

粒子運動を記述するため使用する座標系は、図 4に示す、独立変数 s と共に移動する座標系 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_s)$ である。この座標の原点は、運動粒子から基準座標曲線 C に下した垂線の足の位置で定義され、粒子の運動に連れて移動する。曲線 C は、ビームの進む道筋に沿って設定された区分的に滑らかな曲線である。この曲線の設定方法は、たとえば理想的な粒子運動軌道に選んでもよいし、またビームから大きく離れない条件が満たされる限り³、運動方程式の解でなくてもよい。⁴

この座標系を使うと、運動粒子の位置 $\mathbf{r}(s(t))$ は次式の様に分解された成分 (x, y) で記述される。

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \vec{\delta} = \mathbf{r}_0(t) + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y \quad (21)$$

³この条件は線形近似をする時に必要である。計算機シミュレーションの中などで充分高次の項まで含んだ取り扱いに終始するなら粒子位置が一意的に記述できればよいことになる。

⁴例えば、アンジュレータ内のビーム運動の記述に使う基準座標曲線としては、運動方程式を満たすサイン関数よりも、満たさない直線のほうが一般には便利であろう。

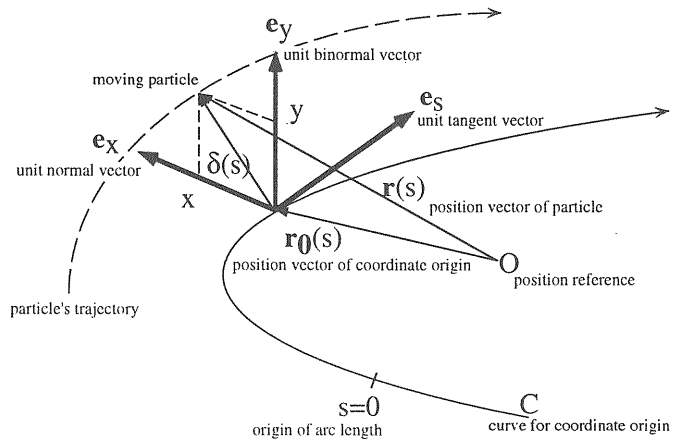


図 4: 粒子運動を記述する座標系。

時間 t と基準座標曲線上の弧長 s との関数関係は、時間 t における粒子位置 $\mathbf{r}(t)$ から基準座標曲線 C に下した垂線の足の位置 $\mathbf{r}_0(t)$ を用いて次式により与えられる。

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_0(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0(t)} dt \quad (22)$$

ここで上付ドットは時間 t による微分を表す、また a は運動粒子が弧長測定の原点を通過する時刻を示す。この関数関係を使って、運動粒子位置 \mathbf{r} や基準座標曲線 C 上の座標原点 $\mathbf{r}_0(t)$ を記述する独立変数を時間 t から弧長 s に変換できる。すなわち時間 t を(22)式の逆関数 $t(s)$ により表してやれば、独立変数が弧長 s に変換される。

座標原点 $\mathbf{r}_0(t)$ を弧長 s で微分したものは、弧長と時間との関係(22)式により、単位長さの接線ベクトルである事が知れる。

$$\dot{\mathbf{r}}_0 \equiv \dot{\mathbf{r}}_0 \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_0}{\sqrt{\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}} \equiv \mathbf{e}_s \quad (23)$$

以後弧長 s による微分を上付プライム'で表すことにする。

単位接線ベクトルの内積は定数故、 s で微分をすればゼロとなる。これより \mathbf{r}_0'' は単位接線ベクトルに直交する事が知られ、これを曲率と呼ばれる $\kappa \equiv \sqrt{\mathbf{r}_0'' \cdot \mathbf{r}_0''}$ で次のように正規化したものが単位法線ベクトル \mathbf{e}_x と呼ばれる。

$$\mathbf{e}_x \equiv -\frac{\mathbf{r}_0''}{\kappa} \quad (24)$$

さらに互いに直交する接線ベクトルと法線ベクトルの外積から単位従法線ベクトルが次のように定義される。

$$\mathbf{e}_y \equiv \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_x \quad (25)$$

このように定義された直交座標系 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_s)$ は右手系を成す。この座標系は座標原点の動きに連れ移動する座標系であり、この変化の様子を(26)式に示すFrenet-Serretの公式が記述する。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_s \equiv \frac{d}{ds} \mathbf{r}_0(s) = \mathbf{r}'_0(s) \\ \mathbf{e}'_x = -\tau \mathbf{e}_y + \kappa \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}'_y = \tau \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}'_s = -\kappa \mathbf{e}_x \end{cases} \quad (26)$$

ここで κ と τ は基準座標曲線を選ぶことで決まる量で、各々基準座標曲線の幾何学的な曲率とねじれ率に対応している。

以下にFrenet-Serretの公式を導いて置こう。まず、単位接線ベクトルの微分は、(22)式および(24)式の定義からFrenet-Serret (26) 第4式となるのが直ちに知れる。

次に単位法線ベクトルの定義式 (25) の微分を考えると、第1項は平行なベクトル間の外積故にゼロとなり、単位接線ベクトルに直交していることが示される。

$$\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}'_s \times \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}'_x = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}'_x \quad (27)$$

さらに \mathbf{e}_y の内積の微分がゼロであることから、 \mathbf{e}'_y は単位法線ベクトルとも直交しており、単位法線ベクトルに平行でFrenet-Serret (26) 第3式に書ける事が示される。

最後に、単位法線ベクトル \mathbf{e}_x の微分は、前と同様に内積の微分がゼロであることから、単位法線ベクトルに直交しており次式に書ける。

$$\mathbf{e}'_x = a\mathbf{e}_y + b\mathbf{e}_s \quad (28)$$

係数 a と b を決めるには、それぞれ上式と \mathbf{e}_y および \mathbf{e}_s との内積を計算すればよい。

$$a = \mathbf{e}'_x \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}'_y = -\tau \quad (29)$$

$$b = \mathbf{e}'_x \cdot \mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}'_s = \kappa \quad (30)$$

これらを(28)式に代入することでFrenet-Serret (26) 第2式を得る。

以下の議論では常にねじれ率 $\tau = 0$ を前提⁵とする。

2.1.2 運動方程式

よく知られるように電荷 q を有する荷電粒子は電磁場中でLorentz力を受け(31)式の運動方程式に従って運動する。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \dot{\mathbf{P}} = q \{ \mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \} \quad (31)$$

ここで \mathbf{P} は粒子の運動量、 \mathbf{v} は速度、 \mathbf{E} は電界強度、 \mathbf{B} は磁束密度である。さらに電場が存在しない場合には運動方程式は次のように簡単になる。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (32)$$

ここで m は運動粒子の質量で、静止質量 m_0 と相対論係数 γ との積で表わされる。

(21)式によって粒子位置を表わし、(32)式の運動方程式に代入しよう。このとき位置ベクトル \mathbf{r} の時間 t による微分を弧長 s による微分で置き換えるようにする。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}' \frac{ds}{dt} &= \{ \mathbf{r}'_0 + (x\mathbf{e}_x)' + (y\mathbf{e}_y)' \} \dot{s} \\ &= \{ x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + (1 + \kappa x)\mathbf{e}_s \} \dot{s} \end{aligned} \quad (33)$$

⁵この前提によりねじれ率のある粒子軌道を扱えなくなる訳ではない。基準座標曲線としてはねじれ率がゼロのものを使い、この上でねじれ率のある粒子運動も記述しようということである。

ここではFrenet-Serretの公式 (26) 式を使って座標ベクトルの微分を展開して表した。同様に、時間による2階微分は次の様に表される。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{r}'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2s}{dt^2} \\ &= \{ [x'' - \kappa(1 + \kappa x)] \dot{s}^2 + x' \ddot{s} \} \mathbf{e}_x \\ &\quad + (y'' \dot{s}^2 + y' \ddot{s}) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \{ (2\kappa x' + \kappa' x) \dot{s}^2 + (1 + \kappa x) \ddot{s} \} \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (34)$$

ここに求めた $\ddot{\mathbf{r}}$ を運動方程式 (32) 式の左辺に、さらに右辺には(33)式の $\dot{\mathbf{r}}$ と次のように成分表示した磁場とを代入することにより、

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_s \mathbf{e}_s \quad (35)$$

弧長 s を独立変数とする運動方程式の成分表示 (36) 式を得る。

$$\begin{cases} x'' + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} x' - \kappa(1 + \kappa x) = \frac{q}{m\dot{s}} \{ y' B_s - (1 + \kappa x) B_y \} \\ y'' + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} y' = \frac{q}{m\dot{s}} \{ (1 + \kappa x) B_x - x' B_s \} \\ 2\kappa x' + \kappa' x + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} (1 + \kappa x) = \frac{q}{m\dot{s}} (x' B_y - y' B_x) \end{cases} \quad (36)$$

磁場中を運動する荷電粒子の運動エネルギー保存則に対応して、上記運動方程式の第3式は解析的に解ける。すなわち第1式の両辺に x' 、第2式の両辺に y' を掛けて両式の和をとると B_s 項が消去された次式になる。

$$\begin{aligned} x'x'' + y'y'' + \frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} (x'^2 + y'^2) - \kappa(1 + \kappa x)x' \\ = \frac{q}{m\dot{s}} (1 + \kappa x) (y'B_x - x'B_y) \end{aligned} \quad (37)$$

(37)式右辺の磁場の項は(36)式の第3式右辺と同じ形なので消去することができ、磁場の項を含まない(38)式を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} &= \frac{x'x'' + y'y'' + (1 + \kappa x)(\kappa x' + \kappa' x)}{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2}{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

上の式は $g \equiv x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2$ と置くことで次の様に簡単化され、

$$-\frac{\ddot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{g'}{2g} = \frac{\dot{g} \frac{dt}{ds}}{2g} = \frac{\dot{g}}{2g\dot{s}} \quad (39)$$

これを通分することで積分のできる形である事が見通せる。

$$2g\dot{s}\ddot{s} + \dot{g}\dot{s}^2 = \frac{d}{dt} (g\dot{s}^2) = 0 \quad (40)$$

この積分の実行により運動方程式 (36) 第3式は解け、時間 t と弧長 s の関係が明示的に与えられる。

$$\dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \quad (41)$$

この結果の物理的解釈をすれば、磁場の働きが粒子の速さを変えない事そして積分定数 v は粒子速度に対応する事が理解される。

この結果を運動方程式第1式、第2式に代入すれば、横方向運動の運動方程式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' - \frac{2\kappa x' + \kappa' x}{1 + \kappa x} x' - \kappa(1 + \kappa x) = \\ \frac{q}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \\ \quad \times \left[\frac{x'y'}{1 + \kappa x} B_x - \left(1 + \kappa x + \frac{x'^2}{1 + \kappa x}\right) B_y + y' B_s \right] \\ y'' - \frac{2\kappa x' + \kappa' x}{1 + \kappa x} y' = \\ \frac{q}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + (1 + \kappa x)^2} \\ \quad \times \left[\left(1 + \kappa x + \frac{y'^2}{1 + \kappa x}\right) B_x - \frac{x'y'}{1 + \kappa x} B_y - x' B_s \right] \end{array} \right. \quad (42)$$

ここに得られた結果は厳密なもので(42)式はベータatron振動(横方向振動)の運動方程式であり、(41)式はベータatron振動解に応じて決まるシンクロtron振動(進行方向の振動)の解⁶である。これらは数値計算に依る粒子追跡の基礎を成しているが⁵、一方解析的な取り扱いの為には今後何らかの近似を導入することになる。

2.2 加速器構成要素

ここでは、前のセクションで求めた運動方程式を特定の主要加速器要素ごとに書き下し、その線形近似条件による解から各加速器要素の転送行列を求める。

2.2.1 自由空間

ドリフト空間(drift space)とも呼ばれる電磁場の無い空間である。この場合、基準座標曲線は曲率 $\kappa = 0$ の直線を選ぶのが自然である。

磁場条件は当然、

$$B_x = B_y = B_s = 0 \quad (43)$$

そして運動方程式は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = 0 \\ y'' = 0 \\ s^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + 1} \end{array} \right. \quad (44)$$

これは厳密に解ける。積分を実行すれば、

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x'_0 s + x_0 \\ y = y'_0 s + y_0 \\ s = \frac{v}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + 1}} t + s_0 \end{array} \right. \quad (45)$$

参照運動量 p_0 の粒子の速さを v_0 とすると、運動量が Δp 大きい粒子の速さ v は次式で与えられる。

$$v \approx v_0 + \frac{dv}{d(\Delta p/p_0)} \frac{\Delta p}{p_0} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \quad (46)$$

⁶ここでは磁場のみが考慮され、シンクロtron振動に不可欠な(高周波加速)電磁場の効果が含まれていない。この取り扱い範囲では振動運動には至らず、後に見るように電磁場の効果を考慮して始めて真のシンクロtron振動が記述される。

ここで γ_0 は参照運動量粒子の相対論係数である。

粒子がその静止質量に比べて非常に高いエネルギーを有するとき、速度は殆ど光速に達し運動量の違いによる速度差は極めて小さい。このように速度差が無視できるほど高エネルギー領域にある粒子のことを超相対論的粒子と呼ぶ。静止質量が小さいため多くの電子加速器でこの条件が満たされている。

2.2.2 4極磁石

水平および垂直方向で各々収束および発散の効果を持つ磁石である。便宜上、水平方向に収束作用があるとき(垂直方向は発散作用だが⁵)収束磁石(focusing magnet)と、水平方向に発散作用を持つとき(垂直方向は収束作用だが⁵)発散磁石(defocusing magnet)と呼び分けられている。

ビームが設計の上で磁石の中心付近を通る限り、基準座標曲線は自由空間と同じく曲率 $\kappa = 0$ の直線を選ぶのが自然である。

磁場条件は、

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \frac{\partial B_x}{\partial y} \Big|_{x=y=0} y = b_1 y \\ B_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{x=y=0} x = b_1 x \\ B_s = 0 \end{array} \right. \quad (47)$$

運動方程式は、

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = \frac{qb_1}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} \{x'y'y - (1 + x'^2)x\} \\ y'' = \frac{qb_1}{mv} \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} \{(1 + y'^2)y - x'y'x\} \\ s^2 = \frac{v^2}{x'^2 + y'^2 + 1} \end{array} \right. \quad (48)$$

線形近似を施した運動方程式、

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = -\frac{qb_1}{mv} x \\ y'' = \frac{qb_1}{mv} y \\ \dot{s} = v \end{array} \right. \quad (49)$$

参照運動量より Δp 運動量が大きい粒子の従う運動方程式は(46)式および(50)式を(49)式に代入することで(51)式に与えられる。

$$\frac{1}{mv} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 + \Delta p} \approx \frac{1}{p_0} \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) \quad (50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'' = -K_1 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) x \\ y'' = K_1 \left(1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) y \\ \dot{s} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \end{array} \right. \quad (51)$$

ここで K_1 は次式で定義されている。

$$K_1 = \frac{qb_1}{p_0} \quad (52)$$

2.2.3 2極磁石

偏向磁石 (bending magnet) とも言われ、ビーム軌道を曲げる役割を担う。基準座標曲線は参照運動量粒子の軌跡に沿ったものを選ぶのが一般であろう。すなわち曲率 $\kappa = 1/\rho_0$ の曲線を基準座標曲線に選ぶ、ここで ρ_0 は参照運動量粒子の曲率半径である。

水平方向偏向磁石の場合の磁場条件は、

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = b_0 \\ B_s = 0 \end{cases} \quad (53)$$

運動方程式は、

$$\begin{cases} x'' - \frac{2\frac{1}{\rho_0}x'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}x' - \frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right) \\ \quad = \frac{qb_0}{mv}\sqrt{x'^2+y'^2+\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \\ \quad \quad \times \left\{-\left(1+\frac{1}{\rho_0}x+\frac{x'^2}{1+\frac{1}{\rho_0}x}\right)\right\} \\ y'' - \frac{2\frac{1}{\rho_0}x'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}y' \\ \quad = \frac{qb_0}{mv}\sqrt{x'^2+y'^2+\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right)^2}\left(-\frac{x'y'}{1+\frac{1}{\rho_0}x}\right) \\ \dot{s}^2 = \frac{v^2}{x'^2+y'^2+\left(1+\frac{1}{\rho_0}x\right)^2} \end{cases} \quad (54)$$

線形近似を施した運動方程式、

$$\begin{cases} x'' = \frac{-qb_0}{mv}\left(1+\frac{2x}{\rho_0}\right) + \frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{x}{\rho_0}\right) \\ y'' = 0 \\ \dot{s} = v\left(1-\frac{1}{\rho_0}x\right) \end{cases} \quad (55)$$

参照運動量粒子の運動量 p_0 、2極磁場強度 b_0 そして曲率半径 ρ_0 との間には (56) 式の関係がある。

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{qb_0}{p_0} \quad (56)$$

そこで線形近似を施した参照運動量粒子の運動方程式は (57) 式となる。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} \\ y'' = 0 \end{cases} \quad (57)$$

線形近似を施した運動方程式 (55) 式中の速度 v と運動量の逆数 $1/mv$ に、それぞれ (46) 式と (50) 式による、運動量のずれ Δp に関する線形近似表現を代入することで運動

量が Δp 大きい粒子の従う運動方程式を作ることができる。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{2x}{\rho_0}\right)\frac{\Delta p}{p_0} \approx -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta p}{p_0} \\ y'' = 0 \\ \dot{s} = v_0\left(1+\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}\right)\left(1-\frac{1}{\rho_0}x\right) \\ \quad \approx v_0\left(1+\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{\Delta p}{p_0}-\frac{x}{\rho_0}\right) \end{cases} \quad (58)$$

2.2.4 端部効果

(57) 式に見るように、水平偏向磁石では水平方向の運動に収束力が生じている。実際の加速器で水平収束力がこのままに現れるのは、磁石端部でビームが垂直に出入射する扇形磁石 (セクター型磁石) の場合である。矩形磁石の様にビームの入射および出射角が 90° から外れる場合は、垂直方向の収束力が生じるなど、ここに示された運動方程式と異なる運動をする。この効果は端部効果 (edge effect) あるいは楔形効果 (wedge effect) といわれる。

矩形磁石に例を取り端部効果の発生理由を見てみよう。図 5 に示すように、偏向磁石中の運動を記述する基準座標曲線は円弧で両外側の自由空間中の運動を記述する基準座標曲線は直線である。ところが磁石の入り口付近には、偏向磁石中に在っても内寄りに運動する粒子の場合垂線の足が直線に下りる楔形領域が存在する。逆に自由空間中に在っても外寄りに運動する粒子の垂線の足が円弧に下りる楔形領域も存在している。セクター磁石ではこのような楔形領域は存在しない。この楔形領域の影響を考慮することで端部効果が理解され、その効果を計算することができる。

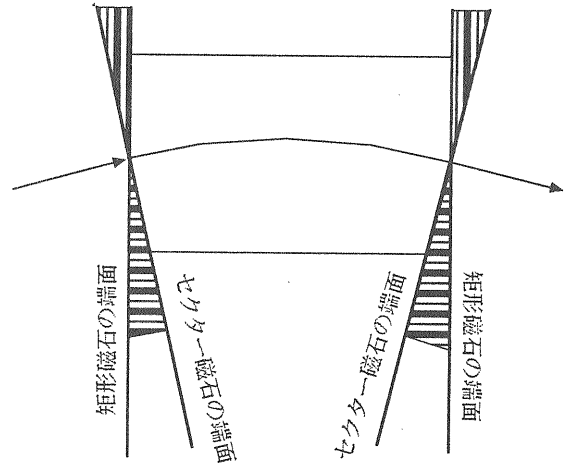


図 5: セクター磁石と矩形磁石による端部効果の差。

このほかに磁石端部付近のようにビーム進行方向に沿って横方向の磁場が変化する場所ではフリッジ場効果と呼ぶ現象が生じる⁷。このような場所では必ず付随して進行方向の磁場も発生するために起こるもので、正しく Maxwell の方程式を満たすフリッジ場を求め運動方程式に取り入れることで影響を評価できる。フリッジ場効果は 2 極磁石以外の磁石でも存在する。計算機による粒子追跡コードではこ

⁷ 一般には、端部効果とフリッジ場効果とは、言葉の用法上、常に区別して使われている訳ではない。

の効果を取り入れることができ、ビーム運動に重要な影響を与える場合も知られている⁸。

2.2.5 高周波加速空洞

直線加速器やシンクロトロンに於けるビーム加速や、貯蔵型リングに於ける放射エネルギーの損失補給という役割を担うのが高周波加速空洞である。ここでは簡単化のため高周波の時間変化は単一周波数のサイン関数とし、また加速空洞の長さはゼロとしておく。空洞長が大きい場合には、運動粒子の通過に時間を要し途中で高周波位相が変化する効果を考慮しなければならない。

ピーク電圧 \hat{V}_{RF} 、高周波角周波数 ω_{RF} の加速空洞に、時刻 t に発生している加速電圧 $V_{RF}(t)$ は(59)式に書ける⁹。

$$V_{RF}(t) = \hat{V}_{RF} \cos(\omega_{RF}t + \phi) \quad (59)$$

このとき加速電場の時間勾配は次式になる。

$$\dot{V}_{RF}(t) = -\hat{V}_{RF}\omega_{RF} \sin(\omega_{RF}t + \phi) \quad (60)$$

この加速空洞に電荷 q の荷電粒子が、基準時刻 t_0 より時間 τ だけ早い時刻 $t = t_0 - \tau$ に到達する際に、粒子が得るエネルギー ΔE は高周波電圧の時間的変化を線形近似で表すことにより(61)式で与えられる。

$$\Delta E = qV_{RF}(t) \approx q \left\{ V_{RF}(t_0) - \tau \dot{V}_{RF}(t_0) \right\} \quad (61)$$

相対論的運動学によれば、このとき粒子の運動量増加は(62)式に示される。

$$\Delta p = \frac{1}{v} \Delta E \quad (62)$$

ここで v は運動粒子の速度である。

2.2.6 線形近似解と転送行列

参照運動量粒子の線形運動方程式は、自由空間、2極磁石そして4極磁石について(63)式の形にまとめて記述できる。

$$z'' = K(s)z \quad (63)$$

ここで z は水平方向 x 、垂直方向 y の内いずれかを代表するものとする。また今までに紹介した加速器要素について $K(s)$ は次のように定義されている。

$$K(s) = \begin{cases} -\frac{qb_1}{p_0} - \left(\frac{qb_0}{p_0}\right)^2 \\ \frac{qb_1}{p_0} \end{cases} \quad (64)$$

(64)式の b_0 および b_1 は、自由空間では、

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0 \quad (65)$$

2極磁石の場合は、

$$b_0 = B_y, \quad b_1 = 0 \quad (66)$$

⁸例えば、KEKBや北京のBTFCF衝突型加速器計画では、フリンジ場効果が粒子の安定運動領域(dynamic aperture)を制限する上で大きな影響を及ぼしている。これはSADコードによる計算で明らかになった。

⁹此処で言う電圧とは、加速空洞を通過する粒子の軌道に沿った電界強度の積分である。時間的に変動する電界のため、一般には通過に要する時間の影響を受ける。

4極磁石の場合は、

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=y=0} \quad (67)$$

と与えられる。

$K(s)$ が定数の場合には(63)式は解く事ができる。両辺に z' を掛けると、

$$z'z'' = z'Kz \quad (68)$$

積分のできる形になる。

$$(z'^2)' = (z^2)'K \quad (69)$$

運動の不変量が積分定数 c_1 に対応して存在する。

$$z'^2 = z^2K + c_1 \quad (70)$$

(70)式から運動粒子は位相空間において $K < 0$ の時は楕円、 $K = 0$ の時は直線、そして $K > 0$ の時は双曲線を描くことが判る。更に積分をして(70)式を解いておく¹⁰。

$$\begin{cases} z(s) = \frac{e^{-(\sqrt{K}s) - \sqrt{K}c_2} (-4c_1 e^{2\sqrt{K}s} + e^{2\sqrt{K}c_2})}{4\sqrt{K}} \\ z'(s) = \frac{-2c_1 e^{\sqrt{K}s - \sqrt{K}c_2}}{e^{-(\sqrt{K}s) - \sqrt{K}c_2} (-4c_1 e^{2\sqrt{K}s} + e^{2\sqrt{K}c_2})} \end{cases} \quad (71)$$

この解を表している積分定数 c_1 と c_2 を運動の初期値 $z_0 = z(0)$ と $z'_0 = z'(0)$ を使って置き換えると¹¹、

$$\begin{cases} z(s) = \frac{e^{-(\sqrt{K}s) - \log\{2(\sqrt{K}z_0 - z'_0)\}}}{4\sqrt{K}} \\ \times \left\{ 4(\sqrt{K}z_0 - z'_0)^2 - 4e^{2\sqrt{K}s} (-Kz_0^2 + z'_0{}^2) \right\} \\ z'(s) = \frac{-2e^{\sqrt{K}s - \log\{2(\sqrt{K}z_0 - z'_0)\}}}{e^{-(\sqrt{K}s) - \log\{2(\sqrt{K}z_0 - z'_0)\}}} \left\{ -Kz_0^2 + z'_0{}^2 \right\} \\ \times \left\{ 4(\sqrt{K}z_0 - z'_0)^2 - 4e^{2\sqrt{K}s} (-Kz_0^2 + z'_0{}^2) \right\} \end{cases} \quad (72)$$

具体的に、収束係数 K 、長さ l の加速器要素の転送行列を求めるには、(72)式にサイン型初期値 $z_0 = 0$ 、 $z'_0 = 1$ およびコサイン型初期値 $z_0 = 1$ 、 $z'_0 = 0$ を代入して得たサイン型およびコサイン型軌跡とその微分を(15)式に従って配置すればよい。自由空間に於ける水平および垂直方向、そして水平偏向磁石に於ける垂直方向の運動は $K = 0$ の場合であり、転送行列は次のようになる。

$$M(l, 0) = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (73)$$

収束磁石や水平偏向磁石に於ける水平方向、また発散磁石に於ける垂直方向の運動は $K < 0$ の場合である。

$$M(l, 0) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{-K}l) & \frac{1}{\sqrt{-K}} \sin(\sqrt{-K}l) \\ -\sqrt{-K} \sin(\sqrt{-K}l) & \cos(\sqrt{-K}l) \end{bmatrix} \quad (74)$$

¹⁰Mathematica3.0は充分賢く、この微分方程式を一般の K について正しく積分してくれる。

¹¹筆者はこの作業をMathematica3.0を使って行った。手計算でチェックをするのは少し厄介かも知れない。

収束磁石に於ける垂直方向そして発散磁石に於ける水平方向の運動は $K > 0$ の場合である。

$$M(l, 0) = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{K}l) & \frac{1}{\sqrt{K}} \sinh(\sqrt{K}l) \\ \sqrt{K} \sinh(\sqrt{K}l) & \cosh(\sqrt{K}l) \end{bmatrix} \quad (75)$$

ここに得た転送行列を使い、位相空間で運動粒子を表す点が、 K の符号により具体的にどのように違って移動するか計算したものを図6に示しておく。自由空間では直線、収束磁石では正立した楕円そして発散磁石では（正立した）双曲線に沿って位相空間点が流れていく。

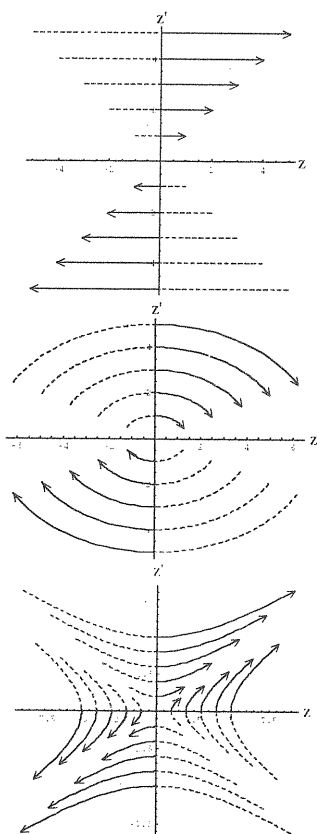


図6: 上より順番に、自由空間 ($K = 0$)、収束磁石 ($K = -0.5$) そして発散磁石 ($K = 0.5$) の中で位相空間点が移動の様子。全図に共通した初期値として、 $(z_0, z'_0) = (0, n)$ 、 n は-5から5の間の全整数を選んだ。さらに発散磁石の初期値には、 $(z_0, z'_0) = (n, 0)$ 、 n としては-5から5の間の全整数を付け加えてある。 $l = 0$ から $l = 1$ を実線で $l = -1$ から $l = 0$ を破線で表してある。

2.3 周回運動 I ベータトロン振動

このセクションでは力学系に周期的条件のある場合の粒子運動を考える。これはいわゆるベータトロン振動であり、円形加速器の設計およびビーム運転の基礎を成す題材である。ここでは線形近似の範囲で話を進め、擬調和振動子としての取り扱いを導入し、これと転送行列の方法とを対照させる。この節ではビーム粒子のエネルギーが一定の場合を取り扱い、シンクロトロン振動と呼ばれるエネルギー変動については次節で扱う。

2.3.1 Floquetの定理とビームの安定条件

円形加速器を念頭に置いて、(63) 式の収束力 $K(s)$ に周期 L の周期性があるとする。

$$K(s+L) = K(s) \quad (76)$$

この条件を満たす (63) 式はHillの方程式と呼ばれる。

$$z'' = K(s)z \quad (77)$$

Floquetの定理

もし $z_1(s)$ と $z_2(s)$ が (77) 式の2つの線形独立解ならば、周期性のために、 $z_1(s+L)$ と $z_2(s+L)$ もまた線形独立解である。また (77) 式の任意の解は2つの線形独立解の線形結合で表す事ができる。そこで $z_1(s+L)$ と $z_2(s+L)$ を $z_1(s)$ と $z_2(s)$ の線形結合によって表現する事ができる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1(s+L) \\ z_2(s+L) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}z_1(s) + a_{12}z_2(s) \\ a_{21}z_1(s) + a_{22}z_2(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (78)$$

ここで A は線形独立解同士を結び付ける係数の行列であるが故に正則であり、 $\det A \neq 0$ である。

このとき次の擬周期条件を満たす解が存在するか否かを調べてみよう。

$$z(s+L) = \lambda z(s) \quad (79)$$

一般解を

$$z(s) = c_1 z_1(s) + c_2 z_2(s) \quad (80)$$

と表現して擬周期条件 (79) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} z(s+L) - \lambda z(s) &= c_1 z_1(s+L) + c_2 z_2(s+L) - \lambda \{c_1 z_1(s) + c_2 z_2(s)\} \\ &= (c_1, c_2) (A - \lambda I) \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

上式が線形独立解 $z_1(s)$ と $z_2(s)$ について独立変数 s の全域で成立するには、 $z_1(s)$ と $z_2(s)$ 各々の係数がゼロでなければならない。即ち次式を満たす非ゼロの c_1 および c_2 が見つければよい。

$$(c_1, c_2) (A - \lambda I) = (0, 0) \quad (82)$$

すなわち次の特性方程式を満たす $\lambda \neq 0$ を求め (82) 式を通じて c_1 および c_2 を決定することで、Hill方程式の擬周期条件 (79) 式を満たす解を求めた事になる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (83)$$

この特性方程式を展開すれば λ に関する次の2次方程式を得る。

$$\lambda^2 - (\text{Tr}A)\lambda + \det A = 0 \quad (84)$$

$\det A \neq 0$ であるから、この式には常に $\lambda \neq 0$ となる解が存在することが判る。

さて、特性方程式の2根が互いに異なる時 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ に
は、 $\lambda_i \equiv e^{\alpha_i L}$ と置くことができ、擬周期条件を満たす
るHill方程式の線形独立解 $z_i(s)$ は次のように書ける。

$$z_i(s+L) = \lambda_i z_i(s) \equiv e^{\alpha_i L} z_i(s) \quad (85)$$

ここで次式で定義される関数 $\varphi_i(s)$ を新たに導入すると、

$$\varphi_i(s) \equiv e^{-\alpha_i s} z_i(s) \quad (86)$$

この関数は次に示すように周期 L を有している。

$$\begin{aligned} \varphi_i(s+L) &= e^{-\alpha_i(s+L)} z_i(s+L) \\ &= e^{-\alpha_i(s+L)} e^{\alpha_i L} z_i(s) = e^{-\alpha_i s} z_i(s) = \varphi_i(s) \end{aligned} \quad (87)$$

最終的にHill方程式の線形独立解 $z_i(s)$ は次式で記述する事
ができる。これはFloquetの定理の別表現である。

$$z_i(s) = e^{\alpha_i s} \varphi_i(s) \quad (88)$$

ここで

$$\varphi_i(s) = \varphi_i(s+L) \quad (89)$$

ビームの安定条件

Hill方程式の線形独立解の対としてサイン型及びコサイン型
初期値を持つ粒子軌道を選べば、行列 A として転送行列を
使えばよく、 $\det A = 1$ が仮定できる。このとき (84) 式
から決まる λ の2根は複素平面上で図7のように位置する。
(79) 式の表現から分かるように、特性根の対が単位円上
に在るとき運動は安定で、そこから外れるとき不安定である。
この条件を周期 L に渡っての転送行列¹² M の行列要素で表
現すると次式となる。

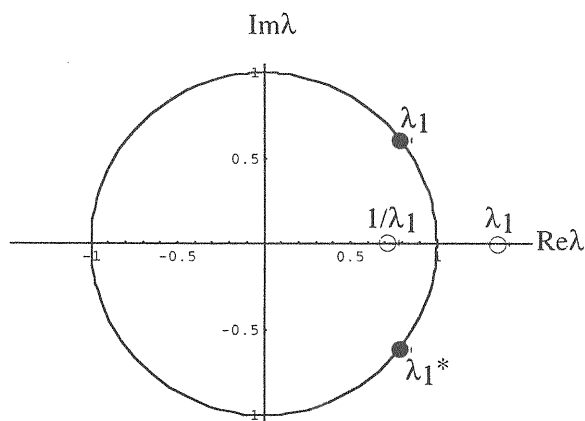


図7: 特性根の位置とビーム運動の安定性。●で示す位置に
特性根の対が在ればビーム運動は安定、一方○の様になると不安定である。

$$\begin{cases} |TrM| = |m_{11} + m_{22}| < 2 & \text{(安定)} \\ |TrM| = |m_{11} + m_{22}| > 2 & \text{(不安定)} \end{cases} \quad (90)$$

¹²周期 L が円形加速器の周長に等しい場合、この転送行列を特に周回行列
(revolution matrix) と呼ぶ。

また安定不安定の境界条件は $m_{11} + m_{22} = \pm 2$ であり、こ
れは重根条件 $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ に対応している。このとき粒
子の運動は、 $\lambda = 1$ のとき周期 L 、そして $\lambda = -1$ のとき周
期 $2L$ の (擬周期ではない) 完全な周期性を持つ。

2.3.2 擬調和振動子解とTwissパラメータ

安定解の形

ベータatron振動を表すHill方程式 (77) 式の解が (88)
式の形で書けることを学んだが、安定運動の条件が満たさ
れている場合について、より具体的な記述をしてみよう。
Floquetの定理により、次の擬調和振動子の形で安定解を
記述できることが保証される。

$$z(s) = \sqrt{W} \zeta(s) \cos \{ \phi(s) - \theta \} \quad (91)$$

ここで振幅を表す項 $\zeta(s)$ には周期条件が課されている。

$$\zeta(s+L) = \zeta(s) \quad (92)$$

運動方程式 (77) 式に以下を代入する、

$$\begin{cases} z' = \sqrt{W} \zeta' \cos(\phi - \theta) - \sqrt{W} \zeta \phi' \sin(\phi - \theta) \\ z'' = \sqrt{W} (\zeta'' - \zeta \phi'^2) \cos(\phi - \theta) \\ \quad - \sqrt{W} (2\zeta' \phi' + \zeta \phi'') \sin(\phi - \theta) \end{cases} \quad (93)$$

運動の初期値 θ に依らず恒等式が成立する条件として、サ
イン項とコサイン項各々の係数がゼロになることを要求す
れば、

$$\begin{cases} \zeta'' - \zeta \phi'^2 - K(s) \zeta = 0 \\ 2\zeta' \phi' + \zeta \phi'' = 0 \end{cases} \quad (94)$$

(94) 式の第2式を $\phi' \zeta$ で除することで、積分の可能な形
になる。

$$2 \frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{\phi''}{\phi'} = 0 \quad (95)$$

これを s で積分し積分定数をゼロに選べば、

$$2 \ln \zeta + \ln \phi' = \text{const.} = 0 \quad (96)$$

位相項 $\phi(s)$ は次の関係を満たさなければならない事が判る。

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\zeta(s)^2} \quad (97)$$

(97) 式を (94) 式の第1式に代入すれば、振幅項 $\zeta(s)$ の従
う非線形方程式が導かれる。

$$\zeta'' = K(s) \zeta + \frac{1}{\zeta^3} \quad (98)$$

Twissパラメータ

(98) 式に従う振幅項 $\zeta(s)$ およびその s 微分を使い次式により
新しい関数 $\beta(s)$ 、 $\alpha(s)$ および $\gamma(s)$ を定義し、これをTwissパ
ラメータと呼ぶ。

$$\begin{cases} \beta(s) = \zeta(s)^2 \\ \alpha(s) = -\frac{1}{2} \beta'(s) = -\zeta(s) \zeta'(s) \\ \gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} = \frac{1}{\zeta(s)^2} + \zeta'(s)^2 \end{cases} \quad (99)$$

Twissパラメータを使ってベータatron振動の解を書くと、

$$z(s) = \sqrt{W} \sqrt{\beta(s)} \cos \{ \phi(s) - \theta \} \quad (100)$$

またこの s 微分は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} z'(s) &= \frac{\beta'(s)}{2\beta(s)} z(s) - \frac{\sqrt{W}}{\sqrt{\beta(s)}} \sin \{ \phi(s) - \theta \} \\ &= \frac{-\sqrt{W}}{\sqrt{\beta(s)}} [\alpha(s) \cos \{ \phi(s) - \theta \} + \sin \{ \phi(s) - \theta \}] \\ &= \sqrt{W} \sqrt{\gamma(s)} \sin \{ \phi(s) - \theta - \chi \} \end{aligned} \quad (101)$$

ここで、

$$\begin{cases} \cos \chi = \frac{-1}{\sqrt{\beta(s)\gamma(s)}} \\ \sin \chi = \frac{\alpha(s)}{\sqrt{\beta(s)\gamma(s)}} \end{cases} \quad (102)$$

である。

(100) 式と (101) 式を使うことで定数 \sqrt{W} をTwissパラメータおよび $z(s)$ と $z'(s)$ で表す。

$$\begin{aligned} W &= W \cos^2 \{ \phi(s) - \theta \} + W \sin^2 \{ \phi(s) - \theta \} \\ &= \left\{ \frac{z(s)}{\sqrt{\beta(s)}} \right\}^2 + \left[\sqrt{\beta(s)} \left\{ \frac{\beta'(s)}{2\beta(s)} z(s) - z'(s) \right\} \right]^2 \\ &= \gamma(s) z(s)^2 + 2\alpha(s) z(s) z'(s) + \beta(s) z'(s)^2 \end{aligned} \quad (103)$$

これは (19) 式と同じ表式であり、先に導入した位相空間の楕円表示パラメータとここで定義したTwissパラメータとが同一物であることを示している。ここに表われた定数 W は、加速器ビームの分野ではCourant-Snyder不変量と呼ばれる。運動粒子が位相空間において描く楕円の面積が πW であることは前にも述べた通りである。

ビームを構成する多数の運動粒子の平均的Courant-Snyder不変量はエミッタンス¹³と呼ばれ、ビームの大きさや角度拡がりを決める物理量として特に重要である。

2.3.3 転送行列要素とTwissパラメータ

転送行列の要素を擬調和振動子の解を使って表現してみよう。そのためには (104) 式のサイン型初期値および (105) 式のコサイン型初期値から始まる粒子運動の軌跡とその s 微分を (100) 式と (101) 式の擬調和振動子解で記述して (106) 式に従って配列すればよい。

$$\text{サイン型初期条件} \quad \begin{cases} z(s_0) = 0 \\ z'(s_0) = 1 \end{cases} \quad (104)$$

$$\text{コサイン型初期条件} \quad \begin{cases} z(s_0) = 1 \\ z'(s_0) = 0 \end{cases} \quad (105)$$

$$M(s, s_0) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s, s_0) & S(s, s_0) \\ C'(s, s_0) & S'(s, s_0) \end{bmatrix} \quad (106)$$

¹³平均的Courant-Snyder不変量という一義的でない言い方をした理由は、エミッタンスの定義がビームの種類や状況により異なるからである。位相空間におけるビーム分布が一律にガウス分布と考えられる電子貯蔵リングでは、エミッタンスはビーム構成粒子のCourant-Snyder不変量平均値の半分で定義される。一方電子線形加速器や陽子シンクロトロンなどでは、ビームの位相空間分布の関数形がビームの加速履歴等に依存する。このような場合、ビームのエミッタンスはより便宜的ないし実用的方法で定義せざるを得ない。

まずコサイン型軌跡について、初期条件を (100) 式と (101) 式を使って表現する。次式がコサイン型軌跡の振幅 a_c および初期位相 θ_c を定義する。

$$\begin{cases} a_c \sqrt{\beta(s_0)} \cos \{ \phi(s_0) - \theta_c \} = 1 \\ \frac{\beta'(s_0)}{2\beta(s_0)} - \frac{a_c}{\sqrt{\beta(s_0)}} \sin \{ \phi(s_0) - \theta_c \} = 0 \end{cases} \quad (107)$$

若干の計算の後、振幅 a_c および初期位相 θ_c は次式で与えられる。

$$\begin{cases} a_c = \sqrt{\gamma(s_0)} \\ \begin{bmatrix} \cos \theta_c \\ \sin \theta_c \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos \phi(s_0) & \sin \phi(s_0) \\ \sin \phi(s_0) & -\cos \phi(s_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\beta(s_0)\gamma(s_0)}} \\ \frac{-\alpha(s_0)}{\sqrt{\beta(s_0)\gamma(s_0)}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (108)$$

このように与えられた a_c と θ_c を使ってコサイン型軌跡は次式で書ける、そしてこれが転送行列の(1, 1)要素 m_{11} である。

$$\begin{aligned} m_{11} &= C(s, s_0) = a_c \sqrt{\beta(s)} \cos \{ \phi(s) - \theta_c \} = \\ &= \sqrt{\frac{\beta(s)}{\beta(s_0)}} [\cos \{ \phi(s) - \phi(s_0) \} + \alpha(s_0) \sin \{ \phi(s) - \phi(s_0) \}] \end{aligned} \quad (109)$$

サイン型軌跡の振幅 a_s および初期位相 θ_s は次の式で定義される。

$$\begin{cases} a_s \sqrt{\beta(s_0)} \cos \{ \phi(s_0) - \theta_s \} = 0 \\ -\frac{a_s}{\sqrt{\beta(s_0)}} \sin \{ \phi(s_0) - \theta_s \} = 1 \end{cases} \quad (110)$$

a_s および θ_s を露に表現すれば、

$$\begin{cases} \theta_s = \phi(s_0) - \frac{\pi}{2} \\ a_s = -\sqrt{\beta(s_0)} \end{cases} \quad (111)$$

これを使ってサイン型軌跡を表せば、転送行列の(1, 2)要素 m_{12} が求められる。

$$\begin{aligned} m_{12} &= S(s, s_0) = a_s \sqrt{\beta(s)} \cos \{ \phi(s) - \theta_s \} = \\ &= \sqrt{\beta(s)\beta(s_0)} \sin \{ \phi(s) - \phi(s_0) \} \end{aligned} \quad (112)$$

(109) 式のコサイン型軌跡および (112) 式のサイン型軌跡を s で微分することにより、それぞれ転送行列の(2, 1)要素 m_{21} および(2, 2)要素 m_{22} を得る。

$$\begin{aligned} m_{21} &= C'(s, s_0) = \\ &= \frac{\{1 + \alpha(s)\alpha(s_0)\} \sin \{ \phi(s) - \phi(s_0) \} + \{ \alpha(s) - \alpha(s_0) \} \cos \{ \phi(s) - \phi(s_0) \}}{\sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}} \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} m_{22} &= S'(s, s_0) = \\ &= \sqrt{\frac{\beta(s_0)}{\beta(s)}} [\cos \{ \phi(s) - \phi(s_0) \} - \alpha(s) \sin \{ \phi(s) - \phi(s_0) \}] \end{aligned} \quad (114)$$

2.3.4 周回行列

前のセクションで得た転送行列が、円形加速器1周分を表すとき即ち周回行列(revolution matrix)になるとき、Twissパラメータの周期性から次のようになる。

$$M(s_0 + L, s_0) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu & \beta(s_0) \sin 2\pi\nu \\ -\gamma(s_0) \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu \end{bmatrix} \quad (115)$$

ここで ν はベータトロン振動数またはベータトロンチューンと呼ばれる量で次式で与えられる。

$$2\pi\nu = \phi(s_0 + L) - \phi(s_0) = \int_{s_0}^{s_0+L} \frac{ds}{\beta(s)} \quad (116)$$

リング内位置 s_0 における周回行列 R_0 を次のように記述してみる。

$$\begin{aligned} R_0 &\equiv M(s_0 + L, s_0) \\ &= \begin{bmatrix} \cos 2\pi\nu + \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu & \beta(s_0) \sin 2\pi\nu \\ -\gamma(s_0) \sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha(s_0) \sin 2\pi\nu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos 2\pi\nu + \begin{bmatrix} \alpha(s_0) & \beta(s_0) \\ -\gamma(s_0) & -\alpha(s_0) \end{bmatrix} \sin 2\pi\nu \\ &\equiv I \cos 2\pi\nu + J_0 \sin 2\pi\nu \end{aligned} \quad (117)$$

ここでTwissパラメータで表された行列 J_0 は次式を満たす。

$$J_0^2 = -I \quad (118)$$

この性質を使えば、 n ターン分の運動を表す転送行列 $(R_0)^n$ は次のようになる事が判る。

$$\begin{aligned} (R_0)^n &= (I \cos 2\pi\nu + J_0 \sin 2\pi\nu)^n \\ &= I \cos 2\pi n\nu + J_0 \sin 2\pi n\nu \end{aligned} \quad (119)$$

リング内位置 s_1 における周回行列 R_1 は、

$$R_1 \equiv M(s_1 + L, s_1) = I \cos 2\pi\nu + J_1 \sin 2\pi\nu \quad (120)$$

s_0 から s_1 への転送行列 T と、

$$T \equiv M(s_1, s_0) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (121)$$

リング内位置 s_0 における周回行列 R_0 とを使って次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} R_1 &= M(s_1 + L, s_0 + L) M(s_0 + L, s_0) M(s_0, s_1) \\ &= T R_0 T^{-1} \end{aligned} \quad (122)$$

これはまたTwissパラメータの変換規則も与えてくれる。

$$J_1 = T J_0 T^{-1} \quad (123)$$

2.4 周回運動 II シンクロトロン振動

前節ではビーム内粒子のエネルギー変動は考えなかったが、ここでは粒子エネルギー変動をともなう場合の周回運動について学ぶ。いわゆるシンクロトロン振動について学ぶことになる。

2.4.1 運動量偏差のある粒子の運動

水平方向の運動や運動量偏差によって、運動粒子から基準座標曲線に下された垂線の足の位置 s の進行速度は影響を受ける。そして加速空洞では基準座標曲線上を早さ v_0 で進行する参照運動量粒子との到達時間の差が、その粒子が加速空洞内の電場から獲得するエネルギー量を左右する。そこでまず、この到達時間差の発生とそれによるエネルギー獲得量の追跡がこの節の大きなテーマである。

この目的のために参照運動量粒子との到達時間差 $\tau = t_0 - t$ を使って時間を表す。今まで使ってきた垂線の足の速さ \dot{s} とは次式で関係付けられている。

$$\tau' = \frac{dt_0}{ds} - \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{\dot{s}} \quad (124)$$

ここで t_0 は参照運動量粒子の場所 s への到達時刻であり、注目する粒子が参照運動量粒子より早く到達するとき $\tau > 0$ となる。

運動量偏差付き運動方程式と拡張転送行列

運動量が参照運動量より Δp 大きい粒子の運動方程式に運動量偏差および粒子座標共々に線形近似を施し、具体的加速器要素毎に運動方程式を解いていく。言うまでもなく磁場要素の中では、運動量偏差は定数である。

更にこの運動方程式の解を用いて、次式で定義される拡張4元ベクトル \mathbf{x}_4 に対応する4行4列転送行列 M_4 を求め、転送行列で運動を扱えるようにする。

$$\mathbf{x}_4(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ v_0\tau(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \quad (125)$$

ここで時間成分を $v_0\tau$ としたのは水平方向と次元を合わせるためである。

自由空間および4極磁石 自由空間および4極磁石における運動方程式は(44)式、(46)式および(51)式から、まとめて次のように表せる。

$$\begin{cases} x'' &= -K x \\ y'' &= K y \\ \dot{s} &= v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \end{cases} \quad (126)$$

ここで K は自由空間ではゼロ、4極磁石では(52)式により与えられる。

(126)式によればこれらの加速器要素では、粒子速度の差から生じる到達時間差だけが、適用した線形近似の範囲で発現する運動量偏差の効果である。即ち線形近似の範囲で水平垂直方向の運動は運動量偏差に影響されない¹⁴。

運動量偏差 \implies 時間偏差

時間に関する(126)第3式を(124)式に倣い到達時間差 τ を使って書いておく。

¹⁴運動量偏差により K の大きさが表動的に変わる。これから生じるベータトロン振動数ズレの運動量偏差依存度をクロマチシティ(色収差)と言ひ、特に線形依存度を線形クロマチシティと呼んでいる。この効果は運動方程式の中では、微量量 $\frac{\Delta p}{p_0}$ と微量変位 x ないし y との積として表れ、2次の微量量である。

$$\tau' = \frac{1}{v_0} \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (127)$$

4×4 転送行列 M_4 を4個の2×2 部分行列に分けて考えると、非対角に位置する2個はゼロ行列、左上対角に位置する部分行列は磁石の種類に応じて先に求めた(73)式、(74)式ないし(75)式と同じになる。そして右下対角に位置する部分行列は(127)式から次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{\gamma_0^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (128)$$

2極磁石 2極磁石の中では運動量偏差の影響はより複雑かつ重要である。運動量偏差および粒子座標について線形近似を施した運動方程式(58)式を使う。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \\ y'' = 0 \\ \dot{s} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} - \frac{1}{\rho_0} x \right) \end{cases} \quad (129)$$

(129)式によれば、運動量偏差 Δp により水平方向の運動に影響が生じる、更に水平方向の運動および運動量偏差が時間変動に影響する。この影響の方向は偏向磁石内部に限定すれば一方的である。

運動量偏差 \implies 水平運動 \implies 時間偏差

垂直方向の運動は時間変動に関与しないので、以後この節内では考慮しない。ここで時間に関する(129)第3式を τ を使って書直し水平方向運動方程式と連立させておく。

$$\begin{cases} x'' = -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta p}{p_0} \\ \tau' = \frac{1}{v_0} \left(-\frac{x}{\rho_0} + \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \right) \end{cases} \quad (130)$$

(130) 第1式で表された水平運動について曲率半径 ρ_0 が一定な条件下で解く。ここでは右辺第2項の非齊次項の存在に注意する必要がある。 C_1 と C_2 を積分定数として、一般解は(131)式に与えられる。

$$x(s) = \frac{\Delta p}{p_0} \rho_0 + C_2 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_1 \sin \frac{s}{\rho_0} \quad (131)$$

ここに得た解 $x(s)$ を(130)第2式で表された時間運動方程式の右辺に代入して s で積分すれば、到達時間の一般解は C_3 を新たな積分定数として次のようになる。

$$v_0 \tau(s) = C_3 + \frac{\Delta p}{p_0} \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1 \right) s + C_1 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_2 \sin \frac{s}{\rho_0} \quad (132)$$

以上に得られた一般解を4元ベクトルとして纏めて書いて

おこう。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4(s) &\equiv \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ v_0 \tau(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\Delta p}{p_0} \rho_0 + C_2 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_1 \sin \frac{s}{\rho_0} \\ \frac{1}{\rho_0} \left(-C_2 \sin \frac{s}{\rho_0} + C_1 \cos \frac{s}{\rho_0} \right) \\ C_3 + \frac{\Delta p}{p_0} \left(\frac{1}{\gamma_0^2} - 1 \right) s + C_1 \cos \frac{s}{\rho_0} + C_2 \sin \frac{s}{\rho_0} \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (133)$$

一般解に含まれる積分定数を使って、 $s=0$ における4元ベクトルの初期値を表現することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4(0) &\equiv \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \\ v_0 \tau(0) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta p/p_0) \rho_0 + C_2 \\ C_1/\rho_0 \\ C_1 + C_3 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \rho_0 \\ 1/\rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (134)$$

転送行列の方法で粒子運動を記述するには、次式による拡張された初期条件(一般化されたコサイン型サイン型初期値)から出発する軌道を求めればよい。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{4I}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{4II}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_{4III}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{x}_{4IV}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (135)$$

そのために、上に与えられた4種の初期条件の各々について、(134)式を使い運動の不変量 C_1 、 C_2 、 C_3 および $\Delta p/p_0$ を決定し、それら不変量を(133)式の4元ベクトルの一般解に代入する。このようにして初期条件(135)式から出発する4種の軌道 $\mathbf{x}_{4I}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4II}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4III}(s)$ および $\mathbf{x}_{4IV}(s)$ が求められる。4×4 転送行列としては、列ベクトル $\mathbf{x}_{4I}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4II}(s)$ 、 $\mathbf{x}_{4III}(s)$ および $\mathbf{x}_{4IV}(s)$ をこの順番に並べた4×4 転送行列 $M_4(s, 0) \equiv (\mathbf{x}_{4I}(s) \ \mathbf{x}_{4II}(s) \ \mathbf{x}_{4III}(s) \ \mathbf{x}_{4IV}(s))$ を作れば、これにより拡張4元ベクトル \mathbf{x}_4 が追跡できる。こうして得られた転送行列要素の露わな表現が次式である。

$$\begin{aligned} M_4(s, 0) &= \\ &\begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\rho_0} & \rho_0 \sin \frac{s}{\rho_0} & 0 & \rho_0 \left(1 - \cos \frac{s}{\rho_0} \right) \\ -\frac{1}{\rho_0} \sin \frac{s}{\rho_0} & \cos \frac{s}{\rho_0} & 0 & \sin \frac{s}{\rho_0} \\ -\sin \frac{s}{\rho_0} & \rho_0 \left(\cos \frac{s}{\rho_0} - 1 \right) & 1 & \rho_0 \sin \frac{s}{\rho_0} + \frac{s}{\gamma_0^2} - s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (136)$$

高周波加速空洞における加速 高周波加速空洞が粒子運動へ影響するのは、前に仮定した長さゼロの空洞の場合、到達

時間によって異なるエネルギー獲得量である。この獲得エネルギーは加速高周波電圧の時間的変化を線形近似することにより (61) 式で与えられている。また獲得エネルギーと運動量との関係 (62) 式を使えば、到達時間偏差を距離の次元で示す $v_0\tau$ と運動量偏差 $\frac{\Delta p}{p_0}$ を元とするベクトルと転送行列で次のように加速空洞の効果を表すことができる。

$$\begin{pmatrix} v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q}{v_0 p_0} V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \quad (137)$$

ここで添え字の in および out は各々加速空洞の直前および直後を意味する。

断熱減衰と正規化エミッタンス (137) 式右辺の非斉次項の存在は、参照運動量粒子が高周波空洞で正味の加速を受ける場合に対応する。このような場合には加速空洞に於ける加速がベータatron振動に (線形近似の範囲でも) 影響を及ぼす。すなわち加速に際しては、横方向運動量成分 p_x および p_y は一定のまま進行方向運動量成分 p_s のみ増加する。このため我々が採用している横方向位相空間の運動量 x' および y' はエネルギー獲得に伴う縦方向運動量の増加 δp により次のように減少する。

$$y' = \frac{p_y}{p_s} \longrightarrow \frac{p_y}{p_s + \delta p} \approx y' \left(1 - \frac{\delta p}{p_s} \right) \quad (138)$$

$p_s \approx p_0$ という近似を使い、このベータatron振動の減衰を4元ベクトルおよび対応する転送行列を使って表現すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{q}{v_0 p_0} V_{RF}(t_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ v_0\tau \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix}_{in} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{q}{v_0 p_0} V_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \quad (139)$$

この転送行列の内ベータatron振動を表現する左上方の 2×2 転送行列の行列式は1より小さく、ベータatron振動に対応するCourant-Snyder不変量そしてエミッタンスが加速により減衰する事を表している¹⁵。

此处で述べたエミッタンス減衰が起こる加速器の具体例は、線形加速器における加速、シンクロトロンにおける加速、また貯蔵リングにおけるシンクロトロン放射に依るエネルギー損失の補給である。このうち正味のエネルギー増加を伴う線形加速器やシンクロトロンでは、この減衰のこ

¹⁵このことは高周波空洞における加速が正準運動では無いことを意味してしまうが、これは事実と反する、この減衰は我々の用いている運動量 y' が座標 y の正準共役運動量 p_y とは異なるために生じる見掛けの現象である。実際、加速に際して正準共役運動量 p_y は変化しない。

とを断熱減衰 (Adiabatic damping) と呼んでいる。そしてビームエミッタンス記述の為に、加速に際しても保存する正規化エミッタンス ε_N が次式で定義され用いられる。

$$\varepsilon_N \equiv \varepsilon \times (\gamma\beta) \quad (140)$$

ここで ε は通常のビームサイズを与える幾何学的エミッタンスであり、 γ は相対論係数そして β は粒子速度を光速で除したものである。

シンクロトロン放射に依るエネルギー損失の補給から生じる減衰については後に学ぶことになる。また以後この章の中では (137) 式右辺の非斉次項の存在を考える必要のない $V_{RF}(t_0) = 0$ の場合のみを扱う。

2.4.2 転送行列によるシンクロトロン振動の追跡

水平方向と時間運動量方向を表わす4元ベクトルおよび対応する 4×4 転送行列を使ってシンクロトロン振動を追跡してみよう。

簡単化のため加速空洞はリング中に一箇所にだけ在り、他の加速器要素は磁石のみとする。磁石のみを表わす時、転送行列は一般的に2極磁石の転送行列と同じ次式の形に書ける。

$$M_{4mag} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & e \\ m_{21} & m_{22} & 0 & f \\ h & i & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (141)$$

この形の行列を掛け合わせると再びこの形に書けることは簡単に確認できる。このようにして高周波空洞部以外の転送行列をまとめて書くことにしよう。

Symplectic 条件に依る自由度の抑制

(141) 式の行列要素の自由度は、正準運動を記述する転送行列という条件のために、実はもっと少ない。すなわち次式に定義されるSymplectic行列を使って表わされるSymplectic条件 (143) 式を満たさなければならない¹⁶。

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (142)$$

$$M_{4mag}^T S_4 M_{4mag} = S_4 \quad (143)$$

このSymplectic条件から決まる (141) 式の行列要素相互の関係を露に書き出せば、次のようになる。

$$\begin{cases} m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1 \\ h = -m_{11}f + m_{21}e \\ i = -m_{12}f + m_{22}e \end{cases} \quad (144)$$

¹⁶第1章において我々の扱う転送行列は一般にSymplectic条件を満たすべき事を述べた。より直接的に、今までに求めた転送行列が、ここで示したSymplectic条件を満たしていることは具体的に確認できる。さらにSymplectic条件を満たす転送行列の積により定義される転送行列がSymplectic条件を満たすことも明白に示される。一般にSymplectic条件を満たす転送行列は群を成している事が示される。

運動量分散関数

4 × 4 転送行列 (141) 式から時間 τ に対応する行と列を除いて 3 × 3 転送行列 (145) 式を作る。

$$M_{3mag} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & e \\ m_{21} & m_{22} & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (145)$$

この転送行列を使って、次式で定義された 3 元ベクトルで表現される運動量偏差 (磁場の中では一定に保たれる) を持った粒子軌道の追跡ができる。

$$\mathbf{x}_3(s) \equiv \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \Delta p/p_0 \end{pmatrix} \quad (146)$$

この転送行列は運動量偏差を不変に保ち、このことに対応する固有値は 1 となる。周回行列である場合、行列の固有値 1 に属する固有ベクトルが運動量偏差の有る粒子の閉軌道を与える。すなわち運動量に依存するビーム軌道変位と傾斜の分散がこれによって記述される。この固有ベクトルの第 1 成分を運動量分散関数と称しその s 微分は第 2 成分で与えられる。一方他の 2 つの固有値に属する固有ベクトルはこの閉軌道を中心とする自由なベータトロン振動に対応する。具体的に周回行列から運動量分散関数 η_x を計算するには次式を解けばよい。

$$M_{3mag} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta'_x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta'_x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (147)$$

このように、場所 s に於ける周回行列からその点の運動量分散関数とその微分を求めたものが (148) 式である。

$$\begin{cases} \eta_x(s) = -\frac{e(1-m_{22})+fm_{12}}{-2+m_{11}+m_{22}} \\ \eta'_x(s) = -\frac{f(1-m_{11})+em_{21}}{-2+m_{11}+m_{22}} \end{cases} \quad (148)$$

これから逆に周回行列要素を表現すると (149) 式になる。

$$\begin{cases} e(s) = \eta_x(1-m_{11}) - \eta'_x m_{12} \\ f(s) = \eta'_x(1-m_{22}) - \eta_x m_{21} \end{cases} \quad (149)$$

運動分離の条件

上記 Symplectic 条件と運動量分散関数を使って周回行列としての (141) 式を書き直すと (150) 式になる。

$$M_{4mag} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & \eta_x(1-m_{11}) \\ & & & -\eta'_x m_{12} \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \eta'_x(1-m_{22}) \\ & & & -\eta_x m_{21} \\ \eta'_x(1-m_{11}) & -\eta_x(1-m_{22}) & 1 & g \\ +\eta_x m_{21} & -\eta'_x m_{12} & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (150)$$

この周回行列から知れる所は、一般には水平運動 (ベータトロン振動) と時間運動量運動 (シンクロトロン振動) とは、線形近似の範囲でも、互いに結合しているということである。運動量分散関数 $\eta_x(s)$ とその微分 $\eta'_x(s)$ がゼロの場所に限り周回行列は区分対角化される。しかし円形加速器で全周に互りゼロ分散を実現することは原理的に不可能である。

重要な点は、加速空洞が設置される場所で周回行列が区分対角化されていることが、運動の分離の為の必要充分条件だということである。この「運動分離」の物理的意味合いは、ベータトロン振動がシンクロトロン振動に影響をしない、またその逆も成立するということである¹⁷。もちろんたとえ加速空洞が無分散の場所に設置されていても、運動量分散関数がゼロでない場所で観測すればシンクロトロン振動に伴う運動量の増減がビーム位置の変化として見られるであろう。しかし加速空洞の位置で観測する限り運動が完全に分離されている点が本質的である。

2.4.3 分離されたシンクロトロン振動

運動が分離されている条件、すなわち加速空洞が設置された場所の運動量分散関数とその s 微分がゼロであるときを考える。加速空洞が設置された場所の (磁場のみを考慮した) 周回行列に、次のように加速空洞を表わす転送行列をかけて高周波加速を含む全周の周回行列を作ることができる。

$$\begin{aligned} M_{4tot} &\equiv M_{4rf} M_{4mag} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-g}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g \\ 0 & 0 & \frac{-g}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 - g \frac{g}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \quad (151) \end{aligned}$$

この場所では周回行列が区分対角化されている事が分かる。すなわち加速空洞位置で見える限りベータトロン振動とシンクロトロン振動は、各々の 2 × 2 周回行列を使い、独立に運動を追跡できる。ここでは (152) 式の 2 × 2 周回行列を使い、既に学んだベータトロン振動で用いた方法を適用してシンクロトロン振動を調べる。

$$M_{2syn} = \begin{pmatrix} 1 & \\ \frac{-g}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) & 1 - g \frac{g}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \end{pmatrix} \quad (152)$$

位相安定性とトランジションエネルギー

振動の安定条件は、Floquet の定理で学んだように周回行列の跡の絶対値が 2 を越えないことであり、(153) 式にその条件を明示する。

¹⁷この運動の分離は、あくまでも線形近似の範囲で成り立っている。たとえば、シンクロトロン振動の 1 周期の中で粒子は加速と減速を経験するわけで、これに伴う (ベータトロン振動の) 断熱減衰とその逆過程をシンクロトロン振動の周期毎に繰り返している。すなわちベータトロン振動はシンクロトロン振動により振幅変調を受けているがこれは高次効果である。

$$0 \leq g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \leq 4 \quad (153)$$

この安定性条件を定性的に解釈してみる。 $g < 0$ の場合には、 $\Delta p > 0$ の粒子の周回時間が参照運動量粒子より遅れる。安定振動のためには高いエネルギーを持つ粒子の加速は相対的に少なくなければならないから、速く到達した粒子をより多く加速する高周波電場の位相 $q\dot{V}_{RF}(t_0) < 0$ で運動が安定である。速度が殆ど光速に達しているため、周回時間が運動量偏差に依存した周長だけで決まる超相対論的粒子の加速は、このような状況下で行われる。

一方、運動量増加に伴う速度増加が大きい低エネルギー領域のビーム加速では、あるいは運動量に伴う経路長増加が無い直線加速器では $g > 0$ であり、遅く到達した粒子をより多く加速する高周波電場の位相 $q\dot{V}_{RF}(t_0) > 0$ でシンクロトロン振動が安定である。

陽子シンクロトロンでは低エネルギーで入射したビームを高エネルギーまで加速する。このとき加速途中で g の符号が正から負へ変わる場合がある。この変わり目のビームエネルギーのことをトランジションエネルギーと呼び、安定加速のために、ここで高周波位相を大きく変えてやらなければならない。

歴史的には強収束加速器の発明と共にトランジションエネルギーの存在が問題となった。ブルックヘブン国立研究所(BNL)のAGSや欧州原子核研究所(CERN)のCPSなどの陽子シンクロトロンはこの現象を念頭に起きつつも敢えてトランジションエネルギーを有する設計で作られている。しかし加速中トランジションエネルギーの前後では、ビーム不安定現象が生じやすく、ビーム損失やエミッタンス増大につながりがちである。今後建設が予定されている大型ハドロン施設(JHF)の大強度陽子シンクロトロンでは特殊なビーム光学系を採用することでトランジションエネルギーを避ける試みも行われている。

振動数とTwissパラメータ

ベータトロン振動の周回行列要素をベータトロン振動数やTwissパラメータで表現した(115)式に倣い、シンクロトロン振動の周回行列要素(152)式からシンクロトロン振動数 ν_s (154)式やシンクロトロン振動を表現するTwissパラメータ β_s 、 α_s そして γ_s (156)式を求める事ができる。

$$\begin{cases} \cos 2\pi\nu_s = 1 - \frac{1}{2} \left\{ g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right\} \\ \sin 2\pi\nu_s = \frac{g}{|g|} \sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \frac{1}{4} \left\{ g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right\}^2} \end{cases} \quad (154)$$

シンクロトロン振動の角速度は、コサイン関数の展開から次のように近似され見慣れた表現を得る。またサイン項の符号から判るように、シンクロトロンチューン ν_s の符号は g の符号と同じである。通常の円形加速器におけるシンクロトロンチューンの絶対値は1に比べかなり小さいものである¹⁸。

$$\Omega_s \equiv 2\pi\nu_s \approx \sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)} \quad (155)$$

¹⁸CERNのLEPやKEKのTRISTANは ν_s の値が0.1程度に達し例外的に大きい。これは電子(陽電子)ビームを与えられた周長の中で到達可能な究極の高エネルギーにまで加速蓄積するため、周当たり1%を越える放射エネルギー損失を補うための特に高い高周波加速電圧が使われているためである。

シンクロトロン振動に関するTwissパラメータを露わに求め同様の近似を適用したものが次式である。

$$\begin{cases} \beta_s = \frac{|g|}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right)^2}} \approx \frac{g}{2\pi\nu_s} \\ \alpha_s = \frac{1}{2} \frac{|g| \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right)^2}} \approx 0 \\ \gamma_s = \frac{g}{|g|} \frac{\frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{\sqrt{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) - \left(\frac{1}{2} g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0) \right)^2}} \approx \frac{2\pi\nu_s}{g} \end{cases} \quad (156)$$

同一粒子が、シンクロトロン振動を通じて到達する最大時間偏差と最大運動量偏差の比率は、Twissパラメータを使って次のように求めることができる¹⁹。

$$\frac{\left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)_{max}}{(v_0 T)_{max}} = \sqrt{\frac{\gamma_s}{\beta_s}} = \sqrt{\frac{g \frac{q}{v_0^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)}{g}} \approx \frac{2\pi\nu_s}{g} \quad (157)$$

これまで g で表してきた長さの次元を持つ量の物理的成り立ちを考えてみると、次式で表現されるように、運動量偏差に伴う粒子運動の軌道長偏差 ΔL と速度偏差 Δv とから成ることが理解される。ここで周長 L は基準粒子が加速器を一周する軌道長である。

$$\frac{g}{L} = \left(\frac{\Delta v}{v_0} - \frac{\Delta L}{L} \right) / \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right) \quad (158)$$

このうち運動量偏差に伴う速度偏差の係数は相対論的運動学から次の様にと与えられる。

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{\Delta p}{p_0} \quad (159)$$

さらに運動量偏差と軌道長偏差間の比例係数はモメンタムコンパクション係数と呼ぶ無次元量 α を導入して表現される。

$$\alpha \equiv \left(\frac{\Delta L}{L} \right) / \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right) \quad (160)$$

これにより g は次の様に分解して書き下される。さらに $\gamma_{tr} \equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ と置くことで、加速中ビームエネルギーの相対論係数が γ_{tr} を通過すると g の符号反転がおこる事が判る。すなわち先に触れたトランジションエネルギーの相対論係数は γ_{tr} ということになる。

$$\frac{g}{L} = \frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha = \frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2} \quad (161)$$

¹⁹ここから、加速電圧勾配を保ったトランジションエネルギー通過に際し、ビームエネルギー広がりが増大する一方、パンチ長(高周波位相に捕捉された進行方向ビーム長)は短縮することが分かる。これはビーム不安定現象の要因となる。