

# 1 はじめに

## 課題の設定

加速器ビームを相手にしている時に遭遇する具体的な状況、例えばコミッショニング中の加速器ビームが予期に反して細く絞れないとか、位置変動が激しいとか、ビーム寿命が短かすぎるとか、そんな様々な困難な局面を想像してください。あるいは新しいタイプの加速器を設計する立場に立った時です。その新しい加速器のビームにはどのような困難や制約が生じ得るか、そしてその加速器で実現可能なビーム特性はどのような範囲にあるのかを検討する必要があります。

こんな時に、全体的なビームの状況を的確に把握分析し解決方法や設計案を練る上で、役に立つものの提供を目指したいと思います。そのために、どのように考えて行くかという論理の展開や頼りにすべき思考の枠組みの解説を試みたいと思います。とはいうものの、自分自身が日頃の仕事の中で、余り意識せず使っている事柄を意識上に乗せて説明するだけの事です。このような方法で、不十分ではありますが、「ビーム特性を決める物理への一般的入門」という課題に答えたいと思います。

## 取り上げる加速器の範囲

ここで考える加速器の種類としては、主として高エネルギー物理や放射光源のための電子（陽電子）貯蔵型加速器を取り上げます。さらに様々な点で対照的な加速器として陽子シンクロトロンも視野に置き、特定の加速器の種類には拘らない形で話を展開するつもりです。また円形加速器ばかりでなく、線形加速器も含まれていると考えてください。

## ビーム特性とは

まず、ナイーブに加速器のビーム特性とは何かと問われたとき思い浮かぶことは、ビーム強度、ビーム位置、水平と垂直そして縦方向のエミッタンス、などがまず挙げられるでしょう。そしてそれらの時間的安定性と言う視点から、ビーム寿命、ビーム位置変動、ビームサイズやエネルギー拡がりの安定性、と言ったものが検討の対象になるでしょう。このテキストで想定するビーム特性を表 1 に纏めて示しておきます。

## ビーム特性の意義

どんな加速器でも、それぞれの加速器がその目的を達成するために必須な性能指標というものがあります。加速器の設計時には、加速器目的に沿った性能

ビーム特性	時間的視点から
ビーム強度	ビーム寿命
ビームエネルギー	ビームエネルギー変動
ビーム位置	ビーム位置変動
水平垂直ビームサイズ	ビームサイズ変動
バンチ長	バンチ長変動
ビームエネルギー幅	エネルギー幅変動

表 1: 主なビーム特性。

加速器の種類	代表的性能指標	主に寄与するビーム特性
衝突型加速器	ルミノシティ	ビーム強度 サイズ
放射光リング	ブライツネス	ビーム強度 サイズ エネルギー幅
医療用陽子線加速器	最適ビームエネルギー 最適照射線量 最適照射深度 最適照射位置 (呼吸同期)	ビーム強度 エネルギー 位置 サイズ スピル構造

表 2: 加速器の性能指標と関与するビーム特性。

指標に到達する基礎にその加速器で実現すべきビーム特性を設定します。逆に、加速器の性能指標に影響するビーム特性こそが最大の関心の的なのです。

表 2 に、いくつかの加速器例について、加速器の種類と代表的な性能指標を関与するビーム特性と共に示しています。

最近の加速器は、より高度な加速器目的達成のため、可能なギリギリの性能指標が設定される様になっています。厳しい性能指標を実現するために、性能指標に関与するビーム特性の範囲は広く且つ厳しい要求になる趨勢です。これからの加速器の性能発揮のためには、原理的レベルにまで立ち戻ってビーム特性の限界を見直すことが大切であろうと思います。

ルミノシティやブライツネスに直結するシンプルな条件として、表 1 に挙げたビーム特性をこのテキストの検討対象にします。

## 2 ビーム物理のマクロ概念

特定の加速器タイプに限定せず、出来るだけ幅広く学問的客観的な立場でビーム特性を決めるメカニズムを考えてみたいと思います。

ビーム特性決定の物理では、ビーム物理学上確立したいいくつかの有効な物理学的観念があり、これらはビーム物理のマクロ概念とも呼ぶべきものです。これらのマクロ概念に基づけば、個々のビーム現象の詳細に立ち入らず、一般的且つ包括的な議論を展開できます。具体的にどのようなビーム現象について、これらマクロ概念が有効に適用されるかを、このテキストの核心的話題にしようと思います。

## 2.1 正準運動と非正準運動

ビームを構成する個々の粒子が同一の運動方程式で記述されるとき、言葉を換えれば同一Hamiltonianを用いた正準形式で運動方程式が書ける時、運動は正準 (canonical) です。そして正準運動を特徴付ける具体的な表現シンプレクティック (symplectic) 条件を満たします。このシンプレクティック条件の一部から、リウビル (Liouville) の定理：「ビームが位相空間上に占める面積は運動によって不変」と言う加速器ビームの一般的性質が導かれます。すなわちこのリウビルの定理の成立要件はビームを構成する個々の粒子が正準運動を行うことです。

### 2.1.1 Symplectic条件

正準方程式で運動が記述される位相空間の点 $\eta$ を考えると、この運動方程式は次の形式で書けます。

$$\dot{\eta} = S \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (1)$$

ここで行列 $S$ はSymplectic行列と呼ばれます。この行列は正準形式に特有なもので、位相空間ベクトル $\eta$ の要素の並べ方に応じて、次のように行列要素が与えられます。

$$\eta = \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{pmatrix} \text{の時、} \quad (2)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

さてこの $\eta$ が、正準変換に限定しない一般の変換を受けるとき、

$$\zeta = \zeta(\eta) \quad (3)$$

変換後の位相空間ベクトル $\zeta$ の従う運動方程式は、変換のヤコビアン $M$ を使って次のように表現されます。

$$\dot{\zeta} = M \dot{\eta} \quad (4)$$

ヤコビアン $M$ の行列要素は以下で定義されています。

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \quad (5)$$

変換後の $\zeta$ の従う運動方程式 (4) に、変換前の $\eta$ の従う運動方程式 (1) を代入し、次の関係を適用することにより、

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_i} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial H}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \implies \frac{\partial H}{\partial \eta} = M^t \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (6)$$

$\zeta$ の運動方程式は次の様になります。ここで上添字 $t$ は行列の転置を意味します。

$$\dot{\zeta} = M S \frac{\partial H}{\partial \eta} = M S M^t \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (7)$$

この運動方程式は、明らかに正準方程式 (1) と形が異なり、正準形式ではありません。これは施した変換 (3) が、正準変換に限らない一般の変換だからです。運動方程式 (7) が正準形式となるには、変換のヤコビアンが次の条件を満たす必要があり、これがSymplectic条件と呼ばれるものです。

$$M S M^t = S \quad (8)$$

このSymplectic条件は、Symplectic行列の性質 $S^2 = -I$ を使えば、次の形と等価です。

$$M^t S M = S \quad (9)$$

### 2.1.2 リウビルの定理

転送行列による運動の記述が有効な線形システムの場合について、Symplectic条件を具体的に見てみます。2行2列の転送行列 $M$ が (9) に得たSymplectic条件を満たす条件は、

$$\begin{aligned} M^t S M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ bc - ad & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\det M) S \end{aligned} \quad (10)$$

これより、転送行列の行列式が1であるとき、Symplectic条件が満たされます。この条件は、正

準変換に際して位相空間面積が保存される事を表します。

ビームを構成する多数の粒子が分布する位相空間領域の面積をエミッタンスと呼びますが、非線形運動を含む一般の場合に、正準運動として記述される運動に際してエミッタンスは保存します。加速器分野では、これをリウビルの定理と称します。

今は1自由度の場合を考えたため、Symplectic条件から得られる条件の数は1個でしたが、2ないし3自由度の場合には当然得られる条件数が増えます。計算機を使う粒子トラッキングでは、これらのSymplectic条件を満足する様にして、誤差の累積や非物理的な計算アルゴリズムの混入を避けることが行われています。

### 2.1.3 正準運動

正準運動の従うべきある意味できつい条件にも関わらず、正準運動の範囲内でも多彩な運動形態を見ることが出来ます。

#### 共鳴

力学系が線形の場合には振動数（円形加速器ではベータトロンチューンやシンクロトロンチューンに相当）が整数ないし半整数の時、振動が共鳴状態になります。この時振動数は複素数値を取り振動の振幅は指数関数的に増大します。線形系の特徴として、全位相空間が一様に共鳴状態に入り、非共鳴状態では相似の楕円を描いていた運動粒子の軌跡が、共鳴状態では双曲線軌道へと変化します。

一方、力学系が非線形の場合には、共鳴状態に入る振動数は一般の有理数へと幅が広がります。線形系のように一斉に、位相空間全域が共鳴状態と非共鳴状態とに移り変わるのではなく、原点付近は非共鳴状態の（擬）楕円運動を示しながら、その外側周辺部では共鳴状態の（擬）双曲線運動を行うこともあり、さらにその外側には局所的に安定な楕円運動領域が島のように点在するなど、位相空間は場所毎に複雑で変化に富んだ様相を呈します。

#### 結合

水平、垂直そして進行方向の3方向における振動を、通常は分離して取り扱います。しかしこれは近似的取り扱いです。線形系の場合振動を3つのノーマルモードに分離することが出来ますが、問題はこのノーマルモードが物理的な水平、垂直そして進行方向と一致するとは限らないことです。

そのため、理想的には殆どゼロとなる管の電子貯蔵リングの垂直ビームサイズが、集団的不安定現象

も起きていないのに可成りの大きさに膨らんだりします。この場合には、シンクロトロン放射に際してベータトロン振動を励起する強さを支配する（偏向磁石中の）運動量分散関数の方向とノーマルモードの方向との関係が重要となります。

#### ハミルトン系のカオス

運動の非線形性の為に、正準運動の範囲内でも随分と多彩なビーム運動が生じます。その極め付けがハミルトン系で生じるカオス現象でしょう。計算機の発達に支えられて発展したこの分野は、今では物理学以外にも広がる学問の一大分野となっています。

ビーム粒子の分布が千々に引き裂かれその断片が位相空間中を拡散して行くため、ミクロなスケールでは依然保存しているエミッタンスが、マクロなスケールで見ると実効的に増大することがあります。例えてみれば、脂身と赤身肉が分離したバラ肉状態から、脂身と赤身肉の比率を変えずに、両者が混ざり合った霜降り肉状態へと移す変換が、正準運動を通じて起こせるということです。

#### ダイナミックアパーチャ

加速器の設計や運転をする立場からは、6極磁石等の加速器非線形要素が生起する現象の内、動的口径（Dynamic Aperture）がもっとも切実な問題でしょう。

非線形効果により、ビーム中の粒子の振動振幅が一定値（動的口径限界）を越えると、たとえ真空容器サイズで決まる物理口径内に振幅が収まっても、振動が不安定となりどんどん振幅が増大し遂にビームが真空容器壁に衝突して失われます。この振動振幅の限界となる動的口径限界値を評価し、これを最大限大きくできる非線形要素の配置や強度を決定するために、計算機シミュレーションが行われます。

### 2.1.4 非正準運動

実際のビームをとりまく環境は、さらに多彩な物理現象に充ち満ちており、正準運動として記述できない現象も多々生じます。それは例えば、ビーム内粒子間の相互散乱、残留ガスとの散乱、シンクロトロン放射による振動の量子励起などです。

これらの現象では、ビームを構成する粒子各々の運動に、確率的に異なった影響を受けます。これは同一Hamiltonianで記述することはできません。非正準運動に起因する加速器ビーム特有の多くの重要な物理現象を、正準運動と対比させて、理解することが大切です。

## 2.2 単粒子運動と多粒子運動

典型的な加速器ビームの1バンチ（高周波電場に捉えられた一塊りのビーム）には凡そ $10^{10}$ 個程度の粒子が含まれ、非常に多数です。通常のビーム観測装置で測定することが出来るのは、これら多数粒子の強度や重心位置と分布の空間的広がりの大雑把な姿です。つまり個々の粒子の運動を直接観測することは出来ません。

重心位置の運動を記述する運動方程式は、当然ながら個々の粒子が従う運動方程式とは異なります。そして特に注意が必要なのは、個々の粒子が正準運動をしている場合でも、重心運動としては必ずしも正準運動を行わないということです。

## 2.3 コヒーレンスとインコヒーレンス

### 2.3.1 粒子性ビーム

ビームを構成する粒子が互いに同一位相で振動するのがコヒーレント運動です、この運動はビーム全体が振動するので観測できます。一方、個々の粒子がバラバラな位相で振動するのがインコヒーレント運動で、この時ビームを全体的に見ると振動が無い様に見えます。このようなコヒーレンスとインコヒーレンスという視点は、ビーム運動を考えると注意すべきポイントの一つです。

空間電荷効果、ビームローディング、ビームビーム相互作用等が原因で、ベータatron振動数やシンクロtron振動数が元々の数値からシフトすることがあります。このような振動数のシフト量は、ビームが全体として静止している時に粒子各々の振動数がシフトする場合（インコヒーレントチューンシフト）と、ビーム全体が（コヒーレントに）振動する場合の振動数シフト（コヒーレントチューンシフト）とは、一般に異なった値を持ちます。

ここで生じる振動数シフトの原因は、自己ビームが誘起したり自己ビーム運動の影響下にある相手ビームが作る電磁場です。ビーム全体が動いている時と全体が静止している時とで、生じる電磁場が異なり、振動数シフト量も違う訳です。

再びビームを観測する立場から言えば、ビーム全体の振動を見ることは出来ませんが静止ビーム内の粒子個々の振動を観測することはほとんど不可能です。つまりコヒーレント振動数シフトは測定できますが、インコヒーレント振動数シフトを直接的に観測することは出来ません。

### 2.3.2 波動性ビーム

シンクロtron放射光など波動場から成るビームについても、コヒーレントおよびインコヒーレントの

概念が有効です。単独の電子からの放射と比べ、多数個の電子から発生するシンクロtron放射光は、放射のコヒーレンス・インコヒーレンスの状態に応じ、スペクトラムの形においても放射パワー（放出光子数）においても異なります。

例として、単位時間当たり $NQ$ クーロンの電荷が通過するとして、光速度 $c$ で進行する荷電粒子の時間分布が図1に示す4種の場合に、その各々について放射される光の特性を検討します。ここで、個々の荷電粒子の軌跡は全て同一とします。

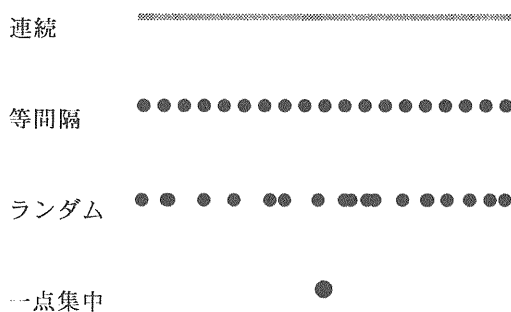


図1: 進行する荷電粒子の時間的構造4種。粒子軌道は全て同一である。

電荷が無限小に分散し、それが一様に連続分布して進行するとき、放射は全く出ません。

素電荷 $Q$ を持つ荷電粒子が、正しく等間隔に連なって進行する場合には、発生する電磁場には周期 $1/N$ の時間的周期構造が存在します。このフーリエ変換が放射場の周波数スペクトルになるので、放出される光子の周波数は $N$ とその整数倍に限られます。 $N$ の整数倍の周波数成分で見れば、電磁場の強度は単一荷電粒子の作る電磁場の $N$ 倍なので、放出光子数は $N^2$ 倍になります。スペクトル形状は $N$ の整数倍の周波数でのみピークを持つ構造になります。

電子が全く乱雑な間隔に並んで進行するときは、パワースペクトルの形は単粒子スペクトラムと同じで、そこに放出される光子数は単粒子の場合の $N$ 倍になります。これは完全にランダムな場合<sup>1</sup>の電磁場の揺らぎが $\sqrt{N}$ に比例し、放射パワー即ち放出光子数はその2乗に比例するためこのようになると考えることが出来ます。

最後に全電荷が一点に集中した場合。電荷量 $NQ$ の1粒子が運動するわけですから、通常のシンクロtron放射の公式に出てくる素電荷 $Q$ を $NQ$ で置き換えれば良いわけで、パワースペクトルの形は単粒子スペクトラムと同じで、放出される光子数は単粒子

<sup>1</sup>どの周波数成分を見ても、進行荷電粒子各々から放射される電磁場の位相がバラバラ（インコヒーレント）であると言っても良いでしょう。

荷電粒子の 時間的構造	スペクトルの 形状	放出する 光子数
連続	平坦	全く出ない
等間隔	間歇ピーク構造	ピーク部で $N^2$ 倍 他領域は出ない
ランダム	単独粒子と同型	$N$ 倍
一点集中	単独粒子と同型	$N^2$ 倍

表 3: 進行荷電粒子の時間的構造と放射スペクトル特性。

の場合の $N^2$ 倍ということになります。以上の結果を纏めて表 3 に示します。

## 2.4 協同的集団現象

ビームがコヒーレント運動をするときは必ず、印可電磁場ないし自己誘起電磁場、または運動に関与する対向ビームや光電子などの媒体を通じ、ビームの巨視的領域に力が働きます。

例えば、キッカー磁石でビームにコヒーレントベータトロン振動を起こさせる時、一過性の印可電磁場が与える力に因り、ビーム全体に一樣な横方向運動量が発生します。一旦キックを受けた後、ビームの巨視的領域に働く力は消滅し、ビーム内の個々粒子は互いに無関係に自由ベータトロン振動を続けて行きます。

ここに発生したコヒーレント振動が電磁場を誘起すれば、そしてこの自己誘起電磁場がビームのコヒーレント振動をさらに増大させる様な力を生じるとき、正のフィードバックループが完成します。逆に加速器やビームのパラメータ選択に依っては、自己誘起電磁場がコヒーレント振動を抑制する様に働く場合もあります。

このようにビーム内粒子間に、巨視的領域に相互作用を伝え合うメカニズムを有するとき、これに基づいて発生するビームのコヒーレント振動を協同的集団運動と呼びます。

ビーム内粒子が相互作用に因って結び付いているコヒーレント運動では、コヒーレント運動の振動数は相互作用の強度によって変化します。そしてコヒーレント運動の運動形態（モード）に依ってもこの振動数は異なります。例えば、シンクロトロン振動の場合、ビームエネルギーの中心が振動する 2 極モードや、中心エネルギーは不変でバンチ全体の長さが伸び縮みする 4 極モード等があります。このように一般に、コヒーレント運動にはモードがありモード固有の振動数が存在します。

## 2.5 中心極限定理

シンクロトロン放射における多数の光子のランダムな放出、残留ガス分子との散乱など確率的に起こる現象を含む物理過程では、統計的に取り扱うことで有用な物理的結論を導くことが出来ます。この中で中心極限定理（Central Limit Theorem）が非常に重要な役割を果たします。

この定理の主張は

「互いに独立な確率変数の和の分布は、或条件の下では、近似的にガウスの正規分布に従う」

ということです。

此処で或条件とは、数学的には色々難しいことがあるようですが、簡単に言えば、「非常に多数の和であること、そして少数の確率変数が特に大きく他を圧倒するようなことがないこと」でしょう。

電子貯蔵型加速器におけるビームのエネルギー分布やエミッタンス分布は、中心極限定理が成り立つシステムの良い例で、共にガウス型分布になります。これらのリングで時として問題になる非ガウス型ビームテイルの発生も、何処かの確率過程において中心極限定理が破れたとして理解することが出来ます。

## 2.6 単一散乱と多重散乱

シンクロトロン放射、残留ガス分子との散乱、イントラビーム散乱など全ての散乱過程に於いて、単一散乱と多重散乱と言う概念が有効です。

単一散乱の効果は、1 回の散乱でビーム粒子が大きく影響を受けビーム損失に直結して、ビーム寿命の短縮として顕在化します。

一方、多重散乱の場合では、散乱の影響は多数回の散乱に渡って累積したもので、多くの場合その効果は中心極限定理が成立するとして見積もることが出来ます。そしてこの帰結はエミッタンスやエネルギー幅の増大として現れてきます。

さらに、単一散乱と多重散乱の中間の性格を持った少数複数回散乱とも呼ぶべき散乱も原理的にはあり得えます。このような散乱は中心極限定理が成立しない多重散乱と考えることもでき、このタイプのシンクロトロン放射や残留ガス分子との散乱またイントラビーム散乱により、非ガウス型のエミッタンスやエネルギー分布を生じる場合があります。

## 2.7 古典論と量子論

この視点については、私自身がまだまだ未熟状態でちゃんとした議論は展開できません。でも、今後に向けて大きく面白く展開してゆく可能性を秘めた分野なので、若干の感想を述べておきたいと思います。

通常大人しく加速器の中を走っている或る程度高エネルギーのビームについては、古典的取り扱いで殆ど十分に運動が記述されます。量子論による位置の不確定性の目安を与えるドブロイ波長が非常に短いからです。そして古典的取り扱い特有の、物理現象についてのきっちりとした描象を持つことは、ビームに生じる現象を議論する場合に健全な拠り所となります。その意味で、徒に中途半端な量子論的描象によってビームの物理の議論をすることは危険な点があると思われれます。

しかしながら、当然ビームの物理には量子論的視点が不可欠で、量子論的取り扱いが必須となる決定的局面があります。その典型は、ビームと電磁場や物質との間の相互作用を記述する場合です。一例がシンクロトロン放射です。ビームを構成する粒子の運動は終始一貫して古典的ですが、光を放射するときまた放射された光を観測する時、光子と言う量子化された存在が認識されます。ビームが行う様々な散乱過程自身も量子力学に基づいて理解され計算されます。またパラメーターが極端な極限状態で表面化する量子論的振る舞いもあります。リニアークライダの衝突点に於けるビームビーム効果やビーム粒子が対向ビームの作る巨視的電磁場と相互作用することで行う対生成などです。もちろん加速器計画の目的である素粒子反応の理解と言う見地では量子論が必須で、むしろさらに量子論の向こうに存在する未知の物理法則を求めて加速器を使った実験をしているわけです。

言葉の綾として量子論特有の用語が用いられる事も有りますが、物理として量子論故の実体的意義を有するか否かを充分吟味することが必要と思われ、またこれは興味有る作業に感じられます。充分に良く理解された物理的存在と思われるビームに、古典論と量子論の両者から迫ることで、物理学への理解を深めてみたいものです。

### 3 相互作用の伝達媒体

ここではビームに働きかける力の伝達が何によって担われているかという点に注目し、相互作用の伝達媒体という視点を独立した項目として立ててみます。

一見不可解に見えるビーム現象に遭遇した場合でも、必ずビームに働く力とそれを担う物理的媒体が存在しているはずで、ビーム現象を解明するためには、虱潰しに全ての可能性をチェックする事が大切で、このためのリストを作成する参考にも成ると思います。

また、このようなアプローチを通じて加速器のビームに生じる物理現象がなかなか豊穡な物理を含んでいるらしいと実感して貰えるよう期待します。

## 3.1 電磁場・光子

### 3.1.1 印可静電磁場

偏向、収束、補正さらにビーム入射や取り出し等の目的のため使用される基本的な加速器構成磁石類が主です。

磁場の次数としては2極、4極、6極さらに8極磁石程度までの磁場が可成り普通に使用されます。さらにこれら磁場の歪成分（ビーム軌道平面に直交しない成分）が使われることもあります。特に衝突型加速器では、素粒子反応検出装置が発生するソレノイド磁場のビームへの効果をうち消すため、歪4極磁石や補正ソレノイド磁石が使用されます。

円形加速器ではビームの入射取り出しのために、パルス磁場を発生するキッカー磁石が一般的に使われます。

また目的によって、（ビーム源に直結した初期加速用）静電加速、（単リング型衝突加速器でビームを分離する）静電セパレータそして（イオン捕獲を避ける為の）イオンクリア電極などの電場も使われます。

磁石の設計製造や設置上の実制的制約のため、好ましからざる磁場成分の存在も避け難い面があります。これらの基本的磁場によってビーム特性が決まるため、ここに生じる誤差磁場や磁場の時間変動が、ビームオペティクス、エミッタンス、ダイナミックアパーチャ、軌道変動などを通じ、幅広くビーム特性に影響します。

さらに放射光生成それ自身を目的としたり、放射光生成によるビームエネルギー巾やエミッタンスそして振動減衰時間等の最適化を目的として、アンジュレータやウィグラー等の磁石を使用する事もあります。

### 3.1.2 印可高周波電磁場

加速用高周波電場が主です。ビーム診断等を目的とした（ベータトロン振動を励起する）横方向高周波電場を使用する場合もあります。加速電圧はビームバケットの大きさを決め、バンチ長やビーム寿命に直結します。また周波数によってビーム軌道が決まり、電子貯蔵リングでは減衰分配率を左右することでエミッタンスに影響します。

### 3.1.3 印可レーザー光

電子ビームとレーザー光とのコンプトン散乱によって、比較的低いエネルギーの電子ビームから、高エネルギーγ線や硬X線が生成されます。この場合のレーザー光は極短周期のアンジュレータと考えることも出来ます。

アンジュレータ磁場中を進行する電子ビームにレーザー光を印可する場合には、蛇行運動する電子とレーザー光電磁場が相互作用を行います。これにより、ビームバンチ内にはレーザー光の波長を周期とするエネルギー変調を生じ、運動量分散部を経て空間変調に転じます。これにより強いコヒーレント光の発生を行うのが、レーザー光を種光とする自由電子レーザーの原理です。

### 3.1.4 自己励起電磁場

#### ウエイク場

ビームの協同的集団現象の主要な源です。荷電粒子の集団であるビームが誘起する電磁場は、周囲の真空壁の形状や材質等の影響を受けて、うしろに尾を引きます。これをウエイク場（航跡場）と呼びますが、後に続くビームがこのウエイク場の影響を受けて、様々なビームの協同的集団現象を起こします。

電子線形加速器では加速中のバンチ内粒子の前後順が不動です、そのためビームの先頭部は後ろに影響を与えますがビーム後部が先頭部に影響することはありません。これが電子線形加速器におけるビーム不安定現象の特質です。

一方、円形加速器の中ではシンクロトロン振動のため、バンチの先頭部と尾部はシンクロトロン周期で位置を交代します。はじめ先頭部が与えたビーム尾部への影響が、回り回って自分自身に戻るメカニズムが存在するわけです。このメカニズムによるビームの協同的集団現象をヘッドテイル効果と言います。この現象に因るコヒーレントベータトロン振動の抑制のため、ベータトロン振動数のエネルギー依存率（クロマティシティと呼びます）を正にすることが電子貯蔵リングでは一般的に行われています。

真空容器壁の一部に膨らみ等の構造があると、特定周波数の電磁場がここに捕らえられ、なかなか減衰しません。このようにウエイク場の影響が長く尾を引く場合は、前を行くバンチから後に続くバンチへと長距離に渡る相互作用が生じます。円形加速器では、この相互作用の連鎖は一周して自分自身に戻ってきます。これをバンチ結合型ビーム不安定現象と言います。

ウエイク場をフーリエ変換し周波数成分で見たものをインピーダンスと呼びます。加速器の真空装置や高周波空洞の設計製作に際しては、各装置のインピーダンスを電磁場の数値計算を通して評価し、ビーム特性上有害な協同的集団現象を避ける努力が精力的に行われています。

#### 空間電荷効果

特にビームエネルギーの低いハドロンビームの初期加速段階では、ビーム自身の電荷を源とする直接的なクーロン電場の効果によりビーム運動が影響されます。これを空間電荷効果と言います。ビームが加速され相対論的になるにつれ、ビーム自身の電流が作る磁場の効果により電場の効果が打ち消されるようになり、空間電荷効果は弱まります。陽子シンクロトロン入射エネルギーの選択では、この空間電荷効果を考慮することが重要です。

#### 自己放出シンクロトロン放射光

偏向磁石やアンジュレータの中を進行する電子ビームは、シンクロトロン放射光を発生します。この放射光自身がビーム特性に影響を与えますが、放出される放射光がコヒーレントかインコヒーレントかによって異なる影響が生じます。

インコヒーレント放射光の場合、光子放出に於ける個々の荷電粒子への直接的反作用が主な効果です。ビーム全体への影響は統計的に中心極限定理に基づいて評価できます。電子貯蔵型加速器の基本的ビーム特性（エネルギー幅、エミッタンス）を決める主要因がこのプロセスにあることは良く知られている所です。

（広い意味の）コヒーレント放射光の場合。（狭い意味の）コヒーレント放射は、短いバンチのビームが偏向磁石を通過するとき起こります。これはバンチ長程度以上の波長域で、放射される光にコヒーレンスがあるため、特に強いシンクロトロン放射光が放出される現象です。偏向磁石中なのでゼロで無い運動量分散関数が存在し、放射に伴うビームエネルギー変化が水平方向ベータトロン振動を励起します。つまりこのプロセスは、水平エミッタンスの増大を招く可能性があります。対策として、ここで放射されるのは比較的長い波長の電磁場なので、ビームダクトを細くしダクト内伝搬電磁場のカットオフ周波数を高くすることで放射を抑制することが考えられます。

自由電子レーザー作用の核心は自己放出放射光によるビームのマイクロバンチ化です。アンジュレータ内を通過する電子ビームに、このアンジュレータ放射スペクトルのピークに波長を合わせた種光レーザー場を重畳し、ビームにレーザー波長に対応するマイクロバンチ構造を作ります。このお陰で、シンクロトロン放射がコヒーレントになり強度が非常に増加します。

### 3.1.5 黒体輻射光子

完全な真空度が達成できても、ビームが通る真空容器の中には黒体輻射光子が満ちています。高エネルギー電子がこれらの光子と起こすコンプトン散乱によって、エネルギーを大幅に失いビーム損失に繋がることがあります。100GeV程度のビームエネルギーで運転しているCERNのLEP加速器のビーム寿命はこの効果に大きく影響されています。

## 3.2 物質・ビーム

重そうに感じられる順に並べました。

### 3.2.1 容器壁

物理口径そのものです。最終的にビームはここに衝突して失われます。またこの表面は残留ガス分子の貯蔵供給元という性格もあります。さらにシンクロトロン放射を受けて光電子脱離を生じる場でもあります。

### 3.2.2 荷電変換入射用薄膜

この薄膜を通過することで、 $H^-$ ビームから電子を剥ぎ取り陽子ビームに変換します。この非正準運動プロセスによって、位相空間の同じ位置にビームを入射し詰め込んでゆけます。しかし一方、すでに貯め込まれた陽子ビームも、入射プロセスが続く間薄膜を通過しなければならないので、薄膜構成物質による散乱を受け、エミッタンスやエネルギー巾の増大要因となります。

### 3.2.3 ダスト粒子

帯電したダスト粒子は質量の割に電荷量が非常に少なく、シングルバンチ運転など、通常のイオン捕獲が生じない条件下でもビームの作る電場ポテンシャルに捕獲されます。このため電子貯蔵加速器に顕著なビーム寿命短縮をもたらします。電荷量が少ないため、イオン捕獲現象とは異なりベータトロン振動数のシフトを伴いません。

ダスト粒子は電子剥ぎ取りにより正に帯電すると考えられ、ダスト粒子捕獲は陽電子リングでは起こりにくいと一般に信じられています。

### 3.2.4 残留ガス分子

ビームが残留ガス分子と起こす相互作用は、基本的な散乱過程でも幾つか有ります。電子とのバーバー散乱(メラー散乱とも呼ぶ)、原子核とのラザフォード散乱(クーロン散乱とも呼ぶ)や制動放射

(Bremsstrahlung)です。他にもあるかも知れませんが、これらの散乱過程がビームにもたらす影響は各過程の(微分)散乱断面積を使って評価します。

既に述べたように当然、単一散乱と多重散乱があり、異なる影響がビームに生じます。単一散乱はビーム寿命短縮、多重散乱はビーム分布の拡散を招きます。

イオン捕獲と呼ばれる集団的效果として、ビームの作る静電ポテンシャルにイオン化した残留ガス分子が捉えられることがあります。これにより実質的にビーム軌道上の真空度が悪化します。さらにこのトラップされたイオンとビームとの間に協同的集団現象を生起することもあります。

### 3.2.5 同一バンチ内粒子

同一バンチ内粒子同士で起こす散乱をイントラビーム散乱と呼びます。これによってビーム寿命減少やエミッタンス増大が生じます。ビーム重心の静止系で見たとき、イントラビームの多重散乱は各ノーマルモード間の温度差を無くすように働きます。元々進行方向の温度が低いので、エネルギーの流れは横方向から(ビーム)進行方向となります。単一散乱ではRFバケットからビームを弾き出し、タウシェック(Touschek)寿命の短縮を、多重散乱では運動量分散関数の有る場所で粒子のエネルギー値が変化する事に伴う横方向エミッタンスの増大を引き起こします。後者のメカニズムは、シンクロトロン放射によるベータトロンエミッタンスの発生と同じです。散乱の頻度はバンチの体積が小さいと急速に大きくなります。電子貯蔵型放射光源に於ける、低エミッタンス化の限界を与えると考えられています。

### 3.2.6 対向ビーム

衝突型加速器の性能限界に直結する、いわゆるビームビーム相互作用の源です。コヒーレントとインコヒーレント、協同的集団現象や散乱など幅広いメカニズムを通じてビーム特性に影響します。

### 3.2.7 光電子

光電子を媒介として生じるビーム不安定現象が近年発見されました。ダスト粒子捕獲現象を避けるため陽電子ビーム運転をしていたKEK-PFで実験的に発見され、計算機シミュレーションを通じて光電子が原因と推定され、そのメカニズムや特性が解明されつつあります。

真空容器壁にぶつかったシンクロトロン放射光により大量に発生した光電子が、陽電子ビームのポテンシャルに牽かれて、ビームダクトを横断します。



このとき光電子が作る巨視的電場が、後に続く陽電子バンチに影響し、さらに次の光電子発生に際して影響が増大しながら伝わってゆきます。ビームの垂直方向で、振動が起こったりサイズが増大します。

これはマルチバンチで運転する陽電子貯蔵リングに特有の現象です。Bファクトリーでは非常に深刻な問題となっています。更にCERNのLHCなど、特に高エネルギーで（陽子ビームからでも）シンクロトロン放射光が発生する陽子貯蔵リングでも問題となる可能性が高いと考えられています。

## 4 多様なビーム物理現象

これまで述べてきたビーム物理のマクロ概念と相互作用伝達媒体という切り口から、加速器における多様なビーム物理現象をどのように分析して行くことが出来るか試みてみましょう。実はここに挙げる具体的なビーム物理現象の個々もまた、他のビーム物理現象の一翼を担っているという面があります。

### 4.1 共鳴取りだし

非線形共鳴を利用して、位相空間に安定領域と不安定領域の2種類の領域を作り、少しずつ安定域を狭めてゆくことで円形加速器からビームをゆっくり取り出します。カウンターを使う固定標的実験で、計数器のデッドタイムの影響を最小化するために実施されています。最近では、医療用加速器から患者の呼吸に同期してビームを取り出し、照射精度を上げる用途にも使われようとしているようです。

### 4.2 粒子性ビームのコヒーレント運動とコヒーレンス喪失

振動子の集合に一齐に（コヒーレントに）振動を励起した後に、もし個々の振動子が異なった振動数を有していると、当初のコヒーレント振動が次第に減衰してゆきます。この様子を図2に模式的に示します。個々の振動子の振動振幅は変わらないのに、重心位置の振動振幅が減衰してゆくことに注意してください。

多数の粒子からなるビームを、例えばキッカー磁石で、一齐に蹴った後にはビーム重心位置の振動が生じます。この振動の様子は、周回毎位置モニターで計測し、数千ターン分にわたる位置情報を蓄積することが出来ます。この蓄積された位置情報は図2の下図に相当するもので、これからビームに関する様々な情報を引き出せる可能性があります。以下では、このような実験を行った場合に見られる現象とその解析的な解釈について学びます。

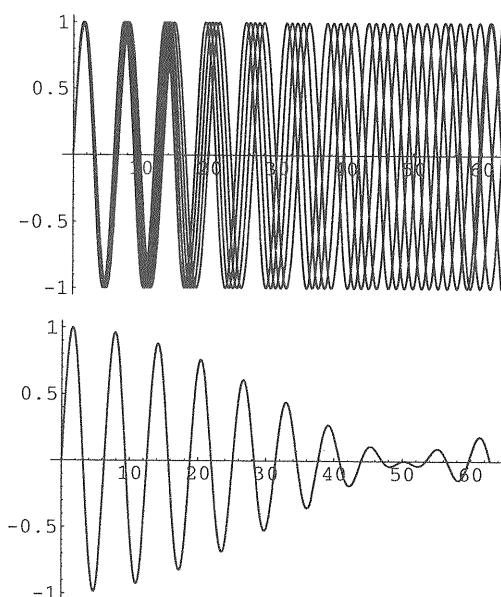


図2: 振動数差のためコヒーレンスを失う。上図: 個々の振動子の軌跡、下図: 重心位置の軌跡。横軸は時間、縦軸は変位を表している。

#### 4.2.1 コヒーレントキック実験

ビームを構成する（電子や陽子などの）多数の粒子は、運動を支配するハミルトニアンに含まれる非線形項を起源として、お互いに異なるベータatron振動数を有します。このため一旦励起されたコヒーレント振動（重心位置の振動）は減衰してゆきます。この際に、位相空間におけるビーム分布が繊維状に引き延ばされてゆくことから、この現象を非線形フィラメンテーションと呼んでいます。

キッカー磁石によって励起されたビームのコヒーレント振動を、周回毎ビーム位置モニターを使って、測定、記録、解析する実験的ビームダイナミクス研究が今日では一般的に行われるようになっており、加速器ビームの非線形運動を実験的に研究する最重要の手段です。

図3にTRISTAN主リングにおいて観測された垂直ベータatron振動の減衰の様子を示します。これらのデータはキッカーの励磁電圧 $K_2$ を様々に変えて採られました。

振動の振幅を示す曲線は放物線状に減衰し、また減衰速度は初めに与えられた振幅が大きいときに速いという特徴が見られます。次節での解析を通じて、これらが非線形フィラメンテーションによる振動減衰に特有の性質であることが明らかになります。

この実験をねらい通りに遂行する上で、ビーム電流を約 $30\mu\text{A}$ という小電流値に保持する事が、基本ヘッドテイル効果によるコヒーレントな振動減衰

など、ビーム強度依存性のある協同的集団現象を避けるために必須です。

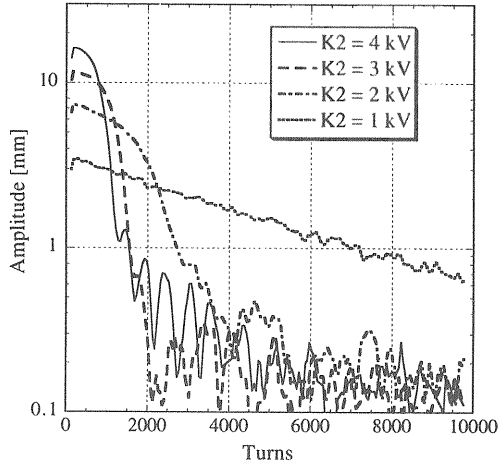


図 3: コヒーレント振動の非線形フィラメンテーションによる減衰実験。Logスケールでの減衰曲線は放物線のように見え、また初期振幅が大きいとき減衰が早い。

#### 4.2.2 実験結果の解析的解釈

ここで展開する議論や数式導出の詳細については、文献 [2]を参照してください。

非線形フィラメンテーションによるコヒーレント振動の減衰率を解析的に導出し、前に示した実験結果を解釈することを試みます。

##### 1 ターンハミルトニアン

正準摂動論を適用することで、円形加速器一周を平均した1ターンハミルトニアンを作ることが出来ます。次式は作用変数の2次までを使った1ターンハミルトニアンです。

$$H = 2\pi\nu_y^0 J_y + a_{yy} J_y^2 + a_{xy} J_x J_y + a_{yz} J_z J_y \quad (11)$$

ここで $x, y$ および $z$ は各々水平、垂直そして進行方向の座標を表します。 $a_{uv}$ は最も次数の低い非線形項係数で、非線形磁場の分布や強度そして線形オプティクスから決まる量です。

粒子の垂直方向チューンはこのハミルトニアンを作用 $J_y$ で偏微分して次のように求められ、

$$\nu_y = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial H}{\partial J_y}$$

$$= \nu_y^0 + \frac{1}{2\pi} (2a_{yy} J_y + a_{xy} J_x + a_{yz} J_z) \quad (12)$$

非線形項によるチューンの振幅（作用 $J_x, J_y, J_z$ ）依存性が示されます。

##### 位相空間位置の分布

コヒーレントキック直前における位相空間のビーム分布は、各ノーマルモードに分離された次のガウス分布で表せるとします。

$$F^0(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \equiv f_x^0(x, p_x) f_y^0(y, p_y) f_z^0(z, p_z) \quad (13)$$

ここで各ノーマルモードの分布関数はエミッタンス $\varepsilon_y$ を使い次のようになっています。

$$f_y^0(y, p_y) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_y} e^{-(y^2 + p_y^2)/(2\varepsilon_y)} \quad (14)$$

コヒーレント変位が $\alpha_y = 0$ の場所で大きさ $\Delta Y$ で与えられたとき、ノーマルモード座標の値は $(y^0, p_y^0)$ から $(y, p_y)$ へ次のように変化し、

$$\begin{cases} y^0(y, p_y) = y - \frac{\Delta Y}{\sqrt{\beta_y}} \\ p_y^0(y, p_y) = p_y \end{cases} \quad (15)$$

コヒーレント変位後の分布関数は次式により与えられます。

$$f_y(y, p_y) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_y} e^{-\left\{ \left( y - \frac{\Delta Y}{\sqrt{\beta_y}} \right)^2 + p_y^2 \right\} / 2\varepsilon_y} \quad (16)$$

##### 作用の分布

ノーマルモード座標から作用角変数座標への変換を行って作用角変数分布関数を得て、偏角について平均することにより、作用分布関数が次のように与えられます。

$$\begin{aligned} f_{J_y}(J_y) &\equiv \int_{-\pi}^{\pi} f_{J_y}(J_y, \theta_y) d\theta_y \\ &= \frac{1}{\varepsilon_y} e^{-\left\{ J_y + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta Y}{\sqrt{\beta_y}} \right)^2 \right\} / \varepsilon_y} I_0 \left( \frac{\Delta Y}{\sqrt{\beta_y}} \frac{\sqrt{2J_y}}{\varepsilon_y} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで $I_0$ は0次の変形ベッセル関数を表します。

この式を使って変位前と小変位後そして大変位後の垂直方向の作用分布関数を図 4に示します。

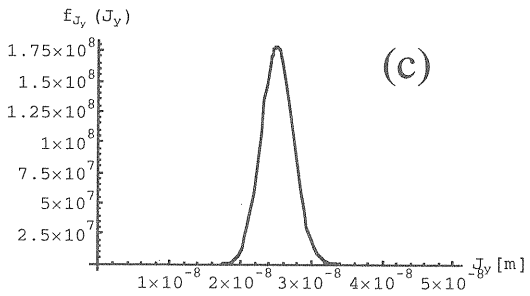
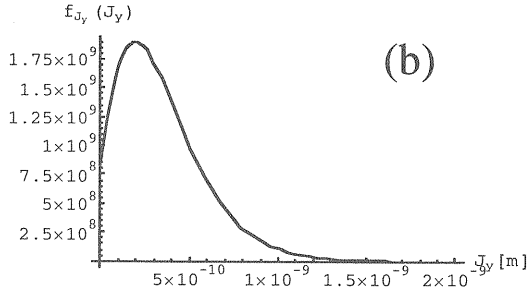
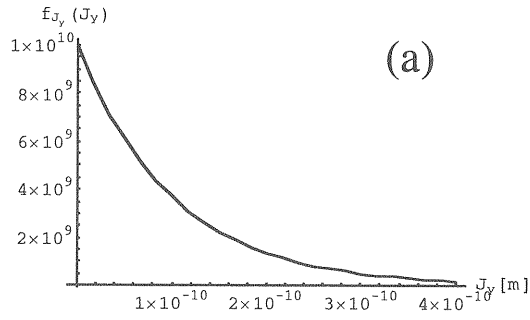


図 4: 垂直方向作用分布関数  $f_{J_y}(J_y)$ 。(a) 変位前  $\Delta Y = 0$ 、(b) 小変位後  $\Delta Y = 0.00001m$ 、(c) 大変位後  $\Delta Y = 0.0001m$ 。ビームの変位前垂直方向エミッタンスは  $\varepsilon_y = 10^{-10}m$ 、変位場所の  $\beta$  関数値は  $\beta_y = 0.2m$  を仮定。

#### チューンの分布

非線形効果によるチューンシフト  $\delta\nu_y$  は次のように定義できます。

$$\begin{aligned}\delta\nu_y &\equiv \nu_y(J_x, J_y, J_z) - \nu_y^0 \\ &= \frac{1}{2\pi} (2a_{yy}J_y + a_{xy}J_x + a_{yz}J_z)\end{aligned}$$

この非線形チューンシフトの分布関数は、前に求めた作用分布関数を使って計算されます。チューン分布関数  $f_{\delta\nu_y}(\delta\nu_y)$  を数値的に評価した結果を図 5 に示します。

図中破線で示したのはガウス関数による分布の近似で、ここに見られるように、コヒーレント変位が

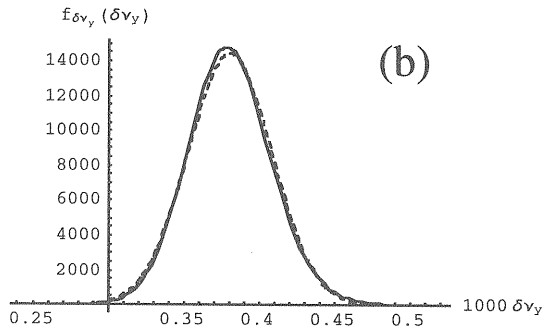
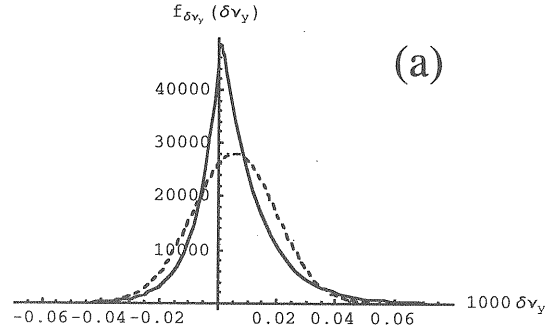


図 5: チューンの分布。(a) 変位前 (b)  $\Delta Y = 0.0001m$  の変位後。非線形項の係数は  $a_{xy} = -9299m^{-1}$ 、 $a_{yy} = 47107m^{-1}$  および  $a_{yz} = 152m^{-1}$ 、各方向のエミッタンスは  $\varepsilon_x = 5 \times 10^{-9}m$ 、 $\varepsilon_y = 5 \times 10^{-11}m$ 、 $\varepsilon_z = 5 \times 10^{-7}m$ 。コヒーレント変位地点の垂直  $\beta$  関数は  $\beta_y = 0.2m$  として計算した。

大きい時、チューン分布がガウス分布によって良く近似されます。

コヒーレント変位後のチューン分布の標準偏差は次のように解析的に求められます。

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu_y} &= \sqrt{\langle \nu_y^2 \rangle - \langle \nu_y \rangle^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{a_{xy}^2 \varepsilon_x^2 + a_{yz}^2 \varepsilon_z^2 + 4a_{yy}^2 \varepsilon_y^2 \left\{ 1 + \left( \frac{\Delta Y}{\sqrt{\varepsilon_y \beta_y}} \right)^2 \right\}} \\ &\approx \frac{1}{\pi} |a_{yy}| \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\beta_y}} \Delta Y\end{aligned}\quad (18)$$

最後の近似はコヒーレント変位が変位前のビームサイズより充分大きい時成立します。

#### コヒーレント振動の減衰率

元々のビームサイズに比べコヒーレント変位が十分大きく、変位後のビームは全粒子が同一動径上にい

るように見なせるとします。

コヒーレント変位より $n$ ターン後のベータatron位相分布の標準偏差はチューン分布の標準偏差とターン数を使い次式で与えられます。

$$\sigma_\theta = 2\pi\sqrt{\langle(\nu_y - \langle\nu_y\rangle)^2\rangle}n = 2\pi\sigma_{\nu_y}n \quad (19)$$

このときビーム重心の位相空間位置は次のように与えられます。

$$\begin{cases} \langle y \rangle &= \sqrt{2J_{0y}} \cos \theta_y e^{-\sigma_\theta^2/2} \\ \langle p_y \rangle &= \sqrt{2J_{0y}} \sin \theta_y e^{-\sigma_\theta^2/2} \end{cases} \quad (20)$$

すなわち重心位置の振動振幅は $e^{-\sigma_\theta^2/2} \equiv e^{-(n/n_{NF})^2}$ に比例して減衰し、前に実験で得た減衰曲線の放物線形状を説明します。

ここに現れた $n_{NF}$ は非線形フィラメンテーションによるコヒーレント振動減衰率の逆数で、次式で定義されます。

$$n_{NF} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\nu_y}} \approx \frac{1}{|a_{yy}|\Delta Y} \sqrt{\frac{\beta_y}{2\varepsilon_y}} \quad (21)$$

$n_{NF}$ は実験的に観測できる量です。上式から判るように、コヒーレント変位 $\Delta Y$ の大きい時減衰が早く、前に得た実験結果が説明されます。

このように、コヒーレント振動には非線形運動による減衰メカニズムが存在し、これによりビームの協同的集団現象を抑制することが出来ます。(ランダウ減衰)

### 4.3 シンクロトロン放射によるエミッタンス減衰

貯蔵型加速器で、荷電粒子がシンクロトロン放射をすることで生じる影響を調べます<sup>2</sup>。電子貯蔵リングにおける電子ビームの特性は、このシンクロトロン放射の影響によって支配されています。またハドロン貯蔵型加速器でも、CERNのLHC (Large Hadron Collider) 加速器のように非常に高エネルギー領域を目指す場合には、シンクロトロン放射の影響を無視できなくなります。

#### 4.3.1 シンクロトロン放射のまとめ

文献 [1]に従い、電子ビーム特性に影響するシンクロトロン放射についてまとめておきます。

<sup>2</sup>この節で展開する議論の詳細、特に数式のきちんとした導出については文献 [1]を参照してください。

ここでは偏向磁石から発生するシンクロトロン放射のみ考え、シンクロトロン光の統計的性格について纏めます。次に、ビーム粒子のエネルギーが参照エネルギーから外れる事で(エネルギー偏差)、シンクロトロン放射のエネルギー量が増えますが、その放出エネルギー量のビームエネルギー偏差に対する依存率を求めます。

#### シンクロトロン放射の統計的性格

以下で、 $\gamma$ はビームの相対論係数、 $\rho_0$ は偏向磁石中の曲率半径、 $\alpha$ は微細構造定数、 $\omega_c$ は臨界周波数を表します。また、定数 $C_\gamma$ は次に定義されます。

$$\begin{aligned} C_\gamma &\equiv \frac{4\pi}{3} \frac{r_e}{(m_e c^2)^3} \approx 2.1508 \times 10^{25} \text{mJoule}^3 \\ &\approx 8.846 \times 10^{-5} \text{mGeV}^3 \end{aligned} \quad (22)$$

ここで $r_e$ は古典電子半径です。

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \approx 2.81794 \times 10^{-15} \text{m} \quad (23)$$

参照エネルギー値の電子がリング加速器一周の間に失う放射エネルギーは、

$$U_0 \equiv U_{rev}(0) = \frac{C_\gamma E_0^4}{\rho_0} \quad (24)$$

この間に放出する光子の総数は、

$$N_{rev} = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3} \alpha \gamma \quad (25)$$

放出される光子の平均エネルギーは次のようになります、

$$\langle u \rangle = \frac{8}{15\sqrt{3}} \hbar \omega_c \quad (26)$$

放出される光子の2乗平均エネルギーは次のようになります。

$$\langle u^2 \rangle = \frac{11}{27} (\hbar \omega_c)^2 \quad (27)$$

#### 放射エネルギーのビームエネルギー偏差依存率

まずエネルギー $E = E_0 + \Delta E$ を持つ電子の周回当たりエネルギー損失を見積もりましょう。 $l = c \Delta t$ の軌道長を走るときに、電子が放出するエネルギーは次式で与えられます。

$$P_{tot} = \frac{e^2 c^3}{2\pi} C_\gamma E^2 B^2 \Delta t \equiv P_\gamma \Delta t \quad (28)$$

エネルギー放射損失量は、(28) 式に見るように、ビームエネルギー $E$ 、磁場の強さ $B$ そして時間の長さ $\Delta t$  (あるいは軌道長) に依存します。放射エネルギー量を軌道長に依存した違いが露わに見えるようにして評価します。

$$\begin{aligned} U_{rev}(\Delta E) &= \oint P_\gamma dt = \oint P_\gamma \frac{dt}{ds} ds \\ &= \oint P_\gamma \frac{1}{c} \left(1 + \frac{x}{\rho_0}\right) ds \\ &= \frac{1}{c} \oint P_\gamma \left(1 + \frac{\eta}{\rho_0} \frac{\Delta E}{E_0}\right) ds \end{aligned} \quad (29)$$

上の演算中、2行目から3行目への移行に際し、水平位置 $x$ について平均化操作を施しました。このときベータatron振動の寄与は振動数が速い為消え、エネルギー偏差の効果だけを考慮します。

ここから、エネルギー損失のビームエネルギーへの線形依存率を評価します。

$$\begin{aligned} \Delta_{rad} &\equiv \left. \frac{dU_{rev}(\Delta E)}{d\Delta E} \right|_{\Delta E=0} \\ &= \frac{1}{c} \oint \left( \frac{dP_\gamma}{d\Delta E} + P_\gamma \frac{\eta}{\rho_0} \frac{1}{E_0} \right) ds \end{aligned} \quad (30)$$

上式の被積分関数の第1項は (28) 式により次式に表すことができます。

$$\frac{dP_\gamma}{d\Delta E} = 2 \frac{P_\gamma}{E_0} + 2 \frac{P_\gamma}{B} \frac{dB}{d\Delta E} \quad (31)$$

右辺第2項は、運動量分散関数を使い次の様に書けます。

$$\frac{dB}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{d\Delta E} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\eta}{E_0} \quad (32)$$

以上を纏めると、次のようになります。

$$\Delta_{rad} = \frac{U_0}{E_0} (2 + \mathcal{D}) \quad (33)$$

ここで $\mathcal{D}$ は次式で定義されます。

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{cU_0} \oint \left\{ \eta P_\gamma \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{2}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right\}_{\Delta E=0} ds \quad (34)$$

参照運動量粒子の軌道上で4極磁場と2極磁場が重畳せず、さらに等磁場条件を満たす加速器の場合に

は、次のように $\mathcal{D}$ を評価できます<sup>3</sup>。

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\eta}{\rho_0^2} ds \equiv \frac{R}{\rho_0} \alpha_p \quad (35)$$

ここで $R$ は平均軌道半径で、 $\alpha_p$ は次式で計算されるモメンタムコンパクションファクターです。

$$\alpha_p = \frac{1}{2\pi R} \oint \frac{\eta}{\rho_0} ds \quad (36)$$

#### 4.3.2 シンクロトロン振動の減衰

シンクロトロン放射によるビームエネルギー損失と高周波加速空洞によるエネルギー補給の様子を図6に模式的に表しました。

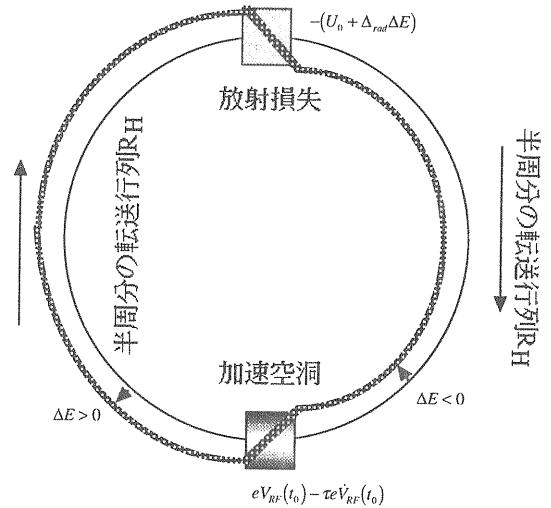


図6: ビームエネルギー変動模式図。シンクロトロン放射によるエネルギー損失と高周波加速によるエネルギー補給。

図に示すようにエネルギー振動の平衡軌道が存在します。これを中心におこなう自由シンクロトロン振動は放射損失のエネルギー偏差依存性のためSymplectic条件を満たしません。シンクロトロン振動の周回当たり減衰率が $\Delta_{rad}/2$ であることが示されます。

エネルギー偏差の時間当たり振幅減衰率はリングの周回時間 $T_0$ を使って、

$$\alpha_E = \frac{\Delta_{rad}}{2T_0} \quad (37)$$

<sup>3</sup>この方法で求めた $\mathcal{D}$ はセクター型磁石に対応します。矩形型磁石の場合は、ビームエネルギーにより軌道位置が変化しても、軌道長が殆ど変わらないので一般に $\mathcal{D}$ はもっと小さな値になります。

シンクロトロン振動の1周期内における減衰が小さければ、減衰調和振動子として書けます。

$$\alpha_E \ll \Omega \quad (38)$$

$$\Delta E(t) = \hat{\Delta E} e^{-\alpha_E t} \cos(\Omega t - \theta_0) \quad (39)$$

ここで $\Omega$ はシンクロトロン振動の角周波数で、次式で与えられます。

$$\Omega = \frac{1}{T_0} \sqrt{-2\pi R \alpha_p \frac{e}{c^2 p_0} \dot{V}_{RF}(t_0)} \quad (40)$$

#### 4.4 ビームエネルギーの平衡分布

シンクロトロン放射の影響は振動の減衰だけではありません。シンクロトロン放射は量子化されたエネルギー放出をするために、ビーム運動に雑音的揺らぎをもたらします。ビームのエネルギー拡がりやエミッタンスは、この揺らぎと放射減衰の釣り合いの結果、加速器パラメータから決まる特定の平衡値を取ります。

##### 4.4.1 量子励起と中心極限定理

多数の光子のランダムな放出を統計的に取り扱い、電子ビーム特性に与える影響を定量的に見積もることができます。

中心極限定理の成立条件をシンクロトロン放射に当てはめれば、減衰時間内の放出光子数が充分多いこと、そして極端に高いエネルギーの光子放出がないことです。さらに独立な確率変数と言う条件から、ベータトロンないしシンクロトロン振動の位相と光子放出との間に相関のないことが要求されます。

このような条件が満たされていれば、光子のエネルギー分布は偏向磁石特有の放射光スペクトルに従いますが、個々の電子の(減衰時間内に累積する)総放出エネルギーはガウスの正規分布になります。

##### 4.4.2 エネルギーの平衡分布

特定の電子のエネルギー偏差は、無限の過去から時間 $t$ に至る間の、無数の光子放出とそれに引き続く放射減衰の蓄積効果の結果と考え、次式に表現できます。

$$\Delta E(t) = \sum_{i \in t_i < t} u_i e^{-(t-t_i)\alpha_E} \cos \Omega(t-t_i) \quad (41)$$

此処で $i$ 番目の放出光子エネルギー $u_i$ とその放出時刻 $t_i$ とは統計的性格のみ決められた確率変数です。一方シンクロトロン振動の減衰率 $\alpha_E$ とシンクロトロン振動の角周波数 $\Omega$ は確定した量で既に求めてあります。

電子エネルギー偏差の2乗について、バンチ内電子全体を想定したアンサンブル平均が計算できれば、電子ビームのエネルギー分布の分散が得られます。さらにここで中心極限定理が成立すれば、電子エネルギー分布はガウスの正規分布であると結論付けられます。

この計算のため(41)式の2乗を2重総和の形で表します。ここで、シンクロトロン振動周期内の放射減衰は充分小さいと仮定し、次式を満足する特性時間 $\Delta t$ を導入します。

$$\alpha_E \ll \frac{1}{\Delta t} \ll \frac{\Omega}{2\pi} \quad (42)$$

この特性時間 $\Delta t$ 内において、確率変数 $u_i$ と $t_i$ に関してアンサンブル平均を取ります。2個の光子放出の間に、シンクロトロン振動の位相に関して相関が無いと考えるから、異なる放出光子エネルギーの積 $u_i u_j$  ( $i \neq j$ ) はアンサンブル平均で消えます。(42)式より特性時間 $\Delta t$ 内でシンクロトロン振動の位相に関して平均でき、最終的にアンサンブル平均へ寄与するのは次の項です。 $\langle \rangle$ はアンサンブル平均を表します。

$$\begin{aligned} \langle \Delta E(t)^2 \rangle &\approx \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e^{-n\Delta t \alpha_E} \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i(n\Delta t \leq 2t-2t_i \leq (n+1)\Delta t)} u_i^2 \right\rangle \right\} &\quad (43) \end{aligned}$$

特性時間 $\Delta t$ 内におけるアンサンブル平均では、確率変数 $u_i$ と $t_i$ の分布は先に求めた統計的分布を再現するはずで、即ち2乗平均光子エネルギー $\langle u^2 \rangle$ および周回当たり放出光子数 $N_{rev}$ を使いアンサンブル平均を書けます。

$$\langle \Delta E(t)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ e^{-n\Delta t \alpha_E} \frac{\Delta t}{2} \frac{N_{rev}}{T_0} \langle u^2 \rangle \right\} \quad (44)$$

ここで $\Delta t \rightarrow 0$ とし総和を積分で評価、電子ビームのエネルギー偏差の分散が計算できます。

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{N_{rev} \langle u^2 \rangle}{4\alpha_E T_0} \equiv \sigma_E^2 \quad (45)$$

中心極限定理の成立を条件としているので、電子ビームのエネルギー分布は次のガウス関数で与えられます。

$$w(\Delta E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_E} \exp\left(-\frac{\Delta E^2}{2\sigma_E^2}\right) \quad (46)$$

#### 4.5 様々な散乱過程

前節ではシンクロトロン放射によるエネルギー拡がりの議論をしました。しかし、この議論は中心極限定理が適用できる物理現象なら幅広く適用できます。

例えば、電子ビームと残留ガスとの散乱を考えてみます。真空度への要求は、通常は、大振幅の単一散乱から予測されるビーム寿命の評価から決めます。しかしビーム損失につながらない小振幅散乱を数多く繰り返す事による効果もあります。この小振幅多重散乱の効果は基本的にシンクロトロン放射に依る量子励起と同じ効果をビームにもたらし、電子ビームエネルギー幅の増大やエミッタンスの増大を生じます。

さらにバンチ内電子同士のイントラビーム散乱や衝突型加速器のビームビーム間相互作用のうち散乱過程によるものも同様な寄与をします。

これらの散乱における振幅スペクトルは、シンクロトロン放射の光子エネルギー分布とは異なり、比較的大振幅側に裾野が延びています。このため大振幅散乱の影響が大きくなり易く、中心極限定理の成立条件が脅かされ、非ガウス型テイル分布の発生原因になりがちです。

#### 4.6 SASE原理による自由電子レーザー

種光として使えるコヒーレント光源が存在しないX線領域で、強力なコヒーレント光源を得るための方策として、SASE (Self Amplified Spontaneous Emission) 原理に基づく自由電子レーザーが提案されています。

非常に周期数 $N_w$ の多いアンジュレータに電子ビームを通し、バンチ内ビーム分布の揺らぎに起因する雑音的シンクロトロン放射をアンジュレータ通過中に育ててゆくものです。電子ビームがアンジュレータを一周期 $\lambda_w$ 進む毎に、光ビームは一波長 $\lambda_l$ ずつ電子ビームを追い抜いてゆきます。このように後ろの電子から放射された光が、先を行く電子に追いつき電子ビームの運動に影響を与えます。最大相互作用領域長 $N_w \lambda_l$ まで、しだいに相互作用の領域が増えてゆくに連れ、放射光のコヒーレンス度が高くなり効率良く電子ビームのマイクロバンチ化を進めます。電子ビームには、自己放出シンクロトロン放射光を相互作用の媒体とする協同的集団現象が生じています。

このメカニズムが機能するために必要なビーム特性として、ビームエミッタンスが光の波長程度に小さいこと、ピーク電流値が充分高いこと、ビームの運動量拡がりが小さいことそしてアンジュレータ内を進む電子ビームが光ビームと重畳し続けるために電子ビームの直進性が高いことが重要です。これら

の条件は、求める光の波長が短く成る程厳しくなり達成が困難になります。

今年になって、DESYのリニアコライダー用実験開発施設TFからSASE原理による自由電子レーザーの発振成功の報告 [3]がなされました。波長はまだ長波長 (100nm程度) ですが、原理自身は確実に実証されたといえます。

#### 4.7 コヒーレント放射

バンチ長以上の波長の放射に関しては、シンクロトロン放射のコヒーレンスの議論で紹介した一点集中型の荷電粒子時間分布が実現されています。短バンチを電子線形加速器で作り、偏向磁石を通過させるとシンクロトロン放射がバンチ長程度以上の波長で特に大きく放出されます。この放射は、東北大学物理学研究施設の電子加速器を使って世界で初めて観測されました。

リニアコライダーやX線FELでは高いピーク電流値を得る目的で、バンチ長圧縮装置 (バンチコンプレッサー) の使用が検討されていますが、そこで生じるコヒーレント放射がビーム自身に大きな影響を与える可能性が懸念されています。

#### 4.8 ビーム冷却

加速器目的に添うビーム特性の実現のため、ビームエミッタンスを減少させることは重要な課題です。しかしこれは簡単には出来ない難しい課題です。

##### 幾何学エミッタンスの断熱減衰

これは真の意味のビーム冷却ではありません。加速に伴うビームの正準運動に際して、ビームの進行方向に垂直な横方向運動量は不変です。一方進行方向の運動量は加速を受け増加します。このため横方向運動量を進行方向運動量で除した量、即ちビームの角度分散は減少します。これはビームのサイズを決める幾何学的エミッタンス $\epsilon$ の減少を意味します。特に加速に際しても不変なエミッタンス $\epsilon_N$ が次式で定義され正規化 (ノーマライズド) エミッタンスと呼ばれます。

$$\epsilon_N \equiv \epsilon \gamma \beta \quad (47)$$

##### イオン化冷却

断熱減衰では横方向運動量が減らないので、真の冷却ではありません。

しかし電子貯蔵リングにおけるシンクロトロン放射では、横方向運動量と進行方向運動量が同じ割合で減少し、そのエネルギー損失を補うため加速空洞

から受け取る運動量は進行方向のみなので、ビームエネルギーは一定のままエミッタンスが減少します。これは電子貯蔵リングに自然に備わったメカニズムです。

同様の働きを意図的に起こそうとするアイデアがイオン化冷却です。ガス中にビームを走らせ、そこでガス分子のイオン化過程を通じ（シンクロトロン放射の場合と同じように、横方向運動量も減少する様に）エネルギー損失をさせます。その後（進行方向運動量のみを与えて）加速する事でエミッタンスが減少します。

同様のアイデアにより、余計な運動量を捨てる相手としてガス分子のイオン化ではなく、レーザー光を用いる方法も提案されています。レーザー冷却と呼ばれますが、異なるアイデアに基づくレーザー冷却も多いのでこの点に注意が要ります。

#### 確率冷却

ビーム位置揺らぎの検出とキッカー磁石による修正及びミキシングによるこのプロセスの繰り返しから成ります。ビームの構成粒子数 $N$ は多数とはいえ有限です。このためビームの重心位置は $\sqrt{N}/N$ の程度揺らいでいます。これを検出して、（ミキシングで揺らぎが消失する前に）直ちに修正することで、僅かながらビームの位相空間に占める面積を減少させることが出来ます。更に、位相空間に於けるビーム位置の分布が、非線形性や他の自由度との結合のため再配列され、そのため（一旦修正された重心位置に）別の揺らぎが生じます。これをミキシングと呼び、このお陰で（新たな揺らぎが次々発現するので）揺らぎの修正を繰り返し行うことが出来ます。これが確率冷却の核心で、或る意味でマックスウェルの悪魔が実現されています。

反陽子ビームのエミッタンスを小さくする目的でCERNで開発され、SPS加速器に於ける陽子反陽子衝突実験で $Z^0$ 粒子を発見する上のキーポイントとなった技術です。

## 5 おわりに

ビーム探偵、ビーム医者の教育といった気持ちで、ビームに生じている現象、生じる可能性のある現象を、大きな枠組みから捉える考え方を示したいと思いました。ここに示したのは、今までに個人的に得た限られた範囲の経験を出来るだけ整理し、理解し易いよう纏めたものです。しかしまだまだ加速器における多様なビーム現象を分類整理するための不完全な取り組みに過ぎません。将来に向けて、もっと

きっちりした体系的な物を育てる切っ掛けになればと思っています。

このテキスト中、自分自身の中で充分熟していない考えを披露して仕舞った所もあります。後日、このような勇み足の為、自己嫌悪に沈む苦渋の時間を招くかも知れないと畏れています。

ここで序でに、昨年の高エネルギー加速器セミナーOHO'99でご紹介したSADコードについて、最近の進展をお知らせしておきます。Linux版のSADソースコード配布が出来るようになりました。詳細はSADのWebページ[4]を参照してください。またこのWebページにSAD掲示板を開設しました。バグ報告、質問、提案など様々にご活用下さい。

## 参考文献

- [1] 鎌田進 「ビーム物理学入門」OHO'97テキスト(1997).
- [2] S. Kamada, N. Akasaka and K. Ohmi, Frascati Physics Series Vol.X (1998), pp.(239-246).
- [3] J. Rossbach EPAC 2000 June (2000).
- [4] 新 SAD Web ページ "http://acc-physics.kek.jp/SAD/sad.html" 。旧 ア ド レ ス "http://www-acc-theory.kek.jp/SAD/sad.html" から自動的に飛びます。