

第1章 はじめに

インピーダンスやウェイク場はさまざまな教科書で説明され比較的馴染み易い分野にもかかわらず、実際に加速器を取り巻くさまざまな装置に対し応用しようとするとき全くお手上げ状態に陥り易いことが多い。これはインピーダンスやウェイク場の概念を数式だけで捉え、もっと直感的な電磁気学的理解が欠けているからだと思う。結局、計算機コードにおんぶに抱っこになってしまい、低インピーダンス装置を設計しようなどとする時に最適化作業の見通しが著しく悪い。この講義ノートの目的は、インピーダンスの発生のメカニズムをできるだけ物理的に説明することで、読者が装置の形状からどの部分がこういったインピーダンスに寄与しているかを直感的に指摘できるようになれることにある。本講義ノートは二部構成になっている。まず前半部（2—3章）でインピーダンスやウェイク場の基本的概念を勉強する。後半ではそれらの概念をいくつかの高度かつ現実的な問題に応用する。

第2章 ウェイク

2-1. 序

ビームが環境体と相互作用して出来る電磁場を加速器物理では一般にウェイクと呼ぶ。まず、どうしてウェイクができるのかを考えてみよう。

2-2. ウェイク

完全導体で出来た真っ直ぐなパイプの中心を光速で直進する粒子を考える。パイプの外側で電磁場がゼロになる様にパイプの内側の表面上に鏡像電流が誘起され、粒子との間に電磁場の雲ができる。そして全体がそのまま光速で前方に移動していく。境界の効果はこの鏡像

電流によって置き換えることができるので、以下境界の存在をわすれてもかまわない。さて、パイプの先で口径が急に広がっているとしよう（図1参照）。粒子はそのまま直進するが鏡像電流はパイプに沿ってその軌道が曲げられるだろう。その時、シンクロトロン放射を出す。これがウェイクである。広がったパイプの替りにパイプの材質が伝導率有限の物質になっていたとしよう。鏡像電流は急に減速され、前方に制動放射を出す。これもウェイクである。つまりウェイクとは鏡像電流が出す放射なのである。では放射のエネルギーはどこから来ているかと言うと、最終的には粒子からである。放射場、粒子、そして鏡像電流と粒子間の電磁場、この3つの中でエネルギーのやり取りがなされる。こうして、ウェイクを鏡像電流が出す放射と考え、その軌道を考察することで、どこでウェイクが作られ易いか等が直感的に理解できる。

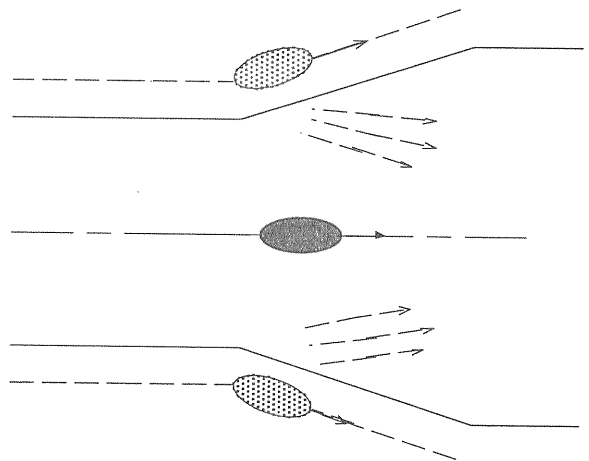


図1：鏡像電流によるウェイクの発生。

ウェイクは Maxwell 方程式を解けば求められる。しかしこれは大変な作業であり、ビーム不安定性とインピーダンスの問題を検討するとき最も多くの時間はここに費やされる。解析的にできる場合は、円形のパイプが小さく波打っている場合や、真っ直ぐなパイプが非完全導体でできている場合など極めて限られている。殆どの場合、ABCI [3]や MAFIA [4]などの計算機コードを使って計算することになる。

2-3. ウェイクポテンシャル

さて、粒子の作るウェイクが計算できた
としよう。今度はそのウェイクが粒子の（ウェ
イクを作った粒子だけでなく周りの他の粒子も
含めて）運動にどう影響を与えるかを考えてみよ
う。これは後でビーム不安定性の解析をする際
の重要なインプットになるので、解析に便利な様
にうまくパラメータ化しておく必要がある。
粒子の運動方程式を書くためには、ウェイクによ
って与えられた粒子の運動量の変化を知らなけ
ればならない。粒子がウェイクの雲の中を通過
する間に起きる軌道変化が十分に小さければ、ウ
ェイクフォースによる運動量変化の総量を知れ
ば充分である。

議論を簡単にするために、ウェイクは軸
対象構造体の中で出来るとする。対称性から電
磁場は軸の周りの角度 θ に関して $\cos m\theta$ の形に
フーリエ展開できる。次数の低い順に
monopole ($m=0$)、dipole ($m=1$) と呼ぶ。殆どの
場合、問題となるビーム不安定性はこの2つの成
分が起こすとみなして充分だが、それらの項をき
ちんと他から分離して知る必要がある。そのため
には、ウェイクを誘起する driving beam と呼ば
れる粒子の集まりを $\cos m\theta$ の電荷分布をもった
リング状にすればよい。リングの半径を r_0 とし、
リングの中心は構造体の軸上を走る。Driving
beam を次数の違うリングの重ね合わせにすると
計算は複雑になるので、実際には monopole と
dipole 場の計算はおおの別のリングを用意し
て別々に行うのが一般的である。そうして、リ
ングの電流密度を、電荷 q の点電荷が $\theta=0$ の方向
に r_0 のオフセットを持った時と同じモーメント
を持つ様に選んでおくと後で都合が良い：

$$\lambda = \frac{qc}{\pi r_0(1 + \delta_{m0})} \delta(z - ct) \delta(r - r_0) \cos m\theta \quad (2-1)$$

ここで c は光速であり、 δ_{m0} はクロネッカーの

デルタである。

次にこのウェイクから力を感じる別の
粒子 (test particle) を考える。以下図2を参照
せよ。この粒子は同じバンチの中で driving
beam を構成する粒子達と一緒に（軸と平行に）
動いている粒子を念頭にいれている。2つの軸方向
における相対的位置がウェイクを通過中にあまり
変わらないとして、

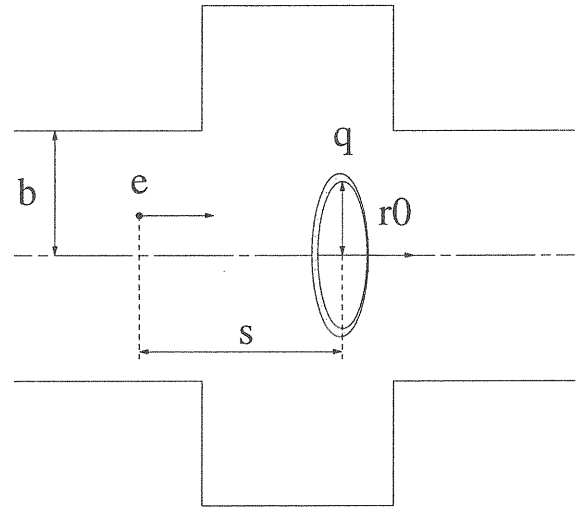


図2 : Driving beam リングと test particle との
位置関係。

その距離を s としよう。Test particle は軸から
 r だけ離れた所を走るとする。この test particle
が時間 t の時、軸方向の位置 z で受ける縦方向、
横方向（径方向）のローレンツ力を F_L , F_T とす
る：

$$F_L = eE_z \cos m\theta \quad (2-2)$$

$$F_T = e(E_r - c \cdot B_\theta) \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \equiv F_T \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \quad (2-3)$$

ここで、 \mathbf{r} は放射方向の単位ベクトルであり、
 E_z , E_r と B_θ はそれぞれ $\theta=0$ での電場と磁場の
軸方向、径方向と角度方向の成分である。Test
particle がウェイクの雲を通過中に受ける運動量
変化の総量は

$$\Delta p_z = \int_{-\infty}^{\infty} dz F_L(z, t = \frac{z+s}{c}) \quad (2-4)$$

$$\equiv -eq W_{Lm}(s) \cdot r_0^m r^m \cos m\theta$$

$$\Delta p_T = \int_{-\infty}^{\infty} dz F_T(z, t = \frac{z+s}{c})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_T(z, t = \frac{z+s}{c}) \cdot \cos m\theta \cdot \mathbf{r} \quad (2-5)$$

$$\equiv eq W_{Tm}(s) \cdot m r_0^m r^{m-1} \cos m\theta \cdot \mathbf{r}$$

で与えられる。ここでは証明を省くが、Maxwell方程式を変換すると、以上の様に定義された $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は driving beam の半径や test particle が構造体のどこを走っているかによらないことが解る[2]。 $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は構造体の形状で一意的に決まる関数で、これをウェイクポテンシャルと言う。 Driving beam は光速で走っていると仮定しているのでウェイクポテンシャルは driving beam の前方でゼロになる：

$$W_{Lm}(s) = W_{Tm}(s) = 0 \quad (s < 0) \quad (2-6)$$

Test particle の運動量変化の式 (2-4) と(2-5)をもう少し詳細に調べて見よう。

- monopole 場 (m=0)

この時、当然のことながら対称性から横方向のウェイクポテンシャルはゼロである。さて、式 (2-3) から運動量変化は driving beam のリングサイズによらない。また、運動量変化は test particle の位置にもよらない。結局、

→ Test particle の運動量変化は driving beam と test particle の相対距離だけの関数である。

- Dipole 場 (m=1)

式 (2-5) から、運動量変化は driving beam のリングサイズに比例する。また、運動量変化は自分自身の構造体の軸からのオフセットの量とその向きによらない。一方、 $\cos m\theta$ の電荷分布

をもったリングはその電流密度の選択より、構造体の軸から $\theta=0$ の方向に r_0 だけオフセットをもった電荷 q のビームを表現している。結局、

→ Test particle の運動量変化の強さは driving beam のオフセットに比例する。その向きは $W_{Tm}(s)$ が正 (負) ならば、 driving beam のオフセットの向き (逆向き) と同じである。

2-4. Panofsky-Wenzel theorem

さて、 $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ との間には Panofsky-Wenzel theorem と呼ばれる関係がある[5]：

$$W_{Tm}(s) = \int_0^s ds W_{Lm}(s) \quad (2-7)$$

この関係はこのままでは殆ど役に立たない。なぜなら $W_{Lm}(s)$ を計算できる環境にあるならば、 $W_{Tm}(s)$ も直接、定義に従って計算できるはずで Panofsky-Wenzel theorem に頼る必要はないからである。この関係はむしろ monopole 場での $W_{L0}(s)$ が計算できるが dipole 場の $W_{T1}(s)$ の計算が困難な場合や、 $W_{T1}(s)$ の直接の計算を端折りたいたときに、 $W_{L0}(s)$ から $W_{T1}(s)$ を近似的に求めるときに用いられる。よく使われる近似式は

$$W_{T1}(s) \approx \frac{2}{b^2} \int_0^s ds W_{L0}(s) \quad (2-8)$$

で、ここで b はビームパイプの内径である。また、 Panofsky-Wenzel theorem と式 (2-6) より横方向のウェイクポテンシャルは原点ではゼロであることがわかる：

$$\lim_{s \rightarrow +0} W_{Tm}(s) = 0 \quad (2-9)$$

一方、縦方向のウェイクポテンシャルの原点近傍での振る舞いはどうであろうか。

Driving beam の作ったウェイクが持つエネルギーは、driving beam のエネルギーによって補われなければエネルギーが保存されないの、結局 driving beam はウェイクによって減速される力を受ける筈である。つまり、

$$\lim_{s \rightarrow +0} W_{L1}(s) > 0 \quad (2-10)$$

エネルギー保存則を詳細に吟味すると、driving beam はそのすぐ後ろの test particle が受ける減速力の半分の力を受けることがわかる。これを“fundamental theorem of beam loading”[6]と呼ぶ。以上の結果をまとめると、縦方向と横方向のウェイクポテンシャルは一般的に図3でスケッチした様に振る舞う。

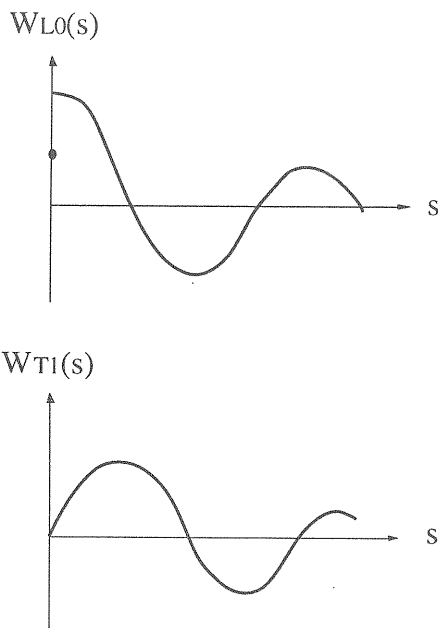


図3： 一般的な縦方向と横方向のウェイクポテンシャルのスケッチ。

さて、ここでどうして縦方向のウェイクはそれを作った driving beam に影響を与えることができるのに、横方向の場合はそれができないのかを考えてみよう。簡単のために driving beam の半径はビームパイプのそれと等しいとし、ウェイクは図2に示したような空洞で出来ると

しよう。また、縦方向の代表として monopole 場を、横方向の代表として dipole 場を考える。この章の第2節で説明した様に、ウェイクは導体の表面を走る鏡像電流からの輻射によって作られる。この輻射は当然前方にできるので、長い距離を走る内に driving beam に追い付くことができる。このことは縦方向と横方向の場合で変わらない。それではなぜ横方向の場合 driving beam はウェイクから力を受けないのか。その鍵は鏡像電流の流れ方の違いにある。縦方向の場合、鏡像電流はビームパイプ上を軸対称的に流れるが、横方向の場合、鏡像電流の polarity が上下で ($\theta=0$ と $\theta=\pi$ とで) 逆転していて、違った角度にある鏡像電流からの輻射の差が横方向のローレンツ力を作っている。従って、例えば $\theta=0$ の軌道を走る test particle は $\theta=0$ で発せられた輻射のみならず、他の部位 (例えば $\theta=\pi$) で発せられた輻射がビームパイプ上を斜めに走ってきて追い付いて始めて横方向のローレンツ力を感じるのである。この場合、 $\theta=0$ 以外での輻射の軌道は driving beam のそれより長くなるため driving beam に追い付くことはできない。つまり、driving beam はウェイクを感じないのである。

第3章 インピーダンス

3-1. インピーダンスの定義

前章で求めたウェイクポテンシャルは、ビームの振る舞いを時間領域で調べるのに都合が良く、トラッキング等を行う時に便利である。しかしビームの振る舞いを解析的に調べようとすると、周波数領域で議論した方が簡単で都合が良いことが多い。そこでインピーダンスという量を電気回路や RF での定義に沿うように定義しよう。以下、説明の簡略化のために monopole 場での縦方向インピーダンスと dipole 場での横方向インピーダンスの場合に議論を限る。実用

上、これで問題はない。まず光速で移動する電荷 q のリング状 driving beam 考え、その電流を $I(\tau)$ と書く (i.e., $I(\tau) = q\delta(\tau)$)。ここで $\tau = t - z/c$ である。このビームより距離 s だけ遅れて走る粒子がウェイクから受ける軸方向電場の積分値 (つまり電圧) は

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(z, t = \frac{(z+s)}{c}) \quad (3-1)$$

で与えられる。これは式 (2-4) を使えば

$$V(s) = -qW_{L0}(s) \quad (3-2)$$

書ける。つまりウェイクポテンシャルその物である。この電圧をフーリエ変換して周波数の関数としたものを $V(\omega)$ とし、

$$V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} V(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} = -\frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{L0}(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} \quad (3-3)$$

また電流のフーリエ変換を $I(\omega)$ とすると

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I(\tau) e^{i\omega\tau} = \frac{q}{2\pi} \quad (3-4)$$

縦方向インピーダンス $Z_L(\omega)$ は以下の式で定義される：

$$V(\omega) = -Z_L(\omega)I(\omega) \quad (3-5)$$

式 (3-3) と (3-5) より明らかな様に $Z_L(\omega)$ は $W_{L0}(s)$ のフーリエ変換である：

$$Z_L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{L0}(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} \quad (3-6)$$

Dipole 場での横方向インピーダンスも同様に定

義できる：

$$V_T(\omega) = iZ_T(\omega) \cdot r_0 I(\omega)$$

横方向ウェイクポテンシャルとは

$$Z_T(\omega) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{c} W_{T1}(s) e^{i\omega \frac{s}{c}} \quad (3-7)$$

の関係がある。ここで虚数 i が入っているのは横方向電圧の位相が電流の位相より 90 度ずれることが多いのを考慮してあるからである。

ここで注意する必要があるのは、インピーダンスの定義はあくまでも式 (3-5) であって、式 (3-6) と (3-7) はインピーダンスとウェイクポテンシャルの間の関係を示しているにすぎない。つまり、インピーダンスはウェイクポテンシャルを知らなくてもその定義から独立に計算できる。関係式 (3-6,7) からインピーダンスを計算するのは余り実際的でない。むしろインピーダンスを求めてそれからウェイクポテンシャルを関係 (3-6,7) を使って計算することはよくある。次の節でそれらの例を幾つか上げる。

3-2. インピーダンスの種類

さて、インピーダンスにはどんな種類があるのだろうか。典型的な縦方向インピーダンスを書いてみると

$$Z_L = -i\omega L + R_W \sqrt{\omega} + R_\Omega + \frac{R_c}{\sqrt{\omega}} + \dots \quad (3-8)$$

ここで第 1 項はインダクタンス、第 2 項は resistive-wall と呼ばれる伝導率有限の物質でできているパイプからのインピーダンス、第 3 項は抵抗、そして最後の項は加速空洞の全インピーダンスの高周波成分である。第 1 項で L が負の時、加速器ではキャパシタンスと呼んでいる。もう一

つ重要なインピーダンスにローレンツ型があり、加速空洞のインピーダンスはこの形で書ける：

$$Z_L(\omega) = \frac{R_L}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)} \quad (3-9)$$

$$Z_T(\omega) = \frac{R_T \frac{\omega_R}{\omega}}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)} \quad (3-10)$$

ここで R_L と R_T は縦方向と横方向のカップリングインピーダンス、 Q は Q 値で ω_R は共振周波数である。

これら代表的なインピーダンスに対応するウェイクポテンシャルは式 (3-6,7) の逆変換をすれば求まる。ここではインダクタンスとローレンツ型インピーダンスのウェイクポテンシャルを列記するに留めよう：

1) インダクタンス：

$$W_{L0}(s) = L\delta'(s/c) \quad (3-8')$$

2) ローレンツ型インピーダンス

$$W_{L0}(s) = \begin{cases} 0 & (s < 0) \\ \alpha R_L & (s = 0) \\ 2\alpha R_L e^{-\alpha \frac{s}{c}} \left[\cos \frac{\omega' s}{c} - \frac{\alpha}{\omega'} \sin \frac{\omega' s}{c} \right] & (s > 0) \end{cases} \quad (3-9')$$

$$W_{T1}(s) = \begin{cases} 0 & (s \leq 0) \\ \frac{R_T \omega_R^2}{Q \omega'} e^{-\alpha \frac{s}{c}} \sin \frac{\omega' s}{c} & (s > 0) \end{cases} \quad (3-10')$$

ここで、 $\alpha = \omega_R / (2Q)$ 、 $\omega' = \sqrt{\omega_R^2 - \alpha^2}$ である。

以上の様な形式的な説明では、インピーダンスの種類とその名前はわかって、実際にど

ういった構造体がどういうインピーダンスを作るかはよくわからない。そこでいくつかの重要なインピーダンスを簡単に求めてみよう。

3-3. インダクタンス

まずインダクタンスの説明から始めよう。ビームパイプ上に図4で示した様な小さな空洞のような構造体があり、このビームパイプの軸上をビームが通過するとする。

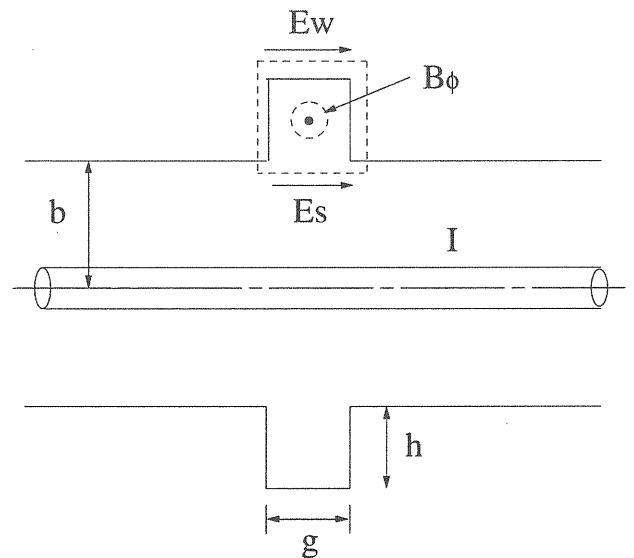


図4：小さな空洞の作るインダクタンス。

ビームと一緒に走る電磁場の内、電場はビームパイプの近傍では殆どゼロであるから、空洞の中では磁場だけを考えればよい。今知りたいのはギャップ間に立つ電場 E_s である。そこで点線で示した積分路を考える。この積分路にそっての電場の積分は空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい（ファラデーの法則）：

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3-11)$$

ビームパイプが完全導体で出来ているとすると ($E_w = 0$)、左辺はギャップ間電圧そのものである：

$$V = \int_{gap} E_s ds \quad (3-12)$$

さて問題は右辺である。ビーム電流を I とし、 $\exp(-i\omega t)$ の様に時間変化するとする。すると空洞内の磁場は（ギャップの深さはパイプの半径に対し充分小さいとして、磁場が一定と見なせると仮定）

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (3-13)$$

で与えられ、式 (3-11) の右辺は

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = i\omega \frac{\mu_0 gh}{2\pi b} I \quad (3-14)$$

となる。ここで μ_0 は真空の透磁率を表す。つまり

$$V = i\omega \frac{\mu_0 gh}{2\pi b} I \quad (3-15)$$

インピーダンスの定義よりこの小さな空洞が作るインピーダンスは

$$Z = -i\omega \frac{\mu_0 gh}{2\pi b} = -i\omega \frac{Z_0 gh}{2\pi bc} \quad (3-16)$$

となり、インダクタンスである。ここで Z_0 は真空のインピーダンス ($=120\pi$) である。このインピーダンスを、 $\omega = n\omega_0$ (ω_0 は回転周波数) を使って次の様に書くのが一般的である：

$$\frac{Z}{n} = -i\omega_0 \frac{Z_0 gh}{2\pi bc} \quad (3-17)$$

この結果はギャップ間電圧が空洞内に立つ磁場の誘導起電力によることを考えれば（つまりギャップはコイルの役割をする）容易に理解できる。

3-4. Resistive-wall impedance

次にこの速空洞の中が伝導率有限の物質で満たされているとしよう。この場合、電磁場はスキンドープ以上にはこの物質の中に入っていないので、空洞の深さがスキンドープ以上であれば、結果は空洞の深さによらないはずである。従って、いっそ空洞の深さをスキンドープにとってしまおう。この時、電場の積分路上でギャップ以外のところでも積分路に平行に電場ができる。その強さはスキンドープに比例するので空洞の放射方向での電場の積分はスキンドープの2乗に比例することになり無視できる。そこで図4の中で E_w で示された寄与だけを考える。 E_w は

$$E_w = \frac{\omega}{2} \delta(1+i) B_\phi \quad (3-18)$$

で与えられる。ここで $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$ はスキンドープである (ρ : 体積抵抗率、 μ : 透磁率)。従って

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int E_w ds \\ &= i\omega \frac{\mu_0 \delta h}{2\pi b} I - \frac{\omega}{2} \delta(1+i) h \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \\ &= -\frac{\omega}{2} (1-i) \frac{Z_0 \delta h}{2\pi bc} I \end{aligned} \quad (3-19)$$

インピーダンスは

$$Z_L = \frac{\omega}{2} (1-i) \frac{Z_0 \delta h}{2\pi bc} \quad (3-20)$$

となる。この空洞がリング一周にわたってあるとして $h = 2\pi R$ と採り (R はリングの平均半径)、また $\omega = n\omega_0$ とおくと、リング全体のインピーダンスは次のように書ける：

$$\frac{Z_L}{n} = Z_0 \left(\frac{1-i}{2} \right) \frac{\delta}{b} \quad (3-21)$$

これが縦方向の resistive-wall impedance[7]である。ビームパイプが非完全導体でできているときのインピーダンスを与える。ちなみに横方向の resistive-wall impedance は

$$Z_T = Z_0(\text{sgn}(\omega) - i) \frac{\delta R}{b^3} \quad (3-22)$$

で与えられ、大電流加速器では深刻である。

さて、縦方向の resistive-wall impedance の式 (3-20) の物理的意味合いを考えて見よう。第1項、インピーダンスの実部は抵抗を表しているが、これは次の様にして求められる。この空洞は図5の様な体積抵抗率 ρ の円筒のパイプ (半径 b 、厚さ δ 、長さ h) と考えてよく、その電気回路的な抵抗値は

$$\text{Re } Z = \frac{\rho h}{2\pi b \delta} \quad (3-23)$$

で与えられる。この中で ρ/δ は次の様に変換できる ($\mu = \mu_0$ として) :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\delta} &= \frac{\rho}{\sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}}} = \frac{\omega\mu_0}{2} \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0}} \\ &= \frac{\omega\mu_0}{2} \delta = \frac{\omega}{2} \frac{Z_0}{c} \delta \end{aligned} \quad (3-24)$$

従って、式 (3-23) は以下の様に書き換えることができる :

$$\text{Re } Z = \frac{\omega}{2} \frac{Z_0 \delta h}{2\pi b c} \quad (3-25)$$

これは式 (3-20) の第1項と同じである。つまり、式 (3-20) の第1項はこの物質の抵抗そのものである。次に第2項を見てみよう。この項はインダクタンスを与えている。この項を導出するために図5の円筒形パイプの両端に内径 b のビームパイプに繋がっていると考えよう。磁場は空洞内部で指数関数的に減衰するから、空洞の外半径

での磁場をゼロと近似すると、実効的な磁場は内部が真空の時の磁場 (3-13) の約半分ぐらいになる :

$$B_\phi = 0.5 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad (3-26)$$

後は前章のインダクタンス計算の手順通りに式を展開すればよく、結局インピーダンスの虚部は

$$\text{Im } Z = -i \frac{\omega}{2} \frac{Z_0 \delta h}{2\pi b c} \quad (3-27)$$

で与えられる。実部 (3-25) と虚部 (3-27) を合わせると式 (3-20) になる。

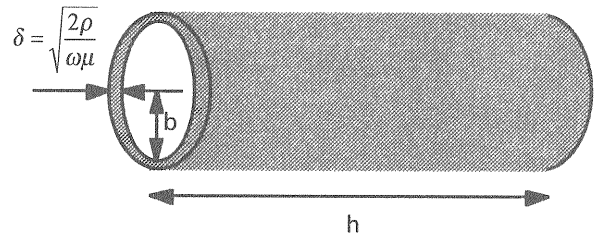


図5: Resistive-wall impedance 計算のための円筒形パイプ。

3-5. 空間電荷インピーダンス

最後に縦方向の空間電荷インピーダンスを求めよう[8]。ビーム内の粒子は他の粒子からクーロン反発力を受ける。バンチの中心から前方の粒子は前方に押し出される様な力を受け、後方の粒子は後方に押し戻される。この力は後で述べるインダクタンスの効果と逆の方向である。求め方はインダクタンスの場合と同じである。ビームパイプは完全導体で出来ているとして、図6の様な積分路を考える。 E_w は境界条件よりゼロである。インダクタンスの場合との違いは積分路がビームの内部まで入っているのでビームがあるときのビームパイプ内の電磁場をちゃんと求めておく必要があることである。また両サイドの積分も自由空間上で行なわれる

のでゼロではない。また、結果がビームの横方向分布による。一般には円筒形で内部では粒子密度が一樣な分布を考えることが多い。ここでもこのモデルを採用するが、後でパラボラ分布の時の結果も記す。

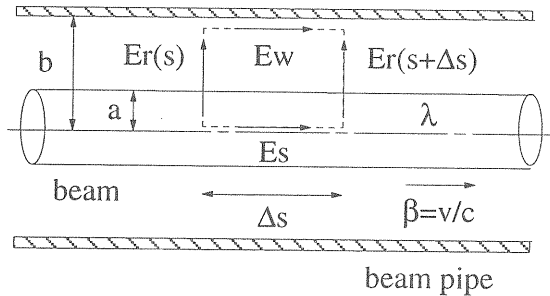


図6： 空間電荷インピーダンス計算のための積分路の取り方。

さて、円筒形ビームの半径を a とし、ビームの線密度を λ とした時に、横方向の電磁場は

$$E_r = \begin{cases} \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (3-28)$$

$$H_\phi = \begin{cases} \frac{e\lambda v}{2\pi} \frac{1}{r} & (r \geq a) \\ \frac{e\lambda v}{2\pi} \frac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \quad (3-29)$$

で与えられる。ここで、 ϵ_0 は真空の誘電率を、 $v = \beta c$ は粒子の速度を表す。インダクタンスの場合と同様に式を展開すると、最終的に空間電荷インピーダンスは次の様に書けるのがわかる（質問：以下の公式を導け）：

$$\frac{Z}{n} = \frac{Z_0 g_0}{2\beta\gamma^2} \quad (3-30)$$

ここで

$$g_0 = 1 + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (3-31)$$

はジオメトリカルファクターであり、ビームの分布関数が違うとこのファクターが変わる。パラボラビームの場合（ a は一番端でのビームの半径）、

$$g_0 = 1.5 + 2 \ln \frac{b}{a} \quad (3-32)$$

になる。ここで、 γ はビームのローレンツファクターである。式 (3-30) を見るとインダクタンスとは負号が逆なことに気がつくだろう。また γ^2 ファクターのため高エネルギーでは効かなくなることもわかる。このファクターは電場と磁場の寄与が高エネルギーでは打ち消し合うために起こる（電場は押し出そうとし、磁場は押し戻そうとする）。

3-6. インピーダンスの性質

この章を終える前に、後でビーム不安定性を考える時に役立つ大事な指摘をしておく、 ω が正と負の領域でのインピーダンスの間にはウェイクポテンシャルが実数であるために、次の関係がある：

$$Z_L(-\omega) = Z_L^*(\omega) \quad (3-33)$$

$$Z_T(-\omega) = -Z_T^*(\omega) \quad (3-34)$$

縦方向の場合、インピーダンスに周波数を掛けたり割ったりしたものがビーム不安定性の公式に現れることが多いので、実際には横方向と同じポラリティを持つと考えた方が都合が良い。図6に今までに求めた縦方向のインピーダンスを周波数の関数として概念的に示した。また、第2章の Panofsky-Wenzel theorem の項で披露した、 $m=0$ の縦方向ウェイクポテンシャルと $m=1$ の横方向ウェイクポテンシャルを関係づける便利な式 (2-7) に対応して、両インピーダンスを

関係づける次の近似式がよく使われる：

$$Z_T \equiv \frac{2c}{b^2} \frac{Z_L}{\omega} \quad (3-35)$$

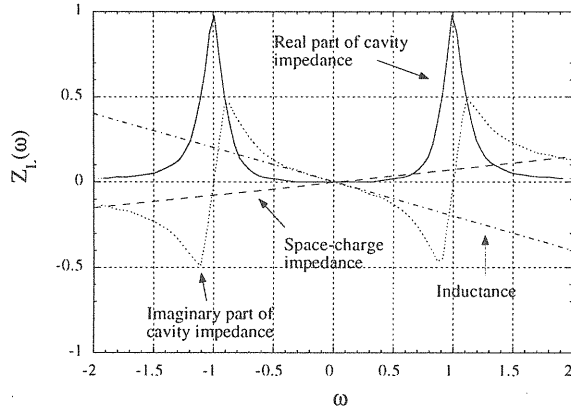


図7：縦方向のインピーダンスの概念図。横方向インピーダンスでは負の周波数部分が上の絵に対して反転している（図14参照）。

第4章 積分路

前章まででウェイク場とインピーダンスの基本概念を勉強してきた。次にもっと高度でかつ現実的な問題に移ろう。

4-1. 通常の積分路

解析的にウェイクポテンシャルが計算できる場合はむしろ限られていて、多くの現実的な問題では、計算機コードを使ってウェイクポテンシャルを計算する必要がある。例として両端に同じ口径のビームパイプがついている空洞の様な構造体を考えてみよう。

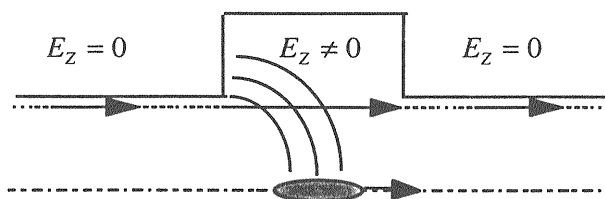


図8：空洞の様な構造体とビームダクトに沿った

積分路。

この構造体を作るウェイクポテンシャルは式(2-4)と(2-5)に従ってローレンツ力を積分することで原理的には計算することができる。しかし、積分はビームパイプの無限の彼方の上流から無限の彼方の下流に渡って行われなくてはならない。これはウェイク場がビームパイプの中を伝播し、非常に長い距離に渡ってビームと相互作用しているためである。この長距離に渡るプロセスを計算機で正確にシュミレートすることは、多大な計算時間と計算機メモリを必要とするためあまり現実的ではない。この問題を解く一つのトリックがある。式(2-4)と(2-5)から明らかな様にウェイク場による test particle の運動量変化の総量は、径方向位置 (r)、軸の周りの角度 (θ)、test particle と driving beam の相対距離 (s) のそれぞれの関数の積で表される。特に monopole 場 ($m=0$) における軸方向運動量変化と dipole 場 ($m=1$) における横方向運動量変化は test particle の径方向位置に全くよらない。これはつまりウェイク場の積分をどの放射方向位置で行っても結果は同じだということである。それならば、最も効率の良い積分路はビームパイプの表面に沿った直線である。なぜなら、

1. 完全導体であるビームパイプの表面では $\int E_{\perp} dz = 0$
2. Panofsky-Wenzel theorem によりビームパイプの表面では $W_{tm} = 0$

だからである。従ってウェイクポテンシャルは構造体のギャップに沿った積分だけで求まる。また、ウェイク場とビーム間の相互作用を長距離に渡って正確にシュミレートする必要がないために、短いビームパイプを構造体の両端に付けてウェイク場の計算を行うだけで正しい結果が得られる。

4-2. Napoly 積分

ビームパイプの表面に沿った直線上で行う通常の積分の仕方は以下の様な構造体には適用できない：

1. アイリス - 構造体の一部がビームパイプの径より小さいところに突き出ている。
2. Step-in 或は step-out 構造体 - 両端のビームパイプの径が違う。

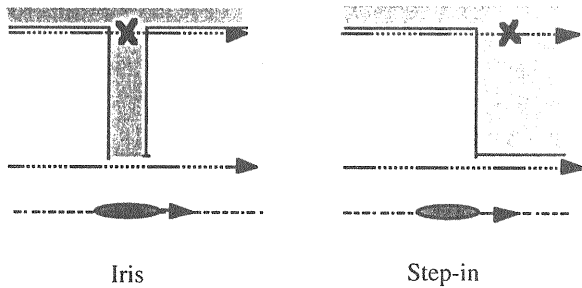


図 8 : アイリスと step-in 構造体。

これらの場合、積分路を構造体にぶつからない様にビーム軸に近づけてやなければならない。この問題は随分長い間に渡り、計算機を使ってウェイクポテンシャルを計算する上での古典的な問題であった。 精確にウェイクポテンシャルを計算する唯一の方法は、長いビームパイプを構造体の両端につけてウェイク場を計算することであった。 その解決方法として、Napoly は構造体の表面に沿って迂回する新しい積分路を見つけた。 これによって、両側に走るビームパイプからのウェイクポテンシャルの寄与がなくなり、再び構造体のギャップに沿った有限長の積分だけでウェイクポテンシャルが求まるようになった (図 9 と 10 を参照せよ) [9]。

直線に沿った積分と図 9 と 10 で示した積分路 C (Napoly-Zotter 積分路) に沿った積分とは等価である：

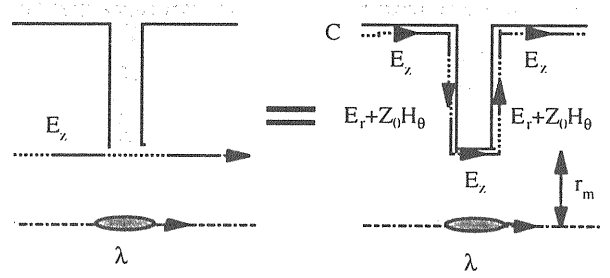


図 9 : Napoly 積分とアイリス構造体に於ける迂回積分路。

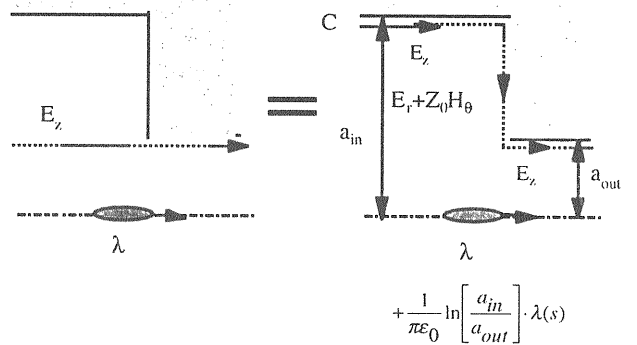


図 10 : Napoly 積分と step-in 構造体に於ける迂回積分路。

$$\begin{aligned}
 W_{L0}(s) &= - \int_{-\infty}^{\infty} E_z(r, z, t = \frac{z+s}{c}) dz \\
 &\equiv - \int_C [E_z dz + (E_r + Z_0 H_\theta) dr] \quad (4-1) \\
 &\quad + \frac{1}{\pi \epsilon_0} \ln \left[\frac{a_{in}}{a_{out}} \right] \cdot \lambda(s)
 \end{aligned}$$

ここで、 a_{in} と a_{out} はそれぞれ上流と下流のビームパイプの半径を、 Z_0 と ϵ_0 はそれぞれ真空のインピーダンスと誘電率を表す。また、 $\lambda(s)$ はビームの軸方向線電荷分布を表す。 ウェイク場計算コード ABCI ではこの Napoly 積分を使ってウェイクポテンシャルを計算することができる。 式 (4-1) の第 2 項

$$\frac{1}{\pi \epsilon_0} \ln \left[\frac{a_{in}}{a_{out}} \right] \cdot \lambda(s) \quad (4-2)$$

は両端にある二つのビームパイプの中でのビームを取り巻く電磁場のポテンシャルエネルギー

の差を表している。この項は周波数に依らない抵抗インピーダンスを形成する。しかしこの項は Robinson 不安定性には寄与しないし、ビームがリングの出発点に戻った時にキャンセルされるのでロスファクターにも寄与しない。

Dipole 場での横方向ウェイクポテンシャルは縦方向ウェイクポテンシャルから Panofsky-Wenzel theorem を使って次の様に求まる：

$$W_{T1}(s) = \int_0^s \frac{\partial}{\partial r} W_{L1}(r, s) ds \quad (4-3)$$

ここで

$$W_{L1}(r, s) = -\frac{r}{2qa_m c} \int_c \left\{ \begin{array}{l} E_z \cdot \left(\frac{a_{in}}{r'} + \frac{r'}{a_{in}} \right) \\ -Z_0 H_z \cdot \left(\frac{a_{in}}{r'} - \frac{r'}{a_{in}} \right) \end{array} \right\} dz + \left\{ \begin{array}{l} (E_r + Z_0 H_\theta) \cdot \left(\frac{a_{in}}{r'} + \frac{r'}{a_{in}} \right) \\ + (E_\theta - Z_0 H_r) \cdot \left(\frac{a_{in}}{r'} - \frac{r'}{a_{in}} \right) \end{array} \right\} dr' + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} r_0 r_m \left(\frac{1}{a_{in}^2} - \frac{1}{a_{out}^2} \right) \cdot \frac{\lambda(s)}{q} \quad (4-4)$$

である。この場合の Napoly-Zotter 積分路は図 9 に示してある。

Napoly 積分はある面白い結論を導く。それはアイリスの様な構造体では、無限距離に渡る直線に沿った E_z の積分は、アイリスの両側の壁に於ける $Z_0 H_\theta$ の有限距離に渡る積分を test particle がそこを通過した瞬間に行ったものと等しくなるということである。つまり、ある瞬間に於けるアイリスの両側の壁での $E_r + Z_0 H_\theta$ 積分は $z = -\infty$ から $z = \infty$ までの E_z 積分から得られる全ての情報を含んでいる (図 1 1 参照)。

図 1 2 は Saclay collimator に対する Napoly 積分と直線に沿った積分によるロスファクターの計算結果の比較を示している。図 1 2 から直線に沿った積分がロスファクターの精確

な値を出すためには 50 cm 以上のビームパイプを両端につける必要があることが読み取れる。

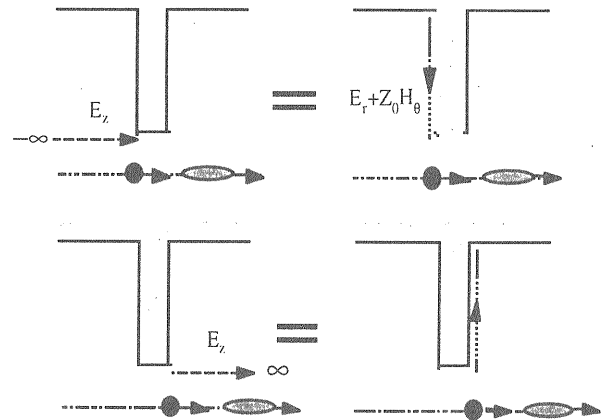


図 1 1 : ウェイクポテンシャルに対する寄与の等価性。

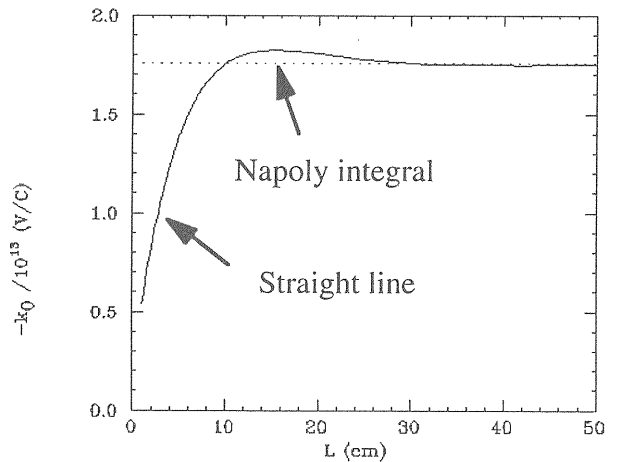


図 1 2 : Saclay collimator に於ける Napoly 積分 (破線) と直線に沿った積分 (実線) との比較。

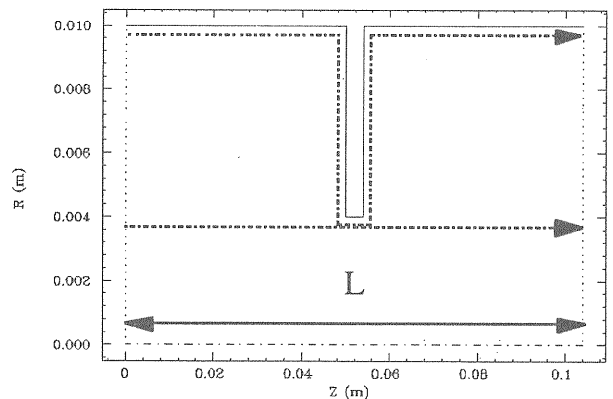


図 1 3 : Saclay collimator のスケッチと積分路。

5-1. ウェイクポテンシャルの軸方向対称性

電子—陽電子衝突型加速器の様な円形加速器では、電子と陽電子のビームは同じビームパイプの中を反対方向に回っている。ビームパイプに接続されている部品の中にはビーム軸方向に対して非対称なものがあることがある(図14参照)。

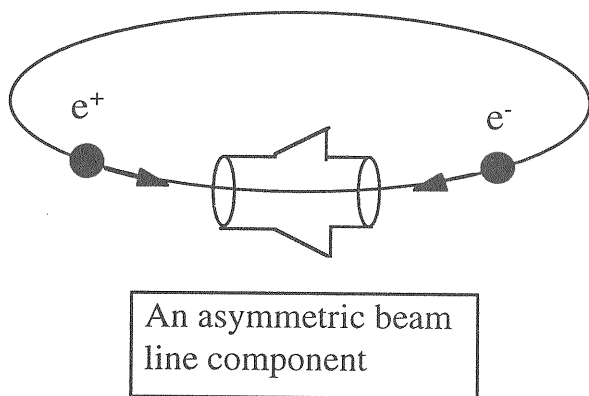


図14: ビーム軸方向に対して非対称な構造体を通して反対方向に回る二つのビーム。

そこで、反対方向に回る二つのビームはいったいこの構造体から同じウェイクポテンシャルを受けるのであろうかという疑問が生じる。もしそうでないなら、二つのビームに対して別々のウェイクポテンシャルの計算を行わなければならない。結果として、ビームローディングやビーム不安定性に対しても二つのビームに対して違った処置が必要になる。幸運なことに、二つのビームが同じウェイクポテンシャルを感じるということが、インピーダンスの方向対称性や散乱行列の方向対称性を駆使して解析的に証明されている[10-12]。図15はウェイクポテンシャルがビームの走る向きに依らない事を ABCI を使って例証したものである。

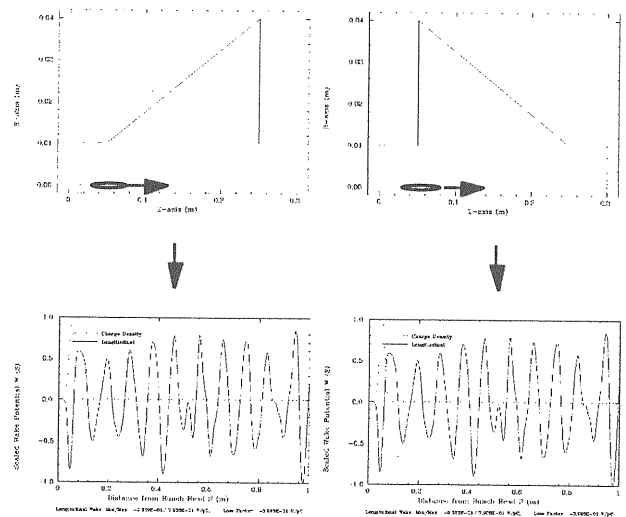


図15: ウェイクポテンシャルの軸方向対称性の例。

5-2. 反対方向に回るビームに対するウェイクポテンシャル

これまでのところでは、driving beam が作るウェイク場がそれと同じ方向に走る test particle に与える影響だけを考えてきた。しかし衝突型加速器では driving beam と反対方向に回るビームも同じウェイク場から多少のキックを受けることができる(図16参照)[13, 14]。

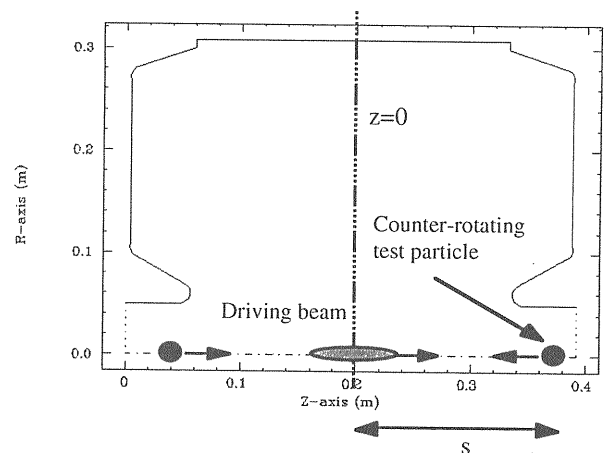


図16: 反対方向に回るビームに対するウェイクポテンシャル。

この効果によるウェイクポテンシャルを定義してみよう。まず driving beam と電荷 e を持つ

た test particle の相対距離 s を以下のように決めよう。Driving beam の中心が軸座標の原点 $z=0$ に時間 $t=0$ で到着して時の反対方向を走る test particle の軸座標位置を s と定義する (図 1 6 参照)。そうすると、反対方向を走る粒子の縦方向ウェイクポテンシャルは以下の式で与えられる:

$$W_{L0}(s) = \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(r, z, t = \frac{-z+s}{c}) dz \quad (5-1)$$

ここで test particle の電荷の符号が driving beam と同じ方向に走る場合と逆転していることに注意しよう (さもないと反対方向に回れない)。パラメーター s は driving beam と test particle が動くにつれ変化し一定値ではないが、どんな時間に於ける両者の相対的位置も s が与えられれば一様に決まる。反対方向を走る粒子の横方向ウェイクポテンシャルも同様に定義することができる。インピーダンスはこれらのウェイクポテンシャルをフーリエ変換することで計算できる。

反対方向に回るビームに対する空洞のインピーダンスを考えよう。反対方向を回る粒子が感じる固有モードのシャントインピーダンスは一般的に複素数である。しかし、空洞が軸方向に対称的な構造をしている場合は、シャントインピーダンスは実数になる。その符号は固有モードが軸方向の対称面 $z=0$ に対して鏡像対称であるか反転対称であるかによって変わる[14]:

$$R_{sh} \Rightarrow \begin{cases} R_{sh} & \text{for symmetrical mode} \\ -R_{sh} & \text{for antisymmetrical mode} \end{cases} \quad (5-2)$$

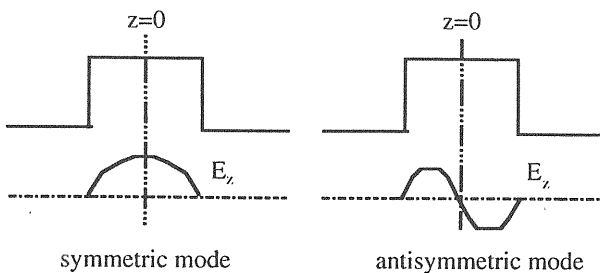


図 1 7 : 空洞に於ける鏡像対称と反転対称モード。

図 1 8 と 1 9 は、driving beam と同じ方向に走る test particle が図 1 6 にスケッチした LEP 空洞から受ける縦方向ウェイクポテンシャルとインピーダンスの実部を示したものである。反対方向を走る test particle に対するウェイクポテンシャルとインピーダンスの実部は図 2 0 と 2 1 に示した。反転対称モードのインピーダンスの実部は符号が反転することが見て取れる。この例では、反対方向を走る test particle のロスファクターは同一方向を走る test particle のそれに比べ無視できる程小さい (約一万分の一)。この結果は、反対方向を走るビームによるウェイク場の著しい効果が実験的にはあまり観測されていない事実と符合している。

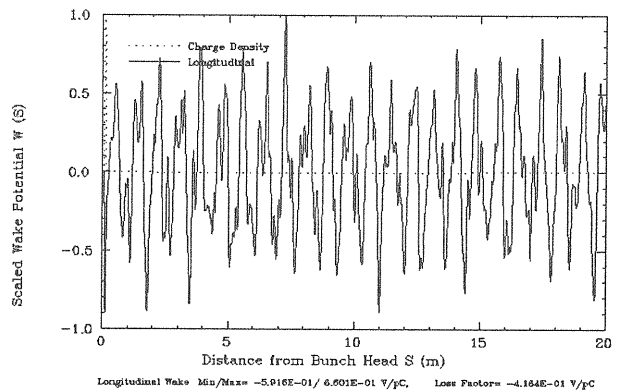


図 1 8 : Driving beam と同じ方向に走る test particle が LEP 空洞から受ける縦方向ウェイクポテンシャル。

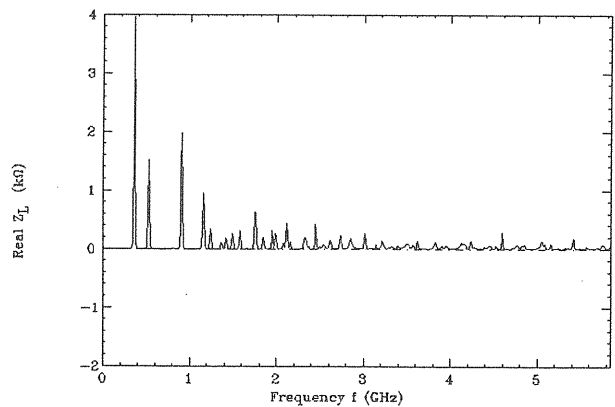


図 1 9 : Driving beam と同じ方向に走る test particle が LEP 空洞から受けるインピーダンスの実部。

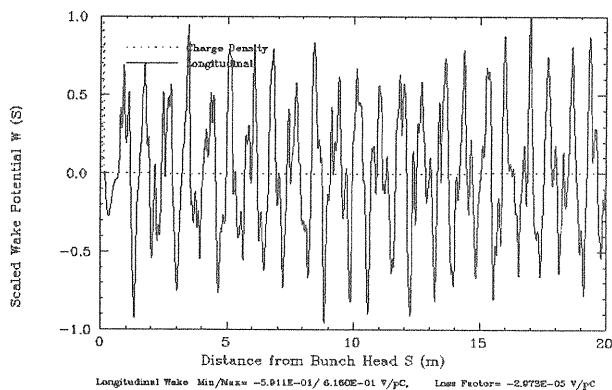


図20 : Driving beam と反対方向に走る test particle が LEP 空洞から受ける縦方向ウェイクポテンシャル。

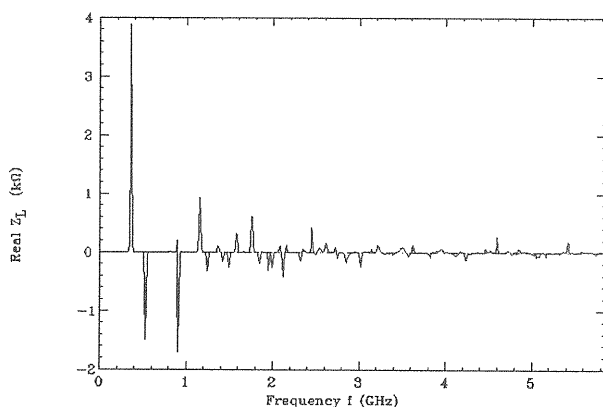


図19 : Driving beam と反対方向に走る test particle が LEP 空洞から受けるインピーダンスの実部。

参考文献

[1] 鈴木敏郎 (OHO86), 久保浄 (OHO91), 赤井和憲 (OHO94) .

[2] A. W. Chao, *Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993).

[3] Y. H. Chin, "User's Guide for ABCI Version 8.8", LBL-35258 (1994).

[4] T. Weiland, *Particle Accelerators* 15,

245 (1984).

[5] W. K. H. Panofsky and W. A. Wenzel, *Rev. Sci. Instrum.* 27, 967 (1956).

[6] Perry B. Wilson, *AIP Proc.* 87, *Phys. High Energy Accelerators* (Fermilab, 1981), p. 450.

[7] V. K. Neil and A. M. Sessler, *Rev. Sci. Instrum.* 36, 429 (1965).

[8] A. Hofmann, "Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings", CERN 77-13 (1977), p.139.

[9] O. Napoly, *Part. Accel.* 36, 15 (1991); O. Napoly, Y. H. Chin and B. Zotter, *Nucl. Instr. Methods A*, 334, 255 (1993).

[10] R. Gluckstern and B. Zotter, "The Coupling Impedance of Asymmetric Cavities," CERN Report LEP Note 613 (1988).

[11] J. Bisognano, "On the Independence of the Longitudinal Wakefields on Direction of Transit through a Cavity," CEBAF Report TN 109 (1989).

[12] S. Heifets, "On Directional Symmetry of Impedance", SLAC Report SLAC/AP-79 (1990).

[13] C. Pellegrini, "Longitudinal Coupled-Bunch Instability for Two Counter-rotating Beams," CERN/LEP-TH/86-17 (1986).

[14] J. M. Wang, "Transverse Two-Beam Instability," CERN/LEP-TH/87-65 (1987).