

RF 空洞設計

0 はじめに

RF 空洞の取り扱いについてはいろいろな教科書もあり、丁寧に詳しく解説されているので、ここでは前半で一般とは少し違った切り口で、解説してみたい。このため、直感的理解ⁱⁱを重点にするつもりである。

最近計算機の性能が上がってきていて3次元計算もそれほど大変なことではなくなりつつある。そのため、比較的敷居を感じることなく気軽に計算機をぶん回すことができるようになった。これにより長年のカンがないと空洞を外から見て中の電磁場分布が解らないということも緩和されると思われるⁱⁱⁱ。これはこれで結構なことだが、逆に何か入力を与えるとよほどのことがない限り何らかの出力がでてくる^{iv}。このため、闇雲に計算をしてその出力を鵜呑みにするケースがでてくる^v。とくに、加速器ではハードに密着しているので、種々の分野にわたったそれぞれ専門的な知識が要求される使われるシミュレーションコードが多い^{vi}。そのため、各コードの限界や欠点などもある程度は見えていないと間違った解釈に陥る危険性もある。このため、題目から想像される内容から多少はずれられるかもしれないが、ここではあえてコードの使い方そのものよりも空洞設計に使われるコードの原理や、ヒントになるような点を中心に話を進めていきたい^{vii}。

ⁱ 1985年のセミナーではほぼ同名の講義(OHO'85 A-3高周波空洞の設計... 肥後寿泰)があるので、重複を避けるためもある。また、このシリーズには他にも多数の高周波空洞関連のテキストがあるので参照されたい。

ⁱⁱ オーダー計算ができるような直感。厳密性を欠くかもしれないが脚注で多少補えればと思っている。

ⁱⁱⁱ 空洞内の電磁場分布に限らず、電磁石や様々な静電場についてもいえる。

^{iv} バグがあったり、使い方に気むずかしいところがあり、途中で止まってしまうコードは多い。

^v さすがに宇宙の年齢ぐらいの数字がでてくると区別はつくだろうが...

^{vi} 現実の対象物を何らかのモデル化により数値的にシミュレートするわけで、必然的にモデル化の限界がある。

^{vii} MAFIAはすでに説明されているはずなので、SUPERFISHを念頭に置いて説明を進めていきたい。

1 荷電粒子の加速

粒子を加速するということは何らかの相互作用による力を与えて粒子の運動量を変化させることである。現在4つの力、強い力、弱い力、電磁力、重力が知られているが、後者2つが長距離力で、通常このうち制御が容易な電場による荷電粒子の加速のみ^{viii}が加速器と呼ばれる装置の基本原理として使われている^{ix}。ここではこの電界による荷電粒子の加速について取り扱う。磁場は基本的に荷電粒子の運動方向に垂直な方向にしか力が働かないため軌道を曲げるだけである。そのため荷電粒子に対して何らの仕事もせず、磁場のみでは荷電粒子の加速はできない(図1参照)^x。

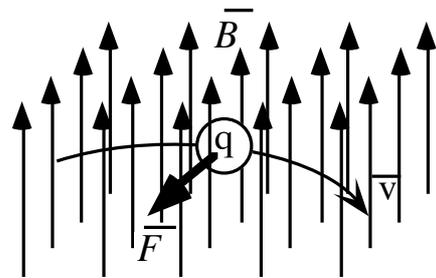


図1 静磁場だけではエネルギーは上がらない。

2 電界の発生(静電場)

荷電粒子の加速に必要な電界(電位差)を発生させる方法はいろいろ考えられるが、荷電粒子ビームの加速を考える場合、加速空間に対してビームの入口と出口が存在する。通常ビームは金属パイプを通過してくると考えられる^{xi}ので、この入口と出

^{viii} 電荷を持たない中性子等に対しては磁気双極子の磁場勾配における力が考えられるが、実用レベルの加速を行うには尋常ではない磁場勾配が必要となる。これも最近の高出力レーザーの進歩により、そのうち達成できるかもしれない。

^{ix} 他の力は制御が難しいか、強さが小さいためあまり使われない。ただし、重力は超低速な粒子の加減速に対して適応できる。有名なミリカンの液滴実験も重力と電場中の帯電した液滴の受ける力の釣り合いを利用したという点で広い意味で重力も使ったといえる。

^x 但し、軌道を曲げることは広義には加速であり、高エネルギーの電子などでは光子の放出によりエネルギーを減少させるという効果はある。

^{xi} ビームパイプは交流磁場中におかれる場合もあり、セラミック

口が電位差を持つ電極となる。ビームは通常真空中で加速するため、この入口と出口の間も真空に保つ必要があり、何らかの容器で囲む必要があるが、電位差を保つため電極間は何らかの意味で絶縁されていなければならない（図 2 参照）。静電加速（直流加速）の場合はセラミックなどの絶縁体でこれを行っている。静電場は保存場なので、高いエネルギーの加速を行うにはそのエネルギー差だけの電位差が必要となる（図 3 参照）ⁱⁱ。

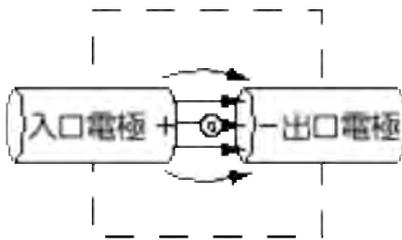


図 2 電界による加速。何らかの方法で電極間は真空に保ちたい。

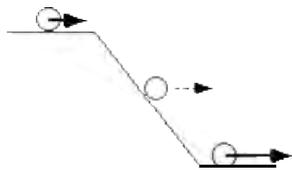


図 3 保存場（静電ポテンシャル場）では加速エネルギーは電位差だけで決まる。

3 電界の発生(時間的に変化する電界)

3.1 モデル化

高エネルギーの加速を行うにはこのような保存場による加速では限界があるので、交流加速を行うⁱⁱⁱ。交流といっても、周期的なものと非周期的なものがある。前者は一般的な意味での RF（高周波）空洞^{iv}による加速で、後者はインダクション（誘導）加速などに代表されるインパルス加速である。どちらのものでも、電極間の電位差が交互に変わるといことはとりもなおさず、振動するダイポールと見なせるので、これが外部空間から見える場合は電磁波となって外に漏れだすことになり、具合が悪い（図 4 参照）^v。

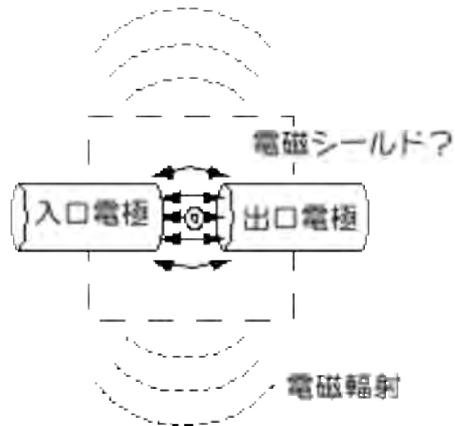


図 4 電位差のある電極。電磁シールドがないとエネルギーが電磁輻射として漏れ出す。

そのためエネルギーが漏れ出さないように何らかの形で電極を外部からシールドする必要がある。そこで、前述のように真空を保つ必要から電極を取り囲むように導体の壁で覆うことにより、シールドと機密性が達成できる。この導体の壁には穴があいていても（パイプがついていても）良い。ただし、気密性は保たれていなくては困るし、加速に使う電場の成分が漏れても困る。前者につい

ク等の絶縁体で作られることもある。

ⁱ 大気中では空気中の気体分子とのにより散乱されたり、減速される。また、気体分子を放射化するのも都合が悪い。このため気密容器の中で加速が行われる。最近のプラズマ加速ではプラズマを作るために気体を使うが、大気圧よりは減圧した状態で使うようである。

ⁱⁱ タンデムバンデグラフなどの静電加速器では途中で電子をイオンからはぎ取るなどして荷電変換を行うというトリックを使って、電位差以上のエネルギーを得ている。ただし、効率の点から全行程で一度ぐらいしか使えない。

ⁱⁱⁱ 時間的に変化する場は保存場では無くなるので、先のポテンシャルの呪縛から免れるわけである。

^{iv} 「くうどう」の字として「空洞」、「空胴」があるが、筆者は cavity の本体、つまり、ハードを指すときは「空洞」、内部の空間を指すときは「空洞」を使うようにしている（実はあまり気にせずに使っているときもある）。

^v 放送局のアンテナと同じなので、通信に障害を与える可能性がある。極端な話、電子機器が狂うなど、様々な影響がでる可能性がある。強力な放送局のそばでは持っているだけの蛍光灯が点灯するというのは有名な話。またエネルギーが漏れ出すと思えば加速に使える電力が減ってしまう。

てはセラミックなどの碍子の採用により実現できる。後者は加速に使う電場の周波数成分に対する遮断波長より穴（パイプ）の径が十分小さければよいⁱ。

さて、こうすると、直流的には短絡されてしまうが、交流に対しては有限のインピーダンスを持つようにすることができる（図 5 参照）。電極間はコンデンサー C [F] と見なすことができ、また、金属の壁が電極間ギャップより十分遠くにあるとその空間はインダクター L [H] と見なせるので、電極からみるとこれらの並列回路がつながっているように見える。このインピーダンス Z [Ω] は次のように表すことができる。

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad \text{ii} \quad (\text{eq. 1})$$

これは共振周波数

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{eq. 2})$$

で分母がゼロとなり、 Z が無限大となるため絶縁が達成できるⁱⁱⁱ。また、共振条件を満たさなくても考えている周波数帯で、 L が大きく、 C が十分小さければ Z の絶対値は十分大きな値をとるので、適度な電力で十分な電圧を発生させることができる。共振条件を満たさず場合が通常の RF 加速であり^{iv}、満たさない場合はインダクション加速に相当する^v。実際の空洞には無限個^{vi}の共振モードが存在する^{vii}が、興味があるのはこのうち下の方の数個のみである。通常的设计では加速に使うモードが一番低い周波数を持つようにするので、最低次のモードのみをここでは扱う。

ⁱ 当然ビームパイプもこれに相当し、T.Weiland によって提唱されたシングルモードキャビティでは加速モードのみが遮断領域に来るようなサイズのパイプをつける。これによってビームによって励起される不要なモードが空洞内に長時間残らないようにできる。

ⁱⁱ 数学の分野は虚数単位に i を使うが、電気分野は電流に i を使うので、虚数単位に j を使う。物理では人によって違う。

ⁱⁱⁱ 実際には導体壁は有限の抵抗値を持つため無限大にはならない。後述。

^{iv} 後述の非同調型でも共振点のそばで使われるのが普通である。

^v フーリエ変換（周波数域）で解析するのが RF でラプラス変換（時間域）で解析するのがインパルスという見方もある。

^{vi} 可算無限

^{vii} ビームパイプなどの穴からエネルギーが外へ逃げないよう、すべての境界を無損失の境界で閉じた場合。逃げる場合は損失がある空洞と同じ扱いになり次節のような取り扱いになる。共振周波数は実数ではなく、複素数となり、減衰を含むようになる。その場合は準定常状態であるともいえる。

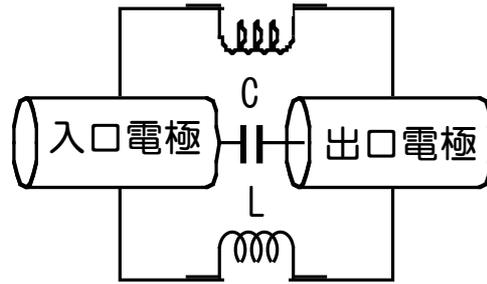


図 5 空洞の等価回路（無損失の場合）

3.2 RF における Q 値^{viii}と損失

RF 空洞の場合は共振点付近の挙動に興味があるので、モデルをもう少し精密化して導体上の損失を導入する。損失の大小でおおまかに 2 通りに分類することができる。はじめに、低損失（高 Q）な場合をあげる。その中で、いくつかの量について説明し、シャントインピーダンスの具体的な値を評価してみる。次に高損失な場合（低 Q）をあげる。そのあと、特別な例を紹介する。

3.2.1 High Q の場合^{ix}

導体壁で抵抗のあるモデルを考えると図 6 のように L に直列に抵抗の入った等価回路ができる。こうするとインピーダンス Z [Ω]^x は次のようになる。

$$Z = \frac{j\omega L(X - j/Q)}{1 + jX/Q - X^2} \quad [\Omega] \quad (\text{eq. 3})$$

ここで $Q = \omega_0 L / r$, $X = \omega / \omega_0$, $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ である^{xi}。

$Q \gg 1$ の時、共振点 ω_0 ではインピーダンス Z [Ω] は以下のように書け、実数となる。

$$Z = Q\omega_0 L = rQ^2 = \omega_0^2 L^2 / r \quad [\Omega] \quad (\text{eq. 4})$$

^{viii} Q 値とは蓄積エネルギーを振動一周期あたりのエネルギー損失で割ったものとも定義できる。従って振動が減衰してしまうまで何回振動するかという目安でもある。他にもいろいろな見方ができる（後述）。

^{ix} いくら以上の Q 値の場合を High Q というかについては基準はないが、ここでは便宜上空洞が真空のみの場合を想定して分類している。 $Q \gg 1$ が成り立つ範囲でもある。周波数にもよるが、千以上というところか？数十 MHz 以下の周波数の場合はコイルとコンデンサーによる集中定数回路も使われるので、一桁以上低くなる。

^x 電極間に発生する電圧に興味があるので、コンデンサーの両端でのインピーダンスを求める。

^{xi} この抵抗 r は直列抵抗である。後では並列抵抗 R が出てくるので混同しないよう注意。

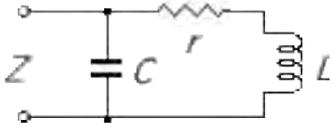


図 6 損失のある共振回路のモデル (直列)

実際には虚数成分が $1/Q$ 程度有るが、ここでは $Q \gg 1$ としているので無視している。 Z の絶対値は共振周波数近傍では以下のように近似できる：

$$|Z| = \omega_0 L \sqrt{\frac{X^2 + 1/Q^2}{(1-X)^2(1+X)^2 + (X/Q)^2}} \quad (\text{eq. 5})$$

$$\approx \omega_0 L \sqrt{\frac{1}{4\Delta X^2 + (1/Q)^2}}$$

周波数が $\Delta f = f_0/(2Q)$ だけずれると ($\Delta X = 1/(2Q)$)、 Z の絶対値は共振時の $1/\sqrt{2}$ になり、消費電力を一定にした場合、空洞内の蓄積エネルギーは共振時の半分になるⁱⁱ。 Z は加速空洞のシャントインピーダンスに対応する。ただし、ここでは加速電圧 $V[V]$ を実効値ではなくピーク値で表すのでⁱⁱⁱ、シャントインピーダンス $Z_{shunt}[\Omega]$ として使うときは2倍にする必要があり、注意が必要である ($Z_{shunt} = 2Z$)。 Z_{shunt} を使うと消費電力 $P[W]$ ^{iv} の時の発生電圧 $V[V]$ が求められ、

$$V = \sqrt{Z_{shunt} \cdot P} \quad [V] \quad (\text{eq. 6})$$

と表すことができる。空洞単体の場合はこれで困らないが、空洞をたくさん並べるときは長さあたりの量を使った方が都合がよい。そうすると、発生する電圧勾配 $E [V/m]$ は長さあたりの消費電力 $P [W/m]$ と $Z_{shunt} [\Omega/m]$ を使って、次のように書くことができる。

$$E = \sqrt{Z_{shunt} \cdot P} \quad [V/m] \quad (\text{eq. 7})$$

ところで、 Z_{shunt} を Q で割った値を考えると、

$$\frac{Z_{shunt}}{Q} = 2\omega_0 L = \frac{2}{\omega_0 C} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega] \text{ または } [\Omega/m]^v \quad (\text{eq. 8})$$

となる。これは L と C のみによる量なので、導体

ⁱ 駆動電力でも大差はない。確かめよ。

ⁱⁱ 位相は 45 度ずれる。

ⁱⁱⁱ 歴史的な理由で、開拓者達それぞれの流儀があって、定義が色々分かれているようである。

^{iv} 電力は時間平均なので、実効値を使う。

^v Q は無次元量なので、 Z_{shunt}/Q もシャントインピーダンスと同じく抵抗または抵抗/長さの次元。

壁の抵抗によらず^{vi}、空洞の形状だけで決まる。このため、空洞形状の性能評価に使われる。

ここで Z_{shunt} のオーダーを求めてみよう^{vii}。波長 $\lambda[m]$ に対応する RF を考える。この場合、

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda} \quad [\text{rad/s}] \quad (\text{eq. 9})$$

ここで、 $c[m/s]$ は光速である。電流 $I[A]$ が距離や幅も λ のオーダーの導体表面上を一様に流れるとすると (図 7 参照)、電流密度 $i[A/m]$ ^{viii} は、次のようになる。

$$i = \frac{I}{\lambda} \quad [A/m] \quad (\text{eq. 10})$$

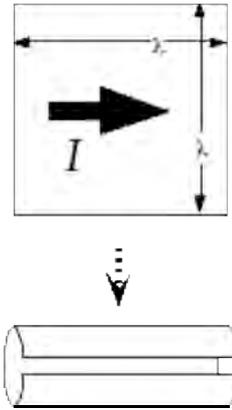


図 7 大きさ $\lambda[m]$ 平方の板上を電流が流れる。この板で空間を囲むため丸めて筒状にする^{ix}。

この表面近くの磁場 $H[A/m]$ は

$$H = i = \frac{I}{\lambda} \quad [A/m] \quad (\text{eq. 11})$$

である。この板で空洞を構成するため、丸めて円筒にすると、その体積は $\lambda^3/4\pi$ のオーダーとなり、中で磁場が一様だとすると空洞内の蓄積エネルギー $W_c[J]$ は

$$W_c = \int \frac{\mu_0 H^2}{2} dv = \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{\lambda^2} \cdot v = \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2 \lambda}{4\pi} \quad [J] \quad (\text{eq. 12})$$

^{vi} 導体壁の抵抗は後述のように表面抵抗として得られるが、表面の仕上げの粗さや、酸化等の表面の状態による量なので、多少取り扱いがやっかいである。

^{vii} オーダーを求めるだけなので、電磁場分布などは考えない。すべて一様なものとして扱う。電流の向きが長手方向 (ビーム軸方向) という仮定は入っている。

^{viii} 電流は表面にだけ流れる (後述) ので、面密度ではなく線密度になる。

^{ix} この筒の前と後ろのフタは考えていない。このような構造物を多数並べたことを想定しているため。

となる。これをインダクタンス $L[\text{H}]$ に電流 $I[\text{A}]$ が流れているときのエネルギー $W_L[\text{J}]$

$$W_L = \frac{1}{2} LI^2 \quad [\text{J}] \quad (\text{eq. 13})$$

と比べて、 $L[\text{H}]$ は

$$L = \frac{\mu_0 \lambda}{4\pi} \quad [\text{H}] \quad (\text{eq. 14})$$

のオーダーになる。RF 電流は導体表面の表皮の厚さ $d[\text{m}]$ 程度の層にしか流れないので、表面抵抗 $R_s[\Omega]$ なる量が定義できる。表皮の深さ d はつぎのようになるⁱ。

$$d = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} \quad [\text{m}] \quad (\text{eq. 15})$$

表面抵抗 $R_s[\Omega]$ は厚さ d 、体積抵抗率 $\rho[\Omega\text{m}]$ の導体板の単位(1m)幅、単位長さあたりの抵抗値で、

$$R_s = \frac{\rho}{d} = \sqrt{\frac{\pi c}{\lambda}} \mu_0 \rho \quad [\Omega] \quad (\text{eq. 16})$$

となるⁱⁱ。そうすると、 r は長さ λ の導体板の抵抗として、

$$r = \sqrt{\frac{\pi c}{\lambda}} \mu_0 \rho \quad [\Omega] \quad (\text{eq. 17})$$

そうすると、 $Z_{shunt}[\Omega]$ は

$$Z_{shunt} = 2 \frac{(\omega L)^2}{r} = \frac{\sqrt{c\mu_0}^3}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\rho}} \sqrt{\lambda} \quad [\Omega] \quad (\text{eq. 18})$$

となる。体積抵抗率として銅のそれ ($2 \times 10^{-8}[\Omega\text{m}]$) を使い、値を代入すると、

$$Z_{shunt} = 1.5 \times 10^7 \sqrt{\lambda} \quad [\Omega] \quad (\text{eq. 19})$$

また、長さあたりにすると

$$Z_{shunt} = \frac{1.5 \times 10^7}{\sqrt{\lambda}} [\Omega/\text{m}] = \frac{15}{\sqrt{\lambda}} [\text{M}\Omega/\text{m}] \quad (\text{eq. 20})$$

となり、波長の平方根に逆比例、周波数の平方根に比例してスケールされる。従って、同じ構造の加速管なら周波数を高くするほどシャントインピ

ⁱ 銅などの導体は非磁性なので、 $\mu = \mu_0$ (真空の透磁率) である。

ⁱⁱ 損失を論じる限りにおいては、全電流が厚さ d の表面層のみを流れると仮定しても等価であることが示されている。スペースの都合上表皮効果自身や、このことの証明は他のテキストに譲る。ちなみに、銅の場合周波数が 4GHz で $d=1\mu\text{m}$ 、4kHz で 1mm である。40Hz では 10mm なので、商用電力周波数でのケーブルの直径は 20mm 以上は意味がないのがわかる。そのため断面積を稼ぐのにパー(板)状の導体(厚さ 20mm 以下)を使う。

ダンスは高くなる。波長 $\lambda=1\text{m}$ ($f=300\text{MHz}$) の場合、 $15\text{M}\Omega/\text{m}$ が得られる。これ自身はそれほど悪い値ではないと思うが、桁が何桁も違うことはないだろうⁱⁱⁱ。

Q 値が高い場合、外部からの駆動周波数と共振周波数のずれの相対値 $\Delta f/f$ は $1/Q$ より十分小さくなければならない。Q 値は共振回路の選択度でもある。このため、Q 値が高いシステムは必然的に狭帯域になる。このため、高い Q の空洞では加速周波数についてはほぼ固定となる。これを可変とするには、 L や C を変えてやればよい。比較的遅い変化で良ければ機械的に空洞の体積や、電極間の距離、面積などを変えてやることにより調整できる^{iv}。しかし、いずれも機械的な運動を伴うなので、高速化には限界がある。

3.2.2 low Q の場合

L を高速に変える場合はフェライトなどの磁性体を用い^v、その透磁率を外部から直流磁界により変えてやる方法が陽子などのイオンのシンクロトロンなど^{vi}で採用されている。

磁性体などの損失によって Q 値が低い場合、先の回路のように L に直列に抵抗が入っているモデルよりは並列に入っているモデルの方が適当である^{vii}。このため、図のように L に並列に抵抗が入っている等価回路を考える。

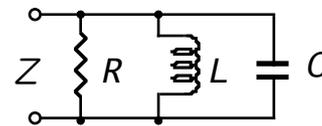


図 8 損失のある共振回路のモデル (並列)

この等価回路のインピーダンスは次のようになる。

$$Z = \frac{j\omega_0 L}{1 - X^2 + j/Q} \quad (\text{eq. 21})$$

ⁱⁱⁱ オーダーを求めているだけなので、非常に大胆な仮定をおいている。従って一桁程度はずれてもおかしくない。ファクター(2倍)が三つ分程度重なれば一桁ずれる。また、悪くするほうは表面積を増やすだけでできる。

^{iv} シンクロサイクロトロンでは固定電極と回転電極の組合せにより対抗面積を変えたり、音叉により距離を変えたりして、電極間の静電容量を変えて周波数をふる工夫がされた。

^v 強磁性体を入れると損失が増え、Q 値はかなり下がる。

^{vi} 電子の加速器では加速のごく初期をのぞいて光速と考えて良いので、周波数は固定でよい。

^{vii} なぜか？

ここで $Q=R/\omega_0 L$ である。(4)式と比べればわかるように、先の等価回路(図 8)はQ値が高い場合、

$$R = (\omega_0 L)^2 / r \quad (\text{eq. 22})$$

として並列抵抗型の回路に置き換えられる。こちらの場合共振点では $Z=R$ で、これも実数になる。

近年、イオンビームによるガン治療などで、医療専用機としてのシンクロトロン需要が高まりつつあり、コストを下げ普及を容易にする検討がなされてきた。加速器への要請としては調整要素をなくし、制御を簡略化することがあり、RF に関しては非同調の空洞の研究が最近進んできたⁱⁱ。非同調型とするため、扱う周波数範囲にもよるがQ値を極端に下げることがありⁱⁱⁱ、 $Q < 1$ にするため、空洞内に磁性体を入れ^{iv}、また、電極間へ付加的に並列抵抗を入れて損失を増やしたり、結合をきわめて大きくとってQ値を下げる、などが考えられた(図 9参照)。抵抗を使うやり方では電力が純粋に熱になってしまい効率が悪い。また、結合度を大きくとるとほとんどの電力が空洞から反射されるので、同様に効率が悪くなる。

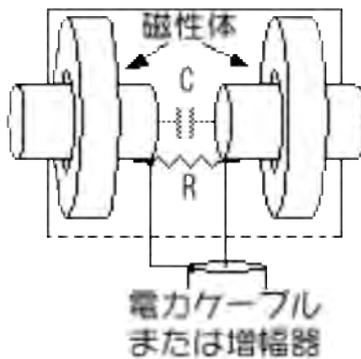


図 9 非同調空洞

空洞の共振時のインピーダンス Z_r は

ⁱ 同調型可変周波数空洞では共振周波数を目標の周波数にあわせる制御が必要。これには空洞内の磁性体の透磁率を変えるための外部磁場の発生装置(含電源)を含む。

ⁱⁱ 最近有名になってきた磁性合金(ファインメットなど)を使った加速空洞の発展の発端になった。

ⁱⁱⁱ 大電流を加速する場合、ビームローディング等によるビーム不安定さを防ぐため、Q値を下げたいというケースもある。

^{iv} イオンのシンクロトロンの場合、ビームの速が遅いため、加速に必要な周波数が数十MHzまでとなっている。通常、空洞のサイズを実用的な大きさにするため磁性体を入れてLを大きくする手法がとられる。周波数をふるのにも使われる。

$$Z_r = Q\omega_0 L \quad (\text{eq. 23})$$

で表されるので、Q値が低くてもLが十分大きければシャントインピーダンスは高くできることがわかる。このためにはロスが少々大きくても透磁率の高い材質の磁性体^vを選べば良い^{vi}。最近になってある種の磁性合金(ファインメットなど)がこの目的に特に適していることがわかった。これについては参考文献を参照されたい。

実際にはRF電力を効率よく注入するために反射を減らす等の工夫が必要となる。じつはこの磁性体リングはサイズや材質にもよるが、一つあたり数十から数百Ωのインピーダンスを持つ。通常これを複数枚使うので、空洞あたりでは数百から数千Ωのシャントインピーダンスとなる。同軸ケーブルから駆動することを考えた場合、このままでは結合をとることが難しいので、マルチフィード法(図 10参照)や、オールパスネットワーク法、インピーダンス変換トランスなどの手法が使われる。真空管で直接駆動する場合は、適当な枚数を直列、並列に組み合わせて負荷インピーダンスを調整することができる^{vii}。

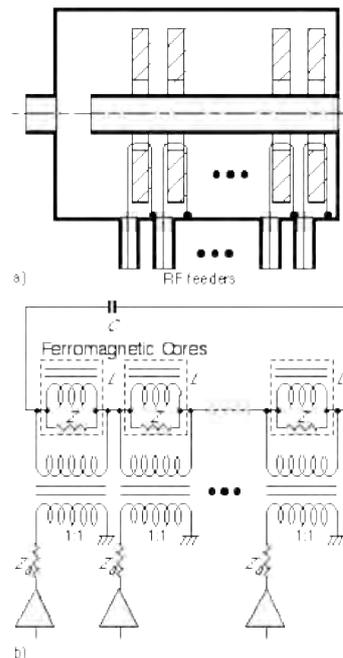


図 10 マルチフィード法。多数の小型パワーアンプの出力を整合を改善しつつ空洞内で合成する。

^v たいていの場合、透磁率が高いほど損失も大きい。

^{vi} 実際には、このLと加速電極間の静電容量Cとの共振点は加速周波数の付近に来ようになっている。

^{vii} 空洞(ギャップ)を分割することも含める。

いずれにしてもQ値が低いということは広帯域となるので、共振器と言うよりは変成器（トランス）の概念の方が近い。RF電力を適当なインピーダンス変換を行って加速電圧を発生させる変成器ととらえると、任意の波形（広帯域スペクトルを持つ）の発生が示唆されるⁱ。電圧さえ十分稼げればバンチャーⁱⁱに適している。また、バリアバケット空胴などはこの種の空胴の自然な延長線にくる（図11参照）。バリアバケット法はシンクロトロンへの入射時に局所的なビーム電流を抑えることができるので、入射時のエミッタンスの増加などを減らすことができ、ビーム強度の増加などに有望視されているⁱⁱⁱ。

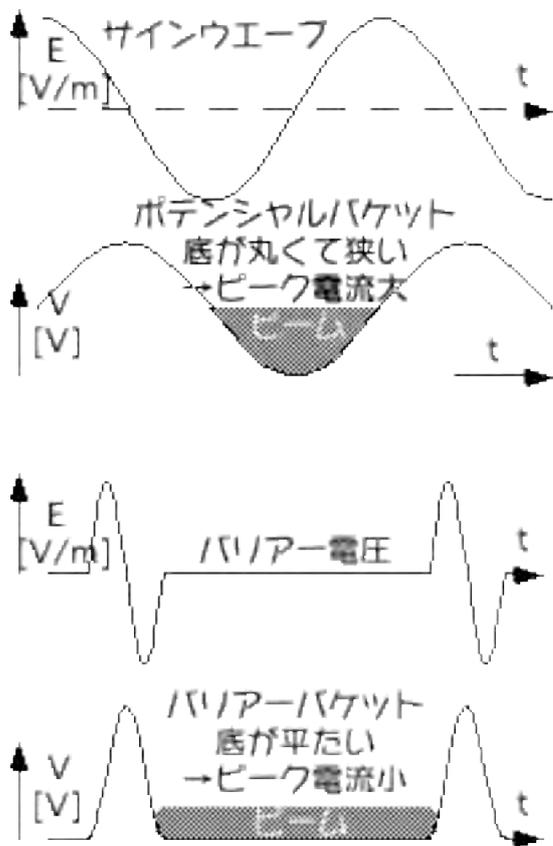


図11 サインウエーブによるポテンシャルバケットとバリアバケット

ⁱ たとえばノコギリ波や三角波、あるいはインパルス波形。

ⁱⁱ ビームの時間構造（走行方向の空間分布）を操作するのにエネルギー（速度）変調をかけて一定の距離走らせると、その速度差により時間構造が変化する（空間変調）ことを使う。

ⁱⁱⁱ 実際には空胴2台を用いてバケットを二つ構成し、片方を入射用、もう一方を蓄積用として使う。

3.3 インダクション加速

インダクション加速の場合はインパルスによる加速を行い、パルス幅を長くとりたいので、 L をなるべく大きくする。空胴内が本当に空胴ではサイズが巨大になるため^{iv}フェライトなどの強磁性体を入れるのがふつうである。インダクション加速ではRFでいうところのマッチングは通常考慮されないため反射は避けられない。インダクション加速についてはこの講義のタイトル「RF空胴の設計」からはずれるので、これ以上ふれない。

3.4 多重高調波重畳加速

空胴に供給すべき電力は発生させる電圧の二乗に比例して増え^v、この電力は導体壁面で熱になってしまう^{vi}。これを極力減らすため、加速空胴の設計時にはシャントインピーダンスをなるべく高くするようにする^{vii}。しかしこれにも限界があるので、高電界強度が要求される場合^{viii}は間欠運転を行って^{ix}平均電極を下げる。これは一つには電源の供給能力に限界があるからであり^x、また、導体壁面での発熱の除熱にも限界があるためである（図12参照）。

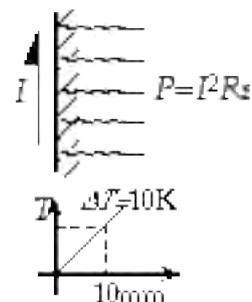


図12 導体表面で発生した熱は導体内部を通った後、取り去られる。

^{iv} 空胴のサイズは扱う電界の基本波成分の（半）波長程度のサイズになる。

^v 電圧を10倍するには100倍の電力が必要となる。

^{vi} Wall loss ともいう。

^{vii} 他にも、電場分布の一樣性（安定性）を確保する等の考慮が必要。また、超伝導空胴では wall loss は極めて小さいため設計方針が変わる。たとえば表面電界強度を下げる等。

^{viii} たいていの場合、加速空胴の全長は短くしたい。

^{ix} 高電界の場合は放電限界にも引っかかるが、これもショートパルス化により緩和できる。

^x これには高周波の供給源としての電源（クライストロンなど）だけでなくおおもとの発電所も含む。

連続運転が必要な場合は後者から限界が生じる。実際非常に粗い見積もりとして銅の熱伝導のみによる制約を見積もると、熱伝導率 κ を $\kappa=400\text{W/m/K}$ とし、銅表面から内部への距離 1cm のところで 10K ⁱⁱの温度上昇を許すとすると 400kW/m となる。前にシャントインピーダンスのオーダーを求めたときと同じようにすると、空胴の内面の面積は単位長さ(1m)あたり、 $\lambda[\text{m}^2/\text{m}]$ のオーダーなのでⁱⁱⁱ、 400λ [kW/m]のオーダーの発熱が上限となる。上記のオーダーのサイズを持つ空胴のシャントインピーダンスは $15/\sqrt{\lambda}$ [M Ω/m] 程度なので^{iv}、発生電界強度は $\sqrt{6\sqrt{\lambda}}$ [MV/m]となる。従って、連続運転でオーダーとして $3\text{MV}\cdot\text{m}^{-1}$ を大幅に越すことは難しいであろう^v。

もし加速ビーム(粒子)がかなりバンチされていればRF(ビーム)周期に対する加速電圧が必要な期間の割合が小さいはずなので、インパルス状の波形で十分ということになる。パイオンやミュオンなどの寿命の短い2次粒子の位相空間上の分布を操作(加減速)する場合はこのような波形で十分である(図13参照)^{vi}。これらの2次粒子は寿命が短いので、短距離(短時間)^{vii}で操作をおえないといけないので極めて大きな電圧勾配が必要となる。ただし、このような波形は多くの高調波成分を含むため、通常のQ値が高い空胴では、実現が難しい。もし、加速に使える共振周波数(群)^{viii}がちょうど整数倍になるようになっていざこれらの同時に励振してやるとインパルス状の波形を生成できるはずである^{ix}。N個のモードのピーク

ⁱ Continuous Wave からCW運転ともいう。なぜか wave が関係してなくても使われることがある。

ⁱⁱ 10cm離れたところからは100Kの温度上昇となる。水などの冷媒との熱伝達係数も考えるとこれより上ではかなり厳しそうである。

ⁱⁱⁱ 直径1m、長さ1mの円筒の面積は約 3m^2 。小さい方の例で、電子線型加速器に使われるディスクロード型のように直径10cm程度でも 0.3m^2 。

^{iv} 前に求めたシャントインピーダンスの値を用いている。

^v 凝った構造の空胴を導入すればシャントインピーダンスは少しは上がるが、そのような加速構造は「凝った」構造をしているので、冷却能力による制限の方が厳しくなる。

^{vi} ほとんど休んでいるので消費電力が減るはず。

^{vii} パイオンなどは光速の半分の速さで走っていても10m程度で崩壊してしまう。ミュオンはもう少し長い。

^{viii} 通常の空胴ではビームの運動方向と平行な向きに電場を持ち、加速に利用できるモード以外に、ビームを曲げたり、ビーム軸上に電場を持たないモードも多数存在する。

^{ix} 多重高調波重畳空胴と呼んでいる。MHIC(Multi-Harmonic Impulse Cavity)

の高さを同じにし、ピークが重なるような位相関係で重畳したとすると、ピークでの電圧はN倍になる。このときの消費電力はやはりN倍であり、単一モードの周波数を使った場合の N^2 倍とは好対照である。

しかし、現実に行うとすると^x、

- 1) ちょうど整数倍の共振周波数を持つこと、
- 2) 周波数ごとに違ったRF電力源(パワーアンプ)を用意し、
- 3) それぞれのモードに独立に大電力を注入する、

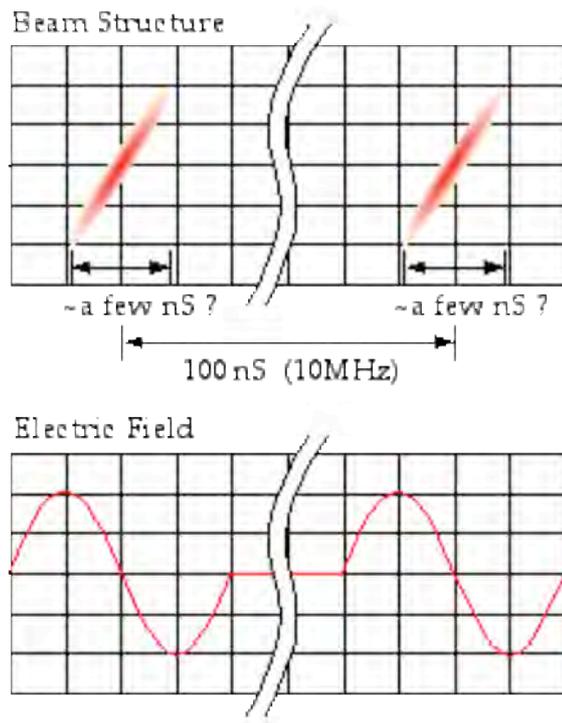


図13 細切れのビームが連続してくるときのビームの時間構造と加減速に必要な電場の時間構造

などの検討を行わないといけない。まだまだ未解決の問題があるので紹介するだけにとどめる^{xi}。

^x バンチャーなどではビームの時間構造を操作するのにサイン波ではなくてノコギリ波に近い波形を2つ程度の高調波を混ぜて発生させている例はある。

^{xi} 発想の転換などの一助になれば幸いである。

4 シミュレーションコード

前節までで等価回路などを用いて RF 空胴の具体例を紹介してきた。ここからは設計手法を中心に話を進める。じつは前節までで解説した空胴のうち、十分な取り扱いができるのは、Q 値の高い空胴のみであるⁱⁱ。

4.1 微分方程式の整理と問題の分類

与えられた任意形状の RF 空胴内の電磁場分布を求める問題は、マクスウェル方程式

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \quad (\text{eq. 24})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} + \vec{i}, \quad (\text{eq. 25})$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (\text{eq. 26})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{eq. 27})$$

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{eq. 28})$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (\text{eq. 29})$$

の境界値問題となるⁱⁱⁱ。ここで、 \vec{E} [V/m]、 \vec{H} [A/m]、 \vec{D} [C/m²]、 \vec{B} [T]、 \vec{i} [A/m²]、 ρ [C/m²]、 ϵ_0 、 ϵ 、 μ_0 、 μ はそれぞれ電場、磁場、電束密度、磁束密度、電流密度、電荷密度、真空の誘電率、比誘電率、真空の透磁率、比透磁率である。境界値問題以外に、境界を定めず無限境界で扱うアンテナ等の解析にでてくる放射問題や、導体中での変動磁場を扱う渦電流問題^{iv}もあるが、ここでは扱わない。Eq.24~28 で、 \vec{i} や ρ を与えるとすると場の変数の数は \vec{E} 、 \vec{H} 、 \vec{D} 、 \vec{B} がベクトルであることに注意すると 12 個あり、式の数、3+3+1+1+3+3=14 個になるので式の方が多すぎるように見える。そこで、eq.24 の発散をとると、

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \nabla \cdot \vec{B} \quad (\text{eq. 30})$$

となる。第一項は消えるので、

$$\partial_t \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{eq. 31})$$

となり、 $\nabla \cdot \vec{B}$ は時間の不変量であり、eq.27 は、

ⁱ 損失がないものも含める。

ⁱⁱ Q 値の低い空胴などは周波数がたいてい低いと、それほど正確な電磁場分布は必要とされないとも考えられ、場合によっては静電場近似でも良いこともある。

ⁱⁱⁱ これには逆問題（電磁場分布等を決めて形状を求める）も含まれるがこちらはあまり簡単ではない。

^{iv} シンクロトロンなどの変化する磁場中に金属製ビームパイプ（たいていはステンレスなど）を置いたときの問題。

はじめに満たされていれば常に満たされることがわかる。また同様にすると、eq.25 は

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = \partial_t \nabla \cdot \vec{D} + \nabla \cdot \vec{i} \quad (\text{eq. 32})$$

となり、左辺は消えるので、

$$\partial_t \nabla \cdot \vec{D} + \nabla \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{eq. 33})$$

が得られる。これに電荷保存則

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{i} = 0 \quad (\text{eq. 34})$$

を使うと、

$$\partial_t (\nabla \cdot \vec{D} - \rho) = 0 \quad (\text{eq. 35})$$

となり、eq.26 もはじめに満たされていればよい。従って、eq.24~25、eq.28~29 を基本に解いてゆくことになる^{vi}。

境界値問題もいくつかに分類され、時間変化を含まない静電場/静磁場問題、時間発展を追う初期値問題（時間領域）、共振状態の場を解く固有値問題（周波数領域）などに分けられる。静電場/静磁場問題では、時間微分がゼロとなり、電場と磁場が独立な方程式系で書ける^{vii}ので、それぞれ独立の解を重ね合わせてすべての解を表現できる。

初期値問題はビームが空洞中を通り抜ける際に残すウェーク場等の過渡現象の解析に用いられる。また、固有値問題は空胴の共振状態を解析するのに使われる。ここではこの固有値問題を中心に話を進める。

空洞内に電荷や、電流 i のない状態を考えて eq.24 の回転と、eq.25 の時間微分をとって eq.29 をつかうと、

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \nabla \times \vec{B} \\ &= -\mu \mu_0 \partial_t \nabla \times \vec{H} \\ &= -\mu \mu_0 \partial_t^2 \vec{D} \\ &= -\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \partial_t^2 \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{eq. 36})$$

となる。 $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ であることに注意すると結局

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\epsilon \mu}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} \quad (\text{eq. 37})$$

となる。ここで、周波数領域では

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t} \quad (\text{eq. 38})$$

^v いつでも良い

^{vi} 微分方程式系としては eq.26,27 は考慮しなくても良いということ。但し、初期値、または関数形などの何らかの形で満たされるよう考慮する必要はある。

^{vii} 電場と磁場との結合がない。

の時間依存性を考えて

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_0 = \varepsilon \mu \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{E}_0 = \varepsilon \mu k^2 \vec{E}_0 \quad (\text{eq. 39})$$

の形ⁱにして扱う。ここで、 $k = 2\pi/\lambda$ で波数と呼ばれる。Eq.39 は固有値が $\varepsilon \mu k^2$ の固有値問題である。同様の式が磁場に関しても得られ、

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}_0 = \varepsilon \mu \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{H}_0 = \varepsilon \mu k^2 \vec{H}_0 \quad (\text{eq. 40})$$

となり、全く同じ形になるのでどちらを解いても良い。残った方の場の量は eq.24 か eq.25 のどちらかを用いれば求まる。但し、これらは境界値問題であるので、それぞれ、 \vec{n} を法線ベクトルとする導体表面で、

$$\vec{E}_0 \times \vec{n} = 0 \quad (\text{eq. 41})$$

または、

$$\vec{H}_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{eq. 42})$$

という境界条件を満たす必要がある。空洞の場合、現実に実現可能なのはこの境界条件だけであるが、対称性がある場合、計算上、問題とする領域を減らすことができる。導体表面では磁場が鏡像対称になっているが、電場が鏡像対称になるような面を考えることができ、

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{eq. 43})$$

または、

$$\vec{H}_0 \times \vec{n} = 0 \quad (\text{eq. 44})$$

という境界条件も与えられる。これらの対称面は通常座標軸に直交した面なので、3次元の場合、問題を最大ⁱⁱ八分の一の領域に縮小できる。

無限に長い構造ⁱⁱⁱでも、周期性があれば周期境界条件^{iv}を導入することができ、左右に周期長分平行移動した境界面を考えて

$$\vec{E}_0^{left} = e^{j\phi} \vec{E}_0^{right} \quad (\text{eq. 45})$$

$$\vec{H}_0^{left} = e^{j\phi} \vec{H}_0^{right} \quad (\text{eq. 46})$$

という境界条件を与えて有限の領域内^vの問題に焼き直すことができる。

さらに、並進対称性や、軸対称性があると、それぞれ、2次元問題、軸対称問題として扱うことができ、3次元問題と比べて少ない計算量で解くことができるようになる。これは境界がその並進方向^{vi}に変化しないということなので、変数分離が可能となるからである。座標に関する2階の微分方程式なので、並進方向への依存性はどちらも三角関数で記述できる。

4.2 直交座標による表示

4.2.1 成分表示

回転を成分ごとに分けて具体的に書き下すと、

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 47})$$

従って、Eq.39 の左辺は

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 48}) \\ &= - \begin{pmatrix} \partial_y^2 + \partial_z^2 & -\partial_x \partial_y & -\partial_x \partial_z \\ -\partial_x \partial_y & \partial_x^2 + \partial_z^2 & -\partial_y \partial_z \\ -\partial_x \partial_z & -\partial_y \partial_z & \partial_x^2 + \partial_y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。ベクトル公式からも導かれるが、

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x^2 & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z \\ \partial_x \partial_y & \partial_y^2 & \partial_y \partial_z \\ \partial_x \partial_z & \partial_y \partial_z & \partial_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ &= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (\text{eq. 49}) \end{aligned}$$

と変形できる。第一項はゼロなので結局 eq.39 は

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \varepsilon \mu k^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{eq. 50})$$

ⁱ ベクトル版 Helmholtz の方程式

ⁱⁱ 本当は最小というべきか？

ⁱⁱⁱ 実用上無限に長いと見なせる場合。

^{iv} Floquet の定理を使う。

^v 一周期分

^{vi} 2次元なら Z、軸対称なら θ 方向。

と書いて、各成分ごとに

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)E_0 + \epsilon\mu k^2 E_0 = 0 \quad (\text{eq. 51})$$

を考慮すればよい形になっている。但し、境界では境界条件のために、お互いの結合がある。たとえば、境界が

$$x + y = 1 \quad (\text{eq. 52})$$

で表される導体面であったとすると電場はこれに垂直なので、

$$E_x = E_y \quad (\text{境界上で}) \quad (\text{eq. 53})$$

という条件が課せられるので、全く独立というわけではないⁱⁱ。

4.2.2 二次元

もし、 z 軸方向に並進対称性ⁱⁱⁱがあれば、次のように置き^{iv}、

$$E_z(x, y, z) = E_z(x, y)e^{j\alpha z} \quad (\text{eq. 54})$$

eq.51 に代入すれば、

$$\left\{ (\partial_x^2 + \partial_y^2) - \alpha^2 + \epsilon\mu k^2 \right\} E_z(x, y)e^{j\alpha z} = 0 \quad (\text{eq. 55})$$

となる。 $e^{j\alpha z}$ はゼロにならないので、落とすと、

$$\left\{ (\partial_x^2 + \partial_y^2) - \alpha^2 + \epsilon\mu k^2 \right\} E_z(x, y) = 0 \quad (\text{eq. 56})$$

となる。 α がゼロの時つまり、

$$\left\{ (\partial_x^2 + \partial_y^2) + \epsilon\mu k^2 \right\} E_z(x, y) = 0 \quad (\text{eq. 57})$$

の固有値を $\epsilon\mu k_0^2$ とすると^v、これと同じ $E_z(x, y)$ で α はゼロから無限大までの値をとり、周波数としては、

$$f = \frac{ck'}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{k_0^2 + \frac{\alpha^2}{\epsilon\mu}} \quad (\text{eq. 58})$$

という値をとる。 α がゼロの時の周波数が導波管

の時の遮断周波数となる。このとき、他の成分 $E_x(x, y)$ 、 $E_y(x, y)$ をゼロとすると eq.50 を満たす^{vi}。このとき磁場成分は eq.24 より求められて、 H_z はゼロである^{vii}。磁場成分が横方向のみなので、TM モード^{viii}、または電場成分が縦方向（軸方向）のみなので、E モードと呼ばれる。

磁場の場合も同じように定式化できて、 Z 成分 H_z だけがゼロでない解が求まる。こちらは電場成分が横方向のみなので、TE モード^{ix}、または磁場成分が縦方向（軸方向）のみなので、H モードと呼ばれる。

4.3 円筒座標の場合

ビームを加速するという性格上、加速空洞は円筒対称であることが多い。このため、円筒座標系を使うと便利である。一般には空洞は軸対称でも内部の電磁場は軸対称ではないが、加速に使われるモードは軸対称なモードがよく使われるため、歴史的には軸対称なモードを解くコードから開発された^x。

4.3.1 成分表示

円筒対称性から場の成分に次のような θ 依存性が仮定できる^{xi}。

$$\vec{E}(\theta, r, z) = \begin{pmatrix} E_\theta(r, z) \sin m\theta \\ E_r(r, z) \cos m\theta \\ E_z(r, z) \cos m\theta \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 59})$$

$$\vec{H}(\theta, r, z) = \begin{pmatrix} H_\theta(r, z) \cos m\theta \\ H_r(r, z) \sin m\theta \\ H_z(r, z) \sin m\theta \end{pmatrix} \quad (\text{eq. 60})$$

直交座標の時と同じようにすれば良いので、ここでは細かい式は省く。結果だけ示しておく、直交座標の時と同じように TE モード、と TM モードが得られるが、加速によく使われるのは TM₀₁₀

ⁱ 本来は平行な成分がゼロということなので垂直もしくはゼロ。

ⁱⁱ 各軸方向に進む平面波の重ね合わせを考えて境界上で境界条件を満たすように各平面波の成分が重ね合わせで調整されるとも見える。

ⁱⁱⁱ 導波管などの断面が長さ方向に均一な構造の場合。

^{iv} 境界条件が Z に依存しないので、 $\vec{E}(x, y)$ の部分が境界条件を満たせばよい。 Z 成分をとったのは、導体表面なら $E_z(x, y) = 0$ とするだけで境界条件を満たすことができるため。

^v これも無限にある。

^{vi} $E_z(x, y)$ はゼロでない解なので、すべてゼロという自明の解にはならない。

^{vii} 確かめよ。

^{viii} Transverse Magnetic Mode

^{ix} Transverse Electric Mode

^x 軸対称な場合には変数の量が減るので、計算機の能力に限りがあった時代には重要なことであった。

^{xi} SUPERFISH では軸対称な解しか扱わないので、 $m=0$ 、で $E_\theta(r, z)$ または、 $H_\theta(r, z)$ を使って解く。

モードであるⁱ。

4.4 重みつき残差法

上の例では z 軸方向（または θ 軸）の並進対称性のみを仮定した。従って、境界は任意形状の2次元境界である。微分方程式 eq.57 は一般には解析的には解けないので、近似的（数値的）に解くことになる。このため、微分方程式を領域のいたるところⁱⁱで満たすわけではなくなる。しかし、その誤差を十分小さくできれば実用上問題なくなる。たいていの手法は適当な試行関数をとって適当な重みで残差を積分したものをゼロにするという重みつき残差法ⁱⁱⁱである。Eq.39 の場合は

$$\int_{\Omega} W \left\{ \nabla \times \nabla \times \vec{E}_0 - \epsilon \mu k^2 \vec{E}_0 \right\} dV = 0 \quad (\text{eq. 61})$$

または、

$$\int_{\Omega} \vec{W} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{E}_0 dV = k^2 \int_{\Omega} \epsilon \mu \vec{W} \cdot \vec{E}_0 dV \quad (\text{eq. 62})$$

である。ここで、 \vec{W} が重み関数、 \vec{E}_0 が試行関数で、 Ω は全領域である。試行関数としては境界条件を満足させるが微分方程式は満足させない内部法、試行関数としては微分方程式は満足させるが境界条件を満足させない境界法や、どちらも満足しない混合法がある。Eq.60 の左辺にベクトルの公式を適用し、ガウスの定理を使うと、

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \times (\nabla \times \vec{E}_0) \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}_0) dV = k^2 \int_{\Omega} \epsilon \mu \vec{W} \cdot \vec{E}_0 dV \quad (\text{eq. 63})$$

が得られる。ここで、 Γ は境界である。微分方程式を満たすような試行関数を使うと、Eq.61 の面積分の項のみが残り、

$$\oint_{\Gamma} \vec{W} \times (\nabla \times \vec{E}_0) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{eq. 64})$$

を扱う境界法となる。これはあらかじめ周波数が解っていないと試行関数が作れないので^{iv}、空胴の設計にはあまり用いられない。

また、境界条件を満たす試行関数を選ぶ内部法では、まず、境界条件より、導体表面では

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = 0, \quad \vec{H}_0 \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{eq. 65})$$

である。Eq.61 の面積分の電場の回転の項は eq.24 から磁場に平行なので^v、消える。また、対称境界面なら、

$$\vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = 0, \quad \vec{H}_0 \times d\vec{S} = 0 \quad (\text{eq. 66})$$

となるが、ベクトル三重積の公式を使うと、

$$\vec{W} \times (\nabla \times \vec{E}_0) \cdot d\vec{S} = \vec{W} \cdot (\nabla \times \vec{E}_0) \times d\vec{S} \quad (\text{eq. 67})$$

なので、やはり、消えてしまう。従って境界条件を満たした試行関数を使うと、

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}_0) dV = k^2 \int_{\Omega} \epsilon \mu \vec{W} \cdot \vec{E}_0 dV \quad (\text{eq. 68})$$

の形式に帰着される。内部法では通常、領域を分割して、その各領域内で重みつき積分を行う。

ここで最も簡単と思われる一次元の弦の例を示す。微分方程式は

$$\partial_x^2 \varphi(x) + k^2 \varphi(x) = 0 \quad (\text{eq. 69})$$

を考え、境界条件は

$$\varphi(0) = 0 \quad (\text{eq. 70})$$

$$\varphi(1) = 0 \quad (\text{eq. 71})$$

とする。解析解は

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sin(\pi n x) \\ k^2 = (\pi n)^2 \end{cases} \quad (\text{eq. 72})$$

である。従って最低次の k^2 として $\pi^2 \sim 9.87$ となる。試行関数 φ として、

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ c_1 (1-x) & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (\text{eq. 73})$$

という区分線形近似関数をつかう^{vi}。重み $W(x)$ を掛けて部分積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^1 W(x) \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) dx + k^2 \int_0^1 W(x) \varphi(x) dx \\ &= \left[W(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dW(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + k^2 \int_0^1 W(x) \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (\text{eq. 74})^{\text{vii}}$$

ここで重み関数 $W(x)$ を 1 と置くと、

ⁱ これらの軸対称モードをモノポール（単極子）モードと呼ぶ場合があるが、 $m=2$ が quadrupole、 $m=1$ が dipole、とくれば $m=0$ はモノではなく zeropole/nullpole あたりであるべきか。

ⁱⁱ 境界も含めて

ⁱⁱⁱ Method of Weighted Residual

^{iv} 作れたとしても通常の固有値問題として扱えない。

^v 等方性媒質の場合

^{vi} 領域を二分割するわけである。扱っているのは固有値方程式なので、定数倍は関係ないが、中間点を増やす際の一般性を持たせている。自由度が一つなので、固有値も一つである。

^{vii} 2階微分のままでは区分線形近似が使えない。

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=1} - \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=0} + k^2 \int_0^1 \varphi(x) dx \\ & = -2c_1 + k^2 c_1 / 4 \end{aligned} \quad (\text{eq. 75})$$

となり、 k^2 として 8 を得る。また、ここで重み関数 $W(x)$ に試行関数 φ と同じものを使うⁱと、

$$\begin{aligned} & -\int_0^1 \frac{dW(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + k^2 \int_0^1 W(x) \varphi(x) dx \\ & = -c_1^2 + k^2 c_1^2 / 12 \end{aligned} \quad (\text{eq. 76})$$

となり、 k^2 として 12 を得る。最後に重み関数 $W(x)$ として、

$$W(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < \frac{1}{4}) \\ 1 & (\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}) \\ 0 & (\frac{3}{4} < x \leq 1) \end{cases} \quad (\text{eq. 77})$$

をとるとⁱⁱ、

$$\begin{aligned} & -\int_0^1 \frac{dW(x)}{dx} \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + k^2 \int_0^1 W(x) \varphi(x) dx \\ & = -\int_0^1 (\delta(x - \frac{1}{4}) - \delta(x - \frac{3}{4})) \frac{d\varphi(x)}{dx} dx + k^2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} W(x) \varphi(x) dx \\ & = -2c_1 + \frac{3}{16} k^2 c_1 \end{aligned} \quad (\text{eq. 78})$$

となりⁱⁱⁱ、 k^2 として ~10.7 を得る^{iv}。他にもディラックのデルタ関数を重みとして使う選点法や、座標のべき乗を重みとして使うモーメント法がある。

いずれにしてもこの手の計算は分割によって精度が変わってくる。分割の粗さによる周波数の誤差は分割サイズの二乗に比例する^vので、精度の高

ⁱ 有限要素法に対応する (Galerkin 法)。

ⁱⁱ 変数の近傍だけ 1 になるような階段関数。この例の場合は境界値が与えられているので、隣の変数はないが、ある場合は、その中央で値が入れ替わるような階段関数を隣の変数では使う (右図点線)。部分領域法に対応する。

ⁱⁱⁱ 階段関数の微分なので、ディラックのデルタ関数としてあつかう。また、わざわざ階段関数を微分しなくても、eq.74 の左辺で、積分区間を $[0,1]$ から $[1/4,3/4]$ にするだけでもよい。

^{iv} 実は SUPERFISH など扱っている重み関数 \bar{W} は、この最後の例に近いので、周波数精度は同等の領域区分をした場合、他の方法と比べて少し良い値を出す。R.Gluckstern によれば、この重み関数を修正すれば誤差をゼロにすることはできるが、かなりトリッキーな関数形となる。

^v 境界がなめらかでとがった角がないこと。角がある場合は、収束は遅くなる。たいていの空洞は放電を避けるため角がないのが普通である。

い計算をしようとするすると三点以上分割を変えて計算し、その収束状況を二次関数で最小二乗法等で fit すればよい結果が得られる。^{vi}次に SUPERFISH での実例を示す。

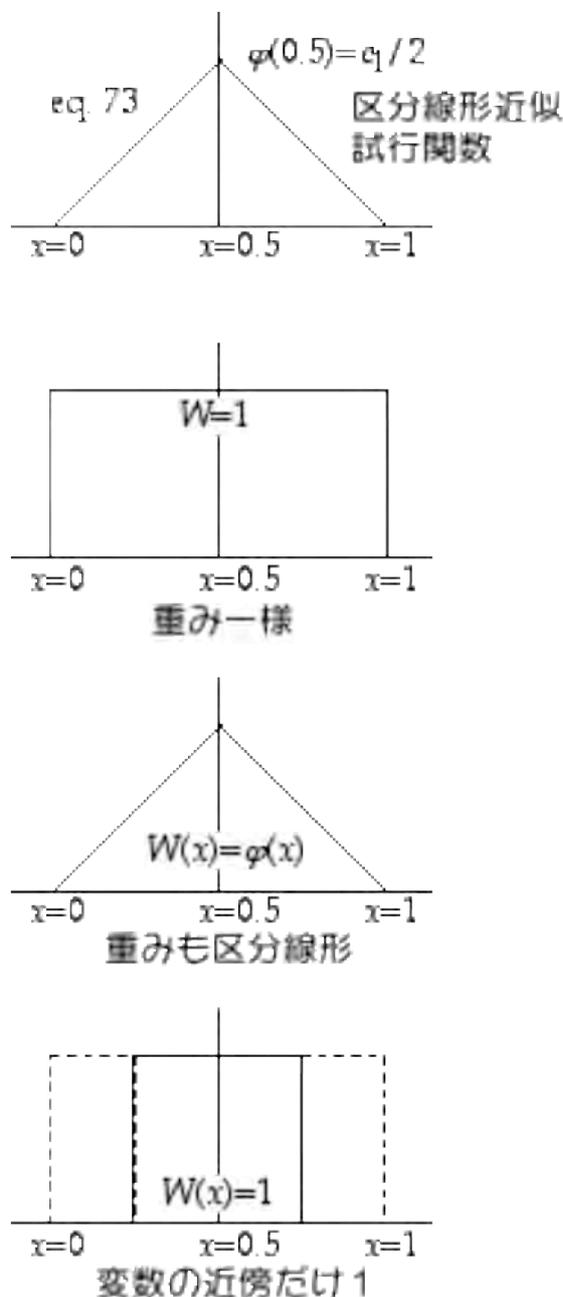


図 14 試行関数と重み関数

^{vi} 2 次関数といっても、 $x=0$ の近傍で傾きがゼロになるので、 $y=ax^2+b$ という関数形となる。従って未知数は 2 つだが、最小二乗法での誤差評価のためには 3 点はほしい。

4.5 SUPERFISH における周波数の収束

例として単純な円筒空洞の周波数の収束状況を示す。解析解は 1370.514MHz なので、fitting を使うことにより、メッシュサイズが粗めでも、かなり良く一致するといえる。

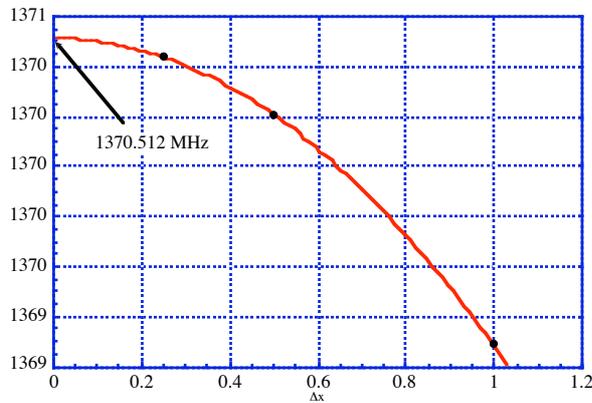


図 15 SUPERFISH におけるメッシュサイズによる周波数誤差

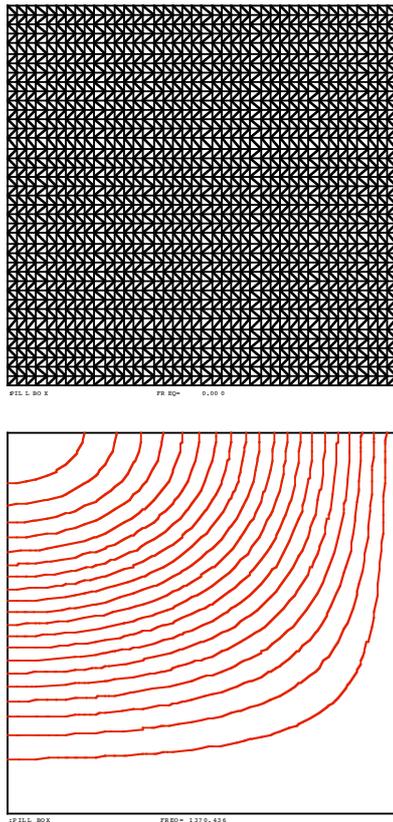


図 16 長さ 20cm の円筒空洞計算用メッシュ及び、TM011 モードの電気力線のプロット($\Delta x=0.25$)

4.6 SUPERFISH 使用時の実際

POISSON/SUPERFISHⁱについては「磁石の設計と磁場の数値解析入門」のコマのIII-Appendix-1でかなり詳しく説明されている。但し、FRONTのKeyWordリストⁱⁱではSUPERFISHに関しては省かれているので、これの補足を中心に解説するⁱⁱⁱ。

4.6.1 キーワード補足

BETA β

粒子の速さ。光速を c として $v=c\beta$ 。Default はセル長を求めた周波数で横切ののに位相が 180 度進む速さ。(GAPCON 参照)

BOUNDARY t b r l

default 値が POISSON と異なる^{iv}。
default: 1 0 1 1

DTLIN l d g h r n b a m p

通常のドリフトチューブライナックを記述するためのパラメータを指定。l:全セル長、d:セル直径、g:G a p長、h:ドリフトチューブ直径、r:コーナー曲率半径、n:ノーズ曲率半径、b:ポア半径、a:フェースアングル (ここでは省略)

EAXIS enorm

SFO1で諸量(発熱など)を求めるときに、軸上平均電場をこの値で規格化する。VSCALEと同じ^v。
Default: 1e6

FISH

SUPERFISH を起動する。キーワードに POISSON がなければ FISH が指定される。

FREQUENCY

求めたい固有周波数の初期値(MHz)。
Default: 0

ⁱ いろいろなバージョンがあるので、多少の違いがあるが、ここでは Rel4.1.2 を基準に話を進める。

ⁱⁱ どのキーワードも内部では最初の 4 文字しか見ていない。

ⁱⁱⁱ あまり一般的でないと思われるものは省いた。

^{iv} 軸対称問題で $r=0$ から始まっている場合は b は常にゼロ。同軸空洞のように、空洞の境界が $r=0$ にならないときは b は 1 になる (TM₀モードの時)。そのとき TE₀モードを解こうと思うと 0 にしなければならない。

^v 両方指定すると後の方が優先される。

GAPCON zctr dphi

transit time factor を計算するのに使う値。
zctr: 原点の z 座標、dphi: セルを横切る間の位相変化量。
default: zctr=0.cm dphi=180.

POWER

境界表面で、電界強度や、消費電力等の計算をするセグメントを指定する。数え方に注意が必要(後述)。負の値を指定すると、半径 rstem のステムを摂動として電力などを計算する。

RDRIVE rdrive

固有値問題は斉次方程式なので、SUPERFISH では変数の一つを固定し、非斉次方程式にして連立方程式として解きながら一種のデターミナントサーチの要領で固有値を求める。この変数を座標で指定する。(zdrive, rdrive)の場所の変数が指定されるⁱ。場の変数ⁱⁱの絶対値がなるべく大きい場所を指定するべきであり、たいていは半径の一番大きいところとなるⁱⁱⁱ。

RFQ

R F Qを扱うときに指定する。

RSTEM rstem

ドリフトチューブのステムの半径を指定する。
default: rstem=1cm

SCAN f1 f2 n ^{iv}

f1[MHz]から f2[MHz]の間を n-1 分割して $D(k^2)$ の値を計算する(k は波数, $k=2\pi f/c$)。 $D(k^2)$ が正から負に変わるところが共振点となる。k (f)ではなくて、 k^2 (f²)を等分するので、周波数に関して等間隔にはならない^v。 FREQ と同時に指定してはいけない。

ⁱ LosAlamos の古いバージョンではセグメント番号で指定していた。

ⁱⁱ TM_0 なら磁場、 TE_0 なら電場。

ⁱⁱⁱ 良くある間違いに BOUNDARY でゼロを指定していながらそこにドライブポイントを持ってきたりすることがある。そうすると、境界条件に反する事になり正しい解が求まらない。

^{iv} 最新のバージョンには Rel.4.1.2 にはバグがあり、パッチを当てないと正常には機能しない。ワークステーション版にはこのほかにもいくつかバグが見つかっている。現在 Los Alamos でサポートされている PC 版では修正されているはずである。

^v 等間隔になったものも見たことがある(バージョンによる)。

VSCALE vscale

EAXIS に同じ。

XDRIVE xdrive

RDRIVE 参照

YDRIVE ydrive

RDRIVE 参照

ZDRIVE zdrive

RDRIVE 参照

Z座標は X 座標と、R 座標は Y 座標と同一視される。SUPERFISH で軸対称問題を解くときは X 軸が回転対称軸になるが、POISSON/PANDIRA で軸対称問題を解くときは Y 軸が回転対称軸になるので Z 座標と R 座標の組合せでは気をつける必要がある^{vi}。

ちなみに前節の計算に使ったデータファイルは以下のようにになっている。

```
TITLE
:PILL BOX
XMESH .25
TRIANGLE 2
NSEG 4
ZSEG 10. 10. 0.0 0.0
RSEG 0.0 10. 10. 0.0
BOUNDARY 1 0 0 1
FREQ 1370.5
POWER 3 4
BEGIN
END
```

4.6.2 セグメントの数え方

XSEG や YSEG は座標を指定するが、CSEG や POWER はセグメント(点と点を結ぶ線分)を指定する。CSEG の最初の数字が指定するのは、XSEG、YSEG で指定した最後の点と最初の点とを結ぶ選分である。XREG や YREG を使うと領域(セグメント)を分断するので、POWER で指定するセグメントは CSEG とは対応しなくなる^{vii}。次の例を考えてみよう

^{vi} 常に R は縦、Z は横座標。

^{vii} CSEG を使うのは AUTHOMESH だけで、POWER の情報は LATTICE 以降で使われるため、CSEG は分割前、POWER は分割後の数え方となる。

```

TITLE
CYLINDRICAL CAVITY
FISH
XMESH 1.0
YREGION 10.
NSEG 4
XSEG 0.0 15.0 15.0 0.0
YSEG 20.0 20.0 0.0 0.0
CSEG 0.0 0.0 0.0 0.0
BOUNDARY 1 0 1 1
XDRIVE 0.
YDRIVE 20.
FREQUENCY 600.0
POWER 3 4 5
BEGIN
END

```

この例では半径方向に分割線がひとつ入っているので、ひとつよけいに数字を指定する必要がある(図 17 参照)。

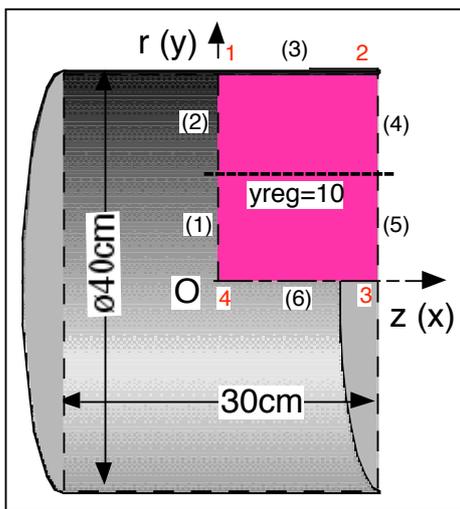


図 17 YREG を指定した場合の POWER セグメントの番号付け。括弧付きが POWER セグメントの番号。座標番号は括弧なし。

5. 緒言

前半と後半でかなり毛色が違う構成になった。時間の関係上、導入部は出来るだけ親しみやすく、かつ、実用的な事も出来るようにコードの使い方を入れた結果である。他にも、放電限界の話 (Kilpatrick Model) や、表皮効果、発熱、除熱の話、CCL(SCL,DAW)の話、PISCESII の話、時間発展を追う初期値問題などまだまだ言及すべきことがあるが、限られた時間内ですべて網羅できないので、これらは別の機会にしたい。

参考文献

OHO セミナーの中では、

- OHO'84 高周波加速装置. 山崎良成
- OHO'85 高周波空洞の設計. 肥後寿泰
- OHO'87 超伝導加速空洞. 野口修一
- OHO'88 電子線型加速器. 小林 仁
- OHO'89 陽子リニアック. 高崎栄一
- OHO'90 リニアックの基礎. 竹田誠之
- OHO'90 加速管. 松本 浩
- OHO'91 高周波加速装置. 末武聖明
- OHO'92 超伝導空洞. 光延信二
- OHO'94 R F システム. 赤井和憲
- OHO'94 高次モード減衰型空洞. 影山達也
- OHO'94 R F フィードバック. 絵面栄二
- OHO'94 超伝導空洞. 古屋貴章
- OHO'95 主ライナック
(リニアークライダにおける先端加速器技術)
- OHO'96 R F Q 線型加速器. 徳田 登
- OHO'96 大強度陽子リニアック. 加藤隆夫
- OHO'96 高周波加速空洞. 吉井正人
- OHO'96 高周波システム. 大森千広
- OHO'96 大強度ビームの発生と加速. 木代純逸
- OHO'96 円形誘導加速器. 石塚 浩
- OHO'96 線形誘導加速器の応用. 志甫 諒
- OHO'97 リニアークセラレータ入門. 福本貞義
- OHO'97 高周波加速. 高田耕治

重みつき残差法については、

B.A.フィンレイソン、「重みつき残差法と変分原理」培風館

POISSON/SUPERFISH¹については、

“Reference Manual for the Poisson/Superfish Group of Code”, Los Alamos Accelerator Code Group, LA-UR-87-126

“User’s Guide for the Poisson/Superfish Group of Code”, Los Alamos Accelerator Code Group, LA-UR-87-115

¹ POISSON/SUPERFISH については、現在、PC 版が正式にはサポートされていて、様々な改良や機能の付加が行われている。ここで説明したのはWS 版なので、そのまま適用可能ではないが、相当する機能はほとんど存在し、基本的考え方は同じなので、さほどの困難無く移行できるであろう。