

1 はじめに

この章“クライストロンシミュレーション”では、二次元シミュレーションコード KUBALI [1] を例に、クライストロンのシミュレーションに用いられている基礎方程式、仮定や近似、定式化、数値解析手法を紹介する。その中には KUBLAI コードに特有のものもあるが、多くはこれまでに実績を挙げている FCI コード [2,3] や CONDOR コード [4]、あるいは汎用の粒子コード MAGIC や MAFIA を使ったクライストロンシミュレーション [5, 6] に共通するものであり、それらを理解することを目指す。その中でも特に、クライストロンにおける電子ビームと共振空洞との強い非線形相互作用を効率良く、かつ、精度良くシミュレートするために考案された“Port 近似”と呼ばれる手法の理解がこの章の主な目的となる。

1.1 クライストロンの原理

まず始めに準備として、クライストロンの基本的な原理を復習しておこう。クライストロンは Hahn と Metcalf、やや遅れて Varian 兄弟によって 1939 年に発表された高周波増幅管で、図 1 の模式図のように、電子銃、複数の共振空洞を備えたドリフトチューブ、および、使用済みの電子ビームを処理するコレクタから成る。

電子銃で生成された電子ビームは、外部集束磁場によって集束されてドリフトチューブに入射される。入射された電子ビームは、入力空洞を通過する際に、高周波源により入力空洞に誘起された高周波電界によって周期的な速度変調を受け、ドリフトチューブを走行する間に速い電子が遅い電子に追い付いて粗密が生じる。粗密の生じたビームは、アイドラ空洞において、電子ビーム自

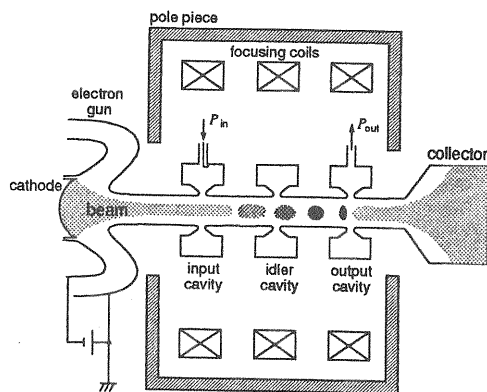


図 1 クライストロンの模式図。

身が誘起した空洞電界によってさらに速度変調を受け、より集群する。これは、アイドラ空洞の共振周波数を、クライストロンの動作周波数より高い周波数側にわずかに離調することによって実現される。集群した電子ビームは最終的に出力空洞に大きな空洞電界を誘起し、出力空洞に適当な外部負荷を接続しておけば、空洞電界によって電子ビームは減速されてエネルギーを失い、その分の電力が外部負荷で消費される。

1.2 シミュレーションのあらまし

クライストロンのシミュレーションが、加速管等のシミュレーションと大きく異なる点は、入力空洞以外の空洞では、空洞に電磁界を誘起するのは電子ビームのみで、その空洞電磁界、あるいは、空洞電圧自体が知りたい未知数であるという点だ。しかも、出力空洞においてはその空洞電圧は電子ビームのエネルギーを越えることもあり、強い非線形な相互作用となる。逆に、電子ビームの質が知りたい情報ではないので、特に横方向のエミッタンス等に高い精度は必要なく、シミュレーションにおいて扱う粒子の数は少なくて済む。ただし、もちろん、進行方向の電子の集群はクライストロンの動作にとって本質的で、加えて、クライストロンの電子ビームは一般的にパービアンズが高く空間電荷力が強いので、進行方向の電子の運動については高い精度が要求される。

共振空洞と電子ビームとの相互作用の self-consistent なシミュレーションが、1980 年代半ばに Yu [7]、並びにこれとは独立に Carlsten と Tallerico [8] により発表された。Yu は、軸対称二次元の Particle-in-cell (PIC) コード MASK を使って Maxwell 方程式と電子ビームの運動を self-consistent に解き、ただしその際の境界としては共振空洞の形状を使わず、図 2 のように、Port と Port 間の高周波電圧を与えた。さらに、空洞のインピーダンスを使って、空洞壁での損失および外部負荷での消費電力と電界によって電子ビームが失うパワーとのバランスから Port 電

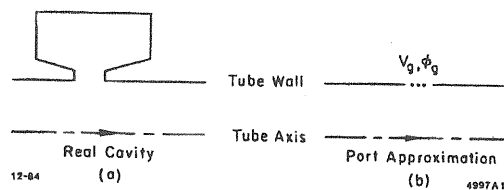


図 2 Port 近似における共振空洞の表現 [7]。

圧を計算することにより、電子ビームと共振空洞との相互作用を self-consistent にシミュレートし、これを“Port approximation”と呼んだ。

Yu、そして Carlsten と Tallerico によって発表された“Port 近似”では、電子ビームと共振空洞との相互作用は線形、つまり、後述するビームアドミッタンスは定数として扱われている。Eppley は非線形相互作用を扱えるように Port 近似を拡張した [5]。もちろん、この拡張によって Port 電圧を得るためには繰り返し計算が必要となり、最終的な周期定常解を得るまでの計算時間が問題となるが、新竹の FCI コード [2, 3] や増田らの KUBLAI コード [1] ではこの点が改善されている。

Port 近似に代わる、電子ビームと共振空洞との相互作用を扱う方法としては、もちろん、PIC 計算において空洞形状を境界としてモデリングすることが考えられる。ただしこの方法は、Port 近似を用いたシミュレーションに比べてより straight-forward だが、特に Q 値の高い空洞に適用して精度を確保するためにはかなりの計算時間を要する。この Port 近似を用いない方法の Port 近似を用いたシミュレーションに対する利点は、特に出力空洞でエネルギーを失い“Port”の近くを通過する電子の運動に高い精度が期待できることと、Port 近似では扱いにくい進行波型の出力空洞を扱えることである¹。Eppley は、MAGIC コードを使ったシミュレーションで、Q 値の低い出力空洞にのみこれを適用した [5]。その後、Becker らは MAFIA コードを使って出力空洞以外を二次元で Port 近似を用いて、出力空洞のみを三次元で Port 近似を用いずにモデリングし [6]、また、陳らは MAGIC コードを使って入力空洞以外の全ての空洞を Port 近似を用いずにモデリングして [9, 10]、それぞれ成果を挙げた。

さて、この章“クライストロンシミュレーション”では、Port 近似を用いた二次元 PIC シミュレーションの例として、KUBLAI コードで用いられている基礎方程式、仮定や近似、定式化、数値解析手法を紹介する。KUBLAI を用いたクライストロンシミュレーションでは、その前計算として KUSOS、KUEMS、KUAD2 の三つのコードを用いる (図 3)。それぞれ、KUSOS では外部集束磁場、KUEMS では共振空洞の固有モー

¹ 進行波型空洞にも Port 近似は適用できるが [11]、クライストロンに適用された例は無い。

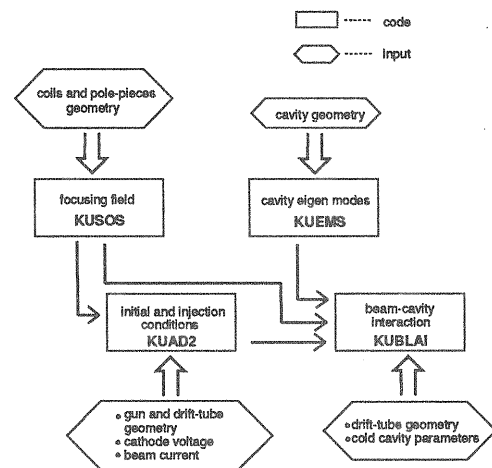


図 3 KUBLAI コードを使ったクライストロンのシミュレーションの概要。

ド、KUAD2 では電子銃からドリフトチューブへの電子ビームの入射条件を計算し、これらを入力として KUBLAI で電子ビームと共振空洞の相互作用を計算する。

セクション 2 では電子ビームと共振空洞の相互作用以外の基礎方程式と定式化を示し、Port 近似についても少し触れる。

セクション 3 では Port 近似について詳しく説明する。まず、Port 近似で用いられる電子ビームと共振空洞の相互作用を表す等価回路方程式 (あるいはパワーバランスの式) を Maxwell 方程式から導出する。また、Port 電圧を得るために必要な繰り返し計算の手法について説明し、Port 近似を使わないで空洞形状を境界としてモデリングする場合と比べた利点、どの程度計算時間を節約できるのかについても説明する。

セクション 4 では、KUBLAI コードのフローチャートと実機への適用例を示す。

2 基礎方程式と定式化

このセクションでは、クライストロン内の電子の挙動、並びに電磁界を記述する基礎方程式、二次元シミュレーションコード KUBLAI で用いられている定式化を示す。

2.1 電子の運動

まず、電子の運動方程式定式化の前に、シミュレーションで用いる超粒子の位置・速度・電荷、並びに、その集まりであるビームの電荷密度・電流密度を定義しよう。ここで言う超粒子とは、計

算時間とメモリを節約するために導入する仮想的な粒子のことで、いくつかの電子の集まりを表す。一個の超粒子 v が N_v 個の電子を表すとすると、その電荷は $q_v = -N_v e$ で、一方、その超粒子に含まれる全ての電子の運動はその中の一個の電子の運動で代表させる。

軸対称系において、粒子 v の位置と速度は、 $r_v = (z_v, r_v)$ と $u_v = (u_{v,z}, u_{v,r}, u_{v,\theta})$ で表される。そこで、図4に示されるようなリング状の超粒子を導入する。すなわち、このリング状超粒子の軸方向の並進、回転、半径の伸縮を扱うことになる。一般に超粒子にはある体積と形状を持たせることがあるが、ここでは体積を持たない超粒子を用いる。その場合、ビームの電荷密度 ρ_b 、電流密度 J_b は次式のように表される。

$$\rho_b = \sum_v \frac{q_v}{2\pi r_v} \delta(z - z_v, r - r_v) \quad (1)$$

$$J_b = \sum_v \frac{q_v}{2\pi r_v} u_v \delta(z - z_v, r - r_v) \quad (2)$$

ここに、 δ はDiracのデルタ関数である。

さて、このような超粒子の導入は、粒子シミュレーションにおいてはごく一般的な常套手段で、多くの場合、個々の電子の運動を現実的な計算時間とメモリの中でシミュレートすることはできない。ここで大切なことは、超粒子一個に含まれる電子の個数 N_v の選び方に十分注意する必要があるということだ。すなわち、シミュレーションで計算させたい物理量、例えばクライストロン出力が、それ以上 N_v を小さくして計算させても必要な精度の範囲内で変化しない十分小さな N_v を選ばなければならない。時間ステップや空間メッシュの選び方についても同じことが言える。したがって当然、何をシミュレートするのか、シミュレーションで何を知りたいのかによって、超粒子

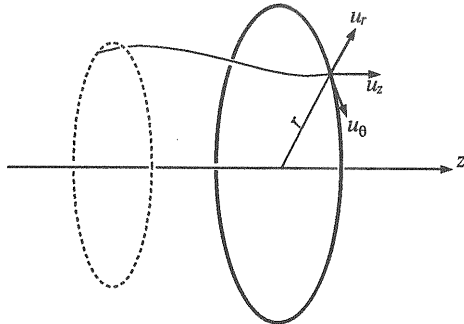


図4 リング状超粒子。

の数、時間ステップ数、空間メッシュ数の選び方を変えなければならない。あるいは、それらを増やしたときの物理量の収束性を調べて、そのシミュレーションコード、アルゴリズム、定式化、基礎方程式の選び方が妥当かどうかチェックすることを怠ってはならないということを強調しておきたい。

次に、電子の運動方程式を定式化していこう。電子の相対論的運動方程式は

$$\frac{d(m_0 \gamma_v u_v)}{dt} = -e(E + u_v \times B) \quad (3)$$

ここに、 t は時刻、 E と B はそれぞれ位置 r_v における電界と磁束密度、 m_0 と e はそれぞれ電子の静止質量と電荷である。 γ_v は超粒子 v （正確には超粒子 v を代表する電子）のLorentz係数で、次式で表される。

$$\gamma_v = \left(1 - \frac{|u_v|^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (4)$$

ここで

$$m_0 c^2 \frac{d\gamma_v}{dt} = \frac{dK_v}{dt} = -eE \cdot u_v \quad (5)$$

(K_v は超粒子 v の運動エネルギー)を用いると、

$$\frac{du_v}{dt} = -\frac{e}{m_0 \gamma_v} \left(E + u_v \times B - \frac{E \cdot u_v}{c^2} u_v \right) \quad (6)$$

が得られ、これを成分別に表すと次のようになる。

$$\frac{du_{v,z}}{dt} = -\frac{e}{m_0 \gamma_v} \left(E_z + u_{v,r} B_\theta - u_{v,\theta} B_r - \frac{E \cdot u_v}{c^2} u_{v,z} \right) \quad (7)$$

$$\frac{du_{v,r}}{dt} = -\frac{e}{m_0 \gamma_v} \left(E_r + u_{v,\theta} B_z - u_{v,z} B_\theta - \frac{E \cdot u_v}{c^2} u_{v,r} \right) + \frac{u_{v,\theta}^2}{r_v} \quad (8)$$

$$\frac{du_{v,\theta}}{dt} = -\frac{e}{m_0 \gamma_v} \left(E_\theta + u_{v,z} B_r - u_{v,r} B_z - \frac{E \cdot u_v}{c^2} u_{v,\theta} \right) - \frac{u_{v,\theta} u_{v,r}}{r_v} \quad (9)$$

以上で速度 u_v の微分方程式が得られたので、

これらと位置 r_v の微分方程式

$$\frac{dz_v}{dt} = u_{v,z} \quad (10)$$

$$\frac{dr_v}{dt} = u_{v,r} \quad (11)$$

を解けば超粒子の運動が得られるが、実際には、計算時間とメモリの節約、あるいは、より高い精度を確保するために、以下に示すように電子の保存量を用いて解くべき微分方程式の数を減らす。

まず、軸対称であることから、正準角運動量が保存される。超粒子 v の正準角運動量 $P_{v,\theta}$ は、

$$P_{v,\theta} = r_v (m_0 \gamma_v u_{v,\theta} - e A_\theta) \quad (12)$$

ここに、 A_θ は位置 r_v におけるベクトルポテンシャルの θ 成分である。この式(12)を時刻 t で微分すると式(9)が得られ、両式は同等である。式(12)より、粒子の位置および Lorentz 係数から速度の θ 成分 $u_{v,\theta}$ が得られるので、式(9)の代わりにこれを用いることにすると、結局 KUBLAI コードで解くべき式は式(7)、(8)、(10)、(11)の四式となる。

さらに、電子銃部の計算 (KUAD2 コード) では、電磁界が定常であることから、運動エネルギーと静電ポテンシャルエネルギーの和

$$W_v = m_0 c^2 (\gamma_v - 1) - e \phi_b \quad (13)$$

が保存されることを用いる。この(13)式は、運動方程式(7)と(8)とを使って得られる式 $\{u_{v,z} \times (7) + u_{v,r} \times (8)\}$ と同等である。さて、保存量 $P_{v,\theta}$ と W_v の式(12)と(13)より、粒子の位置から γ_v と $(u_{v,z}^2 + u_{v,r}^2)$ が計算される。そこで、 z - r 面上の速度成分 $(u_{v,z}, u_{v,r})$ が z 軸となす角 α_v 、すなわち、

$$u_{v,z} = \sqrt{u_{v,z}^2 + u_{v,r}^2} \cos \alpha_v \quad (14)$$

$$u_{v,r} = \sqrt{u_{v,z}^2 + u_{v,r}^2} \sin \alpha_v \quad (15)$$

を導入する。この α_v の微分方程式は、式(4)、(12)~(15)を用いて運動方程式(7) (あるいは(8)) から次式のように導かれる。

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = \frac{e B_\theta}{m_0 \gamma_v c} + \frac{1}{2cU^2} \left[\frac{\partial(U^2)}{\partial r} u_{v,z} - \frac{\partial(U^2)}{\partial z} u_{v,r} \right] \quad (16)$$

ここに、 U^2 は次式で与えられる。

$$U^2 = \left(\frac{W_v + m_0 c^2 + e \phi_b}{m_0 c} \right)^2 - \left(\frac{P_{v,\theta} + e r_v A_\theta}{m_0 r_v} \right)^2 - 1 \quad (17)$$

$$= \gamma_v^2 (u_{v,z}^2 + u_{v,r}^2)$$

結局、静電磁界中の電子の軌跡は、式(10)、(11)、(16)の三式を解くことによって得られ、速度 $u_v = (u_{v,z}, u_{v,r}, u_{v,\theta})$ は得られた位置 $r_v = (z_v, r_v)$ および角 α_v から式(4)、(12)~(15)を用いて計算されることになる。

2.2 電磁界

FCI や KUBLAI を含めた Port 近似を使うクライストロンシミュレーションコードでは、電磁界を以下のように三つに分けて計算している。

$$E = E_c + E_b \quad (18)$$

$$B = B_c + B_b + B_f \quad (19)$$

ここで、 E_c 、 B_c は共振空洞の電磁界、 E_b 、 B_b は電子ビームの作る電磁界、 B_f は外部集束磁場の磁束密度。さらに、 E_c 、 B_c については、共振空洞の固有モードを使って、

$$E_c(z, r, t) = \sum_i e_0^{(i)}(t) E_0^{(i)}(z, r) \quad (20)$$

$$B_c(z, r, t) = \mu_0 \sum_i h_0^{(i)}(t) H_0^{(i)}(z, r) \quad (21)$$

とし、共振空洞と電子ビームとの相互作用計算においては、 $e_0^{(i)}$ と $h_0^{(i)}$ が解くべき変数となる。ここに、 μ_0 は真空の透磁率、 $E_0^{(i)}$ 、 $H_0^{(i)}$ は i 番目の共振空洞の基本モード。すなわち、共振空洞の電磁界については、その形状・分布はあらかじめ計算される固有モードの形状・分布を与え、その位相も含めた大きさだけを解くことになる。

このサブセクションでは、電子ビームの作る電磁界と外部集束磁場の基礎方程式を列挙し、定式化する。出発点はもちろん Maxwell 方程式である。

2.2.1 外部集束磁場

Maxwell 方程式のソース項となるのは電子ビームと外部集束コイル電流の二つで、このうち後者 J_f についてはベクトルポテンシャルを使って、

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}_f \right) = \mathbf{J}_f \quad (22)$$

を解き、磁束密度 \mathbf{B}_f は

$$\mathbf{B}_f = \nabla \times \mathbf{A}_f \quad (23)$$

で計算される。ただし、ここで電流密度 \mathbf{J}_f は θ 成分のみなので、

$$\mathbf{J}_f = J_{f,\theta} \mathbf{i}_\theta \quad (24)$$

$$\mathbf{A}_f = A_{f,\theta} \mathbf{i}_\theta \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_f = B_{f,z} \mathbf{i}_z + B_{f,r} \mathbf{i}_r \quad (26)$$

である。ここに、 \mathbf{i}_z 、 \mathbf{i}_r 、 \mathbf{i}_θ はそれぞれ z 、 r 、 θ 方向の単位ベクトル。

境界条件について、 \mathbf{B}_f あるいは \mathbf{A}_f には厳密には境界条件を与えることができないので、KUSOS コードでは境界条件を必要としない解法を用いて式(22)を解いている [1]。ただし、電子ビームの通る領域に影響しないように十分遠くに境界を選べば、境界条件を与えることもできる。

2.2.2 電子ビームの作る電磁界

残りの二つの電磁界成分、共振空洞の電磁界 \mathbf{E}_c 、 \mathbf{B}_c と電子ビームの作る電磁界 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b のソースは共に電子ビームである。

$$\nabla \times \mathbf{E}_{b+c} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{b+c}}{\partial t} \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{b+c} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_{b+c}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_b \quad (28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{b+c} = \frac{\rho_b}{\epsilon_0} \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{b+c} = 0 \quad (30)$$

ここに、 c は光速、 ϵ_0 は真空の誘電率で、

$$\mathbf{E}_{b+c} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_b \quad (31)$$

$$\mathbf{B}_{b+c} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_b \quad (32)$$

さて、この Maxwell 方程式(27)~(30)を、共振空洞も含めたドリフトチューブ壁を境界として解けば \mathbf{E}_{b+c} と \mathbf{B}_{b+c} が得られるわけだが、Port 近似を使ったシミュレーションでは、共振空洞の電磁界 \mathbf{E}_c 、 \mathbf{B}_c と電子ビームの作る電磁界 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b を敢えて別々に計算する。

電子ビームの作る電磁界 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b の計算について、以下の仮定を導入する。あるいは言い換えれば、以下のように電子ビームの作る電磁界 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b を定義する。すなわち、電子ビームの作る電磁界 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b は、共振空洞を取り除いたドリフトチューブ壁を境界として Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E}_b = -\frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial t} \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_b = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_b}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_b \quad (34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_b = \frac{\rho_b}{\epsilon_0} \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_b = 0 \quad (36)$$

を解いて計算される。つまり、電子ビームの作る電磁界 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b とは、Maxwell 方程式(27)~(30)の解 \mathbf{E}_{b+c} 、 \mathbf{B}_{b+c} から共振空洞の電磁界 \mathbf{E}_c 、 \mathbf{B}_c を差し引いた電磁界成分であり、その差し引く方法として境界を変更する、すなわち、計算領域から共振空洞を取り除くわけだ。

このようにして計算される \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b と次のセクションで説明する共振空洞の電磁界 \mathbf{E}_c 、 \mathbf{B}_c との和 \mathbf{E}_{b+c} 、 \mathbf{B}_{b+c} は、共振空洞壁を境界として Maxwell 方程式(27)~(30)を解いて得られる解に厳密にはもちろん一致しないが、電子の運動に大きな誤りを与えることはない。

Port 近似において、Maxwell 方程式を直接解かずにこのような仮定を導入する理由と利点については次のセクション 3 で説明することにして、このサブセクションの残りの部分では、KUBLAI と KUAD2 コードにおける \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b の計算の定式化を説明する。Maxwell 方程式(33)~(36)の解き方、変数の選び方としては、 \mathbf{E}_b と \mathbf{B}_b を直接解く [6]、Lorentz ゲージのスカラ及びベクトルポテンシャルを解く [2, 3]、等の様々な方法が取られているが、KUBLAI と KUAD2 コードでは次のような方法を取っている。

軸対称であることから、電磁界 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{B}_b を次のように表すことができる。

$$\mathbf{E}_b = -\nabla \phi_b - \frac{\partial (A_{b,\theta} \mathbf{i}_\theta)}{\partial t} - \nabla \times (G_{b,\theta} \mathbf{i}_\theta) \quad (37)$$

$$\mathbf{B}_b = B_{b,\theta} \mathbf{i}_\theta + \nabla \times (A_{b,\theta} \mathbf{i}_\theta) \quad (38)$$

ここで、 ϕ_b と $A_{b,\theta}$ はそれぞれ Coulomb ゲージのスカラポテンシャルとベクトルポテンシャルの θ 成分。もつとも、軸対称系では Coulomb ゲー

ジの $A_{b,0}$ と Lorentz ゲージのそれとに違いはない。一方、ここで導入した $G_{b,0}$ は、Coulomb ゲージのベクトルポテンシャルと

$$\frac{\partial(A_{b,z}i_z + A_{b,r}i_r)}{\partial t} = \nabla \times (G_{b,0}i_0) \quad (39)$$

のような関係にある。つまり、Coulomb ゲージのベクトルポテンシャルは $\nabla \cdot (A_{b,z}i_z + A_{b,r}i_r) = 0$ を満たすので、このように $G_{b,0}$ を導入することができる。

電磁界 E_b 、 B_b や、Lorentz ゲージのポテンシャルではなく、式(37)、(38)のように変数を選んだことの利点は、 ϕ_b 、 $B_{b,0}$ 、 $A_{b,0}$ 、 $G_{b,0}$ が全てスカラもしくはベクトルの θ 成分であることにある。つまり、 z - r 面上において計算領域をメッシュ分割して空間変数を離散化する際に、容易に境界条件を矛盾無く取り扱うことができる。もちろん、ベクトルの z 成分、 r 成分を取り扱う場合でも単純な境界形状であれば問題はないが、テーパしたドリフトチューブ等の場合には境界条件の取り扱いが複雑になる。

さて、式(37)、(38)のようにおいたことで、Maxwell 方程式(33)~(36)のうち式(33)と(36)は常に満たされる。残りの二式(34)、(35)に代入して、

$$\nabla^2 \phi_b = -\frac{\rho_b}{\epsilon_0} \quad (40)$$

$$\nabla \times \nabla \times (A_{b,0}i_0) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial(A_{b,0}i_0)}{\partial t} = \mu_0 J_{b,0}i_0 \quad (41)$$

$$\nabla \times \nabla \times (B_{b,0}i_0) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial(B_{b,0}i_0)}{\partial t} = \mu_0 \nabla \times (J_{b,z}i_z + J_{b,r}i_r) \quad (42)$$

$$\nabla \times \nabla \times (G_{b,0}i_0) = \frac{\partial(B_{b,0}i_0)}{\partial t} \quad (43)$$

を得る。さらに、静電磁界 (KUAD2) では、

$$\nabla^2 \phi_b = -\frac{\rho_b}{\epsilon_0} \quad (44)$$

$$\nabla \times \nabla \times (A_{b,0}i_0) = \mu_0 J_{b,0}i_0 \quad (45)$$

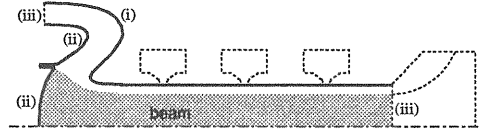
$$\nabla \times (B_{b,0}i_0) = \mu_0 (J_{b,z}i_z + J_{b,r}i_r) \quad (46)$$

$$G_{b,0} \equiv 0 \quad (47)$$

となる。

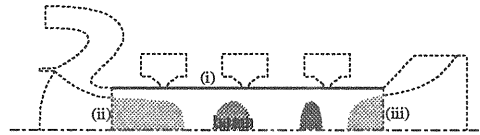
最後に、境界条件について簡単に触れておこう。境界条件をまとめて図5に示す。

- (i) $\phi_b = 0$
- (ii) $\phi_b = -V_b$
- (iii) $n \cdot \nabla \phi_b = 0$



(a) 電子銃の計算 (KUAD2)

- (i) $\phi_b = 0$, $\frac{\partial A_{b,0}}{\partial t} = 0$,
 $n \times [\nabla \times (B_{b,0}i_0) - \mu_0 (J_{b,z}i_z + J_{b,r}i_r)] = 0$,
 $n \times [\nabla \times (G_{b,0}i_0)] = 0$
- (ii) $\frac{\partial \phi_b}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial A_{b,0}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial B_{b,0}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial G_{b,0}}{\partial t} = 0$
- (iii) $\frac{\partial \phi_b}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial A_{b,0}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_{b,0}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial B_{b,0}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_{b,0}}{\partial t} = 0$,
 $\frac{\partial G_{b,0}}{\partial z} + c B_{b,0} = 0$



(b) 共振空洞との相互作用解析 (KUBLAI)

図5 電子ビームの作る電磁界計算の境界条件

まず、KUAD2 コードにおいて、 ϕ_b についてはドリフトチューブ壁、カソード面でそれぞれの電位を与え、その他の開口部 (図中の(iii)) では電界の法線成分が存在しないとする。 $A_{b,0}$ については、KUSOS コードでの外部集束磁場の計算と同様に、境界条件を必要としない。 $B_{b,0}$ についても同じく境界条件は与えない。

次に、KUBLAI コードにおいては、電子銃部と入力空洞との間の $\partial/\partial t = 0$ と見なせる適当な位置に仮想的な境界(ii)を選び、電子ビームの入射条件とともに電磁界の境界条件も KUAD2 の計算結果を与える。ドリフトチューブ壁(i)には、 $n \times E_b = 0$ 、 $n \cdot (\partial B_b / \partial t) = 0$ を与える (n は境界の法線ベクトル)。 $A_{b,0}$ については $\partial A_{b,0} / \partial t = 0$ が境界条件となるので、ここでも KUAD2 の計算結果を与えることになる。ビーム出口 (図中の(iii)) には吹き流し条件、つまり、境界に達した電磁波が下流に向かって光速 c で進む条件を与える。境界(ii)には厳密な境界条件を与えることができないので、出力空洞付近に影響しないように境界の位置を選ばなければならない。

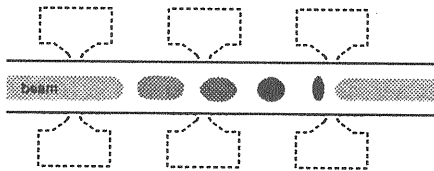
3 共振空洞・電子相互作用の等価回路 - Port 近似 -

このセクションでは、“ポート近似を使ったクライストロンシミュレーション”の要であるポート近似について詳しく学んでいこう。

サブセクション 2.2 でも触れたが、Port 近似では、電子ビームをソースとする電磁界を、“共振空洞の電磁界”と共振空洞が無いと仮定したときの“電子ビームの作る電磁界”の二つに分けて計算する。これを模式的に描くと図6のようになる。“電子ビームの作る電磁界”は、共振空洞を取り除いたドリフトチューブを境界として、Maxwell 方程式を解いて計算される。一方、“共振空洞の電磁界”については、その形状・分布はあらかじめ計算される固有モードの形状・分布を与え、その位相も含めた大きさ $e_0^{(i)}$ 、 $h_0^{(i)}$ だけを解いていく (式(20)、(21)参照)。

このセクションでは、 $e_0^{(i)}$ 、 $h_0^{(i)}$ の満たすべき微分方程式、すなわち、共振空洞と電子ビームとの相互作用の等価回路方程式を Maxwell 方程式 (27)~(30) から導くとともに、サブセクション 3.3 では、なぜ Port 近似が必要なのか、電磁界を取って二つに分けて計算することの利点を説明する。

beam-induced fields



cavity fields

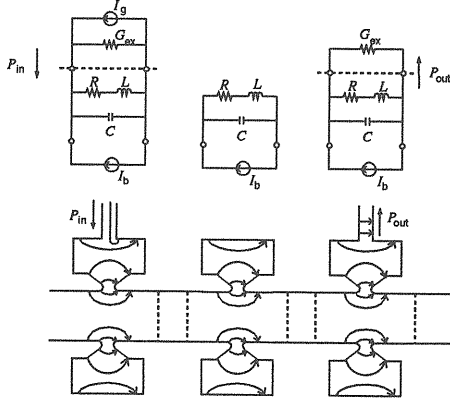


図6 Port 近似における電磁界の計算

3.1 共振空洞の固有モード

よく知られた通り、任意のベクトル関数は、環流場 (solenoidal field) と勾配場 (irrotational field) の二種類の固有ベクトル関数の線形和で表すことができる [12]。Maxwell 方程式を展開するために、境界条件の異なる二つの完全な固有関数群 $\{E_a\}$ と $\{H_a\}$ を以下のように定義する。

$$n \times E_a = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (48)$$

$$n \cdot E_a = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (49)$$

$$\int_{\Omega} E_a \cdot E_a dV = 2W_a \quad (50)$$

$$\int_{\Omega} E_a \cdot E_b dV = 0 \quad (51)$$

$$n \cdot H_a = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (52)$$

$$n \times H_a = 0 \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (53)$$

$$\int_{\Omega} H_a \cdot H_a dV = 2W_a, \quad (54)$$

$$\int_{\Omega} H_a \cdot H_b dV = 0, \quad (55)$$

ここに、 a と b は固有関数のモード番号を表す。 Γ_1 は、図7に示したように、共振空洞とドリフトチューブ壁境界を、 Γ_2 は入力もしくは出力カップラの断面境界を、 Ω は境界 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ で囲まれる領域を表す。また、式(50)と(54)の W_a はモード a の規格化条件を表す。

ここで定義した二つの固有関数群 $\{E_a\}$ と $\{H_a\}$ はどちらも、環流場と勾配場の両方の固有関数を含んでいる。そのうち、環流場の固有関数は、

$$\nabla \cdot E_a = 0 \quad (56)$$

$$\nabla \cdot H_a = 0 \quad (57)$$

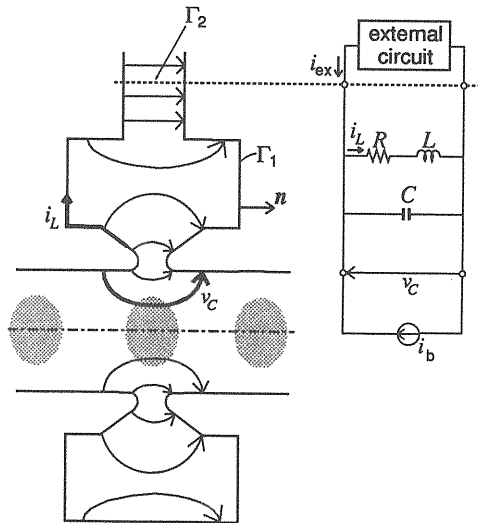


図7 出力空洞の等価回路

を満たし、かつ次の関係が成り立つように二つの固有関数群 $\{E_a\}$ と $\{H_a\}$ を選ぶことができる。

$$\nabla \times E_a = k_a H_a \quad (58)$$

$$\nabla \times H_a = k_a E_a \quad (59)$$

このように選んだ固有関数 E_a と H_a は共振空洞とドリフトチューブの共振モード(真空中における Maxwell 方程式を満たす)を表し、その共振周波数は $ck_a/2\pi$ 、電界は $E_a(z,r)\cos(ck_a t)/\sqrt{\epsilon_0}$ 、磁界は $H_a(z,r)\sin(ck_a t)/\sqrt{\mu_0}$ 、蓄積エネルギーは W_a となる。一方、勾配場の固有関数は $\nabla \times E_a = 0$ 、 $\nabla \times H_a = 0$ を満たし、式(58)、(59)と見比べて、固有周波数 $ck_a/2\pi = 0$ のモードと見なすこともできる。

さて、前者の環流場モードのうち、 i 番目の空洞の基本モードがサブセクション2.2の式(20)、(21)の $E_0^{(i)}$ 、 $H_0^{(i)}$ にあたる。一方、共振空洞を取り除いたドリフトチューブを境界として計算される E_b 、 B_b は後者の勾配場モードと、共振空洞に起因しない環流場モードを含むことになる。

式(20)、(21)中の $e_0^{(i)}$ 、 $h_0^{(i)}$ は、固有関数の満たす式(50)、(51)、(54)、(55)から、次式で与えられることが分かる。

$$e_0^{(i)}(t) = \frac{1}{2W_0^{(i)}} \int_{\Omega} E_{b+c}(z,r,t) \cdot E_0^{(i)}(z,r) dV \quad (60)$$

$$h_0^{(i)}(t) = \frac{1}{2W_0^{(i)}} \int_{\Omega} H_{b+c}(z,r,t) \cdot H_0^{(i)}(z,r) dV \quad (61)$$

ここに $H_{b+c} = B_{b+c}/\mu_0$ 。

3.2 等価回路方程式の導出

このサブセクションでは、 $e_0^{(i)}$ 、 $h_0^{(i)}$ の満たすべき微分方程式を、Maxwell 方程式(27)、(28)から導出する。

式(27)に $H_0^{(i)}$ を乗じて Ω 内で積分して次式を得る。

$$\int_{\Omega} H_0^{(i)} \cdot (\nabla \times E_{b+c}) dV = -2W_0^{(i)} \mu_0 \frac{dh_0^{(i)}}{dt} \quad (62)$$

左辺の被積分関数は、式(59)を用いると、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} H_0^{(i)} \cdot (\nabla \times E_{b+c}) &= \nabla \cdot (E_{b+c} \times H_0^{(i)}) + E_{b+c} \cdot (\nabla \times H_0^{(i)}) \\ &= \nabla \cdot (E_{b+c} \times H_0^{(i)}) + k_0^{(i)} E_{b+c} \cdot E_0^{(i)} \end{aligned} \quad (63)$$

したがって、ガウスの発散定理と式(53)を用いて、式(62)は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} 2W_0^{(i)} \left(-\omega_0^{(i)} \sqrt{\epsilon_0} e_0^{(i)} - \frac{d(\sqrt{\mu_0} h_0^{(i)})}{dt} \right) \\ = \int_{\Gamma_1} \left(E_{b+c} \times \frac{H_0^{(i)}}{\sqrt{\mu_0}} \right) \cdot n dS \end{aligned} \quad (64)$$

ここに、 $\omega_0^{(i)} = ck_0^{(i)}$ 、 n は $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 上の外向き法線ベクトル。同様に、式(28)からは式(48)と(58)を用いて次式が得られる。

$$\begin{aligned} 2W_0^{(i)} \left(-\omega_0^{(i)} \sqrt{\mu_0} h_0^{(i)} + \frac{d(\sqrt{\epsilon_0} e_0^{(i)})}{dt} \right) \\ = -\int_{\Omega} J_b \cdot \frac{E_0^{(i)}}{\sqrt{\epsilon_0}} dV - \int_{\Gamma_2} \left(\frac{E_0^{(i)}}{\sqrt{\epsilon_0}} \times H_{b+c} \right) \cdot n dS \end{aligned} \quad (65)$$

ここで、 $V_0^{(i)}$ を

$$V_0^{(i)} = -\int_{r=0} E_{0,z}^{(i)} dz \quad (66)$$

と定義し、さらに、

$$v_c^{(i)}(t) = V_0^{(i)} \sqrt{\epsilon_0} e_0^{(i)}(t) \quad (67)$$

$$i_L^{(i)}(t) = -\frac{2W_0^{(i)} \omega_0^{(i)}}{V_0^{(i)}} \sqrt{\mu_0} h_0^{(i)}(t) \quad (68)$$

$$C^{(i)} = \frac{2W_0^{(i)}}{(V_0^{(i)})^2} \quad (69)$$

$$L^{(i)} = \frac{(V_0^{(i)})^2}{2W_0^{(i)} (\omega_0^{(i)})^2} \quad (70)$$

$$R^{(i)} i_L^{(i)}(t) = -\frac{V_0^{(i)}}{2W_0^{(i)} \omega_0^{(i)}} \int_{\Gamma_1} \left(E_{b+c} \times \frac{H_0^{(i)}}{\sqrt{\mu_0}} \right) \cdot n dS \quad (71)$$

$$i_b^{(i)}(t) = -\frac{1}{V_0^{(i)}} \int_{\Omega} J_b \cdot \frac{E_0^{(i)}}{\sqrt{\epsilon_0}} dV \quad (72)$$

$$i_{\text{ext}}^{(i)}(t) = -\frac{1}{V_0^{(i)}} \int_{\Gamma_2} \left(\frac{E_0^{(i)}}{\sqrt{\epsilon_0}} \times H_{b+c} \right) \cdot n dS \quad (73)$$

と定義すると、式(64)と(65)は

$$v_c^{(i)} = L^{(i)} \frac{di_L^{(i)}}{dt} + R^{(i)} i_L^{(i)} \quad (74)$$

$$C^{(i)} \frac{dv_c^{(i)}}{dt} + i_L^{(i)} = i_b^{(i)} + i_{\text{ext}}^{(i)} \quad (75)$$

のように書き換えられ、図7に示された等価回路の方程式となる。ここで、式(72)で定義される $i_b^{(i)}$ はビームローディング電流と呼ばれる。外部回路については、入力空洞 ($i=1$) と出力空洞 ($i=N$) でそれぞれ以下のようなになる (図6)。

$$i_{\text{ext}}^{(1)} = I_g \sin(\omega t) - G^{(1)} v_c^{(1)} \quad (76)$$

$$i_{\text{ext}}^{(i)} = 0 \quad (77)$$

$$i_{\text{ext}}^{(N)} = -G^{(N)} v_c^{(N)} \quad (78)$$

ここに、 $f = \omega/2\pi$ は入力空洞に入射する高周波源の周波数、つまりクライストロンの動作周波数。 I_g について、クライストロンへの入力電力 P_{in} を、高周波源に $G^{(1)}$ とマッチングのとれた負荷を接続した場合、つまりサーキュレータを用いて高周波源への反射が無い場合に負荷で消費される電力として、

$$P_{\text{in}} = \frac{1}{2G^{(1)}} \left(\frac{I_g}{2} \right)^2 \quad (79)$$

で I_g が与えられる。

以上で、式(20)、(21)中の $e_0^{(i)}$ 、 $h_0^{(i)}$ の満たすべき微分方程式、すなわち共振空洞と電子ビームの相互作用の等価回路方程式が得られた。ここで少し、等価回路電圧 $v_c^{(i)}$ 並びに電流 $i_L^{(i)}$ 、 $i_b^{(i)}$ 、 $i_{\text{ext}}^{(i)}$ と、共振空洞の電磁界との関係を見ておこう。まず、等価回路電圧 $v_c^{(i)}$ は、式(66)、(67)より

$$v_c^{(i)} = -\int_{r=0}^a e_0^{(i)} E_{0,z}^{(i)} dz \quad (80)$$

すなわち、軸上で電界を積分した電圧を表している。等価回路の蓄積エネルギーは、式(50)、(54)、(67)~(70)から、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} C^{(i)} (v_c^{(i)})^2 + \frac{1}{2} L^{(i)} (i_L^{(i)})^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 (e_0^{(i)} E_0^{(i)}) \cdot (e_0^{(i)} E_0^{(i)}) dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu_0 (h_0^{(i)} H_0^{(i)}) \cdot (h_0^{(i)} H_0^{(i)}) dV \end{aligned} \quad (81)$$

となり、共振空洞内の電磁界エネルギーに一致する。次に、等価回路において抵抗 $R^{(i)}$ で消費される電力、並びに、外部回路から供給される電力は式(67)、(68)、(71)、(73)から、

$$R^{(i)} (i_L^{(i)})^2 = \int_{\Gamma_1} \{ E_{\text{b+e}} \times (h_0^{(i)} H_0^{(i)}) \} \cdot n dS \quad (82)$$

$$i_{\text{ext}}^{(i)} v_c^{(i)} = -\int_{\Gamma_2} \{ (e_0^{(i)} E_0^{(i)}) \times H_{\text{b+e}} \} \cdot n dS \quad (83)$$

となり、それぞれ、 Γ_1 を通して外に漏れ出る電力、つまり空洞壁での損失、並びに、 Γ_2 を通して外部から供給される電力を表すことが分かる。そして、電子ビームを表す電流源 $i_b^{(i)}$ が供給する電力は式(67)、(72)から、

$$i_b^{(i)} v_c^{(i)} = -\int_{\Omega} J_b \cdot (e_0^{(i)} E_0^{(i)}) dV \quad (84)$$

となり、電子ビームが共振空洞の電界によって単位時間あたりに失うエネルギーを表している。

最後に、等価回路の回路定数 $L^{(i)}$ 、 $C^{(i)}$ 、 $R^{(i)}$ 、 $G^{(i)}$ と共振空洞のパラメータとの関係は以下のようなになる。シミュレーションにおいては、これらの関係を使って共振空洞のパラメータから等価回路の回路定数を与える。

$$\omega_0^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{L^{(i)} C^{(i)}}} \quad (85)$$

$$\frac{1}{Q_1^{(i)}} = \frac{1}{Q_u^{(i)}} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}^{(i)}} \quad (86)$$

$$Q_u^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} L^{(i)}}{R^{(i)}} \quad (87)$$

$$Q_{\text{ext}}^{(i)} = \frac{\omega_0^{(i)} C^{(i)}}{G^{(i)}} \quad (88)$$

$$(R/Q)^{(i)} = \frac{1}{\omega_0^{(i)} C^{(i)}} \quad (89)$$

ここに $f_0^{(i)} = \omega_0^{(i)}/2\pi$ は i 番目の空洞の共振周波数、 $Q_1^{(i)}$ 、 $Q_u^{(i)}$ 、 $Q_{\text{ext}}^{(i)}$ はそれぞれ、 i 番目の空洞の負荷 Q 、無負荷 Q 、外部 Q 。 $(R/Q)^{(i)}$ はシャントインピーダンス $R_s^{(i)}$ と $Q_1^{(i)}$ を使って、以下のように定義される。

$$(R/Q)^{(i)} = \frac{R_s^{(i)}}{Q_u^{(i)}} = \frac{(V_0^{(i)})^2}{2\omega_0^{(i)} W_0^{(i)}} \quad (90)$$

3.3 Port 近似の利点と限界

さて、前のサブセクションで得られた等価回路方程式(74)~(78)を解けば $v_c^{(i)}$ と $i_L^{(i)}$ 、したがって式(20)、(21)中の $e_0^{(i)}$ と $h_0^{(i)}$ の時間発展が得られるわけだが、実際には計算時間を節約するためにこれらを直接には解かない。式(74)、(75)の一般解を求めて緩和時間を検討すれば、例えば負荷 Q の値が 5000 であれば電圧が 2.5%以内の誤差の

範囲に到達するためには 5000 周期 (1 周期は $1/f$) の計算が必要となることが分かる。空洞電圧の立ち上がりを知りたいければ致し方ないが、多くの場合、その最終値である周期定常解を知りたいのだから、Port 近似を用いたクライストロンシミュレーションでは、サブセクション 3.4 で説明する方法で解の収束を速めている。KUBLAI コードで用いられる方法では速ければ 3 周期程度、遅くとも 10 周期以内で最終値に対して 0.1% 以下の誤差の周期定常解を得ることができる。

これが、共振空洞を境界として直接 Maxwell 方程式を解く代わりに Port 近似を使う理由の一つだ。つまり、共振空洞を境界として PIC 計算を行う場合にも、Q 値の高い空洞では特に、同様に電磁界の収束の遅さが問題となる。Epply [5] や Becker ら [6] が、出力空洞だけを Port 近似を用いずにシミュレートした理由はここにある。ただし、Q 値が数千と高いアイドラ空洞においても実際には後述するビームアドミッタンスがあるので、数千周期の PIC 計算が必要になるわけではない。陳らの MAGIC を使ったシミュレーションでは 200~300 周期で周期定常解を得ている [9, 10]。それでも、Port 近似を使えば数周期で済むのだからそのメリットは大きい。

Port 近似のもう一つの利点は、cold-testing で測定された共振空洞のパラメータを容易にシミュレーションに導入できることだ。このことは、Port 近似ではもちろん当然のことだが、Port 近似を用いずに共振空洞を境界として PIC 計算を行う場合には注意が必要だ。つまり、空間メッシュを使って空間変数を離散化した PIC シミュレーションの上での空洞パラメータと、実機のそれらとを一致させなければならない。そのためには、空間メッシュの数を単に増やせば良いというわけではなく、例えば共振周波数を一致させるために Epply や陳らは、固有モード解析を行って共振周波数が測定値と一致するように空間メッシュ境界上のノードの位置を微調整し、そのメッシュを PIC シミュレーションに用いている [5, 9, 10]。もちろん、Port 近似を用いる場合と比べて、共振空洞の分だけ空間メッシュ数が増えること自体、計算時間とメモリの面で不利となる。

以上のように Port 近似の利点は大きいですが、Port 近似を用いない方法にも、より straightforward であることから有利な点がある。例えば、Port 近似を用いないシミュレーションでは当然扱われる基本モード以外の高次モ

ードや進行波型の出力空洞、出力空洞付近での三次元効果は、Port 近似を拡張すれば扱うことはできるが、これまでに扱われた例はない。また、Port 近似を用いたシミュレーションでは、特に出力空洞でエネルギーを失って“Port”の近くを通過する電子の運動にはあまり高い精度は期待できない。

Port 近似が近似である以上、その適用範囲や計算精度には当然限界がある。何をどの程度の精度で計算したいのかによるが、今後、計算機的能力が益々向上していけばいずれ Port 近似は必要なくなるかもしれない。

3.4 等価回路方程式の解法

ここでは、等価回路方程式の周期定常解を得る解法を説明する。

(i) まず、当初の Yu [7] や Carlsten [8] らの用いた方法を示す。周期定常に至れば、

$$v_c^{(i)} = \text{Re}[V_c^{(i)} \exp(j\omega t)] \quad (91)$$

$$i_L^{(i)} = \text{Re}[I_L^{(i)} \exp(j\omega t)] \quad (92)$$

と書ける²。ここに、 j は虚数単位。これを、例えば出力空洞の等価回路方程式(74)、(75)、(78)に代入すると。

$$V_c^{(i)} = \frac{I_b^{(i)}}{Y^{(i)}} \quad (93)$$

$$I_L^{(i)} = \frac{V_c^{(i)}}{R^{(i)} + j\omega L^{(i)}} \quad (94)$$

ただし

$$Y^{(i)} = G^{(i)} + j\omega C^{(i)} + \frac{1}{R^{(i)} + j\omega L^{(i)}} \quad (95)$$

ここで問題はビームローディング電流 $I_b^{(i)}$ が電子ビームを介して $V_c^{(i)}$ と $I_L^{(i)}$ の関数となっていることだ。そこで、

$$I_b^{(i)}(V_c^{(i)}) = I_{b0}^{(i)} - Y_b^{(i)} V_c^{(i)} \quad (96)$$

とする。ここに、 $I_{b0}^{(i)} = I_b^{(i)}(0)$ は $V_c^{(i)} = 0$ の時のビームローディング電流、 $Y_b^{(i)}$ はビームアドミッタ

² 実際には、Yu や Carlsten らは $V_c^{(i)}$ の絶対値と位相を扱った。

ンスと呼ばれ、共に定数であるとする。式(93)と(96)から

$$V_c^{(i)} = \frac{I_{b0}^{(i)}}{Y^{(i)} + Y_b^{(i)}} \quad (97)$$

を得る。 $I_{b0}^{(i)}$ と $Y_b^{(i)}$ は、 $V_c^{(i)}=0$ ともう一つ適当な空洞電圧を与えて $I_b^{(i)}$ を計算すれば得らる。

この方法では、 $I_{b0}^{(i)}$ と $Y_b^{(i)}$ を得るための2周期の計算で解が得られるが、もちろん非線形な相互作用に適用すれば大きな誤差を生む。ただし、電子ビームのエネルギーに比べて空洞電圧が小さい場合には有効で、FCIコード[2, 3]では入力空洞で、MAFIAコード[6]では出力空洞以外の全ての空洞で用いられている³。

(ii) Eppley [5] は、以下に示す方法で、 $V_c^{(i)}$ と $I_b^{(i)}$ の非線形性を扱った。

$$v_c^{(i)} = \text{Re}[V_c^{(i)}(t)\exp(j\omega t)] \quad (98)$$

$$i_L^{(i)} = \text{Re}[I_L^{(i)}(t)\exp(j\omega t)] \quad (99)$$

とにおいて出力空洞の等価回路方程式(74)、(75)、(78)に代入すると、

$$C^{(i)} \frac{dV_c^{(i)}}{dt} = -(G^{(i)} + j\omega C^{(i)})V_c^{(i)} - I_L^{(i)} + I_b^{(i)} \quad (100)$$

$$I_L^{(i)} \frac{dI_L^{(i)}}{dt} = -(R^{(i)} + j\omega L^{(i)})I_L^{(i)} + V_c^{(i)} \quad (101)$$

を得る。この式を使って、ある時間刻み Δt 毎に

$$V_{c,(n+1)}^{(i)} = V_{c,(n)}^{(i)} + \sigma \Delta t \frac{dV_c^{(i)}}{dt} \quad (102)$$

$$I_{L,(n+1)}^{(i)} = I_{L,(n)}^{(i)} + \sigma \Delta t \frac{dI_L^{(i)}}{dt} \quad (103)$$

のように順次計算していく。ここで、 σ は解の収束を速めるために導入される定数で $\sigma \geq 1$ である。

この方法で $\sigma=1$ の場合には、元の等価回路方程式(74)、(75)、(78)を直接解いた場合と同様に収束性が悪い。この方法のポイントは、式(98)、(99)のようにおいたことによって変数 $V_c^{(i)}(t)$ と $I_L^{(i)}(t)$ が周期定常ではなく定常に至ることにあり、したがって最終的には $dV_c^{(i)}(t)/dt=0$ 、 $dI_L^{(i)}(t)/dt=0$ となることから、収束を速めるため

³ その後のバージョンアップで変更されている可能性がある。

の加速係数 σ を導入することができる。

ただし、 σ には繰り返し計算を安定に行うためのある上限値が存在するため、 σ の選び方に注意しなくてはならず、また、空洞のQ値が高い場合には数十周期の計算が必要になる。FCIコード[2, 3]では、Q値の低い出力空洞にこの方法が適用されている。

(iii) 新竹はFCIコード[2, 3]において、1周期もしくは半周期毎に次のような計算を繰り返す方法をQ値の高いアイドラ空洞に適用した。

$$V_{c,(n+1)}^{(i)} = \frac{V_{c,(n)}^{(i)} + \frac{I_b^{(i)}(n)}{Y^{(i)}}}{2} \quad (104)$$

つまり、空洞電圧 $V_{c,(n)}^{(i)}$ を与えて電子ビームの軌道計算を1周期行って $I_b^{(i)}(n) = I_b^{(i)}(V_{c,(n)}^{(i)})$ を計算し、その $I_b^{(i)}(n)$ を使って式(93)から計算される電圧と $V_{c,(n)}^{(i)}$ の平均値を次の $V_{c,(n+1)}^{(i)}$ とする。

過程は単純だが、最終値が得られれば、その最終値はもちろん self-consistent な解となる。この方法は安定で収束性も良く、Q値の高い空洞においては(ii)の方法よりも速く解が収束する。

(iv) KUBLAIコードでは、(iii)の方法と同じく繰り返し計算で self-consistent な解を得ている。ただし、式(104)の代わりに次式で $V_{c,(n)}^{(i)}$ を更新する。

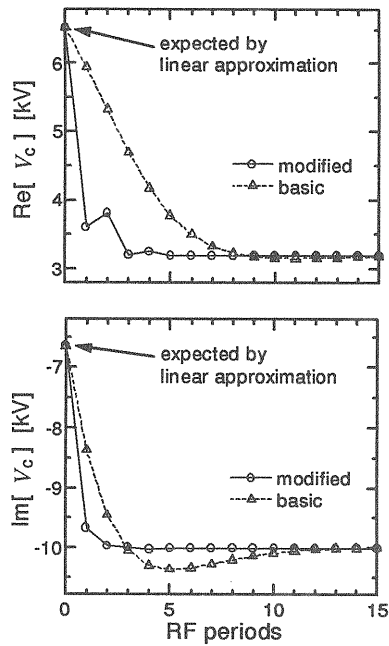
$$V_{c,(n+1)}^{(i)} = V_{c,(n)}^{(i)} \frac{I_{b0}^{(i)}}{Y^{(i)}V_{c,(n)}^{(i)} + I_{b0}^{(i)} - I_b^{(i)}(n)} \quad (105)$$

この式を書き直すと、

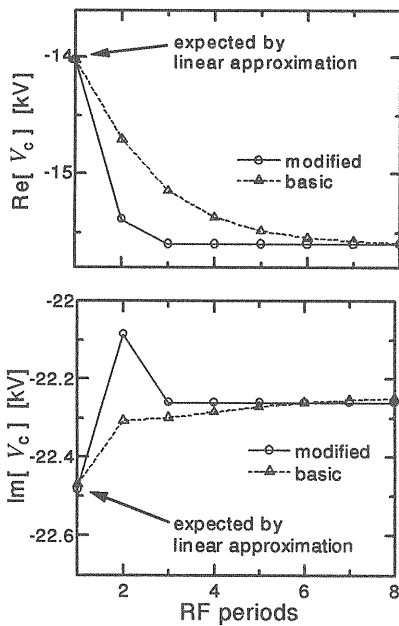
$$V_{c,(n+1)}^{(i)} = \frac{I_{b0}^{(i)}}{Y^{(i)} + Y_b^{(i)}(n)} \quad (106)$$

$$Y_b^{(i)}(n) = \frac{I_{b0}^{(i)} - I_b^{(i)}(n)}{V_{c,(n)}^{(i)}} \quad (107)$$

となり、(i)の方法を拡張したものになっている。つまり、(i)の方法ではビームアドミッタンス $Y_b^{(i)}$ は定数だが、この方法ではこのビームアドミッタンス $Y_b^{(i)}$ を順次更新していく。この方法は、図8に示したように、(iii)の方法よりもさらに収束性が良く、KUBLAIコードでは全ての空洞に対してこの方法が適用されている。



(a) E3718 クライストロン第2空胴



(b) E3718 クライストロン第4空胴

図8 空胴電圧 $V_c^{(i)}$ の繰り返し計算例 (ビーム電圧は83 kV)。(iii)の方法(三角)と(iv)の方法(円)との比較。

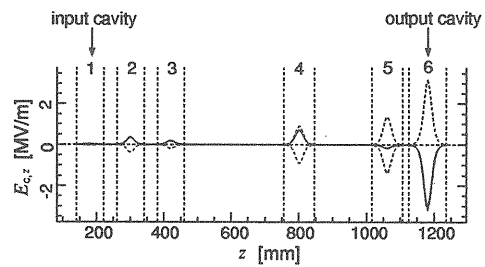
4 フローチャートと実機への適用例

前のセクションまでに、クライストロンのシミュレーションに必要な定式化を全て学んだので、後は空間変数を差分法や有限要素法で、時刻をルンゲクッタ法や leap-frog 法等で離散化すれば、

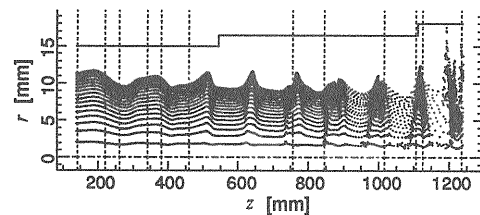
実際にコードを書いてクライストロンのシミュレーションを行うことができる。ここでは、KUBLAI コードの適用例 (図9) とフローチャート (図10) を示す。

図9は、ある位相 (時刻) における、(a) 軸上の空胴電界 (点線はピーク値で実線は瞬時値)、(b) ドリフトチューブ内の電子 (超粒子) の分布、(c) 電子の運動エネルギー、(d) 空間メッシュである。図中の点線は、各共振空胴の電磁界の及ぶ範囲を表している。

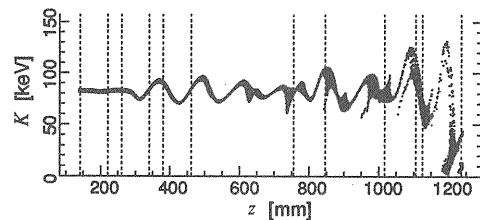
ビームの作る電磁界の方程式(40)~(43)の空間変数は、図9(d)に示したメッシュを用いて有限要素法で離散化する。図10(d)において、 r 方向の



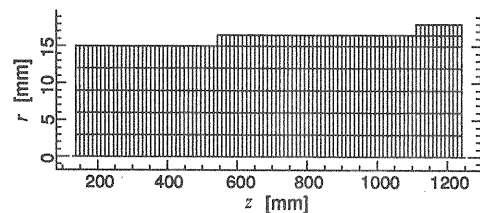
(a) 軸上空胴電界



(b) 電子の分布



(c) 電子のエネルギー



(d) 空間メッシュ

図9 KUBLAI の適用例

要素の数は5ないし7個だが、二次メッシュを用いているので節点の数は11ないし15個である。

空間変数を離散化して得られる常微分方程式を、図10に示したように、電子の運動方程式(7)、(8)、(10)、(11)と連立させて leap-frog 法を使って解く(時間刻み Δt は1周期の1/64)。ただし、通常の leap-frog 法では数値不安定性により電磁界が発散してしまうので、電磁界については改良 Newmark 法 [1] を使ってステップを進める。各時間ステップ毎の超粒子の位置と速度から式(72)のビームローディング電流 $i_b^{(i)}$ を計算する。さらに1周期毎に、1周期分の $i_b^{(i)}$ から $I_b^{(i)}$ を計算して、空胴電圧 $V_c^{(i)}$ をサブセクション3.4で説明した方法(式(105))で更新し、 $V_c^{(i)}$ が収束するまでこれを繰り返す。以上のプロセスを、入力空胴($i=1$)から、出力空胴($i=6$)まで順に進めていく。

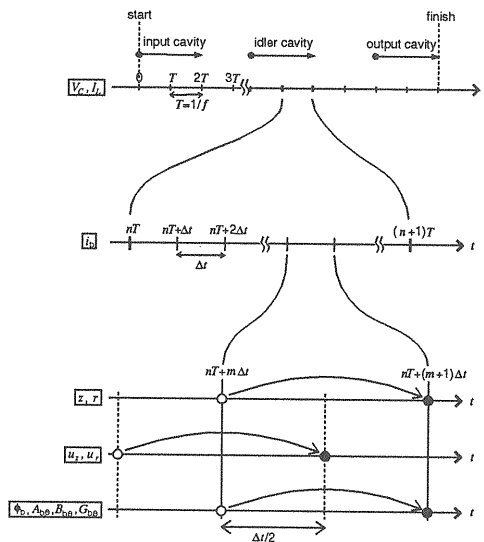


図10 KUBLAIのフローチャート

以上で KUBLAI コード、あるいは一般に Port 近似を用いたクライストロンシミュレーションを理解できたことと思う。残る興味は、これらのシミュレーションが実機性能をどの程度の精度で予測できるのかだ。

KUBLAI コードでは、東芝 E3718 (1250 MHz、CW 1MW、パルス 3.6MW)、東芝 1AV56 (615 MHz、17 kW)、SLAC XK-5 (2856 MHz、36 MW) の三つのクライストロンについて、クライストロン出力の実機測定値との誤差は-4.9 ~ +6.9%であった(一つの動作点の計算時間はSun

の SPARC station 20 ワークステーションで10~15分)。図11に一例として、XK-5の入出力特性のシミュレーション結果と実機測定値との比較を示す。その他の詳細については [1] を参照して欲しい。

他のコードについて、[13]には、CONDOR、FCI、MAFIA コードと実機測定値の比較が、[9, 10]には、MAGIC コードによる Port 近似を用いないシミュレーションと実機測定値との比較が述べられている。

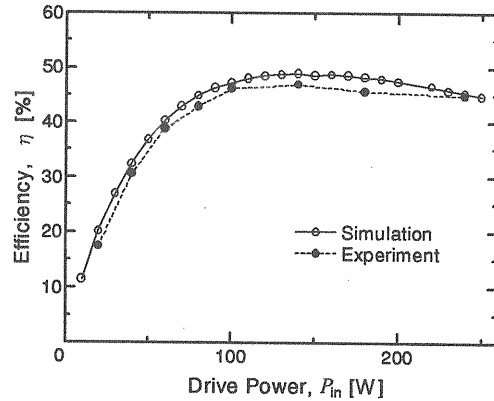


図11 KUBLAI 計算結果と測定値の比較 (XK-5 クライストロン)

5 おわりに

この拙稿をまとめるにあたって、これまでテキストは読んだことしかなかった自分に、分かり易くテキストを書くことができるのか不安であった。読み返してみるとやはり分かりづらい所が多々あるように思うが、ここで書きたかったことは、Yu そして Carlsten と Tallerico が考案し、多くのクライストロンシミュレーションで用いられている“Port 近似”がどのようなものなのかということだ。その利点と限界を理解していただければこの章の目的は達せられたと言える。

最後に、このテキストに書いたことは、KUBLAI コードの開発にあたって京都大学大学院において吉川潔教授の指導のもとで学んだことであり、その課程においては、高エネルギー加速器研究機構の新竹積氏、福田茂樹教授、陳榮浩氏、核燃料サイクル開発機構の平野耕一郎氏並びに東芝の E3718 クライストロン開発スタッフの方々、Technische Hochschule Darmstadt の Professor Thomas Weiland、Dr. Ulrich Becker の指導、アドバイス、協力が不可欠であったことを付け加えておきたい。

参考文献

- [1] K. Masuda, "Development of Numerical Simulation Code and Application to Klystron Efficiency Enhancement", PHD thesis, Dept. of Engineering, Kyoto University (1998).
- [2] T. Shintake, "High Power Klystron Simulations Using FCI-Field Charge Interaction Code", KEK Report 90-3 (1990).
- [3] T. Shintake, "Development of FCI-Field Charge Interaction Code for High-Power Klystron Simulations", private communication.
- [4] B. Aiminetti, S. Brandon, K. Dyer, J. Moura and D. Nielsen, Jr., CONDOR User's Manual, Livermore Computing Systems Document (Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, CA., 1988).
- [5] K. R. Eppley, "Algorithms for the Self-Consistent Simulation of High-Power Klystrons", SLAC-PUB-4622 (1988).
- [6] U. Becker, M. Dohlus and T. Weiland, "Three Dimensional Klystron Simulation", Particle Accelerators, vol. 51, pp.135-154 (1995).
- [7] S. Yu, "Particle-in-Cell Simulation of High Power Klystrons", SLAC/AP-34 (1984).
- [8] B. E. Carlsten and P. J. Tallerico, "Self-Consistent Klystron Simulations", IEEE Trans. on Nuclear Science, vol. NS-32, no. 5, pp. 2837-2839 (1985).
- [9] Y. H. Chin, "Modeling and Design of Klystron", Proc. of the 1998 Particle Accelerator Conference, Chicago, pp. 367-371.
- [10] S. Matsumoto, S. Michizono, H. Tsutsui, Y. H. Chin and S. Fukuda, "Simulation Study of the Bunching Section of X-Band Klystrons", Proc. of the 1998 Particle Accelerator Conference, Chicago, pp. 490-492.
- [11] 塚原大輔、「進行波型高周波電子銃の特性解析」、京都大学工学研究科修士論文(1997)。
- [12] 藤澤和男、「マイクロ波回路」第7章(コロナ社、1960)。
- [13] U. Becker and T. Weiland, "Comparison of CONDOR, FCI and MAFIA Calculations for a 150 MW S-Band Klystron with Measurements", Proc. of the 1995 Particle Accelerator Conference, Dallas, vol. 4, pp. 2190-2192.