

1 序

加速器の2大原理として位相安定性と強収束の原理がある。それは粒子の進行方向の運動と垂直な平面内の運動、すなわちシンクロトロン振動とベータトロン振動の二つに集約される。実際の加速器の場合は進行方向と垂直方向の運動を3次元的に考えなければならないこともある。しかし、ここでは粒子の進行方向と垂直な平面内の運動を記述するベータトロン振動について考えていきたいと思う。力学系の運動についてはハミルトニアンによる方法に拘った。その理由として一度ハミルトニアンを導いておけば一次元の運動ばかりでなく2次元、非線形な運動の取り扱いまで拡張することが容易であると思うからである。力学系の運動を議論する場合、最小作用の原理から出発して、正準変換を道具として用いる。力学の運動に例として調和振動子を挙げた。復元力を伴う運動、ベータトロン振動と調和振動子には多くの類似点があり、考え方は全く同一だからである。力学の運動を取り扱う前に、まず始めに座標系を定義しておく。

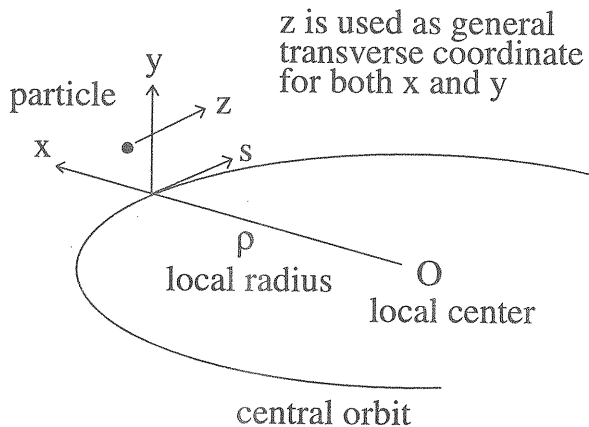


Figure 1: ビームに対する局所的座標系とよく用いられるシンボル。 z 軸は xy 平面に垂直に取り考察している粒子を基準にしている。粒子の座標が $x=0$ の時、または曲率半径が無限大の時、 z は s と同等にみなせる。

座標系は図1のように直交曲線座標系を用いる。これは直交座標が曲線上を走っていくというものである。ベータトロン振動を取り扱う場合、曲線からの位置のずれが重要になる。この曲線をどう取るかは任意であるが、デザイン軌道に普通取る。デザイン軌道とは設計どおりのエネルギーを持った粒子が描く最も単純な軌道である。円形加速器の場合、直線と円弧の組合せで水平面上に取る。一度その軌道に乗ったら

粒子の平均的な軌道は永久にその軌道を維持するようにデザイン軌道を選ぶ。そのような軌道を閉軌道という。また、加速器に誤差があるとデザイン軌道は閉軌道ではなくなり、粒子の軌道が別の閉軌道に変わることがある。そのような閉軌道を曲線座標の曲線に選んだ時しばしば粒子の中心軌道と呼ぶ。

ここで粒子の運動を取り扱うための条件を決めておこう。条件として

- 粒子に及ぼされる外力は電磁気力だけである。
- 粒子のシンクロトロン放射は無視する。
- 粒子の集団的效果はないものとする。

などである。限られた条件の下での議論は現実の加速器と照らし合わせる場合注意が必要である。

2 最小作用の原理

ある物体の運動を考察する場合に物体の大きさを見捨てる時、その物体を質点または粒子と呼ぶことにする。空間における粒子の位置を指定するにはデカルト座標だけでなく極座標あるいはその他の曲線座標などを利用することができる。一般的に粒子の位置を任意の n 個の量 q_i ($i=1, 2, \dots, n$)で表す。これを一般座標と呼び、その時間微分を一般速度と呼ぶ。

任意の時刻における系の位置が予言できることを、その系の力学的状態が決まるという。ある時刻に一般座標と一般速度の両方を同時に与えるならば系の力学的状態は完全に決定される。系の力学的状態を特徴づける関数

$$L(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

を与えた時、積分

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2)$$

が最大または最小の値を取るように運動する¹。関数 L を与えられた系のラグランジアンと呼び、積分 S を作用と呼ぶ。

作用 S の値が極値をとるということは軌道 $q(t)$ の微小な変化によって作用の値が変化しないということだから S の変分 $\delta S = 0$ ということである。図2のように $q(t)$ と $q(t) + \delta q(t)$ を与えた時の積分経路を考える。但し、途中の経路が異

¹ 一般的には極値。

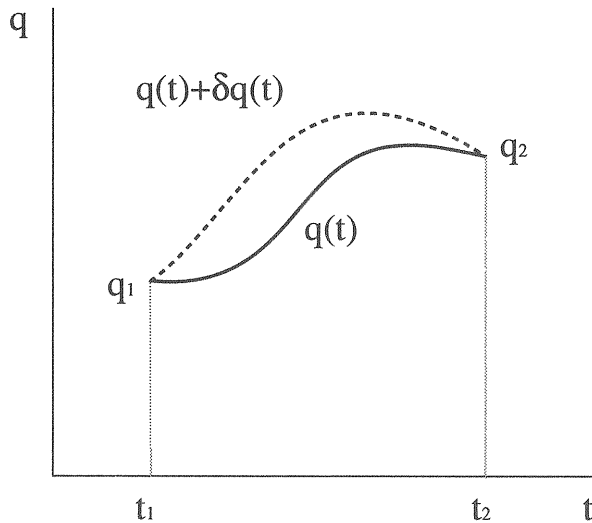


Figure 2: 最小作用の原理。

なるだけで端点における座標は双方とも一致していなければならないので $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ である²。

作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q dt \quad (3) \end{aligned}$$

なので $t_1 \sim t_2$ で任意の $\delta q(t)$ について $\delta S = 0$ となるためには

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4)$$

でなければならない。自由度 n の場合は n 個の 2 階微分方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

を得る。この方程式をグランジュ方程式と呼ぶ。式 (5) は加速度と速度および座標の間の関係を表す系の運動方程式であり、その一般解は $2n$ 個の任意定数を含む。やはり、力学系の運動の決定にはある時刻における n 個の座標と速度が初期値として必要であることを示している。

² 端点が異なれば、もはや全く別の運動である。

3 ハミルトン方程式

一般座標と一般速度を与える事によって系の力学的状態を記述するラグランジアンによる方法に対して、一般座標と一般運動量による記述はハミルトニアンによる方法として知られている。このような考え方の動機にはド・ブロイの物質波がある。粒子の運動量と波長の関係

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (6)$$

によれば運動量を知るには波長 λ を測定すればよく、時刻 t と $t + dt$ における粒子の位置を測定して速度を求め、質量との積から運動量を決める必要はない。

つまり、ラグランジアンによる方法のように粒子の位置 $q(t)$ を基本量と見て、運動量を $m\dot{q}(t)$ で与えるよりも粒子の位置 $q(t)$ と運動量 $p(t)$ を対等な基本的物理量とみなすハミルトニアンによる方法の方が都合のよい場合がある。まず、ハミルトニアンによる方法では一般運動量を、

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

と定義する。

ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ の完全微分は、

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (8)$$

である。また、ラグランジュ方程式より $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$ であるから、式 (8) は

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) + \sum_i (p_i d\dot{q}_i - \dot{q}_i dp_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

の形に書ける。従って、

$$d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_i (-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (9)$$

を得る。上式の左辺を変数 q_i, p_i, t の関数として表したものを $H(q, p, t)$ とすれば、

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (10)$$

である。\$H(q, p, t)\$ の完全微分

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (11)$$

と式 (9) の係数を比較して

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。これをハミルトン方程式 (正準方程式) と呼ぶ。\$H(q, p, t)\$ を系のハミルトニアン、\$q_i, p_i\$ を正準変数と呼ぶ。ちなみに、ハミルトン方程式は \$\eta = (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_n, p_n)\$ とすると、

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (13)$$

で表現される。ここで \$J\$ は \$2n \times 2n\$ の正方行列で

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \quad (14)$$

である。行列 \$J\$ の性質として \$J^2 = -I\$ がある。この表記の仕方はシンプレクティック³ 記法と呼ばれる。シンプレクティックという言葉は「からみ合わされた」という意味のギリシア語に由来しているらしい。ハミルトン方程式では \$\dot{q}_i\$ が \$p_i\$ に関する導関数と \$\dot{p}_i\$ が \$q_i\$ に関する導関数とからみ合わされている。

ハミルトニアンの時刻についての完全微分は、

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (15)$$

でハミルトン方程式より

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (16)$$

となる。特に系のハミルトニアンに時刻が陽に含まれないときには \$dH/dt = 0\$、すなわち \$H\$ は定数となり、これは系の運動の積分である。この量はエネルギーと呼ばれ、この場合系のエネルギーは保存している。また、時間の一様性からエネルギー保存則が導き出されることを示唆している。

³ symplectic.

4 正準変換

一般座標 \$q\$ の選び方には制限はなく空間における系の位置を一意的に決める任意の量であればよい。実際ラグランジュ方程式は一般座標の選び方には依らない。つまり、ラグランジュ方程式は座標 \$q\$ から \$Q\$ への変換に対して不変である。ラグランジュ方程式だけでなくハミルトン方程式も座標変換に対して不変である。ハミルトン方程式では、座標と共に運動量が同等の独立変数となっていることからさらに広い変換に対して不変である。変換

$$(q, p) \rightarrow (Q(q, p, t), P(q, p, t)) \quad (17)$$

を考える。新しい変数 \$Q, P\$ で書いた運動方程式が新しいハミルトニアン \$K(Q, P, t)\$ を使って

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (18)$$

となる変換を正準変換と呼ぶ。しかし、この形の任意の変換は一般的にハミルトン方程式を満たさない。ハミルトン方程式を満たすための条件を考えよう。\$Q, P\$ がハミルトン方程式を満たすためには変換後も最小作用の原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = 0 \quad (19)$$

が成り立つ必要がある。\$F\$ を一般座標、一般運動量、時刻等の任意の関数とすると \$\sum P_i \dot{Q}_i - K\$ に \$F\$ の時間微分が付け加わっても最小作用の原理は変換前と変換後では等価である。すなわち

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (20)$$

とすれば

$$\begin{aligned} [\delta F]_{t_1}^{t_2} &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt \\ &\quad - \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right) dt \end{aligned} \quad (21)$$

から \$\delta F(t_1) = \delta F(t_2) = 0\$ なので右辺第 1 項と第 2 項は等しい。全ての正準変換はこの関数 \$F\$ によって特徴づけられる。この関数 \$F\$ は変換の母関数と呼ばれる。式 (20) は \$4n + 1\$ 個の変数、\$q_i, p_i, Q_i, P_i, t\$ で表されている。これら \$4n + 1\$

個の変数のうち $2n$ 個は他の変数で表すことができる。式 (20) を変形して

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \sum_i P_i \dot{Q}_i + K - H \quad (22)$$

また、母関数 $F = F_1(q, Q, t)$ のように新旧の座標の関数で表される時、時間に対する微分は

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (23)$$

なので係数を式 (22) と比較して

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} & P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。一方、母関数が $F = F_2(q, P, t)$ で表される時は

$$\sum_i P_i \dot{Q}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i P_i Q_i \right) - \sum_i Q_i \dot{P}_i \quad (25)$$

の関係を用いて $F_2 \equiv F_2 + \sum P_i Q_i$ と定義し直せば、式 (22) は

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i + \sum_i Q_i \dot{P}_i + K - H \quad (26)$$

である。従って、やはり F_2 の時間に対する完全微分の係数と比較すれば

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} & Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (27)$$

である。次に、母関数が $F = F_3(p, Q, t)$ で表される時は

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} & P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned} \quad (28)$$

さらに、しつこいようであるが母関数が $F = F_4(p, P, t)$ で表される時は

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} & Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \\ K &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned} \quad (29)$$

である。ただし母関数は上の 4 つの一般的な型のどれか一つである必要はなく、4 つの型の混合型である母関数を用いることができる。ここで重要な事として変換 (17) の中に t を含まなければ母関数は t を含まず

$$K = H \quad (30)$$

となり、ハミルトニアンが不変になることである。不変量を見い出すことは物理的意義が明確であるので重要である。

正準変換の一例として、特に座標間の任意の変換

$$q_i = U_i(Q, t) \quad (31)$$

を考えよう。この変換は

$$F(p, Q, t) = -\sum p_i U_i(Q, t) \quad (32)$$

から導かれる。なぜなら座標変換は式 (28) より

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial p_j}{\partial p_i} U_j(Q, t) \\ &= U_i(Q, t). \end{aligned} \quad (33)$$

これに対する運動量 p の変換は

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} = \sum_j p_j \frac{\partial U_j(Q, t)}{\partial Q_i} \quad (34)$$

となる。この変換は点変換と呼ばれ正準変換の一種である。

5 正準不変量

5.1 Liouville の定理

n 個の一般座標と n 個の運動量の値を座標とする $2n$ 次元の空間を位相空間と呼ぶ。位相空間の各点は系の状態に対応し、系の運動につれて系を表す点は位相空間内に軌跡を描く。

積分の積

$$d\Gamma = dq_1 dp_1 dq_1 dp_2 \cdots dq_n dp_n \quad (35)$$

は位相空間内の体積要素を表す。位相空間内の体積

$$\int d\Gamma = \int \cdots \int dq_1 dp_1 dq_1 dp_2 \cdots dq_n dp_n \quad (36)$$

の変数変換 $((q, p) \rightarrow (Q, P))$

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int dQ_1 dP_1 dQ_2 dP_2 \cdots dQ_n dP_n \\ &= \int \cdots \int D dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 \cdots dq_n dp_n \end{aligned} \quad (37)$$

を考える。ここで

$$D = \frac{\partial(Q_1, P_1, \dots, Q_n, P_n)}{\partial(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)} \quad (38)$$

は変換のヤコビアンと呼ばれる。ヤコビアンの分子分母を $\partial(q_1, P_1, \dots, q_n, P_n)$ で割ると

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial(Q_1, P_1, \dots)}{\partial(q_1, P_1, \dots)} / \frac{\partial(q_1, p_1, \dots)}{\partial(q_1, P_1, \dots)} \\ &= \frac{\partial(Q_1, \dots)}{\partial(q_1, \dots)} \Big|_P / \frac{\partial(p_1, \dots)}{\partial(P_1, \dots)} \Big|_q \end{aligned} \quad (39)$$

である。母関数 $F(q, P, t)$ を用いて正準変換を表せば、式 (27) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial F}{\partial P_i} \right) \\ \frac{\partial p_i}{\partial P_j} &= \frac{\partial}{\partial P_j} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

であり $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ 、ヤコビアンは $D = 1$ となる。従って、位相空間内の体積は正準変換によって不変であり Liouville の定理と呼ばれる。

5.2 Poincare の積分不変量

時刻に依らない変換、つまりハミルトニアンが不変な変換を考える。独立な変数を s とし、位相空間に曲線 C が $(q_i(s), p_i(s))$ で与えられ、正準変換を施せば曲線 C は $(Q_i(s), P_i(s))$ で与えられる曲線 C' に移されるとする。特に曲線 C が閉曲線ならば曲線 C' も閉曲線である。曲線 C に沿った $s = a$ から b までの積分

$$\int_C \sum_i p_i dq_i = \int_a^b \sum_i p_i(s) q'_i(s) ds \quad (41)$$

と曲線 C' に沿った積分

$$\int_{C'} \sum_i P_i dQ_i = \int_a^b \sum_i P_i(s) Q'_i(s) ds \quad (42)$$

の差は母関数 F とすると

$$\sum_i p_i(s) q'_i(s) = \sum_i P_i(s) Q'_i(s) + \frac{dF}{ds} \quad (43)$$

なので

$$\int_C \sum_i p_i dq_i - \int_{C'} \sum_i P_i dQ_i = [F(s)]_a^b \quad (44)$$

となる。曲線 C と C' が閉曲線の場合 $F(a) = F(b)$ なので

$$\oint_C \sum_i p_i dq_i = \oint_{C'} \sum_i P_i dQ_i \quad (45)$$

である。従って、 $\oint_C \sum_i p_i dq_i$ は正準変換に対して不変である。この量を Poincare の積分不変量と呼ぶ。逆に、この積分が不変ならば正準変換であるといえる。閉曲線 C に沿った積分は Stokes の定理により面積分として表現できる。

$$\oint_C \sum_i p_i dq_i = \int \int_S \sum_i dp_i dq_i \quad (46)$$

位相空間における任意の表面の q_i, p_i 面への射影面積の和は正準変換によって不変である。

5.3 シンプレクティック変換

ビームラインは入口と出口が空間内の点 s_1 と s_2 で区切ることができる。粒子の軌道は曲線座標を用いてデザイン軌道からのずれとして記述できる。このような座標系を用いて位相空間の 6 次元ベクトルを

$$\mathbf{X} = (x, p_x, y, p_y, z, p_z) \quad (47)$$

とする。ビームラインの入口と出口に対する 6 次元ベクトルを $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ とすると、 \mathbf{X}_1 から \mathbf{X}_2 への変換は一般的に

$$\mathbf{X}_2 = T(\mathbf{X}_1) \quad (48)$$

で与えられる。この変換について \mathbf{X}_1 を微小量としてデザイン軌道のまわりで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 &= T(\mathbf{X}_1 = 0) + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial T(\mathbf{X}_1 = 0)_i}{\partial X_{1j}} X_{1j} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^6 \frac{\partial^2 T(\mathbf{X}_1 = 0)_i}{\partial X_{1j} \partial X_{1k}} X_{1j} X_{1k} + \cdots \end{aligned} \quad (49)$$

2 次以上の項を無視すると $T(\mathbf{X}_1 = 0) = 0$ なので

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 &\simeq \sum_{j=1}^6 \frac{\partial T(\mathbf{X}_1 = 0)_i}{\partial X_{1j}} X_{1j} \\ &= M \mathbf{X}_1 \end{aligned} \quad (50)$$

を得る。行列 M は s_1 から s_2 への転送行列と呼ばれ

$$M_{ij} = \frac{\partial T(\mathbf{X}_1)_i}{\partial X_{1j}} = \frac{\partial X_{2i}}{\partial X_{1j}} \quad (51)$$

のようにヤコビアンを用いて表現することもできる。軌道上の位置を示す座標 s を独立変数に取り、時刻に依らない変換、つまりハミルトニアンが不変な変換を考える。 z 、 p_z のかわりに新たな正準共役量である時刻 t と系のエネルギーに負符号をつけた $-E$ を一般座標及び一般運動量としてハミルトニアンを $H(x, p_x, y, p_y, t, -E; s)$ とする。また、位相空間内の 6 次元ベクトルは $\mathbf{X} = (x, p_x, y, p_y, t, -E)$ である。ハミルトン方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (52)$$

である。但し、 $\mathbf{x} = (x, y, t)$ 及び $\mathbf{p} = (p_x, p_y, -E)$ である。ここでシンプレクティック記法を用いるとハミルトン方程式は

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds} = J \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \quad (53)$$

とも表現できる。行列 J は式 (14) でもうすでに定義されている。 \mathbf{X}_1 の s に対する微分は行列 M を先程のヤコビアンとして

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{ds} = M \frac{d\mathbf{X}_1}{ds} \quad (54)$$

のように変換される。ハミルトン方程式を使うと右辺は

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{X}_1}{ds} &= MJ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}_1} \\ &= MJ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}_2} \frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial \mathbf{X}_1} \\ &= MJM^T \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}_2} \end{aligned} \quad (55)$$

一方、左辺もハミルトン方程式により

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{ds} = J \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}_2} \quad (56)$$

と書き表すことができる。従って、転送行列 M に対して

$$MJM^T = J \quad (57)$$

という条件を得る。この条件式を満たす行列 M をシンプレクティック行列と呼び、転送行列がシンプレクティック行列となる変換をシンプレクティック変換という。また、行列 M が式 (57) を満たすなら正準変換である。単位行列 I や J はシンプレクティック行列である。

$MJM^T = J$ の行列式を取ると

$$\det M \det J \det M^T = \det J. \quad (58)$$

さらに $\det M = \det M^T$ 、 $\det J = 1$ なので

$$\det M = \pm 1 \quad (59)$$

を得る。さらに 2×2 のシンプレクティック行列の行列式は 1 であることは明らかである。一般的な $2n \times 2n$ のシンプレクティック行列も

$$\det M = 1 \quad (60)$$

である。これは Liouville の定理からの帰結からもわかるように位相空間内のある領域を占める体積はシンプレクティック変換によって不変である。

行列式が 0 でないのでシンプレクティック行列は逆行列が存在する。式 (57) の右から $-J$ 、左から M^{-1} をかけると

$$M^{-1} = -JM^T J \quad (61)$$

という関係が得られる。また、シンプレクティック行列の積や転置行列もシンプレクティック行列の条件を満たしている。

5.4 Poisson の括弧

$F(q, p, t)$ を q と p の関数として与えられる任意の物理量とする。時間についての完全微分は

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned} \quad (62)$$

である。ここで $H(q, p, t)$ はハミルトン方程式 (12) を満たす。但し、最後の括弧は

$$[A, B] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \quad (63)$$

で定義される量で Poisson の括弧と呼ばれる。

$F(q, p, t)$ が運動の積分であるための条件は $dF/dt = 0$ なので

$$[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (64)$$

である。さらに、 F が時刻 t に陽によらない場合には

$$[F, H] = 0 \quad (65)$$

でなければならない。

Poisson の括弧という量はハミルトンの正準理論では重要な意味を持っている。任意の関数 f, g に対して $[f, g]_{q,p}$ を q, p について微分が行われた Poisson の括弧とし、 $[f, g]_{Q,P}$ を Q, P について微分が行われた Poisson の括弧とする。今 $\mathbf{u} = (q, p)$ 、 $\mathbf{v} = (Q, P)$ としてシンプレクティック記法を用いる。 (q, p) から (Q, P) への変数変換をヤコビアン行列 M で表すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} &= M \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} &= M \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \end{aligned} \quad (66)$$

である。一方、Poisson の括弧はシンプレクティック記法を用いると

$$[f, g]_{\mathbf{u}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \quad (67)$$

と書ける。Poisson の括弧 $[f, g]_{\mathbf{u}}$ をヤコビアン行列 M を使って変形すると

$$\begin{aligned} [f, g]_{\mathbf{u}} &= \left(M \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)^T J M \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)^T M^T J M \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \end{aligned} \quad (68)$$

である。この変換が正準変換ならばシンプレクティック条件が成立し

$$\begin{aligned} [f, g]_{\mathbf{u}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \\ &= [f, g]_{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (69)$$

となり不変である。逆に、Poisson の括弧を不変に保つ変換 $Q = Q(q, p)$ 、 $P = P(q, p)$ を正準変換と呼ぶことができる。

5.5 無限小正準変換

正準変換 $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ において $Q_i - q_i$ 、 $P_i - p_i$ が微小である変換を無限小正準変換と呼ぶ。この変換では

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i \\ P_i &= p_i + \delta p_i \end{aligned} \quad (70)$$

と書ける。適当な母関数

$$F = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t) \quad (71)$$

を考える。 ϵ は変換に対する無限小パラメータであり、 G は $2m$ 個の変数を持つ任意の微分可能な関数である。正準変換における母関数の変換規則、つまり母関数を P_i 、 q_i 、 t で微分することによって

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_i} \\ p_i &= P_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i} \\ K &= H + \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (72)$$

を得る。 P と p は無限小だけ異なっているので導関数における P を p に置き換えるても問題はない。従って、

$$\begin{aligned} \delta q &= \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i} \\ \delta p &= -\epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i} \\ \delta H &= \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (73)$$

となる。ここで $G(q, p, t)$ は無限小正準変換の母関数と呼べるものである。

無限小正準変換が与えられれば、これを無限回行って有限の正準変換を導くことができる。 ϵ を連続的に時刻 t から $t + dt$ に変化する独立な変数 dt とし G をハミルトニアンとすれば式 (73) よりハミルトン方程式が導かれる。

次に無限小正準変換により q, p の任意の関数 $F(q, p)$ の受ける変化を求めてみる。

$$\begin{aligned} &F(Q, P) - F(q, p) \\ &= \sum_i \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_i} (Q_i - q_i) + \frac{\partial F}{\partial p_i} (P_i - p_i) \right\} \\ &= dt \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= dt [F, H] \end{aligned} \quad (74)$$

Poisson の括弧 $[F, H]$ は無限小正準変換により F の変化する割合を示している。力学系の運動について正準変数 q, p は t と $t + dt$ との間に母関数 $H(q, p, t)$ で生成される無限小正準変換を受ける。最も単純な例である $F(q, p) = q$ または $F(q, p) = p$ を考えると

$$\begin{aligned}\delta q &= dt[q, H] = dt\dot{q} = dq \\ \delta p &= dt[p, H] = dt\dot{p} = dp\end{aligned}\quad (75)$$

となる。力学系の運動はハミルトニアンを母関数とする正準変換が連続的に行われることに対応している。またハミルトニアンによる変換はシンプレクティック変換である。

6 シンプレクティック行列と安定性

力学系の運動はハミルトニアンを母関数とする連続的な正準変換によって記述されることを述べたが、ビームラインの入口と出口を結ぶ転送行列もまたシンプレクティック行列である。ここでシンプレクティック行列の固有値について調べてみる。シンプレクティック行列を M とし、その固有値を λ とすると

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\quad (76)$$

なので $M - \lambda I$ は逆行列を持たない。すなわち、シンプレクティック行列の性質を使うと

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda I) &= 0 \\ \det(M^T - \lambda I) &= 0 \\ \det(-JM^T J - \lambda I) &= 0 \\ \det(M^{-1} - \lambda I) &= 0 \\ \det(I - \lambda M) &= 0 \\ \det(M - \lambda^{-1} I) &= 0\end{aligned}\quad (77)$$

となり λ^{-1} も行列 M の固有値である。 λ が複素数の場合その複素共役 $\bar{\lambda}$ も M の固有値である。そして $\det M = 1$ なので複素数対、 $(\lambda, \bar{\lambda})$ は複素平面上の単位円周上に並び、他の組は単位円周に対して対称に並ぶ。こうして行列 M の固有値は3種類の組に分類される。

- 複素数対、 $(\lambda, \bar{\lambda})$ 。
- 実数対、 (λ, λ^{-1}) 。
- 複素数4つ、 $(\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1})$ 。

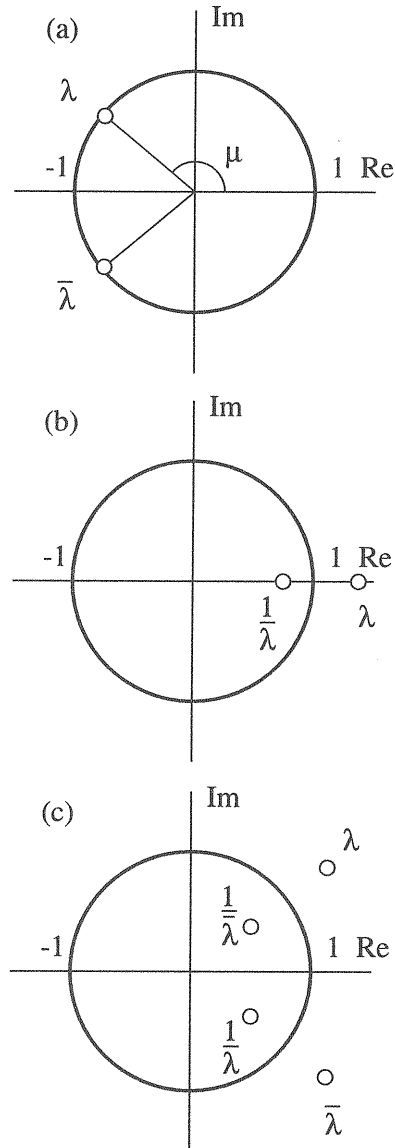


Figure 3: シンプレクティック行列の固有値の分布。(a) 複素数対、(b) 実数対、(c) 複素数4つの組。

以上の組合せを図3に示した。

ビームラインの入口と出口を繋げて閉じた経路を作る。この閉曲線をリングと見なせば転送行列はリング一周の転送行列となる。あるいは、転送行列 M を単位とする無限に続く周期構造を考えてもよい。転送行列 M の2つの固有値を λ_1, λ_2 とし、それぞれの固有値に対する固有ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とする。任意のベクトル \mathbf{x} は適当な係数 a, b を使って固有ベクトルの線形結合

$$\mathbf{x} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2\quad (78)$$

で表せる。具体的には、このベクトルは位相空間のある点を表すものと思ってよい。 n 周回し

た後のリング上のある点におけるベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= M^n \mathbf{x} \\ &= aM^n \mathbf{x}_1 + bM^n \mathbf{x}_2 \\ &= a\lambda_1^n \mathbf{x}_1 + b\lambda_2^n \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (79)$$

となる。これは行列 M による変換を n 回施した
ことと同じである。したがって、 n が無限大の
時に \mathbf{x}_n が発散しないための条件は $|\lambda_1| \leq 1$ か
つ $|\lambda_2| \leq 1$ である。つまり、固有値の絶対値が
1 を越えるものが一つでもあれば安定とは言え
ない。この条件を満たす固有値の組は $(\lambda, \bar{\lambda})$ で
あり、 μ を実数として $\lambda = e^{i\mu}$ 、 $\bar{\lambda} = e^{-i\mu}$ と書
き表せる。転送行列 M のトレースは固有値の和
に等しいので

$$\text{tr} M = \lambda + \bar{\lambda} = 2 \cos \mu \quad (80)$$

である。したがって 2×2 行列の場合、系の運動
が安定であるための条件は

$$|\text{tr} M| \leq 2 \quad (81)$$

であり、これが必要十分条件である。

7 調和振動子

一次元調和振動子のハミルトニアンは、質点の
質量を 1 とすると

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{k}{2} x^2 \quad (82)$$

で与えられる。ここで k は常にある正の値を持
ち質点がばねにつながれているとすれば k はば
ね定数である。ハミルトン方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= p \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -kx \end{aligned} \quad (84)$$

である。上式より、調和振動子の運動方程式は

$$\ddot{x} = -kx \quad (85)$$

とも書ける。この 2 階の微分方程式の解は、一
般的に

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (86)$$

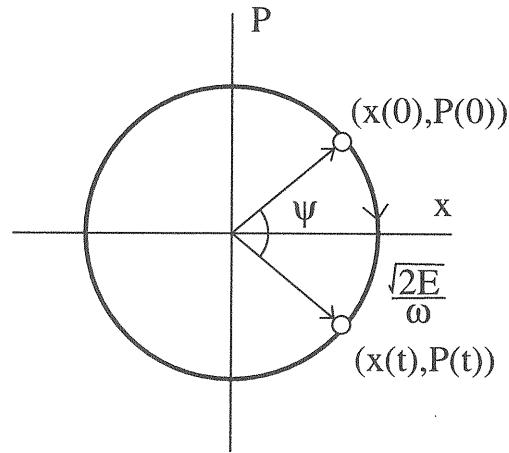


Figure 4: 位相空間における軌道。

と書ける。但し、 $\omega^2 = k$ とおいた。 a, b は初
期条件によって決定される定数で、 $t = 0$ のとき
 $x(0) = a$ 、 $\dot{x}(0) = b\omega$ なので

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t \\ \dot{x}(t) &= -x(0)\omega \sin \omega t + \dot{x}(0) \cos \omega t \end{aligned} \quad (87)$$

となる。これを行列を使って書き表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}_{t=t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t / \omega \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}_{t=0}$$

である。 $(\dot{x} = p)$ を用いた。) または、 p の代わり
に $P = p/\omega$ を用いると

$$\begin{pmatrix} x \\ P \end{pmatrix}_{t=t} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ P \end{pmatrix}_{t=0}$$

とも書ける。ここで $\psi = \omega t$ とした。これは運動
の点 (x, P) が位相空間内で時計回りに回転し円
を描くことと同じである。位相空間における軌
道の様子を図 4 に示した。式 (82) で $H = E$ は
運動の積分であるから

$$x^2 + P^2 = \frac{2E}{\omega^2} \quad (88)$$

である。これとハミルトン方程式より位相空間
での軌道は運動方程式を解かないでも知ること
ができる。エネルギー E の値を変えれば様々な
円が流線として得られる。

一般的に多次元のハミルトニアンの場合、解
析的に解を得ることは困難である。今度はハミ
ルトン方程式 (83)、(84) を数値的に積分するこ

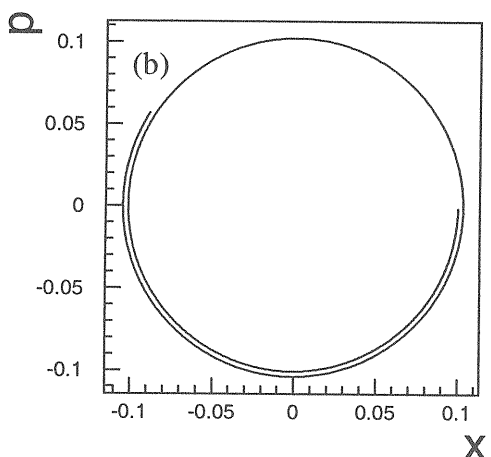
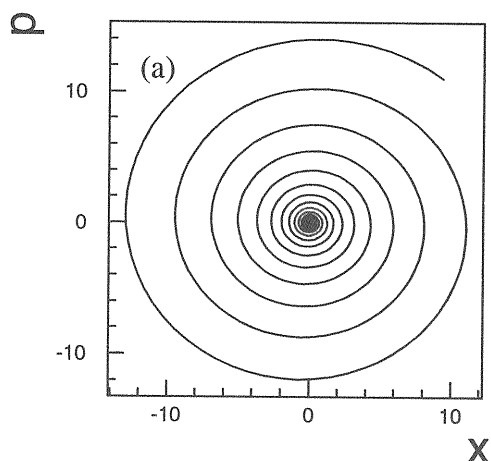


Figure 5: ある一つの数値積分の方法により求めた位相空間における軌道。(a) 時間間隔 0.1 の時。(b) 時間間隔 0.01 の時。

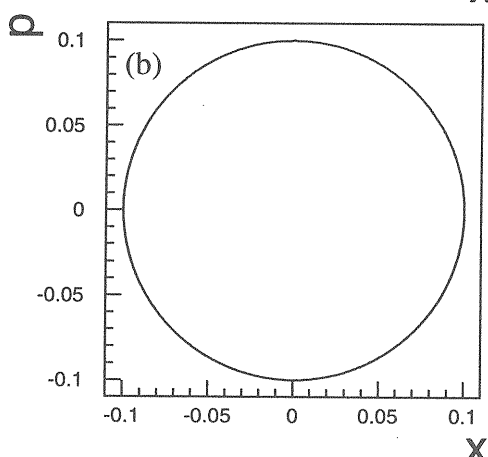
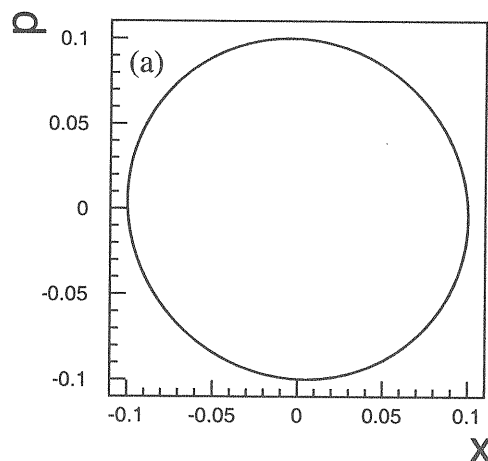


Figure 6: 図5とは別の数値積分の方法により求めた位相空間における軌道。(a) 時間間隔 0.1 の時。(b) 時間間隔 0.01 の時。

とを考える。一つの積分の方法は、微小時間 dt として

$$x_2 = x_1 + p_1 dt \quad (89)$$

$$p_2 = p_1 - kx_1 dt \quad (90)$$

を繰り返し行うことである (方法 1)。この方法を $k = 1$ の時に実行した結果を図 5(a) に示す。ここで初期値は $(0.1, 0)$ 、時間間隔は $dt = 0.1$ 、全時間は 100 である。この積分法によると調和振動子の振幅は一定でなければならないはずなのに振幅が増大している。図 5(b) に示すように時間間隔を 10 分の 1 にしても、増大する割合は減少するが基本的に振幅が増大することには変わらない。これでは明らかに調和振動子を数値的に解いたことにはならない。

別の積分法として

$$x_2 = x_1 + p_1 dt \quad (91)$$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - kx_2 dt \\ &= p_1 - k(x_1 + p_1 dt) dt \end{aligned} \quad (92)$$

を試してみよう (方法 2)。前の方法と違うのは式 (92) で運動量を求めるのに変換された新しい座標を使っているところである。この方法を同じように実行した結果を図 6(a) に示す。時間間隔を 10 分の 1 にすると図 6(b) のようになる。いずれの場合にも振幅の増大は見られない。

では方法 1 と 2 ではどういった違いがあるのだろうか。方法 1 の変換を行列で表してみると

$$M = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ -kdt & 1 \end{pmatrix} \quad (93)$$

である。この行列の性質を調べてみるとトレースは 2 であるが、行列式は

$$\det M = 1 + kdt^2 \neq 1 \quad (94)$$

でシンプレティック行列ではないことがわかる。次に方法 2 の変換を行列で表してみると

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kdt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + p_1 dt \\ p_1 \end{pmatrix}$$

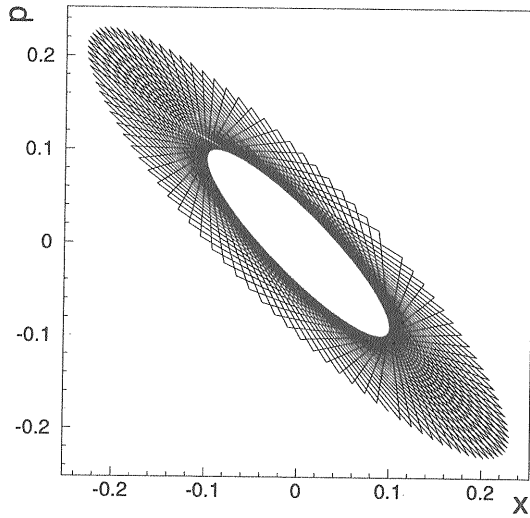


Figure 7: 図6と同じ数値積分の方法により求めた位相空間における軌道。但し、時間間隔 $dt = 1.8$ とした場合。

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kdt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

なので変換行列は

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kdt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (95)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & dt \\ -kdt & 1 - kdt^2 \end{pmatrix} \quad (96)$$

となる。行列 M のトレースは $2 - kdt^2$ であり、行列式は

$$\det M = 1 \quad (97)$$

となりシンプレティック行列である。当然、式(95)に現れる2つの行列もシンプレティック行列である。しかしながら、 $|\text{tr} M| \leq 2$ より $dt < 2/k$ ならば、系の運動は安定であるがあまり大きすぎると調和振動子からずれていくと予想される。 $k = 1$ 、 $dt = 1.8$ の場合の様子を図7に示す。やはり図6とはかなり異なっている。

さて、式(95)を再び $M = M_2 M_1$ と表し、 $l = dt$ 、 $1/f = kdt$ と表現すると

$$M = M_2 M_1$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (99)$$

である。 M_1 は長さ l のドリフト空間に対応し、 M_2 は thin lens 近似における収束磁石の転送行列に対応している。このように調和振動子の運動は収束力が周期的に配置されている lattice と全く同じように解釈できる。

8 磁場中における荷電粒子の運動

いかなる外力の影響を受けていない自由な粒子に対する作用は

$$S = -mc \int_a^b dx \quad (100)$$

という形で与えられる。 c は光速である。この積分は時刻 t_1 に始点 a 、時刻 t_2 に終点 b という二つの世界点の間の粒子の世界線に沿ってとったものである。世界線に沿ってとった時積分は最小になる。相対論では時間も空間と同じように一つの変数であり、自然現象は空間内の位置を指定するための座標系と時刻を指定するための系に固定された時計とを合わせ持った基準系によって記述される。作用は基準系の選び方に依らない、つまりローレンツ変換に対して不変でなければならない。したがって、作用が依存するのはスカラーのはずである。このスカラー量 m は質量と呼ばれ粒子を特徴づける。ある世界点を $x^\mu = (ct, x, y, z)$ と表す⁴。 $(\mu$ は $1 \sim 4$ 番目の成分を示す。) 粒子の速度の大きさを v とすると $vdt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ なので

$$\begin{aligned} dx &= g^{\mu\nu} dx_\nu dx_\mu \\ &= \sqrt{c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)} \\ &= c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \end{aligned} \quad (101)$$

である。但し、

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (102)$$

は計量テンソルと呼ばれる。自由粒子に対する作用は時間についての積分

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (103)$$

⁴ 下付き添字の場合 $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$ 。

で表すこともできる。従って、自由粒子のラグランジアンは

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (104)$$

である。\$c \to \infty\$ の極限では

$$\begin{aligned} L &\simeq -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right) \\ &= -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned} \quad (105)$$

定数は無視できるので \$L = mv^2/2\$ となり古典力学へと移行する。

場を作って粒子の力学的状態に制限を与える装置が加速器である。加速器では粒子を加速し保持するために電場と磁場を用いる。電磁場との相互作用に関する粒子の性質は粒子の電荷 \$e\$ と呼ばれるただ一つのパラメータで規定される。場の性質は 4 元ベクトル \$A^\mu\$ によって特徴づけられ、作用の中に

$$-e \int_a^b A^\mu dx_\mu \quad (106)$$

という形で現れる。4 元ベクトル \$A^\mu\$ は

$$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A}) \quad (107)$$

である。ここで \$\phi\$ は場のスカラーポテンシャル、\$\mathbf{A}\$ は場のベクターポテンシャルと呼ばれ、電場 \$\mathbf{E}\$ と磁場 \$\mathbf{B}\$ との関係式

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (108)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (109)$$

を満たしている。

電磁場の中の粒子に対する作用は自由粒子の作用に場との相互作用を入れて

$$S = \int_a^b (-mcdx - eA^\mu dx_\mu) \quad (110)$$

となる。共変的な方法を用いれば相対論的方法にならなっているが時刻を独立変数とみなせば古典力学と同じように扱うことができる。ただし、根号がでてくるので少々煩わしいかも知れない。根号がでてくるのは距離を座標差の 2 乗和の根号で表現することに起因する。興味のある人は共変的な方法と比較してみるとよい。ここでは、後に独立変数を時刻からデザイン軌道に沿った座標に変換することを想定している。

作用は積分変数を時間 \$t\$ に変え、速度 \$\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt\$、\$\mathbf{x} = (x, y, z)\$ を用いて

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\phi + e\mathbf{A}\mathbf{v} \right) dt$$

と書き表せる。従って、ラグランジアンは

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\phi + e\mathbf{A}\mathbf{v} \quad (111)$$

である。ここで、\$-e\phi + e\mathbf{A}\mathbf{v}\$ という項が粒子と場の相互作用を表わしている。さて、一般運動量を \$\mathbf{P}\$ とすると、

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\mathbf{A} = \mathbf{p} + e\mathbf{A}, \quad (112)$$

\$\mathbf{p}\$ は通常の運動量である。ハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi \end{aligned} \quad (113)$$

となるが、速度ではなく一般運動量によって表されなければならない。そこで \$H - e\phi\$ と \$c(\mathbf{P} - e\mathbf{A})\$ を比較して、式 (112) と式 (113) より

$$(H - e\phi)^2 = m^2c^4 + c^2(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 \quad (114)$$

という関係式を得ることができる。場の無い場合 (\$\phi = 0\$、\$\mathbf{A} = 0\$)、ハミルトニアンは、

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{P}^2} = E \quad (115)$$

となり粒子の全エネルギーを表している。

結局、式 (114) より系のハミルトニアンは、

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2} + e\phi \quad (116)$$

と書ける。

ここで局所的な座標系 \$(x, y, z)\$ からデザイン軌道に沿った座標系 \$(x, y, s)\$ への変換を行う。点変換により一般運動量は、

$$\begin{aligned} P_x &= P_x \\ P_y &= P_y \\ P_s &= P_x \frac{\partial x}{\partial s} + P_y \frac{\partial y}{\partial s} + P_z \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= P_z \frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned} \quad (117)$$

と変換される。 $\delta s = \rho \delta \theta$ と $\delta z = (\rho + x) \delta \theta$ を比較すれば式 (117) は

$$P_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) P_z \quad (118)$$

となる。 ρ は曲率半径である。同様にベクターポテンシャルも A_x 、 A_y は変わらず A_s のみ

$$A_s = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) A_z \quad (119)$$

と変換される。従って、ハミルトニアン $H(x, P_x, y, P_y, s, P_s; t)$ は

$$H = c \left\{ m^2 c^2 + (P_x - eA_x)^2 + (P_y - eA_y)^2 + \left(\frac{P_s - eA_s}{1 + x/\rho} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + e\phi \quad (120)$$

となる。ここで一般座標 s を独立変数にして代わりに時刻 t を一般座標に交換してみる。時刻 t についての共役量 $-H$ は定数となり、 H は全エネルギー E を表す。ハミルトニアンは、 P_s について解くことによって

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -P_s(x, P_x, y, P_y, t, -E; s) \\ &= -eA_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left\{ \left(\frac{E - e\phi}{c} \right)^2 - m^2 c^2 - (P_x - eA_x)^2 - (P_y - eA_y)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (121)$$

となる。電場は無く磁場は静的であり、デザイン軌道に対して平行な成分を持たない場合を考える。この時、

$$\begin{aligned} \phi &= 0 \\ A_x &= A_y = 0 \end{aligned} \quad (122)$$

としても一般性は失われない。従って、 $P_x = p_x$ 、 $P_y = p_y$ なので粒子の全力学運動量を p とすると

$$\bar{H} = -eA_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2} \quad (123)$$

さらに、このハミルトニアンを粒子のデザイン運動量 p_0 で割ったものを新しいハミルトニアン H として定義し直し、デザイン軌道からの小さなずれを軌道の傾きとして次の近似をする。

$$x' = \frac{dx}{ds} \simeq \frac{p_x}{p_0}, \quad y' = \frac{dy}{ds} \simeq \frac{p_y}{p_0} \quad (124)$$

また運動量のデザイン運動量からのずれの割合

$$\delta \equiv \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p - p_0}{p_0} \quad (125)$$

を用いれば

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{\bar{H}}{p_0} \simeq -\frac{e}{p_0} A_s \\ &\quad - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{(1 + \delta)^2 - x'^2 - y'^2} \end{aligned} \quad (126)$$

と書き表せる。

新しい独立変数 s でのハミルトニアン方程式から運動方程式は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= \frac{e}{p_0} \frac{\partial A_s}{\partial x} + \frac{\sqrt{(1 + \delta)^2 - x'^2 - y'^2}}{\rho} \\ \frac{dy'}{ds} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= \frac{e}{p_0} \frac{\partial A_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (127)$$

ここで A_s について考える。磁場は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{1 + x/\rho} \left(\frac{\partial A_s}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial s} \right) \mathbf{e}_x \\ &\quad + \frac{1}{1 + x/\rho} \left(\frac{\partial A_x}{\partial s} - \frac{\partial A_s}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_s \end{aligned} \quad (128)$$

となる (式 (119))。磁場の x 、 y 成分は式 (122) より

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{1 + x/\rho} \frac{\partial A_s}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{1}{1 + x/\rho} \frac{\partial A_s}{\partial x} \end{aligned} \quad (129)$$

である。一方、 B_x と B_y をデザイン軌道の近傍で展開して

$$\begin{aligned} B_x &= \left. \frac{\partial B_x}{\partial y} \right|_{x=y=0} y + \dots \\ B_y &= B_0 + \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=y=0} x + \dots \end{aligned} \quad (130)$$

となる。ここで B_0 は $p_0 = eB_0\rho$ を満たす偏向成分である。こうして式 (127)、(129)、(130) より

$$\begin{aligned} x'' &\simeq -\left(\frac{e}{p_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{1}{\rho^2}\right)x + \frac{\delta}{\rho} \\ y'' &\simeq \frac{e}{p_0}\frac{\partial B_y}{\partial x}y \end{aligned} \quad (131)$$

但し、2次以上の高次項を無視して $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ という条件から $\partial B_x/\partial y = \partial B_y/\partial x$ を用いた。

式 (111) のラグランジアンをラグランジュ方程式に代入することによって運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (132)$$

を得ることができる。右辺は Lorentz の力を表している。ニュートンの運動方程式では加速度を極座標系で表そうとすると、かなり面倒な計算を必要とする。しかし、ここで示したようにハミルトニアンによる方法では運動量を求めればよい。運動量の計算は加速度の計算に比べると、かなり簡単であり実用的な動機となっている。

9 ベータトロロン振動

粒子の線形近似における運動方程式は式 (131) で書けることを示した。デザインからの運動量のずれを無視できる場合、 x 方向、 y 方向それぞれの運動方程式は、 $x = x$ または y として

$$\frac{d^2x}{ds^2} + k(s)x = 0 \quad (133)$$

という形で書ける。但し、 x 方向に対しては

$$k(s) = \left(\frac{e}{p_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{1}{\rho^2}\right) \quad (134)$$

であり、 y 方向については

$$k(s) = -\frac{e}{p_0}\frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (135)$$

である。磁場はビームラインに沿って様々に配置されており、一般に $k(s)$ はビームラインに沿った座標の関数である。特に $k(s)$ が s に依らず一定の場合、式 (133) は調和振動子の方程式と全く同じになる。式 (133) の一般解は

$$x(s) = A\omega(s)\cos\psi(s) + B\omega(s)\sin\psi(s) \quad (136)$$

と書ける。ここで A 、 B は初期条件によって決定される定数である。以後、定数を除いて現れ

るパラメータはほとんど s の関数なので引数 s は省略する。また、例えば x_1 は $x(s_1)$ の意味で用いる。

式 (136) の特徴は振幅が場所 s の関数になっているところである。ところで x の s に対する導関数は

$$\begin{aligned} x' &= A(\omega' \cos\psi - \omega\psi' \sin\psi) \\ &\quad + B(\omega' \sin\psi + \omega\psi' \cos\psi) \end{aligned} \quad (137)$$

である。線形近似においてモード間の結合、例えば xy 結合、進行方向と垂直方向の結合等がない場合、それぞれのモードにおける転送行列は 2×2 行列に分離できる。実際、多くのビームラインではデザイン軌道のまわりで転送行列は 2×2 行列に別れるように設計されているようである。それでは x または y 方向における粒子の運動を考察しよう。 x 、 x' を行列で書くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega \cos\psi & \\ \omega' \cos\psi - \omega\psi' \sin\psi & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega' & \omega\psi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

逆に、 (A, B) は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega' & \omega\psi' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。このことは変換が決まっている場合、位相空間で初期値を与えることによって変換後の位相空間での点が与えられることを意味する。一般に $s = s_1$ から $s = s_2$ への変換、すなわち (x_1, x'_1) から (x_2, x'_2) への変換は (A, B) を消去することによって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ \omega'_2 & \omega_2\psi'_2 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos\psi_2 & \sin\psi_2 \\ -\sin\psi_2 & \cos\psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi_1 & \sin\psi_1 \\ -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \omega'_1 & \omega_1\psi'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_2 & 0 \\ \omega'_2 & \omega_2\psi'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi & \sin\Delta\psi \\ -\sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ \omega'_1 & \omega_1\psi'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = T_2^{-1} R_{21} T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$$

によって表現される。ここで $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ とおいた。位相空間における回転角 $\Delta\psi$ を位相の進み (phase advance) と呼ぶ。位相の進みは $2n\pi$ の不定性があるが s に対して単調増加するように取られるのが通常である。

R_{21} は位相空間における回転を表し T_1, T_2 は実座標から基準座標への変換を表している。 R_{21}, T_1, T_2 はいずれもシンプレクティック行列なので $\text{tr}T_1 = 1, \text{tr}T_2 = 1$ より

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \psi_1' &= 1 \\ \omega_2^2 \psi_2' &= 1 \end{aligned}$$

という条件を得る。よって一般的に

$$\psi' = \frac{1}{\omega^2} \quad (138)$$

である。式 (138) より位相の進み $\Delta\psi$ は普通の単振動とは異なり位相空間における回転は独立変数 s に対して一様に進むわけではない。 ω は s の関数である。

転送行列は

$$\begin{aligned} T_2^{-1} R_{21} T_1 &= \begin{pmatrix} \omega_2 \psi_2' & 0 \\ -\omega_2' & \omega_2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \psi_1' & 0 \\ -\omega_1' & \omega_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$\beta(s) = \omega^2(s) \quad (139)$$

$$\alpha(s) = -\omega(s)\omega'(s) \quad (140)$$

とおくと転送行列は、 $\omega = \sqrt{\beta}, \omega\psi' = 1/\sqrt{\beta}, -\omega' = \alpha/\sqrt{\beta}$ より

$$\begin{aligned} T_2^{-1} R_{21} T_1 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_2} & 0 \\ \alpha_2/\sqrt{\beta_2} & \sqrt{\beta_2} \end{pmatrix}^{-1} \times \\ &\begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & \sin \Delta\psi \\ -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta_1} & 0 \\ \alpha_1/\sqrt{\beta_1} & \sqrt{\beta_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \Delta\psi + \alpha_1 \sin \Delta\psi) \\ -\frac{1+\alpha_2\alpha_1}{\sqrt{\beta_2\beta_1}} \sin \Delta\psi + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\sqrt{\beta_2\beta_1}} \cos \Delta\psi \\ \sqrt{\beta_2\beta_1} \sin \Delta\psi \\ \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \Delta\psi - \alpha_2 \sin \Delta\psi) \end{pmatrix} \\ &\equiv M_{21} \end{aligned} \quad (141)$$

である。 β と α は Twiss パラメータと呼ばれる。また式 (138) は Twiss パラメータを用いて

$$\psi'(s) = \frac{1}{\beta(s)} \quad (142)$$

と書き表せる。やはり β が場所の関数であるために β が小さいところでは位相の進みは大きく逆に β が大きいところでは位相の進みは小さい。そして α は β の s に対する変化分を表し

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2} \frac{d\beta(s)}{ds} \quad (143)$$

である。また α は調和振動子からのずれを表している。

M_{21} は $s = s_1$ から $s = s_2$ への転送行列であるが、周期の長さを C として周期条件

$$\beta(s+C) = \beta(s)$$

$$\alpha(s+C) = \alpha(s)$$

$$\psi(s+C) = \psi(s)$$

がある場合、転送行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \quad (144)$$

となる。ここで

$$\gamma \equiv \frac{1+\alpha^2}{\beta} \quad (145)$$

と定義した。 μ は一周分位の位相の進みであり

$$\begin{aligned} \mu &= \psi(s+C) - \psi(s) \\ &= \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta(s)} \end{aligned} \quad (146)$$

である。また μ は

$$\mu = 2\pi\nu \quad (147)$$

と書き表され ν はベータトロン振動数またはチューン (betatron tune) と呼ばれる。チューンは加速器において最も重要なパラメータの一つであり、

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\mu}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta(s)} \end{aligned} \quad (148)$$

である。当然、それぞれのモードにおいてチューンは存在し、 x 方向については ν_x 、 y 方向については ν_y と表される。

Twiss パラメータを使って式 (136) と (137) を書いてみると

$$\begin{aligned} x(s) &= \sqrt{W\beta(s)} \cos(\psi(s) + \psi_0) \\ x'(s) &= -\sqrt{\frac{W}{\beta(s)}} \{ \alpha(s) \cos(\psi(s) + \psi_0) \\ &\quad + \sin(\psi(s) + \psi_0) \} \\ &= -\sqrt{W\gamma(s)} \sin(\psi(s) + \psi_0) \end{aligned} \quad (149)$$

となる。ここで W と ψ_0 は初期条件によって決まる定数である。このようなビームの進行方向と垂直な平面での運動はベータトロン振動と呼ばれる。

10 Courant-Snyder 不変量

実座標から基準座標への変換

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\beta} & 0 \\ \alpha/\sqrt{\beta} & \sqrt{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (150)$$

を施すと (X, P) のビームラインに沿った変換は位相空間における回転であり、その軌跡は円を描く。ここで $p = x'$ とした。したがって、基準座標の運動は新しい座標 ψ と運動量 J を使って

$$X = a(J) \cos(\psi + \psi_0) \quad (151)$$

$$P = -a(J) \sin(\psi + \psi_0) \quad (152)$$

の形に書ける。これらの式を一つにまとめると

$$P = -X \tan(\psi + \psi_0) \quad (153)$$

となる。これを X で積分して基準座標における (X, P) から新しい正準変数 (ψ, J) への正準変換 (シンプレクティック変換) を表す母関数

$$F(\psi, J) = -\frac{X^2}{2} \tan(\psi + \psi_0) \quad (154)$$

を使うことにする。この最も簡単な形をした母関数による変換式は

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial F}{\partial X} \\ &= -X \tan(\psi + \psi_0) \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} J &= -\frac{\partial F}{\partial \psi} \\ &= \frac{X^2}{2 \cos^2(\psi + \psi_0)} \end{aligned} \quad (156)$$

$$= \frac{1}{2}(X^2 + P^2) \quad (157)$$

となる。式 (157) より J は明らかに (X, P) が位相空間に描く円の面積を 2π で割ったものであり s に依らず一定である。また J は

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint P dX \quad (158)$$

で定義され、作用変数 (action variable) と呼ばれる。一方、 J に正準共役な変数 ψ は角変数 (angle variable) と呼ばれる。ところで式 (157) で振幅の二乗和

$$2J = X^2 + P^2 \quad (159)$$

$$= \gamma x^2 + 2\alpha xp + \beta p^2 \quad (160)$$

は正準不変量であり、 $2J$ を Courant-Snyder 不変量と呼ぶ。Courant-Snyder 不変量を用いて (X, P) を書き表すと式 (156) と式 (153) より

$$X = \sqrt{2J} \cos(\psi + \psi_0) \quad (161)$$

$$P = -\sqrt{2J} \sin(\psi + \psi_0) \quad (162)$$

となる。また $W = 2J$ として実座標で書き表すとベータトロン振動の式 (149) と一致する。これは (ψ, J) から (X, P) または (x, p) へのシンプレクティック変換と見なすことができる。

正準変換により新しいハミルトニアン K は母関数 F が s を陽に含んでいないので

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial s} \quad (163)$$

$$= H \quad (164)$$

である。またハミルトン方程式は

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial K}{\partial J} \quad (165)$$

$$\frac{dJ}{ds} = -\frac{\partial K}{\partial \psi} \quad (166)$$

である。 J はやはり s に依らず一定であるから、式 (166) より

$$\frac{\partial K}{\partial \psi} = 0 \quad (167)$$

である。 $\psi' = 1/\beta$ を用いて式 (165) より新しいハミルトニアンは重要でない定数項を除いて

$$K = J \frac{d\psi}{ds} = \frac{J}{\beta(s)} \quad (168)$$

と書ける。

次に、一定の J を持ち、様々な初期位相 ψ_0 を持つ粒子の集まりを考える。粒子の集まりは基

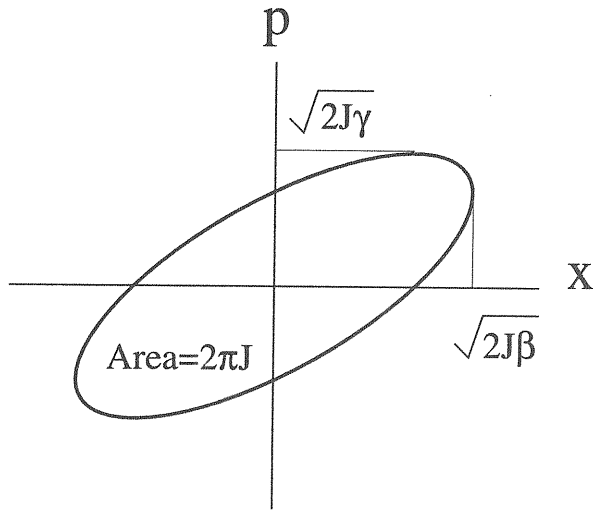


Figure 8: 実座標の位相空間における楕円。

準座標の位相空間では半径 $\sqrt{2J}$ の円周上に分布し、実座標については図8のような s によって形が決まる楕円の周上に分布する。基準座標の位相空間における円の面積と実座標の位相空間における楕円の面積は等しく $2\pi J$ で s に依らず一定である。さて、一般的に分布しているビームに対してエミッタンス (emittance) を定義する。まず次元の場合、 x^2 、 xp 、 p^2 の全粒子の平均値を用いて次のような行列を考える。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xp \rangle \\ \langle xp \rangle & \langle p^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (169)$$

Σ は Envelope と呼ばれる。エミッタンス ϵ を

$$\epsilon \equiv \frac{\sqrt{\det \Sigma}}{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle - \langle xp \rangle^2}} \quad (170)$$

と定義する。 $s = s_1$ における Envelope を Σ_1 、 $s = s_2$ における Envelope を Σ_2 とすると s_1 から s_2 への転送行列 M によって

$$\Sigma_2 = M \Sigma_1 M^T \quad (171)$$

のように変換される。それでは $\det \Sigma_2$ に J を掛けたものは

$$\begin{aligned} \det \Sigma_2 J &= \Sigma_2^T J \Sigma_2 \\ &= (M \Sigma_1 M^T)^T J M \Sigma_1 M^T \\ &= M \Sigma_1^T M^T J M \Sigma_1 M^T \\ &= M \Sigma_1^T J \Sigma_1 M^T \\ &= \det \Sigma_1 M J M^T \\ &= \det \Sigma_1 J \end{aligned} \quad (172)$$

となり、シンプレクティック変換の不変量であることがわかる。ここで転送行列 M はシンプレクティック条件を満たすこと、一般に 2×2 行列 X は $\det X J = X^T J X$ となることを用いた。 2×2 行列がシンプレクティックであることと $\det X = 1$ は同値である。ビームラインの入口で Envelope を

$$\Sigma_0 = \epsilon \begin{pmatrix} \beta_0 & -\alpha_0 \\ -\alpha_0 & \gamma_0 \end{pmatrix} \quad (173)$$

つまり

$$\begin{aligned} \langle x_0^2 \rangle &= \epsilon \beta_0 \\ \langle p_0^2 \rangle &= \epsilon \gamma_0 \\ \langle x_0 p_0 \rangle &= -\epsilon \alpha_0 \end{aligned} \quad (174)$$

と決めると

$$\beta_0 \gamma_0 - \alpha_0^2 = 1 \quad (175)$$

なのでエミッタンスの定義式 (170) を満たす。基準座標においても Envelope は

$$\bar{\Sigma}_0 = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (176)$$

であり

$$\begin{aligned} \langle X_0^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle P_0^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle X_0 P_0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (177)$$

という関係が得られる。 s に対する変換は位相空間内の回転であるから任意の場所 s で

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle P^2 \rangle &= \epsilon \\ \langle X P \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (178)$$

が成り立つ。したがって実座標においても

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \epsilon \beta(s) \\ \langle p^2 \rangle &= \epsilon \gamma(s) \\ \langle xp \rangle &= -\epsilon \alpha(s) \end{aligned} \quad (179)$$

と表される。これはビームラインの入口で Twiss パラメータを式 (174) のように選んだ結果である。また、実座標と基準座標は式 (150) のように Twiss パラメータで結ばれているので基準座標を式 (174) のように選んだ結果とも言える。こ

のような基準座標はビームと適合 (match) していると呼ばれる。

粒子の分布がガウス分布であると見なせる場合、分布関数は

$$\Psi(X, P) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \exp\left(-\frac{X^2 + P^2}{2\epsilon}\right) \quad (180)$$

と書ける。 X^2 、 XP 、 P^2 の期待値は分布関数を掛けて積分することによって求まる。従って、

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \Psi(X, P) dXdP \\ &= \epsilon \\ \langle P^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P^2 \Psi(X, P) dXdP \\ &= \epsilon \\ \langle XP \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} XP \Psi(X, P) dXdP \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。作用変数 J の期待値は

$$\begin{aligned} \langle J \rangle &= \frac{1}{2} (\langle X^2 \rangle + \langle P^2 \rangle) \\ &= \epsilon \end{aligned} \quad (181)$$

である。これより作用変数 J の期待値はエミッタンスを表していることがわかる。また、実座標の位相空間における x^2 、 p^2 、 xp の期待値は上式より式 (179) を得る。やはり、ここでも作用変数 J の期待値はエミッタンスを表している。さて式 (179) で $\langle X^2 \rangle$ は平均値 0 からのずれの 2 乗平均なので分散である。標準偏差は

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\epsilon\beta(s)} \quad (182)$$

である。従って、ビームサイズを小さくしたければエミッタンス、 $\beta(s)$ を小さくすれば良い。ビームサイズでエミッタンスを言う場合、電子・陽電子ビームの貯蔵リングと線形加速器、陽子ビームで異なる。電子・陽電子貯蔵リングの場合、ガウス分布の標準偏差をビームサイズと呼びこれに相当するものをエミッタンスと考え、線形加速器や陽子ビームの場合、90%の粒子が占める面積をもってエミッタンスと呼んでいるようである。

11 強収束の原理

電流及び変位電流がない場合、マクスウェル方程式の一つは

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (183)$$

である。従って、 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_s)$ とすると

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial B_s}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial s}\right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial x}\right) \mathbf{e}_y \\ &+ \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \mathbf{e}_s = 0 \end{aligned} \quad (184)$$

より

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (185)$$

という関係が得られる。さて、粒子の進行方向に磁場が無い場合、磁場を展開した形で書くと

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y \\ &= \left(B_x(0, 0) + \frac{\partial B_x}{\partial y} y + \frac{\partial B_x}{\partial x} x + \dots\right) \mathbf{e}_x \\ &+ \left(B_y(0, 0) + \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y + \dots\right) \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

である。図 9 のような四極磁石による水平方向の粒子の軌道の変化を考える。曲げ角を θ とすると x' の変化量は $-\theta$ であり $l = \rho\theta$ である。 l は粒子が磁場を感じながら進む距離、つまり弧の長さであり、 ρ はその曲率半径である。

$$\begin{aligned} \Delta x' &= -\theta \\ &= -\frac{l}{\rho} \\ &= -\frac{eB_y l}{p} \end{aligned}$$

ここで

$$p = eB_y \rho \quad (186)$$

を用いた。また、 B_y 成分において偏向磁石が無く x について一次の項を取ると

$$\Delta x' = -\frac{e}{p} \frac{\partial B_y}{\partial x} l x \quad (187)$$

である。ここで四極磁石が進行方向に対して十分短ければ $ds = l$ として

$$x'' = -\frac{e}{p} \frac{\partial B_y}{\partial x} x \quad (188)$$

を得る。これはベータトロン振動の運動方程式と全く同じものである。さて、式 (187) は $B' = \partial B_y / \partial x$ と $B_y \rho$ を使って書くと

$$\begin{aligned} \Delta x' &= -\frac{B' l}{B_y \rho} x \\ &= -\frac{x}{f} \end{aligned} \quad (189)$$

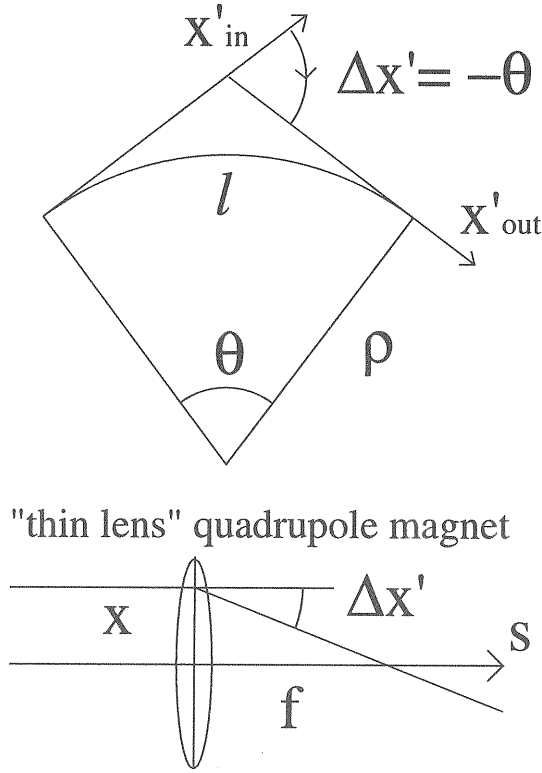


Figure 9: thin lens 近似における四極磁石の焦点距離と曲げ角の関係。

である。 $B_y \rho$ は magnet rigidity と呼ばれている。ここで

$$f = \frac{B_y \rho}{B'l} \quad (190)$$

とした。 f は収束磁石の焦点距離 (focal length) と呼ばれる。

以上より四極磁石に入ってくる粒子を $(x, x')_{in}$ とすれば出て行くときの位相点 $(x, x')_{out}$ は l が非常に小さいという近似を使って

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{out} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{in} \quad (191)$$

と書ける。このような転送行列による表現を四極磁石の thin lens 近似と呼ぶ。この場合粒子を集める、言わば収束させる方向に曲げるので、こうした四極磁石を収束磁石 (QF タイプ) と呼ぶ。逆に発散させる方向に曲げるタイプを発散磁石 (QD タイプ) と呼び転送行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (192)$$

の形にかける。

一方、ドリフト空間の長さを L とすれば転送行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (193)$$

である。ここでドリフト空間をはさんで収束磁石と発散磁石を並べてユニットを作ってみる。このユニットは FODO ラテイスと呼ばれる。FODO ラテイスの転送行列は

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f} - \frac{L^2}{f^2} & 2L + \frac{L^2}{f} \\ -\frac{L}{f^2} & 1 + \frac{L}{f} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (194)$$

である。FODO ラテイスの転送行列の 2 行 1 列は $-L/f^2$ であることから (負符号であることが重要)、これは収束能力を持っていることがわかる。特にドリフト空間の長さが焦点距離に比べて十分小さい場合は収束磁石の転送行列に近づく。四極磁石は x 方向と y 方向について、どちらか一方に収束力を持っているとすればもう片方の方向は発散能力を持ってしまう。ところが FODO ラテイスの収束作用からわかるように収束磁石と発散磁石を交互に並べることで強い収束作用が x 方向と y 方向共に得られる。この原理のことを強収束の原理 (strong focusing) と呼ぶ。

ちなみに FODO ラテイスの繰り返しが続く場合、ドリフト空間の長さがある程度長くなるとビームは収束されず発散して不安定になる。FODO ラテイスが安定であるための条件はトレースの絶対値が 2 以下でなければならないので

$$f \leq \frac{L}{2} \quad (195)$$

でなければならない。

12 XY カップリング

xy 結合を引き起こす要因としてスキュー磁石、ソレノイドなどがある。ここではスキュー磁石による xy 結合を考えることにする。ハミルトニアンは式 (126) より運動量のデザインからのずれが $\delta \rightarrow 0$ で曲率半径が $\rho \rightarrow \infty$ であると近似できる時

$$H = -\frac{e}{p_0} A_s$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \sqrt{(1 + \delta)^2 - x'^2 - y'^2} \\
& \simeq -\frac{e}{p_0} A_s + \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} \quad (196)
\end{aligned}$$

と書ける。もうすでに $A_x = 0$ 、 $A_y = 0$ とした場合なのでソレノイド磁場に対応することはできない。しかしながら粒子の進行方向と垂直な平面における磁場には A_s でほとんど対応できる。但し、近似の精度には十分注意しなければならないことを断っておく。ハミルトン方程式は

$$\begin{aligned}
x'' &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\
&= \frac{e}{p_0} \frac{\partial A_s}{\partial x} \quad (197)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'' &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\
&= \frac{e}{p_0} \frac{\partial A_s}{\partial y} \quad (198)
\end{aligned}$$

なので運動方程式を求めることは A_s の微分を求めることに帰結する。式 (129) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_s}{\partial x} &= -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) B_y \\
&\simeq -\left(B_{y0} + \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y + \dots\right) \\
\frac{\partial A_s}{\partial y} &= -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) B_x \\
&\simeq B_{x0} + \frac{\partial B_x}{\partial x} x + \frac{\partial B_x}{\partial y} y + \dots
\end{aligned}$$

従って、スキュー磁石だけ考えた場合、運動方程式は

$$x'' = -\frac{e}{p_0} \frac{\partial B_y}{\partial y} y \quad (199)$$

$$y'' = \frac{e}{p_0} \frac{\partial B_x}{\partial x} x \quad (200)$$

ここで $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} = k_s \quad (201)$$

である。従って、運動方程式は

$$x'' = -k_s y \quad (202)$$

$$y'' = -k_s x \quad (203)$$

となり、これらを $\Delta x' = x''$ 、 $\Delta y' = y''$ のように x' 、 y' の変化量と見なせばスキュー磁石によ

る転送行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (204)$$

と書ける。

スキュー磁石やソレノイドが存在する場合 x 方向と y 方向を独立に取り扱えない。4×4 行列の場合 xy 結合モードから非 xy 結合モードへの変換

$$\mathbf{u} = C\mathbf{x} \quad (205)$$

を考える⁵。 $\mathbf{x} = (x, p_x, y, p_y)$ において (x, y) を実座標と呼び、 $\mathbf{u} = (u, p_u, v, p_v)$ において (u, v) をノーマル座標と呼ぶ。ここで C は 4×4 の行列で

$$C = \begin{pmatrix} \mu I & JR^T J \\ R & \mu I \end{pmatrix} \quad (206)$$

と書ける。 I 、 J 、 R は 2×2 の行列で

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \quad (207)$$

である。また C はシンプレクティック行列なので $\mu^2 + \det R = 1$ である。非 xy 結合モードにおける $s = s_1$ から $s = s_2$ への転送行列を

$$M_d = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (208)$$

とすると

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= C_2^{-1} \mathbf{u}_2 \\
&= C_2^{-1} M_d \mathbf{u}_1 \\
&= C_2^{-1} M_d C_1 \mathbf{x}_1 \quad (209)
\end{aligned}$$

となるので xy 結合モードにおける $s = s_1$ から $s = s_2$ への転送行列を M_c とすると

$$M_c = C_2^{-1} M_d C_1 \quad (210)$$

と書ける。リング一周の転送行列も $s_1 = s_2$ とすれば同様に得られる。 xy 結合モードから非 xy 結合への変換 C はリング上の各点で決定される。ノーマル座標で定義された Twiss パラメータは

$$\beta' = -2\alpha \quad (211)$$

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} \quad (212)$$

⁵ ここでは SAD による表現を用いる。

を満たす。またノーマル座標におけるベータatron振動の運動方程式の解は

$$u(s) = \sqrt{2J_u \beta_u(s)} \cos(\psi_u(s) + \psi_{u0})$$

$$u'(s) = -\sqrt{\frac{2J_v}{\beta_v(s)}} \{ \alpha_v(s) \cos(\psi_v(s) + \psi_{v0}) + \sin(\psi_v(s) + \psi_{v0}) \}$$

と書ける。 v 方向についても同様である。一般的に xy 結合モードの場合 Twiss パラメータをどう定義するかが問題になるがノーマル座標で Twiss パラメータを定義しておけばノーマル座標と実座標との変換行列 C によって適宜変換を行えば取り扱いが便利である。

13 共鳴

13.1 整数共鳴

今までビームの中心軌道のまわりにおける微小なベータatron振動を取り扱ってきたが、ここではビームの中心軌道を考える。加速器において磁場の誤差が無い場合はビームの中心軌道はデザイン軌道と一致するが、 x または y 座標に依らない一定な磁場の誤差が存在する場合、もしくは意識的に加えた場合ビームの中心軌道はデザイン軌道からずれる。強制力が加わった調和振動子の運動において、つり合いの位置がずれるのと全く同じである。少し奇妙な言葉であるがデザイン軌道からずれた閉軌道は歪んだ閉軌道 (closed orbit distortion) と呼ばれる。従ってデザイン軌道を基準にした場合、粒子の軌道は

$$x = x_{COD} + x_\beta \quad (213)$$

と書ける。 x_{COD} は歪んだ閉軌道を表し、 x_β は x_{COD} を中心軌道としたベータatron振動の変位を表す。ここでは x_β を x_{COD} に対して微小で無視できるものとする。 x または y 座標に依らない磁場として偏向磁石またはステアリング磁石によるものがある。線形である安定なリングのある場所 $s = s_0$ に蹴り角 θ の 2 極蹴り (dipole kick) を入れてみる。この 2 極蹴りはリング一周の転送行列を変化させない。リング一周の転送行列を M とすると閉軌道が定常的に存在するためには

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \quad (214)$$

である。リング一周の転送行列が式 (144) で与えられているとする。 (x_0, x'_0) について解くと

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} = (I - M)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \frac{\theta}{2 \sin \frac{\mu}{2}} \begin{pmatrix} \beta_0 \cos \frac{\mu}{2} \\ \sin \frac{\mu}{2} - \alpha_0 \cos \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (215)$$

を得る。この式と 2 点間の転送行列から任意の位置での歪んだ閉軌道を次のように表現できる。

$$x(s) = \frac{\theta \sqrt{\beta(s)\beta(s_0)}}{2 \sin \mu/2} \cos \left(\frac{\mu}{2} - |\psi(s) - \psi(s_0)| \right)$$

この式はシングル・キックの式と呼ばれ加速器の特性を調べるのに良く利用される。さて、この式からチューンが整数の時軌道が発散することがわかる。チューンが整数の時に起こる不安定性を整数共鳴 (integer resonance) と呼ぶ。またチューンが整数時にビームが一周まわってくる毎に 2 極蹴りの場所で軌道のずれが増幅される。つまりが 2 極蹴りの影響が伝搬する位相の進みはベータatron振動の位相の進みと同じであることから、これは調和振動子において同じ振動数をもつ外力が加えられた時におこる共鳴と同じものである。

13.2 半整数共鳴

一次元の運動について取り扱う。線形である安定なリングのある場所に摂動が加わった時の安定性を考える。今リング一周の転送行列が式 (144) で与えられたとする。これに四極蹴り (quadrupole kick) と呼ばれる

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \quad (216)$$

の形の摂動を加えると

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu - k(\cos \mu + \alpha \sin \mu) & \cos \mu - \alpha \sin \mu - k\beta \sin \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \bar{\mu} + \bar{\alpha} \sin \bar{\mu} & \bar{\beta} \sin \bar{\mu} \\ -\bar{\gamma} \sin \bar{\mu} & \cos \bar{\mu} - \bar{\alpha} \sin \bar{\mu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで Twiss パラメータの上付きバーは摂動を加えたあとの値という意味である。摂動を加えたあとのチューンは

$$\cos \bar{\mu} = \cos \mu - \frac{1}{2}k\beta \sin \mu \quad (217)$$

と書ける。このチューンの変化をチューン・シフトと呼ぶ。運動が安定であるための条件は 2×2 行列の場合、 $|\text{tr} \bar{M}| \leq 2$ である。従って、 k を正の値として

$$\tan \Delta \equiv \frac{k\beta}{2} \quad (218)$$

とおくと n を整数として、チューンが

$$n\pi - 2\Delta \leq \mu \leq n\pi \quad (219)$$

の範囲、または $\mu = 2\pi\nu$ より

$$\frac{n}{2} - \frac{\Delta}{\pi} \leq \nu \leq \frac{n}{2} \quad (220)$$

の範囲にある場合は不安定になる。従ってチューンが半整数毎に Δ/π の幅の不安定領域がベータatron振動に現れる。 k の符号が正ならば下側に現れ、負ならば上側に現れる。この領域を禁止帯 (stop band) と呼ぶ。このような不安定性を半整数共鳴 (half integer resonance) と呼んでいる。四極蹴りによる影響の伝搬はベータatron振動の位相の進みと比べて2倍速く進む。つまり、調和振動子においてはばねの力に調和振動子の振動数の2倍の振動数で変化する項が付け加わった時に起きる共鳴と同じである。ここで加えた四極蹴りを四極磁石の磁場勾配の誤差として加速器のデザインからのずれとみなすことができる。その場合、禁止帯は加速器の理解度を示す指標と考えることができる。そして実際の加速器におけるデザインからの誤差を理解し、補正を施すことによって禁止帯の領域を小さくする努力が通常行われる。

式 (217) のチューン・シフトを $\Delta \cos \mu = \cos \bar{\mu} - \cos \mu$ として $\cos \mu$ の微分を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= -\frac{\Delta \cos \mu}{\sin \mu} \\ &= \frac{1}{2}k\beta \\ \Delta\nu &= \frac{1}{4\pi}k\beta \end{aligned} \quad (221)$$

となる。上の場合はリングの一カ所に摂動が加わった場合であるが、リング全体に渡って四極

蹴りが存在する場合は転送行列の固有値の変化であるからリングのどこでも共通なので一周に渡って積分すればよい。従って、チューン・シフトは

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \oint k(s)\beta(s)ds \quad (222)$$

となる。

13.3 XY カップリングによる共鳴

モード間に結合、例えば xy カップリングがある場合、転送行列を 2×2 行列から 4×4 行列へ拡張する。モード間に結合が無い時のリング一周の 4×4 の転送行列を

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (223)$$

とする。 A, B は x 方向、 y 方向に対する 2×2 の転送行列で実際の要素は式 (144) の形でかけるものとする。ここでモード間結合の要因として一つの薄いスキュー磁石による 4×4 の転送行列

$$M_{skew} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (224)$$

を考える。リング一周の転送行列にスキュー磁石による摂動を加えると

$$\begin{aligned} \bar{M} &= M_{skew}M \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & -ek & -fk \\ 0 & 0 & e & f \\ -ak & -bk & g & h \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (225)$$

となる。この行列の固有値を λ とすると

$$\det(\bar{M} - \lambda I) = 0 \quad (226)$$

である。

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 & 0 \\ c & d-\lambda & -ek & -fk \\ 0 & 0 & e-\lambda & f \\ -ak & -bk & g & h-\lambda \end{vmatrix} \\ = (\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1)(\lambda^2 - (e+h)\lambda + 1) \\ - \lambda^2 b f k^2 \quad (227)$$

なので

$$\left(\lambda + \frac{1}{\lambda} - \text{tr}A\right) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} - \text{tr}B\right) - b f k^2 = 0$$

と書ける。従って、これを $\lambda + 1/\lambda$ について解くと

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = \frac{\text{tr}A + \text{tr}B}{2} \pm \frac{\sqrt{(\text{tr}A - \text{tr}B)^2 + 4b f k^2}}{2}$$

となる。安定であるためには $(\lambda, \bar{\lambda}) = (e^{i\mu}, e^{-i\mu})$ という固有値の組合せであるはずだから、上式を Twiss パラメータで書くと

$$2 \cos \mu = \cos \mu_x + \cos \mu_y \pm \sqrt{D}$$

$$D = (\cos \mu_x - \cos \mu_y)^2 + k^2 \beta_x \beta_y \sin \mu_x \sin \mu_y$$

となる。ところが $\cos \mu_x$ と $\cos \mu_y$ の値が近く $\sin \mu_x$ と $\sin \mu_y$ の符号が異符号ならば判別式 D は負になる可能性がある。結局のところ

$$\mu_x + \mu_y = 2n\pi \quad (228)$$

言い換えれば

$$\nu_x + \nu_y = n \quad (229)$$

の場合には、固有値が複素数 4 つの不安定性が現れる。この不安定性のことを和共鳴 (sum resonance) と呼ぶ。それでは

$$\nu_x - \nu_y = n \quad (230)$$

の場合はどうであろうか。この場合 D は必ず正であり不安定になることはない。しかしながら、この条件の場合、水平方向と垂直方向のエネルギーのやり取りのために小さかった垂直方向のエミッタンスが増大することがある。この状態は差共鳴 (difference resonance) と呼ばれ、それ程危険な共鳴ではない。

さて、和共鳴に近い条件の場合を考える。すなわち

$$\begin{aligned} \mu_x + \mu_y &= 2n\pi + \Delta, \\ \mu_x &= \mu + \frac{\Delta}{2} \\ \mu_y &= 2n\pi - \mu + \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \quad (231)$$

の場合、微小量 Δ によって和共鳴からのずれが表されているとする。判別式 D が正である時

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \cos\left(\mu + \frac{\Delta}{2}\right) - \cos\left(-\mu + \frac{\Delta}{2}\right) \right\}^2 \\ &\quad + k^2 \beta_x \beta_y \sin\left(\mu + \frac{\Delta}{2}\right) \sin\left(-\mu + \frac{\Delta}{2}\right) \\ &\simeq 4 \sin^2 \mu \sin^2 \frac{\Delta}{2} - k^2 \beta_x \beta_y \sin^2 \mu \\ &> 0 \end{aligned} \quad (232)$$

である。従って、共鳴の幅

$$|\Delta| > |k| \sqrt{\beta_x \beta_y} \quad (233)$$

もしくは、チューンで表すと

$$|\Delta\nu| > \frac{|k|}{2\pi} \sqrt{\beta_x \beta_y} \quad (234)$$

が得られる。これはスキュー磁石が加えられた時に x 方向と y 方向のチューンがどれだけ近づけられるかを表す指標となっている。

References

- [1] J.S. Bell, CERN Accelerator School Advanced Accelerator Physics, CERN 87-03 21, April 1987.
- [2] D.A Edwards and M.J. Syphers, An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators, JOHN WILEY & SONS, INC.
- [3] Mario Conte and William W MacKay, An Introduction to the Physics of Particle Accelerators, World Scientific.
- [4] Ronald D. Ruth, SLAC-PUB-4103, October 1986.
- [5] M. Martini, CERN/PS 96-11(PA), Lecture given at the Joint Universities Accelerator School, Archamps, March 1996.
- [6] V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics.
- [7] 一般力学、山内恭彦、岩波書店。
- [8] 古典力学(下)、ゴールドシュタイン、吉岡書店。
- [9] 力学、ランダウ=リフシツ、東京図書株式会社。

- [10] 場の古典論、ランダウ＝リフシッツ、東京
図書株式会社。
- [11] ビーム力学入門 (単粒子力学)、生出勝宣、
JLC-FFIR92 研究会講義録・研究報告集、
田内利明、山本昇編集、KEK Proceedings
93-6 1993.
- [12] 単粒子力学上級編、平田光司、
KEK Preprint 98-66, June 1998.
- [13] OHO '84 加速器の原理、神谷幸秀。
- [14] OHO '91 ビーム貯蔵リングの基礎、小磯
晴代。
- [15] OHO '91 低エミッタンスリングのラティス、
大見和史。
- [16] OHO '94 電子貯蔵リングにおけるビームダ
イナミックスの基礎、船越義裕。
- [17] OHO '99 SAD とは、鎌田進。