はじめに

ここでは加速器のモデルをビームを使って補正する方法の具体例を述べる。加速器の正確な調整を行って性能を上げるためには、ビームの振る舞いをできるだけ正確なモデルにもとづいて計算したい。そのためには、もちろん、正確にコンポーネントを作り、それを測定し、正確に設置し、正確に運転するべきである。しかし、どれも完全にはできないので必ず誤差が生じる。その誤差が大きいとモデルは不正確になり、ビームが計算とは異なった振る舞いをする。しかし、そのビームを様々な条件で測定することができれば、それから逆にモデルを修正することも可能である。
目的や、使用できる装置などの条件によって、ビームの測定にもとづくモデルの修正には多くの種類があり、多くの方法が考えられ、実際に行われているであろう。筆者が知っているのはそのうちのほんの一部にすぎないと思うので、以下で述べることは単なる例題にすぎないと考えていただきたい。
一つめの例として、線形オプティクスの補正を考える。ビーム軌道にそった４極磁場の強さをビームを使って測定する、といってもよい。
次に「beam based alignment」と言われるものの一例を述べる。ビーム軌道と４極磁場の中心とのずれをビームを使って測定する、といってよい。

1　線形オプティクスの補正

ここで述べる線形オプティクスの補正は、ビーム軌道にそった４極磁場の強さをビームを使って測定することであるといってもよい。「線形」とは、ビーム粒子のある場所での位置や角度の変化を他の場所での変化に比例する項まで考え、二次以上を無視するということで、４極磁場より高次の磁場は考えないからである。

1.1　1-pass　の軌道を使う場合

ライナック、ビームトランスポートライン、又リングであっても入射一周目の軌道の測定をする場合について述べる。
あるビームラインで、ｊ番目の２極（軌道補正用）磁石でビームを蹴ったとき、ｉ番目のビーム位置モニターでの位置の変化は、その間のトランスファーマトリックスの 1-2 成分、3-4 成分、 $R_{12}(i,j)$ と $R_{34}(i,j)$、に比例し、

$$
\begin{aligned}
x_i &= R_{12}(i,j)x'_j \\
y_i &= R_{34}(i,j)y'_j
\end{aligned}
\tag{1}
$$

と書ける。ここで x_i、y_i は位置モニターでの水平方向と垂直方向の位置の変化、x'_j、y'_j は２極磁石での蹴り角の変化である。
モデルと現実が必ずしも合っていないとして、モデル上のトランスファーマトリックスを、$R_{12,mo}(i,j)$、$R_{34,mo}(i,j)$ とし、これらの誤差を

$$
\begin{aligned}
\Delta R_{12}(i,j) &= R_{12}(i,j) - R_{12,mo}(i,j) \\
\Delta R_{34}(i,j) &= R_{34}(i,j) - R_{34,mo}(i,j)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

又、

$$
\begin{aligned}
k_m &= k_{m,mo} + \Delta k_m \\
x'_j &= (1+\Delta S_j)x'_{j,mo} \\
y'_j &= (1+\Delta S_j)y'_{j,mo} \\
y_i &= (1+\Delta B_{y,i})y_{i,mo} \\
x_i &= (1+\Delta B_{x,i})x_{i,mo}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Δk_m　は２極磁石と位置モニター間にある４極磁場のｋ値の誤差、 ΔS_j は２極磁石の蹴り角の相対誤差、$\Delta B_{x,i}$、 $\Delta B_{y,i}$　は ビーム位置モニターの位置感度の誤差、等とする。mo は、モデル上の値を表わす。
ここで全ての誤差は小さいとして、誤差の２次以上の項は無視する。又、全ての磁石、モニターのビーム方向の長さは小さいとし、Thin Lens 近似を使う。又、水平方向と垂直方向のカップリングも小さいと仮定して、別々に扱えるとする。
ｊ番目の２極磁石の蹴り角を x'_j 又は y'_j だけ変化させたとき、ｍ番目の４極磁石の入口での位置と角度の変化は、

$$
\begin{aligned}
x_m &= R_{12}(j \to q_m)x'_j \\
y_m &= R_{34}(j \to q_m)y'_j \\
x'_m &= R_{22}(j \to q_m)x'_j \\
y'_m &= R_{44}(j \to q_m)y'_j
\end{aligned}
\tag{4}
$$

と書ける。 $R(j \to q_m)$は、 j 番目の２極磁石からm番目の４極磁石までのトランスファーマトリックスである。４極磁石のｋ値をk_mとするとその出口では、さらに$-k_m x_m$、$k_m y_m$だけ角度が変わるので、さらに下流のモニターの所での位置変化は、

$$\begin{aligned} x_i &= R_{11}(q_m \to i)x_m + R_{12}(q_m \to i)x'_m \\ &\quad - R_{12}(q_m \to i)k_m x_m \\ y_i &= R_{33}(q_m \to i)y_m + R_{34}(q_m \to i)y'_m \\ &\quad + R_{34}(q_m \to i)k_m y_m \end{aligned} \tag{5}$$

となる。 $R(q_m \to i)$ はm番目の４極磁石からｉ番目のビーム位置モニターまでのトランスファーマトリックスである。
(4), (5) より、

$$\begin{aligned} R_{12}(i,j) &= R_{11}(q_m \to i)R_{12}(j \to q_m) \\ &\quad + R_{12}(q_m \to i)R_{22}(j \to q_m) \\ &\quad - R_{12}(q_m \to i)k_m R_{12}(j \to q_m) \\ R_{34}(i,j) &= R_{33}(q_m \to i)R_{34}(j \to q_m) \\ &\quad + R_{34}(q_m \to i)R_{44}(j \to q_m) \\ &\quad + R_{34}(q_m \to i)k_m R_{34}(j \to q_m) \end{aligned} \tag{6}$$

となり、(2), (3) より、誤差の２次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \Delta R_{12}(i,j) &= \\ &-\sum_m R_{12,mo}(q_m \to i)\Delta k_m R_{12,mo}(j \to q_m) \\ &\quad - \Delta S_j R_{12,mo}(i,j) + \Delta B_{x,i} R_{12,mo}(i,j) \\ \Delta R_{34}(i,j) &= \\ &\sum_m R_{34,mo}(q_m \to i)\Delta k_m R_{34,mo}(j \to q_m) \\ &\quad - \Delta S_j R_{34,mo}(i,j) + \Delta B_{y,i} R_{34,mo}(i,j) \end{aligned} \tag{7}$$

が得られる。

実際の測定で得られるのは、２極磁石での蹴り角の変化とその時のビーム位置モニターでの位置の変化である。(1) 式より、トランスファーマトリックスの 1-2 成分又は 3-4 成分の測定値が得られ、モデルとの差をとって、式(7)の左辺が測定されることになる。その数は、２極磁石とその下流のビーム位置モニターの組合わせの数に等しい。一方、式(7) の未知数は、独立な誤差の数である。我々の目的は、モデルを修正すること、つまり全ての誤差を求めるという事である。これは、 式(7)の連立１次方程式（可能な ｉ、ｊ の組み合わせの数だけある）を解くという問題になる様に見える。しかし、一般には未知数の数と式の数は同じでない。未知数の方が多ければ一意的な解が得られない。未知数が式の数より少ない場合、測定誤差等のために全ての方程式を満足させる解がないであろう。未知数が式の数より少ない場合は、連立方程式を解くのでなく、未知数の最も確からしい値を求めることができる。最小２乗法により、

$$\begin{aligned} \chi^2 &\equiv \sum_{i,j}\left\{\Delta R_{12,mes}(i,j) - \Delta R_{12,err}(i,j)\right\}^2 \Big/ \sigma_{i,j}^2 \\ &\quad + \sum_{i,j}\left\{\Delta R_{34,mes}(i,j) - \Delta R_{34,err}(i,j)\right\}^2 \Big/ \sigma_{i,j}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

を最小にするような $\Delta k_m, \Delta S_j, \Delta B_{x,i}, \Delta B_{y,i}$ の組をもとめればよいであろう。ただし、

$$\begin{aligned} \Delta R_{12,err}(i,j) &\equiv \\ &-\sum_m R_{12,mo}(q_m \to i)\Delta k_m R_{12,mo}(j \to q_m) \\ &\quad - \Delta S_j R_{12,mo}(i,j) + \Delta B_{x,i} R_{12,mo}(i,j) \\ \Delta R_{34,err}(i,j) &\equiv \\ &\sum_m R_{34,mo}(q_m \to i)\Delta k_m R_{34,mo}(j \to q_m) \\ &\quad - \Delta S_j R_{34,mo}(i,j) + \Delta B_{y,i} R_{34,mo}(i,j) \end{aligned} \tag{9}$$

であり、$\Delta R_{12,mes}(i,j)$, $\Delta R_{34,mes}(i,j)$ は測定とモデルの差で $\sigma_{i,j}$ は測定精度。式(8)中の和は、第一項は垂平方向、第二項は垂直方向についてとる。
ところが実際にやってみるとうまくいかず、とんでもないモデルになってしまうことがある。筆者は数学的に明確には説明できないが、 式(7)は誤差が小さい事を仮定しているのに、 後の段階でそのことを考慮していないのが悪いのだと思う。そこで、式(8)のかわりに、

$$\chi^2 \equiv \sum_{i,j}\left\{\Delta R_{12,mes}(i,j)-\Delta R_{12,err}(i,j)\right\}^2 \Big/ \sigma_{i,j}^2 + \sum_{i,j}\left\{\Delta R_{34,mes}(i,j)-\Delta R_{34,err}(i,j)\right\}^2 \Big/ \sigma_{i,j}^2 + \sum_m\left(\Delta k_m/a_m\right)^2+\sum_j\left(\Delta S_j/c_j\right)^2 + \sum_i\left(\Delta B_{x,i}/b_{x,i}\right)^2+\sum_i\left(\Delta B_{y,i}/b_{y,i}\right)^2 \tag{10}$$

を最小にする様にするとよい。a_m、$b_{x,i}$、$b_{y,i}$、c_jは、予想される各々の誤差の程度に比例させて手で入れる定数であるが、それほど正確に決める必要はない。

こうして得られた誤差からモデルを修正してみると、より測定結果に近づいているであろう。しかし、2次以上の項を無視してきているので高次の効果のためにまだ改善の余地がある。修正されたモデルから再び式（１０）を最小にする誤差を求めてモデルをもう一度修正するとさらに測定に近づく。これを結果が収束するまで繰り返すことにより最適の値が得られるであろう。

式（１０）を最小にする$\Delta k_m, \Delta S_j, \Delta B_{x,i}, \Delta B_{y,i}$、を求める事は、$A$を既知の行列、$x$を未知のベクトル、$y$を既知のベクトルとしたとき

$$|y-Ax| \tag{11}$$

を最小にするxを求めるという問題になる。そのためには例えば、$M_X, M_Y, N_Q, N_X, N_Y, N_B$を各々、垂平方向の$(i,j)$の組の数、垂直方向の$(i,j)$の組の数、4極磁石の数垂平方向の2極磁石の数、垂直方向の2極磁石の数、位置モニターの数とし、(i,j)の組に順番をつけて、k番目の組の(i,j)を(i_k,j_k)とし、

$$y_k=\begin{cases}\Delta R_{12,mes}(i_k,j_k)/\sigma_{i_k,j_k} & (k\le M_X)\\ \Delta R_{34,mes}(i_k,j_k)/\sigma_{i_k,j_k} & (M_X<k\le M_X+M_Y)\\ 0 & (M_X+M_Y<k)\end{cases} \tag{12}$$

$$x_l=\begin{cases}\Delta k_l & (l\le N_Q)\\ \Delta S_{l-N_Q} & (N_Q<l\le N_Q+N_X+N_Y)\\ \Delta B_{x,l-N_Q-N_X-N_Y} & (N_Q+N_X+N_Y<l\le N_Q+N_X+N_Y+N_B)\\ \Delta B_{y,l-N_Q-N_X-N_Y-N_B} & (N_Q+N_X+N_Y+N_B<l)\end{cases} \tag{13}$$

$$A_{kl}=\begin{cases}-R_{12,mo}(q_l\to i_k)R_{12,mo}(j_k\to q_l)/\sigma_{i_k,j_k} & (k\le M_X \text{ and } l\le N_Q)\\ R_{34,mo}(q_l\to i_k)R_{34,mo}(j_k\to q_l)/\sigma_{i_k,j_k} & (M_X<k\le M_X+M_Y \text{ and } l\le N_Q)\\ R_{12,mo}(i_k,j_k)/\sigma_{i_k,j_k} & \left(\begin{array}{l}k\le M_X \text{ and}\\ \left(\begin{array}{l}N_Q<l\le N_Q+N_X \text{ or}\\ N_Q+N_X+N_Y<l\\ \le N_Q+N_X+N_Y+N_B\end{array}\right)\end{array}\right)\\ R_{34,mo}(i_k,j_k)/\sigma_{i_k,j_k} & \left(\begin{array}{l}M_X<k\le M_X+M_Y \text{ and}\\ \left(\begin{array}{l}N_Q+N_X<l\le N_Q+N_X+N_Y \text{ or}\\ N_Q+N_X+N_Y+N_B\le l\end{array}\right)\end{array}\right)\\ 1/a_l & (k=M_X+M_Y+l \text{ and } l\le N_Q)\\ 1/c_{l-N_Q} & \left(\begin{array}{l}k=M_X+M_Y+l\\ \text{and } N_Q<l\le N_Q+N_X+N_Y\end{array}\right)\\ 1/b_{x,l-N_Q-N_X-N_Y} & \left(\begin{array}{l}k=M_X+M_Y+l \text{ and}\\ N_Q+N_X+N_Y<l\\ \le N_Q+N_X+N_Y+N_B\end{array}\right)\\ 1/b_{y,l-N_Q-N_X-N_Y-N_B} & \left(\begin{array}{l}k=M_X+M_Y+l \text{ and}\\ N_Q+N_X+N_Y+N_B<l\end{array}\right)\\ 0 & \text{(other cases)}\end{cases} \tag{14}$$

とすればよい。yとxの要素の数は各々$M_X+M_Y+N_Q+N_X+N_Y+2N_B$とN_Q+N_X+

$N_Y+\ 2N_B$，Aは（$M_X+\ M_Y+\ N_Q+\ N_X+\ N_Y+\ 2N_B$）行（$N_Q+\ N_X+\ N_Y+\ 2N_B$）列である。

上では、全ての磁石とモニターの誤差を独立としたが、2極磁石とモニターの数が限られていること等から、独立な未知数の数が多いと、精度が悪くなると思われる。同じ設計の物、共通電源を使っている物などいくつかが共通の誤差を持つと仮定した方がよい場合も多いであろう。例えば、4極磁石をタイプ別に分け、同じタイプの物は同じ誤差を持ち、2極磁石は、水平方向と垂直方向各々で共通の誤差、モニターも水平方向と垂直方向各々で共通の誤差を持つと仮定する場合は、

$$x_l=\begin{cases}\Delta k_l & (l\le N_T)\\ \Delta S_x & (l=N_T+1)\\ \Delta S_y & (l=N_T+2)\\ \Delta B_x & (l=N_T+3)\\ \Delta B_y & (l=N_T+4)\end{cases} \tag{15}$$

$$A_{kl}=\begin{cases}-\sum\limits_{q\in T_l}R_{12,mo}(q\to i_k)R_{12,mo}(j_k\to q)/\sigma_{i_k,j_k}\\ \qquad (k\le M_X \text{ and } l\le N_T)\\ \sum\limits_{q\in T_l}R_{34,mo}(q\to i_k)R_{34,mo}(j_k\to q)/\sigma_{i_k,j_k}\\ \qquad (M_X<k\le M_X+M_Y \text{ and } l\le N_T)\\ R_{12,mo}(i,j)/\sigma_{i_k,j_k}\\ \qquad (k\le M_X \text{ and } l=N_T+1,\quad N_T+3)\\ R_{34,mo}(i,j)/\sigma_{i_k,j_k}\\ \qquad \begin{pmatrix}M_X<k\le M_X+M_Y \text{ and}\\ l=N_T+2,\quad N_T+4\end{pmatrix}\\ 1/a_l \quad (k=M_X+M_Y+l \text{ and } l\le N_T)\\ 1/c_x \quad \begin{pmatrix}k=M_X+M_Y+N_T+1\\ and\ l=N_T+1\end{pmatrix}\\ 1/c_y \quad \begin{pmatrix}k=M_X+M_Y+N_T+2\\ and\ l=N_T+2\end{pmatrix}\\ 1/b_x\\ \begin{pmatrix}k=M_X+M_Y+N_T+3 \quad \text{and}\\ l=N_T+3\end{pmatrix}\\ 1/b_y\\ \begin{pmatrix}k=M_X+M_Y+N_T+4 \quad \text{and}\\ l=N_T+4\end{pmatrix}\\ 0 \quad \text{(other cases)}\end{cases} \tag{16}$$

とすればよい。N_Tは4極磁石のタイプ数、$\sum\limits_{q\in T_l}$ は、l番目のタイプに属する4極磁石についての和を表す。

1.2 リングの閉軌道を測定する場合

リング加速器では、1-pass の軌道を測るモニターが少ないものも多い、又、あったとしてもその精度は、閉軌道の測定精度よりも悪いであろう。2極磁石の強さを変えたときの閉軌道の変化を測定することでもほとんど同じようにして、オプティクスの補正ができる。ただし、ここで述べるのは全て線形オプティクスの話で、6極磁石や、その他の磁石の端部から来る高次の効果は考えていない。これらの効果が強い場合には全て線形という仮定をしているこ

の補正の精度は悪くなる。
リングで、ある2極磁石でのビームの蹴りとあるビーム位置モニターでの閉軌道の変化の関係は、よく知られているように、x_i、y_i を位置モニターでの水平方向と垂直方向の位置の変化、x'_j、y'_j を2極磁石での蹴り角の（微少な）変化として、

$$x_i = \frac{x'_j \sqrt{\beta_{x,j}\beta_{y,i}} \cos\left(\phi_{x,ij} - \pi\nu_x\right)}{2\sin\pi\nu_x}$$
$$y_i = \frac{y'_j \sqrt{\beta_{y,j}\beta_{y,i}} \cos\left(\phi_{y,ij} - \pi\nu_y\right)}{2\sin\pi\nu_y} \tag{17}$$

と書ける。i, jは各々モニターと極磁石のインデックス、βはベータ関数、ϕ_{ij}は、jからiまでのベータトロンフェイズ、νはチューンである。これと（1）式を比べてみれば、$R_{12}(i,j)$、$R_{34}(i,j)$のかわりに

$$T_x(i,j) \equiv \frac{\sqrt{\beta_{x,j}\beta_{x,i}} \cos\left(\phi_{x,ij} - \pi\nu_x\right)}{2\sin\pi\nu_x}$$
$$T_y(i,j) \equiv \frac{\sqrt{\beta_{y,j}\beta_{y,i}} \cos\left(\phi_{y,ij} - \pi\nu_y\right)}{2\sin\pi\nu_y} \tag{18}$$

の誤差をみればよいであろう。前と同様、Δk_mを4極磁場のk値の誤差、ΔS_jを2極磁石の蹴り角の相対誤差、$\Delta B_{x,i}$、$\Delta B_{y,i}$ をビーム位置モニターの位置感度の誤差として一次の項までとる。
Δk_mの影響を（18）式の各ファクター毎に、つまり、$1/2\sin\pi\nu$の誤差、$\sqrt{\beta_j}$の誤差、$\sqrt{\beta_i}$の誤差、$\cos\left(\phi_{ij} - \pi\nu\right)$の誤差を各々考える。このうち、$1/2\sin\pi\nu$は全ての2極磁石とモニターの組に対して共通の誤差ファクターを与え、$\sqrt{\beta_j}$は同じ2極磁石（同じj）に対して共通、$\sqrt{\beta_i}$は同じモニター（同じi）に対して共通のファクターを与える。従って、これらの効果は、ΔS_j、$\Delta B_{x,i}$、$\Delta B_{y,i}$ と区別できない（しなくてよい）ので、$\left(\phi_{ij} - \pi\nu\right)$の誤差を$\Delta\psi_{x,i,j}$、$\Delta\psi_{y,i,j}$として、

$$\Delta T_x(i,j) = -\frac{\sqrt{\beta_{x,j}\beta_{x,i}}}{2\sin\pi\nu_x}\sin\left(\phi_{x,i} - \phi_{x,j} - \pi\nu_x\right)\Delta\psi_{x,i,j} - \Delta S'_j T_x(i,j) + \Delta B'_{x,j} T_x(i,j)$$
$$\Delta T_y(i,j) = -\frac{\sqrt{\beta_{y,j}\beta_{y,i}}}{2\sin\pi\nu_y}\sin\left(\phi_{y,i} - \phi_{y,j} - \pi\nu_y\right)\Delta\psi_{y,i,j} - \Delta S'_j T_y(i,j) + \Delta B'_{y,j} T_y(i,j) \tag{19}$$

と書ける。ここで、$\Delta S'_j$、$\Delta B'_{x,j}$、$\Delta B'_{y,j}$は、2極磁石とモニターの誤差に、4極磁場の誤差の影響をくわえたものである。4極磁場の微少な誤差Δk_mは、そこでのフェイズアドバンスの誤差

$$\Delta\phi_m = (-)\frac{1}{2}\beta_{x(y)m}\Delta k_m \tag{20}$$

を生む（()は、垂直方向）。従って、全ての4極磁磁石について和をとり、

$$\Delta\psi_{x,i,j} = \frac{1}{2}\sum_m I(i,j,m)\beta_{xm}\Delta k_m$$
$$\Delta\psi_{y,i,j} = -\frac{1}{2}\sum_m I(i,j,m)\beta_{ym}\Delta k_m \tag{21}$$

ここで、（20）は、jからiまでのベータトロンフェイズとチューン両方に関係するので、

$$I(i,j,m) = \begin{cases} +1/2 & \text{(ordered as } j-m-i) \\ -1/2 & \text{(othrer case)} \end{cases} \tag{22}$$

である。ただし、チューンが精度よく測定されていて、式（18）～（19）で、その測定値を使う場合は、

$$I(i,j,m) = \begin{cases} +1 & \text{(ordered as } j-m-i) \\ 0 & \text{(othrer case)} \end{cases} \tag{23}$$

とすべきである。
以上のようにすれば、あとは前節と同様にして、4極磁場の誤差を求めることができる。

2 アラインメントの測定

「beam based alignment」と言われるものの一例、ここでは最も簡単と思われるビーム軌道と４極磁場の中心とのずれをビームの測定から求めることについて述べる。。
原理は単純で、４極磁場の強さを変えたときのビーム軌道の変化を測定すれば、ビームと４極磁場の中心とのずれがわかる。４極磁場の中心はk値をどう変えても磁場がゼロであるから、もしビームが中心を通っていれば、４極磁場の強さを変えても軌道は変わらない。

2.1　1-pass　の軌道を使う場合

ビームと磁場中心のずれをx、y、k値の変化をδkとすると、４極磁石での角度の変化は、Thin lens 近似を使うと、

$$\begin{aligned}\delta x' &= -x\delta k \\ \delta y' &= y\delta k\end{aligned} \tag{24}$$

であり、下流での軌道の変化を測定して求めることができる。例えば、下流にビーム位置モニターが多数あれば、

$$\begin{aligned}&\sum_{BPM}\left[\delta x' R_{12}(BPM,q) - \delta x_{BPM}\right]^2 / \sigma_{BPM,x}^2 \\ &\sum_{BPM}\left[\delta y' R_{34}(BPM,q) - \delta y_{BPM}\right]^2 / \sigma_{BPM,y}^2)\end{aligned} \tag{25}$$

を最小にする$\delta x'$、$\delta y'$をもとめればよい。つまり、

$$\begin{aligned}\delta x' &= \frac{\sum_{BPM} \delta x_{BPM} R_{12}(BPM,q)/\sigma_{BPM,x}^2}{\sum_{BPM} R_{12}^2(BPM,q)/\sigma_{BPM,x}^2} \\ \delta y' &= \frac{\sum_{BPM} \delta y_{BPM} R_{34}(BPM,q)/\sigma_{BPM,y}^2}{\sum_{BPM} R_{34}^2(BPM,q)/\sigma_{BPM,y}^2}\end{aligned} \tag{26}$$

である。ここで、δx_{BPM}、δy_{BPM}はモニターでの軌道の変化、$R(BPM,q)$は４極磁石からモニターまでのトランスファーマトリックス、σ_{BPM}は位置モニターの分解能である。
なおこれは、式（１１）で（未知数の数が一個）という特別な場合である。位置モニターの数をN_Bとして、Aを１列N_B行の行列、yをN_B次ベクトル、xを１次ベクトル、

$$\begin{aligned}A_i &= R_{12}(BPM_i,q) \\ y_i &= \delta x_{BPM_i} \\ x &= \delta x'\end{aligned} \tag{27}$$

とすれば、（２６）第１式は、式（２４）～（２７）のどれからも得られる。

2.2　リングの閉軌道を測定する場合

リングの閉軌道を測定する場合でも、オプティクスを線形と近似できれば、同様にして各４極磁石の磁場中心と閉軌道とのずれを求めることができる。
一個の４磁石の強さを変化させたときの閉軌道の変化を考える。k値を$k_0 \to k = k_0 + \delta k$と変えたとき、Thin lens 近似を使うと、この磁石の出口での閉軌道の位置と角度の変化は、

$$\begin{aligned}\delta x_q &= \frac{\beta_{x,q}\cos\pi\nu_x}{2\pi\sin\pi\nu_x}\delta k x_0 \\ \delta x'_q &= \frac{\sin\pi\nu_x - \cos\pi\nu_x\left(\alpha_{x,q} + k\beta_{x,q}\right)}{2\pi\sin\pi\nu_x}\delta k x_0 \\ \delta y_q &= -\frac{\beta_{y,q}\cos\pi\nu_y}{2\pi\sin\pi\nu_y}\Delta k y_0 \\ \delta y'_q &= -\frac{\sin\pi\nu_y - \cos\pi\nu_y\left(\alpha_{y,q} - k\beta_{y,q}\right)}{2\pi\sin\pi\nu_y}\delta k y_0\end{aligned} \tag{28}$$

と書ける（付録２　参照）。ここで、$\alpha_{x,q}$、$\beta_{x,q}$、$\alpha_{y,q}$、$\beta_{y,q}$は、４極磁石の出口でのk値を変えた後のTwiss パラメーター、ν_x、ν_yはk値を変えた後のチューン、x_0、y_0は、k値を変える前の磁石の磁場中心と閉軌道とのずれである。あるモニターでの位置の変化は、４極磁石の出口からモニターまでのトランスファーマトリックスを$R(i,q)$として、

$$\delta x_i = R_{11}(i,q)\delta x_q + R_{12}(i,q)\delta x'_q$$
$$\delta y_i = R_{33}(i,q)\delta y_q + R_{34}(i,q)\delta y'_q \tag{29}$$

であるから、これらはx_0、y_0に比例し、

$$\delta x_i = \left(\frac{R_{11}(i,q)\beta_{x,q}\cos\pi\nu_x}{2\pi\sin\pi\nu_x} + \frac{\sin\pi\nu_x - \cos\pi\nu_x(\alpha_{x,q}+k\beta_{x,q})}{2\pi\sin\pi\nu_x} R_{12}(i,q) \right) \delta k x_0$$

$$\delta y_i = -\left(\frac{R_{33}(i,q)\beta_{y,q}\cos\pi\nu_y}{2\pi\sin\pi\nu_y} + \frac{\sin\pi\nu_y - \cos\pi\nu_y(\alpha_{x,q}-k\beta_{y,q})}{2\pi\sin\pi\nu_y} R_{34}(i,q) \right) \delta k y_0 \tag{30}$$

となる。多数のモニターでの閉軌道の変化の測定からx_0とy_0を求めるには各々、

$$\sum_i \left[\Delta x_i - \left(R_{11}(i,q)\Delta x_q + R_{12}(i,q)\Delta x'_q \right) \right]^2 / \sigma_{x,i}^2$$

$$\sum_i \left[\Delta y_i - \left(R_{33}(i,q)\Delta y_q + R_{34}(i,q)\Delta y'_q \right) \right]^2 / \sigma_{y,i}^2$$

を最小にするように決めればよい。これは、各々未知数の数が1なのでやりかたはいろいろあるが、前と同様にAを1列N_B行の行列、yをN_B次ベクトル、xを1次ベクトルとして、水平方向については、

$$A_i = \left(\frac{R_{11}(i,q)\beta_{x,q}\cos\pi\nu_x}{2\pi\sin\pi\nu_x} + \frac{\sin\pi\nu_x - \cos\pi\nu_x(\alpha_{x,q}+k\beta_{x,q})}{2\pi\sin\pi\nu_x} R_{12}(i,q) \right) \frac{\delta k}{\sigma_{x,i}}$$

$$y_i = \frac{\delta x_i}{\sigma_{x,i}} \tag{31}$$

$$x = x_0$$

とし、

$$|y - Ax|$$

を最小にすればよい。垂直方向についても同様である。

2.3 Thin lens 近似をしない場合

式（２４）、（２８）は強さを変える４極磁石をThin lensとした場合の近似である。この近似をやめると、軌道の変化が、４極磁石での軌道の位置だけでなく角度にも依存する。例えば、1-pass の軌道変化は、

$$\begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta x'_i \\ \delta y_i \\ \delta y'_i \end{bmatrix} = R(i,q) \begin{bmatrix} \delta x_q \\ \delta x'_q \\ \delta y_q \\ \delta y'_q \end{bmatrix} = R(i,q)(m_1 - m_0) \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

となる。m_0、m_1は、強さを変える前と後の４極磁石のトランスファーマトリックス、x_0、x'_0、y_0、y'_0は４極磁石入り口での軌道である。閉軌道の変化は、付録２(A-９)~(A-１０)で与えられている。
従って垂直、水平方向各々について未知数の数が１から２に増える。しかし、軌道の変化の４極磁石での軌道の位置と角度への依存が一次であることに変わりがないので、上と同様にして軌道と４極磁石とのずれを計算できる。

3 シミュレーションの必要性

ここまでで解析の方法を述べたが、線形のオプティクスを仮定する等の近似を使っている。ここで使われている近似（暗黙のうちに使われている近似もある）がどの程度よいものかどうかは、加速器によって、またその時の運転条件等にもよる。そのため、この方法が実際に有効かどうかをシミュレーションしてみるべきである。
ビームの振る舞いをシミュレーションする場合にはなるべく近似を使わず、磁石端部の磁場などわかっているものについては全て計算に入れるべきである。これはSAD がその威力を発揮できるところであろう。磁場の高次成分を

どのように入力するか、それが計算にどのように反映されるかについてはここでは述べない（筆者は詳しいことを知らない）。もちろん非線形性だけでなく、モニターの精度等もシミュレーションにいれる。
シミュレーションでやるべきことは、まずアラインメントの誤差や、磁場の強さの誤差などを（手で、あるいはランダムに）入力し、軌道を計算（または粒子をトラッキング）して測定データをシミュレーションする。そのデータに実際の測定の場合と同じ解析を適用して誤差を計算する。そして計算された誤差が入力したものとどの程度あっているかをみる。もし、よく一致していればその解析が有効であるといえる。条件を色々変えてシミュレーションすることによって、どの程度の精度が期待できるのか、あるいはどの程度の測定精度が必要か、磁場の強さはどの程度変えるのが適当か、といったことがわかるであろう。
なお、付録１にシミュレーションと解析のためのSADスクリプト（の一部）の例を載せておくので興味のある方はみていただきたい。

最後に

繰り返しになるが、ここで述べたものはオプティクス補正の例にすぎず、同じようなこと（又はもっと高級なこと）をやられている方は大勢いると思う。本来ならそのような仕事を全て調べてからテキストを書くべき所、ほとんどできなかった。従って、参考文献を挙げるのも中途半端になるので省略させていただく。

付録１　SAD スクリプトの例

ここでは、シミュレーションと解析のためのSAD スクリプトの例を、1-pass の軌道を使う線形オプティクスの補正の場合について示す。

まず測定のシミュレーションのための SAD スクリプト（の一部）の例を書く。

```
! (1)
Scan[(LINE["K1",#]=LINE["K1",#]*(1+errq*
GausRandom[]))&,allq];
Scan[(stk[#]=stk0*(1+errstk*GausRandom[]
))&,allst];
Scan[(calbpx[#]=1+errbp*GausRandom[])&,
allm];
Scan[(calbpy[#]=1+errbp*GausRandom[])&,
allm];

! (2)
  current={-1., -0.5, 0., 0.5, 1.}

  datax=Map[(stname=#;
  Map[(cur=#;
   k0=LINE["K0",stname];
                    LINE["K0",stname]=k0-
cur*stk[stname];
   FFS["CAL"];
   bpmdata=Map[{#,Twiss["DX",#],Twiss["
DY",#]}&,allm];
   bpmdata=Map[{#[1],#[2]*calbpx[#[1]]+re
sbp*GaussRandom[],#[3]*calbpy[#[1]]+resb
p*GaussRandom[]}&,bpmdata];

   LINE["K0",stname]=k0;
  {stname,cur,bpmdata})&,current])&,allstx
];

  datay=Map[(stname=#;
  Map[(cur=#;
   k0=LINE["K0",stname];
    LINE["K0",stname]=k0+cur*stk[stname
];
   FFS["CAL"];
   bpmdata=Map[{#,Twiss["DX",#],Twiss["
DY",#]}&,allm];
   bpmdata=Map[{#[1],#[2]*calbpx[#[1]]+re
sbp*GaussRandom[],#[3]*calbpy[#[1]]+resb
p*GaussRandom[]}&,bpmdata];

   LINE["K0",stname]=k0;
  {stname,cur,bpmdata})&,current])&,allsty
];
```

まず（１）では４極磁石のモデルからのずれ、２極磁石エラーと位置モニターの感度のエラーをランダムにセットしている。（これは単に例であって、もちろんランダムでなくてもよい。）allq, allstx, allsty, allm は、各々４極磁石、水平方向２極磁石、垂直方向２極磁石、位置モニターの名前のリストである。stk0 は、

モデル上の２極磁石の蹴り角(K0)と電流値の比である。（２）で、２極磁石の電流を１個づつ変えて軌道を計算し、位置モニターの読みのデータを水平方向、垂直方向各々について datax, datay というリストにしている。ここでは、(１)で決めたエラーとさらに resbp　で表される位置モニターの分解能の効果をいれている。

datax, datay の(i,j) 成分 data[i,j]　は、i 番目の２極磁石と j 番目の電流変化量に対応していて、

{２極磁石名、電流変化量、モニターのデータ}

という形をしている。「モニターのデータ」は長さがモニターの数のリストであり、その各成分は

{モニター名、 x, y}

のようになっている。x, y は各々モニターの水平方向、垂直方向の読みである。

以下、実際の測定データもこのような形式になっているとして、解析のためのスクリプトを例示する。
まず、レスポンス関数（２極磁石から位置モニターまでのトランスファーマトリックスの１２成分と３４成分）を上で述べた形式のデータから計算するには例えば以下のようにすればよい。

```
responsex=Flatten[Map[(stdata=Transpose[#];
    n=Length[stdata[1]];
    sumk0=Plus@@(stdata[2]*stk0);
    sumk02=Plus@@((stdata[2]*stk0)^2);
    Map[(bpdata=Transpose[#];
     sumx=Plus@@(bpdata[2]);
     sumk0x=Plus@@(stdata[2]*stk0*bpdata[2]);
    {stdata[1,1],bpdata[1,1],
          (sumk0x-sumk0*sumx/n)/(sumk02-sumk0^2/n),
                    resbp/Sqrt[(sumk02-sumk0^2/n)]})&,Transpose[stdata[3]]])&,datax],1];
```

```
responsey=Flatten[Map[(stdata=Transpose[#];
    n=Length[stdata[1]];
    sumk0=Plus@@(stdata[2]*stk0);
    sumk02=Plus@@((stdata[2]*stk0)^2);
    Map[(bpdata=Transpose[#];
     sumy=Plus@@(bpdata[3]);
     sumk0y=Plus@@(stdata[2]*stk0*bpdata[3]);
    {stdata[1,1],bpdata[1,1],
          (sumk0y-sumk0*sumy/n)/(sumk02-sumk0^2/n),
                    resbp/Sqrt[(sumk02-sumk0^2/n)]})&,Transpose[stdata[3]]])&,datay],1];
```

responsex, responsey は、の長さが　（２極磁石の数）x（モニターの数）のリストで、各成分が、

{２極磁石名, モニター名, R12, R12 の精度}
又は、
{２極磁石名, モニター名, R34, R34 の精度}

という長さ４のリストである。

次に、モデル上のレスポンス関数は、

```
responsexm=Flatten[Map[(stname=#;
  Map[(mname=#;
  If[LINE["Position",stname]<LINE["Position",mname],
    resp=TransferMatrix[LINE["Position",stname]+0.5,mname][1,2],resp=0];
   {stname,mname,resp})&,allm])&,allstx],1];
responseym=Flatten[Map[(stname=#;
  Map[(mname=#;
  If[LINE["Position",stname]<LINE["Position",mname],
    resp=TransferMatrix[LINE["Position",stname]+0.5,mname][3,4],resp=0];
   {stname,mname,resp})&,allm])&,allsty],1];
```

のようにできる。 responsexm, responseym も長さが　（２極磁石の数）x（モニターの数）のリストで、各成分が、

{2 極磁石名, モニター名, Rmo12}
又は、
{2 極磁石名, モニター名, Rmo34}

という長さ 3 のリストである。2 極磁石がモニターの下流にある場合はレスポンス 0 をいれているが、さらに 2 極磁石がモニターの上流にある組み合わせだけ選ぶ。

```
 responsex=Select[responsex,(LINE["Position",#[1]]<LINE["Position",#[2]])&];
 responsey=Select[responsey,(LINE["Position",#[1]]<LINE["Position",#[2]])&];
 responsexm=Select[responsexm,(LINE["Position",#[1]]<LINE["Position",#[2]])&];
 responseym=Select[responseym,(LINE["Position",#[1]]<LINE["Position",#[2]])&];
```

トランスファーマトリックスの測定とモデルの差 dR12, dR34（1 章の $\Delta R_{12,mes}(i,j)$, $\Delta R_{34,mes}(i,j)$）とその測定精度 sigR12, sigR34（1 章の $\sigma_{i,j}$）は以下のようになる。

```
dR12=Map[{#[1,3]-#[2,3]}&,Thread[{responsex,responsexm}]];
dR34=Map[{#[1,3]-#[2,3]}&,Thread[{responsey,responseym}]];
sigR12=Map[{#[4]}&,responsex];
sigR34=Map[{#[4]}&,responsey];
```

さらに、式（12）、（14）に対応して、y, A を

```
 nq=Length[allq];
 nx=Length[allstx];
 ny=Length[allstx];
 nb=Length[allm];

 a=1e-3;
 b=1e-3;
 c=1e-3;

 y=Join[Map[(#[1]/#[2])&,Thread[{dR12,sigR12}]],
        Map[(#[1]/#[2])&,Thread[{dR34,sigR34}]],
        Table[0,{nq+nx+ny+2*nb}]];

 A=Join[
 Map[(steer=#[1];pst=LINE["Position",#[1]]+0.5;
      bpm=#[2];pm=LINE["Position",#[2]]+0.5;
      sig=#[4];
      r12s=TransferMatrix[pst,pm][1,2]/sig;
  Join[
   Map[(pq=LINE["Position",#]+0.5;
        If[pq>pst && pq<pm,-TransferMatrix[pq,pm][1,2]*TransferMatrix[pst,pq][1,2]/sig,0])&,allq],
   Map[(If[#==steer,r12s,0])&,allstx],
   Table[0,{ny}],
   Map[(If[#==bpm,r12s,0])&,allm],
   Table[0,{nb}]]
  )&,responsex],

 Map[(steer=#[1];pst=LINE["Position",#[1]]+0.5;
      bpm=#[2];pm=LINE["Position",#[2]]+0.5;
      sig=#[4];
      r34s=TransferMatrix[pst,pm][3,4]/sig;
  Join[
   Map[(pq=LINE["Position",#]+0.5;
        If[pq>pst && pq<pm,TransferMatrix[pq,pm][3,4]*TransferMatrix[pst,pq][3,4]/sig,0])&,allq],
   Table[0,{nx}],
   Map[(If[#==steer,r34s,0])&,allsty],
   Table[0,{nb}],
   Map[(If[#==bpm,r34s,0])&,allm]]
  )&,responsey],

 DiagonalMatrix[Join[Table[a,{nq}],Table[c,{nx+ny}],Table[b,{2*nb}]]]];
```

のように作る。後は、式（11）のように $|y-Ax|$ を最小にする x を求めればよい。これは、

```
 x=LinearSolve[A,y];
```

又は、

```
sv=SingularValues[A];
x=Transpose[sv[3]].DiagonalMatrix[sv[2]].sv
```

あるいは、

x=Inverse[Transpose[A].A].Transpose[A].y

のようにしてできる。このxがデータから計算された誤差である。

付録 2 4 極磁場の変化に対する閉軌道の変化（線形近似）

4極磁石の強さを変えたときの閉軌道の変化を、その磁石の磁場中心と閉軌道のずれとその磁石の場所での閉軌道の角度の関数として表す。ただし、オプティクスは線形とし、水平方向と垂直方向のカップリングはないものとする。この仮定は非線形磁場（6極磁石や端部の磁場）のため必ずしもよい近似でない場合もある。しかし、閉軌道のずれが小さいときは多くの場合非線形磁場の影響が小さいのでよい近似になるであろう。
一つの4極磁石の強さを変えたときの閉軌道の変化を考える。

M：4極磁石の出口から（リングを一周して）入口までのトランスファーマトリックス。4極磁石の強さを変えても変化しない。
m_0：磁石の強さを変える前の4極磁石の入口から出口までのトランスファーマトリックス。
m_1：磁石の強さを変えた後の4極磁石の入口から出口までのトランスファーマトリックス。
x_{10}、x_{10}'：磁石の強さを変える前の4極磁石の入口での閉軌道の位置と角度。
x_{20}、x_{20}'：磁石の強さを変える前の4極磁石の出口での閉軌道の位置と角度。
x_1、x_1'：磁石の強さを変えた後の4極磁石の入口での閉軌道の位置と角度。
x_2、x_2'：磁石の強さを変えた後の4極磁石の出口での閉軌道の位置と角度。

と定義する。4極磁石は横方向のアラインメント誤差があってもよいが、角度の誤差は無視できるとする。4極磁石の磁場中心を座標の原点とすることができるので、

$$\begin{pmatrix} x_{20} \\ x_{20}' \end{pmatrix} = m_0 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{10}' \end{pmatrix} \quad \text{(A-1)}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \quad \text{(A-2)}$$

が成り立つ。また、オプティクスは線形という仮定により、

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_1' - x_{10}' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_2 - x_{20} \\ x_2' - x_{20}' \end{pmatrix} \quad \text{(A-3)}$$

となる。
これらの式より、

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_1' - x_{10}' \end{pmatrix} = M \left[m_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} - m_0 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{10}' \end{pmatrix} \right] \quad \text{(A-4)}$$

従って、

$$(I - Mm_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = (I - Mm_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad \text{(A-5)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_1' - x_{10}' \end{pmatrix} = \left[(I - Mm_1)^{-1} (I - Mm_0) - I \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} \quad \text{(A-6)}$$

Iは単位行列。さらにMm_1の行列式は1なので

$$(I - Mm_1)^{-1} = \frac{I - (Mm_1)^{-1}}{2 - Tr[Mm_1]} \quad \text{(A-7)}$$

である。従って、4極磁石入り口での閉軌道の変化は

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_1' - x_{10}' \end{pmatrix} = \frac{M(m_1 - m_0) - I + m_1^{-1} m_0}{2 - Tr[Mm_1]} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{10}' \end{pmatrix} \quad \text{(A-8)}$$

となる。4極磁石出口での閉軌道の変化は

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_{20} \\ x_2' - x_{20}' \end{pmatrix} = \frac{m_1 - m_0 - M^{-1} + M^{-1} m_1^{-1} m_0}{2 - Tr[Mm_1]} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{10}' \end{pmatrix} \quad \text{(A-9)}$$

あるいは、

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_{20} \\ x_2' - x_{20}' \end{pmatrix} = \frac{M^{-1}(m_1^{-1} - m_0^{-1}) - I + m_1 m_0^{-1}}{2 - Tr[Mm_1]} \begin{pmatrix} x_{20} \\ x_{20}' \end{pmatrix}$$

(A-10)

となる。
４極磁石以外の場所での閉軌道の変化は、

$$\begin{pmatrix}\delta x_i \\ \delta x_i'\end{pmatrix} = R(i)\begin{pmatrix}x_2 - x_{20} \\ x_2' - x_{20}'\end{pmatrix} \quad \text{(A-11)}$$

である。$R(i)$は４極磁石出口からのトランスファーマトリックスである。ここまでの議論はオプティクスが線形なら成り立つ。
さらに４極磁石を Thin lens として近似すると、$x_{10} = x_{20}$、$x_1 = x_2$なのでこれらをx_0、xとし、k_0、$k = k_0 + \delta k$を磁場を変える前と後のk値として

$$m_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ k_0 & 1\end{pmatrix},\quad m_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ k & 1\end{pmatrix} \quad \text{(A-12)}$$

であるから、、

$$\begin{pmatrix}x - x_0 \\ x_2' - x_{20}'\end{pmatrix} = \frac{\left(I - M^{-1}\right)}{2 - Tr[Mm_1]}\begin{pmatrix}0 \\ \delta k x_0\end{pmatrix} \quad \text{(A-13)}$$

が得られる。
又、Mm_1はリング一周のトランスファーマトリックスだから、

$$2 - Tr[Mm_1] = 4\sin^2 \pi\nu \quad \text{(A-14)}$$

$$M^{-1} = m_1\left(Mm_1\right)^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 0 \\ k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\pi\nu + \alpha\sin 2\pi\nu & \beta\sin 2\pi\nu \\ -\gamma\sin 2\pi\nu & \cos 2\pi\nu - \alpha\sin 2\pi\nu\end{pmatrix}$$
(A-15)

従って、

$$x - x_0 = \frac{\beta_{x,q}\cos\pi\nu_x}{2\pi\sin\pi\nu_x}\delta k x_0 \quad \text{(A-16)}$$

$$x_2' - x_{20}' = \frac{\sin\pi\nu_x - \cos\pi\nu_x\left(\alpha_{x,q} + k\beta_{x,q}\right)}{2\pi\sin\pi\nu_x}\delta k x_0$$
(A-17)

が得られる。